ALEXANDRE GOULART ARRUDA

ENSINO DE JUROS COMPOSTOS, PROGRESSÃO GEOMÉTRICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2013

Dedico este trabalho à minha avó Marly Pires Ferreira que apesar de não estar vendo a conclusão deste trabalho, sempre acreditou na realização dele e sempre me apoiou na escolha em lecionar matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter sido amigo, companheiro em diversos momentos de dificuldades encontrados no percurso deste trabalho. Sem ele certamente nada disso poderia ter sido realizado.

Aos meus pais, Orlando Arruda e Maria Aparecida Goulart Arruda, que sempre me incentivaram e acreditaram na realização deste projeto. Pela compreensão nos momentos de ausência e pelas palavras de carinho e incentivo.

Ao professor Mercio Botelho Faria, que esteve ao meu lado orientando na escrita deste trabalho, mas que sem dúvidas desempenhou um papel muito além desse. Por diversas vezes foi amigo, incentivador, compreensivo diante das dificuldades, e claro sempre me proporcionando um aprendizado para este trabalho e para situações que levarei por toda a minha vida.

Aos meus amigos e parceiros de mestrado: Antônio, Bruno, Fabrício, Jossara, Juliana Elvira, Júnior, Marcelo, Márcio, Mônica, Patrick, Vandré, Vanessa e Vicente, pelos ótimos momentos de amizade e de troca de experiências que pudemos realizar. Sem dúvidas vocês constituíram junto a mim uma família nestes dois anos.

Em especial a grande amiga Keyla que fiz neste mestrado. Foram inúmeros os momentos de conversa, de risos, de dificuldades, de amizade, de apoio. Obrigado por ter estado ao meu lado sempre que precisei do seu apoio durante o curso e também no momento de escrita desta dissertação.

As minha amigas: Fernanda, Marjorie, Andressa, Livia que me acolheram carinhosamente em sua casa durante esses dois anos de curso por quase todos os finais de semana.

Aos meus amigos: Diogo Carvalho, Rodrigo Rodriguez, Fernando Lourenço, que convivem ou conviveram comigo diariamente, em casa, sempre tornando os momentos mais fáceis, alegres e tranquilos. Obrigado por todos os conselhos e toda a força que recebi neste período.

As minhas amigas Carla de Castro, Layanne Andrade Mendonça, Carolina Marianelli e Gabi Nunes que estiveram ao meu lado em todos os momentos desta conquista me apoiando emocionalmente, me incentivando e sempre dando força para que essa realização fosse possível.

A todos os colegas e amigos do Coleguium, em especial a Daniele Passagli e Alessandra Dias pela compreensão para que fosse possível a conciliação deste curso juntamente ao meu trabalho.

Ao Lucas Marquesini pela revisão ortográfica realizada em parte do trabalho.

A todos os mestres e professores que tive ao longo deste curso. Certamente cada um de vocês contribuiu significativamente para um novo aprendizado em matemática ou um aperfeiçoamento daquilo que já havia sido aprendido.

A Capes, pelo apoio financeiro que sem dúvidas foi fundamental para a realização deste trabalho.

A Universidade Federal de Viçosa pela ótima estrutura concedida.

RESUMO

ARRUDA, Alexandre Goulart, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Agosto de 2013. **Ensino de Juros Compostos, Progressão Geométrica e Função Exponencial.** Orientador: Mercio Botelho Faria.

O presente trabalho tem como objetivo apontar as semelhanças, diferenças, e relações existentes entre progressão geométrica, juros compostos e função exponencial no que se refere ao ensino desses conteúdos, através da resolução de problemas. Para isto, partimos de uma investigação histórica a cerca destes temas. Após tomar conhecimento do que normatiza o currículo básico comum sobre esses assuntos, bem como as orientações pedagógicas presente nos parâmetros curriculares nacional, foi feita uma análise em cinco obras didáticas de matemática. Esta analise permitiu saber: como esses assuntos são abordados, se há ausência de algum deles, a qualidade das informações presentes e a preocupação em deixar explicita a relação existente entre os conteúdos. Além disto, trouxemos algumas atividades a fim de contribuir para o ensino destes assuntos de forma independente ou correlacionados e finalizamos mostrando quais habilidades o governo federal espera que os alunos possuam para resolver situações-problemas que constam no exame nacional do ensino médio.

ABSTRACT

ARRUDA, Alexandre Goulart, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, August, 2013. **Educational Compound Interest, Geometric Progression e Exponential Function.** Advisor: Mercio Botelho Faria.

This work has as object, point the similarities, differences and relationship between geometric progression, compound interest and exponential function regarding the teaching of their content through problem solving. Therefore, we started from a historical investigation among these themes.
After taking knowledge of what the Common Core Curriculum (an official document) regulates these matters, as well as the pedagogical orientations present in the national curriculum guidelines, an annalizes has been done in five textbooks of mathematics. This analysis allowed to know: how these issues are addressed, if is there any absence of one of them, the quality of the information provided and the worry of make explicit the relationship between the contents. We bring some activities to contribute with the teaching of these matters in independents ways or correlates Ultimately, we show which skills the federal government wants the students to have to solve questions that are in "ENEM" (National High School Exam).

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Após alguns anos trabalhando como professor de Matemática no ensino médio em instituições tanto pública como privada percebi que os alunos apresentam inicialmente muita dificuldade no aprendizado de função. Em especial as funções exponenciais e logarítmicas.

Além disso, percebi que os alunos têm muita dificuldade de articular três conteúdos tão correlacionados na matemática do ensino médio, que são: progressão geométrica, juros compostos e função exponencial.

Tais dúvidas e dificuldades serviram de motivação para que fosse feita essa pesquisa com o intuito de buscar respostas e atividades que possam tornar o aprendizado destes conteúdos mais correlacionados ou até mesmo maneiras de tentar suprir dificuldades de um tópico a partir de outro.

Tal busca começou por uma breve evolução histórica destes conteúdos que está apresentada no capítulo 1. Neste capítulo já é possível perceber que ao longo da história estes temas surgiam de forma correlacionada.

Através da origem foi possível compreender a necessidade do ser humano e dos matemáticos em estudarem e evoluírem seus conhecimentos a cerca destes temas.

Por fim, fizemos uma busca sobre a evolução do ensino médio no Brasil bem como quais conteúdos matemáticos devem ser ensinados nesta etapa do conhecimento, seguido de suas orientações pedagógicas.

No capítulo 2, baseados nos documentos oficiais e nos objetivos deste trabalho escolhemos alguns tópicos sobre estes temas apresentando uma fundamentação teórica, com exemplos práticos e demonstrações formais.

Diante da busca histórica e da fundamentação teórica, sentimos a necessidade de fazer uma reflexão e uma análise sobre como algumas das principais obras matemáticas abordam estes temas.

Será que todos os tópicos recomendados pelos parâmetros curriculares nacionais e pelo currículo básico comum são contemplados? Será que os temas desta pesquisa são apresentados apenas de forma isolada ou há por parte dos autores uma preocupação em correlacionar estes temas? Essas e outras perguntas puderam ser respondidas neste capítulo após a leitura e análise de cada capítulo em cada obra.

Insatisfeito com a dificuldade apresentada pelos alunos a cerca da interação entre estes três temas e da forma como alguns livros os abordam, decidimos fazer uma busca de atividades e situações problemas que pudessem contribuir para este principal objetivo.

No capítulo 4 fazemos a apresentação destas atividades sem resolvê-las. Nele apresentamos apenas as questões e os objetivos propostos em cada uma delas. Algumas das atividades são consideradas clássicas na matemática. Outras foram adaptadas de livros e artigos enquanto algumas foram criadas e contextualizadas.

No capítulo 5 apresentamos o novo formato do exame nacional do ensino médio, bem como as habilidades que o governo federal espera que os alunos ao final do ensino médio dominem para resolver algumas das situações problemas sobre função exponencial, progressão geométrica e juros compostos que já estiveram presentes nas edições de 1998 a 2012.

Por fim, apresentamos como anexo a resolução de todas as situações problemas propostas no capítulo 4.

CAPÍTULO 1

PROGRESSÕES, JUROS COMPOSTOS E FUNÇÃO: BREVE HISTÓRICO

Neste capítulo será apresentada, respectivamente, uma breve evolução histórica dos temas: progressões, juros e funções.

Além disso, baseado nos documentos oficiais parâmetros curricular nacional e currículo básico comum mostraremos a revolução sofrida na estrutura do ensino médio, seguida de algumas orientações pedagógicas, bem como quais conteúdos de matemática devem ser abordados, obrigatoriamente, nesta etapa da educação.

Antes de expor os assuntos matemáticos que fazem parte desta dissertação de mestrado, assim como os estudos relacionados a eles, acreditamos que seja de extrema importância apresentar, mesmo que de forma breve, uma evolução histórica de tais assuntos.

Esta evolução apresentará desde o surgimento até conceitos e representações utilizadas atualmente. Neste caminho iremos permear pela necessidade do homem em criar ou estudar e aprofundar conhecimentos matemáticos conectados com seu contexto socioeconômico e cultural.

Para a realização deste propósito foram consultados alguns artigos, livros, sites e dissertações de mestrado.

A seção a seguir, sobre a evolução histórica das progressões foi baseada nas seguintes referências bibliográficas: livro introdução *A história da matemática* do autor Eves, a dissertação de Milani intitulada *A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio* e o artigo da professora doutora Lima intitulado *Progressões aritméticas e geométricas: história conceitos e aplicações.*

1.1 História das Progressões

As Progressões foram inicialmente estudadas pelos babilônios e pelos Egípcios. Estes estudos começaram com a observação de padrões. Dentre essas observações podemos destacar as enchentes ocorridas no Rio Nilo.

A observação deste padrão, ou a frequência com que as enchentes ocorriam se fez necessária para que os egípcios, de 5000 anos atrás, pudessem ter certeza sobre as épocas em que deveriam plantar e colher seus alimentos.

Foi a partir da observação de que as enchentes ocorriam sempre que a estrela Sirius se levantava a leste, isto é, num período de 365 dias, que o egípcios criaram o calendário solar de seu povo, composto de 12 meses de 30 dias, e mais cinco dias de homenagens aos seus deuses. O ano foi ainda dividido em três estações: época de semear, crescimento e colheita.

Segundo (EVES 2004), por volta de 4700 a.c., na Babilônia, além de existir um calendário solar próprio, já se trabalhava com tábuas de cálculos que dentre outros, apresentava a soma da sequência de quadrados de inteiros $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$. Outras tábuas babilônicas apresentavam problemas envolvendo juros compostos.

Por volta de (1900 a 1600 a.c) surgiu uma das mais extraordinárias tabletas, nomeada de Plimptom 322. Nesta já constavam alguns problemas sobre progressões aritméticas e geométricas.

Datado em 1650 a.c o paphiro Rhind é considerado um dos mais importantes da história da Matemática. É considerado um manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

Este Paphiro foi descoberto no Egito (povo que contribuiu significativamente para a preservação destes materiais) pelo eptólogo escocês A. Henry Hind. Publicado em 1927 ficou evidenciado que aquele povo já tinha conhecimento sobre progressões.

Dentre todos os problemas, um que chama atenção é o problema de número 79, pois trazia uma espécie de enigma que não buscava uma resposta prática, mas sim a evidência da não praticidade de se somar os números que nele aparecem: *sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16 807 hectares.*

Tal enigma mostra que este povo já se preocupava com o que hoje se conhece por soma dos termos de uma progressão geométrica (PG).

Segundo uma pesquisa realizada pela professora Lima, doutora na instituição UNIMEP, ainda neste Pahiro encontra-se a progressão geométrica

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$$

com uma ilustração a respeito dela. Tal progressão é conhecida como frações dos olhos do Deus Horus.

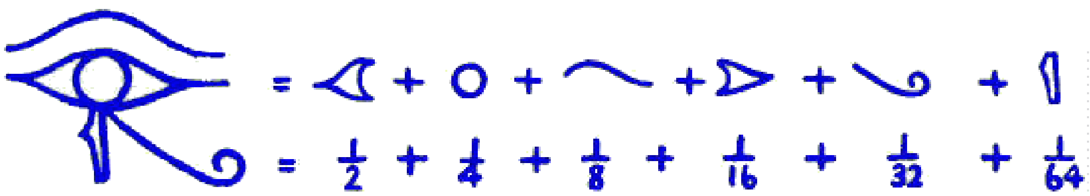


Figura1: Frações dos olhos do Deus Horus.[1]

Ainda segundo Lima, os egípcios possuíam habilidade para fazer a soma dos termos desta PG usando a técnica de multiplicar por um fator comum.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$

Multiplicando-se a equação acima por 64, que é o mínimo múltiplo comum entre 2,4,8,16,32 e 64 temos que:

$$64 \times S = 64 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)$$

$$64 \times S = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

[1] Fonte: http://www.fascinioegito.sh06.com/olho.htm

$$64 \times S = 63$$

$$S = \frac{63}{64}$$

Segundo (EVES, 2004) outro importante matemático que demonstrou ter conhecimento das progressões foi Pitágoras (585 a.c – 500 a.c). Pitágoras e os sábios gregos que vieram depois dele demonstraram ter conhecimento sobre as progressões geométricas, aritméticas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Foram os primeiros matemáticos a associarem matemática com música. Através de suas observações, os pitagóricos, concluíram que os intervalos musicais se colocam de modo que admitem expressão através de progressões geométricas.

Ainda de acordo com (EVES, 2004), os números figurados tiveram origem com os membros mais antigos da escola pitagórica. Tais números, que expressam o número de pontos em certas configurações geométricas, representam um elo entre a geometria e a aritmética. Para se calcular os n-ésimos números triangulares e pentagonais, os pitagóricos utilizavam a soma da progressão aritmética (PA).

Outro grande Matemático Grego que contribui para a história e evolução das progressões foi Euclides de Alexandria que na sua obra *Os elementos* apresentava problemas como:

Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem.

Tal enunciado refere-se a formula sobre o cálculo dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Outro povo que contribuiu significativamente para o avanço das progressões foram os Hindus, pois acredita-se que já possuíam habilidade de somar progressões aritméticas e geométricas rapidamente.

Dentre os matemáticos hindus, o considerado mais importante do século doze, foi Bhaskara (1114 a 1185) que escreveu duas obras conhecidas como “lilavati” e “vija-ganita” que possuem diversos problemas sobre vários tópicos da matemática como: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, além de progressões aritméticas e geométricas.

Um dos problemas diz que:

Numa expedição para calcular os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga calcular inteligentemente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?

Já no século XIII, um grande matemático que contribuiu para o estudo das progressões foi Leonardo de Pisa (ou Fibonacci). Em 1202 publicou sua obra mais famosa, intitulada Liberabaci, que trata de assuntos como: aritmética e álgebra elementares.

Nesta obra consta um dos problemas mais famosos sobre sequências, conhecido como *O problema dos pares de coelhos* que deu origem a famosa sequência de Fibonacci. O problema diz que:

Para tal, um indivíduo coloca um par de coelhos jovens num certo local rodeado por todos os lados por uma parede. Queremos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados, durante um ano, por esse par, assumindo que pela sua natureza, em cada mês dão origem a outro par de coelhos, e no segundo mês após o nascimento, cada novo par pode também gerar.

Outro problema deste livro apresentava uma relação entre progressão geométrica e juros.

Um certo homem aplica 1 denário a uma taxa de juros tal que em 5 anos ele fica com 2 denários e, daí em diante, a cada 5 anos a importância acumulada dobra. Pergunto: quantos denários ele ganharia em 100 anos, a partir de seu denário inicial?

Um dos matemáticos que demonstrou maior conhecimento sobre progressões foi o escocês Jonh Napier (1550-1617) ao fazer uma associação entre progressão aritmética e progressão geométrica inventou o logaritmo e a tábua de logaritmos. Tal invenção surgiu do objetivo de Napier em diminuir longas contas de multiplicação e divisão.

Para realizar tal feito,

> Napier, se baseou no fato de associando os termos de uma progressão geométrica $a, a^2, a^3, a^4, \ldots a^m, a^{m+1}, \ldots a^n$,... ao termos da progressão aritmética 1,2,3,4,5,...,m...,n,... temos que o produto $a^m . a^n = a^{m+n}$, de dois termos da progressão geométrica está associado à soma $m + n$ dos termos correspondentes da progressão aritmética. Para manter os termos da "progressão geométrica" suficientemente próximos do modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos da correspondência precedente, deve-se escolher o número a bem próximo de 1.(MILANI,2011 ,p.24.)

Segundo (EVES 2004) no século XVII, há uma lenda a respeito da morte do matemático Abraham de Moivre que envolve uma progressão aritmética. Segundo ele, de certa data em diante ele teria que dormir, em cada dia, 15 minutos a mais do que no dia anterior. E quando esse fato (progressão aritmética) atingisse 24 horas, ele, de fato, teria morrido.

Também segundo (EVES 2004) Johann Friederich Carl Gauss, nascido em 1777, um dos matemáticos mais importantes da história, conhecido como o príncipe da matemática deu uma grande contribuição para os conhecimentos de progressão aritmética. Conta-se que aos 10 anos de idade, diante de um problema proposto pelo professor à sua turma como sinal de punição, Gauss resolveu o problema rapidamente para espanto de seu professor.

Neste problema o professor pedia que seus alunos efetuassem a soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$. Gauss explicou que para efetuar a soma completa, bastava escolher os termos em dupla, sendo estes equisdistantes do centro. Ele observou que estas 50 somas tinham valores iguais. Isto é:

$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \cdots = 101$ e portanto o valor da soma desejada era $50 . 101 = 5050$.

Essa constatação feita por Gauss deu origem a famosa soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Para finalizar este relato histórico das progressões constataremos as influências destes conteúdos na teoria de Darwin. Segundo o economista Thomas Malthus “As populações crescem em PG ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em PA”

Tal afirmação foi fundamental para que Darwin em sua teoria afirmasse que devido a tal desproporção causaria um disputa entre os indivíduos conhecida como seleção natural em que sobreviveriam os mais fortes ou mais aptos em detrimento dos outros.

No entanto, sabe-se hoje, que a teoria do economista Malthus não é verdadeira, pois apesar de existir, a desproporção não ocorre de forma tão acentuada.

Dando continuidade a evolução histórica dos temas abordados neste trabalho, apresentaremos na seção a seguir, tal evolução, sobre juros compostos.

1.2 Um pouco da história dos Juros

Esta seção, que apresentará uma breve evolução histórica dos juros na humanidade, foi escrita após a consulta de um artigo do professor doutor Gonçalves que pode ser encontrado no site http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php, na obra *Matemática Ensino Médio* das autoras Smole e Diniz, no artigo *Resgate histórico da relação exponencial sobre os juros compostos* dos autores Francischetti, Padovez e Giuliani, publicado pela revista da FAE e no livro *Matemática Comercial e Financeira* do autor Faria.

De inicio, podemos dizer que o conceito de juros surgiu naturalmente ao longo da história quando o homem percebeu a estreita relação entre tempo e dinheiro. Tal conceito foi amplamente divulgado e utilizado de diversas formas ao longo da história.

Segundo uma pesquisa realizada pelo professor Gonçalves, do departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos-UFSCAR/SP, os primeiros indícios de juros surgiram há 2000 a.c na babilônia, quando os juros eram pagos pelo uso de sementes e de outras conveniências emprestadas.

Naquela época era comum se fazer o pagamento da dívida do empréstimo de sementes anualmente, pois era preciso esperar o período de colheita e assim então arcar com o empréstimo e com o juro.

Em concordância com Gonçalves encontramos na obra *Matemática Ensino Médio* das autoras Smole e Diniz o seguinte exemplo retirado de uma tabula babilônica datada de 2000 a.c:

Vinte "manehs" de prata, o valor da lã, os haveres de belshazzar, o filho do rei...Todos os haveres de Nadin-Merodach na cidade e no campo serão caução dada a Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba totalmente o dinheiro bem como os juros dele.

Na publicação da Revista FAE encontramos o conceito de juros expresso em situações e momentos diferentes da história na seguinte citação:

> Conforme Sandroni (2001), os economistas clássicos atribuíam a cobrança de juros à produtividade do capital, ou seja, ao lucro que o capital proporciona a quem o possui. Outra maneira de encarar o juro é a cobrança pelo serviço que o dinheiro presta a quem o toma emprestado. Também de acordo com Sandroni (2001), Keynes explicou a cobrança de juros pela escassez de capital (fator objetivo) e pela renúncia à liquidez do dono do capital (fator subjetivo). (Francischetti, Padoveze ,Giuliani, 2007,p.39)

Atualmente, segundo Faria existem dois regimes de capitalização. O regime de capitalização simples ou juros simples e regime de capitalização composta ou juros compostos.

> O primeiro ocorre quando o juro sobre o capital inicial em vários períodos resultar constante ao fim de cada período. Assim, em cada período o juro incide apenas sobre o capital inicial, ou por outra, não há incorporação do juro ao capital inicial (não há capitalização).Já o segundo ocorre quando ao fim de cada período o juro produzido nesse intervalo de tempo for somado ao capital que o produziu e passarem os dois, capital mais juros, a render juro no próximo período.(FARIA,2007,p.16.)

Para finalizar o resgate histórico dos conteúdos abordados neste trabalho, apresentaremos na seção a seguir a evolução ao longo do tempo sobre o conceito de função.

1.3 Função

Como material de apoio para relatar de forma breve a evolução histórica do conceito de função foram consultados o *artigo: Formalização do conceito de função no ensino médio: uma sequência de ensino-aprendizagem* dos autores Chaves e Carvalho e o texto *Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função* da professora Zuffi presente na Educação Matemática em Revista, uma publicação da sociedade brasileira de educação matemática.

O conceito de função surgiu de forma intuitiva na humanidade, sendo sua origem relacionada a necessidade do homem de estudar as leis naturais.

O processo de evolução desse conceito ocorreu de forma muito lenta, percorrendo muitos séculos, até se chegar a elaboração mais recente e aceita no meio acadêmico, no século XX. Isto ocorreu, pois, os conceitos, sejam na matemática ou em outras disciplinas, dependem e são desenvolvidos dentro de um contexto sóciocultural, sofrendo, portanto momentos de rupturas, evolução e estagnação.

No entanto, há uma incerteza sobre a época de surgimento deste conceito:

> não parece existir consenso entre os autores, a respeito da origem do conceito de função [talvez pelo seu próprio aspecto intuitivo]. Alguns deles consideram que os Babilônios (2000 a.C.) já possuíam um instinto de funcionalidade [grifos do autor] (...) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas (...) que eram destinadas a um fim prático. As tabelas, entre os gregos, que faziam a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostravam evidência de que estes percebiam a ideia de dependência funcional, pelo emprego de interpolação linear. (ZUFFI,2001,p.11.)
> .

Saindo das primeiras ideias intuitivas sobre função e chegando à idade moderna, temos que a palavra função foi usada pela primeira vez por Leibniz em 1694 para expressar a ideia de quantidade associada a uma curva.

Nessa época a definição de função era uma conjectura puramente abstrata voltada para o campo conceitual da matemática e “demonstrava certo encantamento pela álgebra onde função é dada como uma expressão algébrica” (ZUFFI,2001,p.12.)

Alguns anos depois, em 1718 Bernoulli considerou função como sendo uma expressão formada de uma variável e algumas constantes.

> Bernoulli experimentou várias notações para uma função, das quais “fx” é a que mais se aproxima da atual. Mas quem formalizou a notação “f(x)” para representar uma função qualquer envolvendo variáveis e constantes foi Euler.
> (Chaves, M.I.A ,De Carvalho H.C apud BOYER,1996)

Outros grandes matemáticos que contribuíram para o processo de formalização do conceito de função ao longo dos anos foram: Galileu, Descartes, Newton, Dedekind, Cauchy. Essas contribuições culminaram no século XIX para que Dirichlet desenvolvesse a definição mais próxima da utilizada nos dias de hoje.

A definição utilizada atualmente no meio acadêmico ocorreu em 1939 quando os conceitos de Dirichlet foram ampliados pela teoria de conjuntos. Tal definição é atribuída ao grupo de matemáticos franceses- denominados Bourbacki- que afirmam em linguagem escrita que:

Sejam A e B dois conjuntos, uma relação entre uma variável de x $\in$A, e uma variável y $\in$ B é dita relação funcional se qualquer que seja x $\in$ A, existe um único elemento y de B, que esteja na relação considerada.

Findada a evolução histórica sobre progressão geométrica, juros compostos e função iniciaremos na próxima seção a abordagem do ensino médio e da matemática em conformidade com os documentos oficiais que regulam e orientam suas estruturas.

1.4 A reformulação do ensino médio e os documentos Oficiais.

Antes do surgimento da lei de diretrizes e bases para a educação, em 1996, o ensino médio não era considerado como etapa final, obrigatória, da educação básica. Além disso, os conhecimentos adquiridos nesta etapa tinham fundamentalmente os objetivos de preparar para outra etapa escolar e para o exercício profissionalizante.

Após este ano, a educação sofreu grandes modificações. Os cuidados estavam centrados nas diferenças que se manifestavam dentro da sala de aula quanto ao aprendizado e também na necessidade de reestruturar o ensino médio, visto que seus objetos foram expandidos.

> A expansão exponencial do ensino médio brasileiro é outra razão pela qual esse nível de escolarização demanda transformações de qualidade, para se adequar à promoção humana de seu público atual, diferente daquele de há trinta anos, quando suas antigas diretrizes foram elaboradas. A ideia central expressa na nova Lei, e que orienta a transformação, estabelece o ensino médio como etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil – e não mais somente uma preparação para outra etapa escolar ou para o exercício profissional. (PCN+,2007,p.5.)

Essa etapa conclusiva da educação básica passou a ser um direito de todos. Seus aprendizados devem ser garantidos de tal forma que os estudantes devem utilizar os conhecimentos adquiridos em sua vida prática e profissional. Isto é, o aluno que vai dar progressão aos estudos e o aluno que decide encerrar sua vida acadêmica no ensino médio, ambos devem sair desta etapa com suas necessidades supridas.

> As modalidades exclusivamente pré-universitárias e exclusivamente profissionalizantes do Ensino Médio precisam ser superadas, de forma a garantir a pretendida universalidade desse nível de ensino, que igualmente contemple quem encerre no Ensino Médio sua formação escolar e quem se dirija a outras etapas de escolarização. (PCN,2000,p.8.)

Para atender a essas e outras necessidades precisou-se pensar numa nova forma de se ensinar as matérias estudas em todas as escolas do Brasil.

Isto implicou em diversas mudanças, dentre elas, uma nova denominação para as disciplinas tradicionalmente conhecidas.

Acredita-se que o aluno deva aprender por áreas de conhecimento como podemos ver no trecho abaixo:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico. (PCN,2000,p.6.)

Observe que quando são mencionadas, as áreas de conhecimento estão atreladas às suas tecnologias, isso implica que o novo saber também deve ser promovido no sentido de garantir que o aluno adquira competências e habilidades para que se desenvolva o aprendizado de técnicas e uma análise crítica sobre a prática vivenciada em relação a área do conhecimento vinculada a esta tecnologia.

> Ao se denominar a área como sendo não só de Ciências e Matemática, mas também de suas Tecnologias, sinaliza-se claramente que, em cada uma de suas disciplinas, pretende-se promover competências e habilidades que sirvam para o exercício de intervenções e julgamentos práticos. significa, por exemplo, o entendimento de equipamentos e de procedimentos técnicos, a obtenção e análise de informações, a avaliação de riscos e benefícios em processos tecnológicos, de um significado amplo para a cidadania e também para a vida profissional. (PCN,2000,p.6-7.)

Nesse sentido, diversas práticas pedagógicas foram repensadas, analisadas e consequentemente houve o surgimento de novas ideias que pudessem trazer ao aluno um aprendizado mais significativo.

É importante se pensar no aprendizado de uma área do conhecimento, isto é, adquirir suas competências e habilidades de forma integrada ao meio sócio, cultural e econômico em que o aluno esta inserido. Não se deve pensar em um aprendizado isolado de suas vivências diárias. Aliás, segundo o PCN + este pode e deve ser um interessante ponto de partida para que as diversas áreas do conhecimento introduzam um determinado conteúdo.

Mencionamos abaixo uma observação acerca desta ideia com relação à área de Matemática e suas tecnologias.

> Um dos pontos de partida é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo efetivo. (PCN,2000,,p.7.)

Neste novo cenário, surgem como propostas didáticas a necessidade de um ensino interdisciplinar. Isto é, o aluno deve ser capaz de enxergar as competências adquiridas corelacionadas com outras áreas do conhecimento, afim de que a partir de uma possa fazer inferências sobre outras, desenvolvendo assim a ideia de buscar semelhanças e diferenças, além é claro, de estabelecer uma visão global sobre determinado assunto.

> a consciência do caráter interdisciplinar ou transdisciplinar, numa visão sistêmica, sem cancelar o caráter necessariamente disciplinar do conhecimento científico mas completando-o,estimula a percepção da inter-relação entre os fenômenos, essencial para boa parte das tecnologias, para a compreensão da problemática ambiental e para o desenvolvimento de uma visão articulada do ser humano em seu meio natural, como construtor e transformador deste meio. Por isso tudo, o aprendizado deve ser planejado desde uma perspectiva a um só tempo multidisciplinar e interdisciplinar, ou seja, os assuntos devem ser propostos e tratados desde uma compreensão global, articulando as competências que serão desenvolvidas em cada disciplina e no conjunto de disciplinas, em cada área e no conjunto das áreas. Mesmo dentro de cada disciplina, uma perspectiva mais abrangente pode transbordar os limites disciplinares. (PCN, 2000,p.9.)

Além disso, a resolução de situações-problemas se torna uma proposta central no processo de ensino e aprendizagem. Acreditamos que desta forma o aluno se torna um ser crítico, pensante, capaz de errar e analisar seus erros, mas principalmente tomar decisões diante de problemas.

Isto se torna extremamente importante, pois o cidadão se vê diante de problemas diariamente e a todo tempo é obrigado a tomar decisões que lhe trarão consequências, nas quais é preciso fazer uma reflexão sobre estas.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que

> seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN+,2007,p.109.)

Todas as áreas do conhecimento passaram pelas modificações acima com a intenção de se conquistar os novos objetivos propostos para a etapa final da educação básica que é o ensino médio.

Assim, apresentaremos na seção a seguir como a área do conhecimento matemática e suas tecnologias estão inseridas neste novo cenário, além de explicitar quais são as competências e habilidades esperadas que o aluno saiba ao encerrar o ensino médio nesta área.

1.5 A matemática em um novo cenário da Educação.

Apesar de necessária a integração entre todas as áreas do conhecimento, é preciso se compreender, de inicio, que o aprendizado de matemática requer em algum momento um saber isolado em prol da própria disciplina.

Isto é, a matemática constitui uma área do conhecimento em que se faz necessário o aprendizado de ferramentas para o uso da própria matemática, ou seja, significa aprender técnicas e ferramentas para se usar na própria matemática além de aprender a ler e reproduzir a linguagem própria que esta disciplina possui.

> A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto,ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. (PCN,2000,p.9.)

Além destes conhecimentos, a matemática desempenha um papel central na vida de toda a sociedade. É praticamente impossível se pensar um uma situação do dia a dia no qual não sejam necessários conhecimentos simples ou complexos desta área.

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações. As formas de pensar dessa ciência possibilitam ir além da descrição da realidade e da elaboração de modelos. (PCN,2000,p.9.)

Desta forma, podemos pensar no aprendizado da matemática atrelado a todas as outras áreas do conhecimento, isto é:

> juntam-se as competências e habilidades de caráter mais específico, na categoria investigação e compreensão científica e tecnológica; aquelas que, de certa forma, se direcionam no sentido da representação e comunicação em Ciência e Tecnologia estão associadas a Linguagem e Códigos; finalmente, aquelas relacionadas com a contextualização sociocultural e histórica da ciência e da tecnologia se associam a Ciências Humanas. (PCN,2000,p.11.)

Para o aluno, a matemática do ensino médio desempenha basicamente duas funções: uma formativa e outra instrumental.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (PCN,2000,p.40.)

Para desempenhar estes papéis e é claro as necessidades intrínsecas da nova proposta do ensino médio, a área de matemática e suas tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante esta etapa da educação básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros.

- representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

- investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
- contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Para se conquistar o desenvolvimento dessas habilidades foi criado um conjunto de temas, com relevância científica e cultural e com articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos. São eles:

1. Álgebra: números e funções
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados

Vale ressaltar que está é apenas uma das possíveis formas de se estruturar os temas atendendo as necessidades dos parâmetros curriculares nacional.

No Primeiro tema, encontramos no PCN+ as seguintes observações e orientações sobre o ensino de funções:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações,na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. (PCN+,2007,p.118.)

Sobre as sequências encontramos recomendações que servirão de apoio para a proposta deste trabalho. Segundo ainda o PCN +:

> Com relação às sequencias, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades. O ensino desta unidade deve se ater à lei de formação dessas sequencias e a mostrar aos alunos quais propriedades decorrem delas. Associar às sequencias seus gráficos e relacionar os conceitos de sequencia crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as ideias envolvidas, ao mesmo tempo em que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma sequencia sem precisar decorar informações. (PCN+,2007,118.)

Observemos que embora mencionada muitas vezes ao longo dos documentos oficiais, a matemática financeira não constitui ou faz parte de algum dos temas e, por esta razão, não estamos apresentando os comentários do PCN+ acerca deste conteúdo.

Na seção a seguir apresentaremos o que o currículo básico comum (CBC) de Minas Gerais em conformidade com o PCN e PCN+ aponta quais temas devem ser ensinados em matemática obrigatoriamente.

1.6 A matemática no Currículo Básico Comum (CBC)

Segundo o CBC, a escolha e a distribuição dos tópicos de matemática está justificada pela seguinte trajetória: iniciando pela formação básica, passando pela etapa de aprofundamentos e finalizando com conteúdos complementares.

Assim, ainda segundo este documento, podemos compreender o ensino de matemática no ensino médio com a seguinte visão global:

- O primeiro ano é o ano da formação básica, quando são apresentados conceitos e métodos que constam de todos os temas estruturadores do CBC de Matemática. A distribuição feita permite um retorno às habilidades referentes a tópicos do CBC do ensino fundamental, que são essenciais para o desenvolvimento de novas habilidades. Entretanto, esse procedimento não deve ser visto como uma simples revisão, mas como uma forma de abordagem dos tópicos de maneira mais geral.

- O segundo ano é o ano de aprofundamento, quando são apresentadas situações com maior grau de complexidade, introduzidos novos tópicos e novos conceitos. Alguns tópicos são comuns aos dois anos, a diferença fundamental ocorrendo nas habilidades trabalhadas em cada um.

- O terceiro ano é o ano da complementação de formação, quando a escola poderá eleger tópicos complementares, dentre os quais, os sugeridos no CBC.

A seguir apresentaremos uma visão específica do ensino de matemática na etapa final da educação básica. Isto é, apresentaremos os conteúdos que devem ser abordados no que diz respeito á proposta deste trabalho.

Função exponencial	• Identificar exponencial crescente e decrescente. • Resolver problemas que envolvam uma função do tipo $y = k \cdot a^x$. • Reconhecer uma progressão geométrica como uma função exponencial do tipo $y = k \cdot a^x$ com domínio no conjunto dos números inteiros positivos.
Progressão Geométrica	• Identificar o termo geral de uma progressão geométrica. • Resolver problemas que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
Matemática Financeira (juros compostos)	• Resolver problemas que envolvam o conceito de juros compostos. • Resolver situações problemas que envolvam o cálculo de prestações em financiamentos com um número pequeno de parcelas. • Comparar rendimentos em diversos tipos de aplicações. • Comparar e emitir juízo sobre diferentes opções de financiamento.

Fundamentado no documento acima e na necessidade de expor os conceitos matemáticos necessários para este trabalho e para o ensino de matemática na etapa final do ensino médio, apresentaremos no próximo capítulo os tópicos de progressão geométrica, juros compostos e função exponencial.

2.FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica de alguns conceitos a respeito dos temas trabalhados, isto é, mostraremos todos os conceitos que se fizerem necessários para os objetivos propostos deste trabalho.

2.1 Progressão Geométrica

Para definir progressão geométrica foi feita uma pesquisa em algumas obras voltadas para o ensino médio.

Essa preocupação ocorreu de forma natural, pois nestas consultas tínhamos como objetivo tentar encontrar alguma definição que, além de estar matematicamente correta estivesse mais próxima dos outros assuntos abordados – função exponencial e juros compostos.

Na obra intitulada *Matemática Ensino Médio*, as autoras Smole e Diniz definem que:

> Toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante é chamada de progressão geométrica (PG). Essa constante, que indicaremos por q, é denominada razão da PG. (SMOLE & DINIZ,2010,p.156.)

Essa definição esteve muito próxima da encontrada nas obras: *Matemática Paiva* do autor Paiva, *Matemática Ciência e Aplicações* dos autores Eixo, Dolce, Perigo e Almeida e *Conexões com a Matemática* uma obra coletiva que teve como editora responsável Barroso.

Já nas obras *Matemática Contexto e aplicações* do autor Dante e *Progressões e Matemática Financeira* da coleção do professor de matemática

(SBM) encontramos definições próximas á citada acrescentando uma relação com a taxa de crescimento.

Segundo a obra *Progressões e Matemática Financeira*:

> Progressões geométrica são sequências que variam com taxa de crescimento constante. A taxa de crescimento de uma grandeza, que passa do valor a para o valor b, é definida por $\frac{b-a}{a}$, isto é, a taxa de crescimento é a razão entre o aumento da grandeza e seu valor inicial. (MORGADO & WAGNER & ZANI, 1999, p.17.)

Já Dante define que:

> Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. (DANTE, 2008,p.275.)

Pelos motivos citados acima escolheremos uma junção entre as definições apresentada por Smole e Diniz e por Dante. Assim inicia-se a fundamentação teórica da PG através de sua definição.

2.1.1 – Definição

Toda sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante é chamada de progressão geométrica (PG). Essa constante, que indicaremos por q, é denominada razão da PG. Isto é, uma progressão geométrica é uma sequência de números na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

A seguir será apresentada uma situação problema sobre progressão geométrica.

Suponha que a população de certo país aumente 2% ao ano. Se no ano de 2000 a população deste país é de 1.000.000 de habitantes, determine qual será o número de habitantes deste país nos próximos 3 anos.

$$Ano\ 2000\ \rightarrow 1.000.000$$

$$Ano\ 2001\ \rightarrow 1.000.000 + \frac{2}{100} \times 1.000.000 = 1.020.000$$

$$Ano\ 2002\ \rightarrow 1.020.000 + \frac{2}{100} \times 1.020.000 = 1.040.400$$

$$Ano\ 2003 \rightarrow 1040.400 + \frac{2}{100} \times 1.40.400 = 1061.208$$

A sequência, finita, formada pelo número de habitantes deste país (1.000.000, 1.020.000, 1.040.400, 1.061.208) forma uma Progressão Geométrica, pois de acordo com a definição acima temos que é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Note que, neste problema a constante q = 1,02.

Observação: Esta constante pode ser interpretada como 1 + 0,02 = 1 + 2%. Generalizando, pode-se afirmar que: uma PG tem taxa de crescimento i se, e somente se, sua razão q = 1 + i.

Na próxima seção daremos alguns exemplos sobre a relação entre a razão de uma PG e a taxa de variação entre os números da PG.

2.1.2 Alguns exemplos de progressões geométricas e a taxa de variação.

Exemplo 1: A sequência (3,9,27,81,243) é uma PG de cinco termos.

Note que neste exemplo a razão da progressão geométrica é igual a:

$$\frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = \frac{243}{81} = 3.$$

A taxa de crescimento é igual a i = $\frac{9-3}{3} = 2 = 200\%$. Assim, conclui-se também que q = 1 + i = 1 + 2 = 3

Exemplo 2: A sequência (1/2, ¼, 1/8, 1/16 ...) é uma PG infinita.

Note que neste exemplo a razão da progressão geométrica é igual a

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} \ldots = \frac{1}{2}.$$

A taxa de crescimento é igual a i = $\frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} =$ - $\frac{1}{2}$ = -50%. Assim, concluímos também que q = 1+i = 1 - $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Após definirmos PG e a taxa de variação entre os elementos desta PG, apresentaremos na seção a seguir a necessidade de se determinar o termo geral da progressão geométrica.

2.1.3O termo Geral de uma PG

Existem diversas situações problemas do dia-a-dia em que existe um padrão numérico no qual o interesse pode estar em se descobrir qual é a lei que permite conhecer o termo geral desta sequência. Isto é, através de uma fórmula podemos determinar o termo necessário e relevante para a situação proposta.

Observe a seguinte situação-problema adaptada do livro Matemática Ciências e Aplicações:

Uma empresa de telecomunicações planeja iniciar suas atividades em determinada região, comercializando pacotes de TV por assinatura. Sua meta para o primeiro ano de operações é vender 25 pacotes no primeiro mês, 50 pacotes no segundo mês, 100 pacotes no terceiro mês e assim *sucessivamente. Sabendo-se que a empresa vendeu 51.000 exemplares no mês de dezembro, determine se ela atingiu sua meta para todo o ano.*

Em problemas como este, fica evidenciado, que o interesse não está em todos os termos da sequência e por este motivo o ideal é que se discuta uma forma de descobrir o valor de interesse sem que seja necessário listar todos os valores da sequência até o valor desejado.

Como já sabemos, pela definição, a sequência formada pelos números (25,50,100...) é uma progressão geométrica.

Vejamos a seguinte tabela:

Mês	Número de pacotes T
1	$T_1 = 25$
2	$T_2 = 50 = 25 \times 2$
3	$T_3 = 100 = 25 \times 2^2$
4	$T_4 = 200 = 25 \times 2^3$
...	...
n	$T_n = 25 \times 2^{n-1}$

Pela tabela acima, percebemos que é possível encontrar um padrão, no qual o número de pacotes depende do mês. Isso ocorre de tal forma que em cada mês, o número de pacotes vendidos é igual ao número inicial multiplicado pela constante da progressão geométrica elevado ao número de meses menos um.

A partir do padrão deduzido podemos responder o que de fato era o interesse da questão. Para isso, basta substituir n por 12, isto é:

$$T_{12} = 25 \times 2^{12-1} = 51200.$$

Conclui-se assim que mesmo sem listar todos os elementos desta progressão geométrica foi possível calcular seu décimo segundo termo e afirmar que a empresa de fato conquistou o seu objetivo.

De forma geral, podemos deduzir que a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica é:

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots)$ uma PG. De acordo com a definição apresentada, temos que:

$$a_2 = a_1 \times q$$

$$a_3 = a_2 \times q \rightarrow a_3 = a_1 \times q^2$$

$$a_4 = a_3 \times q \rightarrow a_4 = a_1 \times q^3$$

$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & \end{matrix}$$

Assim por recorrência, concluímos que o termo a_n que ocupa a n – ésima posição na sequência é dado por:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Da mesma forma que em muitas atividades é necessário o conhecimento do termo geral de uma PG, em outras é preciso se conhecer um método que explicite a soma dos termos desta. A seguir apresentaremos este resultado.

2.1.4A soma dos n primeiros termos de uma PG.

Assim como mencionado anteriormente, em diversas situações práticas o interesse está em se conhecer a soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Para esta finalidade, vamos perceber que não é necessário que se some um a um seus termos para obter a soma desejada.

Observe a seguinte situação problema.

Uma empresa empilhava em seu estoque folhas de papel de 4 mm de espessura de tal forma que a cada dia coloca exatamente o triplo de folhas do dia anterior. Sabendo-se que a altura do local de estoque era de 4,1 metros, e que o processo se iniciou com duas folhas, quantas pilhas esta empresa teria que fazer ao final de 15 dias, considerando que sempre levará cada pilha até o teto?

Veja que a sequência $(2{,}2 \times 3{,}2 \times 3^2, \dots, 2 \times 3^{14})$ é uma progressão geométrica de razão $q = 2$ na qual o interesse está na soma de seus termos. Precisamos saber quantas folhas terão sido acumuladas ao final de um mês. Isso é, desejamos:

$$S = 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \cdots + 2 \times 3^{13} + 2 \times 3^{14} \qquad 2.1$$

Multiplicando a linha acima pela razão desta progressão geométrica, isto é por

3, teremos:

$$3 \times S = 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \times 3^{14} + \; 2 \times 3^{15} \qquad 2.2$$

Subtraindo a equação 2.2 da equação 2.1 temos que:

$$2 \times S = 2 \times 3^{15} - 2$$

$$S = \frac{2 \times (3^{15} - 1)}{2}$$

$$S = 14348906 \text{ folhas}$$

Como cada folha tem 4 mm então temos que a altura total é $4 \times S$ e que o total de pilhas necessárias nas condições estabelecidas será de $4 \times S \div 1000$ para transformar em metros e em seguida dividir por 4,1 para descobrir o número de pilhas.

Portanto, serão necessárias no mínimo 14350 pilhas.

A seguir apresentaremos a dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, uma generalização do que foi feito no exercício anterior.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots)$ uma PG. Para determinar a soma dos n primeiros termos desta PG, desejamos descobrir o resultado para a expressão:

$$S_n = \; a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \qquad 2.3$$

Para tal, multiplicamos a expressão acima por q$\neq 0$ (sendo q a razão desta PG) em ambos os lados da igualdade e organizando-se os valores, segundo a formação dos elementos de uma PG e chega-se em:

$$q \cdot S_n = q.(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n)$$
$$= a_1.q + a_2.q + a_3.q + \cdots + a_{n-1}.q + a_n.q =$$
$$= a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n.q$$

Portanto,

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n.q \qquad 2.4$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira concluímos que:

$$q \cdot S_n - S_n = a_n \times q - a_1$$

Através de manipulações algébricas e da fórmula do termo geral temos da equação acima que:

$$S_n \times (q-1) = a_1 \times (q^n - 1)$$

De onde, por fim, concluímos que :

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{(q-1)}$$

Além de mostrar como é feita a soma dos n primeiros termos de uma PG finita, apresentaremos a seguir uma fórmula para se efetuar a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

2.1.5Soma dos termos de uma PG infinita

O estudo da soma dos termos de uma PG infinita é um dos primeiros momentos que um aluno do ensino médio possui contato com um tópico bastante explorado no ensino superior: limite de uma sequência.

Observe a seguinte situação-problema:

Um empresa reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicada a metade desta verba, e em cada ano seguinte será aplicada metade da verba que sobrou no ano anterior. A) Determine a verba *destinada nos cinco primeiros anos e o valor acumulado nestes cinco primeiros anos. B) Podemos afirmar que a empresa usará o 1 milhão que reservou para estas obras sociais com o passar dos anos?*

Solução:

A)

$$Ano\ 1\ \rightarrow \frac{1}{2}\text{ milhão.}$$

$$Ano\ 2 \rightarrow \frac{1}{4}\text{ milhão.}$$

$$Ano\ 3 \rightarrow \frac{1}{8}\text{ milhão.}$$

$$Ano\ 4 \rightarrow \frac{1}{16}\text{ milhão.}$$

$$Ano\ 5 \rightarrow \frac{1}{32}\text{ milhão}$$

Observe que a sequência ano após ano constitui uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$. O valor total investido ao final dos cinco primeiros anos é dado por:

$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875.$

Isto é, ao final de cinco anos já terá sido usado $96{,}875\%$ da verba inicial.

B)

Por mais que adicionemos termos nessa PG, jamais chegaremos à soma 1; porém, adicionando mais e mais parcelas, iremos nos aproximar de 1 tanto quanto quisermos, afinal o tempo é uma grandeza infinita. Por isso, dizemos que 1 é o limite dessa soma e por esta razão é seu resultado.

Em todas as obras didáticas, analisadas, para o ensino médio a demonstração da fórmula da soma dos termos de uma PG infinita é feita de forma intuitiva, apenas apresentando um pouco da ideia e da simbologia usada na graduação.

Por esta razão, apresentaremos, a seguir, a definição conforme dito acima.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots)$ uma PG infinita. Pelo tópico anterior sabemos que:

$$S_n = \frac{a_1 \times (\, q^n - \; 1)}{(q-1)}$$

é a soma dos n primeiros termos desta PG. No entanto, quando uma PG possui infinitos termos e sua razão q é tal que $-1 < q < 1$ podemos observar que o termo q^n tende a zero. Isto é, em linguagem matemática dizemos que nestas condições para a razão, se $n \to \infty$ *então* $q^n \to 0$.

No ensino superior, essa linguagem é expressa através do limite. Diz-se que:

$$Se - 1 < q < 1 \; então \; \lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Aplicando essa informação na fórmula da soma e propriedades de limite que em geral não são abordadas, pois como foi dito, trata-se de uma ideia intuitiva, temos que:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1 \times (0-1)}{(q-1)} = \frac{a_1}{1-q}$$

Portanto, a soma dos termos de uma PG infinita com $-1 < q < 1$ é:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Nota: vale ressaltar que se $q \leq -1 \; ou \; q \geq 1$ s soma dos infinitos termos da PG não converge para um número real. Isto é não existe um número real que represente o resultado de tal soma. Porém, isto ocorre apenas quando $a_1 \neq 0$.

Com esta dedução encerramos a fundamentação teórica sobre PG necessária para este trabalho e, portanto a seguir iniciaremos a fundamentação teórica sobre juros compostos e assuntos relacionados a ele.

2.2Juros Compostos

Assim como em progressão geométrica, algumas obras foram consultadas para que se chegasse a definição correta e apropriada para este trabalho.

Segundo Dante:

> Juros compostos são aqueles em que se deve calcular os juros no fim de cada período, formando um montante sobre o qual se calculam os juros do período seguinte, até esgotar o tempo de aplicação (é o que se chama de "juros sobre juros"). (DANTE, 2008, p. 311.)

As autoras Smole e Diniz afirmam que:

> Neste regime, após cada período, os juros são incorporados ao capital inicial passando a render sobre o novo total. Dessa forma os cálculos são efetuados como " juros sobre juros". (SMOLE & DINIZ, 2010, p.17.)

Os autores da obra *Conexões com a matemática* e Paiva, extrapolam a definição fazendo uma observação sobre a utilidade deste regime. Segundo estes autores:

> Neste regime, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma calcula-se o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de "juros sobre juros". Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras. (PAIVA, 2009,p.52.)

Tomaremos neste trabalho a última definição apresentada pela preocupação apresentada com o conceito correto, mas também com a realidade em que ele se encontra.

2.2.1 Definição de juros compostos

Neste regime, de juros compostos, o rendimento obtido ao final de cada período de aplicação é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante. Dessa forma, calculamos o juro sempre sobre o resultado da aplicação anterior, o que chamamos de "juros sobre juros". Essa é a modalidade de remuneração mais empregada pelas instituições financeiras.

Inicialmente vamos apresentar alguns conceitos também importantes para que se compreenda este regime de aplicação e seus cálculos.

Segundo Rogério Gomes de Faria, mestre em Economia empresarial e professor de Matemática Comercial e Financeira e Matemática financeira aplicada ao mercado:

> O estudo da matemática financeira é feito em função do crescimento do capital aplicado ao longo do tempo – como se sabe, R$1,00 hoje vale mais do que R$1,00 amanhã. Capital é definido como qualquer quantidade de moeda.
> O montante, ou seja, o valor futuro ou valor final de uma aplicação financeira é dado pela soma do capital inicial (principal) e uma segunda parcela que é a fração do capital inicial, à qual se dá o nome de juro. Juro é a compensação financeira auferida por um capitalista que durante certo tempo empresta seu capital a terceiros ou ainda o aluguel pago por uma pessoa que, durante algum tempo, usa o capital de outra.O juro é cobrado em função de um coeficiente, chamado taxa de juros, que é dado geralmente em porcentagem e sempre relacionado a um intervalo de tempo (ano, semestre, mês, dia etc.) tomado como unidade, denominado período financeiro ou, abreviadamente período. (FARIA, 2007, p.16.)

Isto é, usando as letras M para representar montante, J para representar juros e C para representar capital inicial ou principal, podemos concluir da definição que:

$$M = C + J.$$

Observe a seguinte situação problema adaptada do livro do Dante.

Um capital de R$100.000,00 foi aplicado à taxa de 2% ao mês, num regime de juros compostos, durante quatro meses. Qual foi o montante no fim de cada mês?

Período	Juros no Período	Montante
Após 0 meses	0	M_0 = 100.000
Após 1 mês	0,02 x 100.000 = 2.000	M_1 = 100.000 + 100.000 x 0,02→ M_1 =102.000
Após 2 meses	0,02 x 102.000 = 2.040	M_2 = 102000 + 102000 x 0,02 → M_2= 104.040
Após 3 meses	0,02 x 104.040 = 2080,80	M_3 = 104.040 + 104.040 x 0,02 → M_3 =106.120,80
Após 4 meses	0,02 x 106.120,8 = 2.122,41	M_4 = 106.120,80 + 106.120,80 x 0,02 → M_4 = 108.243,21

A partir da situação problema acima, percebemos que existe um padrão para o cálculo do montante em um regimento de juros compostos. Faremos a seguir a dedução deste padrão, isto é, de uma fórmula para o caso geral.

2.2.2 Padrão para o calculo do Montante em um regimento de juros compostos com taxa de juros constante $\boldsymbol{i}$.

Considere que um capital C seja aplicado a uma taxa de juros compostos constante i ao mês por um período de aplicação t meses.

Após 1 mês , temos que:

$$M_1 = C + Ci = C(1+i)$$

Após 2 meses, temos que:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1+i) = C \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2$$

Após 3 meses, temos que:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3.$$

.

. Observando que a sequência formada pelos montantes $M_{1,}\, M_2, M_3$,... é uma progressão geométrica de razão $1+i$ e portanto pela fórmula do termo geral de uma PG temos que ao final de t meses o montante acumulado será de:

$$M_t = C \cdot (1 + i)^t$$

No livro *Progressões e matemática financeira* encontramos a seguinte observação sobre a fórmula acima:

> Outro modo de ler a fórmula acima, é que uma quantia, hoje igual a C, transforma-se-à, após t períodos de tempo, em $C \cdot (1 + i)^t$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de t períodos de tempo, a $F = A \cdot (1 + i)^t$. Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais:
> Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1 + i)^t$.
> Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1 + i)^t$.
> (MORGADO & WAGNER & ZANI, 1999, p.45.)

A seguir trabalharemos um tópico em que será bastante útil o conceito observado acima.

2.2.3Equivalência entre capitais.

Em matemática financeira é importante que se compreenda que um valor é reajustado com o passar do tempo e que, portanto em situações distintas quando se quer fazer uma comparação sobre um determinado valor é necessário que tal comparação ocorra à mesma época para tais situações.

Este tipo de problema acontece muito quando se deseja financiar algum produto, que pode apresentar diversas formas de pagamento, sendo as mais comuns: a prazo, parcelada (postecipadamente) e parcelada (antecipadamente).

Para apresentar um exemplo sobre o assunto, faremos inicialmente uma apresentação sobre a definição desses tipos de compras parceladas.

No livro Matemática Comercial e Financeira, encontramos a seguinte definição:

> Pagamentos postecipados: quando o primeiro termo vence imediatamente no fim do primeiro período a contar da época atual, ou época do contrato, também chamada época zero.
> Pagamentos antecipados: quando o primeiro termo vence antecipadamente já na época atual, ou seja, juntamente com o contrato. (FARIA, 2007, p.17-18.)

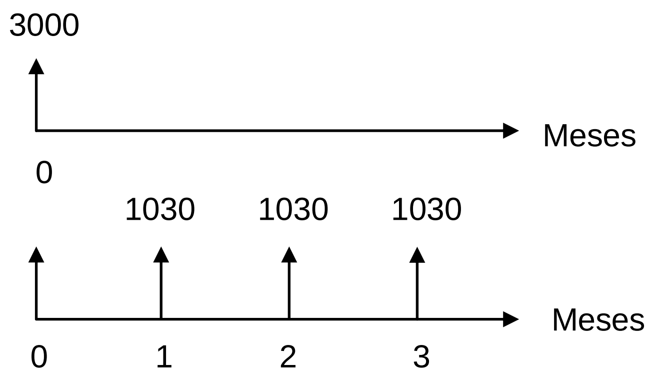
Observe o seguinte exemplo a seguir, muito comum na vida de milhares de brasileiros com relação à tomada de decisão sobre a compra a prazo ou a vista de um determinado produto.

Lucas possui duas opções na compra de uma televisão:

- *A vista por R$3000,00*
- *Parcelado, postecipado, em três prestações mensais de R$1030,00.*

Sabendo que ele possui o dinheiro para comprar tanto a vista quanto a prazo e que seu dinheiro pode ser aplicado na poupança a uma taxa de 0,5% ao mês.

Solução: Observe o esquema a seguir:



Escolhendo o tempo 3 (mesma época) para fazer a equivalência de valores podemos concluir que:

Na opção a vista, a valor pago seria:

$$X = 3000 \cdot (1{,}005)^3 = 3045{,}22.$$

Na opção a prazo o valor pago seria:

$$Y = 1030 + 1030 \cdot (1{,}005) + 1030 \cdot (1{,}005)^2 = 1030 + 1035{,}15 + 1040{,}32575 = 3105{,}47575.$$

Observe que para Lucas, nesta situação, seria mais interessante que pagasse o valor à vista em detrimento do valor a prazo, visto que a diferença entre estes valores na mesma unidade de tempo (3) é $3105{,}47575 - 3045{,}22 = 60{,}25575$, isto é na compra a prazo, este seria o valor pago a mais.

A seguir será apresentado outro exemplo em que o valor à vista e o valor das prestações são equivalentes.

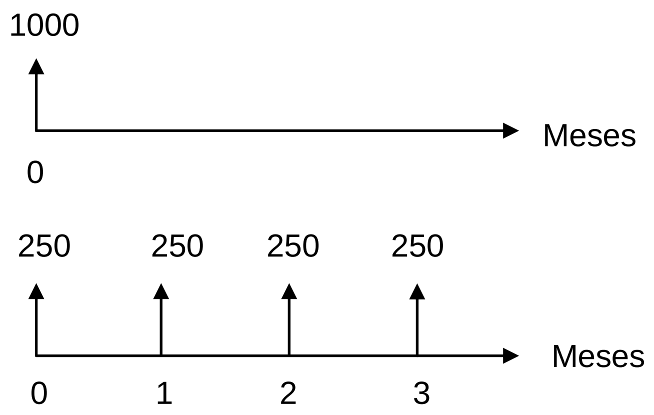
Carla deseja fazer um curso de inglês e ao fazer uma pesquisa de mercado, descobriu que a escola escolhida por ela lhe oferecia duas formas de pagamento para o curso.

- *A vista por R$1000,00*
- *Parcelado, antecipado, em quatro prestações mensais de R$250,00.*

Sabendo que ele possui o dinheiro para comprar tanto à vista quanto a prazo e que seu dinheiro pode ser aplicado na poupança a uma taxa de 0,5% ao mês.

Solução:

Observe o esquema a seguir.



Escolhendo o tempo 3 (mesma época) para fazer as comparações entre os valores, concluímos que:

Caso à vista:

$$X = 1000 \cdot (1{,}005)^3 = 1015{,}07$$

Caso parcelado:

$$\begin{aligned} Y &= 250 \cdot (1{,}005)^3 + \ 250 \cdot (1.005)^2 + 250 \cdot (1{,}005) + 250 \\ &= 253{,}76 + 252{,}50 + 251{,}25 + 250 = 1007{,}51. \end{aligned}$$

Apesar de termos uma pequena diferença entre os valores observados à época 3, observa-se que para Carla é mais vantajoso a escolha do pagamento a prazo pois ela estará fazendo uma economia de $1015{,}07 - 1007{,}51 = 7{,}56$ reais.

Com este exemplo encerramos toda a fundamentação teórica sobre juros compostos e assuntos relacionados a este regime necessários para a realização deste trabalho. Assim, daremos inicio na seção a seguir a fundamentação teórica do último tema abordado, que é função exponencial.

2.3Função Exponencial

As definições apresentadas nas obras consultadas são muito semelhantes. O que diferencia uma obra da outra é a forma como esta definição é exposta.

Em algumas delas, percebe-se que os autores optam primeiro por apresentar a definição e em seguida exemplos que descrevam a mesma enquanto em outras obras a definição surge a partir de uma situação problema.

Em geral, tais situações problemas ocorrem no campo de domínio dos números inteiros positivos ou dos reais positivos e assim os outros ampliam esta noção para o caso mais geral.

Por apresentar essa semelhança não citaremos todas como fizemos nos tópicos anteriores. A seguir mostraremos a que se encontra na obra *Matemática contexto e aplicações* do autor Dante.

2.3.1 Definição de função exponencial

Antes de apresentar a definição de função exponencial, apresentaremos uma situação-problema que servirá de motivação para expor a definição.

Segundo o autor Paiva:

> Várias situações do nosso cotidiano ou do universo científico, tais como juro em aplicações financeiras ou empréstimos, crescimento populacional, depreciação de um bem, decaimento radioativo, etc., podem ser estudadas com o auxilio das funções exponenciais. (PAIVA,2009,p.169.)

Vejamos a seguinte situação-problema que explicita a relação entre essa função e a forma de crescimento de uma grandeza.

Situação-problema

Em uma cultura laboratorial, vamos considerar uma determinada bactéria, que se dividirá em três, dando origem à primeira geração; cada bactéria da primeira geração da origem dá origem a outras três, surgindo assim a segunda geração e assim por diante. Admitindo-se que cada bactéria demore 1 hora para se dividir em três outras, quantas gerações e quantas bactérias teríamos ao final de um dia?Quantas bactérias haverá ao final de um dia?

Observe que o número de bactérias a cada geração pode ser dado pela lei $f(x) = 3^x$ em que x representa a geração e $f(x)$ o número de bactérias. Como cada divisão ocorre por hora, teríamos ao final de um dia um total de 24 gerações e, portanto o total de bactérias da 24ª geração será dado por:

$$f(24) = 3^{24} = 282429546481 \text{ bactérias.}$$

Ao final de um dia teremos $3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{24}$ bactérias. Observe que este é o somatório dos 25 primeiros termos de uma PG e, portanto seu resultado é:

$$S = \frac{3^0(3^{25} - 1)}{3-1} = 423644304721 \text{ bactérias.}$$

Veja que este número é extremamente grande, mostrando assim como é assustador o crescimento da função exponencial.

A partir deste exemplo apresentaremos a definição da função exponencial.

Definição: Dado um número real $a > 0 \; e \; a \neq 1$, *denomina-se função exponencial de base* a *uma função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, *definida por* $f(x) = a^x$

Nota: a restrição quanto à base ocorre, pois em caso contrário não teríamos uma função exponencial, isto é:

i)Se $a = 1$, então teríamos a função **constante** $1^x = 1, \forall \; x \in \mathbb{R}$.

ii)Se $a = 0 \; e \begin{cases} x < 0, neste \; caso, não \; teríamos \; uma \; função \; definida \; em \; \mathbb{R}. \\ x = 0, neste \; caso, teríamos \; uma \; indeterminação \; para \; a \; resposta. \end{cases}$

$iii)Se \; a < 0$ e x uma fração com denominador natural par, então a função não estaria definida no conjunto dos números reais.

Observe o exemplo abaixo:

$a = -2 \; e \; x = \frac{1}{2}$, $teríamos: a^x = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$,que é um resultado que não está definido no conjunto dos números reais.

Uma vez definida a função exponencial, devemos compreender qual é o comportamento de seu gráfico, tal qual é feito com todas as funções matemáticas estudadas no ensino médio. Tais comportamentos e gráficos serão apresentados na seção a seguir.

2.3.2 Gráficos da função exponencial

Na obra *Matemática Ciências e Aplicações* os autores apresentam os possíveis gráficos para a função exponencial baseando-se em duas propriedades que se seguem:

1º Caso: $Se\ a > 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é **crescente**, pois dados $x_{1,} x_2 \in \mathbb{R}$ temos que $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$. Além disso, o gráfico desta função passa pelo ponto (0,1), pois para $x = 0 \Rightarrow a^0 = 1$, para todo $a > 0\ e\ a \neq 1$.

Abaixo, apresentamos um modelo para o gráfico da exponencial acima.

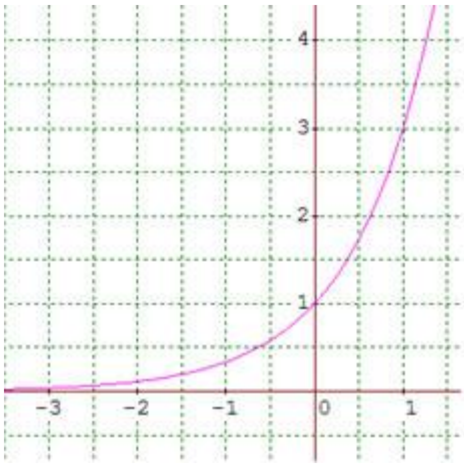


Figura 2: Função exponencial crescente[2]

2º caso: $Se\ 0 < a < 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é **decrescente**, pois dados $x_{1,} x_2 \in \mathbb{R}$ temos que $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$. Além disso, o gráfico desta função passa pelo ponto (0,1), pois para $x = 0 \Rightarrow a^0 = 1$, para todo $a > 0\ e\ a \neq 1$.

Abaixo, apresentaremos um modelo para o gráfico da exponencial nas condições acima.

[2] Print screen da função $f(x) = a^x$, crescente, feita no aplicativo Geogebra.

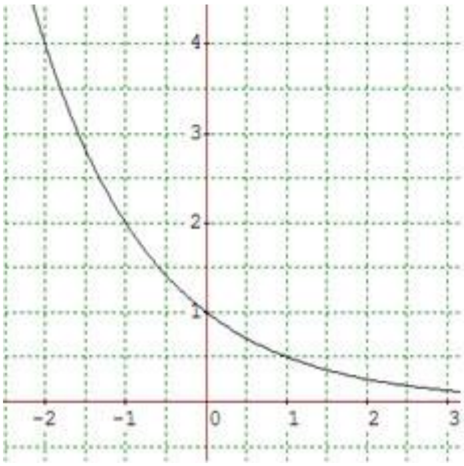


Figura 3: Função exponencial Decrescente[3]

Observação: A função exponencial pode ser interpretada de uma forma mais geral como uma função do tipo $f(x) = k \cdot a^x$.Tais funções são mais abordadas em problemas contextualizados e aplicados. Neste caso, vale observar que o gráfico da função passará pelo ponto (0,k).

Com o encerramento teórico sobre os assuntos abordados, neste trabalho, apresentaremos no próximo capítulo uma análise sobre cinco cobras didáticas no que se refere a abordagem destes tópicos.

[3] Print screen da função $f(x) = a^x$, decrescente, feita no aplicativo Geogebra.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE OBRAS QUANTO A ABORDAGEM DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA, JUROS COMPOSTOS E FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo apresentaremos alguns argumentos sobre a importância do ensino destes conteúdos correlacionados. Em seguida, apresentaremos a abordagem destes conteúdos em algumas obras destinadas ao ensino médio seguida de uma análise individual e geral.

Desta forma, começamos por observar que assuntos aparentemente diferentes, porém relacionados, devem ter suas conexões ressaltadas, pois as propriedades de um conceito podem ser utilizadas para se obter as propriedades do outro:

> Se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidos nos diversos conteúdos, no entanto o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente a Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (PCNEM, 1999. p.255)

Contudo, essa relação nem sempre é feita pelos livros didáticos e quando é feita, ocorre em poucas páginas, apenas mostrando ao aluno que tais assuntos têm conexão sem deixar claro como é possível obter conhecimentos de um conteúdo a partir do outro.

Durante a pesquisa bibliográfica e consultando alguns livros didáticos utilizados no ensino médio no Brasil encontramos essa preocupação na obra *Matemática Ensino Médio* das autoras Smole e Diniz.

Tais autoras "fogem" do procedimento comum, pois após tratar do assunto funções (em seu aspecto geral) e funções afim e quadrática, estas dão uma pausa no tema e introduzem o capítulo de Sequências e Progressões antes dos capítulos de Função Exponencial e Função Logarítmica. Segundo elas tal escolha é feita, pois:

> inserir esta unidade sobre sequências numéricas e progressões antes das funções exponencial e logarítmica porque, desta forma é possível: relacionar o estudo das funções e de função afim com sequências e progressões; abordar a noção de crescimento ou decrescimento exponencial por meio de progressão geométrica, cujos padrões permitem um contexto de aprendizado que favorece a maior compreensão de função exponencial e o conceito de logaritmo. (STOCOO & DINIZ, 2010,p.141.)

Queremos deixar claro que não há por parte de nosso estudo defender que os livros didáticos não tragam capítulos isolados sobre esses temas.

Acreditamos que isto é fundamental, pois embora seja correlacionado, cada um deles possui suas particularidades que devem ser ensinadas e aprofundadas.

Buscamos mostrar a importância e o cuidado que se deve ter na escolha do livro didático e na elaboração das aulas para que os professores possam:

- deixar claro para seus alunos a relação entre os conteúdos
- mostrar como obter os conceitos de um a partir do estudo dos outros, permitindo assim, *a priori*, que os alunos não tenham a sensação de estar aprendendo mais um conteúdo seguido de diversas fórmulas como de costume.

A importância da relação entre esses conteúdos e de um ensino bem integrado também pode ser justificado pelo PCN+. Como dito anteriormente é importante que se escolha conteúdos de tal forma que se possa fazer uma articulação de ideias entre eles evitando assim um extenso quadro de conteúdos.

A seguir apresentaremos algumas análises de como os assuntos progressão geométrica, juros compostos e função exponencial são abordados em alguns dos livros didáticos mais utilizados no ensino médio.

3.1 Análise de como os assuntos são abordados em algumas obras destinadas ao ensino médio.

Para a análise de como os assuntos progressão geométrica, juros compostos e função exponencial são abordados no ensino médio foram consultadas as seguintes obras:

Obra 1: Matemática – Ciências e Aplicações

Autores: Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Davi Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida.
Editora: Saraiva – edição 2010

Obra 2: Matemática Ensino Médio

Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz
Editora: Saraiva – edição 2010

Obra 3: Matemática

Autor: Manoel Paiva
Editora: Moderna – edição 2009

Obra 4: Conexões com a Matemática

Autores: obra coletiva com a editora responsável: Juliane Matsubara Barrosa
Editora: Moderna – edição 2010

Obra 5: Matemática – Contexto e Aplicações

Autores: Luiz Roberto Dante
Editora: Ática – edição 2008

Apresentaremos na tabela a seguir em quais volumes os conteúdos são abordados, isto é, na 1ª série, 2ª série ou 3ª série do ensino médio. Além disso, mostraremos em qual ordem esses conteúdos são abordados bem como número de páginas dedicadas ao ensino de cada um.

	Abordagem por série	Sequência de conteúdos	Número de página para cada conteúdo.
Obra 1	Todos os conteúdos são abordados no livro destinado a 1ª série do ensino médio.	Função Exponencial → Progressões → Juros Compostos	Função Exponencial: 6 Progressão Geométrica: 13 Juros Compostos: 7
Obra 2	1ª série: Progressões e Função Exponencial. 3ª série: Juros Compostos	Progressões → Função Exponencial → Juros Compostos	Progressão Geométrica: 10 Função Exponencial: 4 Juros Compostos: 2
Obra 3	Todos os conteúdos são abordados no livro destinado a 1ª série do ensino médio.	Juros Compostos → Função Exponencial → Progressões.	Juros Compostos: 2 Função Exponencial: 3 Progressão Geométrica: 11
Obra 4	1ª série: Função Exponencial e Progressões. 3ª série: Juros Compostos	Função Exponencial → Progressões → Juros Compostos	Função Exponencial:3 Progressão Geométrica:11 Juros Compostos:2
Obra 5	Todos os conteúdos são abordados no livro destinado a 1ª série do ensino médio.	Função Exponencial → Progressões → Juros Compostos.	Função Exponencial:5 Progressão Geométrica:17 Juros Compostos:8

Por fim, faremos uma análise de cada conteúdo, em cada obra, mostrando os pontos positivos e negativos quanto à abordagem dos assuntos ou ausência desta.

Obra 1:

I. Função Exponencial

Introdução:

O assunto é introduzido com uma situação problema sobre o crescimento populacional de algas e em seguida há a formalização da definição de função exponencial.

Aspectos positivos:

São abordadas as funções exponenciais do tipo $f(x) = k \cdot a^x$, presentes nas situações mais aplicáveis. Além disso, há a preocupação com também apresentar uma aplicação sobre função exponencial decrescente através de um problema sobre meia-vida e radioatividade.

Aspecto negativo:

Neste capítulo não é mencionada qualquer relação de função exponencial com matemática financeira ou progressões.

II. Progressão Geométrica

Introdução:

O assunto é introduzido através de uma situação-problema sobre vendas de pacotes de televisão por assinatura, na qual observamos o padrão de PG.

Aspectos positivos:

Neste capítulo, os autores apresentam o tópico: *progressão geométrica e função exponencial* mostrando que a progressão geométrica é um caso particular da função exponencial com domínio em $\mathbb{N}^*$.

Aspectos negativos:

Apesar dos autores apresentarem uma conexão entre a progressão geométrica e a função exponencial, esta é feita ao final do capítulo em uma única página através de um único exemplo não contextualizado.

Além disso, é apresentada apenas uma única sequência, crescente.

III. Matemática Financeira – Juros Compostos

Introdução:

O assunto é introduzido através de uma situação-problema que não é resolvida, apenas mencionada.

Aspectos positivos:

É feita a conexão entre juros compostos, função exponencial e progressão geométrica em um único exemplo.

O capítulo aborda a comparação entre a compra de produtos à vista e a prazo.

Aspectos negativos:

A fórmula de montante é deduzida por recorrência sem qualquer contextualização.

Apesar de haver uma conexão entre os três assuntos, essa é feita em apenas uma única página. Além disso, vale ressaltar que a progressão geométrica é inserida no contexto é uma única linha do texto.

Conclusão:

Com esta sequência de conteúdos, percebe-se uma valorização da formalização em detrimento da contextualização. Além disso, apesar da conexão entre os conteúdos estar expressa na obra, esta é feita em apenas uma linha.

Percebe-se que não há na obra uma conexão entre os três assuntos através de situações problemas, muito menos de como obter saberes de um conteúdo a partir de conhecimentos do outro.

Obra 2:

I. Progressão Geométrica

Introdução:

São apresentadas sequências (PG) sem qualquer contextualização.

Aspectos positivos:

As autoras introduzem o capítulo alegando que serão estudadas funções especiais e que estas ajudarão na compreensão dos próximos capítulos, a saber: função exponencial e função logarítmica.

Além disso, há a contextualização crescimentos e decrescimentos exponenciais através de padrões para favorecer a compreensão.

Aspectos negativos:

Neste capítulo não há relação de progressão geométrica com função exponencial e matemática financeira.

Além disso, quase todos os tópicos relativos à PG são introduzidos sem qualquer contextualização ou situação-problema.

II. Função Exponencial

Introdução:

O assunto é introduzido com uma situação problema sobre o crescimento de uma planta aquática.

Aspectos positivos:

Em um tópico intitulado "*para saber mais"* são apresentados dois exemplos contextualizados com valores idênticos sobre sequências crescentes em que em um deles o domínio é o conjunto $\mathbb{N}^*$ e no outro o domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ para se estabelecer uma conexão entre progressão geométrica e função exponencial. É feita uma abordagem gráfica e algébrica.

Observação: já no tópico *conexão* é apresentada a ideia de decaimento e, portanto, uma situação contextualizada sobre função exponencial decrescente, mas não há neste momento, qualquer relação com a progressão geométrica.

Aspectos negativos:

Não há na obra menções sobre as diversas aplicações, envolvendo funções do tipo $f(x) = k \cdot a^x$.

Aborda no tópico *para saber mais* apenas a conexão para o caso de progressão geométrica e função exponencial crescente e neste mesmo tópico, apesar de fazer tal conexão, as autoras não deixam explícita a ideia de que as progressões geométricas crescentes e decrescentes constituem um caso particular da função exponencial.

III. Matemática financeira – Juros Compostos

Introdução:

A introdução é feita através de uma tabela de valores já prontos e não através de uma situação-problema contextualizada.

Aspectos positivos:

A fórmula de juros compostos é deduzida a partir de um exemplo, mesmo que não contextualizado, além disso, há uma preocupação em mencionar que a sequências dos montantes tempo após tempo é uma progressão geométrica de razão $1+i$.

Percebemos assim que as autoras mostram como obter conhecimentos de um assunto, no caso fórmula de juros compostos a partir de um conceito já estudado: progressão geométrica.

Em uma página intitulada *"para saber mais"* é feita uma relação gráfica e algébrica entre progressão geométrica e função exponencial juros compostos.

Aspectos negativos:

Não é abordado o conceito de taxa de variação, não há um exemplo contextualizado que relacione os três temas ao mesmo tempo e por fim consta-se que não é abordado na obra problemas que envolvam a comparação entre a compra de produtos à vista ou prazo, recomendados pelo CBC mesmo que numa quantidade pequena de parcelas.

Conclusão:

A obra apresenta os problemas sempre de forma contextualizada. Além disso, é apresentado como relacionar os conteúdos, textualmente, e também como obter conhecimentos novos a partir de conceitos já estudados. No entanto, não encontramos na obra uma situação-problema que aborde os três temas simultaneamente.

Por fim, registramos que a obra deixa de abordar um tema indicado pelo CBC que é financiamento na compra de produtos.

Obra 3:

I. Matemática Financeira – Juros Compostos

Introdução:

A fórmula é deduzida por recorrência após um exemplo com valores tabelados.

Aspectos positivos:

Não foram percebidos neste capítulo aspectos positivos relevantes, isto é, o autor apresentou de forma simples o que era necessário apresentar.

Aspectos negativos:

Não é abordado o tema taxa de variação e neste capítulo não é feita qualquer menção sobre função exponencial ou progressão geométrica, além disso, não há no texto nenhuma informação sobre a comparação entre compras a prazo e parceladas.

II. Função exponencial

Introdução:

Antes de introduzir o assunto o autor comenta que diversas situações do dia-a-dia, inclusive juros compostos, já estudados, podem ser aprendidas com o auxilio da função exponencial.

Após essa menção, o autor inicia o assunto com um exemplo sobre crescimento populacional de bactérias. Além disso, é utilizado um exemplo de juros compostos para auxiliar na definição de função exponencial.

Aspectos positivos:

O autor se preocupa em obter o conhecimento de função exponencial a partir do conceito de juros compostos. Há também uma preocupação de mencionar que o conteúdo a se estudar é uma expansão do conteúdo estudado, isto é, saindo do campo do conjunto $\mathbb{R}_+$ e passando para o conjunto $\mathbb{R}$.

O autor apresenta um exemplo contextualizado sobre a função exponencial decrescente, através de um problema sobre meia-vida.

Aspectos negativos:

Não há no texto observações sobre a aplicabilidade da função exponencial, $f(x) = k \cdot a^x$.

III. Progressão Geométrica:

Introdução

O capítulo é iniciado fazendo uma menção ao capítulo de função exponencial. Para introduzir a definição são apresentados problemas em que as grandezas crescem ou decrescem através do produto por uma constante.

Aspectos positivos:

Há uma comparação ainda que rapidamente entre a progressão geométrica e a função exponencial.

Aspectos Negativos:

Não há qualquer relação do tema com juros compostos. Além disso, grande parte dos problemas não contextualizados. Além disso, a comparação feita com função exponencial ocorre apenas para o caso crescente.

Por fim, o autor não comenta sobre o fato de que as progressões crescentes e decrescentes são casos particulares das funções exponenciais. Apenas menciona que ambas tem características comuns.

Conclusão:

Há na obra o cuidado em correlacionar os conteúdos, não através de uma situação problema, apenas textualmente.

No entanto assim como em outras obras é deixado de trabalhar alguns conteúdos recomendados pelo CBC e não aponta um exemplo sobre financiamento.

Obra 4:

I. Função Exponencial

Introdução:

O capítulo é introduzido com um problema sobre crescimento populacional.

Aspectos positivos:

Em um tópico intitulado *aplicações da função exponencial* os autores comentam sobre as funções do tipo $f(x) = k \cdot a^x$, mostrando dentre as aplicações um exemplo envolvendo juros compostos.

Aspectos negativos:

Não é apresentado nenhum problema contextualizado sobre função exponencial decrescente. Além disso, não é feito nenhum comentário sobre a relação entre função exponencial de progressão geométrica.

II. Progressão Geométrica

Introdução:

O assunto é iniciado com um problema contextualizado no qual a partir dele é concluída a definição de progressão geométrica.

Aspectos positivos:

É feita uma relação gráfica e algébrica entre a função exponencial e as progressões geométricas através de dois exemplos. Um em que a sequência é crescente e outro em que a sequência é decrescente.

Há uma preocupação em comentar que apesar desses dois assuntos terem bastante semelhança e se relacionarem, eles se diferenciam pelo domínio da relação funcional.

Aspectos negativos:

Não é feita qualquer relação do tema com juros compostos, assim como também não é explorado o conceito de taxa de variação.

III. Matemática Financeira – Juros Compostos

Introdução:

O assunto é introduzido em um problema com dados tabelados e em seguida é deduzida a fórmula.

Aspectos positivos:

É trabalhada a ideia de taxa de variação além de valor futuro e valor atual.

Aspectos Negativos:

Não é estabelecida uma relação com a função exponencial e observe que neste caso o assunto é abordado no terceiro volume, sendo, portanto complementar e trazendo uma ideia de revisão.

Conclusão:

A obra traz diversos problemas contextualizados a cerca dos três temas. Nela também podemos encontrar uma correlação textual entre progressão geométrica, juros compostos e função exponencial. No entanto, não é apresentada uma única situação problema que aborde os três assuntos deixando explicita as semelhanças e diferenças existentes.

Obra 5:

I. Função Exponencial

Introdução:

O capítulo é iniciado com um problema envolvendo o crescimento populacional de bactérias.

Aspectos positivos:

O autor comenta que nas situações mais aplicadas da função exponencial a lei que modela tais situações é dada por $f(x) = C \cdot a^{kx}$ e para tal utiliza um problema envolvendo juros compostos.

Em um tópico optativo, é apresentada a caracterização da função exponencial.

Aspectos negativos:

Não são obervados aspectos negativos neste capítulo.

II. Progressão geométrica

Introdução:

É utilizado o conhecimento de taxa de variação num problema sobre crescimento de produção para definir a progressão geométrica.

Aspectos positivos:

É feita a relação geométrica com a função exponencial e, além disso, é abordada uma situação envolvendo juros compostos em um tópico sobre *problemas.*

Aspectos negativos:

Não é feita uma relação da PG com a função exponencial em seu aspecto decrescente.

III. Matemática Financeira

Introdução:

O capítulo é introduzido com um problema contextualizado e a fórmula de juros compostos é deduzida por recorrência.

Aspectos positivos:

Em um tópico intitulado *para refletir*, os autores mostram que os montantes com o passar do tempo constituem uma progressão geométrica de razão $1 + i$.

É feita a relação de juros compostos com a função exponencial algebricamente e graficamente.

É abordado no capítulo o tema de equivalência entre capitais e em seguida são abordados problemas sobre financiamento.

Aspectos negativos:

Apesar de ser feita a relação ente função exponencial, juros compostos e uma observação da conexão com a progressão geométrica, esta é feita em apenas um exemplo envolvendo uma sequência crescente.

Conclusão:

A obra apresenta todos os conteúdos indicados pelo CBC e também há por parte do autor a preocupação constante em contextualizar ou introduzir os conceitos através de situações problemas.

Além disso, em alguns momentos existe a preocupação em ensinar conteúdos novos, partindo de conteúdos já estudos. Um exemplo disso é a preocupação em trabalhar taxa de variação nos capítulos de matemática financeira e PG.

No entanto não se encontrar também nenhuma situação problema que aborde os três conteúdos em um único contexto.

Para encerrar o capítulo faremos a seguir uma breve análise geral sobre as principais observações encontradas ao avaliar as obras.

3.2 Análise Geral das obras

Em geral há uma preocupação em abordar os conteúdos de forma completa recomendados pelo CBC e também seguindo as recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacional que é apresentar os conteúdos de forma contextualizada priorizando a resolução de problemas.

É perceptível uma “discordância” entre os autores quanto a sequência dos conteúdos abordados além da série na qual cada assunto é estudado.

Esta decisão é normal, pois os Parâmetros Curriculares Nacional dão essa flexibilidade para os professores, escolas e também autores de livros.

Alguns vão optar por inserir os conteúdos já na primeira série do ensino médio, enquanto outros deixarão alguns dos tópicos para o terceiro ano, um momento de aprendizado complementar e de revisão.

Autores, como as da obra *Matemática ensino Médio* se preocupam em explicar porque escolheu determinada ordem para abordar os assuntos o que traz ao professor uma visão mais ampla de sua obra.

Não podemos deixar de citar que na maioria das obras assuntos como: taxa de variação, relação entre função exponencial decrescente e PG ,financiamento e as principais aplicações da função exponencial através da lei de formação $f(x) = k \cdot a^x$ sequer são mencionados ao longo do texto.

Por fim, observamos que apesar de algumas obras se preocuparem em estabelecer uma comparação entre os três temas abordados neste trabalho, esta comparação é feita em poucas linhas e em nenhuma delas encontramos uma única situação problema que aborde os três temas ao mesmo tempo, deixando claro para os alunos a estreita relação entre os conteúdos de função exponencial, juros compostos e progressão geométrica.

CAPÍTULO 4

UMA SEQUÊNCIA DE PROBLEMAS SOBRE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA, JUROS COMPOSTOS E FUNÇAO EXPONENCIAL

Após uma análise específica e geral sobre cinco obras matemática direcionadas ao ensino de progressão geométrica, juros compostos e função exponencial, apresentaremos neste capítulo uma sequência de situações problemas sobre esses assuntos.

Nestas situações, em sua maioria contextualizada, apresentaremos os objetivos esperados e uma série de perguntas que acreditamos, contribuirá para um aprendizado mais significativo e coeso entre os tópicos abordados.

Optamos por partir de situações problemas pois, concordamos com Polya, em sua obra a Arte de resolver problemas(1995), quando diz que:

> uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

Além disso, fizemos esta busca de atividades na forma de situações problemas conforme recomendam o PCN e o PCN+. Estes sugerem que este seja um ponto de partida para o ensino das áreas do conhecimento, em particular de matemática e suas tecnologias.

Alguns problemas tem o propósito de introduzir algum conceito importante enquanto outros servirão para correlacionar assuntos ou resgatar conceitos de um a partir de outros com motivação ou simplesmente como processo de revisão.

Por fim, apresentaremos um problema que envolve os três temas para que o aluno possa perceber a estreita relação entre os três temas, principalmente no que se refere a comportamento e características numéricas, assim como deixar explicita as diferenças existentes.

Por uma questão de organização e clareza das atividades, apresentaremos a solução de todos os problemas seguidos de comentários, no anexo 1.

Situação Problema 1

Objetivos: A atividade tem com principal objetivo trabalhar com os alunos do ensino médio o conceito de taxa de variação percentual. Nesta atividade eles devem perceber que em diversas situações do dia-a-dia as grandezas podem sofrer um processo crescente ou decrescente sem que a taxa de variação percentual seja constante.

Enunciado: O Ano de 2013 tem se tornado um marco na história do Brasil. Durante os meses de junho e julho, principalmente, muitos cidadãos brasileiros foram às ruas em centenas de cidades em prol de um país mais digno, com mais cidadania e menos corrupção. A maioria delas estava em busca de condições justas de serviços. Elas pediam por melhoria na educação, melhoria na saúde, menos corrupção, leis mais eficazes e mais ágeis.

Pode-se dizer que boa parte destas manifestações teve inicio após a reivindicação no aumento da passagem de ônibus nas grandes cidades brasileiras. Ano a ano estas passagens possuem um reajuste, autorizado pelas prefeituras, considerados abusivos por toda a população.

No gráfico a seguir podemos perceber a evolução das passagens de ônibus na cidade do rio de Janeiro entre os anos de 2004 e 2010 nas categorias: com ar condicionado e sem ar condicionado.

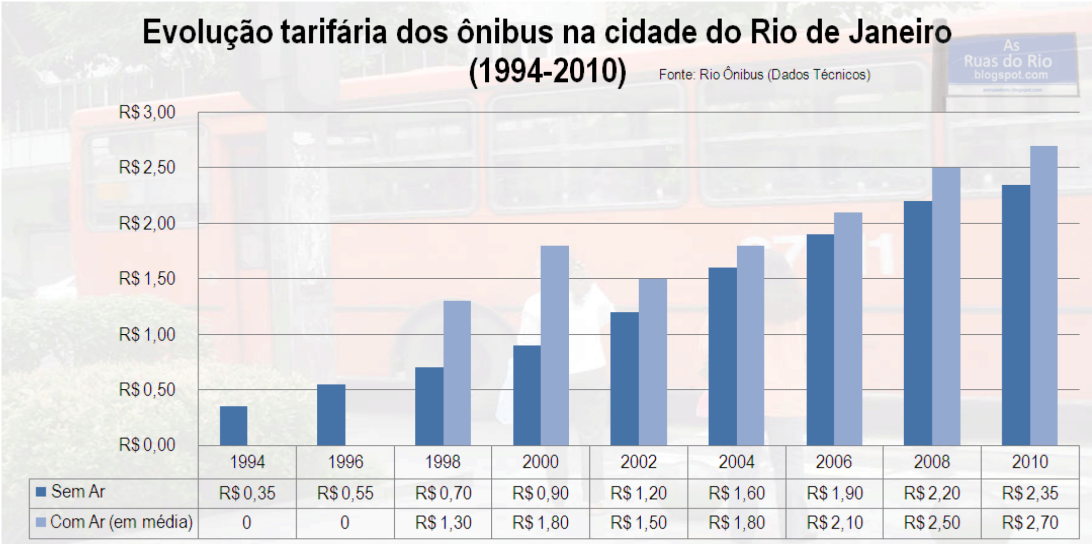


Figura 4: Evolução tarifária dos ônibus na cidade do Rio de Janeiro[4]

Considerando a modalidade SEM AR CONDICIONADO, responda:

Questionamentos:

A) Qual a variação percentual entre barras consecutivas?

B) O que você observa sobre essa variação? É constante, crescente, decrescente?É possível perceber algum padrão?

C) É pertinente, do ponto de vista matemático,a manifestação dos moradores da cidade do Rio de Janeiro?

Situação Problema 2

Objetivos: A atividade tem com principal objetivo trabalhar com os alunos do ensino médio o conceito de taxa de variação percentual. Nesta atividade eles devem perceber que em diversas situações do dia-a-dia as grandezas podem sofrer um processo crescente ou decrescente com taxa percentual de variação constante.

[4] Fonte: http://asruasdorio.blogspot.com.br/2010/03/rio-geografia-os-onibus-parte-14.html

Além disso, através desta atividade é possível introduzir o conceito e a nomenclatura de sequência com este padrão que são as progressões geométricas.

Enunciado: Suponha que você e sua família tenham ido a uma loja especializada em fotografias. Na loja, após conversarem com o vendedor, receberam a notícia de que as fotos só poderiam ser impressas em alguns tamanhos. Entenda por tamanho a área calculada pelas dimensões. Curiosos com a situação, você e sua família pediram então ao vendedor que lhes mostrasse um exemplar com cada tamanho como na figura abaixo:

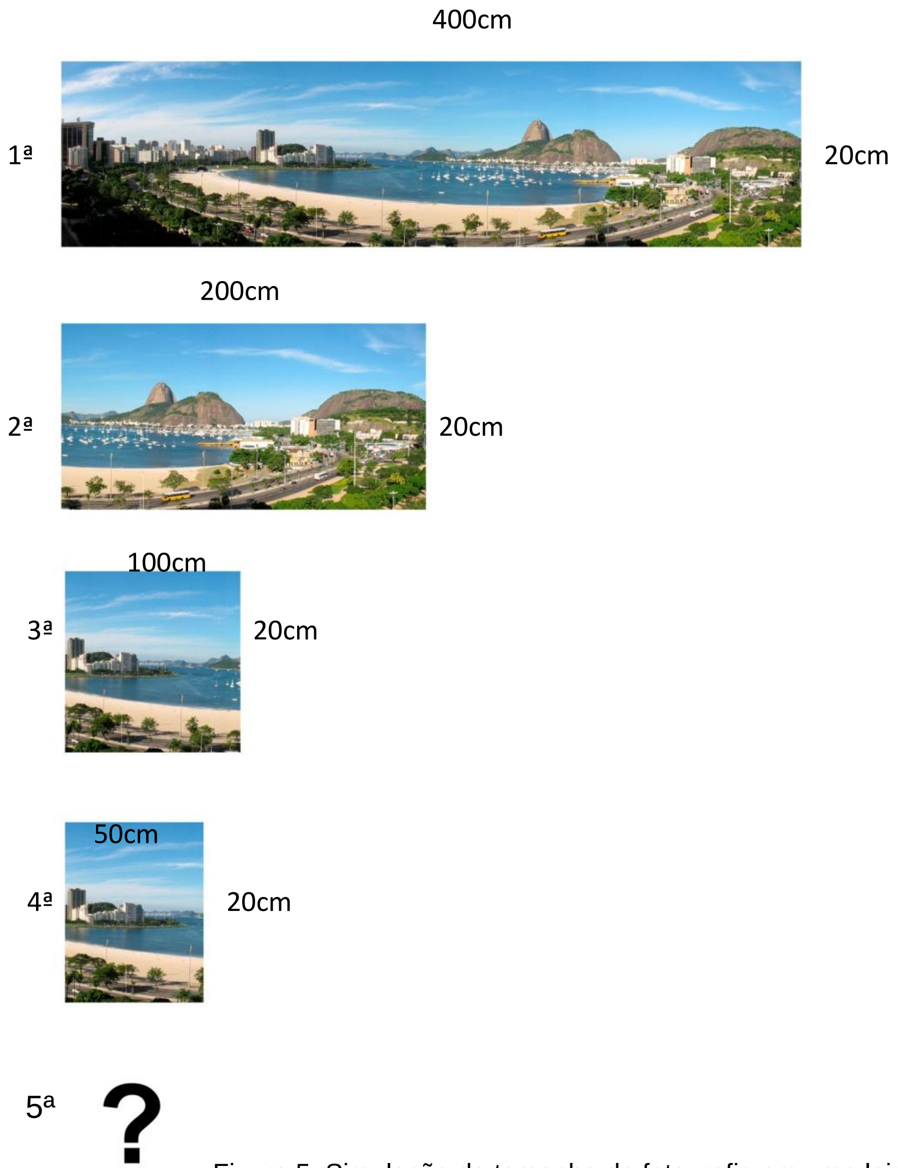


Figura 5: Simulação do tamanho de fotografia em uma loja.[5]

[5] Fonte: criada pelo autor.

O vendedor ao trazer os exemplares se esqueceu do último e quinto tamanho de foto como se pode ver na imagem acima. Para não ter que voltar ao estoque disse que se fosse acertado o último tamanho, observado o padrão entre as fotos, seria concedido na compra final um desconto percentual equivalente a redução percentual entre dois tamanhos consecutivos.

Questionamentos:

A)Determine o tamanho da última fotografia e em seguida diga ao vendedor qual é a redução percentual mais vantajosa para você, isto é, se entre a primeira e a segunda, a segunda e a terceira, a terceira com a quarta ou a quarta com a quinta.

B) Acertado o cálculo percentual, porque o vendedor não se importou com a escolha feita por você e sua família?

C) O que você poderia afirmar sobre o tamanho entre fotos consecutivas?

D)Mostre que cada tamanha de foto a partir do segundo pode ser obtido como o produto do tamanho anterior pelo valor de $(100\% - i)$ em que i é exatamente a taxa percentual de queda. Para este valor $(100\% - i)$ damos um nome de fator de redução.

E) Embora ambos os exercícios 1 e 2 trabalhem com taxa de variação percentual qual a diferença entre eles?

F) Procure descobrir como se chama, na matemática, a sequência numérica que possui esta característica.

G) Descubra como é chamada a constante de uma sequência numérica que possui esta característica.

Situação Problema 3

Objetivos: Introduzir o conceito de progressão geométrica, como se calcular a razão de uma progressão geométrica, como se calcular o termo geral de uma progressão geométrica, introduzir o conceito de soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e introduzir o conceito de taxa de variação relativa.

Relacionando conteúdos

Com esta atividade é possível resgatar no aluno o conceito de potências e a partir daí, chegar á formula do termo geral da progressão geométrica. A partir deste conceito, é possível introduzir o conceito de função exponencial através da sua lei de formação.

Enunciado: Observe a seguinte situação problema conhecida como *Negócio em Rede.*

Você decide montar um negócio em rede, então, de início, convence três pessoas a comprar um produto de sua empresa. Cada uma dessas pessoas, num período de tempo determinado, deve vender três desses produtos. Cada pessoa que comprou do seu comprador deve, no mesmo período de tempo, vender três produtos. E assim, sucessivamente.

O esquema abaixo poderá lhe ajudará a compreender a situação acima e a realizar as atividades que se seguem:

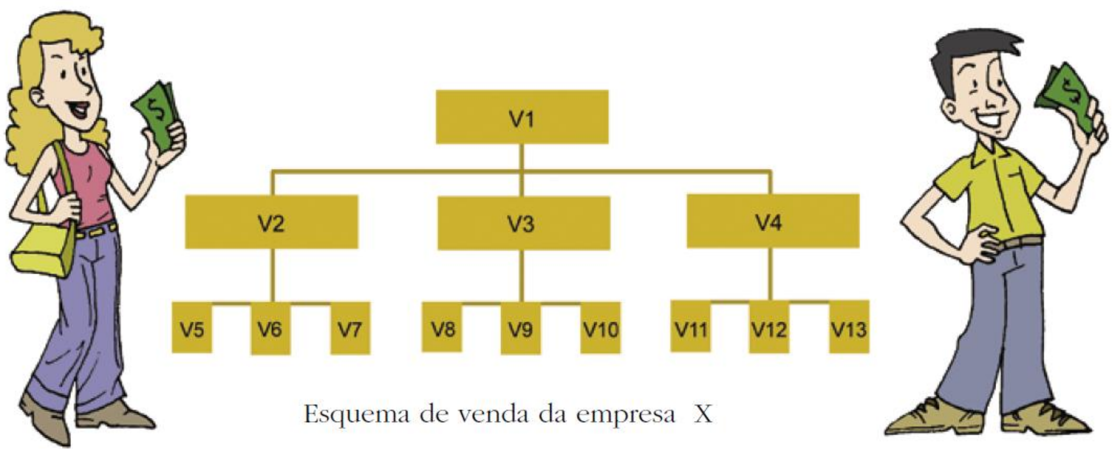


Figura 6: Esquema do Negócio em Rede[6]

[6] Fonte: Matemática / vários autores. – Curitiba: SEED-PR, 2006,p.109.

Observe que no primeiro mês temos uma pessoa, no segundo mês temos 3 novas pessoas, no terceiro mês temos 9 novas pessoas e assim sucessivamente. Preencha a tabela abaixo.

Questionamentos:

Mês	Número de “novas” pessoas envolvidas	Quociente entre o número de “novas” pessoas envolvidas entre meses consecutivos	Calcular a taxa de variação entre o número de “novas” pessoas envolvidas em meses consecutivos. (%)
1		-	-
2			
3			
4			
5			

A) Como é chamada a sequência numérica formada pela coluna “ número de novas pessoas envolvidas”?

B)Esboce no plano cartesiano os três primeiros pontos encontrados na tabela em que o eixo das abscissas indica o mês e o eixo das ordenadas indica o número de pessoa”novas” no respectivo mês.

C) Quais valores o numéricos o eixo das abscissas pode receber? Isto é qual conjunto numérico representa o domínio deste gráfico?

Situação Problema 4

Objetivos: explorar uma das aplicações da função exponencial, trabalhar a noção de gráfico e diferenciar entre os alunos crescimentos com características exponenciais, mas que possuem domínios distintos.

Enunciado:

Está comprovada a eficácia do cultivo de lírios aquáticos (*Eichhornia crassipes* – Aguapé) para a limpeza da água. Estas plantas aquáticas flutuantes atuam como purificadores de águas contaminadas por resíduos de esgoto e industriais, com alto percentual de eficiência, e baixo custo se comprovado com outras técnicas. Em águas puras, águas claras ou nos rios de águas negras do Amazonas o Aguapé não cresce nem prolifera, mas cresce com força em águas barrentas ou poluídas. Quanto mais rapidamente ele cresce maior o grau de poluição.

Assim, o Aguapé, é um termômetro de poluição, ao mesmo tempo em que constitui magnífico instrumento de purificação de águas.

Fontes: www.discoveryportugues.com/water
José Lutzenberger em www.fgaia.org.br

Sabendo que o Aguapé é pouco tolerante ao frio, entretanto, no verão e em lagoas poluídas ele consegue crescer 8% ao dia, preencha o quadro abaixo com o objetivo de escrever a área (m^2) de cobertura do Aguapé em função do tempo (dias) em uma lagoa com essas características:

Figura 7: Atividade de exponencial contextualizada[7]

Questionamentos:

A)Complete a tabela abaixo conforme o procedimento adotado inicialmente.

	Tempo	Área inicial (m²)	Área final(m²)	Quociente entre áreas finais consecutivas
1º dia	1	a	$a + (8/100)a = (1{,}08)^1a$	-
2º dia	2	1,08a	$(1{,}08)^1a + (8/100).\ (1{,}08)^1a = (1{,}08)^2a$	1,08
3º dia				
4º dia				
5º dia				

[7] Chaves ,Maria Isaura de Albuquerque, MODELANDO MATEMATICAMENTE QUESTÕES AMBIENTAIS RELACIONADAS COM A ÁGUA A PROPÓSITO DO ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES NA 1ª SÉRIE – EM,2005,p.117.

B) Nesta tabela, há um padrão entre a área final e o número de dias. Explique este padrão em palavras e/ou através de uma fórmula matemática que expressa a área final A_t em função do tempo decorrido t**.**

C) Como você deve ter observado no item anterior, o tamanho da planta aparece multiplicado por um fato de tipo $(100\% + i)$ em que i é a taxa de crescimento da planta. No exercício vimos e nomeamos um fator parecido com este. Neste caso, como há um crescimento podemos dar qual nome a este tipo de fator

D) O crescimento desta planta ocorre de acordo com uma das funções estudadas, no 1º ano do ensino médio, você saberia informar qual função é esta? Procure saber por que é esta função que você respondeu.

E) Esboce um gráfico no plano cartesiano em que o eixo das abscissas representa o tempo decorrido e o eixo das ordenadas representa a área final. Para isto, suponha $0 < a < 2$.

F) No gráfico desenhado acima, quais os valores que o eixo das abscissas pode receber? Isto é, Qual é o domínio deste gráfico?

Situação problema 5

Objetivos: Explorar o conhecimento de juros compostos, valor atual e valor futuro, taxa de variação, fator de aumento.

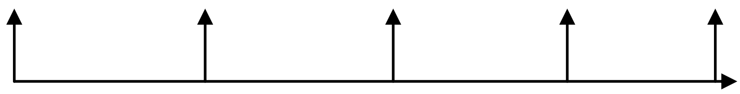
Enunciado: Diogo e Rodrigo, dois grandes amigos foram ao banco Calunga para investir todo o dinheiro ou parte dele. Lá descobriram que o rendimento mensal era de 3%.

- Rodrigo, com R$2.000,00 disse que gostaria apenas de investir o dinheiro enquanto sem nenhuma preocupação com o valor futuro dele.

- Diogo, com R$4.000,00, disse que precisava resgatar em 5 anos uma quantia de RS16.000,00 e para isso gostaria de saber qual o valor deveria depositar hoje para obter esse resultado.

Como gerente, você primeiro explicou para Rodrigo o processo de investimento de seu dinheiro, isto é, como funciona o regime de juros compostos. Como a quantia inicia era de 2000 reais, bastava pagar o valor que possuía que era de 100% e acrescentar 2% a cada mês. Assim ao final de um mês você teria 102% que é o mesmo que 1,02. Assim bastava pegar o valor atual e multiplicar por este termo, mês após mês. Esse termo $(1+i)$ em que i é a taxa é chamado de fator de aumento. Observe o esquema abaixo:

Atual 1 mês 2 meses 3 meses e assim sucessivamente.



$2000 \cdot (1{,}02) \cdot (1{,}02) \cdot (1{,}02) = \cdots = 2000(1{,}02)^t$, após t meses.

Diogo percebeu que o raciocínio feito para ele deveria ser o contrário, pois ele não desejava saber o valor futuro e sim o valor presente. Responda a questão a seguir:

Questionamentos:

A)A sequência formada pelo montantes de Rodrigo com o passar dos meses possui um padrão já visto nos exercícios anteriores. Qual é este padrão?

B)Podemos afirmar que a sequência formada pelos montantes é uma PG?

C)Podemos afirmar que o crescimento do dinheiro de Rodrigo ocorre de forma exponencial?

D)Diogo conseguirá obter o dinheiro que precisa em 5 anos com a quantia que deseja?

E) Em caso negativo, qual a quantia que Diogo precisaria pedir a seu amigo para atingir seu objetivo?

F) Apresente um raciocínio padrão para situações como esta. Isto é, o que deve ser feito quando conhecemos a taxa de aplicação i, o dinheiro desejado no futuro V_f, o tempo de aplicação t e o valor atual V_a necessário para se atingir o objetivo após este tempo.

Situação Problema 6

Objetivos:

- Observar o padrão de crescimento de uma sequência numérica.
- Estabelecer valores futuros a partir de um padrão percebido.
- Estabelecer a lei de formação de uma função com tais características.
- Apresentar graficamente o crescimento de uma “população” com estas características.
- Mostrar a dificuldade em se somar termos de uma sequência numérica como a descrita no problema.

Observação: Essa atividade requer um cuidado. É preciso que o professor deixe claro para os alunos que se trata de um problema de tendência, muito comum em crescimento de plantas, e crescimentos populacionais. Além disso, é preciso estabelecer junto ao aluno a ideia de que apesar do negócio de orlando ser altamente rentável, essa tendência não aconteceria para sempre, no mínimo por dois motivos: ou em algum momento o número de pessoas se estabilizaria, cairia ou cresceria mais lentamente ou então não haveria população suficiente no mundo para frequentar seu parque, mesmo que todas elas desejassem isso.

Enunciado: Preocupado com o crescimento acelerado do número de pessoas que frequentam seu Parque de diversão ano após ano, o dono resolveu tabelar os dados, desde sua fundação em 2006, para que pudesse tomar providências necessárias no futuro com relação a ampliação, manutenção, faturamento, dentre outras coisas.Em uma foto de divulgação do seu parque guardada em sua gaveta ele encontrou as seguintes informações registradas:

Figuro 8: Dados encontrados na foto divulgação do parque[8]

Observe que as informações contidas na figura acima não estão organizadas por ano. Considere o ano de inauguração como o primeiro ano, isto é, ano 1, o segundo após a inauguração como ano 2 e assim sucessivamente.

Orlando, o dono do parque resolveu então tabelar as informações contidas na figura de forma organizada como se pode ver na tabela abaixo:

[8] Fonte:criada pelo autor

Ano de existência	Número de Pessoas
1	1
2	5
3	25
4	125
5	625
6	3125
7	15625

Ao observar a tabela ele tentou descobrir se existia alguma forma de prever quantas pessoas frequentariam seu parque no Ano 8, isto é 2013, e em outros anos também.

Para ajudar Orlando nesta tarefa, ele convidou seu amigo Marcelo, muito inteligente em matemática. Após observar esta situação responda as pergunta abaixo.

Questionamentos:

A)Matematicamente, é possível que Marcelo possa ajudar o dono do parque, o Orlando?

B)Em caso afirmativo, qual raciocínio te levou a essa conclusão?

C)Suponha que o crescimento no número de pessoas que frequentam o parque mantenham as características já observadas. Marcelo então resolveu mostrar para Orlando que o número de pessoas que frequenta seu parque y pode ser escrito em função da quantidade de anos de existência do parque. Diga como Marcelo expressou y em função de x.

D) Apesar de ter percebido o crescimento acelerado Orlando disse que não estava se convencendo disso apenas numericamente e então pediu que Marcelo mostrasse essas informações através de um gráfico em que o eixo das abscissas representa o ano de existência e o eixo das ordenadas o números de pessoas que frequentou o parque. Mostre abaixo o gráfico correto mostrado por Marcelo.

E)Interessado no faturamento recebido ao longo de todos os anos, Orlando decidiu descobrir quanto acumularia, caso não houvesse gasto algum, nos 10 primeiros anos de existência do Parque. Se o preço do ingresso foi RS20,00 em todos os anos, mostre que o valor acumulado por Orlando é igual a soma do número de pessoas que frequentou cada ano (potências de 5) por 20.

F)O que você percebe entre os valores do item anterior se colocar o número 20 em evidência na soma acima?

G) Esta soma é fácil de ser feita? Por quê?

H) Qual é o valor do faturamento?

Situação problema 7

Objetivos: Treinar a ideia de padrão e lei de formação de uma progressão geométrica.

A atividade a seguir foi retirada de um artigo de Élvia Mureb Sallum, intitulado *Fractais no Ensino médio*

Enunciado: Um fractal é uma figura que pode ser quebrada em pequenos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do tempo. Não podemos ver um fractal porque é uma figura limite, mas as etapas de sua construção podem dar uma ideia da figura toda. Seu nome se deve ao fato de que a dimensão de um fractal não é um número inteiro.

Observe o exemplo a seguir:

Na figura 1, a seguir, foi traçada uma curva que vai do ponto A ao ponto B, formada por 4 segmentos de mesmo comprimento, igual a $\frac{1}{3}$ da distância de A até B.

Na figura 2, em cada um dos segmentos da curva da figura anterior, foi reproduzida uma cópia da figura original, reduzida em $\frac{1}{3}$ de seu tamanho, de modo a formar uma nova curva de A até B, agora formada por 16 segmentos.

Na figura 3, em cada um dos segmentos da curva da figura 2, foi reproduzida uma cópia da figura original.

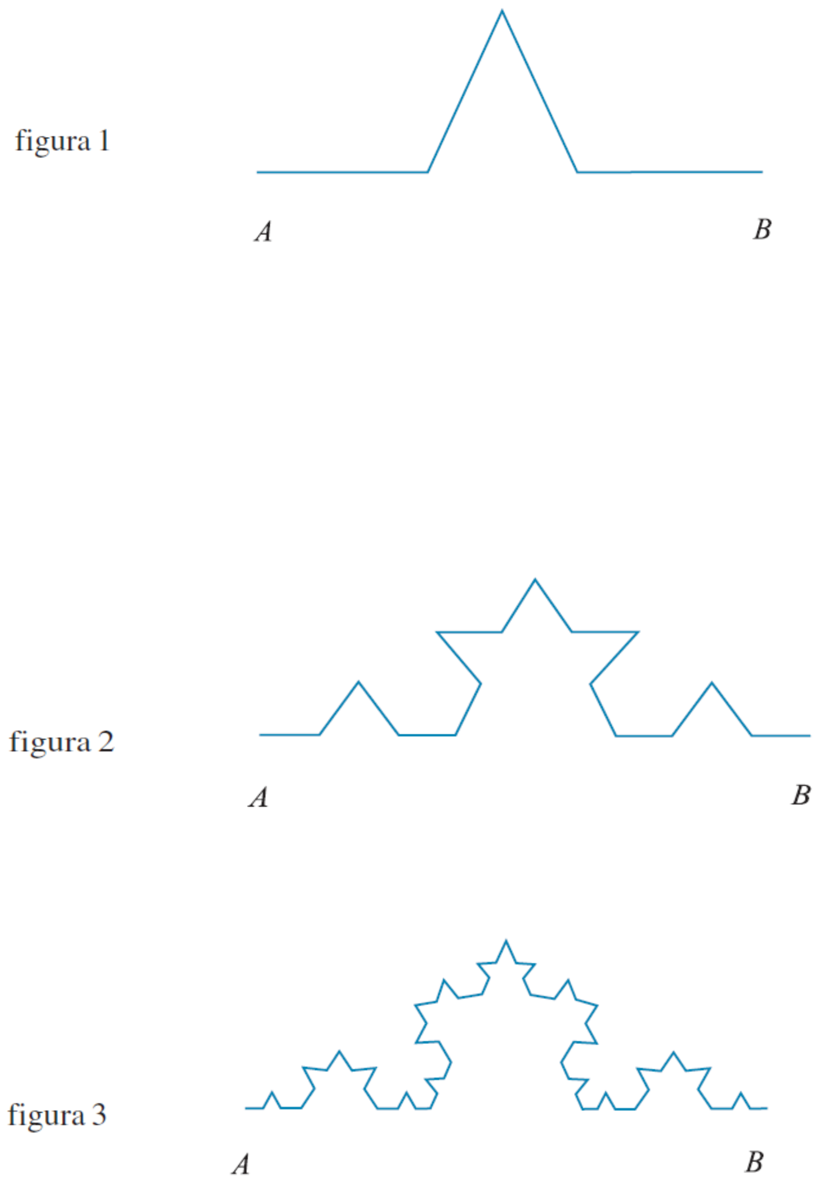


Figura 9: Fractal conhecido como curva de Koch[9]

O fractal correspondente a essa construção é a curva limite, num certo sentido, desse processo. Trata-se da chamada curva de Koch. É possível imaginar que num fractal há partes da figura que são cópias do todo, pois cada etapa da

[9] Fonte: Sallum, Élvia Mureb,Fractais no ensino médio,2005,p.2.Disponível em: http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf

construção é uma união de 4 cópias reduzidas da etapa anterior. Essa propriedade é chamada de autossemelhança.

A partir das figuras acima podemos observar um padrão quanto ao número de lados, número de cópias da figuras original, comprimento de cada lado, perímetro.

A partir das informações abaixo, complete a tabela e responda as perguntas que se seguem:

Questionamentos:

Figura	Número de lados	Número de cópias da figura original	Comprimento de cada lado	Perímetro
1	4	1	9	36
2				
3				
...	...	...	...	...
n				

A)Você conseguiria desenhar a figura 10 obedecendo este padrão e responder quantos lados ela possui? Em caso negativo, a partir da organização da tabela, você conseguiria dar esta resposta? Por quê?

B)Na sua percepção o que acontece com o número de cópias da figura original? Trata-se de uma sequência crescente, constante ou decrescente?

C) Na sua percepção o que acontece com o comprimento de cada lado da figura? Trata-se de uma sequência crescente, constante ou decrescente?

D) Apesar de diferentes, as sequências formadas pelo número de cópias da figura original e a sequência de cada lado elas possuem uma característica em comum. Você saberia obsevar qual é esta semelhança?

E) Observe que existe uma relação entre a figura e as sequências estabelecidas na tabela. Isto é para cada figura temos uma resposta que depende dela. Em cada um dos planos cartesianos coloque os pontos (x, y) em que x representa a figura, por exemplo, 1,2,3,4,... e y representa:

1º) número de cópias da figura original

2º) comprimento de cada lado

F) Volte ao gráfico anterior ligue os pontos através de uma curva feita por pontos tracejados. Esta curva se assemelha ao gráfico de alguma função já estuda? Em caso afirmativo qual função é essa?

G) Você se recorda de algum outro conteúdo do ensino médio que possua comportamento gráfico semelhante ao 1º? Em caso negativo, pesquise com seus colegas e em livros.

Situação problema 8

Objetivos: Com esta atividade espera-se que o aluno compreenda o quão rapidamente cresce uma progressão geométrica crescente ou a função exponencial crescente, assim a complexidade e dificuldade em se obter o somatório finito de números em PG

Enunciado: Há uma lenda que diz que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa por ter inventado este jogo. E o inventor respondeu: “ 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos de trigo pela segunda casa, 4 pela terceira casa, 8 pela quarta casa, 16 pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa”.

Observe um tabuleiro de xadrez como o mencionado, e suponha que você seja o rei em questão.

Figura10:Tabuleiro de xadrez[10]

Questionamentos:

A)Descubra os próximos 5 termos dessa sequência.

B)Descubra sua razão e seu termo geral.

C)Sabe-se que se trata de uma sequência crescente. Discuta sobre este crescimento, isto é o que se percebe sobre o crescimento entre os primeiros termos e entre os termos finais. Qual função possui um comportamento parecido com este?

D) Se você fosse o rei teria condições de pagar? Mesmo não sabendo a quantia que o rei possuía de grãos dá para se fazer uma discussão com base nos valores encontrados.

Situação Problema 9

Objetivos: Esta atividade tem por objetivos apresentar uma comparação entre a PG decrescente e a função exponencial decrescente além de exemplificar uma aplicação destas.

Enunciado: Quando se dá um medicamento a um paciente, a droga entra na corrente sanguínea. Ao passar pelo fígado e rins a droga é metabolizada

[10] Fonte: http://igsgags.blogspot.com.br/2011/06/conteudo-para-8s-series.html

e passa a ser eliminada a uma taxa que é característica para cada droga em particular.

Para o antibiótico ampicilina, por exemplo, a droga é eliminada a uma taxa de 40% a cada hora. Isto é, uma pessoa que ingeriu uma dose padrão de 750 mg do antibiótico possui, uma hora depois, apenas 60% (450 mg) dessa substância na sua corrente sanguínea. Duas horas depois, terá apenas 270 mg, três horas depois, e assim por diante.[11]

Diante da situação acima responda as questões abaixo:

Questionamentos:

A)Observe a sequência numérica formada pela quantidade do antibiótico restante na corrente sanguínea (750,450,270,...). Podemos afirmar que esta sequência constitui uma progressão geométrica?

B) Em caso afirmativo, essa sequência é crescente, constante ou decrescente?

C)Determine os próximo 3 valores desta sequência e em seguida represente todos eles no plano cartesiano em que o eixo das abscissas significa as horas decorridas e o eixo das ordenadas indica a quantidade de antibiótico no organismo. Em seguida faça o gráfico completo.

D)O que você percebeu a respeito da curva que desenhou? Ela se assemelha a qual função já estudada?

E) A medida que o tempo vai passando, percebemos que a quantidade de antibiótico no organismo diminui, no entanto, podemos afirmar de acordo com a informações do texto que esta quantia será igual a 0?

F) Sabendo-se que a quantidade inicial é de 750mg e que a queda ocorre em uma taxa de variação de 40% por hora, isto, resta no organismo apenas 60% da quantidade anterior, é possível determinar uma lei matemática que descreva a quantidade de antibiótico no organismo Q em função do tempo t?

[11] Fonte: http://www.uff.br/cdme/exponencial/exponencial-html/info-br.html

G) Se você fosse médico e recomendasse este remédio para uma pessoa, sabendo que para determinado tratamento a quantidade desse antibiótico na corrente sanguínea deve ser renovada sempre que atingida o valor de 4,5349632 mg, de quantas em quantas horas essa pessoa deveria tomar esse remédio?

Situação Problema 10

Objetivos: Esta atividade tem por objetivos desafiar o aluno quanto a capacidade de comparar dinheiros que são expressos em datas distintas para que se possa tomar um determinada decisão. Além disso, com a resolução do problema é possível resgatar com os alunos o conceitos de: valor atual, valor futuro, progressão geométrica, soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

Enunciado: Cidinha foi a uma loja de eletrodomésticos comprar uma televisão de 60 polegadas para que ela e toda sua família possam assistir a filmes, novelas, jornais, dentre outras coisas.

Você como vendedor explicou para Cidinha que ela tinha duas opções no pagamento desta televisão.

- Três prestações mensais de R$150,00
- cinco prestações mensais de R$91,00

Além disso, informou para ela que a primeira prestação em ambos os casos é paga no ato da compra. Dona Cidinha comentou que sempre que precisa, aplica seu dinheiro a um rendimento mensal de 2%, mas de imediato disse ao vendedor que desejava levar a televisão pela primeira forma de pagamento, pois:

$$3 \times 150 = 450\, reais < \; 5 \times 91 = 455 reais.$$

Questionamento:

Mostre para dona Cidinha porque o Raciocínio dela está errado e que a melhor opção para ela do ponto de vista financeiro é a segunda opção

Situação Problema 11

Objetivos: Esta atividade tem como objetivo principal relacionar os temas progressão geométrica, juros compostos e função exponencial através de um único contexto abordando atividades comuns em cada capítulo destinado a um desses assuntos. Espera-se que o aluno compreenda a semelhança quanto ao lei de formação, quanto ao crescimento, quanto aos gráficos e também que perceba a diferença quanto ao domínio. Por fim, espera-se que ele compreenda que juros compostos e progressão geométrica crescente são casos particulares da relação funcional chamada exponencial crescente.

Enunciado: As irmãs, Alessandra e Daniele, muito inteligentes em matemática, desejavam construir um jardim para o quintal de sua casa, de tal forma que no centro deste jardim tivesse uma estatua em cima de um chão mármore como o da figura abaixo:

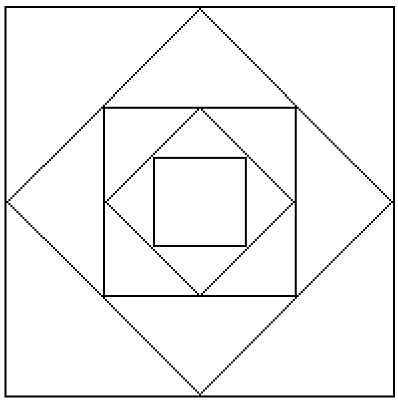


Figura 11: chão de mármore[12]

Elas sabiam que a construção deste chão era feito da seguinte forma: dado o quadrado mais interno, considerado como o original, de lado 10 mm, os

[12] Fonte: criado pelo autor.

outros quadrados são construídos de modo que, a partir do 1º, os pontos médios dos lados de cada um deles são os vértices do quadrado anterior.

Além disso, apaixonadas por uma planta chamada “dobradinha”, elas gostariam de plantar na grama envolta da estátua algumas dessas plantas. Tais plantas são chamadas de dobradinhas porque, são compradas com 100 mm de altura e cada dia que se passa dobram de tamanho até atingir 3 metros.

O único problema para estas irmãs é que elas não possuem dinheiro suficiente para montar tal jardim. Julio, um amigo muito antigo da família, dono de uma grande fortuna decidiu pegar todo o dinheiro que as irmãs possuíam dando a elas um rendimento de 100% ao dia, fato que ele sabe não se encontrar em lugar algum no mercado financeiro.

Empolgadas com a situação, as irmãs deram 100 reais para Júlio no dia 02/10/2012. Julio disse que lhes concederia o dinheiro quando atingisse o total necessário de 1600 reais com a única condição de que as irmãs provassem seus conhecimentos matemáticos determinando a área de todos os quadrados do chão e o tamanho da planta “dobradinha” a cada dia que se passasse.
Determine o que foi pedido por Julio e o número de dias necessários para que as irmãs atinjam a quantia desejada para montar o jardim.

Questionamentos:

Para isso, utilize as tabelas abaixo:

Quadrado (Q)	Área do Quadrado (mm^2)	Quociente entre áreas de quadrados consecutivos	Taxa de variação entre áreas de quadrados consecutivos. (%)
Original	10^2	-	-
1º Quadrado			
2º Quadrado			
3º Quadrado			
4º Quadrado			

Dias decorridos	Tamanho da planta em (mm)	Quociente entre tamanho da planta em dias consecutivos	Taxa de variação entre tamanha das plantas em dias consecutivos. (%)
0	100	-	-
1			
2			
3			
4			

Dias decorridos	Montante em reais	Quociente entre Montantes consecutivos	Taxa de variação entre montantes consecutivos (%)
0	100	-	-
1			
2			
3			
4			

A)Qual semelhança você percebeu entre as sequências formadas pelas áreas dos quadrados, pelo tamanho das plantas e pelos montantes da aplicação?

B)Sabemos que é possível encontrar uma lei de formação para cada uma das situações. Na primeira delas chamamos comumente de termo geral da sequência(neste caso, desconsidere o quadrado original), na segunda apenas de lei da função e na terceira de Montante. Determine essas leis e em seguida esboce cada uma delas no plano cartesiano.

C)Após resolver os itens anteriores, podemos afirmar que as três situações são iguais? Em caso negativo, apresente uma justificativa que as diferencie do ponto de vista matemático.

Encerrada a apresentação desta sequência de atividades que visa ajudar na compreensão dos temos abordados neste trabalho bem como a articulação entre eles, apresentaremos no próximo capítulo o Exame Nacional do Ensino médio e algumas das questões sobre estes temas já abordados neste, seguido de comentários e resolução.

CAPÍTULO 5

O EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo pretendemos apresentar a forma como é estruturado o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), bem como mostrar quais questões sobre progressão geométrica, juros compostos e função exponencial apareceram nessa avaliação federal durante o período de 1998 a 2012. Por fim, apresentaremos a solução de cada uma delas e se possível explicitaremos conhecimentos que, se articulados, contribuiriam para auxiliar no êxito de uma questão.

5.1 Surgimento e as transformações do ENEM

Em 2006, com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da educação, foi evidenciada uma preocupação com as diferenças de aprendizado em sala de aula e para isto, se fez necessário a elaboração de um exame de âmbito nacional, diferente dos demais já existentes, que pudesse avaliar o ensino no país.

O que diferencia o ENEM das demais avaliações, os vestibulares, é precisamente sua estrutura conceitual. Essa avaliação, constituída por um conjunto de questões que visa avaliar competências e habilidades mínimas que um aluno do ensino médio deveria ter adquirido ao encerrar a educação básica.

Neste exame, dá-se total preferência a um conjunto de itens, questões, que sejam apresentadas de forma contextualizada nas quais não deve ser necessário por parte do aluno conhecimentos memorizados para que se tenha êxito em sua solução.

Pelo contrário, trata-se de uma avaliação que busca do estudante sua capacidade de articular conhecimentos teóricos estudados relacionados às situações práticas e situações problemas.

Segundo os autores da Bíblia do Enem:

> Esse exame se mostra diferente dos exames vestibulares, em geral, e exige formas distintas de trabalho por parte das escolas, dos professores e dos alunos para que haja um bom desempenho. Não é necessário simplesmente que o aluno memorize fórmulas, datas, nomes, fatos. Pelo contrário, deve haver uma relação entre conteúdos de uma mesma disciplina e de disciplinas distintas. É preciso que o estudante consiga aplicar os conhecimentos adquiridos em situações concretas e que seja capaz de resolver problemas de forma original e autônoma sem se prender a regras e roteiros decorados. A (Bíblia do Enem, 2012, p.6.)

Ainda segundo a Bíblia do Enem, esta avaliação passou por uma grande mudança estrutural de 2008 para 2009:

> Até o ano de 2008, o Enem era organizado como uma prova de 63 questões objetivas e uma redação com base em 21 habilidades e 5 competências, ou eixos cognitivos. A partir de 2009, a prova passou a ser organizada em dois dias, com 180 questões objetivas e uma redação. Nesse modelo, o estudante não faz prova por disciplina e, sim por área de conhecimento. São quatro as áreas: Linguagens, Códigos e suas tecnologias; Ciências Humanas e suas tecnologias; Ciências da Natureza e suas tecnologias; Matemática e suas tecnologias. (A Bíblia do Enem, 2012, p.6.)

Nesta nova estrutura, assim como na antiga, são explorados dos alunos cinco competências ou eixos cognitivos considerados indispensáveis de serem conhecidos ao final da educação básica. Esses eixos aparecem em todo o exame, em todas as áreas do conhecimento. São eles:

- Dominar linguagens: esta competência está associada ao domínio da norma culta da língua portuguesa, das linguagens matemática, científica, artística e das linguagens espanhola e inglesa.
- Compreender fenômenos: a compreensão de fenômenos ocorre por sucessivas aproximações. Ao longo da vida estudantil o aluno vai aprimorando sua capacidade de compreender por completo um determinado fenômeno, que pode ser de ordem científica, social, econômica, dentre outras.

- Resolver situações-problema: este eixo está relacionado a uma das mais importantes finalidades da educação básica. O sujeito tem que ser capaz de enfrentar uma situação inesperada e resolvê-la de forma original e satisfatória.

- Construir argumentações: diante de uma situação-problema e de conhecimentos adquiridos ao longo da educação básica, espera-se que o estudante seja capaz de construir argumentos que fundamentem sua tomada de decisão.

- Elaborar propostas: ser capaz de elaborar soluções solidárias para os problemas que existem no país. Isto inclui articulação entre diversas áreas do saber que fazem parte ou não do currículo padrão das escolas.

Como nosso objetivo nesse capítulo é comentar e apresentar soluções para as questões sobre progressões, juros compostos e função exponencial, isto é, questões ligadas a área de matemática e suas tecnologias, apresentaremos a seguir as habilidades que são esperadas dos alunos para que obtenham um bom desempenho na avaliação.

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias - 2013

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis sócio econômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de

probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

A seguir apresentaremos as questões relacionadas a juros compostos, progressão geométrica e função exponencial, mostrando sua solução e fazendo comentários relacionados com o que foi discutido até este capítulo.

5.2 Questões do Enem que envolvam juros compostos, função exponencial ou progressão geométrica.

Questão 1: Enem - 2000

Enunciado: João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar:

A) dois meses, e terá a quantia exata.
B) três meses, e terá a quantia exata.
C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
D) quatro meses, e terá a quantia exata.
E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

Comentários: Nesta questão, identificamos um sujeito diante de uma situação problema que lhe requer conhecimentos relacionados à matemática financeira, mais especificamente, juros compostos. Após compreender o fenômeno é preciso agir de forma que seja possível encontrar uma solução para seu problema.

Acreditamos que diversas pessoas já enfrentaram situações semelhantes como a descrita no exercício. Isto é, uma pessoa junta parte de uma quantia necessária para comprar um produto desejado e enquanto não consegue atingir o montante esperado, estas pessoas aplicam seu dinheiro para que após o rendimento possam resgatar a quantia necessária para fazer posse do objeto desejado.

Solução do Problema:

João precisava compreender que no regime de capitalização conhecido como juros compostos, os juros são inseridos ao capital ao final de cada período. Desta forma, ele deveria proceder com o seguinte raciocínio.
Como ele já possuía R$20.000,00 e precisava de mais R$1.000,00 para atingir seu objetivo, pensando mês após mês, sua rentabilidade ou juros seria:

$$J_1 = \frac{2}{100} \times 20000 = 400 \rightarrow M_1 = 20.400 \text{ reais.}$$

$$J_2 = \frac{2}{100} \times 20400 = 408 \rightarrow M_2 = 20.808 \text{ reais.}$$

$$J_3 = \frac{2}{100} \times 20808 = 416{,}16 \rightarrow M_3 = 21.224{,}16 \text{ reais.}$$

Observe que João já ultrapassou o valor desejado para a compra de seu carro e a resposta correta é a letra c, que afirma que após três meses João terá conseguido comprar seu carro tendo sobrado aproximado R$225,00.

Observação: Claro que este problema poderia ter sido solucionado com a fórmula conhecida para juros compostos da seguinte forma:

$$21.000 = 20000 \times (1{,}02)^t$$

$$(1{,}02)^t = \frac{21}{20}$$

Na qual por aproximação, se resume a um raciocínio semelhante ao anterior, seria possível concluir que o tempo mínimo seria de três meses e que a quantia não seria exata.

Podemos interpretar graficamente a situação acima, usando o fato de que o problema constitui uma situação que pode ser modelada pela função exponencial com domínio no conjunto $\mathbb{R}_+$.

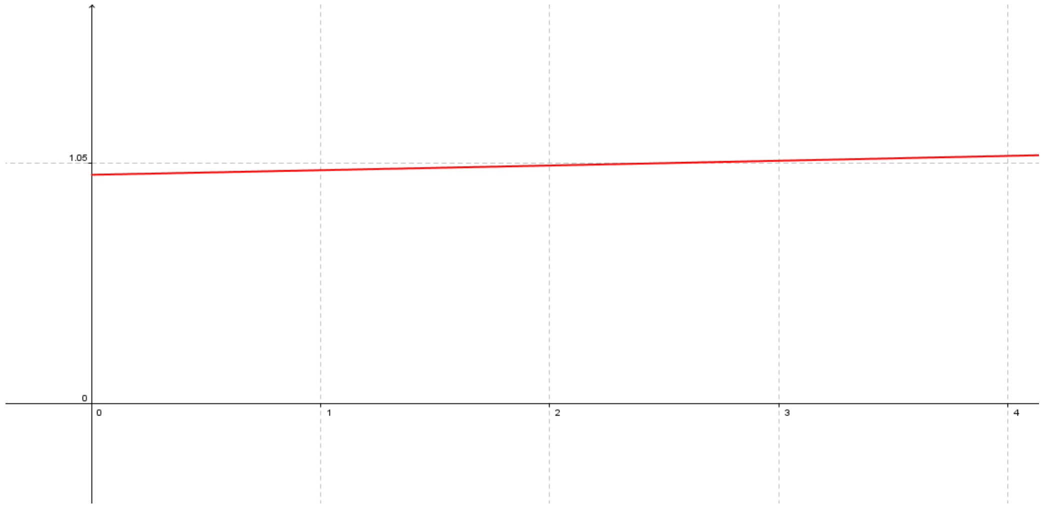


Figura 12: interseção entre o gráfico da função $f(t) = (1{,}02)^t$ e $y = 1{,}05.$ [13]

Apesar de não ser uma tarefa fácil interpretar o gráfico por causa das escalas muito pequenas, é possível perceber que o gráfico de vermelho (exponencial) intercepta o valor $1{,}05$ para uma abscissa situada entre 2 e 3 o que mostra que o objetivo não foi alcançado exatamente em nenhum desses valores e portanto, após três meses o carro já deveria ser comprado com alguma sobra.

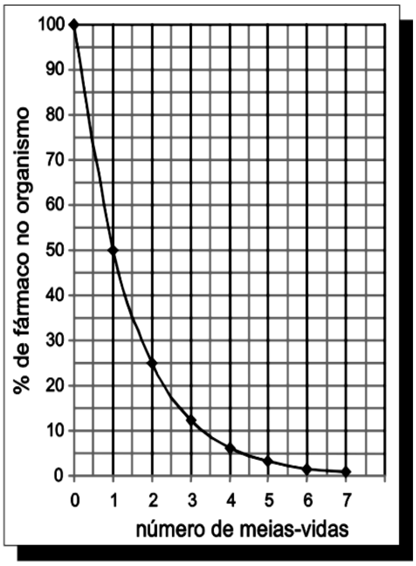
Neste caso, é importante ressaltar que não poderíamos fazer uma associação com progressão geométrica por se tratar de um problema que embora as sequências dos montantes constituam uma PG, o domínio do problema ocorre no conjunto $\mathbb{R}_+$.

Veja que qualquer um dos dois conteúdos estudados seria útil para a resolução desta situação problema de forma semelhante. Portanto percebe-se uma integração entre os assuntos juros compostos e função exponencial.

[13] Print screen do aplicativo Geogebra. Nessa imagem temos a interseção entre a função constante $y = 1{,}05$ e a função exponencial$f(t) = (1{,}02)^t$. Devido a problemas de escala a função exponencial está se assemelhando a uma reta, no entanto queremos deixar claro que não se trata de uma reta e sim uma curva exponencial.

Questão 2 - Enem 2007

Enunciado: A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia–vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia–vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de:

F. D. Fuchs e Cher l. Wannma. **Farmacologia Clínica**.
Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p.

A)10%. B)15%. C)25%. D)35%. E)50%.

Comentários: Observe que a situação-problema é apresentada de forma contextualizada relacionando conteúdos de áreas de conhecimentos distintos. Além de compreender o fenômeno, é preciso saber alguns conceitos da matemática como interpretar dados apresentados em gráficos. Neste caso específico, gráfico de uma função exponencial.

Solução do problema:

Veja que a função que modela esta situação é dada pela lei $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ Desejamos descobrir quanto sobrará do medicamento quando o número de meias-vidas for 1,5. Isto é, $f(1{,}5) = (0{,}5)^{1{,}5} = \sqrt{(0{,}5)^3} \approx 0{,}35 = 35\%$. Tendo como solução correta a letra d.

É claro que ao invés da solução algébrica apresentada, seria muito mais fácil obervar no gráfico que para a abscissa 1,5 a ordenada respectiva era aproximadamente 35%.

Observação: Neste caso, é importante ressaltar que não poderíamos fazer uma associação com juros compostos por uma questão contextual e com progressão geométrica por se tratar de um problema que embora as sequências dos termos (1,1/2,1/4...) constitua uma PG, o domínio do problema ocorre no conjunto $\mathbb{R}_+$.

Questão 3 - ENEM 2008

Enunciado: Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1.comece com um triângulo equilátero (figura 1);

2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;

3.posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;

4.repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

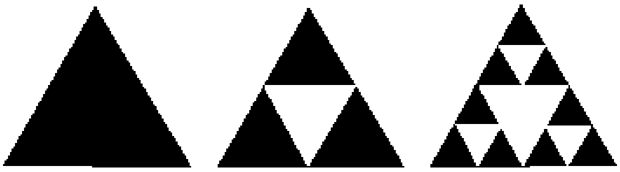
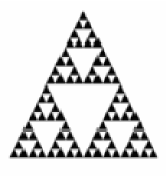
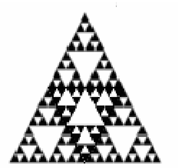
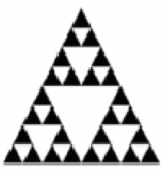


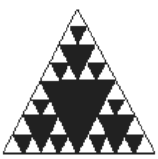
Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

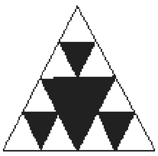
De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:

A 

B 

C 

D 

E 

Comentários: Nesta questão é preciso dominar a linguagem de padrões muito comum e explorada no ensino de matemática no capítulo de sequências.

Solução do problema:

Se observarmos a ordem das figuras iremos perceber que existe um padrão na quantidade de triângulos pretos que constitui uma progressão geométrica, pois em temos a seguinte sequência: $(1,3,9,\ldots)$

Assim, conclui-se que a próxima figura deverá ter, $a_4 = 1 \times 3^{4-1} = 27$.

Além disso, era necessário observar que o triângulo preto está sempre “para cima”, enquanto os triângulos brancos estão sempre para “para baixo”. Sendo assim, a alternativa correta é a letra c.

Questão 4 - Enem 2011

Enunciado: Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A 3% ao mês
Investimento B: 36% ao ano
Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

A) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuas são iguais a 36%.

B) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

C) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

D) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

E) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Comentários: Como esta questão já faz parte da nova estrutura do Enem, vamos destacar que a habilidade necessária para sua resolução segundo a matriz de referências é: resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

Apesar de esta ser a única habilidade da matriz que se associa à questão, é necessário sem sobra de dúvidas que o aluno saiba articular o conteúdo de matemática financeiro adquirido ao longo de seus estudos na educação básica.

Esta é uma situação também bastante comum no dia-a-dia de muitos brasileiros. Se tivermos mais de uma opção para investir nosso dinheiro qual delas do ponto de vista quantitativo devemos escolher? Isto é, se de fato houver uma diferença quantitativa entre elas.

Solução do problema:

Como em questões de juros compostos é muito comum o surgimento de valores complicados de ser resolver sem o uso de calculadora, é necessário que num exame como esse em que o uso é proibido, contas muito complicadas tenham seus valores informados. O importante nesta questão não é fazer tais contas e sim aplicá-las após o entendimento da situação-problema.

O primeiro cuidado é observar que as aplicações ocorrem em períodos distintos e, portanto devemos fazer uma equivalência para que se possa comparar.

Seja c o capital inicial.

- Investimento A

$$M = c \times (1{,}03)^{12} = 1{,}426c$$

Rentabilidade = $1{,}426c - c = 0{,}426c \rightarrow 42{,}6\%$ do capital inicial c.

- Investimento B

$$M = c \times (1{,}36)^1 = \ 1{,}36c$$

Rentabilidade = $1{,}36c - c = 0{,}36c \rightarrow 36\%$ do capital inicial c.

- Investimento C

$$M = c \cdot (1{,}18)^2 = 1{,}3924c$$

Rentabilidade = $1{,}3924c - c = 0{,}3924c \rightarrow 39{,}24\%$ do capital inicial c.

Desta forma, comparando todos os investimentos com período de capitalização anual, chegamos a conclusão de que o melhor é o investimento A. E resposta correta é a letra C.

Questão 5 - Enem 2012

Enunciado: Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

• Opção 1: Pagar à vista, por R$55000,00.

• Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$30000,00, e mais uma prestação de R$26000,00 para dali a 6 meses.

• Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$20000,00, mais uma prestação de R$20000,00, para dali a 6 meses e outra de R$18000,00 para dali a 12 meses da data da compra.

• Opção 4: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$15000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$39000,00.

• Opção 5: Pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$60000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5

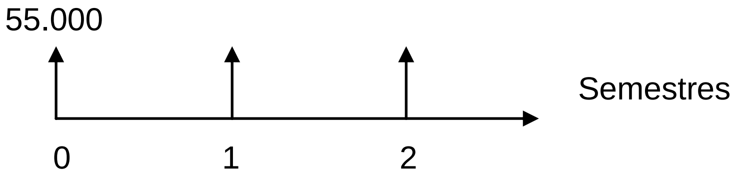
Comentários: Esta é uma situação muito comum no dia-a-dia de milhares de brasileiros que devem decidir sobre qual é a melhor opção de pagamento na compra de um determinado produto quando possui o dinheiro para pagar à vista e ainda sim, caso não deseje fazer isso pode aplicar o seu dinheiro em algum tipo de rentabilidade.

Utilizaremos de conhecimentos de matemática financeira, mais especificamente, equivalência entre capitais, numa mesma época, para então tomar a decisão correta do ponto de vista financeiro.

Solução do problema:

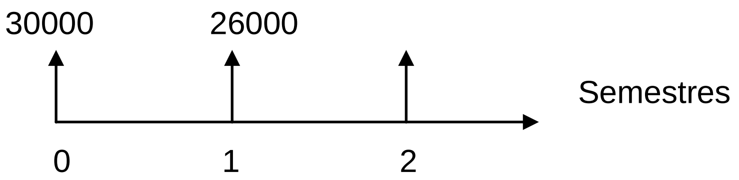
Escolhendo a época 2(final de 1 ano) para fazer a comparação temos:

- Opção 1



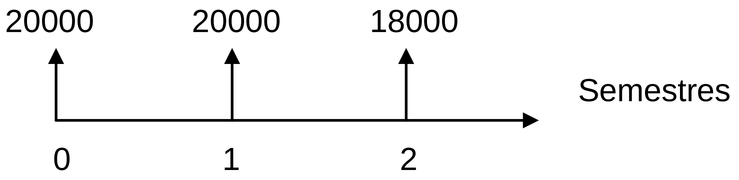
Na época 2: $55000 \times (1{,}1)^2 = 66.550$

- Opção 2



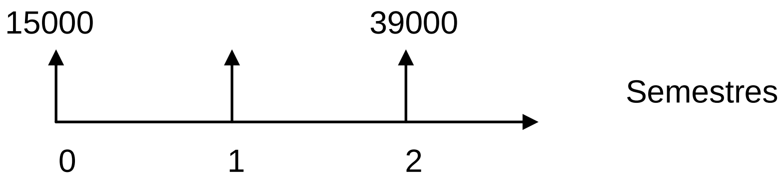
Na época 2: $30000 \times (1{,}1)^2 + \ 26000 \times (1{,}1) = \ 36300 + 28600 = 64.900$

- Opção 3



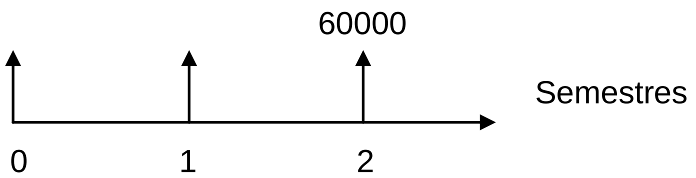
Na época 2: $20000 \times (1{,}1)^2 + \ 20000 \times (1{,}1) + 18.000 = 24.200 + 22000 + 18000 = 64.200.$

- Opção 4



Na época 2: $15.000 \times (1{,}1)^2 + \ 39.000 = 57150.$

- Opção 5



Na época 2: 60.000

Observemos que dentre todas as opções a que deu o menor resultado foi a de número 4. Portanto, esta é a mais vantajosa para Arthur.

Conclusão: Com este capítulo fica bastante evidenciado que os conteúdos estudados neste trabalho são contemplados na principal avaliação que atualmente possibilita o ingresso dos estudantes nas principais universidades federais.

Portanto, é extremamente importante que se conheça os conceitos envolvidos e que se saiba principalmente tomar decisões diante de situações problemas que podem ter suas informações contextualizadas em forma de gráficos, tabelas ou textual.

Segundo o site Enem.net:

> Diversas Universidades vão adotar o Enem 2013 usando a nota em seus processos seletivos. Grande parte das Faculdades Privadas já utilizam as notas do Enem no processo seletivo. No total são mais de 60 universidades federais em todo o Brasil que vão aceitar o Enem 2013 e esse número só tende a aumentar com os incentivos do Governo apoiando o Enem que a cada ano fica mais importante e mais participantes são inscritos. (http://enem.net/universidades-e-faculdades-enem-2013.html. Acessado em 10/06/2013.)

Para encerrar nosso trabalho deixaremos nossas considerações finais a cerca de todo o assunto pesquisado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Perceber em sala de aula a grande dificuldade que os alunos tinham diante do fato de conseguir aprender juros compostos, progressão geométrica e principalmente função exponencial em capítulos distintos nos fez pensar, inicialmente, que esta poderia ser a dificuldade em correlacionar tais conteúdos posteriormente.

Diante de uma busca histórica a cerca destes assuntos e também nos documentos oficiais que regem o ensino desses temas percebemos a estreita relação entre eles. No surgimento histórico pudemos perceber que em diversas situações estes tópicos são abordados simultaneamente, como se fossem um só. Já os documentos oficiais indicam a todo o momento que tais conteúdos devem ser ensinados de forma correlacionada.

Decidimos então fazer uma análise em cinco obras didáticas destinadas ao ensino médio, a cerca da abordagem destes temas. Constatamos que alguns tópicos recomendados pelo CBC e PCN não são abordados. Além disso, verificamos o que era esperado: os assuntos são abordados em capítulos distintos, em alguns momentos de forma breve são correlacionados textualmente e em outro breve momento são correlacionados matematicamente.

Nesta busca, não encontramos em nenhuma obra alguma situação problema que pudesse abordar os três temas de uma única vez apontando semelhanças e diferenças. Também foi difícil encontrar situações em que os autores tivessem a preocupação de explorar um conteúdo já ensinado para dar continuidade a um novo assunto a se ensinar.

Por sabermos que o livro didático é o principal material do professor e do aluno em sala de aula, acreditamos que para elucidar tais dificuldades algumas lacunas precisam ser preenchidas pelo professor.

Assim, com uma sequência de atividades elaboradas, adaptadas e pesquisadas, acreditamos que os alunos possam ao final delas, ter a total certeza de que os assuntos mencionados neste trabalho possuem uma estreita relação matemática, apesar de apresentarem suas particularidades.

Sabemos que o ensino médio não tem como preocupação única a preparação para um nível posterior de ensino, no entanto temos conhecimento de que a cada ano que passa o número de jovens que prestam o ENEM aumenta bastante o que nos coloca, como professores, na condição de estar atento as necessidades destes alunos. Isto implica, em tomar cuidados e prepará-los para este exame.

Na busca pelas questões abordadas pelo governo federal neste exame, constatamos que os temas são contemplados nas provas. Na resolução destas questões vimos que o conhecimento integrado desses assuntos pode contribuir para que o aluno obtenha êxito na resolução de uma situação problema.

Portanto, com este trabalho, concluímos que o problema em sanar as dificuldades apresentadas nos temas abordados neste trabalho pode estar aliada a não preocupação de correlacioná-los.

A responsabilidade de articular conteúdos como recomenda os documentos oficiais, é um papel do professor, dos autores de livros didáticos e da escola quando organiza sua grade curricular de matemática.

Além disso, acreditamos, assim como recomenda o PCN+, que a facilidade em promover essa articulação pode ser advinda do ensino através da resolução de problemas. Estar frente a frente a uma sequência de situações problemas, com uma motivação investigativa faz com que os alunos possam com a orientação dos professores, buscar o seu próprio conhecimento.

Gostaríamos de deixar claro que acreditamos nesta sequência didática correlacionada e esperamos que a mesma sirva de base para um aprimoramento e adaptações na melhoria de ensino destes três conteúdos.

Por fim, como perspectiva futura e sequência deste material pretendem-se elaborar uma cartilha com as situações problemas conectando este três temas e aplicar a mesma em sala de aula.

REFERÊNCIAS

Barrosa, Juliane Matsubara.(Ed.). *Conexões com a matemática* – Editora Moderna, São Paulo, 2010.

BRASIL1, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros curriculares nacionais - ensino médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2013.

BRASIL2, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros curriculares nacionais - ensino médio (PCN+EM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2013.

CHAVES.M.I.A e CARVALHO.H.C. *Formalização do conceito de função no ensino médio: uma sequencia de ensino-aprendizagem*. Artigo.2004

Dante, L.B. Matemática Contexto e Aplicações**.** São Paulo: Editora Ática, 2011.

LIMA, Valéria Scomparim de. Progressões aritméticas e geométricas: história conceitos e aplicações**.** Disponível em:< http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/112008-08-23-19-28-11.pdf>. Acesso em 02 fev. 2013.

DOMINONI, N.R.F. *Utilização de diferentes registros de representação: um estudo envolvendo funções exponenciais.* 2005. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências e educação matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

ENEM.NET. Disponivel em:<http://enem.net/universidades-e-faculdades-enem-2013.html.> Acesso em 10 jun. 2013.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática***.** Tradução Hygino H. Domingues.Campinas: Unicamp, 2004.

FARIA,R.G. *Matemática Comercial e Financeira: com exercícios e cálculos em Excel e HP-12C*.São Paulo:Ática,2007.

FRANCISCHETT.C.E, PADOVEZE.C.L e GIULIANI.A.C. *Resgate histórico da relação exponencial sobre juros compostos***.** Artigo (Revista da FAE). 2007.

IEZZI,G.et al.*Matemática Ciência e aplicações*, editora saraiva, São Paulo 2010.

LOG,Editora. *A Bíblia do Enem.Editora* Log,2012.

MILANI, W. N.*A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio***.** 2011. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.
MINAS GERAIS1. *Proposta curricular de Matemática. Educação Básica. Cadernos Pedagógicos: Matemática.* Belo Horizonte, 2007.

MORGADO,A.C;WAGNER;E.;ZANI.S. *Progressões e Matemática Financeira*. Coleção do professor de matemática (SBM) Rio de Janeiro 1993

PAIVA, M. Matemática Paiva. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

PITON, J. *A história da matemática comercial e financeira***.** Disponível em < http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>. Acesso em 02 fev.2013.

SMOLE, K.S e DINIZ,M.I. *Matemática - Ensino médio*, vol. 1. São Paulo:editora Saraiva, 6ª edição, 2010.

SMOLE, K.S e DINIZ,M.I. *Matemática - Ensino médio*, vol. 3. São Paulo:editora Saraiva, 6ª edição, 2010.

ZUFFI, E.M. et al. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, n. 9/10, p. 10-16, abr. 2001.

Anexo 1

Solução dos problemas propostos no capítulo 4

Situação Problema 1

A)Como mencionado em nossa fundamentação teórica, para calcular a taxa de variação percentual entre dois valores a e b, sendo a o inicial e b o final basta fazer a seguinte conta:

$$\frac{b-a}{a}$$

Desta forma, concluímos que:

$$1994 \rightarrow 1996: Taxa\ de\ variação = \frac{0{,}55-0{,}35}{0{,}35} \approx 0{,}5714 = 57{,}14\%$$

$$1996 \rightarrow 1998: Taxa\ de\ variação = \frac{0{,}7-0{,}55}{0{,}55} \approx 0{,}2727 = 27{,}27\%$$

$$1998 \rightarrow 2000: Taxa\ de\ variação = \frac{0{,}9-0{,}7}{0{,}7} \approx 0{,}2857 = 28{,}57\%$$

$$2000 \rightarrow 2002: Taxa\ de\ variação = \frac{1{,}2-0{,}9}{0{,}9} \approx 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

$$2002 \rightarrow 2004: Taxa\ de\ variação = \frac{1{,}6-1{,}2}{1{,}2} \approx 0{,}3333 = 33{,}33\%$$

$$2004 \rightarrow 2006: Taxa\ de\ variação = \frac{1{,}9-1{,}6}{1{,}6} = 0{,}1875 = 18{,}75\%$$

$$2006 \rightarrow 2008: Taxa\ de\ variação = \frac{2{,}2-1{,}9}{1{,}9} \approx 0{,}1578 = 15{,}78\%$$

$$2008 \rightarrow 2010: Taxa\ de\ variação = \frac{2{,}35-2{,}2}{2{,}2} \approx 0{,}0681 = 6{,}81\%$$

B) Com as contas do item A, percebe-se que entre barras consecutivas a taxa de variação sofreu aumento em alguns momentos, queda em outros e também se manteve constante. Isto é, não foi possível perceber um padrão, dando assim a impressão de que a taxa de variação ocorre de forma aleatória, do ponto de vista matemático.

C) Sim. Como a manifestação estava ocorrendo por aumentos nos preços das passagens, matematicamente podemos alegar que isto realmente estava ocorrendo. Se compararmos, por exemplo, o valor inicial com o valor final chegaremos a seguinte conclusão:

$$1994 \rightarrow 2010: Taxa\ de\ variação = \frac{2{,}35 - 0{,}35}{0{,}35} \approx 5{,}7142 = 571{,}42\%.$$

Observação: Nesta atividade é importante que o professor deixe claro ao aluno que o aumento nas passagens de ônibus pode ser algo normal pois esta aumento sofre influências do mercado tais como taxa de juros, inflação, lucro da empresa, manutenção, dentre outros fatores. Por isto, as perguntas foram feitas do ponto de vista matemático.

Em alguma situação esta atividade pode ser retomada para se discutir a influência dos indicadores financeiros na vida financeira dos cidadãos.

Situação Problema 2

A)Com a fotografias já apresentadas é possível perceber que a altura é constante, isto é, seu valor é 20cm enquanto a largura sofre uma queda. De uma figura para a outra a largura cai pela metade. Portanto, de acordo com a sequência de fotografias, podemos contatar com a última largura será:

$$400 \rightarrow 200 \rightarrow 100 \rightarrow 50 \rightarrow 25.$$

Portanto, a última fotografia terá dimensões $25cm\ x20cm$.

Para calcularmos a redução percentual entre fotografias consecutivas, levando em consideração o tamanho, que é a área da fotografia pode concluir que:

1ª fotografia: $20cmx400cm = 8000cm^2$

2ª fotografia: $20cmx200cm = 4000cm^2$

3ª fotografia: $20cmx100cm = 2000cm^2$

4ª fotografia: $20cmx50cm = 1000cm^2$

5ª fotografia: $20cmx25cm = 500cm^2$

Calculando a redução percentual entre tamanhos consecutivos podemos concluir que:

$$\frac{4000-8000}{8000} = \frac{2000-4000}{4000} = \frac{1000-2000}{2000} = \frac{500-1000}{1000} = -,05 = -50\%.$$

Assim, a escolha da redução percentual é irrelevante pois são todas iguais.

B)O vendedor não se importou pois em todos os casos há uma queda de 50% no tamanho da foto e portanto o desconto concedido será de 50% independente da escolha.

C) Cada foto possui a metade do tamanho da foto anterior. Isto é, reduzir a largura em 50% sem alterar a altura influência numa redução de também 50% no tamanho da fotografia.

D) Como a taxa de variação é de -50%, isto é, queda de 50%.Assim, podemos concluir que:

$$8000 \times (1-0{,}5) = 4000$$

$$4000 \times (1-0{,}5) = 2000$$

$$2000 \times (1-0{,}5) = 1000$$

$$1000 \times (1-0{,}5) = 500$$

E) No exercício 1, como já mencionado, a taxa de variação ocorre de forma aleatória podendo sofrer aumento, queda ou até mesmo permanecer constante. Já no exercício 2, pelo padrão das fotografias, pudemos contatar que a taxa de variação percentual é constante e cada valor a partir do segundo pode ser obtido através do primeiro multiplicado pela mesmo constante que no caso era 0,5.

F) Na matemática uma sequência como a característica observada acima possui o nome de progressão geométrica ou simplesmente PG.

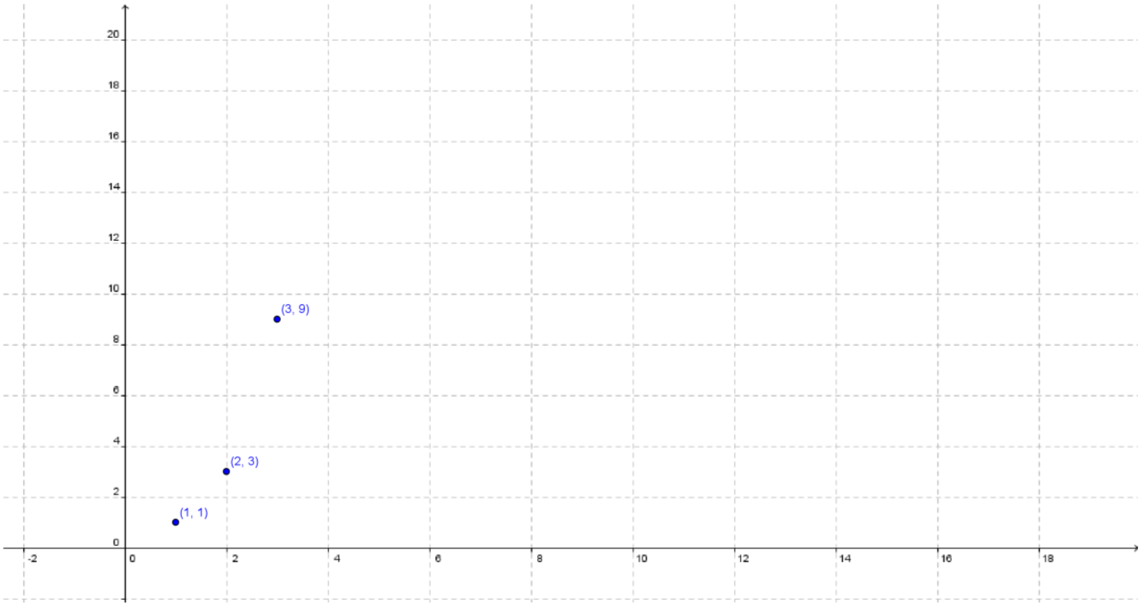
G) A constante de uma progressão geométrica é chamada de razão e usualmente representada pela letra q. Neste exercício, temos que $q = 0.5$.

Situação Problema 3

Mês	Número de "novas" pessoas envolvidas	Quociente entre o número de "novas" pessoas envolvidas entre meses consecutivos	Calcular a taxa de variação entre o número de "novas" pessoas envolvidas em meses consecutivos. (%)
1	1	-	-
2	3	$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{3-1}{1} = 2 = 200\%$
3	9	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{9-3}{3} = 2 = 200\%$
4	27	$\frac{27}{9} = 3$	$\frac{27-9}{9} = 2 = 200\%$
5	81	$\frac{81}{27} = 3$	$\frac{81-27}{27} = 2 = 200\%$

A)Como visto no exercício anterior esta sequência é chamada de progressão geométrica, PG, pois cada termo a partir do segundo é obtido como o produto do anterior por uma constante que no caso é 3. Ainda, em outras palavras, de um mês para o outro a taxa de variação percentual é constante.

B)



C) O eixo das abscissas só pode receber números naturais maiores ou iguais a 1, visto que o problema tem com mês inicial o mês 1. Isto ocorre pois se pudéssemos ter como abscissa um valor como por exemplo uma fração, isto $\frac{3}{2}$ de mês, teríamos então para este valor um total de $1{,}73$ pessoas o que não condiz com uma possível realidade para o problema.

Desta forma o podemos afirmar que o conjunto que representa o domínio deste gráfico, isto é, os valores das abscissas que tornam a relação verdadeira é o conjunto $\mathbb{N}^*$.

Situação problema 4

A)

Dias	Área inicial (m²)	Área final (m²)	Razão entre áreas finais consecutivas
1º	a	$\left(a+\frac{8}{100}a\right)=\ 1{,}08a$	-
2º	$1{,}08a$	$(1{,}08a)+\frac{8}{100}(1{,}08a)=(1{,}08)(1{,}08a)$ $=(1{,}08)^2a$	$\frac{1{,}08a}{a}=1{,}08$
3º	$(1{,}08)^2a$	$(1{,}08)^2a+\frac{8}{100}(1{,}08)^2a=(1{,}08)(1{,}08)^2a$ $=(1{,}08)^3a$	$\frac{(1{,}08)^3a}{(1{,}08)^2a}$ $=1{,}08$
4º	$(1{,}08)^3a$	$(1{,}08)^3a+\frac{8}{100}(1{,}08)^3a=(1{,}08)(1{,}08)^3a$ $=(1{,}08)^4a$	$\frac{(1{,}08)^4a}{(1{,}08)^3a}$ $=1{,}08$
5º	$(1{,}08)^4a$	$(1{,}08)^4a+\frac{8}{100}(1{,}08)^4a=(1{,}08)(1{,}08)^4a$ $=(1{,}08)^5a$	$\frac{(1{,}08)^5a}{(1{,}08)^4a}$ $=1{,}08$

B)O tamanho do aguapé é aumentado em 8% ao dia, isto quer dizer que a área ocupada por ela depende do número de dias decorridos. Pela tabela podemos constatar o seguinte padrão: a ara ocupada é igual ao fator $1{,}08$ em que o expoente corresponde exatamente igual ao número de dias decorridos, multiplicado pela área inicial que é a. Assim podemos deduzir que:

$$A_t=a\cdot(1{,}08)^t$$

C)O fator $(100\%+i)=(1+i)$pode ser chamado de fator de aumento. Fator este, em que a taxa de aumento é i.

D) O crescimento desta planta ocorre como uma taxa percentual constante. A função que possui esta característica é a função exponencial crescente. Ela possui este nome porque a variável independente está localizada no expoente.

E)Como a é um valor positivo e foi recomendado um intervalo de utilização, escolhendo a=1, teremos o seguinte gráfico.

F)Neste caso como a planta cresce em função do tempo que é uma grandeza contínua assim como o tamanho da planta, a abscissa pode assumir qualquer valor que seja real positivo, isto é, o domínio desta relação ou desta função é R_+.

Situação problema 5

A)O padrão é que cada montante a partir do primeiro é obtido pelo produto da constante já conhecida como fator de aumento $(1 + i)$, que neste caso, vale 1,02.

B) Sim, esta sequência constitui uma PG pelo motivo explicado no item a.

C) Sim, este crescimento ocorre de forma exponencial pois, como pesquisado na atividade anterior trata-se de uma relação entre montante e tempo no qual a variável independente está localizada no expoente.

D)Usando o raciocínio de fator de aumento visto nesta atividade e nas atividades anteriores, podemos constatar que:

$$Valor\ futuro = valor\ atua(1{,}02)^t.$$

Neste caso, como os valores informados, isto é: valor futuro dezesseis mil reais, valor atual quatro mil reais e o tempo de aplicação 5 anos que é o mesmo que 60 meses.

$$Valor\ futuro = 4.000\ (1{,}02)^{60} \approx 13.124{,}12$$

Portanto, ele não conseguirá a quantia desejada ao final de 5 anos.

E) Para descobrir quanto ele precisa pedir emprestado a seu amigo Rodrigo precisamos descobrir qual é o valor atual que ele necessita, para isso podemos raciocinar da seguinte maneira.

$$valor\ futuro = valor\ atual(1{,}02)^t$$

$$16.000 = valor\ atual(1{,}02)^{60} \rightarrow valor\ atual = \frac{16.000}{(1{,}02)^{60}} \approx 4876{,}51.$$

Portanto conclui-se que: como Diogo já possui $RS4.000{,}00$ ele deve pedir a seu amigo Rodrigo emprestado um total de $R\$876{,}51$ para atingir seu objetivo em 5 anos.

F) Seguindo o raciocínio dos itens A e B podemos concluir que o raciocínio padrão é:

$$valor\ atual = \frac{valor\ futuro}{(1+i)^t}$$

$$V_a = \frac{V_f}{(1 = i)^t}$$

Situação Problema 6

A)É possível que Marcelo ajude Orlando a descobrir quantas pessoas frequentarão o Parque em 2013, isto é, em seu oitavo ano de existência pois a tabela constitui o padrão de que a cada ano o número de pessoas que frequentam o parque é cinco vezes maior do que o número de pessoas que frequentou o parque no ano anterior. Para finalizar temos, $15.625 \times 5 = 78125$ pessoas.

b) Como dito acima existe um padrão quanto ao número de pessoas que frequentam o parque ano após ano e este padrão é : o número de pessoas em um determinado ano é igual ao produto do número de pessoas do ano anterior pela constante 5.

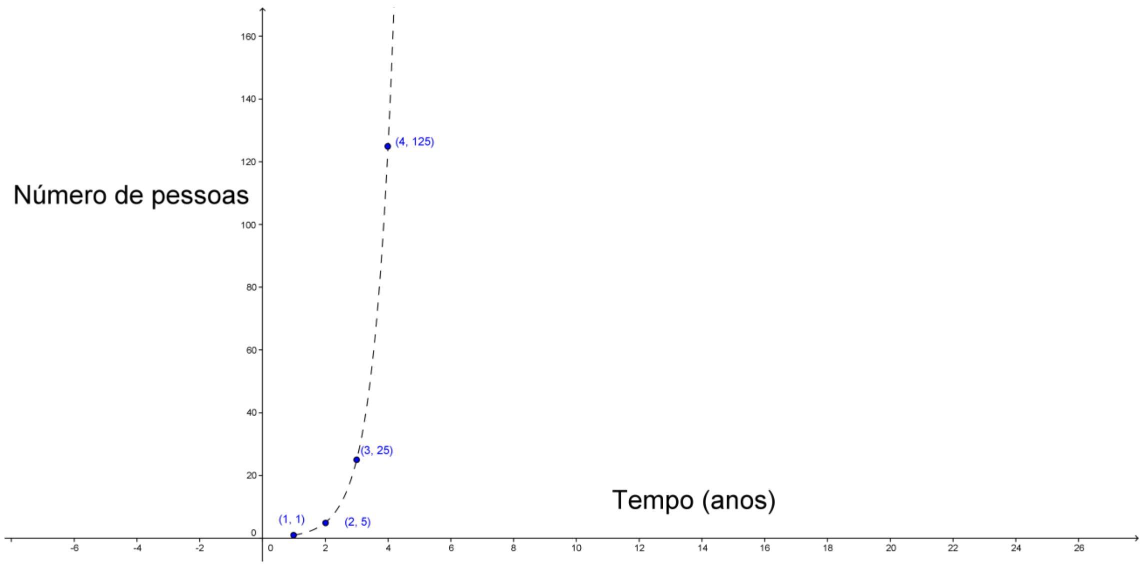
c) Fazendo uma correspondência entre os valores da tabela podemos reconstruí-la da seguinte forma:

Ano de existência	Número de Pessoas
1	$1 = 5^0$
2	$5 = 5^1$
3	$25 = 5^2$
4	$125 = 5^3$
5	$625 = 5^4$
6	$3125 = 5^5$
7	$15625 = 5^6$

Portanto, é possível perceber que o número de pessoas que frequentam o parque num determinado ano é uma potência de 5 na qual o expoente indica uma unidade a menos do que o número de anos de existência do parque. Assim temos que:

$$y = 1.5^{(x-1)}$$

D)



E) Para descobrir seu faturamento nas condições indicadas temos a seguinte conta:

$$Faturamento = 20 \times 5^0 + 20 \times 5^1 + \cdots + 20 \times 5^8 + 20 \times 5^9$$

F) Colocando 20 e evidência temos que $faturamento = 20(5^0 + 5^1 + \cdots + 5^8 + 5^9)$. Como já sabemos, a sequência $5^0, 5^1, 5^9$ constitui uma PG pois cada termo pode ser obtido como o produto do anterior por 5.

G) Não. Pois envolve a soma de muitas potências.

H) O resultado é R$39.062.466

Observação: Este é um ótimo momento para que o professor possa introduzir o conceito de soma dos termos de uma PG finita deduzindo assim sua fórmula geral. O aluno deve perceber que a fórmula também é complexa e envolve uma potência em geral alta. Ele deverá compreender que essa potência dependerá do número de termos da PG.

Situação Problema 7

Figura	Número de lados	Número de cópias da figura original	Comprimento de cada lado	Perímetro
1	4	1	9	$36 = 4 \times 9$
2	$16 = 4^2$	4	$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)$	$4^2 \left(\frac{9}{3}\right)$
3	$64 = 4^3$	$16 = 4^2$	$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$4^3 \times \frac{9}{3^2}$
...	...	...	...	...
n	4^n	4^{n-1}	$9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$4^n \times \frac{9}{3^{n-1}}$

A)Fazer o desenho desta figura é muito complicado pois a figura inicial se subdivide em muitas cópias pequenas e difíceis de serem feitas à mão.

A organização da tabela prioriza a “quantidade” em detrimento da “qualidade”. Isto é, é possível determinar quantos lados, quantas cópias da figura original, comprimento de cada lado e perímetro sem que se faça o desenho.

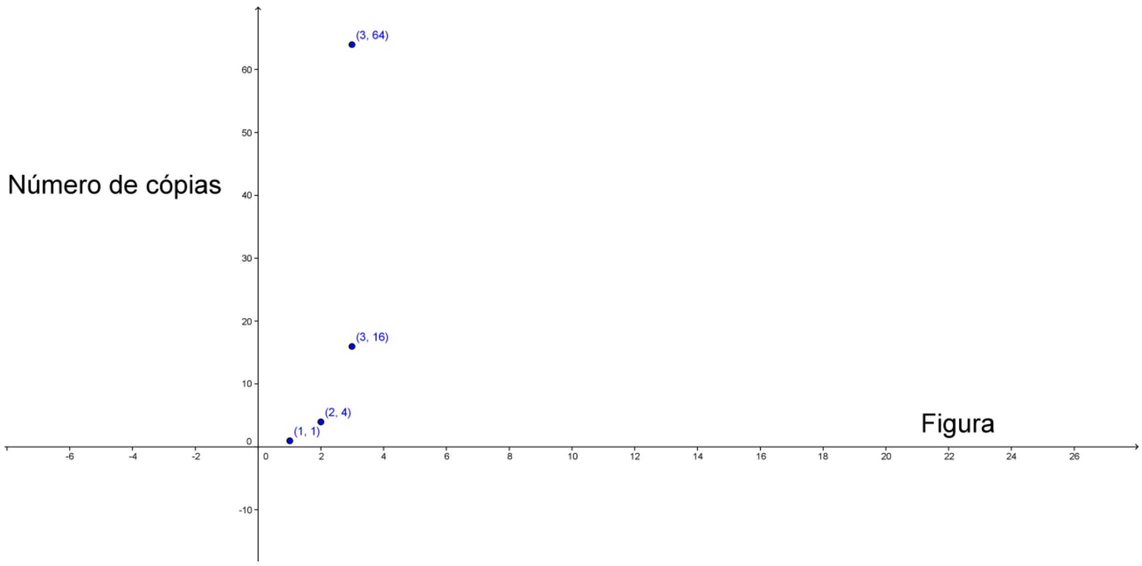
Para isto basta observar o padrão de cada elemento da coluna e generalizar esta situação, ou seja, encontrar a lei de formação ou o termo geral da sequência em função do número da figura.

B) O número de cópias quadruplica de uma figura para outra. Assim podemos concluir que se trata de uma sequência crescente pois à medida que avançamos no número de figuras a quantidade de cópias aumenta.

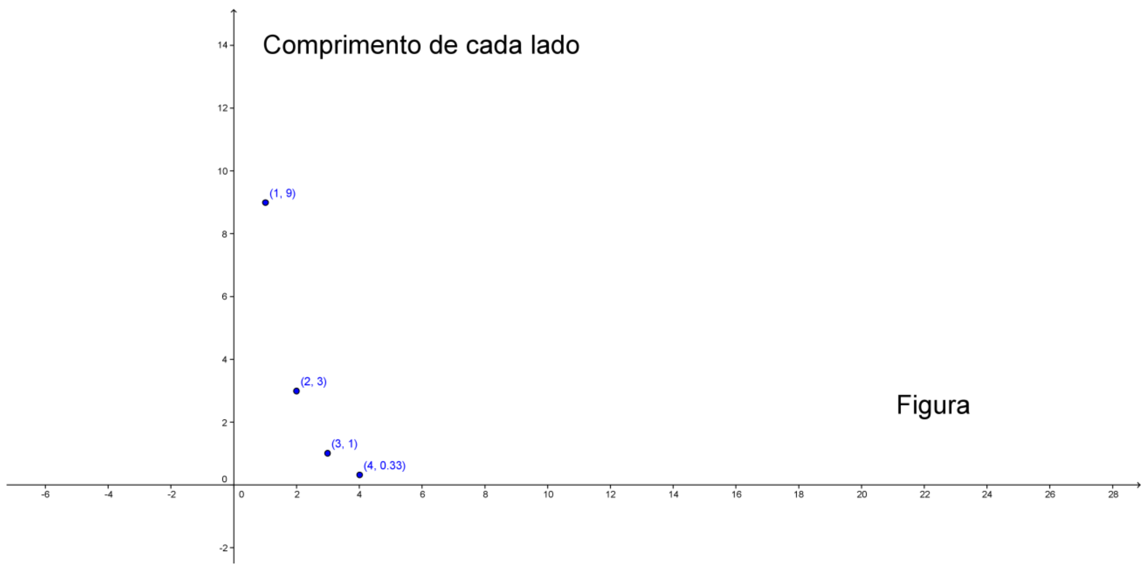
C) O comprimento e cada lado diminui para sua terça parte. Desta forma conclui-se que se trata de uma sequência decrescente pois à medida que avançamos no número de figuras, o comprimento diminui.

D)Ambas são progressões geométricas. A primeira crescente com razão igual a 4 e a segunda decrescente com razão $\frac{1}{3}$.

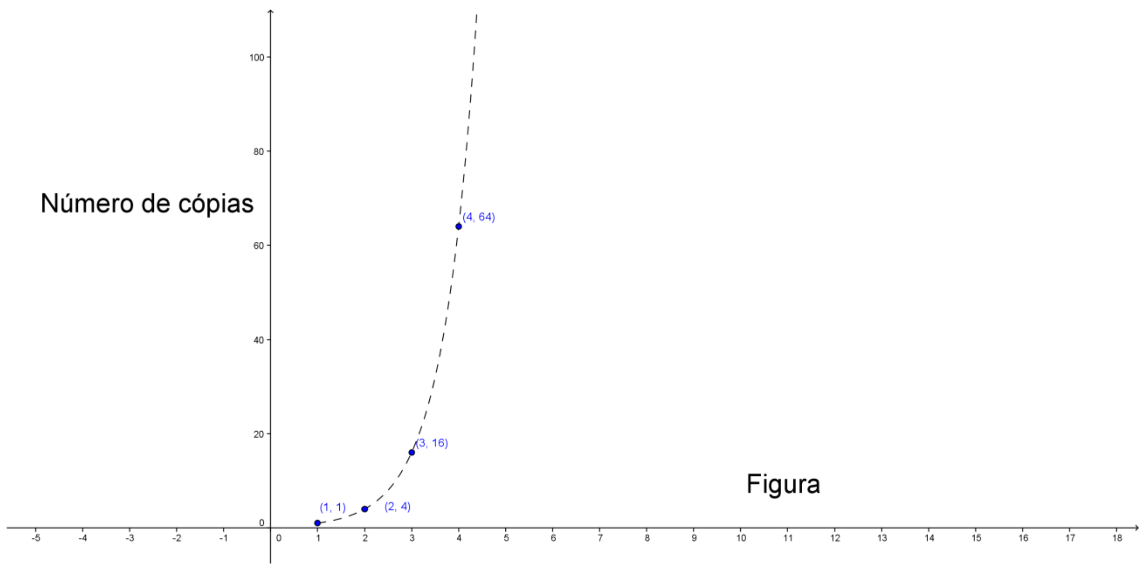
E) Plano cartesiano em y é o número de cópias da figura original.

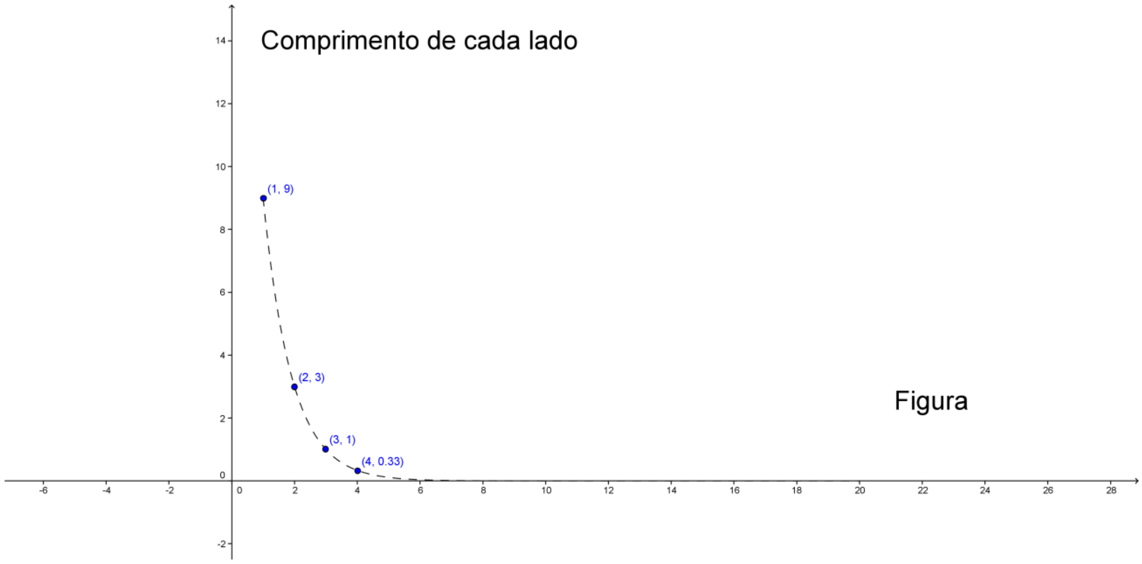


Plano cartesiano em que y é o comprimento de cada lado.


Comprimento de cada lado
(1, 9)
(2, 3)
(3, 1)
(4, 0.33)
Figura

F)


Número de cópias
(4, 64)
(3, 16)
(1, 1)
(2, 4)
Figura



G) Espera-se que o aluno responda sim caso já tenha estudado o comportamento dos juros compostos.

Situação Problema 8

A)32,64,128,256,512.

B e C) Observe que a sequência (1,2,4,8,16,...) constitui uma progressão geométrica de razão 2. Num primeiro momento parece que o valor final será pequeno pois, os primeiros termos dessa sequência são pequenos.

No entanto à medida que se vai descobrindo os próximos termos dessa PG, cuja lei de formação ou termo geral é dado por: $a_n = 2^{n-1}$ percebe-se que os valores vão crescendo muito rapidamente.

Isto é, quanto mais longe do primeiro termo mais acelerado é o crescimento e esse problema terá 64 termos e portanto os valores finais serão extremamente altos. Este comportamento é semelhante ao comportamento da função exponencial crescente.

D) Trata-se de mais um exercício que envolve a soma dos n primeiros termos de uma PG. Observe que fizemos uma relação entre o crescimento acelerado de uma PG e o crescimento acelerado de uma função exponencial.

Não é preciso uma calculadora para saber que esta conta dará um valor enorme mas é aconselhável a utilização de uma para se chegar ao resultado desejado.

$$Soma = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{63}.$$

$$2 \times Soma = 2^1 + \cdots + 2^{64}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira tem-se:

$$Soma = 2^{64} - 2^0 = 18446744073709551615.$$

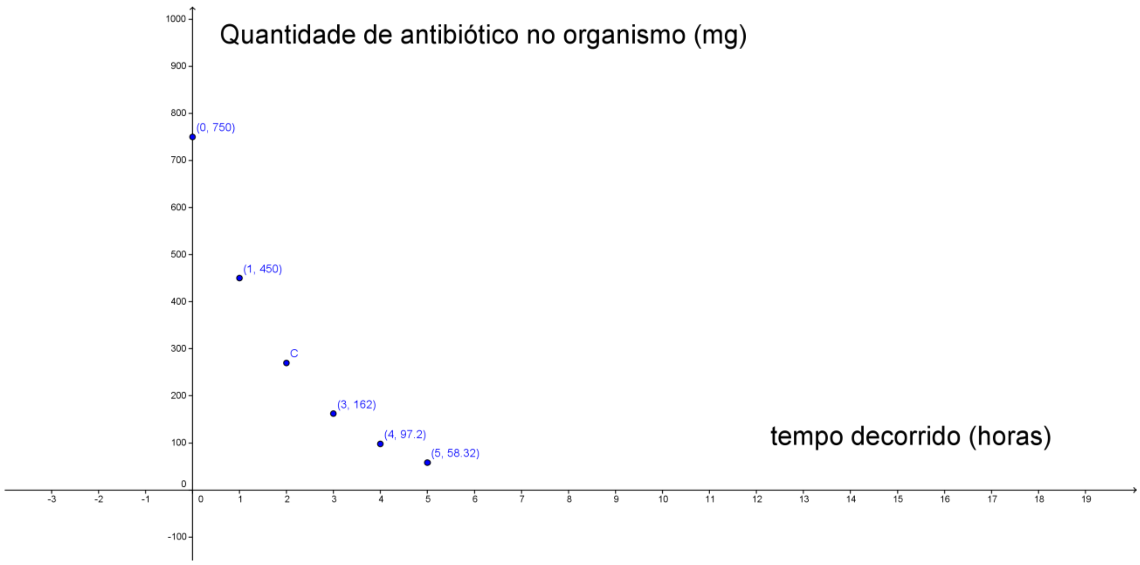
Observe que este número é enorme então mesmo que o rei tivesse essa quantia será que iria querer dispor dela?

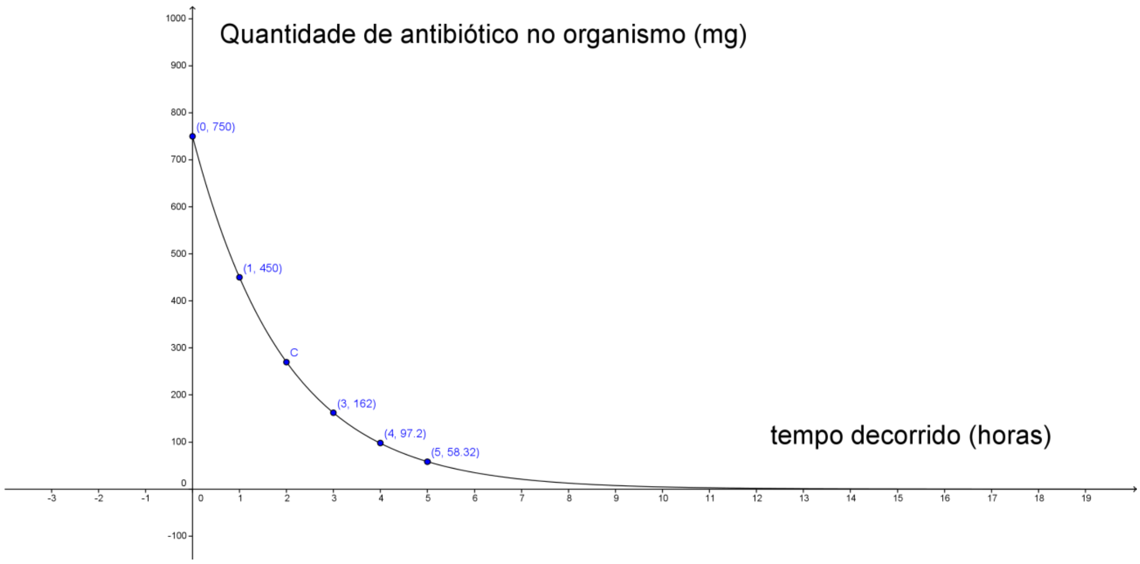
Situação Problema 9:

A)Sim, pois nesta sequência cada termo pode ser obtido como o produto de um termo por uma constante, no caso $\frac{3}{5}$ a partir do primeiro termo.

B) Esta sequência é decrescente pois, a medida que avançamos em seus termos os valores vão diminuindo.

C)(162, 97,2, 58,32)





D) Seu comportamento é semelhante ao comportamento da função exponencial decrescente.

E) Essa é uma sequência na qual o seu limite é o valor 0. Como tempo é uma grandeza infinita, podemos diminuir o intervalo de tempo o quanto se deseja até que o valor se aproxime de 0 o quanto se deseja.

F) Sim, esta lei é dada por:

$$Q = 750 \cdot (0{,}6)^t$$

G) para responder esta pergunta, basta substituir 4,5349632 no lugar de t e resolver a equação exponencial. Isto é:

$$4{,}5349632 \ = 750(0{,}6)^t \rightarrow \ (0{,}6)^t = \frac{4{,}5349632}{750} = 0{,}0060466176$$
$$\rightarrow (0{,}6)^t = (0{,}6)^{10} \rightarrow t = 10 \ horas.$$

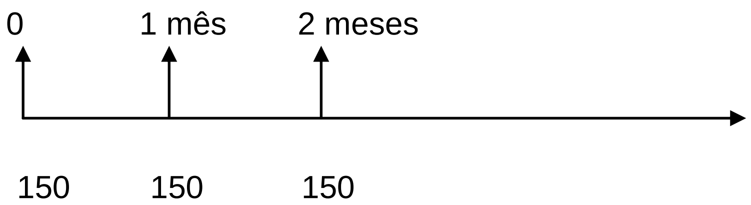
Situação Problema 10

Para responder a esta questão é preciso que se tenha a noção de que o valor de um quantia varia com tempo. Isto é, o valor de um dinheiro hoje não será o mesmo valor em outra época. Portanto para comparar possibilidades distintas de uma compra devemos escolher uma data que seja comum. Neste caso vamos escolher a época 2, por exemplo.

Primeiro, deixemos claro que o raciocínio de Dona Cidinha está errado, como o de muitas pessoas pois ela se esqueceu de que apesar de aparentemente o primeiro resultado ser menos do que o segundo, como seu dinheiro rende com o passar do tempo, pode ser que o rendimento seja superior ao valor gasto em cada parcela. Isto é, talvez seja mais vantajoso para ela aplicar e pagar do que gastar o que tem num valor mais alto.

Neste exercício, fixaremos a ideia de valor atual e valor futuro já discutido ao longo desta lista. Como estamos escolhendo a época 2, na primeira situação pensaremos apenas no valor futuro. Já na segunda situação teremos momentos em que estaremos em busca do valor futuro, mas também do valor atual. Vejamos:

- Três prestações mensais, com entrada, de 150 reais.



Como o dinheiro para dona Cidinha rende 2% ao mês, podemos concluir que à época 2 teremos o seguinte saldo:

$$Valor(época\ 2) = 150 \times (1{,}02)^2 + 150 \times 1{,}02 + 150.$$

Neste momento, pode-se observar como revisão ou introdução de conteúdo, que se trata da soma dos termos de uma progressão geométrica. Portanto:

$$Valor(época\ 2) = \frac{150((1{,}02)^3 - 1)}{1{,}02 - 1} = 459{,}06.$$

- Cinco prestações mensais, com entrada, de 91 reais.

$$valor\ (época\ 2) = 91 \times (1{,}02)^2\ + 91 \times 1{,}02 + 91 + \frac{91}{1{,}02} + \frac{91}{(1{,}02)^2}.$$

Assim como no caso anterior, os cinco termos constituem uma PG de razão $\frac{1}{1{,}02}$ .Portanto, temo que:

$$valor(época\ 2) = \frac{91 \times (1{,}02)^2 \left[\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{1{,}02} - 1} = 455{,}17$$

Como se pode verificar, à mesma época, usando o fato de que Dona Cidinha pode colocar seu dinheiro para render 2% ao mês, concluímos que no segundo caso ela gastará $R\$455{,}17$ enquanto no primeiro ela gastará $R\$459{,}06$. Portanto o segundo caso será mais vantajoso em relação ao primeiro e a economia será de $R\$3{,}88$.

Situação Problema 11

Quadrado (Q)	Área do Quadrado (mm²)	Quociente entre áreas de quadrados consecutivos	Taxa de variação entre áreas de quadrados consecutivos. (%)
Original	10^2	-	-
1º Quadrado	2×10^2	2	100%
2º Quadrado	$2^2 \times 10^2$	2	100%
3º Quadrado	$2^3 \times 10^2$	2	100%
4º Quadrado	$2^4 \times 10^2$	2	100%

Dias decorridos	Tamanho da planta em (mm)	Quociente entre tamanho da planta em dias consecutivos	Taxa de variação entre tamanha das plantas em dias consecutivos. (%)
0	$100 = 10^2$	-	-
1	$200 = 2 \times 10^2$	2	100%
2	$400 = 2^2 \times 10^2$	2	100%
3	$800 = 2^3 \times 10^2$	2	100%
4	$1600 = 2^4 \times 10^2$	2	100%

Dias decorridos	Montante em reais	Quociente entre Montantes consecutivos	Taxa de variação entre montantes consecutivos (%)
0	$100 = 10^2$	-	-
1	$2 \times 100 = 2 \times 10^2$	2	100%
2	$2 \times 2 \times 10^2 = 2^2 \times 10^2$	2	100%
3	$2 \times 2^2 \times 100 = 2^3 \times 10^2$	2	100%
4	$2 \times 2^3 \times 100 = 2^4 \times 10^2$	2	100%

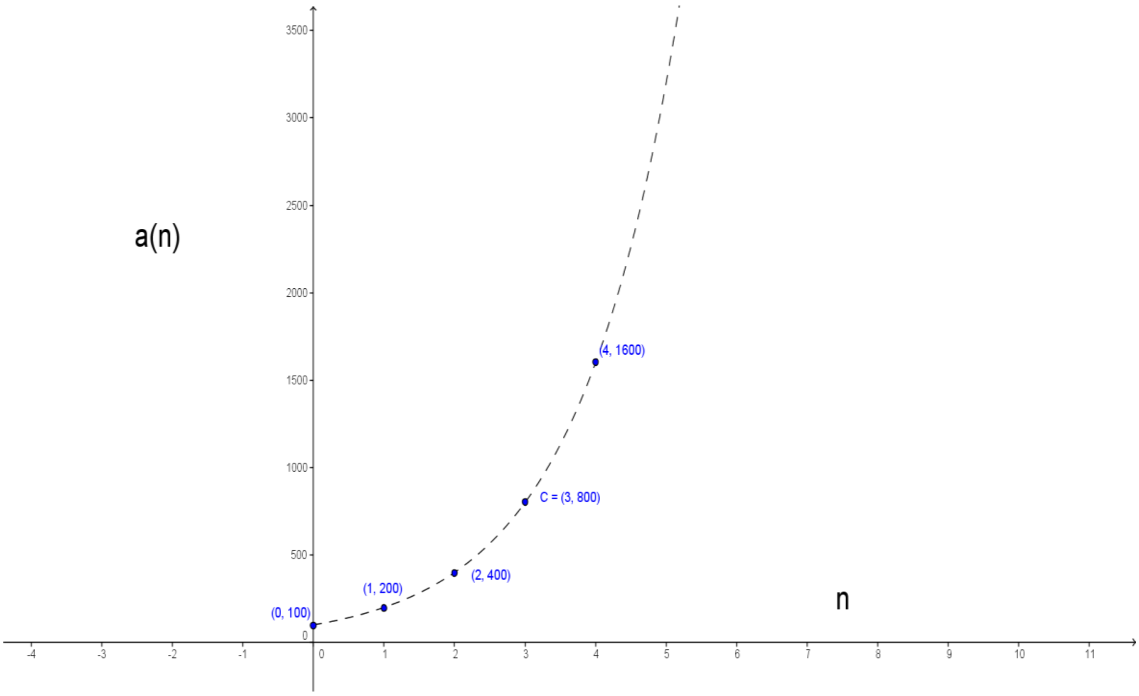
Pelas tabelas construídas podemos concluir que:

- Os quadrados terão tamanhos: 100, 200, 400, 800, 1600 mm².
- As plantas terão a cada dia os tamanhos: 100, 200, 400, 800,1600mm.
- Serão necessários exatamente 5 dias.

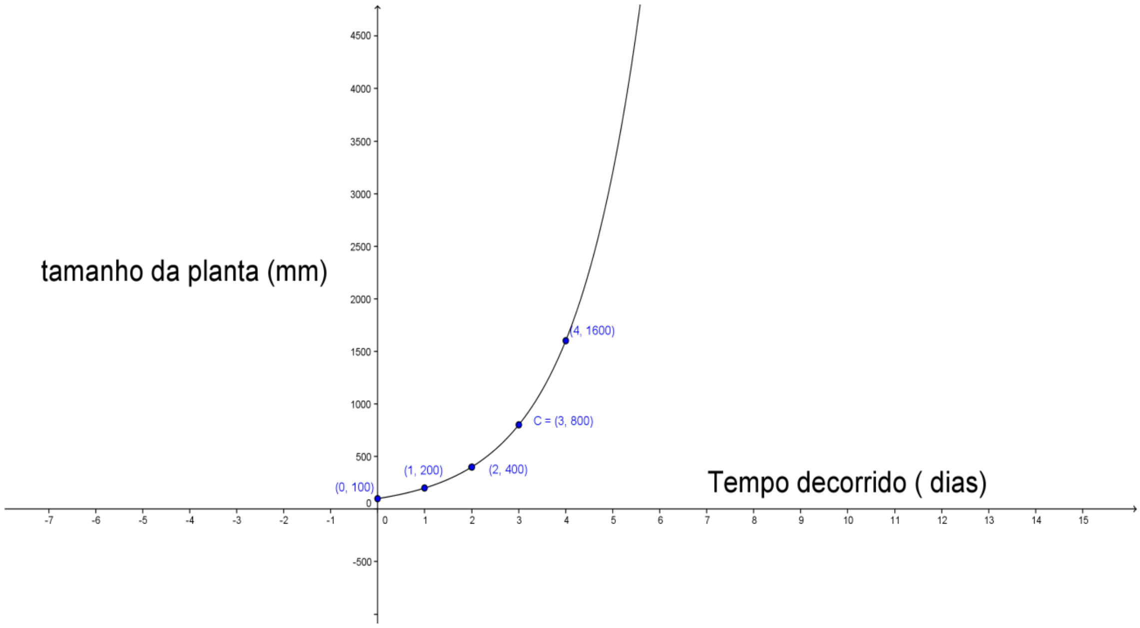
A)São sequência numérica iguais. Todas possuem os seguintes valores $(100, 200, 400, 800, 1600)$.

B)Pelo padrão observado nas tabelas, que é o mesmo, podemos constatar que:

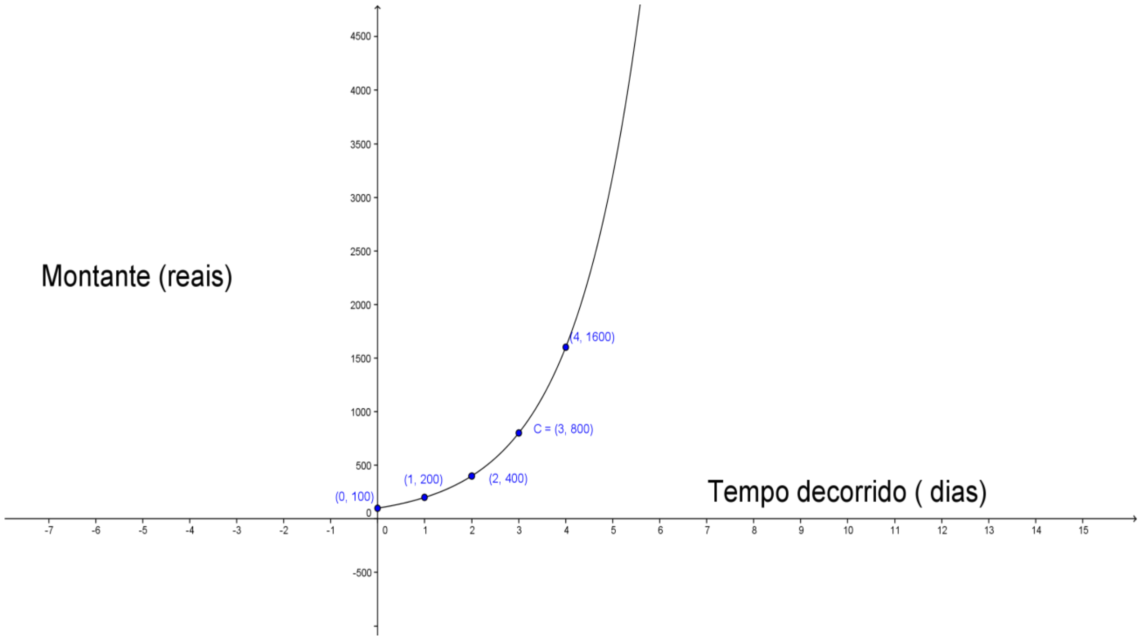
1º caso: $a_n = 2^n \times 10^2$, em que n é o enésimo termo.



2º caso: $f(x) = 10^2 \times 2^x$, em que x é o número de dias.



3º caso: $M = 10^2 \times (1+1)^t$ em que t é o tempo decorrido.



C) As três situação são muito semelhantes pois nas três é possível perceber o mesmo padrão. Isto é o valor sempre dobra a partir do anterior. Há portanto, um aumento de 100% em relação ao valor que antecede.

Podemos afirmar que numericamente as três situações são iguais, mas do ponto de vista matemático elas são distintas.

A primeira situação acontece no campo de domínio do conjunto dos números naturais não nulos $\mathbb{N}^*$. Já a segunda e a terceira situações acontecem no campo de domínio do conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}_+$.

Comentário: Com este exercício os alunos podem passar a ter a sensação de que achar a lei de formação no capítulo de PG, no capítulo de função exponencial e no capítulo de juros compostos no fim das contas trata-se do mesmo processo.

Além disso, eles podem constar que as três conteúdos possuem comportamento semelhantes e portanto as facilidades em um podem ser usadas para facilitar em outros obtendo assim um aprendizado mais coeso, isto é, menos dissociado e portanto com sensação de estarem decorando menos processos e menos fórmulas.

Por outro lado, o professor pode economizar bastante tempo quando for explorar estes capítulos separadamente. E como sabemos isso é bastante importante visto que a grade de conteúdo segundo os documentos oficiais é bastante intensa e nem sempre os professores possuem um número de aulas suficiente para explicar os conteúdos com tranquilidade.

Por fim, é importante que o professor deixe claro par aos alunos que as progressões geométricas crescentes e o processo de juros compostos constituem relações particulares de um caso mais geral que é a função exponencial, que pode ser generalizada, quando não contextualizada, tendo como domínio o conjunto dos números reais.