UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

NÚBIA QUENUPE CAMPOS

O *LESSON STUDY* POTENCIALIZANDO O ENSINO-APRENDIZAGEM DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO

VITÓRIA-ES

2018

NÚBIA QUENUPE CAMPOS

O *LESSON STUDY* POTENCIALIZANDO O ENSINO-APRENDIZAGEM DA OPERAÇÃO DE DIVISÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel

VITÓRIA - ES

2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)

(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

****INSERIR FICHA CATALOGRÁFICA****

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

O *Lesson Study* Potencializando o Ensino-Aprendizagem da Operação de Divisão

Núbia Quenupe Campos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em ____ de _________ de 2018

____

Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel
Universidade Federal do Espírito Santo

____

Profa. Dra. Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Universidade Federal do Espírito Santo

____

Profa. Dra. Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Instituto Federal do Espírito Santo

Aos meus pais, Angela e Francisco, que sempre me mostraram o valor da educação.

Aos meus irmãos, Caroline e Leandro, com os quais sempre posso contar.

Ao Patrique, por toda parceria e encorajamento.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Angela e Francisco, por todo amor dedicado e por me proporcionarem toda a estrutura necessária para que eu sempre buscasse uma educação de qualidade. Amo vocês.

Aos meus irmãos, Caroline e Francisco, por estarem dispostos a me apoiar a todo momento que eu precisar.

Ao meu esposo Patrique, por suas contribuições como historiador a este trabalho e principalmente por ter estado ao meu lado em todos os momentos, independente das dificuldades, e me dado suporte para chegar até aqui.

Aos meus amigos Gabrielly, Ariane, Dayane, Loriane, Radigya, Nathalia e Ramon, pela amizade, companheirismo e incentivo de todos esses anos.

À Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel por ter aceitado me orientar e compartilhar comigo todo seu imenso conhecimento e por ter sido muito mais que uma orientadora, me dando todo suporte, incentivo e amizade ao longo desse processo. Eu não poderia ter feito escolha melhor.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela oportunidade de aperfeiçoamento.

Aos professores do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da UFES, em especial aos que compartilharam seus conhecimentos atuando no PROFMAT.

A todos os colegas que ingressaram comigo no PROFMAT em 2015, em especial à colega Camila, pelos momentos de estudos e compartilhamento dos conhecimentos. Vocês tornaram toda a jornada mais agradável.

À CAPES pela bolsa de mestrado fornecida.

Às professoras Maria Alice, Hellen, Bruna e Camila por toda colaboração para que essa pesquisa pudesse ser realizada.

À E.E.E.M. Professor Fernando Duarte Rabelo, na figura do diretor Prof. José Paulo Andrade Gomes, por ter disponibilizado toda a estrutura para a realização da pesquisa.

A todos os alunos que fizeram parte dessa pesquisa, por terem se dedicado a construir conosco um processo de ensino-aprendizagem realmente eficaz.

Aos amigos e entidades da Gruta Força Divina por terem cuidado de mim durante todo processo de construção desse trabalho. Obrigada pela caridade prestada.

A Deus, sem o qual nada seria possível.

RESUMO

O ensino da operação de divisão que se inicia no Ensino Fundamental acaba muitas vezes não atingindo seu objetivo, culminando em alunos que ainda não dominam a operação quando já estão no Ensino Médio. Buscando sanar essa defasagem, investigamos como o modelo japonês *Lesson Study* (Pesquisa de Aula) pode tornar mais eficaz a aprendizagem dos alunos sobre divisão. Apresentamos a origem histórica do modelo, que consiste em um processo colaborativo que proporciona aprimoramento docente e tem foco na aprendizagem do aluno. Destacamos as diversas estratégias que podem ser utilizadas para a resolução de um problema de divisão, enfatizando as diferentes abordagens que podem ser dadas ao processo euclidiano. Planejamos uma sequência de aulas, em consonância com o *Lesson Study*, que foram desenvolvidas em uma turma de 1ª série do Ensino Médio em uma escola estadual do Espírito Santo. Todo o processo de construção e reflexão sobre as aulas se mostraram eficazes para a formação continuada das professoras envolvidas. Os alunos participaram de um pré-teste e um pós-teste que nos mostraram avanço na aprendizagem.

Palavras-chave: Divisão. Lesson Study. Planejamento colaborativo. Ensino-aprendizagem.

ABSTRACT

The teaching the operation of division that begins in Elementary School often ends up not reaching its goal, culminating in students who do not yet master the process when they are already in High School. Seeking to close this gap, we investigated how the Japanese Lesson Study model can make students' learning about division more effective. We present the historical origin of the model, which consists of a collaborative process that provides teacher improvement and focuses on student learning. We highlight the various strategies that can be used to solve a problem involving division, emphasizing the different approaches that can be given to the Euclidean process. We planned a sequence of classes, in line with the Lesson Study, which were developed in a high school class in a state school in Espírito Santo. The whole process of construction and reflection on the classes proved to be effective for the continued formation of the teachers involved. The students participated in a pre-test and a post-test that showed progress in student learning.

Keywords: Division. Lesson Study. Collaborative planning. Teaching-learning.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ainda na graduação, participei de uma pesquisa que investigava a operação de divisão, tanto na perspectiva de análise dos conhecimentos dos alunos da educação básica, quanto na perspectiva de análise dos conhecimentos dos futuros professores, que precisariam compreender os processos matemáticos envolvidos na operação para então conduzir os alunos à construção do conhecimento de maneira sólida e efetiva.

Era evidente a defasagem dos alunos da escola básica na resolução de problemas e exercícios que envolviam a divisão, principalmente divisões que continham zero em seu quociente. Também era evidente que muitas vezes os futuros professores desconheciam as técnicas envolvidas em uma divisão ou as utilizavam mecanicamente, semelhante ao que vários alunos faziam, sem compreender e, portanto, sem ter como ensinar todos os conceitos matemáticos envolvidos nos algoritmos utilizados.

Trabalhando simultaneamente com turmas de 6º ano do Ensino Fundamental e turmas de 1ª série do Ensino Médio, percebi que muitas dúvidas persistiam ao longo de todo Ensino Fundamental e culminavam em alunos recém-chegados ao Ensino Médio, que não dominavam a operação e voltavam a repetir erros muitos comuns no Ensino Fundamental.

No início da 1ª série, o Currículo Base do Estado do Espírito Santo aborda, no eixo Números e Operações, a retomada das operações básicas com todos os números reais (ESPÍRITO SANTO, 2009). Atividades diagnósticas realizadas com turmas da 1ª série do Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino, no início do ano letivo, entre 2014 e 2017, mostraram que alunos dessa série muitas vezes compreendem que devem utilizar a divisão para resolver um problema proposto, entretanto não conseguem empregar adequadamente o algoritmo mais utilizado, o processo euclidiano de divisão, e também não conseguem recorrer a outros métodos não tradicionais de efetuar a operação.

Para desenvolver os conhecimentos sobre divisão dos estudantes desse nível de ensino, utilizamos o modelo japonês chamado *Lesson Study*, a fim de organizar uma sequência de aulas para trabalhar a operação de divisão com alunos da 1ª série do Ensino Médio, e tentar responder a seguinte pergunta de pesquisa: como o *Lesson Study* pode contribuir para o desenvolvimento docente e para que o aluno seja protagonista do seu processo de aprendizagem, contribuindo, consequentemente, para o aprendizado do estudante.

No capítulo 2 apresentamos uma abordagem histórica do *Lesson Study*, ou Pesquisa de Aula, com base em estudos de Felix (2010), Baldin (2009), Isoda (2010), Isoda e Olfos (2009) e Souza, Wrobel e Baldin (2018), apontando como se deu seu surgimento na educação japonesa e o importante papel que desempenha na formação de professores e na aprendizagem de alunos. Destacamos a essência do *Lesson Study*, as etapas para seu desenvolvimento e suas potencialidades para a construção de aprendizagem significativa para os alunos e desenvolvimento docente através do trabalho colaborativo.

No capítulo 3 abordamos o modo como a divisão deve ser desenvolvida segundo documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), mostrando o que é esperado que os alunos dominem nas diversas fazes de conhecimento. Ainda apresentamos e detalhamos técnicas utilizadas para calcular uma divisão, como o processo euclidiano e o processo americano, segundo autores como Toledo e Toledo (1997), e destacamos as diversas abordagens que podem ser dadas ao processo euclidiano de divisão, método mais utilizado na educação básica para efetuar essa operação.

No capítulo 4 apresentamos como foi desenvolvido o *Lesson Study,* identificando o grupo de professoras e alunos que participaram do mesmo e os recursos que permitiram a análise detalhada de todos os momentos que permearam esse desenvolvimento.

O capítulo 5 traz detalhadamente todo o planejamento colaborativo da sequência de aulas sobre divisão. São apresentadas discussões importantes que levaram o grupo de professoras a definir toda a dinâmica de condução das aulas, os tipos de problemas que seriam propostos e o processo de construção dos mesmos. Ainda apresentamos as estratégias de resolução previstas para cada um dos problemas, os possíveis erros que os alunos poderiam cometer e questionamentos que poderiam ser feitos por ou para eles em classe, de modo a conduzir a construção de significados. Trazemos também uma estratégia de gestão do tempo, com atividades que poderiam ajudar a fixar cada etapa da aula.

No capítulo 6 apresentamos a sequência de aulas desenvolvida com os alunos da 1ª série do Ensino Médio, com detalhes de como a aula foi conduzida, apresentando a participação efetiva dos alunos durante todo o processo. As resoluções dos problemas pelos alunos são apresentadas através de imagens da aula e as interações entre os estudantes e a professora são mostradas em alguns momentos através da transcrição de diálogos entre os mesmos.

O capítulo 7 traz a reflexão sobre o processo, realizada pelo grupo de professoras que planejou as aulas e que também estavam presentes durante toda sua execução. São apontados os pontos positivos das aulas e outros pontos de possível modificação, sempre focados na aprendizagem dos alunos. Observações importantes sobre comportamentos dos alunos e da professora regente da aula também são apontadas, mostrando todo o trabalho de observação das demais professoras.

No capítulo 8 apresentamos uma análise sobre as contribuições da sequência de aulas, planejadas em consonância com o *Lesson Study*, na aprendizagem dos alunos sobre divisão. Apresentamos os pré-teste e pós-teste utilizados para a avaliação da aprendizagem e comparativos sobre o desempenho dos alunos frente a problemas de divisão antes e depois de sua participação nas aulas desenvolvidas.

Por fim, no capítulo 9, trazemos as conclusões sobre o trabalho desenvolvido.

Esperamos que nosso trabalho ofereça contribuições para professores e futuros professores de matemática e, também, para pessoas que se interessam pelo assunto e, assim como nós, buscam melhorar continuamente o ensino e a aprendizagem da matemática em nosso país.

2 SOBRE O LESSON STUDY

Lesson Study ou Pesquisa de Aula é um modelo japonês de pesquisa da prática docente onde "os professores aprendem com a experiência coletiva: geram, acumulam e compartilham conhecimento com seus pares" (ISODA; OLFOS, 2009, p. 36, tradução nossa). O objetivo central do modelo é intensificar a aprendizagem dos alunos, com participação efetiva dos mesmos.

A expressão *Lesson Study* é a tradução para o inglês do termo japonês *Jugyou Kenkyuu (Jugyou* = aula, *Kenkyuu* = pesquisa), cujo surgimento se deu para definir importante etapa da formação dos professores japoneses, como citam Felix (2010) e Souza, Wrobel e Baldin (2018), no contexto que veremos a seguir.

Durante o Xogunato[1] da família Tokugawa (1603-1868), conhecido como Período Edo na história japonesa, o país vivenciou o fechamento de seus portos e um consequente isolamento do mundo ocidental. Esse isolamento trouxe, dentre outras consequências, a impossibilidade de o Japão ter acesso às inovações educacionais do ocidente, o que, segundo Felix (2010), não o impediu de alcançar bons níveis de alfabetização.

A educação japonesa no Período Edo, apesar de bastante difundida, era muito diferente do modelo educacional praticado na atualidade. Souza, Wrobel e Baldin (2018) nos mostram que, durante esse Período, a educação se dava de maneira individualizada (Figura 1), sendo um mesmo professor responsável por ensinar diferentes conteúdos a vários alunos, que poderiam estar reunidos ou não, com idades e níveis de conhecimento distintos.

[1] Sistema de governo predominante no Japão entre os séculos XII e XIX, baseado na crescente autoridade do xogum, supremo líder militar, que terminaria por submeter até mesmo a autoridade do imperador.

Figura 1 - Ensino individual, vários níveis e diferentes assuntos.

Fonte: Felix (2010).

Em meados do século XIX, a Restauração Meiji[2], que derrubou a família Tokugawa, colocou fim ao Período Edo, abrindo, definitivamente, as portas do Japão ao mundo ocidental e, “por volta de 1875-76, cerca de quinhentos a seiscentos especialistas estrangeiros, e mais tarde, em 1890, três mil aproximadamente, estavam empregados sob supervisão japonesa” (HOBSBAWM, 1996, p. 218-219).

A reabertura dos portos permitiu que professores estrangeiros difundissem no país metodologias ocidentais de ensino, como aulas expositivas, e uma nova estrutura educacional, com alunos separados em séries e exposição de conteúdos dada de maneira uniforme para uma mesma sala de aula, como citam Souza, Wrobel e Baldin (2018).

Segundo Hobsbawm (1996), a ocidentalização observada após a restauração Meiji promoveu nas universidades japonesas a adoção dos exemplos alemão e americano enquanto a educação primária baseou-se no modelo norte-americano.

Os professores estrangeiros passaram a lecionar em escolas de formação para professores japoneses, o que

> [...] gerou a atividade de “observação” de um modelo de ensino em que o professor se coloca na frente, com quadros negros e objetos de aprendizagem [...]. Os professores examinavam atentamente o método expositivo, tecendo críticas e reflexões sobre o caminhar dos conceitos, mas principalmente focavam suas

[2] A Restauração Meiji, que aconteceu em 1868, foi o processo de derrubada do xogunato e restabelecimento do poder para a família imperial japonesa. Tal processo resultou no desenvolvimento e modernização do Japão a partir do final do século XIX, transformando a nação em uma potência regional (ORTIZ, 2000).

> observações sobre o que e como os alunos aprendiam. Assim, desde o início, a observação de uma aula modelo não era contemplativa do procedimento ou de atitudes, mas sim, uma fonte de investigação para a melhoria da compreensão sobre “como ensinar para que um aluno aprenda o máximo” (SOUZA; WROBEL; BALDIN, 2018, p.9).

Assim, deu-se o advento do *Lesson Study* que tinha suas aulas planejadas, “estudadas espontaneamente, fora da escola, por grupo de educadores e professores, para compartilhar ideias e experiências, e desenvolver ideias inovadoras para sugerir novas abordagens” (SOUZA, WROBEL e BALDIN, 2018, p. 12).

Segundo Isoda e Olfos (2009) o *Lesson Study* vem sendo reconhecido internacionalmente e tem-se mostrando como eficaz ferramenta para o desenvolvimento docente, vista sua influência direta na elevação da qualidade de ensino e consequentemente, melhorias significativas na aprendizagem dos alunos.

O *Lesson Study* consiste em pesquisar a aula, passando essencialmente por um planejamento colaborativo (etapa 1), pela execução da aula (etapa 2) e pela reflexão da aula (etapa 3), como destaca Isoda (2010). Cada uma dessas etapas é detalhada a seguir.

- Etapa 1 - Planejamento:

Nesta etapa o grupo de professores se reúne e detalha cada etapa a ser desenvolvida na aula, começando pela escolha do conteúdo que se deseja trabalhar. É necessário que o conteúdo esteja associado ao currículo escolar da turma em que a aula será realizada.

É durante o planejamento que os professores trocam experiências, materiais, técnicas de ensino, tendo como objetivo a produção de uma aprendizagem significativa para os alunos. Esse momento é muito importante para a formação continuada dos professores e, também, para a formação de professores iniciantes, tendo em vista que diferentes estratégias de resolução e explicação são pensadas para as situações matemáticas que serão propostas para trabalhar o conteúdo escolhido, reforçando os conceitos matemáticos e as técnicas de ensino dos professores.

O grupo de professores busca encontrar o maior número possível de estratégias para desenvolver as situações matemáticas propostas e destacar as possíveis dificuldades que os alunos possam encontrar no decorrer da aplicação da aula, como dúvidas epistemológicas, dificuldades de compreensão de enunciados ou técnicas de resolução. Os professores preveem as possíveis perguntas que os alunos possam realizar e pensam em perguntas que o professor pode direcionar à turma para estimular a todo o momento a participação dos estudantes e verificar a real compreensão de todos os processos. As possíveis respostas para essas perguntas também são abordadas.

Os erros que, por ventura possam ser cometidos pelos estudantes, também são discutidos e o grupo se põe a pensar nos possíveis caminhos que podem ter levado o aluno até esses erros.

O planejamento ainda leva em consideração situações adversas que possam acontecer durante a aula, se antecipando a possíveis contratempos, e detalha a gestão do tempo, de modo que cada fase da aula seja cuidadosamente pensada.

Ao final é originado um documento que detalha todo o planejamento feito pelo grupo de professores que serve como um guia para a execução da aula. Esse guia serve para ajudar o professor a conduzir a aula, mas esta não deve ser pensada como algo engessado, pois apesar de ser feita uma previsão de imprevistos, podem ocorrer situações que não haviam sido planejadas, seja uma interferência externa ou questionamentos distintos dos explicitados no planejamento.

- Etapa 2 - Execução:

Esta etapa é a aula em si. Neste momento um dos professores do grupo que realizou o planejamento aplica a aula planejada colaborativamente em uma de suas classes.

Os demais professores também participam da aula, mas como professores observadores. Eles se atentam para a condução da aula pelo professor, observando e anotando se o que foi planejado está sendo executado, mas a maior atenção é voltada para os alunos, identificando seus êxitos e tropeços, suas dúvidas, talvez não ditas ao professor aplicador da aula, e se o aprendizado está de fato se concretizando.

Ao conduzir a aula, o professor regente deve estimular a participação dos alunos e usar os erros cometidos por eles para produzir o conhecimento, ampliando o pensamento matemático, estimulando o raciocínio dos alunos e suas conclusões.

O professor deve estar atento à condução do compartilhamento de ideias pelos alunos e à organização da lousa, conectando e sintetizando as produções matemáticas.

Entre alguns termos japoneses que são frequentemente utilizados no contexto de *Lesson Study,* significando processos intrínsecos em uma aula nesse modelo, gostaríamos de destacar *Bansho* e *Neriage,* explicitados a seguir:

> *Bansho:* Aula registrada na lousa. Não se trata da simples exposição das estratégias, mas sim a questão da aula, diversas soluções dos alunos com suas estratégias e justificativas, e a síntese final pelo professor. A lousa não é apagada durante a aula. Professores japoneses consideram-na como importante ferramenta de ensino para organizar os pensamentos dos alunos. [...]
> *Neriage:* Momento em que os alunos, cuidadosamente guiados pelo professor, compartilham seus entendimentos, analisam, comparam e contrastam criticamente essas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança

com o que foi aprendido. É a conclusão coletiva apurada por todos, e que se formaliza na síntese pelo professor (SOUZA et al., 2018).

- Etapa 3 - Reflexão:

Após a execução da aula, o grupo se reúne novamente e destaca pontos importantes da aula, buscando a melhoria da mesma e o aperfeiçoamento docente.

Uma avaliação crítica da aula é realizada, voltada para a análise da aprendizagem dos alunos, de modo a refletir sobre o quão proveitoso e significante foi a aula para o desenvolvimento matemático dos discentes.

Nesta etapa são analisadas as observações feitas pelos professores e indicadas possíveis alterações no planejamento, sempre com o objetivo de intensificar a aprendizagem dos alunos, seja com mudanças na sequência de atividades ou a inserção de pontos de discussão que não haviam sido cogitados anteriormente.

Após a reflexão, o grupo pode decidir envolver-se em modificar o planejamento da aula, melhorando alguns pontos, inserindo ou excluindo outros, e inaugurando uma nova etapa, chamada de replanejamento. Em seguida, esse novo planejamento é aplicado por um professor do grupo, podendo inclusive ser o mesmo professor, a aula é observada pelos colegas e seguida de uma nova reflexão (SOUZA et al, 2018). Gaigher, Souza e Wrobel (2017) denominam esse processo contínuo de Espiral do *Lesson Study* (Figura 2), entendendo que cada etapa é desenvolvida com percepções mais maduras sobre todo o processo.

Figura 2 - Espiral do *Lesson Study*.

Fonte: Gaigher; Souza; Wrobel (2017).

Isoda (2010) enfatiza que o *Lesson Study* se dá de forma colaborativa, mas é importante destacar que o núcleo central de desenvolvimento do ciclo de um *Lesson Study* é o aprendizado do aluno. O aluno é o protagonista da aula e cada uma das etapas (planejamento-execução-reflexão) é pensada de modo a proporcionar resultados efetivos de aprendizagem.

3 SOBRE A DIVISÃO

3.1 A divisão no currículo da escola básica

Durante sua trajetória na educação básica, os estudantes são estimulados a pensar sobre diversos temas da matemática, que se relacionam entre si e com situações cotidianas. Para o estudo dos mais diversos temas da área, um dos pontos de maior destaque é a compreensão das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, conhecidas como as quatro operações básicas da matemática, conhecimento necessário para dar sequência aos mais variados conteúdos matemáticos. Durante o Ensino Fundamental,

> é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. [...] No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras (BRASIL, 2017, p. 266).

Ao longo dos anos, através de nossas vivências em sala de aula e de algumas pesquisas nessa área (SAIZ, 1996; LEITE, PRANE, KÜSTER, 2012), percebemos que dentre as quatro operações básicas, a divisão é a operação em que os alunos mais apresentam dificuldades, sejam elas de interpretação dos problemas, elaboração de estratégias de resolução ou ainda a aplicação do algoritmo da divisão.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular, durante o Ensino Fundamental, a divisão é trabalhada desde o 2º ano, através da introdução de problemas que envolvam conceitos de metade e terça parte, mesmo que seja através de estratégias pessoais, e ainda no 3º ano já deve ser desenvolvida a habilidade de “resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais” (BRASIL, 2017, p. 285). A partir do 4º ano os algoritmos são introduzidos e a Base Nacional Comum Curricular destaca a importância de desenvolver nos anos finais do Ensino Fundamental a habilidade de efetuar cálculos e resolver problemas que envolvam cálculos por meio de estratégias variadas com entendimento dos processos envolvidos.

Apesar de ser esperado que ao final do Ensino Fundamental um estudante domine as operações básicas, dentre elas a divisão, percebemos, através de nossa prática docente e principalmente por meio de atividades diagnósticas realizadas por vários anos com alunos do 1º ano do Ensino Médio, que muitos alunos chegam a essa série sem dominar o tema e apresentando grande defasagem nos conhecimentos sobre a operação.

Percebemos ainda que, no início do Ensino Médio, muitos alunos conseguem identificar situações em que precisariam utilizar a divisão, mas não conseguem operacionalizá-la ou interpretar seu resultado.

É importante destacar que o Currículo Básico da Escola Estadual do estado do Espírito Santo prevê que os alunos do 1º ano do Ensino Médio retomem as operações e propriedades das operações através de cálculo mental, estimativas, calculadora e algoritmos (ESPÍRITO SANTO, 2009).

3.2 Os procedimentos matemáticos da divisão

Em *Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir*, Saiz (1996) destaca que quando analisados os cálculos das quatro operações básicas, as respostas das operações de adição, subtração e multiplicação geralmente coincidem. Mas quando se fala em divisão, até mesmo professores se questionam. Afinal, "'dividir um número por outro' na realidade é uma expressão pouco específica; faz aparecer diferentes tipos de quocientes (inteiros, decimais não inteiros, etc)" (SAIZ, 1996, p. 158).

Ao se depararem com operações de divisão ou com problemas que recorram à divisão para serem solucionados, mesmo que sejam apenas entre números naturais, muitos questionamentos podem surgir para os estudantes:

> [...] quem decide se procura um quociente inteiro ou não? Deve-se continuar até obter dois decimais, ou 3, ou mais? É necessário analisar o resto? E a resposta, é a mesma se esta pergunta se formula na escola ou na vida cotidiana? [...] Porém, também podemos definir a divisão nos decimais, ou nos racionais; diferentes divisões unificadas por um só nome: divisão (SAIZ, 1996, p. 159).

Dentre as várias estratégias que podem ser usadas para calcular uma divisão, observamos que a maioria dos alunos recorre ao processo euclidiano de divisão, que é o algoritmo mais utilizado para essa operação e chamaremos aqui de algoritmo da divisão. No contexto da matemática, "definimos algoritmo como uma sequência de um número finito de procedimentos realizados para se chegar ao resultado de um cálculo [...]" (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 11). Apesar de utilizarem o algoritmo da divisão, muitos alunos o fazem sem compreender verdadeiramente os procedimentos efetuados e os motivos pelos quais podemos efetuá-los, o que os leva a cometer inúmeros erros.

No processo euclidiano de divisão pode-se recorrer ao processo longo ou ao processo breve. No processo longo, “a subtração é indicada no algoritmo, aparecendo o produto do quociente pelo divisor” (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 152) enquanto no processo breve “só se representa o resultado da subtração entre o dividendo e o produto do quociente pelo divisor” (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 152). Os processos breve e longo da divisão de 196 por 7 são descritos a seguir.

196	7
56	28
0	

196	7
-14	28
56	
-56	
0	

Em termos de aprendizagem, os alunos podem utilizar qualquer um dos processos, mas observamos muitos alunos do 1º ano do Ensino Médio que cometem erros por utilizarem o processo breve do algoritmo sem ainda ter consolidado o processo de divisão. Sendo assim, pensando em uma aprendizagem mais eficaz,

> [...] talvez seja melhor iniciar o trabalho com divisão pelo processo longo, que permite aos alunos conhecerem passo a passo, os procedimentos que se apresentam resumidos no processo breve. Obviamente, o cálculo por aproximação que caracteriza este último, é muito eficiente, mas é importante que os alunos o tenham incorporado de maneira consistente (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 152).

Ao retomar o algoritmo da divisão com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, pode-se utilizar no momento inicial a estratégia de destacar as ordens que irão compor o resultado da divisão, pois esse “procedimento de indicar as ordens que serão procuradas no quociente é simples e, no entanto, muito eficiente para evitar muitos tipos de erro, especialmente quando um dos algarismos do quociente é o zero” (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 153).

As relações entre as ordens que compõem o dividendo (unidade, dezena, centena, etc.), e os números do sistema de numeração decimal, de maneira geral, precisam ser evidenciadas para o estudante. A compreensão da equivalência entre 1 dezena e 10 unidades, entre 1 centena e 10 dezenas, por exemplo, é fundamental para a compreensão do algoritmo da divisão, sendo o cerne da fundamentação matemática do algoritmo. A utilização de materiais concretos, como o Material Dourado, ainda pode ser muito útil, mesmo que no início do Ensino Médio, para evidenciar as relações entre as ordens no dividendo e na construção do quociente. Nesse sentido, concordamos com Toledo e Toledo (1997, p. 154), quanto à utilização, inicialmente, de um "modo ainda mais longo, mas que explicita todo raciocínio envolvido" no algoritmo para a obtenção do resultado da divisão".

Na divisão de 196 por 7, por exemplo, as relações entre as ordens ficariam bem evidenciadas como a seguir:

C	D	U	
1	9	6	7
	+10	+50	0 2 8
	19	56	C D U
	- 14	- 56	
	5	0	

Dentre as mais diversas divisões possíveis, naquelas que apresentam zero no quociente pode-se observar que as dúvidas e erros cometidos ficam ainda mais latentes, como destacam Prane, Leite e Küster (2013a). Segundo as autoras, as dúvidas quanto ao zero no quociente podem ser minimizadas se desde o início for mostrado ao estudante a função do algarismo zero em uma ordem, ou seja, "a função do zero em representar a ausência de quantidade na ordem em questão" (PRANE; LEITE; KÜSTER, 2013b, p. 10). Quando dividimos 196 por 7, como mostrado anteriormente, verificamos que ao tentar dividir igualmente 1 centena por 7 grupos, teremos 0 centenas em cada grupo e a centena do dividendo será trocada por 10 dezenas, dando continuidade à divisão.

Sendo assim, na divisão de 144 por 3, por exemplo,

> o professor pode apresentar aos alunos o seguinte raciocínio: "Tenho 1 centena para repartir igualmente em 3 grupos. Quantas centenas caberá a cada grupo? A reposta é zero centenas. Então, vou marcar zero no lugar das centenas". Aplicando sempre esse mesmo raciocínio, o aluno provavelmente não terá problemas ao deparar com zero no quociente, seja intercalado, seja na ordem das unidades (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 154-155).

Por mais que os estudantes observem, por exemplo, que 028 é igual a 28 e que esse zero em questão não alterará o valor numérico do quociente de 196 por 7, podendo ser omitido quando for consolidada essa compreensão, devemos destacar que o mesmo não ocorre quando o algarismo zero ocupa uma ordem do quociente à direita de alguma ordem que já foi preenchida com um algarismo diferente de zero. Se 028 e 28 representam a mesma quantidade, 280 e 208 são distintos entre si e também distintos de 28.

Apesar de ser o processo euclidiano da divisão o algoritmo mais utilizado pelos estudantes, é importante que sejam apresentados aos alunos outros métodos que possam ser utilizados na divisão, como o processo americano, de modo que todos façam sentido e não sejam aplicados de maneira puramente mecânica, como destacam Prane, Leite e Küster (2013b).

O processo ou método americano, também conhecido como processo das subtrações sucessivas, traz em sua ideia fundamental, os pensamentos e ações, sem técnicas matemáticas aparentes, que uma criança utiliza para dividir igualmente objetos, como enfatizam Toledo e Toledo (1997).

Exemplificando o processo citado, podemos considerar a situação em que se faz necessária a distribuição igualitária de 22 balas para quatro pessoas. Naturalmente uma criança pode começar a entregar uma bala para cada pessoa e, à medida que sobrem balas, repetir o processo até não restarem mais os doces ou não ser mais possível distribuir igualmente o que tenha sobrado. Através dessa distribuição, pode-se perceber que é possível entregar duas balas de uma única vez para a mesma pessoa, a fim de adiantar o processo de distribuição.

Três possíveis distribuições seriam:

22	|__4
- 4	1
18	
- 4	1
14	
- 4	1
10	
- 4	1
6	
- 4	+ 1
2	5

22	|__4
- 4	1
18	
- 8	2
10	
- 8	+ 2
2	5

22	|__4
- 8	2
14	
- 12	+ 3
2	5

Essa possibilidade de variação sempre deve ser enfatizada pelo professor, pois permite que o estudante faça os agrupamentos em quantidades menores e possa gradativamente ter segurança para buscar quocientes parciais cada vez maiores e tornar o processo mais breve.

> O que se pode perceber é que esse processo, no seu limite, chega ao processo euclidiano. Aqui, por tentativas, coloca-se qualquer número no quociente (quociente parcial) e, se o resto permitir, faz-se nova distribuição, ou seja, define-se um novo total no quociente (outro quociente parcial), continuando o processo até que o resto seja menor que o divisor. No fim, somam-se os quocientes parciais. No processo euclidiano, o que se faz é procurar o maior número possível de ser colocado no quociente, já obtendo o resto menor que o divisor (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p.159).

É importante destacar que no processo americano sempre se trabalha com a quantidade em sua totalidade, em contrapartida, no processo euclidiano usa-se as quantidades de cada ordem até esgotá-las.

Além do processo euclidiano de divisão e do processo americano, aproximações e tentativas que são feitas nesses dois processos também podem ser utilizados pelos alunos de maneira independente, onde um algoritmo não é necessariamente executado. Tomemos por exemplo a divisão 235:5.

Por tentativas, um estudante poderia recorrer aos seguintes passos: 20.5=100, mas ainda faltam 135. Então fazemos uma nova aproximação como 40.5=200. Agora já chegamos mais perto e faltam apenas 35. Como 7.5=35 temos 40.5+7.5=235 o que nos leva ao resultado 235:5=47.

Para fazer a mesma divisão citada acima, o aluno ainda poderia decompor o número 235, de modo a utilizar outra estratégia para chegar ao mesmo resultado: 235=200+35 ou ainda 235=200+30+5.

Com a decomposição feita, é possível efetuar a divisão de cada parcela por 5, somando os resultados ao final do processo: 235:5=200:5+35:5=40+7=47, ou, utilizando outra decomposição, 235:5=200:5+30:5+5:5=40+6+1=47.

É necessário que as diferentes possibilidades sejam apresentadas aos estudantes, de modo que os próprios alunos, mediados pelo professor, percebam as relações envolvidas entre os vários métodos e decidam aplicar um ou outro quando lhe for mais conveniente, ampliando assim seu repertório. A apresentação de diferentes métodos para a solução de uma mesma divisão pode alargar o pensamento matemático do aluno.

4 COMO TUDO ACONTECEU

O *Lesson Study* sobre divisão aconteceu no primeiro semestre de 2017 e envolveu 6 professoras de Matemática (Figura 3). Núbia Quenupe Campos e Camila Andreatta da Silva são da Rede Estadual do Espírito Santo e atuam na escola básica; Julia Schaetzle Wrobel e Hellen Castro Almeida Leite trabalham na Universidade Federal do Espírito Santo com formação de professores da licenciatura em matemática. Hellen também atua na formação de pedagogos. Bruna Zution Dalle Prane e Maria Alice Veiga Ferreira de Souza são do Instituto Federal do Espírito Santo. Bruna atua no Ensino Médio, EJA e tem experiência prévia com a formação de pedagogos. Julia e Maria Alice atuam em pós-graduação em ensino de matemática. Essa riqueza de experiências e vivências constitui um grupo heterogêneo e adequado para os propósitos de um *Lesson Study*, com as idiossincrasias trazidas de diferentes contextos profissionais. Diferente de um grupo cooperativo houve colaboração, essência do modelo, por trabalharmos nos apoiando, com vista a atingir objetivos comuns, negociados coletivamente, com relações não hierarquizadas, liderança compartilhada, confiança mútua e corresponsabilidade sobre as ações.

O grupo foi constituído para pensar em uma questão recorrente nas turmas de 1ª série: os alunos chegam ao Ensino Médio sem dominar a operação divisão. Sob as premissas do *Lesson Study*, trabalhamos colaborativamente na elaboração-execução-reflexão de aulas baseadas nesse tema, como mostraremos a seguir.

Figura 3 - Equipe de professoras do *Lesson Study*.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Foram realizados 3 encontros para o planejamento da aula, discussão da temática, elaboração dos problemas, análise de materiais a serem utilizados, apresentação de diferentes estratégias para a solução das questões e previsão de diferentes soluções pelos alunos.

A aula foi executada para 36 alunos do 1º ano do Ensino Médio da Rede Estadual do Espírito Santo, em uma turma regular da professora Núbia Quenupe Campos, autora dessa dissertação, sob a observação atenta do grupo de professoras, que nesse momento eram responsáveis por analisar se o planejamento coletivo foi adequado para a prática e atingiu às expectativas quanto à aprendizagem dos alunos. Logo após o término da aula, o grupo de professoras voltou a se reunir para refletir e discutir impactos do planejamento executado sobre a aprendizagem dos alunos.

As reuniões e aulas foram gravadas em áudio e/ou vídeo para a revisão da escrita do planejamento, para análise da participação e aprendizagem dos estudantes em aula, para subsidiar aspectos pontuais que foram objeto de reflexão posterior das professoras e para escrita da dissertação. As imagens e vozes serviram, igualmente, para ilustrar e aumentar o poder de compreensão de passagens de todas as etapas do *Lesson Study* aqui descritas.

Os registros foram autorizados em um termo de consentimento livre e esclarecido por cada uma das professoras (Anexo I), pelos pais de todos os alunos (Anexo II) e pelo diretor da escola (Anexo III), permitindo a utilização do material para fins acadêmico-científico, desde que preservando os nomes e mantendo os rostos dos alunos esmaecidos. Assim, optamos por numerar os alunos, sem apresentar seus nomes, e apresentar as professoras por nomes fictícios por entendermos não ser relevante *quem* praticou a ação, mas *o que* ou *como* a exerceu,

Passaremos, então, a uma discussão sobre cada uma das etapas de planejamento, execução e reflexão da aula sobre divisão.

5 PLANEJAMENTO DA AULA

O grupo de professoras se reuniu em 3 momentos distintos, entre os meses de janeiro e março de 2017, e manteve contato por mídias digitais durante esse tempo, para planejar a aula sobre divisão. As reuniões para planejamentos de aulas não seguem uma sequência de ideias linear. Muitas vezes, questões são retomadas e reavaliadas e o plano avança e retrocede, em um processo natural de pensar e repensar um tema. Neste texto, são apresentadas partes relevantes da construção desta etapa, evitando repetições desnecessárias ao não considerar fielmente a sequência cronológica dos fatos.

5.1 Questões preliminares

No primeiro encontro para o planejamento das aulas, conversamos sobre a necessidade de trabalhar divisão com os alunos do 1º ano do Ensino Médio. Era consenso do grupo que se esperava que um aluno de 1º ano soubesse dividir, mas, pela nossa prática docente, sabíamos que não era a realidade de muitos alunos desta série. Há alguns anos trabalhando no Ensino Médio, as professoras da Rede Estadual não haviam tido uma única turma em que a maioria dos alunos soubessem operar a divisão no início do ano letivo. Uma das professoras relatou que havia tido uma experiência em que um aluno seu, também do 1º ano do Ensino Médio, a surpreendeu com a seguinte afirmativa: “professora, tem uma coisa que eu não sei em Matemática, que eu nunca consegui entender. Aquela conta que é assim...”. E o aluno fez, no ar, o símbolo da divisão, o que causou certo espanto por ele não conseguir sequer lembrar o nome da operação.

Um dos questionamentos levantados pelo grupo foi sobre como abordar divisão com os alunos do 1º ano. Havia uma preocupação com que a abordagem não fosse demasiadamente infantil ou desmotivante para os alunos, ao mesmo tempo em que era necessário definir se o trabalho seria feito com conceitos ou com procedimentos. Optamos pelos procedimentos, pois a experiência da autora com sucessivas atividades diagnósticas em anos anteriores com as turmas do 1º ano mostrava que os alunos compreendiam o conceito de divisão, mas não sabiam operá-la corretamente.

A questão então era: como ensinar o procedimento de divisão? Chegamos à conclusão de que, do ponto de vista matemático, se um aluno compreendesse os valores posicionais de cada algarismo que compõem um número e se compreendessem a construção do quociente através das ordens, ele conseguiria efetuar qualquer divisão.

O grupo optou por abordar a divisão pela via da Resolução de Problemas baseado em recomendações da literatura e das diretrizes nacionais para o ensino. Para Polya, “um dos principais objetivos do currículo de Matemática é desenvolver no estudante a habilidade de resolver problemas” (POLYA, 1981, p.100, tradução nossa). Schoenfeld (1996) destaca o valor do uso da resolução de problemas como via de expansão dos limites do pensar matemático do aluno. Destacamos o que dizem os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1998, p.42).

Tivemos uma preocupação particular com relação aos problemas que seriam aplicados aos alunos. Escolhemos trabalhar com problemas verbais, ou seja, aqueles que se apresentam em linguagem materna, trazendo uma narrativa ou história (SOUZA; GUIMARÃES, 2015).

Deveríamos ter cuidado para que os problemas não fossem desinteressantes ou difíceis demais a ponto de que os alunos desistissem de tentar solucioná-los, no entanto não deveriam ser tão fáceis a ponto de desanimar os alunos. Enfatizamos que problemas que às vezes são eficientes para trabalhar divisão com o 6º ano do Ensino Fundamental podem ser desestimulantes para o 1º ano do Ensino Médio. Nessa linha, achamos importante que os alunos se vissem inseridos nas situações abordadas, no contexto dos problemas, e tomaríamos cuidado em relação a isso na formulação dos mesmos.

5.2 Dinâmica da Aula

O grupo decidiu que seria adequado propor os problemas aos alunos no início da aula, deixar que eles resolvessem em grupo e apresentassem suas estratégias de solução na lousa. Se uma estratégia por nós prevista não fosse abordada pelos alunos, o professor deveria expor para a classe. Em especial, o algoritmo da divisão deveria ser detalhado, já que é o de divisão mais utilizado pelos alunos. Além disso, definimos que seria interessante que os problemas fossem propostos em aulas sequenciais para que a divisão fosse trabalhada com continuidade. Definimos a aplicação em duas aulas geminadas, com carga horária total de 220 minutos, além do pré-teste e pós-teste.

Para privilegiar a interação, a classe seria dividida em grupos de até 4 alunos. Os alunos fariam uma primeira leitura do problema individualmente. Em seguida, um aluno seria convidado a ler novamente em voz alta. A professora verificaria a compreensão textual do problema pelos alunos para, em seguida, pedir que o solucionassem conjuntamente nos grupos. Na sequência, a professora visitaria os grupos mediando o processo de solução por meio de questionamentos. Ao transitar entre os grupos, verificaria as estratégias e possíveis erros dos alunos, munindo-se de dados que poderiam conduzir suas próximas ações, durante o *neriage*.

Os alunos deveriam resolver mais de um problema, que seriam discutidos um por um. Os alunos resolveriam e apresentariam as soluções de cada problema antes de passar para o próximo, para que ninguém começasse a resolver um novo problema sem realmente ter compreendido e esgotado todas as possibilidades do problema anterior. À medida que os alunos fossem resolvendo os primeiros problemas, as diferentes estratégias usadas e apresentadas poderiam enriquecer seu repertório, alargando o pensamento matemático para as soluções e discussões dos problemas seguintes.

Falamos sobre a importância de mostrar várias soluções aos alunos e permitir que eles expressem seus mais variados raciocínios, para não ficarem condicionados a pensar sempre de uma mesma maneira.

> É comum que as pessoas tenham tendência a eleger um ou outro modo de solução, a depender dos estímulos que tenham recebido ao longo da escolaridade. Assim, é útil que os professores estejam preparados para cumprir com essa diversidade no ensino. Não só isso. Precisam estar atentos à maneira como diferentes modos de solução se conectam e se esforçarem pela promoção do estabelecimento de canais (sinapses) que se relacionem nesses diferentes modos ou estratégias de resolução pelos alunos. (SOUZA; WROBEL, 2017, p.25-26).

O grupo também registrou algumas recomendações para a condução da aula: a professora regente deveria autorregular-se[3] para não responder aos próprios questionamentos, o que é muito comum. Ao contrário, ela deveria dar tempo para os alunos refletirem e elaborarem suas próprias respostas, aprimorando seu pensamento matemático.

Outra preocupação do grupo era envolver todos os alunos na discussão, por meio de perguntas e pela valorização de suas produções. Isso promoveria o compartilhamento de raciocínios/soluções uns com os outros, valorizando a participação do aluno e utilizando o erro como oportunidade de aprendizado. Assim, os alunos seriam levados a construir seus próprios conhecimentos, conforme recomendações de autores como Polya (1978), Schoenfeld

[3] A autorregulação é entendida pela Psicologia Cognitiva como sendo “controle do próprio comportamento através de automonitoramento das condições que evocam comportamento desejado ou indesejado.” (VANDENBOS, 2010, p.121)

(1996) e Isoda e Olfos (2009).

O grupo também teve a preocupação de cuidar do tipo de questionamento que a professora faria aos alunos. Perguntas do tipo “o que vocês entenderam do problema?” ou “como vocês resolveriam?” são amplas e prejudicam o fluxo de raciocínio. Questionamentos desse tipo deveriam ser substituídos por outros mais objetivos, como por exemplo: “quais são os dados do problema?”, seguindo orientações de Wrobel et al (2016).

Dentre outras demandas previstas pelas professoras, se destacou um possível questionamento dos alunos sobre o uso da calculadora:

Cláudia	Como explicar para os alunos que eles não poderiam utilizar calculadora?
Ana	Ao longo da vida, em vestibulares e concursos eles não podem utilizar essa ferramenta, então é importante que eles saibam o processo de resolução e não apenas a resposta.
Eva	Mas essa é uma justificativa externa para eles. Será que temos uma justificativa interna? Algo que faça com que os alunos não queiram utilizar a calculadora?
Cláudia	Acho que nesse momento a justificativa externa é o motivo mais importante, mas, com relação à motivação[4], talvez não surta muito efeito.

Começamos então a apresentar algumas possibilidades. Pensamos que no dia-a-dia, por mais que o celular esteja quase sempre à mão, com o recurso da calculadora à disposição, cada um de nós precisa desenvolver a capacidade de aproximações e estimativas, como, por exemplo, ao receber o troco da passagem no ônibus. Essa é uma situação geralmente rápida e é necessário ter em mente o valor, pelo menos aproximado, de quanto se deveria receber. Decidimos então que a calculadora não deveria ser usada, uma vez que o nosso objetivo era que os alunos aprendessem os procedimentos de divisão.

A importância de saber resolver um problema e não apenas conhecer sua resposta, é um tipo de exercício mental que amplia as possiblidades de discernimento sobre as coisas, possibilitando a tomada de decisões. Nesse sentido, os alunos seriam estimulados a registrar

[4] A professora refere-se ao termo com a conotação apresentada no dicionário da sociedade americana de psicologia: “o ímpeto que dá propósito ou direção ao comportamento humano ou animal. [...] A disposição de uma pessoa em esforço físico ou mental em busca de um objeto ou resultado” (VANDENBOS, 2010, p.625).

não somente as respostas e sim todo o raciocínio utilizado. Essa recomendação não ficaria escrita nas folhas que seriam entregues aos alunos, mas seria dita aos estudantes no momento que recebessem os problemas.

Dialogamos sobre o espaço onde as aulas seriam executadas. O auditório da escola foi cogitado, mas um ambiente diferente do que os alunos estariam acostumados poderia causar-lhes algum desconforto e agitação, além da perda de tempo com o deslocamento. Optamos por permanecer na sala de aula.

Os alunos poderiam questionar sobre se a resolução dos problemas valeria algum tipo de pontuação. Entendemos que atribuir um ou dois pontos de participação poderia ser um incentivo para que se dedicassem às aulas.

Por fim, foi definido que alguns dias antes os alunos seriam informados sobre a presença das outras professoras na aula e o objetivo da mesma. Seria deixado claro que nenhuma das professoras presentes estaria lá com o objetivo de avaliá-los.

5.2 Diretrizes para elaboração dos problemas

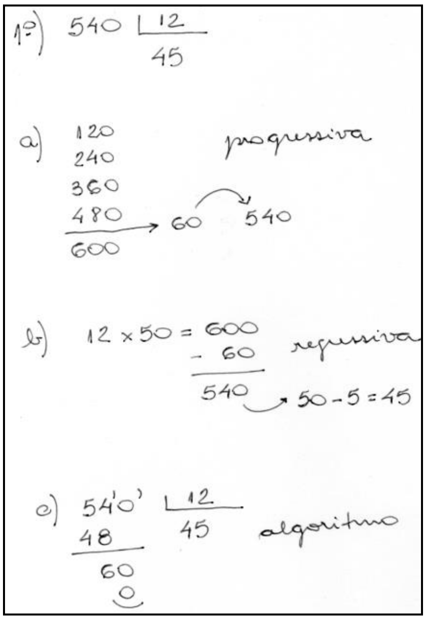
O grupo definiu que os tipos de divisão que seriam propostas aos alunos apresentariam números naturais no dividendo e no divisor por serem a sustentação para contas mais elaboradas. Achamos conveniente que o primeiro problema apresentasse uma divisão simples, com quociente natural, sem zero nesse quociente, o que entendemos que seria um complicador para os alunos. As próximas divisões deveriam conter zero no quociente e uma delas deveria ter quociente decimal, apresentando diferentes níveis de dificuldade.

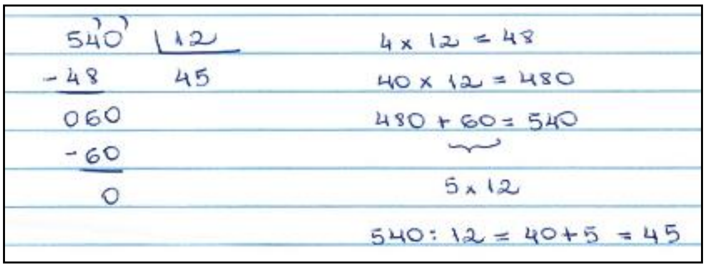
Tivemos o cuidado de evitar problemas que poderiam trazer dificuldade de interpretação do enunciado, com palavras que não fizessem parte do léxico dos alunos, ou discussões que não contribuíssem para a aprendizagem da divisão, tendo em vista que esse era o objetivo primeiro da aula. Apesar disso, não negamos o valor de interpretações e determinadas discussões em aulas de Matemática.

Decidimos que a primeira divisão que seria proposta aos alunos deveria apresentar uma situação que envolvesse dinheiro, de modo a se conectar com a realidade dos estudantes. O contexto trataria da compra de um celular, situação que qualquer um dos alunos poderia vivenciar.

A princípio pensamos na divisão 540:12 e propusemos que cada uma das professoras do grupo realizasse essa divisão (Figura 4) buscando expor as variadas estratégias utilizadas.

Figura 4 - Cadernos das professoras.





Fonte: Acervo da autora (2017).

O método mais usado pelo grupo foi o algoritmo da divisão e pensando em uma estratégia de cálculo mental, uma das professoras provocou o grupo:

Ana:	E se nenhuma de nós tivesse papel e caneta ou calculadora? Como faríamos essa divisão?
Cláudia:	Eu resolveria por aproximação.
Marta:	Eu faria 12x50. Seriam 600.
Cláudia:	Você vai por cima, eu vou por baixo. Eu faço 120 mais 120 mais 120...
Lúcia:	Eu faria 12x10 é 120. Por aí vai... 240, 360...

Essa diversidade na forma de operar a mesma divisão nos muniu de estratégias que poderiam ser utilizadas pelos alunos e, caso não fossem, seriam apresentadas pela professora.

Em seguida, Eva chamou a atenção do grupo para uma estratégia de resolução que a divisão 448:8 proporcionava. O 448 poderia ser decomposto obviamente em números múltiplos de 8. Poderíamos fazer 400:8, 40:8 e 8:8 ou ainda 400:8 e 48:8. Essa nova estratégia não se aplicava na divisão de 540 por 12. Certamente, o número 540 pode ser decomposto em múltiplos de 12, mas não de maneira imediata e óbvia. Definimos então que essa seria a primeira divisão proposta: 448:8.

Para contextualizar a divisão e, retomando a proposta de compra de um celular, decidimos que o celular custaria R$ 448,00 e esse valor seria dividido em 8 parcelas iguais. Cogitamos a possibilidade de o valor ser referente à venda de um tablet, mas achamos que a aquisição de um celular seria mais condizente com a realidade dos alunos.

Estabelecemos que seriam apresentados quatro problemas, devido ao fator tempo, sendo que o segundo problema teria um zero no quociente, o terceiro problema teria dois zeros não sequenciais no quociente e o quarto problema teria uma vírgula no quociente, seguida de um zero, ou seja, o algarismo da ordem dos décimos seria zero.

5.3 Reformulação dos Problemas

Após a elaboração dos problemas que seriam propostos aos alunos, buscamos melhorar a linguagem de cada um deles. Iniciamos as situações inserindo os estudantes em cada um deles, com a preocupação de apresentar dados e situações que pudessem ser realmente vivenciados pelos alunos. Nos atentamos ainda em apresentar as divisões usando diferentes expressões daquelas utilizadas nos livros didáticos.

A primeira proposta dos problemas apresentava imagens meramente ilustrativas, que não contribuíam com informações pertinentes para a solução dos problemas. A professora Cláudia salientou que isso poderia ser um distrator[5], pois alguns alunos poderiam ficar procurando informações relevantes nas figuras. Reformulamos, portanto o enunciado dos problemas retirando imagens irrelevantes e apresentando apenas imagens necessárias à resolução dos mesmos. É importante destacar que os problemas foram elaborados para uma sala de aula específica, mas podem ser adaptados aos diferentes contextos.

[5] Aquilo que provoca distração – "Estímulo ou tarefa que desvia a atenção da tarefa de interesse primordial" (VANDENBOSS, 2010, p.301).

Problema 1

<u>Primeira proposta:</u>

João precisou comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. Ele se interessou por um *Smartphone* Positivo, como o da imagem a seguir.

Smartphone Positivo Twist 4G S520
Azul com Dual Chip, Tela 5”

Esse *Smartphone* custava R$ 448,00. João, achando o preço muito bom, decidiu comprá-lo e parcelar o seu valor em oito prestações iguais. Qual foi o valor de cada prestação paga por João?

Optamos por substituir a expressão “João quer comprar um celular.” por “Você quer comprar um celular.”. Dessa maneira, os alunos seriam inseridos na problemática, o que poderia motivá-los a resolvê-la.

Decidimos apresentar o máximo de informações na imagem que trazia o anúncio do celular, como valor e o número de prestações, e verificamos posteriormente que o texto não informava que se tratavam de 8 prestações iguais. Nesse caso, a professora deveria informar os alunos dessa condição, ressaltando que muitas vezes essa informação não está escrita nos anúncios, mas subentendida nas propagandas.

Reformulação da equipe:

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção.

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar a prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

Problema 2

Primeira proposta:

A secretaria de educação do município BOA FÉ fez uma pesquisa socioeconômica com os 9270 alunos de suas escolas para traçar um perfil desses estudantes. Nas escolas dessa cidade, há 30 alunos em cada turma. Quantas turmas existem em BOA FÉ?

Percebemos que a palavra “socioeconômico” e a expressão “perfil dos estudantes” poderiam gerar dúvidas entre os alunos. É certo que a discussão desses termos poderia expandir o vocabulário dos mesmos, mas, mantendo o foco no objetivo da aula, decidimos retirar esse contexto e também a imagem uma vez que não acrescentava dados relevantes ao problema.

Optamos por trocar a cidade fictícia, apresentada no primeiro enunciado, pelo município dos alunos. Cogitamos citar alguns bairros próximos à escola, mas tivemos a preocupação de não apresentar dados que não fossem verdadeiros.

Reformulação da equipe:

Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

Problema 3

Primeira proposta:

Com a volta às aulas, a rede de papelaria PAPEL MÁGICO precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas 14 lojas da região Sudeste. Foram comprados 15120 cadernos dos mais variados tipos e esses cadernos foram distribuídos igualmente entre as lojas da região Sudeste. Quantos cadernos cada loja recebeu?

Pensamos em trocar o nome da papelaria por alguma papelaria real, mas novamente tivemos a preocupação de não apresentar dados que não fossem verídicos e, como um grande número de alunos do Ensino Médio participa de programas de estágio, usamos esse fato para inseri-los no contexto do problema.

O nome da papelaria, apresentado todo em letras maiúsculas na primeira proposta, foi escrito apenas com as primeiras letras maiúsculas na reformulação, pois acreditamos que as letras grandes poderiam ser um distrator para os estudantes.

Retiramos a quantidade de lojas do enunciado do problema e inserimos um mapa da região Sudeste, onde essas lojas estariam evidenciadas. Dessa maneira, apresentaríamos aos alunos algo pouco comum nos livros didáticos e a figura seria útil para a resolução do problema.

Por fim, buscamos não utilizar as palavras igual ou igualmente, para não soar repetitivo com relação aos problemas de divisão, fazendo com que os alunos tivessem contato com maneiras diferentes de se apresentar uma mesma operação matemática.

Reformulação da equipe:

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papelaria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?

Problema 4

Primeira proposta:

A distribuidora de grãos GRÃO AMÉRICA verificou que precisava utilizar 700 sacos para transportar 22435 quilogramas de feijão que estavam em seus galpões. Sabendo que cada saco comporta a mesma quantidade de feijão, quantos quilos desse grão haverá em cada saco?

Como nos problemas anteriores, retiramos a imagem que não agregava informações para a resolução da questão.

Ao invés de "mesma quantidade", a professora Cláudia sugeriu constar no enunciado que cada saco não deveria pesar mais que "x" quilos, mas esse comando poderia levar o aluno (corretamente) a colocar mais feijão em um saco que no outro, o que não era nosso objetivo. Para evitar a confusão, Joana sugeriu substituir o peso máximo dos sacos por "distribuir igualmente". Não conseguimos evitar essa expressão em todos os enunciados e, portanto, decidimos aqui no problema 4 manter o termo "mesma quantidade", mas alterar a estrutura da pergunta do problema por outra pouco convencional.

> Reformulação da equipe:
> A distribuidora de produtos alimentícios América precisa transportar 22435 quilogramas de café que estão em seus galpões. Há apenas 700 sacos no estoque. Você deve fiscalizar o ensacamento dessa distribuidora, garantindo que os sacos recebam a mesma medida de café. Qual é essa medida?

5.4 Estratégias de resolução dos problemas

Com todos os problemas reformulados, cada professora deveria resolvê-los individualmente, buscando diferentes estratégias de resolução para cada um, mantendo consonância com as diretrizes da aula e de um planejamento adequado à proposta de um *Lesson Study*. A maioria das professoras utilizou inicialmente o algoritmo da divisão e, em seguida, alguns dos métodos que havíamos evidenciado no primeiro encontro, como aproximações e decomposição, e, assim, previmos as possíveis soluções para cada problema elaborado.

Destacamos que, durante a aplicação da aula, depois de resolver em grupo os problemas, os alunos deveriam ir à lousa registrar e discutir suas soluções com os colegas (*bansho* e *neriage*). Levantamos a importância de a professora regente da aula passar entre os grupos enquanto eles estivessem resolvendo a atividade e verificar se algum grupo havia resolvido o problema de maneira diferente. Caso fossem verificadas resoluções distintas entre os grupos, eles deveriam ser encorajados a expô-las para os demais colegas.

Todas as estratégias aqui apresentadas deveriam estar presentes na aula, por iniciativa dos alunos ou pela professora. Ao final desse momento, era importante conectar as estratégias, mostrando o que era equivalente em diferentes algoritmos e finalizando com uma síntese do processo (*neriage*).

Problema 1

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção.

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar à prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

O estudo de material didático é parte do *Lesson Study*. A equipe considerou relevante, para a compreensão do algoritmo da divisão, o entendimento da relação entre as ordens no sistema decimal. Para isso, optaram por trabalhar com Material Dourado.

O Material Dourado (Figura 5), desenvolvido por Maria de Montessori, é composto por cubinhos, barras, placas e cubo. Uma barra equivale a 10 cubinhos. Uma placa equivale a 10 barras ou 100 cubinhos. O cubo equivale a 10 placas, ou 100 barras, ou 1000 cubinhos.

Figura 5 - Material Dourado.

Fonte: Imagem retirada da internet[6].

[6] http://www.edupp.com.br/2015/05/aplicacao-do-material-dourado-montessoriano-em-sala-de-aula/. Acesso em 14 jun. 2018.

Por não haver material disponível para todos os alunos manipularem, decidimos trabalhar com a projeção na lousa de suas imagens. Teríamos, assim, uma abordagem visual baseada em algo concreto, que não foi considerado melhor, mas o que era possível.

- Algoritmo da divisão com o uso do Material Dourado

A estratégia consiste em representar o dividendo e o quociente com o Material Dourado. Um cubinho representa a unidade, uma barra contém dez cubinhos e representa uma dezena e uma placa, com cem cubinhos, distribuídos em dez barras, representa uma centena. Utilizando esse recurso, os estudantes podem visualizar as relações existentes entre as ordens e os reagrupamentos que são feitos durante a divisão, que trocam, quando necessário, elementos de uma ordem pela quantidade equivalente de elementos da ordem seguinte. As imagens abaixo (Figura 6) ilustram a operação de divisão considerando a decomposição dos números com esse material.

O número 448 foi decomposto em 400 (4 centenas ou 4 placas) + 40 (4 dezenas ou 4 barras) + 8 unidades (8 cubinhos) (Figura 6a). Não é possível dividir 4 placas em 8 grupos, a menos que as placas sejam quebradas. Matematicamente, isso equivale a trocar cada uma das placas por 10 barras (Figura 6b), contabilizando assim um total de 40 + 4 = 44 barras ou 44 dezenas (Figura 6c). Por não ser possível distribuir ao menos 1 placa em cada um dos 8 grupos, o quociente não terá placas, ou seja, terá 0 centenas.

Dividimos então 44 placas em 8 grupos (Figura 6d). Cada grupo receberá 5 placas (o que significa 5 dezenas no quociente) e ainda restarão 4 placas (Figura 6e). O próximo passo é transformar cada placa em 10 cubinhos (Figura 6f), ou seja, 4 dezenas (placas) equivalem a 40 unidades (cubinhos), totalizando 48 unidades (cubinhos) a serem divididos (Figura 6g). Agora, cada um dos 8 grupos receberá 8 unidades (cubinhos).

Desta forma, cada um dos 8 grupos receberá 0 placas, 50 barras e 6 cubinhos, totalizando 56 cubinhos (Figura 6h). A correspondência desse resultado no algoritmo está representada na Figura 6i.

Figura 6 - Representação da divisão 448:8 com o uso do Material Dourado.

Figura 6a

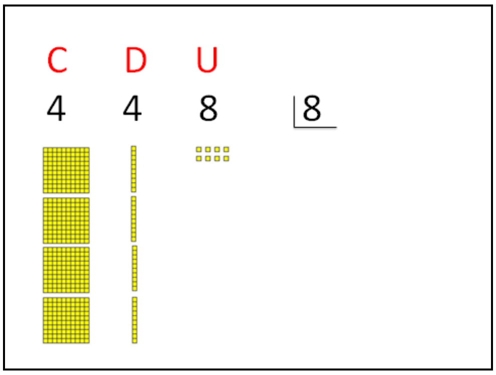


Figura 6b

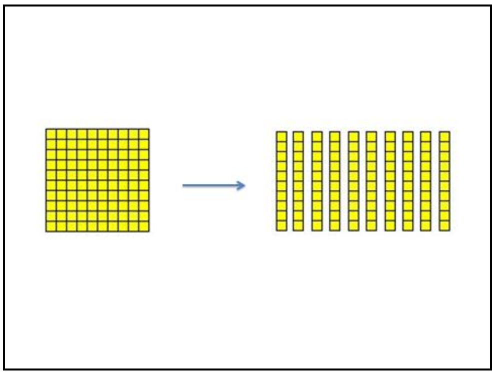


Figura 6c

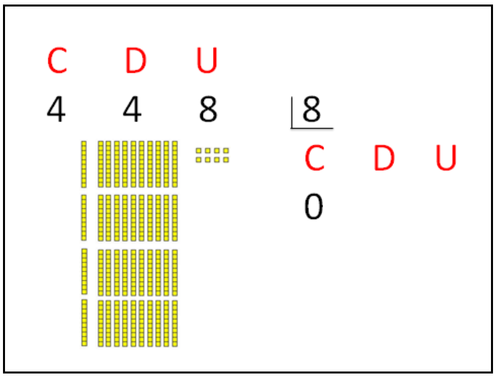


Figura 6d

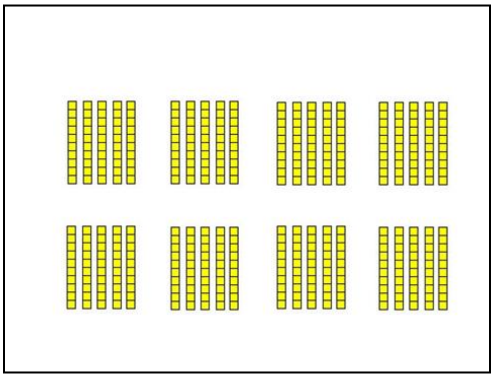


Figura 6e

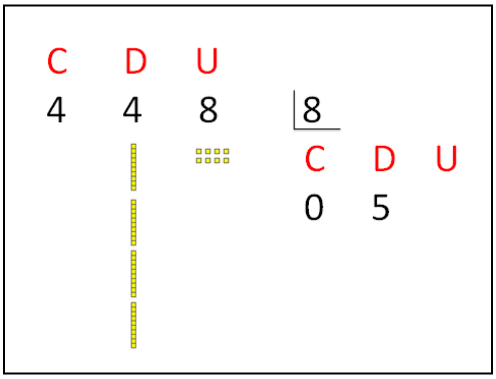


Figura 6f

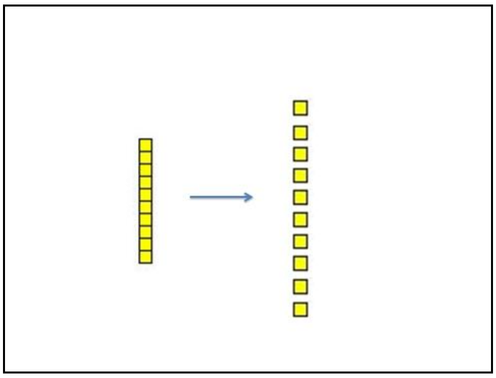


Figura 6g

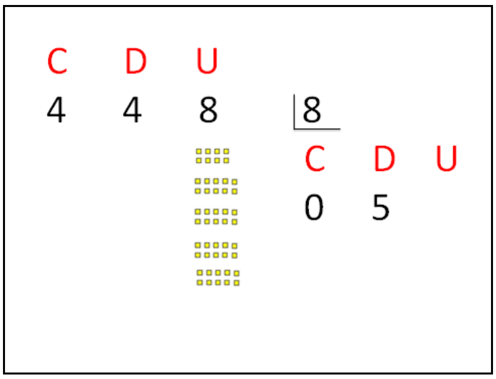


Figura 6h

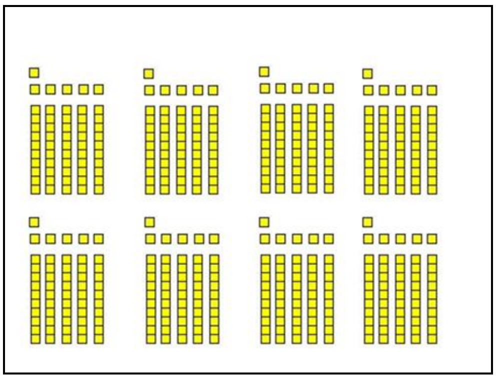
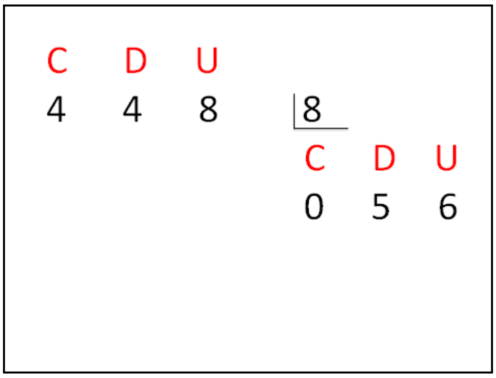


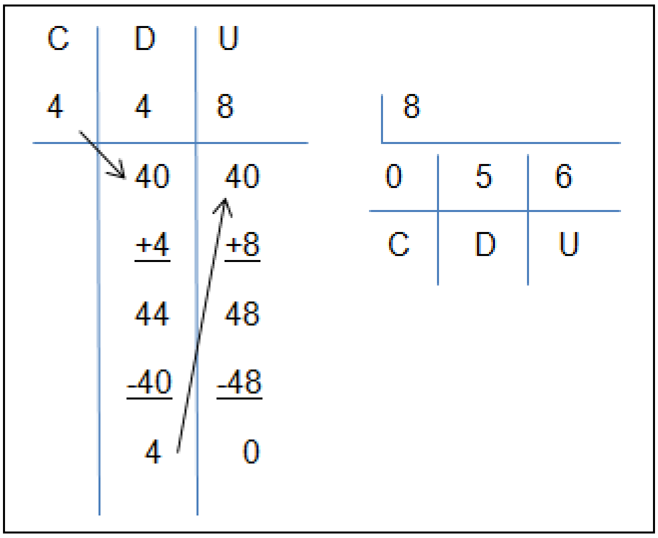
Figura 6i



Fonte: Acervo da autora (2017).

- <u>Algoritmo da divisão com o detalhamento das relações entre as ordens</u>

Uma vez que o aluno esteja familiarizado com a representação pictórica (Figura 6), o grupo decidiu avançar para a representação numérica do algoritmo. O importante é que nesse momento a relação entre as ordens se mantenha presente, pois é o sentido matemático da operação. Nossa experiência diz que esse é o coração da compreensão do algoritmo da divisão. Se o aluno compreender a relação entre as ordens, não precisará decorar onde coloca zero ou onde coloca a vírgula, assim, evitamos o famoso “abaixa o zero e coloca a vírgula”, que os alunos usualmente repetem sem entender, o que os leva, por vezes, a resoluções incorretas. Essa estratégia expõe cada reagrupamento que é feito entre os elementos das ordens do dividendo e o quociente também é construído expondo as ordens e enfatizando a quantidade de elementos em cada uma delas.



- Algoritmo da divisão sem o destaque da relação entre ordens

Compreendida a relação entre as ordens, poderíamos omiti-la da operação na utilização do algoritmo da divisão.

$$
\begin{array}{r|l}
448 & 8 \\ \cline{2-2}
\underline{-40} & 56 \\
48 & \\
\underline{-48} & \\
0 &
\end{array}
$$

- Aproximação regressiva ("por cima")

A estratégia denominada pelo grupo como aproximação regressiva consiste em fazer contas que contenham aproximações superiores ao valor de 448, como o exemplo a seguir.

$8.60 = 480$. Já extrapolamos 448.

Mas $8.4 = 32$ e $448 = 480 - 32$.

Então $448 = 480 - 32 = (8.60 - 8.4) = 8.(60 - 4) = 8.56$.

Portanto, temos que $448 : 8 = 56$.

- Aproximação progressiva ("por baixo")

Analogamente, podemos realizar operações que contenham aproximações inferiores ao valor de 448, como por exemplo:

$8.50 = 400$. Ainda não chegamos ao número 448.

Mas $8.6 = 48$ e $448 = 400 + 48$.

Então $448 = 400 + 48 = 8.50 + 8.6 = 8.(50 + 6) = 8.56$.

Temos novamente que $448 : 8 = 56$.

- Decomposição

Nesse modo, iniciamos com uma decomposição do número 448 (400+48 ou 400+40+8) e seguimos operando a divisão em cada parcela (400÷8 + 48÷8 ou 400÷8 + 40÷8 + 8÷8). Ao final, somamos os resultados obtidos, recompondo o número (56). Duas possíveis decomposições são apresentadas a seguir:

$$448 = 400 + 48.$$

$$\text{Então, } \frac{448}{8} = \frac{400}{8} + \frac{48}{8} = 50 + 6 = 56.$$

$$448 = 400 + 40 + 8.$$

$$\text{Então, } \frac{448}{8} = \frac{400}{8} + \frac{40}{8} + \frac{8}{8} = 50 + 5 + 1 = 56.$$

- <u>Método americano</u>

Utilização de subtrações sucessivas e aproximações, como uma combinação de estratégias anteriores.

É importante ressaltar que não existe uma única maneira de efetuar a divisão através do processo americano. Duas possíveis aplicações do método são apresentadas a seguir:

448	8
-80	10
368	20
-160	20
208	+6
-160	56
48	
-48	
0	

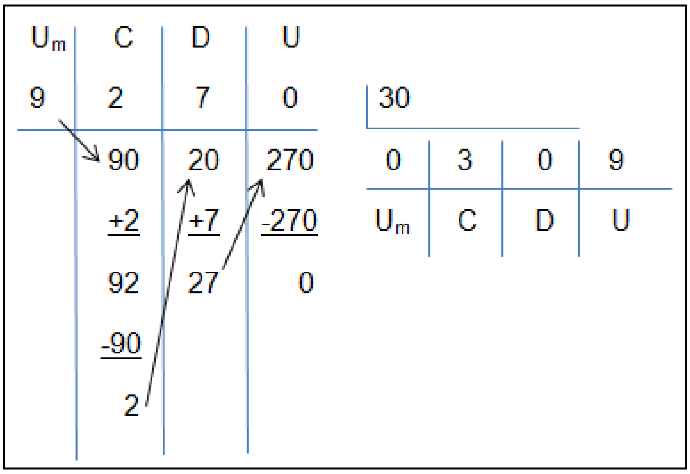
448	8
-240	30
208	20
-160	+6
48	56
-48	
0	

Problema 2

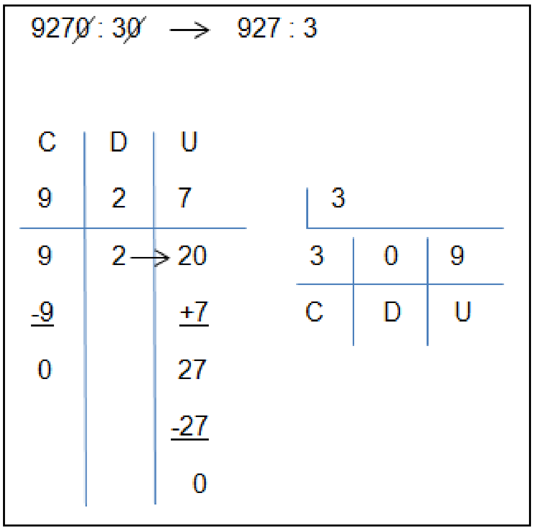
Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

As estratégias para o problema dois são as mesmas, com a variação dos números. Nesse segundo momento, optamos por não trabalhar novamente com a representação do Material Dourado. Mas, se necessário, a professora estaria preparada para usá-lo e os seus slides estavam prontos.

- <u>Algoritmo da divisão com a relação entre as ordens</u>



Previmos ainda que os alunos poderiam simplificar os números antes de efetuar a divisão. Como 9270:30 = 927:3, basta efetuar a divisão 927:3.



Fazemos uma ressalva. A simplificação de números é possível quando estamos trabalhando com divisões exatas. Se a divisão não fosse exata e quiséssemos analisar o resto da divisão, um cuidado extra deveria ser tomado. Repare nas duas contas a seguir:

449	8
-80	10
369	20
-160	20
209	+6
-160	56
49	
-48	
1	

4490	80
-800	10
3690	20
-1600	20
2090	+6
-1600	56
490	
-480	
10	

Ao prosseguir com a operação, certamente encontraremos o mesmo valor para o quociente, uma vez que as frações $\frac{449}{8}$ e $\frac{4490}{80}$ são equivalentes.

Por que então o resto é diferente em cada uma das divisões?

> A divisão euclidiana, ou divisão com resto, é uma das quatro operações que toda criança aprende na escola. Sua formulação precisa é: dados a inteiro e b inteiro não nulo, existem q e r inteiros, com $0 \leq r < b$ e $a = bq + r$. Tais q e r estão unicamente determinados e são chamados o quociente e resto da divisão de a por b, respectivamente.

Veja o que acontece quando trocamos 449 por 4490 e 8 por 80:

$$449 = 8 \times 56 + 1$$

Multiplicando por 10 os dois lados da equação, temos:

$$449 \times 10 = (8 \times 56 + 1) \times 10$$

Aplicando a propriedade distributiva do lado direito da equação,

$$4490 = (8 \times 56) \times 10 + 1 \times 10$$

De maneira equivalente,

$$4490 = 80 \times 56 + 10$$

Concluímos que o quociente (56) é o mesmo nos dois casos, mas o resto é diferente (respectivamente 1 e 10). Essa diferença está exatamente relacionada à questão das ordens, que ressaltamos anteriormente.

- Algoritmo da divisão

Novamente, os zeros do divisor e dividendo podem ser (ou não) cancelados, trabalhando com frações equivalentes.

9270	30
-90	309
27	
-0	
270	
-270	
0	

927	3
-9	309
02	
-0	
27	
-27	
0	

- Aproximação regressiva

Fazer aproximações por valores superiores a 9270, por exemplo:

$3.31 = 93$. Então $30.310 = 9300$.

Extrapolamos 9270 por 30 unidades.

Logo, $9270 = 9300 - 30 = 30.310 - 30.1 = 30.(310 - 1) = 30.309$.

Temos então, que $9270 : 30 = 309$.

- Aproximação progressiva

Fazer aproximações por valores inferiores a 9270, por exemplo:

$30.300 = 9000$. Ainda não chegamos ao número 9270.

Mas $30.9 = 270$ e $9270 = 9000 + 270$.

Então $9270 = 9000 + 270 = 30.300 + 30.9 = 30.(300 + 9) = 30.309$.

Temos novamente que $9270 : 30 = 309$.

- Decomposição

O aluno decompõe o dividendo 9270 (por exemplo, 9270 = 9000 + 270) e depois divide cada parcela por 30.

$9270 = 9000 + 270$.

Então, $\frac{9270}{30} = \frac{9000}{30} + \frac{270}{30} = 300 + 9 = 309$.

Também aqui o aluno pode ou não cancelar os zeros do divisor e do dividendo, dividindo ambos por 10, e trabalhando com frações equivalentes.

- Método americano

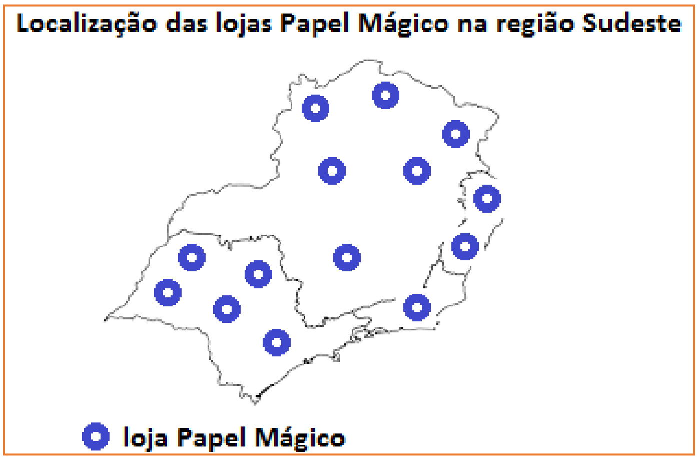
Utilização de subtrações sucessivas e aproximações. Duas possibilidades são mostradas a seguir.

9270	30
-6000	200
3270	100
-3000	+9
270	309
-270	
0	

9270	30
-3000	100
6270	100
-3000	100
3270	+9
-3000	309
270	
-270	
0	

Problema 3

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papelaria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?



Para resolver o problema 3, o aluno precisa extrair da imagem a informação de que a loja possui 14 filiais. A partir daí, basta dividir 15120 por 14 utilizando um dos métodos anteriores.

- <u>Algoritmo da divisão com a relação entre as ordens</u>

D_m	U_m	C	D	U
1	5	1	2	0
	10	10	110	0
	+5	+1	+2	
	15	11	112	
	-14		-112	
	1		0	

14				
0	1	0	8	0
D_m	U_m	C	D	U

- <u>Algoritmo da divisão</u>

15120	14
-14	1080
11	
-0	
112	
-112	
00	

- Aproximação progressiva e regressiva

Por exemplo:

Se fossem 1000 cadernos por loja, teríamos $14.1000 = 14000$.

Ainda faltam 1120 cadernos.

Distribuindo mais 100 cadernos por loja, teríamos $14.100 = 1400$.

Agora sobraram $1400 - 1120 = 280$ cadernos.

Precisamos retirar 280 cadernos.

Mas $14.20 = 280$.

Então,

$$15120 = 14.1000 + 14.100 - 14.20 = 14.(1000 + 100 - 20) = 14.1080.$$

Portanto, $15120 : 14 = 1080$.

- Método americano

Duas possibilidades seriam:

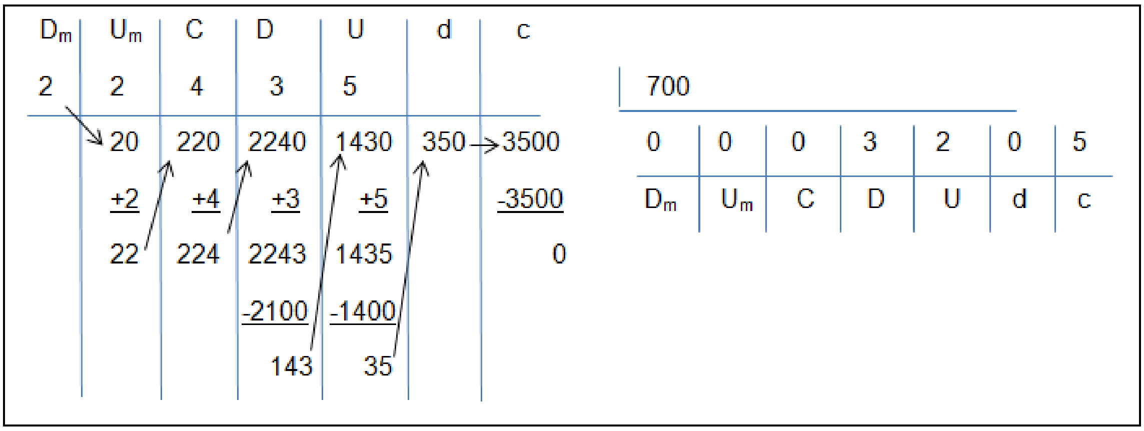
15120	14
-14000	1000
1120	10
-140	20
980	20
-280	20
700	+10
-280	1080
420	
-280	
140	
-140	
0	

15120	14
-14000	1000
1120	50
-700	10
420	+20
-140	1080
280	
-280	
0	

Problema 4

A distribuidora de produtos alimentícios América precisa transportar 22435 quilogramas de café que estão em seus galpões. Há apenas 700 sacos no estoque. Você deve fiscalizar o ensacamento dessa distribuidora, garantindo que os sacos recebam a mesma medida de café. Qual é essa medida?

- <u>Algoritmo da divisão com a relação entre as ordens</u>



- <u>Algoritmo da divisão</u>

22435	700
-2100	32,05
1435	
-1400	
350	
-0	
3500	
-3500	
0	

- <u>Aproximação progressiva e/ou regressiva</u>

Por exemplo:

$30.700 = 21000$ e $2.700 = 1400$.

Temos,

$21000 + 1400 = 700.30 + 700.2 \rightarrow 22400 = 700.(30 + 2) = 700.32$.

Ainda faltam 35 kg para serem distribuídas em 700 sacos.

Se fossem 350 kg teríamos a metade de 700, então colocaríamos meio quilo a mais em cada saco.

Como são apenas 35 kg (que é um décimo de 350) devemos colocar 0,05 kg (que é um décimo de meio quilo) a mais em cada saco.

Temos então, $32 + 0,05 = 32,05$.

5.5 Hipóteses de erros e questionamentos dos/para os alunos

O texto é o primeiro contato do aluno com o problema ou problemática e deve ser bem entendido, como destacam Souza e Guimarães (2015), pois, do contrário, os desdobramentos para os objetivos da aula podem ficar comprometidos. Para isso, a professora solicitaria que os alunos explicassem os textos dos problemas com suas palavras. Os alunos deveriam, principalmente, demonstrar entendimento sobre os dados do problema e o que se pede.

Ao pensar nos possíveis erros e questionamento dos alunos, decidimos que algumas intervenções poderiam ser feitas enquanto eles estivessem solucionando os problemas em grupos, com a finalidade de minimizar os erros públicos e, assim, evitar que os alunos se sentissem constrangidos e não participassem efetivamente da aula. Essas intervenções poderiam ser aplicadas através de questionamentos para os estudantes, como por exemplo:

- Me explica como você fez isso?
- Por que você colocou esse algarismo aqui?

Essas intervenções também poderiam ser feitas durante o *neriage*, para que os alunos pudessem se expressar e explicar o raciocínio utilizado em cada resolução. Isso os ajudaria a criar significado para um processo (nesse caso, o algoritmo da divisão ou o método que os alunos escolhessem) que muitas vezes fora memorizado sem clara compreensão. Quando o aluno é introduzido no conteúdo da divisão ele precisa conhecer a relação entre as ordens, mas, muitas vezes, isso não está claro para ele. Com regras decoradas, ele não sabe, por exemplo, onde colocar a vírgula e zeros no quociente.

Durante a resolução em grupos e a exposição das soluções para toda a turma, o esforço e tentativa dos alunos deveriam ser sempre valorizados, mesmo que apresentassem soluções erradas. Frases como “foi uma boa tentativa” e “vocês tiveram um bom raciocínio” poderiam servir de incentivo aos alunos e deveriam ser usadas.

Em consonância com a metodologia de *Lesson Study*, várias estratégias de resolução para um mesmo problema são recomendadas (FERNANDEZ; YOSHIDA, 2014; SOUZA; GUIMARÃES, 2015). Como isso não é usual no ensino brasileiro, pensamos que alguns alunos poderiam questionar a necessidade de todas essas estratégias serem trabalhadas e acharem mais fácil tentar entender apenas uma delas. Enfatizamos a importância de explicar para os alunos que um determinado método pode ser simples para um aluno, mas não ser tão simples para outro. Mostrar as várias possibilidades permite que possam ampliar seus modos de pensar matematicamente e usá-los em outras situações-problemas da Matemática. Podem inclusive eleger o modo que lhe seja mais simples. Teoricamente, a diversidade de pensamentos se deve ao fato de diferentes pessoas terem diferentes representações mentais para uma mesma situação (SOUZA, 2012). Uma vez definida as diretrizes gerais, passaremos à discussão específica de cada um dos problemas.

Problema 1

Para estimular a compreensão do texto do primeiro problema, foram planejados os seguintes questionamentos:

- O que está sendo vendido?
- Quantos celulares serão comprados?
- Quantas parcelas serão feitas?
- Quanto custa o celular?

Imaginamos que este problema apresentava uma divisão simples, 448:8, e os alunos dificilmente apresentariam algum erro. Aliás, foi justamente para que os alunos ganhassem confiança que esta conta foi escolhida.

Um possível erro dos alunos poderia ocorrer em relação aos zeros depois da vírgula no número 448,00. Seria válido fazer o questionamento:

- Qual é o papel da vírgula no número 448,00?

Sem a compreensão de que a vírgula serve para separar a parte inteira da parte decimal e que escrever 448,00 é equivalente a escrever 448, imaginamos que alguns alunos que efetuassem a divisão mantendo esses zeros, poderiam associar 448,00 a 44800 e apresentar como resposta o número 5600 ao invés de 56,00, esquecendo a vírgula e a relação entre a parte inteira e a decimal.

Nesse caso, poderia ser eficaz pedir ao aluno que lesse sua resposta em voz alta, pois acreditamos que alguns deles escreveriam 5600, mas leriam 56. Seria importante então, enfatizar como a presença da vírgula mudaria completamente o valor.

Nos preocupamos ainda com o fato de que muitos alunos poderiam não se atentar para o absurdo de se dividir 448 por 8 e obter como resposta o número 5600. Nesse momento, enfatizaríamos com os alunos que não podemos, em uma divisão por um número natural, obter como resposta um valor superior à quantidade inicial que queremos dividir.

Durante a exposição das soluções dos grupos, mesmo com o acerto da solução, alguns questionamentos poderiam ajudar a atribuir mais significado para o algoritmo da divisão:

- Por que vocês começaram dividindo o 44 e não o 4?
- Por que você colocou esse 5 aqui no quociente?

- Por que o resto é zero?
- Por que não é 8 ou 6 no quociente, por exemplo, no lugar do 5?

A professora Cláudia destacou que questionamentos como esse último podem ser muito produtivos pois “a gente vai sempre pelo que *é*, mas nunca pelo que *não é* e o que *não é* pode ser muito estimulador”.

Caso algum aluno apresentasse a decomposição 448=400+40+8, ou mesmo se ela só fosse apresentada pela professora, questionamentos como os seguintes poderiam ser feitos, tanto partindo dos alunos quanto para os alunos:

- Porque você fez a decomposição dessa maneira?
- Só existe essa maneira de decompor um número?

Seria importante mostrar para os alunos que ao fazer esse tipo de decomposição eles estariam usando, mesmo que implicitamente, a mesma relação de ordens que utilizamos no algoritmo da divisão e que outras decomposições poderiam sim ser feitas como, por exemplo, 448=400+48.

Os alunos deveriam ser desafiados a sempre pensar nas semelhanças entre os métodos. Ao expor suas estratégias, deveríamos questioná-los:

- Isso é diferente do que fizemos antes?
- Em que sentido isso é diferente?
- Em que sentido isso é igual ao método anterior?

Uma das professoras ainda destacou: “Na verdade quando o aluno faz a conta por estimativa, por exemplo, 50x8 é 400, isso não é diferente do 5x8=40. É a mesma coisa, é a mesma conta. Esse 5x8=40 que aparece aqui (no algoritmo) é esse 50x8 que aparece na estimativa. Quando a pessoa vai usar algoritmo o que ele vai fazer? 44:8. Olha como não deixa de ser uma estimativa: 6x8 é 48... passou; 5x8 é 40... ah então é 5. Isso é estimativa!”.

Problema 2

No segundo problema a divisão proposta era 9270:30. Para garantir a compreensão do enunciado, seria válido questionar:

- São quantos alunos no total?
- Quantos alunos devemos alocar em cada turma?

Imaginamos que palavra alocar poderia gerar dúvidas, mas uma rápida conexão com a palavra colocar poderia ser feita. Levantamos a possibilidade de os alunos simplificarem os zeros, mesmo sem compreenderem o motivo, fazendo a divisão de 972 por 30.

Questionamentos que poderiam ser feitos a fim de esclarecer a simplificação realizada seriam:

- Porque você simplificou os zeros?
- E se fosse 9207:30? Eu poderia simplificar os zeros também?
- E se o último dígito tanto do dividendo, quanto do divisor fosse 8 ao invés de 0, eu também poderia simplificar?

Destacamos aqui a importância de esclarecer para os alunos que cancelar os zeros que aparecem no final do dividendo e do divisor é permitido, pois isso equivale ao fato de que os dois números são divisíveis por 10. Ao fazer isso estamos, na realidade, dividindo os dois números por 10. As duas divisões, com ou sem zero, apresentarão a mesma solução. Mas é importante enfatizar que quando a divisão não for exata os restos não serão iguais nas duas divisões, apenas os quocientes.

De fato, se após o cancelamento dos zeros, a divisão do dividendo D pelo divisor d, resulta em um quociente q e resto r, a divisão original de 10xD por 10xd, resulta em mesmo quociente, mas resto dez vezes maior:

$$\boxed{D=d.q+r \rightarrow 10.D=10.(d.q+r) \rightarrow 10.D=10.d.q+10.r.}$$

Os alunos precisam compreender que os zeros não foram cancelados por se tratarem de algarismos iguais no final do dividendo e do divisor. O cancelamento se deve ao fato de dividendo e divisor serem múltiplos de 10. Da mesma maneira, não poderíamos cancelar o zero do dividendo que se encontrasse na ordem das dezenas, com o zero da ordem das unidades no divisor, no caso da divisão de 9207 por 30, pois apenas o divisor seria múltiplo de 10.

Pensamos ainda em outra dúvida que poderia surgir:

- Só é possível dividir dividendo e divisor por 10 para fazer a simplificação na conta?

É importante entender que podemos dividir tanto o dividendo quanto o divisor por outros valores, desde que usemos o mesmo valor para os dois números (o que equivale a dizer que eles são divisíveis pelo valor escolhido). A divisão após a simplificação ainda será equivalente à primeira e ambas apresentarão o mesmo quociente, mas não o resto, como vimos.

Identificamos que dois possíveis erros que apareceriam seriam as respostas 39 e 390, pelo fato de os alunos não compreenderem como posicionar o zero no quociente. Novamente, tínhamos como hipótese possíveis dúvidas nas relações entre as ordens, que poderiam persistir mesmo depois da discussão do problema 1. Os estudantes poderiam apresentar a seguinte divisão, após fazerem a simplificação dos zeros (ou equivalente, caso optassem por dividir 9270 por 30):

927	3
27	39
0	

Ao dividirem 9 por 3, obteriam 3 no quociente e, em seguida, ao verificarem a impossibilidade de dividir 2 (duas dezenas) por 3, os alunos poderiam ignorar a necessidade de apresentar o resultado zero, desta etapa, na ordem das dezenas no quociente. Poderiam então passar para a divisão de 27 por 3, obtendo 9 no quociente e chegando à resposta final 39.

Alguns alunos, talvez por acharem o número 39 muito pequeno para ser solução do problema apresentado, acrescentariam um zero no final, obtendo 390, de modo a tentar ajustar a resposta ao problema.

Surgiu ainda o pensamento que alguns alunos poderiam apresentar 3090 como resposta, através da divisão:

9270	30
270	3090
0	

A resposta 3090 poderia surgir pelo fato de os alunos acreditarem que se o dividendo e o divisor terminam em zero, o quociente também deveria terminar. Eles fariam a divisão corretamente, mas acrescentariam um zero de maneira equivocada no quociente.

Problema 3

O terceiro problema propunha a divisão 15120:14, mas pelo fato do divisor 14 não aparecer no enunciado e sim na imagem, verificar esse entendimento através de questionamentos seria de extrema importância:

- Quantos cadernos serão distribuídos?
- São quantas lojas?

Quando os grupos fossem expor suas soluções, poderia ser válido perguntar:

- Eu posso simplificar um algarismo inicial 1 do dividendo com o 1 inicial do divisor?
- E se os dois números terminassem em 1, eu poderia simplificá-los?

Esses questionamentos reforçariam que a simplificação é feita através da divisão do dividendo e do divisor por um mesmo valor (um divisor comum) e não simplesmente pela eliminação de algarismos iguais, como foi destacado no segundo problema.

Uma das possíveis respostas erradas que os alunos poderiam apresentar para o problema seria 18, por não se atentarem para a questão das ordens e, consequentemente, para a existência dos zeros no quociente.

15120	14
112	18
00	

Alguns questionamentos poderiam chamar a atenção dos grupos para esse erro:

- Se tenho mais de 15000 cadernos, faz sentido cada uma das 14 lojas receber 18 cadernos?
- Se fossem 10 lojas, por exemplo, cada uma recebendo 18 cadernos, 10x18 chegaria perto de 15000 cadernos?

É importante trabalhar as estimativas e a análise crítica da resposta perante o problema. Algumas soluções erradas podem ser descartadas ao fazer esse tipo de questionamento e verificar que alguns valores soam um tanto absurdos para serem solução.

Acreditamos que alguns alunos não se atentariam para a existência do zero das centenas na resposta correta 1080, mas colocariam zero na ordem das unidades, apresentando a resposta 180. Uma possível justificativa seria o aluno, observando que o dividendo termina em zero, ser induzido a também colocar zero na ordem das unidades do quociente.

Observamos ainda que alguns alunos poderiam achar as respostas anteriores, 18 e 180, muito pequenas e acrescentariam zeros para chegar a um número mais plausível, obtendo assim a resposta 1800. Isso demonstraria criticidade em relação à resposta embora desconhecimento do procedimento para efetuar a divisão.

Problema 4

No problema 4, a divisão proposta seria 22435:700 e para garantir a compreensão poderiam ser feitos os seguintes questionamentos aos alunos:

- O que a distribuidora quer fazer?
- Qual o seu papel nesse processo?
- De quantos sacos a distribuidora dispõe?
- Quantos quilogramas serão distribuídos nos sacos?
- Podemos colocar quantidades diferentes de café em cada saco?

Acreditamos que alguns alunos poderiam trazer o seguinte questionamento:

- Como assim “medida”? O que é medida?

Bastaria deixar claro que o problema estava falando da quantidade de café que ficaria em cada saco.

Durante as exposições das soluções pelos alunos, ao utilizarem o algoritmo da divisão, achamos importante fazer alguns questionamentos quanto à existência da vírgula no quociente:

- Por que vocês colocaram a vírgula nesse local?

É preciso que todos se apropriem da ideia de que a vírgula é utilizada para separar a parte inteira da parte decimal e que, portanto, não pode ser colocada de qualquer maneira no quociente.

Apesar de acreditarmos ser pouco provável o questionamento a seguir, algum aluno ainda poderia fazê-lo:

- O que é um inteiro e o que é decimal?

Os alunos precisariam compreender que se trata de uma organização de ordens dos números no sistema de numeração decimal. Se estivermos falando de dinheiro, por exemplo, a parte decimal são os centavos. A parte decimal é o que é menor que um inteiro.

Um possível erro nessa questão seria a resposta 32,5, por mais uma vez o aluno não levar em consideração o zero do quociente, apesar de se atentar para a parte decimal. Ainda acreditamos que alguns alunos desconsiderariam a parte decimal, apresentando como resposta o número 32.

- Pode sobrar café?

Esse questionamento poderia ser útil para forçar que o aluno passe da parte inteira para a parte decimal do quociente, não deixando resto na divisão.

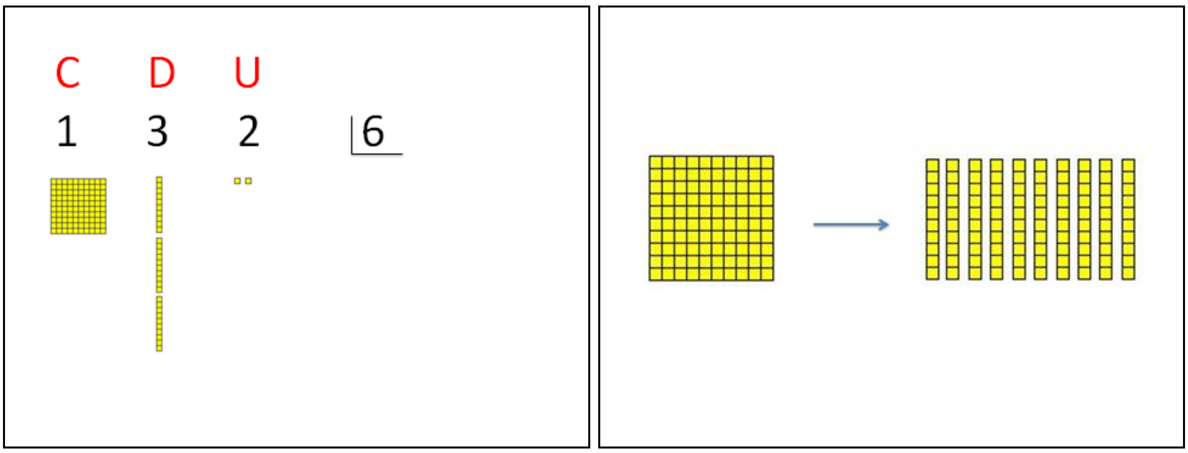
5.6 Estratégias para a organização do tempo

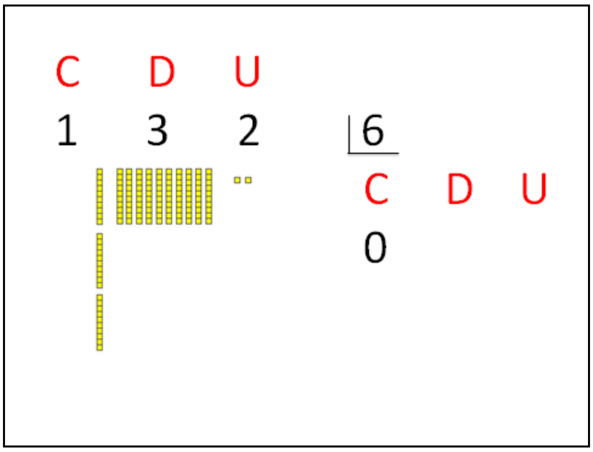
Nosso grupo teve a preocupação de se preparar para a possibilidade de imprevistos na aula planejada. Uma das preocupações foi com relação ao tempo, pois, apesar de termos previsto vários questionamentos dos alunos, outras dúvidas poderiam surgir ou ainda as discussões sobre determinado problema poderiam se prolongar e extrapolar o tempo previsto para o mesmo.

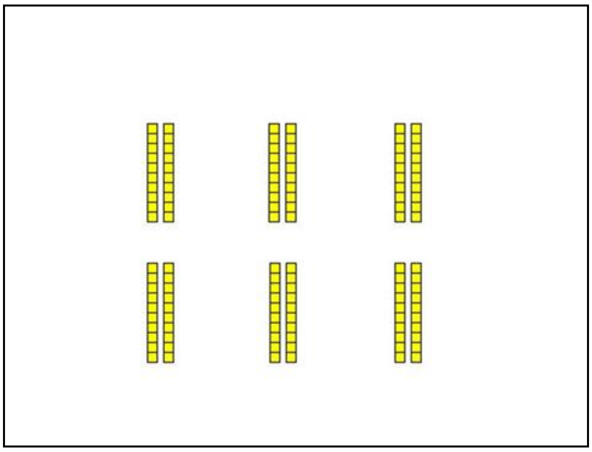
Foi acordado que não seria proveitoso iniciar um novo problema em uma aula e concluí-lo em outra. Ficou decidido então que, caso o tempo restante em uma aula não fosse sufuciente para a discussão de um novo problema, a professora regente da aula proporia aos alunos exercícios de fixação, nos mesmos moldes dos problemas trabalhados em sala. Esses exercícios seriam uma solução para aproveitar o tempo restante em uma aula e ainda ajudariam a reforçar as estratégias trabalhadas e a solidificar os aprendizados.

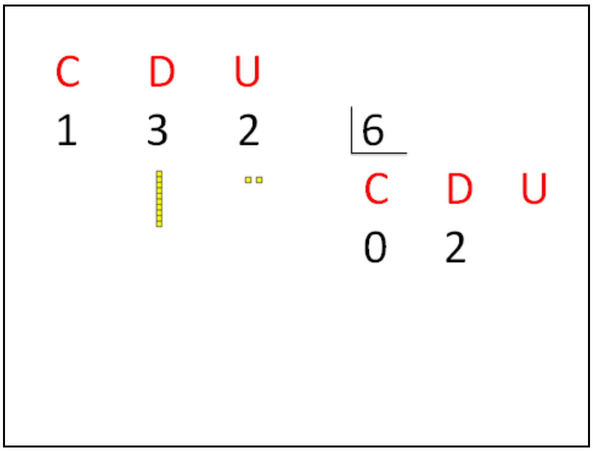
Para esse fim, decidimos que se hovesse tempo após a resolução do primeiro problema, que não fosse suficiente para a realização do segundo, apresentaríamos a divisão 132:6 com a utilização das imagens do material dourado, recorrendo novamente a um recurso visual para alcançar a compreensão dos alunos. Se o tempo fosse insuficiente, o exercício seria oferecido na avaliação após a aula. As imagens da Figura 7 seriam expostas e detalhadas para a turma, como foi feito com o problema 1.

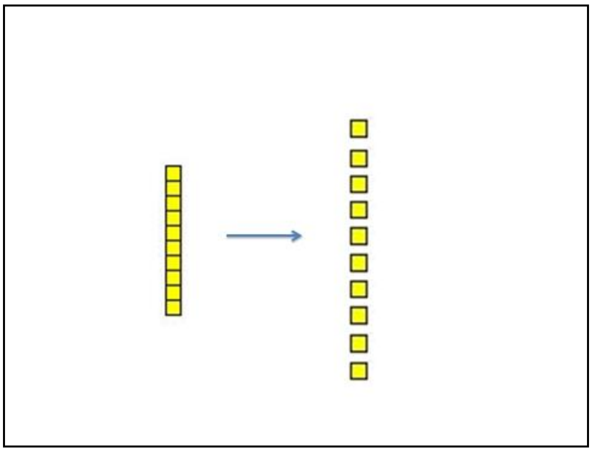
Figura 7 - A divisão 132:6 explicada com o Material Dourado.

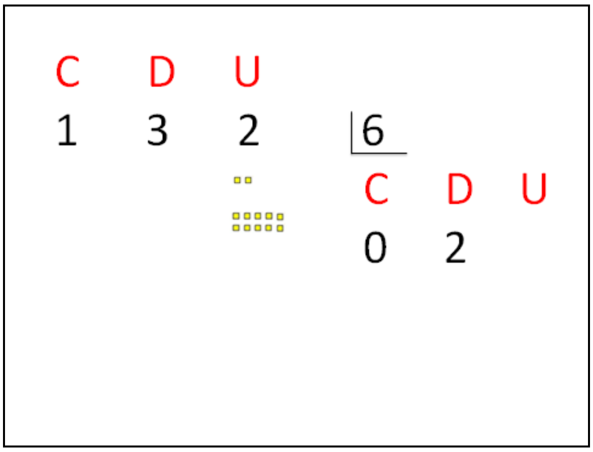


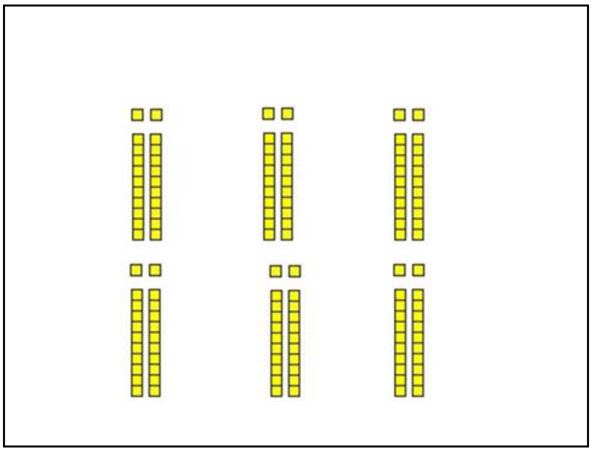

C D U
1 3 2 | 6
C D U
0

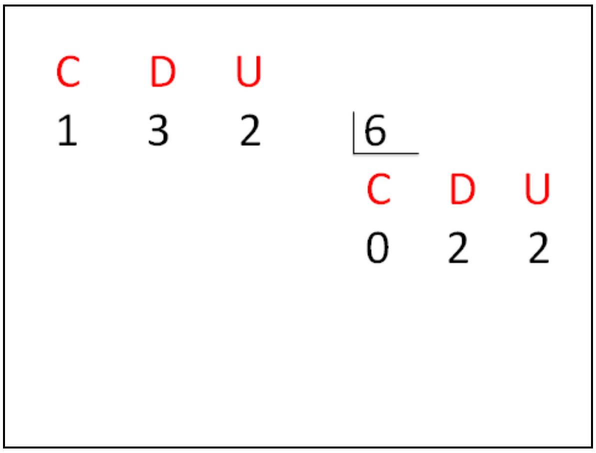



C D U
1 3 2 | 6
C D U
0 2




C D U
1 3 2 | 6
C D U
0 2





Fonte: Acervo da autora (2017).

Após recorrer às imagens, seriam propostas aos alunos as seguintes divisões:

1) 212:4
2) 434:7

Tivemos o cuidado de selecionar essas divisões, pois assim como o primeiro problema, traziam números naturais no dividendo e no divisor e quociente sem zeros. Do mesmo modo, o grupo preparou divisões para serem propostas aos alunos após cada um dos outros três problemas, como meio de fixação do conteúdo trabalhado em cada um deles. Os exercícios preparados para serem usados após o segundo problema foram:

1) 8320:40
2) 6120:60

Assim como o problema dois, as divisões acima apresentavam dividendo e divisor com o algarismo das unidades igual a 0 (zero) e também apresentam quociente contendo um algarismo 0 (zero).

Para fixarmos o terceiro problema, usaríamos duas divisões que continham 0 (zero) no algarismo das unidades do dividendo e dois zeros, não sequenciais, no quociente, assim como o problema 3. Seriam elas:

1) 33120:16
2) 53170:13

Após o problema 4, as divisões que seriam propostas apresentavam, assim como o problema, divisor contendo dois algarismos 0 (zero), nas ordens das dezenas e das unidades, e quociente decimal contendo 0 (zero) logo após a vírgula, ou seja, na ordem dos décimos. As divisões selecionadas foram:

1) 8515:500 2)13524:300

5.7 Simulação da aula

A simulação da aula é tarefa importante em um *Lesson Study*, sendo considerada por Isoda (2010) uma condição necessária para o seu sucesso. Ela ocorreu no último encontro de planejamento, quando acertamos questões ainda não previstas nos encontros anteriores. Por exemplo, a utilização do material dourado para ilustrar o valor posicional dos algarismos no sistema decimal. De fato, muito do que apresentamos no texto foi, a rigor, fruto desse momento coletivo no terceiro encontro, mas optamos por uma apresentação ao longo do texto.

6 EXECUÇÃO DA AULA

O início da aula ocorreu conforme o planejado. Os alunos foram organizados em grupos e, a após a entrega do primeiro problema, a professora solicitou-lhes que eles realizassem a leitura individual (Figura 8).

Figura 8 - A sala de aula.

Fonte: Acervo da autora (2017).

O primeiro problema abordado foi:

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção.

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar a prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

Durante o tempo de leitura, uma aluna perguntou:

Aluna Professora, o que é comprar a prazo?

Marta É quando você faz uma comprar e divide. Divide em várias parcelas, vai comprar para pagar depois, isso é compra a prazo.

Esse era um questionamento previsto no planejamento. Na sequência, a professora solicitou que algum aluno lesse o problema 1 em voz alta. Na etapa de compreensão, indagou se alguém conseguiria explicar com suas próprias palavras o que estava sendo solicitado.

Aluna	O valor de 448 divido em 8 parcelas...
Marta	O que está sendo vendido?
Aluna	Celular.
Marta	Quanto custa o celular?
Aluna	R$448,00.
Marta	Ele custa R$448,00 reais e vai ser a comprado a prazo. Em quantas parcelas?
Aluna	8.
Marta	Então o preço do celular é R$448,00. Esse preço eu vou parcelar em quantas prestações?
Aluna	8.
Marta	Todo mundo entendeu isso?

Os alunos afirmaram que entenderam e a professora questionou se alguém tinha alguma outra pergunta, mas os alunos negaram.

Verificando que não havia dúvida na compreensão do problema, a professora solicitou que os alunos tentassem resolvê-lo individualmente e depois discutissem nos grupos. Entretanto, no decorrer do tempo destinado para as soluções em grupo, os alunos chamaram a professora várias vezes para sanar dúvidas sobre o que deveria ser feito (Figura 9) mostrando que, na verdade, eles não compreenderam o enunciado como haviam afirmado.

Figura 9 - Acompanhamento de um grupo de alunos.

Fonte: Acervo da autora (2017).

A professora poderia ter captado o não entendimento dos alunos, se a pergunta não tivesse sido ampla (todo mundo entendeu isso?). Esse tipo de questionamento é comum em salas de aula, mas trata-se de uma pergunta ampla e que não verifica o que se propõe.

Enquanto os alunos resolviam os problemas, as professoras do grupo observavam e anotavam questões que poderiam ser discutidas posteriormente, no momento de reflexão sobre a aula (Figura 10).

Figura 10 - Observação da aula.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Depois que os alunos discutiram o problema em grupo, a professora solicitou que algum grupo fosse à lousa apresentar a sua resolução.

Aluna A gente fez 448 divido por 8. Quatro não dá para dividir por 8, aí a gente pegou 44 dividido por 8. Que número vezes 8 é que chega mais próximo a 44? A gente chegou à conclusão que é 5. Aí para 44, faltou 4. Abaixamos o 8. Que número vezes 8 chega mais próximo de 48? Aí a gente colocou 6 aqui e não sobra nada.

Destacamos imagens de um dos grupos resolvendo a questão na lousa (Figura 11):

Figura 11 - Alunas na lousa.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Após a explicação das alunas, a professora fez alguns questionamentos com o objetivo de perceber se compreendiam os conceitos matemáticos envolvidos no que estavam fazendo.

Marta	Por que a escolha do 44?
Aluna	Porque não dava para dividir.
Marta	Então você simplesmente junta os outros dois?

As alunas repetiram a mesma explicação feita acima. A professora então questionou:

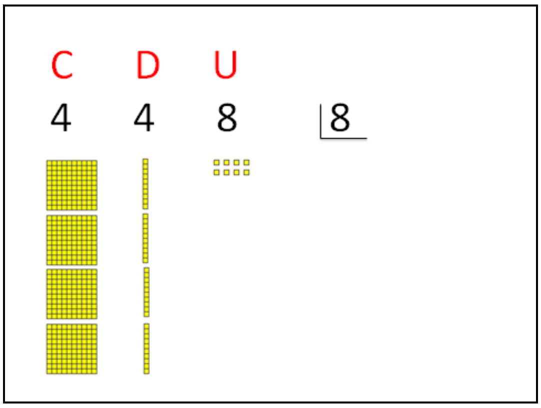
Marta	Por que você abaixou esse 8?
Aluna	Eu precisava juntar para somar.
Marta	Eu precisava juntar o 4 com o 8 para dividir?
Aluna	Isso aí.

A professora fez as mesmas indagações, agora para a turma, com o intuito de verificar se havia outras explicações.

Marta	Pode juntar esse 4 com esse 8?
Aluna 1	Porque sobrou.
Aluna 2	Porque tinha que descer

Percebendo que os alunos não sabiam justificar as etapas do algoritmo da divisão, a professora retomou as relações de ordens (unidade, dezena, centena), que havia iniciado em uma aula anterior, usando imagens do Material Dourado em slides (Figura 12), conforme planejado[7]. Esse processo se fez importante, para que, quando a professora fosse realizar o reagrupamento, os alunos estivessem mais familiarizados.

Figura 12 - Imagens da divisão com Material Dourado.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Conforme descrito no planejamento, o grupo julgou importante que os alunos compreendessem a construção do quociente por meio dos valores posicionais, por isso a primeira maneira de explicar o algoritmo foi utilizando imagens do Material Dourado. Pela experiência das docentes, o apelo visual que do material favoreceria a compreensão das etapas da divisão, evitando equívocos como dizer que "quatro não divide oito".

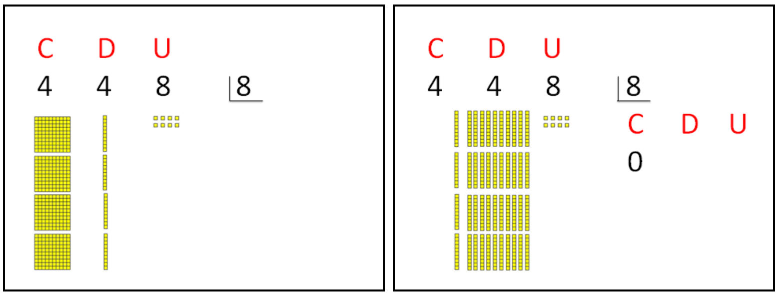
Esse é um pensamento comum, reproduzido em muitas salas de aula, porém incorreto. A divisão de 4 por 8 é possível e o resultado é 0,5. A professora chamou a atenção dos alunos que a divisão que estavam fazendo exigia que as 4 centenas (4 placas) fossem divididas igualmente entre os 8 grupos (as 8 parcelas da compra a prazo). Cada grupo receberia 0 centenas (0 placas) e se fazia necessário reagrupar as 4 centenas (4 placas) para 40 dezenas (40 barras). Assim, dividiríamos 40 dezenas (40 barras) em 8 grupos.

Agrupando com as quatro dezenas originais (4 barras) do número 448, ficamos com um total de 44 dezenas (44 barras), sendo, agora, possível a distribuição igualitária de dezenas (barras) entre os 8 grupos (Figura 13a). Como nenhum dos 8 grupos recebeu centenas (placas), inseriu-se o zero na ordem das centenas do quociente (Figura 13b).

[7] Foi planejado uma revisão sobre a relação entre ordens e valores posicionais em aula anterior, de modo a otimizar o tempo.

Figura 13 - Slides usados pela professora para ilustrar a situação.

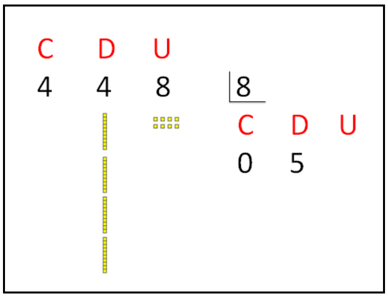
13a 13b



Fonte: Acervo da autora (2017).

Ao dividir as quarenta e quatro dezenas (44 barras) por oito grupos, casa um recebeu cinco dezenas (5 barras) e sobrariam quatro dezenas – 4 barras (Figura 14).

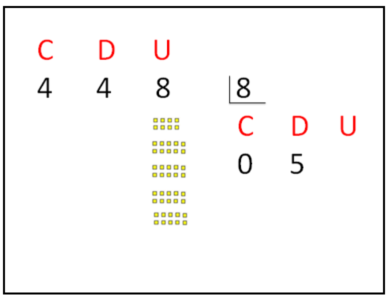
Figura 14 - Novos slides usados pela professora.



Fonte: Acervo da autora (2017).

A professora destacou que é necessário reagrupar novamente as dezenas (barras), como fizemos com as centenas (placas). Desta forma, as quatro dezenas (barras) foram reagrupadas em quarenta unidades (40 cubinhos), tendo um total de quarenta e oito unidades – 48 cubinhos (Figura 15):

Figura 15 - Slide usado pela professora.



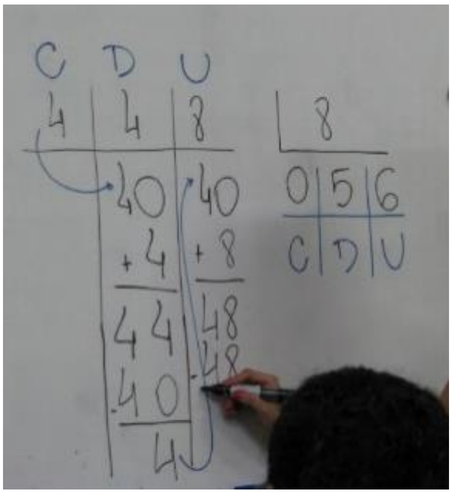
Fonte: Acervo da autora (2017).

Após finalizar a explicação, a professora perguntou aos alunos, se agora saberiam explicar o a razão de se “juntar esse quatro com esse oito”, pergunta feita anteriormente por ela aos alunos. Apenas um aluno se manifestou, reproduzindo a explicação da professora.

No planejamento, as professoras julgaram importante neste momento inserir o zero no quociente, mesmo que um zero à esquerda não faça diferença no valor do número (048 = 48), para que os alunos começassem a compreender o significado posicional do zero no quociente, questão que os alunos apresentam muita dificuldade (LEITE; PRANE; KUSTER, 2012). O objetivo aqui era mostrar aos estudantes que este zero no quociente indicava que cada um dos 8 grupos teria 0 centenas. Atribuindo significado, os alunos não precisam memorizar regras.

Como percebeu que todos os grupos tinham resolvido da mesma maneira, a professora buscou relacionar a estratégia apresentada pelas alunas com o correspondente no Material Dourado e no algoritmo da divisão detalhado (Figura 16).

Figura 16 - Professora justificando o algoritmo da divisão[8].



Fonte: Acervo da autora (2017).

Percebemos um engajamento dos alunos quando a professora lhes fazia questionamentos.

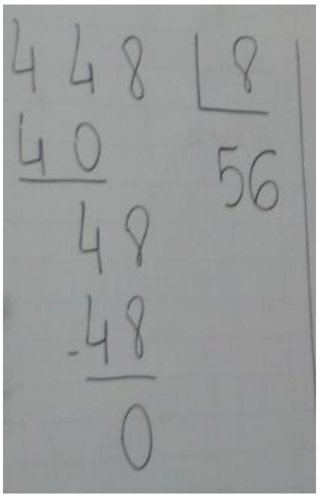
Marta	Se tenho quatro centenas e quero dividir para oito grupos, quantas centenas cada grupo irá receber?
Aluna	Zero.
Marta	Essas quatro centenas vão virar quantas dezenas?
Aluna	Quarenta.

[8] Algumas imagens da lousa não estão com qualidade boa devido à iluminação inadequada da sala de aula e a pressa no registro para que não comprometesse o andamento da aula. Ainda assim, optamos por manter os registros originais.

Ao final deste processo, um aluno pontuou que a explicação detalhada do algoritmo ficou muito complicada. Marta pontuou que aquele modo serviria para eles compreenderem a operação e que voltariam a realizá-la por um modo simplificado, mas agora, entendendo o significado para além de etapas mecanizadas e desligadas de sentido.

Neste momento, a professora viu a oportunidade de relacionar a explicação com o algoritmo na forma que os alunos comumente usam (processo breve) (Figura 17).

Figura 17 - Algoritmo da divisão.

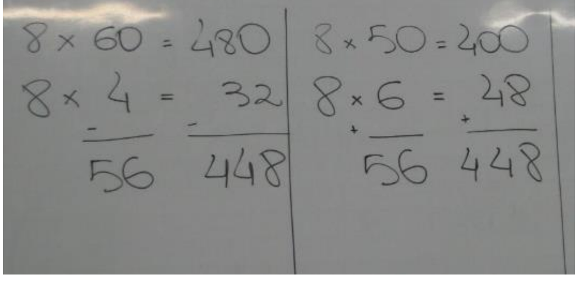


Fonte: Acervo da autora (2017).

Ao final, a mesma aluna que comentou inicialmente que estava complicado, destacou que sempre teve essa dúvida, pois "nunca ninguém explicou o porquê que descia esse número".

A professora questionou a turma se eles conseguiam pensar em outras estratégias para resolver o problema. Não havendo manifestação dos alunos, ela começou a mostrar as outras maneiras de resolução que haviam sido planejadas, começando pelo método de aproximações que descrevemos no capítulo de planejamento (Figura 18).

Figura 18 - Método de aproximações.



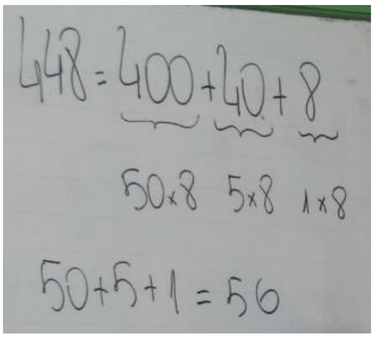
Fonte: Acervo da autora (2017).

O penúltimo método discutido foi a decomposição.

Marta	Podemos escrever o 448 como sendo 400 +40+8. Oito vezes quanto que dá quatrocentos?
Aluno	50.
Marta	Então quanto eu distribuo quatrocentos por 8 dá 50. E quando eu distribuo Quarenta por 8?
Aluno	5.
Marta	E o oito?
Aluno	1.
Marta	Quando eu faço essa distribuição, eu chego em quantos grupos? 50 + 5+ 1 = 56.

Durante os questionamentos, a professora registrava na lousa o pensamento que estava construindo com os alunos (Figura 19) e por vezes ela mesma os respondia, como no diálogo acima.

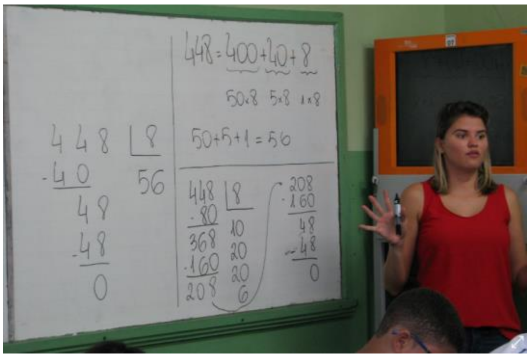
Figura 19 - Método de decomposição.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Por último a professora apresentou o método americano. Por exemplo (Figura 20), escolhemos um primeiro quociente parcial igual a 10. Mas 10×8=80, então ainda precisamos distribuir 448 – 80 = 368 reais. Escolhemos, então, um segundo quociente parcial igual a 20. Como 20×8 = 160, ainda restam 368 – 160 = 208. Definimos o terceiro quociente parcial valendo 20, novamente. Temos que 20×8 = 160 e 208 – 160 = 48. Atribuímos então um último quociente parcial igual a 6, pois 6×8 = 48, zerando o dividendo.

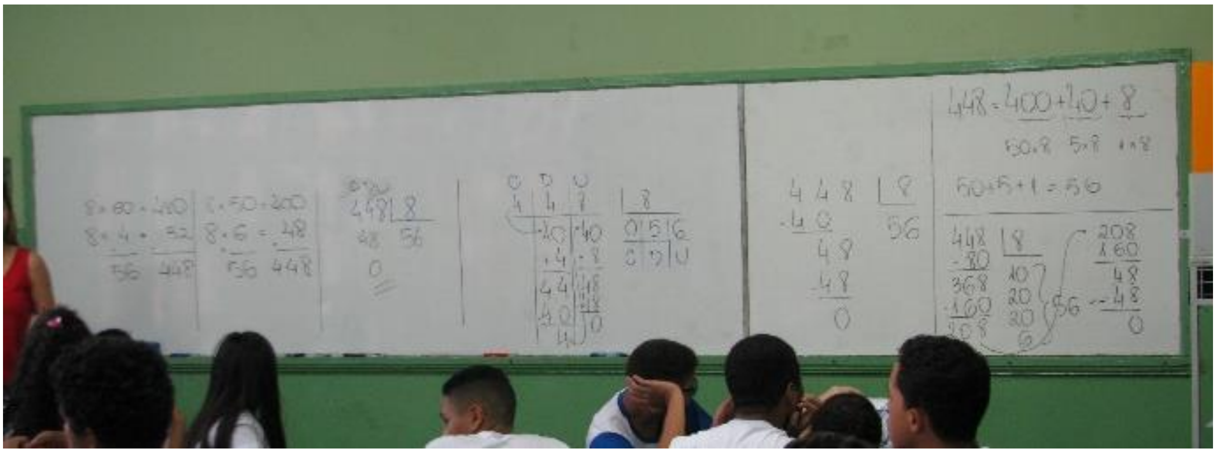
Figura 20 - Método Americano.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Ao final, a lousa apresentava as diferentes estratégias de resolução e serviria de ponto de partida para estabelecer as conexões entre elas, numa síntese conjunta da aula (Figura 21).

Figura 21 - Diferentes estratégias de solução.



Fonte: Acervo da autora (2017).

A professora, avaliando o tempo de aula restante, percebeu que não havia tempo suficiente para iniciar um novo problema e apresentou a alternativa planejada para essa situação, qual seja, fixar o que foi estudado por meio de um novo exercício.

A professora apresentou um novo exemplo (132÷6) com as imagens visuais do Material Dourado, reforçando os valores posicionais, e, em seguida, propôs dois exercícios de fixação, 212÷4 e 434÷7, que poderiam ser resolvidos através da estratégia que os preferissem. Após a resolução em grupo, dois grupos foram ao quadro e realizaram as divisões utilizando o algoritmo da divisão.

O tempo de aula não foi suficiente para realização de novo *bansho* e *neriage* mas, ao circular entre os grupos e, pelo registro dos alunos na lousa, a professora constatou que os alunos pareceram dominar o algoritmo da divisão.

No segundo dia, a aula começou com o problema 2:

Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

Os alunos não tiveram dificuldades com a etapa de compreensão. Para a resolução do problema, a professora solicitou que apresentassem duas estratégias diferentes. Essa foi uma recomendação do grupo após a primeira aula, de modo a tentar alargar o pensamento matemático dos alunos, como veremos mais adiante.

Após o período destinado a resolução coletiva, quando a professora circulou entre os grupos para verificar as estratégias eleitas e, eventualmente esclarecer-lhes dúvidas (Figura 22), Marta solicitou que os alunos fossem até a lousa apresentar suas resoluções (*bansho).* Os cinco grupos que foram ao quadro utilizaram como uma das estratégias o processo euclidiano.

Figura 22 - Professora circulando entre os grupos - dia 2.

Fonte: Acervo da autora (2017).

A professora solicitou que os grupos explicassem para a turma o processo de resolução. O primeiro grupo começou:

Aluno Como 9 não dá para dividir por 30, aí eu pequei o dois, por causa daquele negócio da unidade, dezena, centena, que nós aprendemos ontem. O número que chegava mais próximo de 92 quando eu multiplico por 30 era o 3, porque 3 vezes 30 dá 90. Aí diminui e sobrou 2. Depois eu desci o 7. Nisso que eu desci o 7, não deu também, aí eu adicionei um 0 aqui [no quociente]. Aí, ficou 270, o número que chegava mais próximo era o 9. Que vai dar exato. 9 vezes 30 dá 270. Aí acabou.

A professora questionou o grupo o porquê do zero no quociente (Figura 23).

Figura 23 - Por que esse zero no quociente?

Fonte: Acervo da autora (2017).

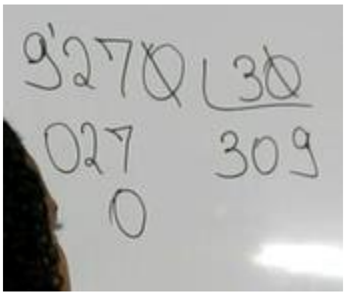
A aluna então tentou justificar:

Aluna	Desceu outra casa e coloca o zero, é igual aquele negócio da vírgula, entendeu?
Marta	Então aí deveria colocar uma vírgula, também?
Aluna	Não, Não, não estou falando que tem que colocar a vírgula, aí é outra história é quando sobra.
Marta	Mas o zero é só porque eu desci outra casa?
Aluna	É, aí coloca o zero.
Marta	Mas aqui você também desceu... [a professora estava referindo ao número 2].
Aluna	Mas aqui eu só desci uma, coloco zero quando desce duas eu acho.

Com essa explicação, a aluna quis dizer que o zero entra no quociente na ordem das dezenas quando 27 dezenas dividas por 30 resultam em 0 dezenas e, portanto, é necessário recorrer à ordem das unidades para prosseguir a divisão.

Na sequência, o segundo grupo foi chamado à lousa. A resolução (Figura 24) e a explicação apresentada por ele foi prevista no planejamento.

Figura 24 - Solução do grupo 2.



Fonte: Acervo da autora (2017).

A aluna explicou que resolveu o problema como ela tinha aprendido no Ensino Fundamental.

Aluna Quando o número tem o 0, a minha professora me ensinou que pode cortar os dois zeros. Aí, 9 dividido por 3 dá 3 e sobra 0. Aí desce o 2. O 2 não dá para dividir por 3, coloca um zero aqui [apontando para o quociente] e desce a próxima casa [que seria o 7]. Aí 27 divido por 3 é 9 e sobra 0 [referindo ao resto].

A professora então perguntou:

Marta Por que você riscou o zero, mesmo?

Aluna A minha professora ensinou assim, não me explicou o porquê.

Marta Alguém consegue me explicar o porquê a gente pode fazer isso? [Neste momento a professora está apontando para os zeros na unidade] Está todo mundo de acordo que é possível fazer isso? Por quê eu posso fazer isso?

Aluna Porque o zero é um número neutro?

Conforme o planejado a professora continuou estimulando os alunos:

Marta E se fosse 9027/30, eu poderia cancelar os zeros?

Alguns alunos disseram que não podia. A professora perguntou então se o zero era elemento neutro, conforme a aluna disse. Nesse momento, vários alunos tentaram explicar ao mesmo tempo porque isso não é possível. A professora reproduziu o que escutou de alguns alunos.

Marta No meio não pode, mas no final pode?

Aluna Porque no final não faz diferença.

A professora retomou o planejado para explicar o cancelamento do zero. De forma simplificada, a professora relembrou com os alunos o que era um múltiplo de 10 e exemplificou 10, 20, 30 e 40 como sendo múltiplos de 10. De maneira geral, era o resultado da multiplicação de algum número por 10. Ela indagou o que havia de característica comum entre esses números. Os alunos observaram que todos terminavam em 0, ou seja, o algarismo da unidade era o 0. Assim, os números terminados em 0 eram múltiplos do 10 e, portanto, 9270 e 30 eram múltiplos do 10.

Para dar sequência à explicação, a professora relembrou o conceito de frações equivalentes[9], ou seja, se o numerador e o denominador fossem divididos (ou multiplicados) pelo mesmo número, a nova fração seria equivalente a anterior. Assim, como ambos os números eram múltiplos de 10, poderíamos dividí-los por 10 (Figura 25):

Figura 25 - Frações equivalentes.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Um aluno indagou à professora:

Aluno Sempre quando tiver um zero no final vai ser divisível por 10?

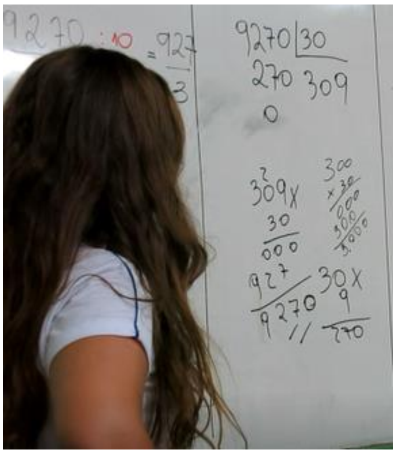
Marta Sim. Sempre vai ser divisível por 10.

[9] O conceito de frações equivalentes e a associação de divisão com uma fração foram trabalhados no início do ano pela professora com esses alunos. Relembrar estes conteúdos neste momento não foi algo trabalhoso que viesse a desviar o foco da discussão.

A professora mostrou aos alunos que as duas divisões eram equivalentes, e por isso era correto simplificar os zeros, como a aluna havia feito, e o quociente seria o mesmo. No entanto, não poderíamos fazer o mesmo na divisão 9027÷30, uma vez que o 9027 não era múltiplo de 10.

O grupo 4 armou a divisão pelo processo euclidiano (Figura 26).

Figura 26 - Solução do grupo 4.



Fonte: Acervo da autora (2017).

No entanto, sua explicação de como resolveram estava associada ao método americano.

Aluna A gente pegou um número que multiplicado por 30 chegasse mais próximo de 9270. Aí deu 300, que deu 9000 [o 9000, saiu da conta: 300 x 30 = 9000]. Sobrou 270, que a gente deixou aqui. Pegamos um número que multiplicado por 30 dava 270 ou mais próximo, que foi o 9. Aí colocamos o nove aqui [referindo-se ao quociente] e acabou.

A professora reforçou a explicação, clarificando todos os passos utilizados no método americano utilizado pelo grupo (Figura 27).

Figura 27 - Explicação da professora.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Marta Ela pegou o 9270 e foi dividir por 30. No primeiro momento vocês pensaram no 300 vezes 30?

Aluna Sim.

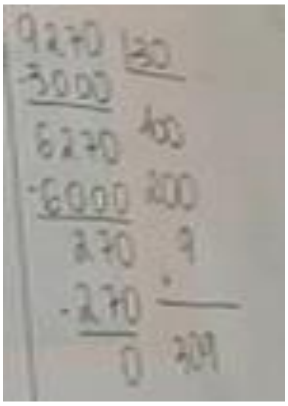
Marta Então você tem 300 grupos de 30? Quando eu estou dividindo 9270 por 30, de certa forma eu estou querendo saber quantos grupos de 30 eu consigo dentro do 9270. No primeiro momento elas perceberam que se eu tivesse 300 grupos de 30, eu chegaria bem perto. Você teria 9000. Retirando esse 9000, iria sobrar 270. Ai depois vocês pensaram o que?

Aluna O número mais próximo de 30 que iria dar 270.

Marta Aí vocês encontram o nove. Primeiro ela viu os 300 grupos. E aí depois ela pensou no 9, aí ela retirou o zero e colocou o 9 direto, sabendo que essa era a resposta final. Agora você soma que dá 309.

Após essa explicação, a professora mostrou outra forma de organizar a divisão pelo método americano (Figura 28).

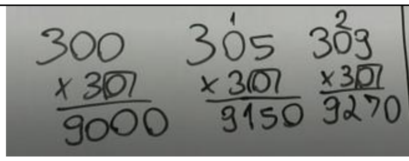
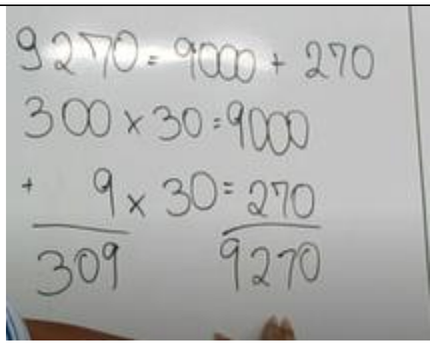
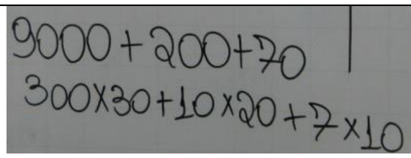
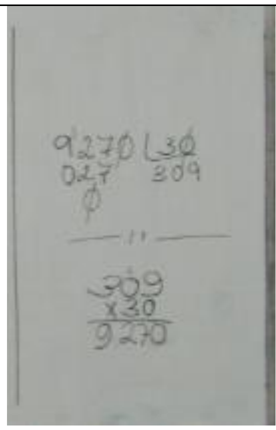
Figura 28 - Outra solução pelo método americano.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Após essa explicação, a turma passou a discutir as outras estratégias de resolução utilizadas pelos grupos (Quadro 1). Como segunda opção houve uma resolução por estimativa, duas por decomposição e dois grupos afirmaram que não conseguiram resolver por outra estratégia.

Quadro 1 - Segunda estratégia de resolução apresentada pelos grupos.

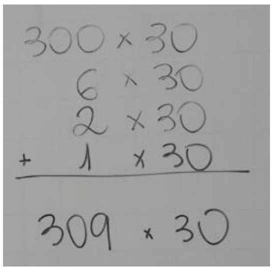
Métodos	Grupo	Resolução
Estimativa	1	
Decomposição	2	
	3	
4		Não apresentou outra estratégia de solução.
5		

Fonte: Acervo da autora (2017).

Os grupos 1 e 2 utilizaram, respectivamente, os métodos de estimativa e decomposição. O grupo 3 não finalizou a divisão. Ao decompor 9270 em 9000+200+70, começaram substituindo cada uma das parcelas por produtos, mas não se atentaram ou não conseguiram escrever cada parcela como múltiplo de 30 e, portanto, não concluíram o processo. Talvez não tenha ficado claro para esses alunos que, no método de decomposição, o dividendo deveria ser decomposto em parcelas que fossem múltiplos do divisor. Outra possibilidade seria mesclar o método de decomposição com métodos de aproximação.

A partir da solução parcial dos alunos, utilizando o erro como estratégia de aprendizado, a professora construiu com eles um novo exemplo de solução por decomposição (Figura 29).

Figura 29 - Uma solução por decomposição.



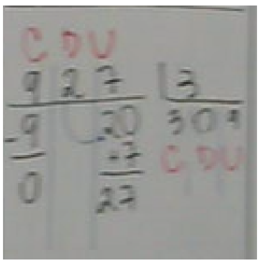
Fonte: Acervo da autora (2017).

O grupo 4 não apresentou uma segunda estratégia de solução.

O quinto grupo não quis ir a frente realizar a explicação. Como a forma de armar o algoritmo foi semelhante ao do segundo grupo, a professora relembrou que ambos os números são múltiplos de 10, desta forma poderíamos realizar a simplificação, ou seja, o resultado da divisão 9270÷30 ou 927÷3 é o mesmo.

Como para essa atividade nenhum grupo havia realizado a explicação utilizando o processo euclidiano detalhado e, ao circular pelos grupos no início da aula, a professora percebeu respostas iguais a 39, viu neste momento a oportunidade de trabalhar com essa estratégia. Primeiro, retomando a questão dos múltiplos que é a razão do cancelamento do zero. Segundo, enfatizando a questão do zero no quociente e por último, mostrando que o resultado da divisão 927÷3, por esse método é a mesma (Figura 30).

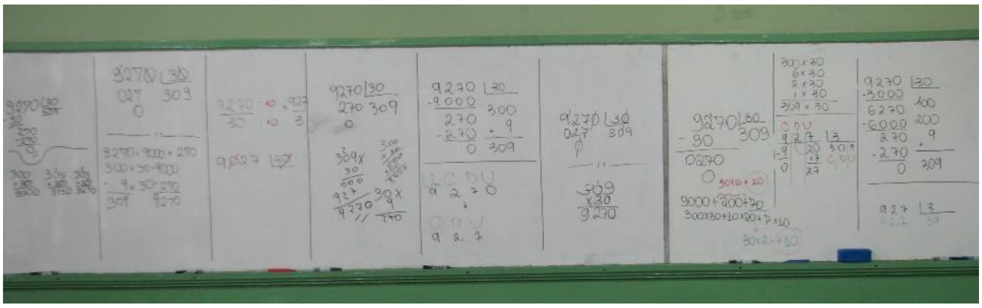
Figura 30 - Trabalhando com os erros dos alunos.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Após finalizar o *neriage*, a lousa apresentava tudo aquilo que tinha sido estudado no problema 2 (Figura 31).

Figura 31 - Soluções do problema 2 na lousa.



Fonte: Acervo da autora (2017).

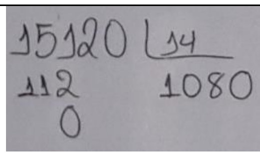
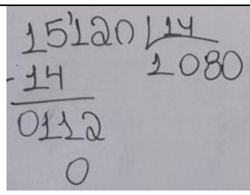
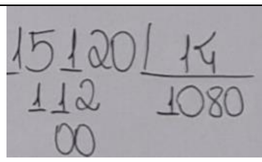
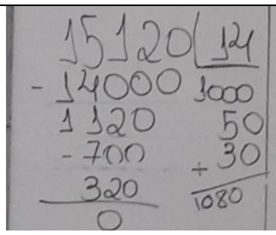
Em seguida, um novo ciclo foi iniciado, mantendo os mesmos formatos das atividades anteriores. Foi entregue para os alunos uma folha com a terceira atividade.

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papelaria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?

Novamente foi realizada a etapa de compreensão e destinado um tempo para os alunos resolverem em grupo o problema. Em seguida, deu-se início ao *bansho*, ou seja, o momento que os alunos foram até a lousa socializar suas resoluções. Quatro grupos foram ao quadro, sendo que um utilizou o método americano, e os demais o algoritmo da divisão. O grupo justificou a utilização do método americano por julgar mais fácil.

Não solicitamos que a questão 3 fosse resolvida por dois métodos distintos. As estratégias apresentadas pelos grupos estão representadas no Quadro 2.

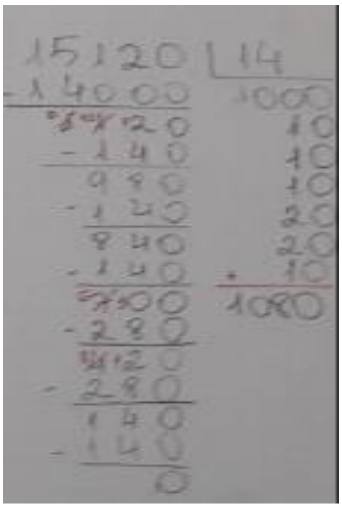
Quadro 2 - Estratégias de resolução apresentada pelos grupos.

Grupo	Método	Resolução
1	Euclides	
2		
3		
4	Americano	

Fonte: Acervo da autora (2017).

A professora aproveitou a solução apresentada pelo grupo 4 para enfatizar que o método americano (utilizado por esse grupo) pode ser utilizado de mais de uma maneira, apresentando para os alunos o exemplo a seguir (Figura 32):

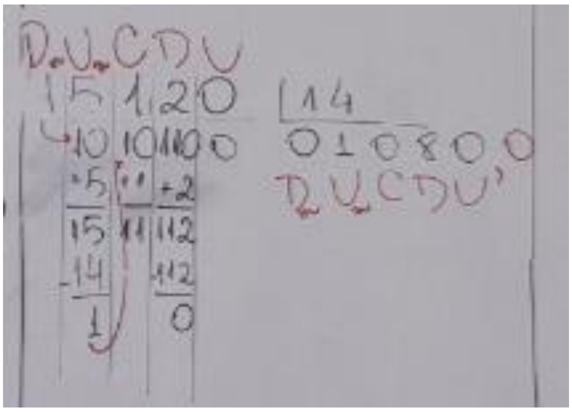
Figura 32 - Outra solução pelo método americano.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Como aconteceu na atividade 2, a professora ainda percebeu a dificuldade de alguns alunos em atribuir zeros no quociente, chegando, portanto, a resultados previstos no planejamento, mas incorretos, como 18 e 180. Novamente, utilizou o detalhamento do algoritmo da divisão chamando atenção para a relação entre ordens, o que acreditamos ser a essência do cálculo (Figura 33).

Figura 33 - Algoritmo da divisão detalhado.



Fonte: Acervo da autora (2017).

Ao final da aula, uma aluna questionou sobre a necessidade de se estudar diferentes métodos para operar uma divisão quando ela já dominava o algoritmo da divisão, questionamento esse, previsto no planejamento. Um aluno se antecipou e respondeu que finalmente ele havia compreendido como calcular uma divisão e que isso só foi possível quando Marta promoveu a discussão por diferentes estratégias. Para ele, o algoritmo de divisão não era o método mais simples. Isso mostra a potencialidade da aula para o resgate da aprendizagem dos alunos.

Aluna Professora, então o objetivo dessa aula de mostrar vários tipos de divisões é para a gente escolher o método mais fácil para a gente fazer?

Marta Exatamente. Você tem várias opções, você não precisa ficar presa a uma só. A ideia também é que vocês compreendam todos eles. Mas se pelo menos de uma forma você conseguir, se você souber dividir de alguma maneira, já teremos um grande avanço.

A professora finalizou a aula sem discutir o problema 4, uma vez que o tempo em sala foi insuficiente para completar o planejamento.

7 REFLEXÃO SOBRE A AULA

Assim que a aula do primeiro dia terminou, os alunos foram para o recreio e as professoras reuniram-se para refletir sobre o planejamento conjunto e a execução até aquele momento (Figura 34). O plano de aula previu a abordagem das questões 1 e 2 naquele primeiro dia mas, em função do tempo, somente o primeiro problema foi executado. Falaremos disso mais adiante.

Figura 34 - Reflexão sobre o planejamento e a aula.

Fonte: Acervo da autora (2017).

As primeiras palavras foram da Professora Marta, que relatou ter se sentido nervosa, pois, apesar de ser uma aula como outra qualquer, um dia normal na escola, tratava-se de uma coleta de dados para a dissertação de mestrado.

Ana	Ter professores te assistindo te deixou nervosa?
Marta	Não. Isso não. Minha preocupação era de ter todos os alunos envolvidos e bem focados para que o processo surtisse efeito.

Em seguida, a professora declarou que, apesar dessa sua inquietação, os alunos mostraram-se muito participativos e atentos ao que estava sendo dito. Pareciam realmente estar compreendendo.

As professoras lhe disseram que ela se mostrou muito segura, muito preparada, inclusive na valorização do erro dos alunos.

Marta	Eu gostei muito do desempenho daquele aluno que sentou no canto [e aponta para uma mesa]. Ele não conseguiu fazer a primeira divisão, 448 por 8. Ele tentou de um jeito, tentou de outro e não saiu, foi

	acrescentando zeros de maneira aleatória no quociente. E os últimos exemplos ele fez sozinho.
Joana	Não só fez sozinho como fez muito rápido. Eu observei também. Quando eu vi a dificuldade inicial desse aluno, fui sentar perto dele para acompanhá-lo de perto. Ele ficou a aula toda concentrado e interessado. Ele e aquela outra menina [apontando para uma nova mesa].

Joana relatou que essa aluna não conseguia entender o método de estimativa, mas ao longo da aula aquilo foi fazendo sentido e que tinha certeza que para esses dois alunos que ela acompanhou mais de perto, a aula fez uma grande diferença. Essa aluna, em determinado momento da aula, relatou impressionada que "agora tudo fez sentido. Ninguém nunca tinha me explicado isso".

A maioria dos alunos insistiu em fazer os exercícios todos pelo mesmo método, o algoritmo da divisão. Houve quem falasse que bastava saber um único método. Porém o mais importante é que percebemos que os alunos não estão mais trabalhando mecanicamente, mas significando os procedimentos, mesmo que ainda apresentem erros, por exemplo, de tabuada.

Lúcia chamou atenção para um momento em que a Marta estava fazendo uma aproximação regressiva com a turma e um aluno sugeriu multiplicar por 5. Esse não era o número do planejamento e, de verdade, transformaria a aproximação regressiva em uma aproximação progressiva. Esse foi, talvez, o único momento em que, ao tentar seguir o planejamento, a professora não se permitiu acolher o pensamento dos alunos.

Marta	É... eu queria seguir o método que sobe.... eles sugeriram multiplicar por um número que faria a estimativa alternar por cima e por baixo... é verdade, eu poderia ter deixado fluir.

As professoras ressaltaram que o planejamento não deve engessar, mas dar subsídios para a condução da aula. Esse era um momento rico e o descolamento daquilo que foi planejado teria sido valioso no processo de aprendizagem dos alunos.

As professoras Ana e Joana destacaram a importância de o grupo ter planejado alternativas para o caso de o tempo de aula não ser suficiente para um novo problema, o que de fato aconteceu.

Cláudia perguntou sobre diferenças que Marta destacaria em relação a planejamentos tradicionais e o planejamento que foi realizado para essas aulas e a resposta foi que a principal diferença era exatamente prever aquilo que poderia acontecer. Como exemplo, a primeira pergunta dos alunos foi sobre a palavra prazo, e isso estava no planejamento. Não estaria em um plano de aulas tradicional. E a palavra prazo realmente causou muita dúvida, vários grupos perguntaram sobre isso.

Uma dúvida não prevista no planejamento do problema 1 foi a pergunta de uma aluna, se era para multiplicar [ao invés de dividir] 448 por 8, exatamente pelo não entendimento da palavra prazo. A professora saiu-se muito bem, traçando um paralelo e questionando os alunos sobre algo do seu contexto, a compra de calças do uniforme da escola.

Cláudia provocou o grupo dizendo que alguns alunos se mostraram cansados com os diferentes métodos de solução. De fato, houve uma interferência de aluno nesse sentido, como descrevemos na execução da aula. Eva complementou que muitos deles não se sentiram instigados a aprender vários métodos. Cláudia analisou que isso era próprio da nossa cultura, que valoriza a resposta em detrimento do processo e, por isso, os alunos não valorizavam o esforço da professora durante toda a aula. Eles não tinham maturidade ainda para compreender que o entendimento daquilo poderia fertilizar outros conceitos, então não era possível convencê-los dizendo que será útil no futuro. A maneira que ela via, na nossa cultura escolar, de convencer os alunos a abraçar a ideia de compreender diferentes métodos é cobrar mais de uma via de solução. Ela sugeriu que o grupo acrescentasse isso no planejamento já para a próxima aula, com o que todas as outras professoras concordaram. De qualquer forma, o grupo considerou repensar a quantidade de métodos apresentados e a necessidade de trabalhar com todos eles.

A turma era heterogênea e houve vantagens em mostrar os diferentes métodos em todos os problemas, mas a sugestão de Eva e Lúcia era que o algoritmo da divisão fosse trabalhado no primeiro problema (caso nenhum aluno propusesse solução distinta dessa) e todos os outros métodos fossem trabalhados a partir do segundo problema em um planejamento futuro. Isso poderia minimizar o cansaço dos alunos.

Joana destacou que até uma hora de aula, a maioria dos alunos estava concentrada e que o problema que dispersou os alunos pode não ter sido a repetição dos métodos, mas o tempo longo de aula. Cláudia ponderou que esse é um ponto que merece atenção e pode ter sido também uma falha no planejamento. Uma sugestão para contornar isso seria mudando a dinâmica da aula ou da atividade.

A professora Lúcia alertou que foram planejados dois problemas para cada dia, mas na prática ficamos o tempo todo em uma só questão. Ana complementou dizendo que demoramos 30 minutos para iniciar a aula. Os alunos chegaram atrasados e demoraram para formar os grupos. O problema 1 durou aproximadamente o tempo previsto de 50 minutos e haveria tempo hábil para seguir o planejado. No entanto, após o primeiro problema, restavam 20 minutos de aula inviabilizando a aplicação do segundo, levando Marta a optar, conforme o planejado para esse caso, pela fixação através de exercícios. Essa perda de tempo inicial precisava ser minimizada.

Ainda sobre gerenciamento de tempo e heterogeneidade da turma, Joana questionou o grupo sobre o tempo dado aos alunos para resolverem em grupo o problema 1. Ela relatou que a maioria dos alunos resolveu rapidamente enquanto dois grupos apresentaram dúvidas. Nesse caso, deveríamos avançar ou esperar? As opiniões eram distintas. Há quem defenda o avanço. Mas se avançarmos o tempo todo, quem não está compreendendo vai ficando cada vez mais para trás. Cláudia defendeu que avançar é reforçar a cultura do acerto.

Cláudia	Por que não transformar o erro em uma grande oportunidade de aprendizagem?
Marta	Mas levar o erro para o quadro?
Ana	Aí vamos expor o aluno...
Cláudia	Essa é a cultura... a cultura do acerto. Qual o problema de o aluno estar errado e ter a ajuda dos professores e colegas como uma oportunidade de corrigir seu pensamento matemático?
Eva	Podemos chegar no aluno e trabalhar o erro só com ele, ou com aquele grupo...
Cláudia	Quem garante que a dúvida deles dois era só deles dois? Eu, quando aluna, muitas vezes fiquei calada por vergonha de me expor. Mas se alguém tivesse ido lá na frente eu com certeza iria aproveitar.

Uma sugestão de Cláudia foi que o professor tomasse para si a dúvida do aluno, perguntando à turma: se eu tivesse feito isso, eu estaria certa? Como vocês me corrigiriam? O que não podemos fazer, disse a professora, é deixar passar uma dúvida. Todas concordaram que com a dinâmica da aula, em que a professora visita os grupos e verifica os pensamentos dos alunos, isso é possível, mas, analisando de maneira mais ampla sobre o gerenciamento de aula, aulas expositivas são mais difíceis de detectar erros pontuais dos alunos. Novamente, esbarramos em questões culturais. Temos que valorizar e estimular os alunos a ir a lousa, expor seu raciocínio até que, naturalmente, isso seja incorporado na cultura.

Algumas outras considerações e cuidados que devemos ter foram levantados durante o momento de reflexão: falar com a turma enquanto eles estão raciocinando quebra o fluxo de raciocínio dos alunos e é algo que devemos evitar, assim como responder às nossas próprias perguntas, sem deixar tempo de o aluno pensar por ele mesmo.

Devido à riqueza das discussões no primeiro dia, a reflexão após a segunda aula não trouxe novos ingredientes à discussão. O grupo considerou adequados os ajustes no planejamento e a aula fluiu da maneira esperada. Uma ressalva foi feita em relação ao tempo. Com uma maior agilidade na organização dos grupos no início da aula, foi adequado o uso de 100 minutos para aplicação de 2 problemas. No entanto, ao final de 4 aulas, só conseguimos aplicar 3 dos 4 previstos.

O processo de *Lesson Study* enquanto formação de professores mostrou-se valioso exatamente pela sua essência: aprimoramento da prática a partir da reflexão de uma necessidade surgida na sala de aula e a intervenção sobre ela. Ainda que seja um conteúdo inicialmente previsto para as séries iniciais do Ensino Fundamental, o cálculo da divisão é um tema que permeia todo o ensino básico e que, ainda assim, os alunos terminam o Ensino Médio sem dominá-lo. Nos cursos de Pedagogia, a Matemática não tem grande espaço de discussão e encontramos estudantes que não dominam o assunto. Nas licenciaturas em Matemática, por sua vez, pouco ou nada se fala a respeito disso, a menos de teoremas e demonstrações em Álgebra que, na maioria das vezes, são desconectados e muito distantes daquilo que se espera na educação básica. Ou seja: em que momento os professores vão se debruçar sobre isso? E mais: como os alunos vão aprender esse conteúdo?

Um *Lesson Study* tem como objetivo final o aprendizado do aluno. E é sobre isso que precisamos sempre manter um olhar atento. Há uma desvalorização crescente de todo o processo escolar, refletindo em falta de motivação e envolvimento dos alunos. O que conseguimos constatar foi uma maior evolução dos alunos que participaram ativamente do processo, o que leva a crer que a aula tenha cumprido seu objetivo mesmo que parcialmente.

Ainda é um desafio para nós conseguir que toda a classe esteja envolvida naquilo que é o essencial: a aprendizagem do aluno.

8 AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM

Uma das preocupações do grupo era avaliar o progresso dos alunos na realização de operações de divisão. Definimos que aplicaríamos 3 problemas como pré-teste, inseridos na avaliação diagnóstica que acontece no início do ano letivo nas escolas da rede estadual de ensino do Espírito Santo. Eles deveriam conter as mesmas ideias que seriam trabalhadas durante as aulas desenvolvidas em consonância com o *Lesson Study*. As mesmas questões seriam aplicadas após essas aulas, como pós-teste. Esse pós-teste aconteceria mais de um mês depois do pré-teste. Escolhemos problemas já testados em outras ocasiões (LEITE; PRANE; KUSTER, 2012) cujos enunciados são os seguintes:

1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explicite seus cálculos.
2) Tia Josefina morreu e deixou uma herança no valor de R$ 14.210,00 para os seus sete sobrinhos. Sabendo que cada sobrinho receberá o mesmo valor, quanto cada um ganhará? Explicite seus cálculos.
3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.

As duas primeiras questões tratam da divisão de números naturais com quociente inteiro e resto zero. A primeira traz apenas um zero no quociente e tem texto bastante semelhante àquele trabalhado em aula[10]. A segunda traz dois zeros no quociente. A última questão apresenta a divisão de um número natural por outro com três dígitos. Exploramos aqui os dígitos finais iguais a zero e a vírgula no quociente.

Para poder utilizar questões já testadas, deixamos de avaliar o uso de imagens com dados no problema.

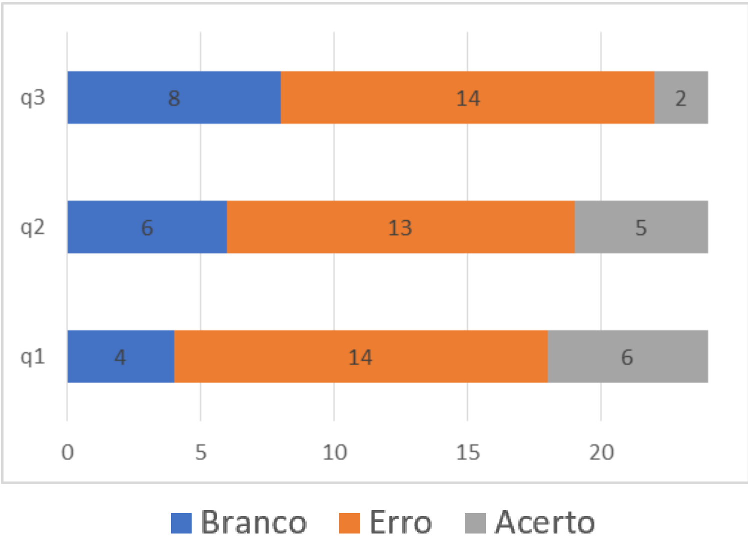
Dos 36 alunos que participaram das aulas, apenas 24 responderam a ambos o pré-teste e o pós-teste propostos à turma. Nos concentraremos nessas 24 respostas.

Os gráficos 1 e 2 comprovam que houve evolução no aprendizado dos alunos. O número de questões em branco diminuiu sensivelmente e o número de acertos cresceu em

[10] Leite e Prane, duas autoras do artigo onde retiramos as questões de pré e pós-teste, participaram desse *Lesson Study*. Daí a intencional semelhança.

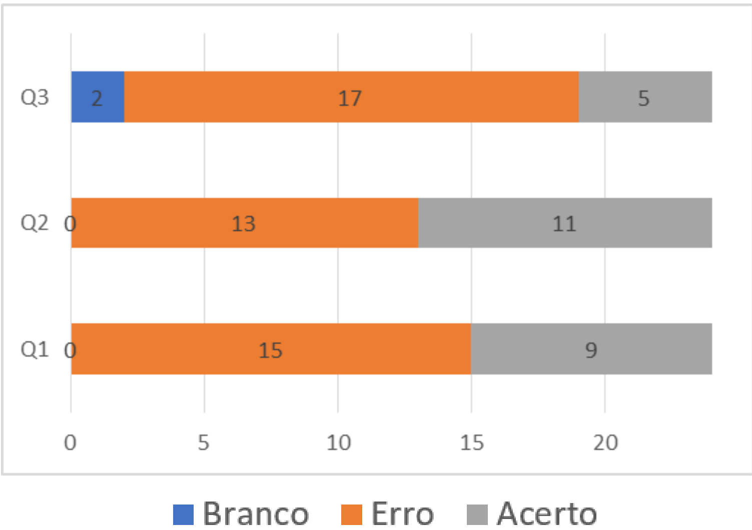
todas as questões.

Gráfico 1 - Resultado do teste diagnóstico.



Fonte: Elaborado pela autora.

Gráfico 2 - Resultado da avaliação.

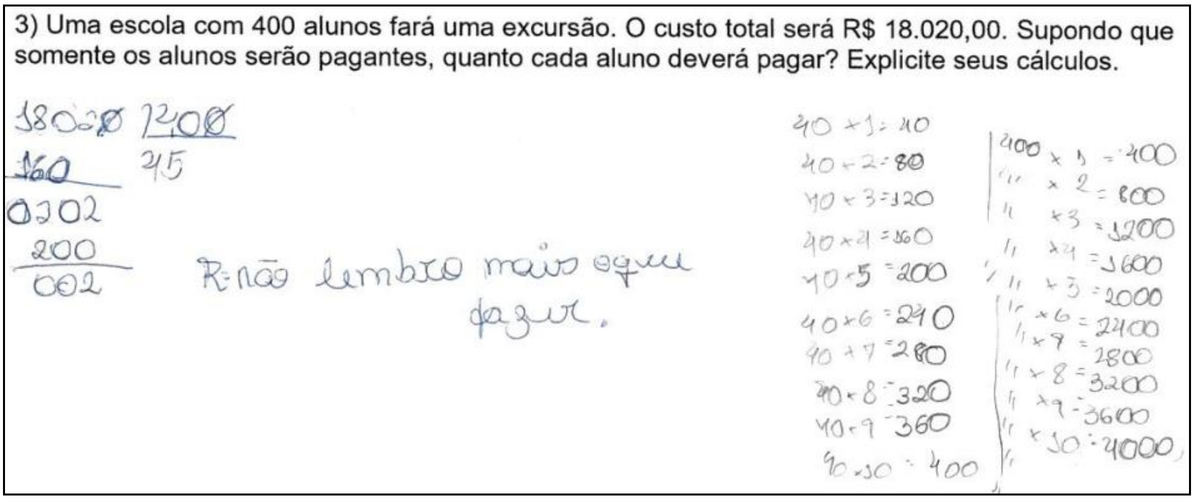


Fonte: Elaborado pela autora.

O aluno A18 foi o único a acertar todas as questões no pré-teste. Para resolver as duas primeiras questões do pós-teste ele utilizou os métodos novos vistos na aula. Na terceira questão, ele cometeu um erro de multiplicação, associando 4x4 a 18, mas desenvolveu a divisão corretamente, mostrando que não houve perda de compreensão do processo de dividir.

Apenas os alunos A20, A21 e A22 haviam errado somente a terceira questão no pré-teste. Os alunos A21 e A22 apresentaram erros bem distintos no pré-teste. A22 apresentou corretamente a parte inteira do quociente, mas não soube dar continuidade à divisão, não acrescentando a parte decimal (Figura 35).

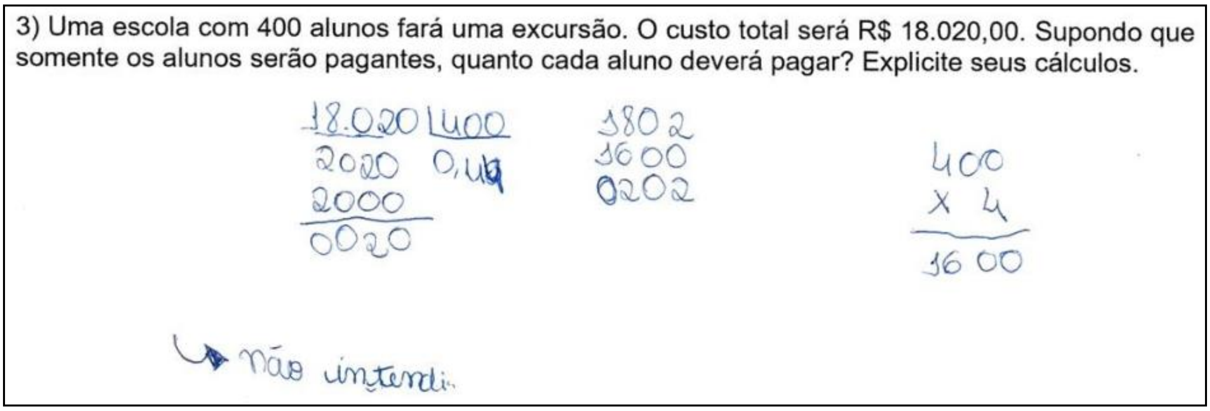
Figura 35 - Questão 3 do pré-teste - A22.



Fonte: Acervo da autora (2017).

O aluno A21 não conseguia sequer iniciar a divisão corretamente (Figura 36).

Figura 36 - Questão 3 do pré-teste - A21.

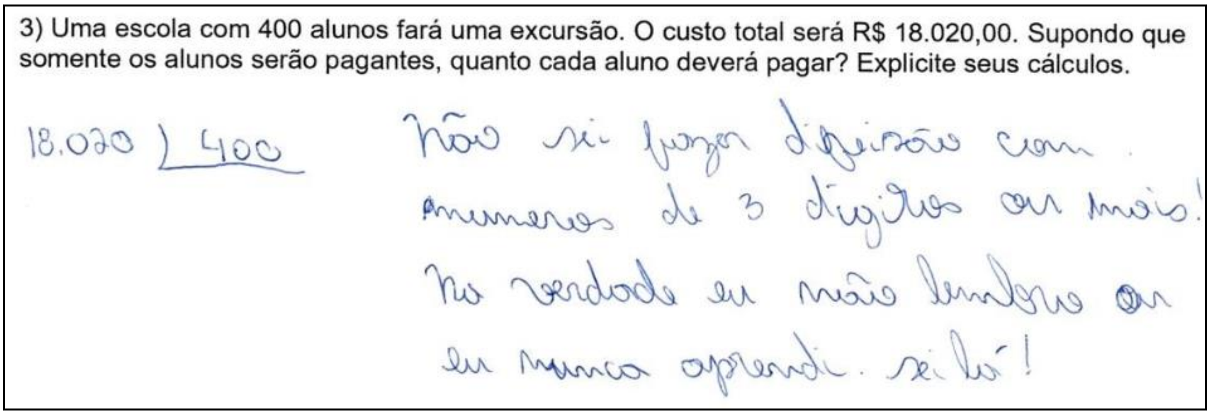


Fonte: Acervo da autora (2017).

Os dois alunos acertaram a terceira questão no pós-teste, sendo A20 o único a manter o erro no pós-teste. Assim, foi percebido um avanço na compreensão da divisão para esses dois alunos.

O aluno A19 havia acertado as duas primeiras questões do pré-teste e deixado a terceira questão em branco, destacando que não sabia “fazer divisão com número de três dígitos ou mais” (Figura 37).

Figura 37 - Questão 3 do pré-teste - A19.


3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.

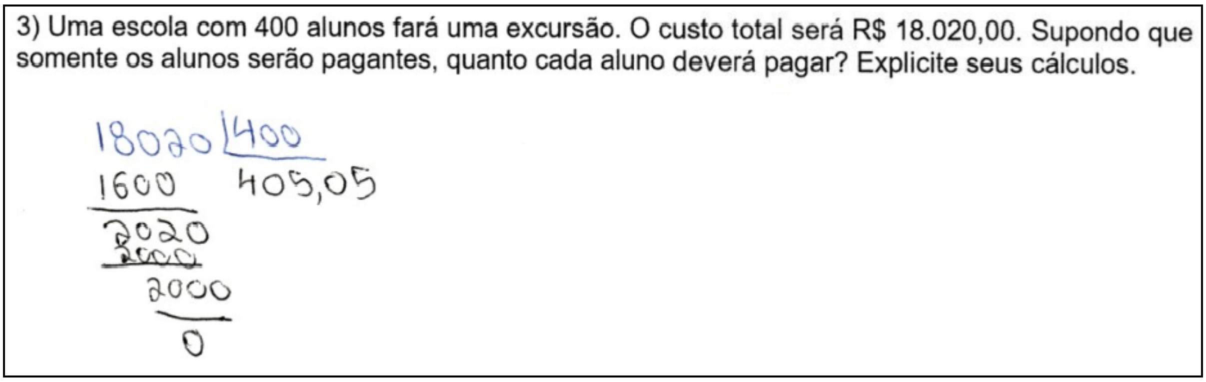
18.020 | 400

Não sei fazer divisão com numeros de 3 digitos ou mais! na verdade eu não lembro ou eu nunca aprendi. sei lá!

Fonte: Acervo da autora (2017).

Esse estudante mostrou-se um pouco melhor preparado no pós-teste, conseguindo começar a desenvolver corretamente a divisão proposta (Figura 38).

Figura 38 - Questão 3 do pós-teste - A19.


3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.

18020 | 400
1600   405,05
2020
2000
2000
0

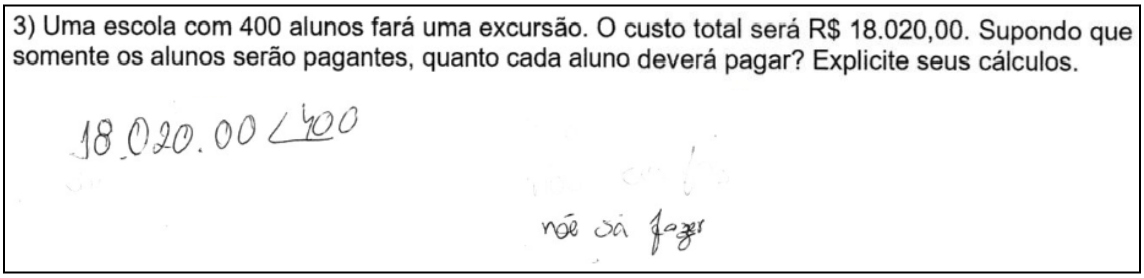
Fonte: Acervo da autora (2017).

Os alunos A13 e A8 acertaram apenas a primeira questão do pré-teste.

A13 cometeu no pós-teste o mesmo erro que havia cometido no segundo problema do pré-teste, no entanto, apresentou evolução, efetuando corretamente a divisão da terceira questão.

O aluno A8 não havia feito a terceira questão no pré-teste alegando não sabê-la (Figura 39), e, apesar de ter errado a questão no pós-teste, conseguiu desenvolver a divisão e acertá-la parcialmente (Figura 40), pois o tipo de erro cometido, previsto no planejamento coletivo, foi considerar o dividendo 18.020,00 como sendo o número 1.802.000, desprezando a existência da vírgula.

Figura 39 - Questão 3 do pré-teste - A8.

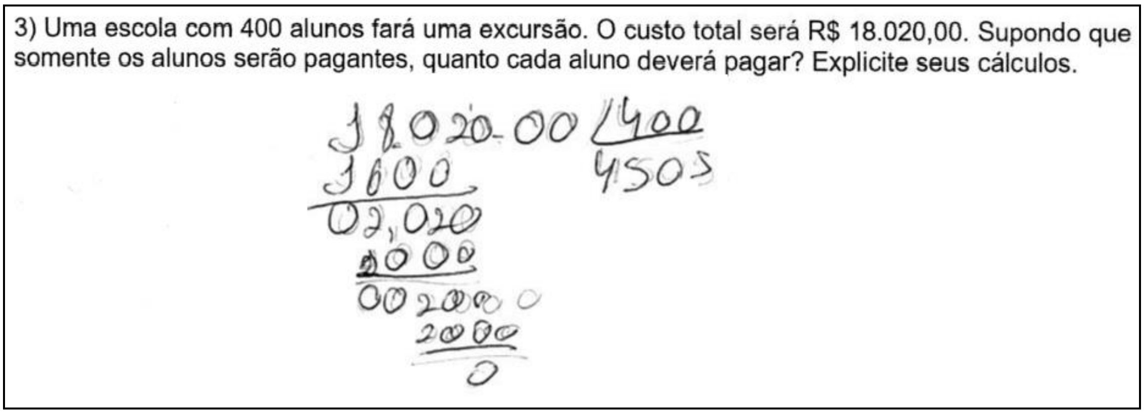

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.

18.020.00 ∟400

não sei fazer

Fonte: Acervo da autora (2017).

Figura 40 - Questão 3 do pós-teste - A8.

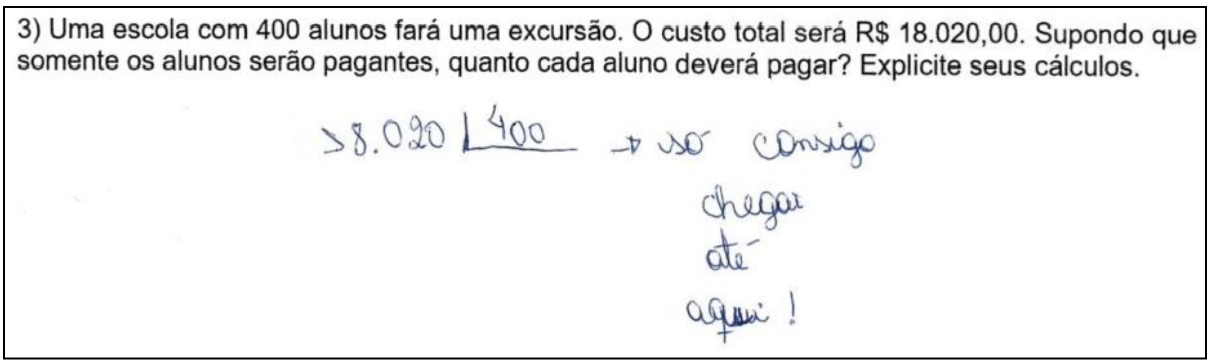

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.

18020.00 ∟400
1600 450S
02,020
2000
002000
2000
0

Fonte: Acervo da autora (2017).

Dois alunos, A24 e A15, haviam acertado apenas a segunda questão do pré-teste. A24 mostrou-se melhor preparado no pós-teste, conseguindo acertar todas as questões. No pré-teste, A24 não havia conseguido sequer iniciar a terceira divisão (Figura 41).

Figura 41 - Questão 3 do pré-teste - A24.

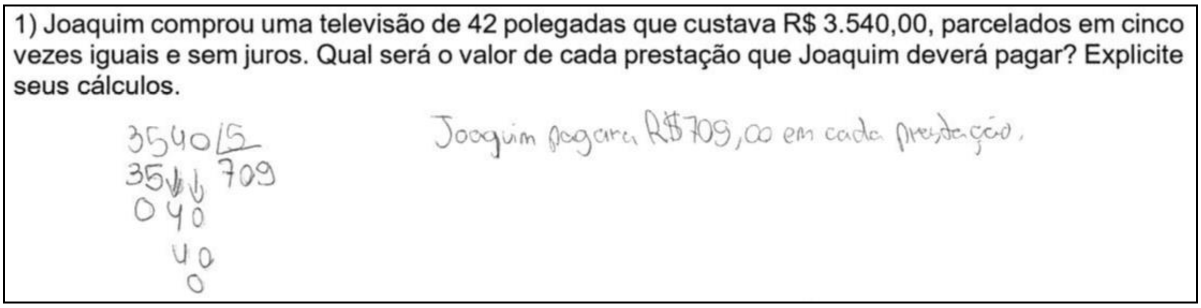

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explicite seus cálculos.

18.020 ∟400 → só consigo chegar até aqui!

Fonte: Acervo da autora (2017).

O aluno A14, que havia deixado todas as questões do pré-teste em branco, também mostrou evolução no pós-teste. Ele acertou a segunda questão e na primeira questão cometeu apenas um erro de tabuada, associando 9x5 a 40 e não a 45 (Figura 42).

Figura 42 - Questão 1 do pós-teste - A14.



1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explicite seus cálculos.

3540 | 5
35 | 709
040
40
0

Joaquim pagará R$709,00 em cada prestação.

Fonte: Acervo da autora (2017).

Outra melhora significativa foi percebida no aluno A23, que havia errado todas as questões no pré-teste e acertou todas no pós-teste. Todos os seus erros estavam associados a zeros no quociente. No pré-teste ele havia apresentado as respostas 78, 230 e 4,5 para o primeiro, o segundo e o terceiro problema, respectivamente.

No pré-teste havia um total de 18 questões em branco, enquanto no pós-teste, foram apenas duas. Apesar da maioria dessas 18 questões terem sido feitas de maneira errada no pós-teste, percebemos que boa parte desses alunos não conseguia ao menos começar a resolver o problema. No pós-teste viu-se uma postura mais ativa dos estudantes, pois se permitiram tentar e, em alguns casos, resolver parcialmente ou até acertar essas questões.

Apesar das evoluções verificadas, tivemos mais erros no pós-teste do que gostaríamos. Analisando pré e pós-testes e a participação nas aulas, observamos que de fato houve maior evolução dos alunos que se envolveram mais ativamente no processo. Em muitos casos, a natureza dos erros não era a mesma, mostrando que houve algum aprendizado.

O resultado nos parece um tanto aquém do esperado e levantamos algumas hipóteses sobre isso. Uma delas é que os alunos se dispersaram durante a aula. Alguns não viam necessidade de aprender diferentes métodos e, ao pensar que compreenderam um deles, não se envolviam na aprendizagem dos outros. Outra hipótese é a própria questão cultural escolar de aprovação automática, que faz com que muitos alunos se esforcem pouco ou quase nada. Daí a importância do olhar individual apurado, que percebe o que não está escrito ao comparar questões de pré-teste e pós-teste dos alunos que se envolveram na aula e que conclui que houve evolução no aprendizado dos alunos.

9 CONCLUSÕES

Partindo do objetivo de analisar as contribuições do *Lesson Study* para a aprendizagem dos alunos no processo de operação de divisão, verificamos que o modelo japonês mostrou-se eficaz, tendo em vista os avanços observados nas análises individuais dos pré-testes e pós-testes.

Evoluções ainda mais significativas foram percebidas quando nos atentamos para o desenvolvimento dos estudantes que tiveram efetiva participação durante as aulas, uma vez que, como em outros ambientes educacionais, precisamos lidar com muitos alunos pouco motivados e desinteressados pelo processo de aprendizagem. Ainda assim, alguns alunos que geralmente não participavam das aulas regulares, se mostraram um pouco mais ativos, evidenciando a importância de tornar o aluno protagonista de todo o processo.

As trocas realizadas entre professores e alunos, e alunos e alunos, no decorrer da Pesquisa de Aula, permitem que a aula seja menos impositiva e garantem o protagonismo do estudante na aquisição de novos conhecimentos.

Ao identificar e se apropriar das variadas estratégias para a abordagem de um conteúdo, os professores se abastecem de instrumentos para atingir as diversas maneiras de pensar dos seus alunos.

Mesmo que a divisão seja, entre as quatro operações básicas, a operação que mais gera dúvidas entre os alunos podemos fazê-los alcançar seu entendimento através de uma construção sólida do sistema de numeração decimal, suas ordens e valores posicionais, e do desenvolvimento do raciocínio por estimativas.

Independente do método escolhido pelo aluno para calcular uma divisão, é necessário que ele compreenda os procedimentos matemáticos envolvidos, evitando aplicações de técnicas puramente mecânicas.

Apesar de alguns alunos terem se mostrado resistentes a conhecer mais de uma estratégia para calcular uma divisão, entendemos que isso é um aspecto cultural da educação básica brasileira e que gradativamente podemos inserir em nossas aulas novas vias para construir a matemática.

Verificamos durante as aulas que alguns dos estudantes que mostraram resistência inicial a aprender mais de um método para calcular uma divisão conseguiram se apropriar de pelo menos um método distinto do que já conheciam e o utilizaram para resolver algum dos problemas propostos. É importante destacar que a relevância de se conhecer diferentes estratégias de resolução foi compreendida por vários alunos e inclusive verbalizada por alguns.

Ainda que o objetivo de pesquisa esteja centrado no aprendizado do aluno, entendemos que a Pesquisa de Aula deve ser estimulada tanto na formação inicial de professores de matemática quanto no processo de aprimoramento profissional, por todos os aspectos enriquecedores apresentados ao longo do texto.

Ademais, o planejamento executado nessa pesquisa pode ser agora enriquecido com todas as análises e reflexões desenvolvidas e com as peculiaridades de cada sala de aula, a fim de gerar um replanejamento em nível mais maduro e contribuir para o ensino de divisão, sendo utilizado por professores, pedagogos e futuros profissionais da educação.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da metodologia japonesa de lesson study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. In: XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão, São Paulo - SP. **Anais**... 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br >. Acesso em: 30 mai 2018.

ESPÍRITO SANTO. Secretaria da Educação. **Guia de implementação**. Vitória: SEDU, 2009. 72 p. (Currículo Básico Escola Estadual).

FELIX, T. F. **Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do estado de São Paulo, com a metodologia da pesquisa de aulas (Lesson Study)**. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da Terra) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F. de; WROBEL, J. S. Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. **Vidya**, v.37, n.1, p.51-73, 2017.

HOBSBAWN, Eric J. **A era do capital**: 1848-1875. 13ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

ISODA, M. Lesson Study: Japanese Problem Solving Approaches. Trabalho apresentado à **APEC Conference on Replicating Exemplary Practices in Mathematics Education**, Koh Samui, Thailand, 7-12 Mar. 2010.

ISODA, M.; OLFOS, R. **El enfoque de resolucion de problemas**: en la enseñanzad e la Matemática a partir del estudio de classes. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaiso, 2009.

LEITE, H. C. A.; PRANE, B. Z. D.; KUSTER, J. S. Erros de alunos do 6º ano e dificuldades de licenciandos na explicação do zero no quociente. In: **V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)**. Petropólis: SBEM, 2012.

ORTIZ, R. **O próximo e o distante**: Japão e modernidade - mundo. São Paulo: Brasiliense, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POLYA, G. **Mathematical Discovery**: on understanding, learning and teaching problem solving. V2. New York: Jonh Wiley & Sons, 1981.

PRANE, B. Z. D.; LEITE, H. C. A.; KUSTER, J. S. Zero no quociente: levantamentos preliminares na identificação de dificuldades em alunos do sexto ano. In: FLORES, R. (Ed.). **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, vol. 26. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., p. 783-791, 2013a.

PRANE, B. Z. D.; LEITE, H. C. A.; KUSTER, J. S. Análise de erros como avaliação diagnóstica num curso de Pedagogia: vírgulas, zeros e divisões. In: **XI Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)**. Curitiba: SBEM, 2013b.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C e SAIZ, I. (Orgs). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 156-185, 1996.

SCHOENFELD, A. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Ed.) **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: APM e Projecto MPT, p.61-72, 1996.

SOUZA, M. A. V. F. de. A produção de significados e a representação mental na solução de problemas mal-estruturados de matemática. **Boletim GEPEM**, jan/jun.2012 n.60, p. 129-144, 2012.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. **Quadrante**, Lisboa, v. XXIV, n.2, 135-162, 2015.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S. **Café, Leite e Matemática**. Vitória: Edifes, 2017. (Lesson Study em Matemática).

SOUZA, M. A. V. F. et al. **Peixes para contar e estimar**. Vitória: Edifes, 2018. (Lesson Study em Matemática).

SOUZA, M. A. V. F; WROBEL, J. S.; BALDIN, Y. Y. Lesson Study como Meio para a Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática - Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. **Boletim GEPEM**, 2018.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de matemática**: como dois e dois - a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

VANDENBOS, G. R. (Org.). **Dicionário de Psicologia da APA**. Porto Alegre: Artmed, 2010. p.807.

WROBEL, J. S. et al. Inquiries in problem solving with contributions from lesson study. In: **Proceedings of PME 40**, v.1, p.341. Szeged: Hungary, 2016.

ANEXO I - TCLE professoras

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu,____, CPF__________________, professor(a) no(a) ____, declaro estar ciente de minha participação voluntária na investigação desenvolvida pela Professora Núbia Quenupe Campos, orientada pela pesquisadora Professora Julia Schaetzle Wrobel, intitulada “O Lesson Study potencializando o ensino-aprendizagem da operação de divisão” no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo.

Autorizo a utilização das informações coletadas em gravações de áudio/vídeo das quais farei parte desde que sua divulgação seja por nome fictício, imagem de rosto esmaecida e vozes não identificáveis, a fim de resguardar o sigilo necessário. A presente autorização abrangerá os seguintes aspectos: gravação de voz e imagem em entrevista e outros instrumentos de coleta de dados, aplicação de problemas e avaliações escritas, todos podendo ser individual ou em grupo. Não haverá identificação em nenhum tipo de publicação, escrita ou não.

Estou ciente de que em qualquer etapa do estudo, terei acesso à pesquisadora responsável - Profa. Dra. Julia Schaetzle Wrobel pelo endereço eletrônico juliasw@gmail.com. Ademais, declaro ter sido informado(a) de que a minha participação representa riscos mínimos de constrangimentos para mim, restringindo-se à aspectos didáticos-pedagógicos e que serão tomadas todas as providencias e cuidados para tal risco. A experiência pretende contribuir para minha formação continuada educacional. Além disso, não terei nenhum custo nem receberei nenhuma vantagem financeira. Sei que posso recusar minha participação no estudo e que, a qualquer momento, posso retirar meu consentimento, sem necessidade de justificativa.

Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Recebi uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido. Assim, manifesto meu livre consentimento em participar da referida pesquisa.

Vitória, ____ de fevereiro de 2017.

____

Assinatura do professor(a)

ANEXO II - TCLE alunos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, CPF ______________, responsável pelo(a) menor ____, aluno(a) da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Fernando Duarte Rabelo, declaro estar ciente de sua participação voluntária nas aulas que serão ministradas nos dias 07 e 08 de março de 2017, quando serão realizadas gravações em áudio e vídeo da turma e professor.

Autorizo a utilização das informações coletadas em entrevistas, questionários, aplicações de problemas de Matemática e testes do tipo "lápis e papel", compreendendo, inclusive, a resolução de problemas de Matemática, desde que a divulgação seja por nome fictício, imagem de rosto esmaecida e vozes não identificáveis, a fim de resguardar o sigilo necessário para a ética da pesquisa. A presente autorização abrangerá os seguintes aspectos: gravação de voz e imagem em entrevista, aplicação de questionários, problemas e testes escritos, todos podendo ser individual ou em grupo. O(a) aluno(a) não será identificado(a) em nenhuma publicação.

Estou ciente de que em qualquer etapa do estudo terei acesso ao diretor da Escola. Ademais, declaro ter sido informado de que a participação do(a) aluno(a) supracitado(a) não representa riscos para ele(a), pelo contrário, a experiência pretende contribuir para sua formação educacional. Além disso, ele também não terá nenhum custo nem receberá qualquer vantagem financeira. Como responsável pelo(a) aluno(a), poderei retirar meu consentimento ou interromper a participação dele na presente aula a qualquer momento, sem necessidade de justificar.

Fui informado(a) dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas. Assim, manifesto meu livre consentimento em permitir a participação do(a) aluno(a) na referida pesquisa.

Vitoria, ___ de fevereiro de 2017.

____

Responsável pelo menor

ANEXO III - TCLE diretor escolar

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, CPF_________________, ocupante do cargo de direção da Escola Estadual de Ensino Médio Professor Fernando Duarte Rabelo, autorizo a gravação em áudio, vídeo e imagens da aula que será ministrada nos dias 07 e 08 de março de 2017, pela Professora Núbia Quenupe Campos, efetiva nesta Escola, e assistida por uma professora da Secretaria Estadual de Educação - ES, três professoras da Universidade Federal do Espírito Santo e uma professora do Instituto Federal do Espírito Santo, como parte da pesquisa intitulada "O Lesson Study potencializando o ensino-aprendizagem da operação de divisão" no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo.

Afirmo que fui devidamente orientado sobre a utilização dos dados, exclusivamente para fins acadêmico-científicos, e sua divulgação posterior, sendo que meu nome, o dos professores e dos alunos envolvidos na presente aula serão mantidos de acordo com os padrões profissionais de sigilo, com a utilização de nomes fictícios e rostos esmaecidos para a apresentação dos dados coletados.

Caso necessário, a qualquer momento poderei revogar este termo de consentimento livre e esclarecido se comprovada atitudes que causem prejuízo à instituição ou que comprometam o sigilo dos dados dos participantes desta pesquisa.

Assim, tendo sido informado dos objetivos do presente estudo de maneira clara e detalhada, tendo esclarecido minhas dúvidas, autorizo a utilização e a divulgação dos dados com a finalidade exposta.

Vitória, ____ de fevereiro de 2017.

____

Prof. José Paulo Andrade Gomes

Diretor Escolar

Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo

ANEXO IV - Plano de aula

Planejamento coletivo da aula de aplicação de 4 problemas de divisão pela professora Núbia Quenupe Campos com uma turma de 1º ano, na EEEM Professor Fernando Duarte Rabelo.

Data da aplicação: 07 e 08 de março de 2017
Tempo de aplicação da aula: 2 aulas geminadas no dia 07/03 (duração de 110 minutos) e 2 aulas geminadas no dia 08/03 (duração de 110 minutos).
Material: quadro/folhas de papel pardo, pincéis, folhas com os problemas, canetas.
Participantes: além da professora Núbia e dos alunos do 1º ano, observarão a aula três professoras da UFES, uma professora do Ifes e uma professora da SEDU.

DINÂMICA DA AULA

1) Breve introdução do que será feito na aula (3 min)
Os alunos já terão sido previamente informados sobre os objetivos da aula, mas no início da aula isso será reforçado.

<u>Professora:</u> Hoje nós iremos buscar e compartilhar soluções para algumas situações onde qualquer um de nós poderia estar inserido. A aula de hoje faz parte de uma pesquisa de intervenção que será usada na produção da minha dissertação/trabalho de conclusão do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo. A participação de vocês é muito importante e, desde já, agradeço. Nosso objetivo é que possamos juntos observar a existência de mais de um método de resolver uma mesma situação e que esses métodos sejam solidificados para que, de fato, haja sucesso no processo de ensino e aprendizagem.

<u>Possíveis questionamentos dos alunos:</u>

<u>Aluno:</u> Quem são essas pessoas?
<u>Professora:</u> São professoras que irão nos acompanhar. Já irei apresentá-las.

Aluno: Isso vai valer nota?
Professora: Sim. Valerá 1 ponto de participação.

Aluno: Posso usar calculadora?
Professora: Não.

Aluno: Por que não posso usar calculadora?
Professora: Porque sem a calculadora você vai ampliar sua capacidade de fazer aproximações, irá ampliar sua visão de mundo, seu repertório de estratégias e hipóteses de soluções, você poderá entender melhor a estrutura matemática e conseguir identificar seus erros, e ainda irá trabalhar áreas do cérebro que não trabalhamos usando apenas a calculadora.

2) Apresentação das professoras participantes da aula (2 min)

Os alunos já terão sido previamente informados sobre a presença dessas professoras na aula e o motivo de sua participação. Na hora da aula a apresentação será breve.

3) Organização da turma em grupos de 4 alunos (3 min)

Diante da turma de 40 alunos e observando o espaço físico disponível, observamos que a quantidade de 4 alunos por grupo seria ideal.
Os alunos poderão escolher os membros de cada grupo.
Observar se algum aluno estará ficando excluído dos demais e, cuidadosamente, inseri-lo em um dos grupos.

4) Entrega da folha com o primeiro problema aos alunos (2 min)

Será entregue no primeiro momento apenas a folha com o primeiro problema. Os problemas seguintes serão entregues um a um, de modo que só sejam entregues as folhas de um problema quando o anterior já estiver totalmente concluído (resolução dos alunos e conclusões dos alunos e professora).

Problema 1:

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção.

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar a prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

Imagem retirada de: <http://www.casasbahia.com.br/TelefoneseCelulares/Smartphones/Android/Smartphone-Positivo-Twist-4G-S520-Azul-com-Dual-Chip-Tela-5-Android-6-0-Camera-8MP-4G-Wi-Fi-Bluetooth-e-Processador-Quad-Core-de-1-0-Ghz-9342319.html>. Acesso em: 31 jan. 2017. (Adaptado).

5) Leitura individual do problema (3 min)

A professora solicitará que cada aluno leia individualmente o problema a fim de compreendê-lo e levantar possíveis dúvidas.

6) Leitura do problema em voz alta por um dos alunos e discussão visando a compreensão dos estudantes (5 min)

A professora solicitará que algum dos alunos faça a leitura em voz alta.

Após isso, verificar se os estudantes compreenderam o problema.

Não passar para o próximo passo sem que todas as dúvidas tenham sido solucionadas.

Possíveis questionamentos para a turma:

Professora: Alguém conseguiria me explicar com as próprias palavras?

Professora: O que está sendo vendido? Quantos celulares serão comprados? Quantas parcelas serão feitas? Quanto custa o celular?

<u>Possíveis questionamentos dos alunos:</u>

<u>Aluno:</u> O que é compra à prazo?
<u>Professora:</u> É uma compra que você não paga na hora que pega o produto. A cada mês que passa você paga uma parte do valor do produto. Geralmente as parcelas têm o mesmo valor.

7) Resolução do problema pelos alunos (10 min)

Será solicitado que os alunos resolvam o problema à caneta na folha que foi entregue.

Deixar claro que é muito importante que eles registrem seus raciocínios na folha, pois nosso objetivo não é apenas que eles encontrem a resposta, mas também verificar como a resposta foi obtida.

Incentivar que eles troquem ideias e estratégias com seus colegas de grupo.

Observar a turma durante o processo de resolução, caminhando entre os grupos. Verificar se o tempo dado é suficiente ou não.

Durante o processo de resolução pelos grupos, a professora já deverá ir observando as distintas soluções que forem surgindo.

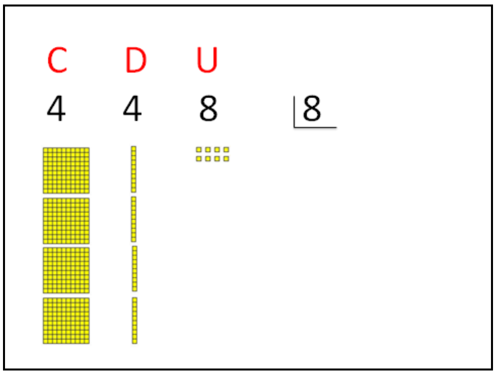
8) Apresentação das soluções pelos alunos

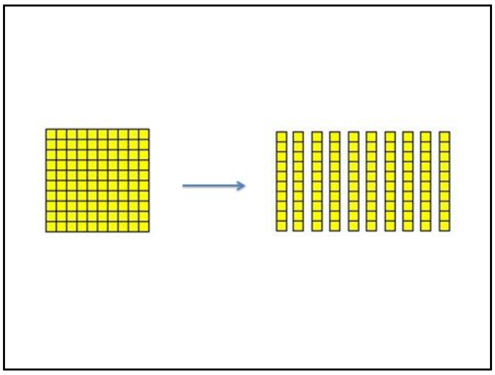
Solicitar a um, ou mais, representante de cada grupo que vá ao quadro e exponha a solução encontrada. Esse aluno deverá escrever e explicar a resolução de seu grupo. As soluções de todos os grupos deverão ficar expostas na lousa.

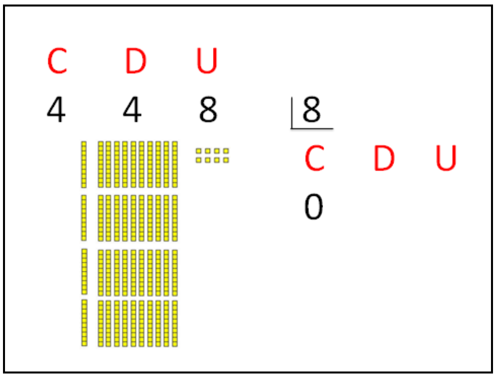
<u>Possíveis soluções:</u>

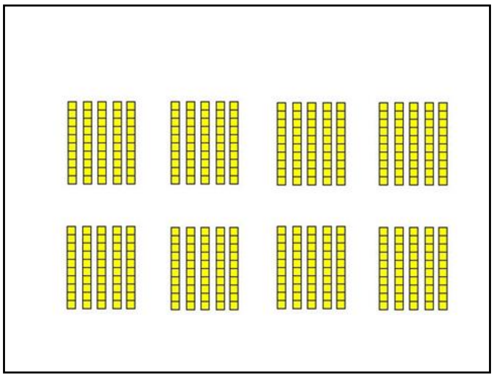
- <u>Algoritmo com Material Dourado</u>

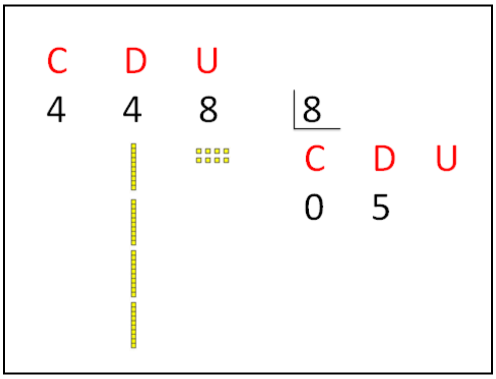
  Utilização do Material Dourado para uma abordagem concreta do algoritmo da divisão.

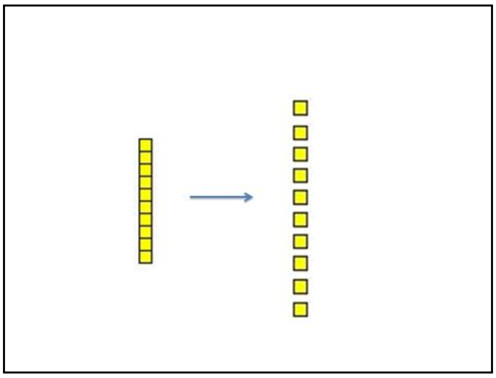

C D U
4 4 8
8

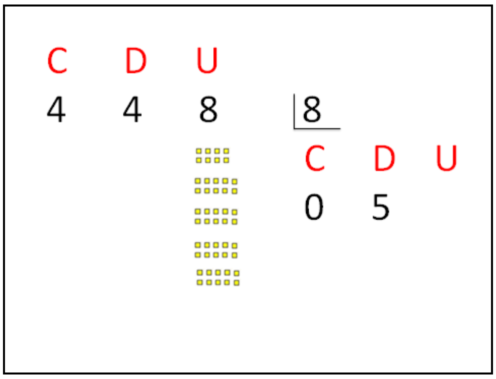


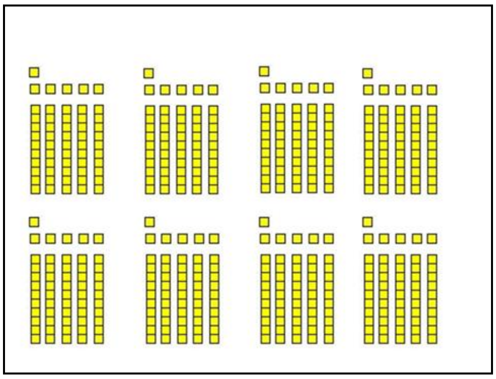

C D U
4 4 8
8
C D U
0

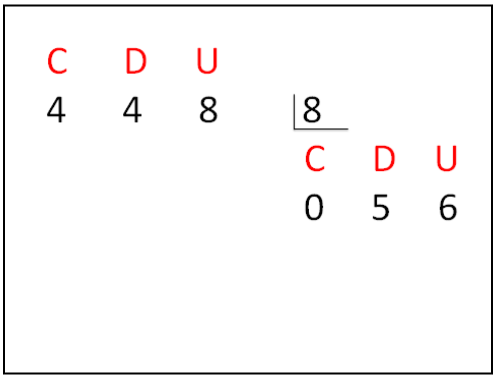



C D U
4 4 8
8
C D U
0 5



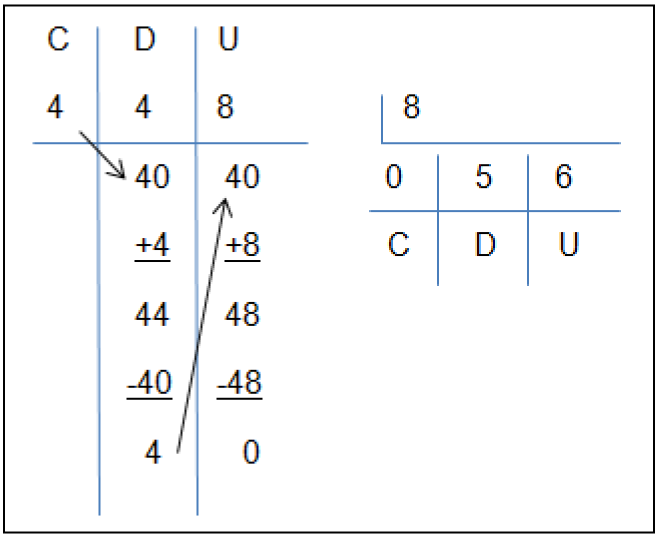

C D U
4 4 8
8
C D U
0 5





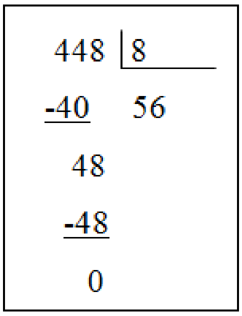
- Algoritmo detalhado

  Utilização do algoritmo da divisão, expondo as relações entre as ordens.



- Algoritmo

  Utilização do algoritmo da divisão.



Possível questionamento para o aluno:

Professora: Como você descreveria, passo-a-passo, a solução encontrada pelo seu grupo?

- Aproximação regressiva ("ir por cima")

  Fazer aproximações superiores ao valor de 448:

  8x60=480 (já passou!)

  8x4=32

  60-4=56.

- Aproximação progressiva ("ir por baixo")

  Fazer aproximações inferiores ao valor de 448:

  8x50=400 (ainda falta!)

  8x6=48

  50+6=56.

- Decomposição

  Decompor o 448 e depois fazer a divisão:

  400/8=50 e 48/8=6 → 50+6=56

  ou ainda

  400/8=50, 40/8=5 e 8/8=1 → 50+5+1=56.

- Método americano

  Utilização de subtrações sucessivas e aproximações.

448	8
-80	10
368	20
-160	20
208	+6
-160	56
48	
-48	
0	

448	8
-240	30
208	20
-160	+6
48	56
-48	
0	

A professora deverá conectar as soluções dos estudantes e apresentar possíveis soluções que não tenham surgido com os alunos.

9) Discussão dos possíveis erros/obstáculos matemáticos

Analisar os erros que por ventura surgirem e explicar aos alunos porque não são a resposta correta.

Possíveis respostas erradas:

- 5600 → o aluno pode usar os zeros da parte decimal do 448,00, apresentado no problema, na unidade e dezena da resposta.

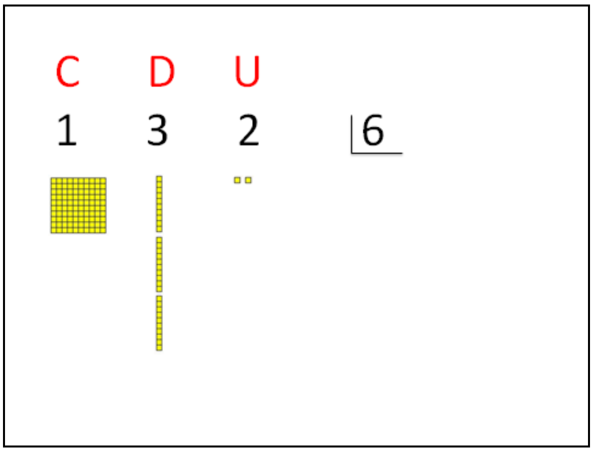
  Possível questionamento para o aluno:

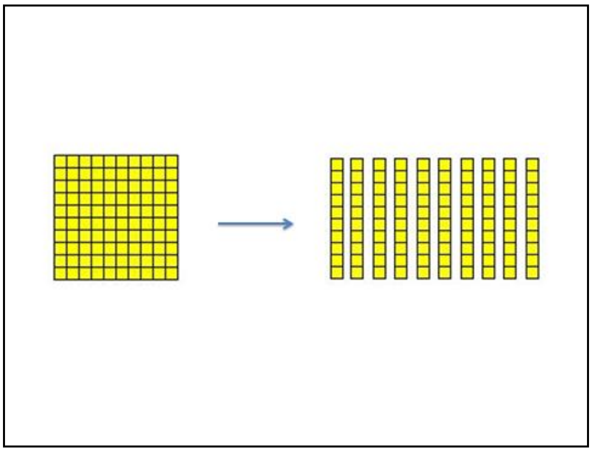
  Professora: Qual é o papel da vírgula no número 448,00?

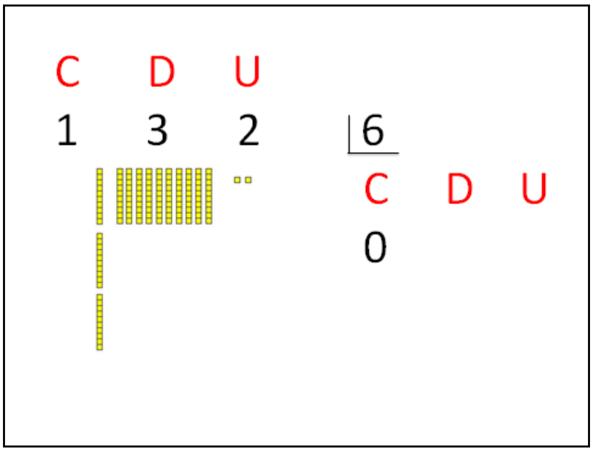
Lembrar de recolher a folha ao fim das discussões.

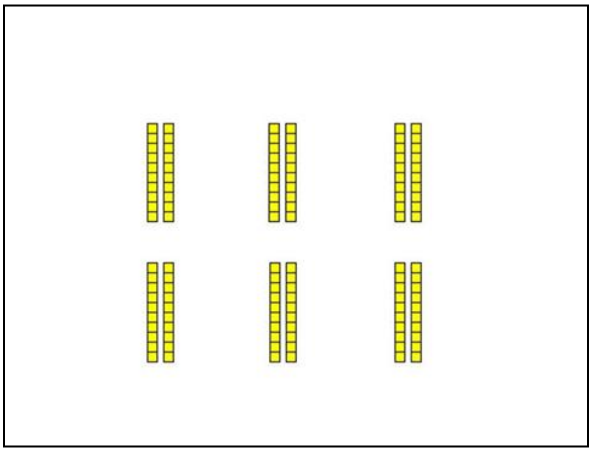
10) Estratégias para a gestão do tempo

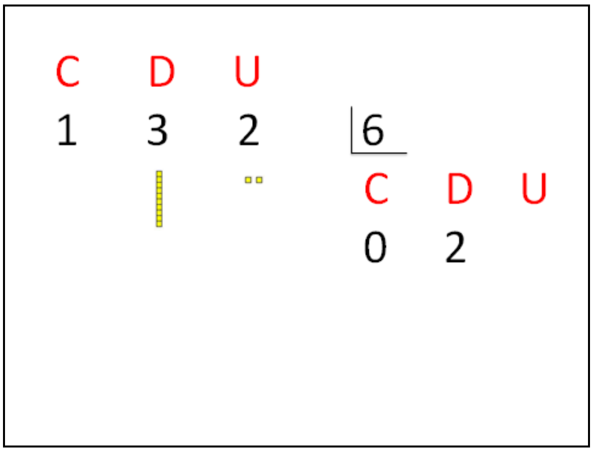
Caso o tempo restante da aula for insuficiente para iniciar um novo problema, a professora apresentará a divisão 132:6 com as imagens do Material Dourado.

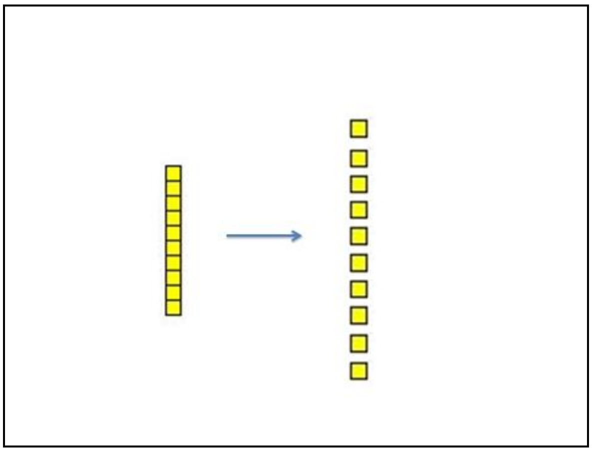

C D U
1 3 2 |6

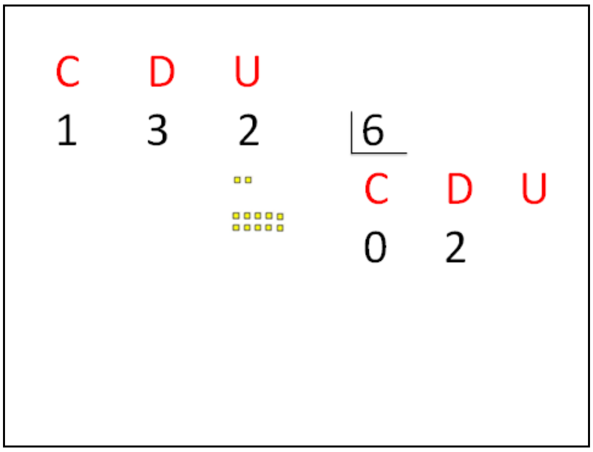


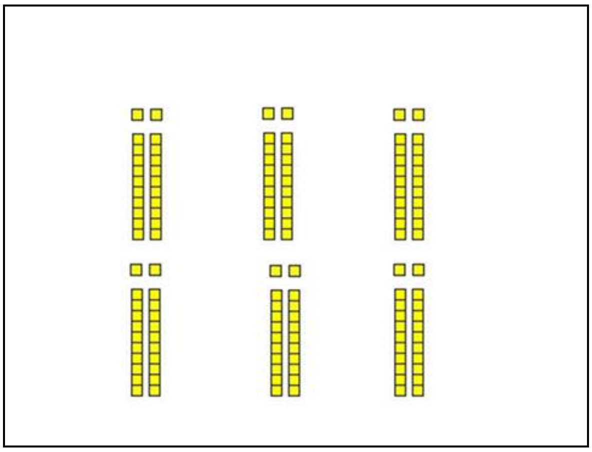

C D U
1 3 2 |6
C D U
0




C D U
1 3 2 |6
C D U
0 2




C D U
1 3 2 |6
C D U
0 2



C	D	U				
1	3	2	6			
			C	D	U
			0	2	2

Também poderão ser propostas seguintes atividades:

1) 212:4
2) 434:7

11) Entrega da folha com o segundo problema aos alunos (2 min)

Após se esgotarem todas as discussões do primeiro problema os alunos receberão o problema número 2.

Problema 2:

Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

12) Realizar novamente os passos 5), 6), 7), 8) e 9) para o segundo problema

Possíveis questionamentos para a turma: (no passo 6))

Professora: Alguém conseguiria me explicar o problema com suas palavras?

Professora: O que deverá ser feito? São quantos alunos no total? Quantos alunos devemos alocar em cada turma?

<u>Possíveis questionamentos dos alunos:</u> (no passo 6))

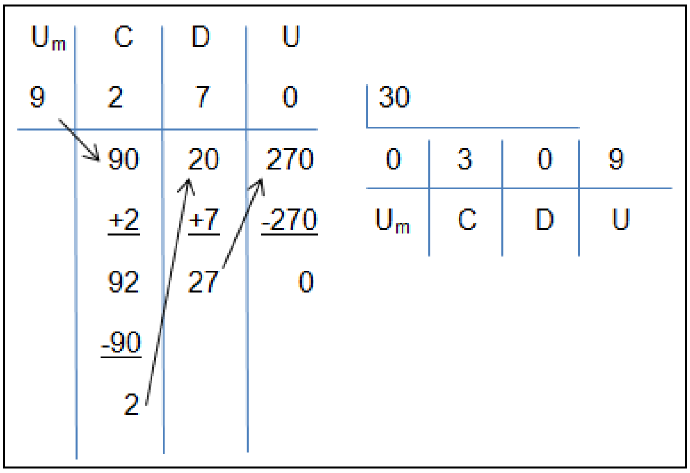
<u>Aluno:</u> O que é alocar?

<u>Professora:</u> É colocar alguém ou algo em determinado lugar.

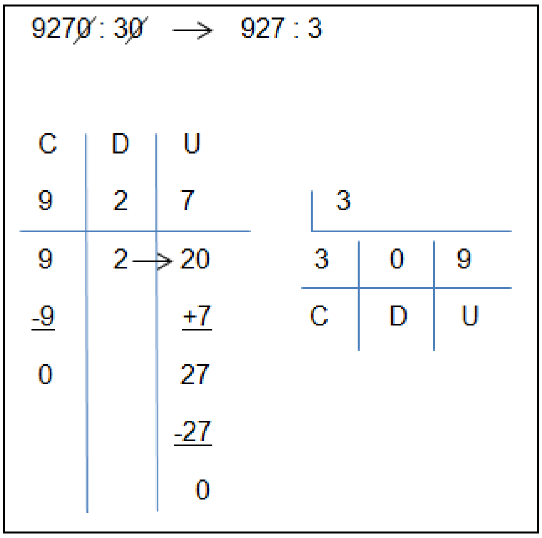
<u>Possíveis soluções:</u> (no passo 8))

- <u>Algoritmo detalhado</u>

  Utilização do algoritmo da divisão, expondo as relações entre as ordens.



ou ainda



<u>Possível questionamento para o aluno:</u>

<u>Professora:</u> Por que podemos “cancelar” o zero?

- Algoritmo

  Utilização do algoritmo da divisão:

9270	30	927	3
-90	309	-9	309
27		02	
-0		-0	
270		27	
-270		-27	
0		0	

  Nesse método o aluno pode ou não cancelar os zeros do divisor e dividendo.

- Decomposição

  O aluno decompõe o 9270 (9270=9000+270) e depois divide:

  9000/30=300 (mais uma vez o aluno pode ou não cancelar os zeros do divisor e do dividendo) e 270/30=9 (podendo cancelar os zeros novamente) → 300+9=309.

  Possível questionamento para o aluno:

  Professora: Por que a decomposição do número 9270 foi feita dessa forma? Poderia ser feita de outra maneira?

- Aproximação regressiva

  Fazer aproximações superiores a 9270:

  Se fosse 9300 teríamos 30x310 (verificamos que 3x31=93 e acrescentamos os zeros). Precisamos de 30 a menos e 30x1=30.

  310-1=309.

- Método americano

Utilização de subtrações sucessivas e aproximações.

9270	30
-6000	200
3270	100
-3000	+9
270	309
-270	
0	

9270	30
-3000	100
6270	100
-3000	100
3270	+9
-3000	309
270	
-270	
0	

<u>Possíveis respostas erradas</u>: (no passo 9))

- 39 → o aluno não se atenta para a existência do zero no quociente ou ainda faz direto 9/3=3 e 27/3=9.

- 390 → o aluno não se atenta para a existência do zero no quociente e pode achar o número 39 muito pequeno para a resposta, acrescentando zero no final do quociente, ou ainda acreditar que pelo divisor e dividendo terminarem em zero, o quociente também deveria terminar.

- 3090 → o aluno pode acertar a divisão, mas acreditar que ela deve terminar em zero, pois dividendo e divisor terminam em zero.

13) Estratégias para a gestão do tempo

1) 8320:40
2) 6120:60

14) Entrega da folha com o terceiro problema aos alunos (2 min)

Após se esgotarem todas as discussões do segundo problema os alunos receberão o problema número 3.

Problema 3:

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papelaria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?

Imagem retirada de: <http://www.tempoagora.com.br/previsao-regiao/sudeste/>. Acesso em: 2 fev. 2017. (Adaptado).

15) Realizar novamente os passos 5), 6), 7), 8) e 9) para o terceiro problema

<u>Possíveis questionamentos para a turma:</u> (no passo 6))

<u>Professora:</u> Alguém conseguiria me explicar o problema com suas palavras?

<u>Professora:</u> Quantos cadernos serão distribuídos? São quantas lojas?

<u>Possíveis questionamentos dos alunos:</u> (no passo 6))

<u>Aluno:</u> Como assim "sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra"?
<u>Professora:</u> Todas as lojas devem receber a mesma quantidade de cadernos.

<u>Aluno:</u> O que é uma rede de papelaria?
<u>Professora:</u> É um grupo de papelarias que tem um padrão específico. Geralmente pertencente a um mesmo grupo de pessoas. Essas papelarias estão interligadas.

<u>Possíveis soluções:</u> (no passo 8))

- <u>Algoritmo detalhado</u>

  Utilização do algoritmo da divisão, expondo as relações entre as ordens.

D_m	U_m	C	D	U
1	5	1	2	0
	10	10	110	0
	+5	+1	+2	
	15	11	112	
	-14		-112	
	1		0	

14				
0	1	0	8	0
D_m	U_m	C	D	U

- <u>Algoritmo</u>

  Utilização do algoritmo da divisão:

15120	14
-14	1080
11	
-0	
112	
-112	
00	

- <u>Aproximação progressiva e regressiva</u>

  Se fossem 1000 por loja teríamos 14x1000=14000. Faltam 1120.

  Se fossem mais 100 por loja teríamos 14x100=1400. Agora sobrou.

  Precisamos retirar 280 e 14x20=280.

  1000+100-20=1080.

- <u>Método americano</u>

  Utilização de subtrações sucessivas e aproximações.

15120	14
-14000	1000
1120	10
-140	20
980	20
-280	20
700	+10
-280	1080
420	
-280	
140	
-140	
0	

15120	14
-14000	1000
1120	50
-700	10
420	+20
-140	1080
280	
-280	
0	

<u>Possíveis respostas erradas:</u> (no passo 9))

- 18 → o aluno não se atenta para a existência do zero no quociente.
- 180 → o aluno não se atenta para a existência do primeiro zero no quociente.
- 1800 → o aluno pode achar as respostas anteriores muito pequenas e acrescentar zeros para chegar a um número mais plausível.

16) Estratégias para gestão do tempo

1) 8320:40
2) 6120:60

17) Entrega da folha com o quarto problema aos alunos (2 min)

Após se esgotarem todas as discussões do terceiro problema os alunos receberão o problema número 4.

<u>Problema 4:</u>

A distribuidora de produtos alimentícios América precisa transportar 22435 quilogramas de café que estão em seus galpões. Há apenas 700 sacos no estoque. Você deve fiscalizar o ensacamento dessa distribuidora, garantindo que os sacos recebam a mesma medida de café. Qual é essa medida?

18) Realizar novamente os passos 5), 6), 7), 8) e 9) para o quarto problema

<u>Possíveis questionamentos para a turma:</u> (no passo 6))

<u>Professora:</u> Alguém conseguiria me explicar o problema com suas palavras?

<u>Professora:</u> O que a distribuidora quer fazer? Qual o seu papel nesse processo? De quantos sacos a distribuidora dispõe? Quantos quilogramas serão distribuídos nos sacos? Podemos colocar quantidades diferentes de café em cada saco?

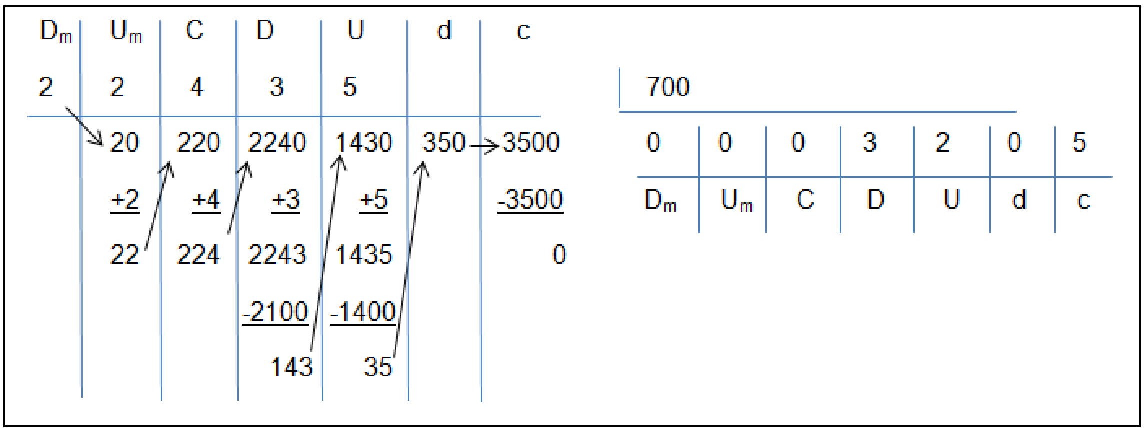
<u>Possíveis questionamentos dos alunos:</u> (no passo 6))

<u>Aluno:</u> Como assim "medida"? O que é medida?
<u>Professora:</u> É quantidade de café que estará em cada saco.

<u>Possíveis soluções:</u> (no passo 8))

- <u>Algoritmo detalhado</u>

  Utilização do algoritmo da divisão, expondo as relações entre as ordens.



- <u>Algoritmo</u>

  Utilização do algoritmo da divisão:

22435	700
-2100	32,05
1435	
-1400	
350	
-0	
3500	
-3500	
0	

- Aproximação progressiva

  Fazer aproximações inferiores a 22435:

  30x700=21000

  2x700=1400

  30+2=32

  Ainda restam 35 quilogramas para serem distribuídas em 700 sacos.

  Se fossem 350 quilos teríamos a metade de 700, então colocaríamos meio quilo a mais em cada saco.

  Como são apenas 35 quilos (que é um décimo de 350) devemos colocar 0,05 quilogramas (que é um décimo de meio quilo) a mais em cada saco.

  32+0,05=32,05.

Possíveis respostas erradas: (no passo 9))

- 32,5 → o aluno desconsidera a existência do zero após a vírgula.
- 32 → o aluno desconsidera a parte decimal da resposta.
- 320 → o aluno desconsidera a existência da vírgula.

19) Estratégias para a gestão do tempo

1) 8320:40 2) 6120:60

20) Conclusão da aula (2 min)

Agradecer a presença e participação de todos.

Apagar o quadro e organizar a sala.