UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Arlindo Moacir Angelin

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: ATIVIDADES PRÁTICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Santa Maria, RS
2019

Arlindo Moacir Angelin

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: ATIVIDADES PRÁTICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Profª. Drª. Claudia Candida Pansonato

Santa Maria, RS
2019

Arlindo Moacir Angelin

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: ATIVIDADES PRÁTICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Aprovado em 20 de agosto de 2019.

____
Claudia Candida Pansonato, Dra.(UFSM)

____
Ana Marli Bulegon, Dra. (UFN)

____
Carmen Vieira Mathias, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

À minha esposa Marli e minha filha
Alessandra, e a todos meus colegas.

AGRADECIMENTO

Ao terminar a minha dissertação, percebo que sem o apoio que recebi jamais teria concluído. Assim, quero agradecer de modo especial:

Primeiramente a Deus, pois é Ele o mentor de nossas vidas.

A minha esposa Marli e filha Alessandra, pela compreensão dos momentos que estive ausente, e o apoio incondicional nos momentos mais difíceis.

A minha orientadora, pela paciência e disposição de me orientar e por tantos momentos que me ajudou neste período. A levarei sempre em meu coração, muito obrigado.

Aos meus colegas de PROFMAT da turma de 2015 e os colegas da turma de 2016 que me adotaram com muito carinho.

Agradeço aos colegas Ademar, Mariel e Oneide, pelas conversas divertidas durante as viagens, por vezes com muita emoção.

Aos colegas Alisson e Leandro pelas caronas nesses últimos tempos.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT pela oportunidade de aprender matemática com os melhores.

Agradeço também aos meus colegas da escola por me deixarem fora do horário de sexta e pelo incentivo de fazer o mestrado.

“A esperança é o único bem comum a
todos os homens; aqueles que nada mais
têm ainda a possuem”.
Tales de Mileto

RESUMO

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS: ATIVIDADES PRÁTICAS COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

AUTOR: Arlindo Moacir Angelin

ORIENTADORA: Profª. Drª.Claudia Candida Pansonato

Neste trabalho elaboramos e aplicamos uma proposta de atividades para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental com o objetivo de tornar o estudo da Geometria mais atrativo e significativo. Os conteúdos trabalhados foram Semelhança de Triângulos, Teorema de Tales e homotetias. Utilizamos semelhança de triângulos para resolver problemas práticos como o cálculo de alturas inacessíveis. A técnica empregada foi a Resolução de Problemas, proposta por Polya (POLYA, 2006). Além disto, utilizamos o software GeoGebra em diversas atividades envolvendo os casos de semelhança de triângulos. Finalmente, realizamos uma atividade prática envolvendo o clássico problema da construção do túnel de Eupalinos. (RODRIGUES, 2010). A aplicação da proposta proporcionou aos alunos situações de protagonismo, gerando um aumento significativo dos conhecimentos adquiridos em relação às propriedades estudadas.

Palavras – chave: Teorema de Tales. Resolução de Problemas. Aplicações Práticas. Protagonismo do aluno.

ABSTRACT

TRIANGLE SIMILARITY: PRACTICAL ACTIVITIES WITH GEOGEBRA AID

AUTHOR: Arlindo Moacir Angelin

ADVISOR: Profª. Drª.Claudia Candida Pansonato

In this paper we elaborate and apply a proposal of activities for students of the 9th grade of Elementary School with the objective of making the study of Geometry more attractive and significant. The contents worked were Similarity of Triangles, Tales' Theorem and homotheties. We use similarity of triangles to solve practical problems as inaccessible height calculation. The technique used in this paper was the problem solving proposed by Polya (POLYA, 2006). In addition, we use GeoGebra software in several activities involving cases of triangle similarity. Finally, we performed a practical activity involving the classic problem of the Eupaline tunnel (RODRIGUES, 2010). The application of the proposal provided students leading situations, creating a significant increase in knowledge gained in relation to the properties studied.

Keywords: Tales theorem, problem solving, practical applications, protagonism of the student.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um tema frequentemente discutido no que se refere ao ensino de matemática é o ensino da Geometria na educação básica que, nas últimas décadas tem sido negligenciada nas escolas do Brasil, em especial nas escolas da rede pública.

Muitos autores como Kaleff (1994), Lorenzato (1995), Pavanelo (1995) já alertavam para a necessidade de retomarmos o ensino de geometria em nossas escolas. Mais recentemente os PCN e a BNCC retomam mais intensamente o ensino da geometria na educação básica.

Conforme Lobo e Bayer (2004), a Geometria muitas vezes só é ensinada nos anos finais do Ensino Fundamental, predominantemente, no 8º e 9º anos, e de modo geral o ensino envolve apenas memorização de fórmulas e regras, com pouca ou nenhuma aplicação prática.

Pavanello (1993, p. 7) ressalta que este abandono do ensino da geometria é herança de reformas sofridas no ensino da matemática, destacando-se o Movimento da Matemática Moderna, surgido no final da década de 1950 e que favoreceria o ensino da Teoria de Conjuntos e Álgebra Vetorial em detrimento da Geometria.

Em 1998 foram criados pelo MEC os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN, de 5ª à 8ª série com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. Os PCN retomaram o ensino de Geometria com a preocupação de resgatá-la como uma das áreas fundamentais da matemática.

Diante deste panorama, e utilizando os conhecimentos adquiridos com o PROFMAT [1]elaboramos uma proposta para alunos do 9º ano com o objetivo de tornar o estudo da Geometria mais atrativo e significativo. Os conteúdos trabalhados foram Semelhança de Triângulos, Teorema de Tales e homotetias. Utilizamos semelhança de triângulos para resolver problemas práticos como o cálculo de altura inacessíveis. Utilizamos a técnica de resolução de problemas, proposta por Polya (POLYA, 2006), num experimento envolvendo o problema da construção do túnel de Eupalinos [2] pois acreditamos que a resolução de problemas oportuniza o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, permitindo que estes estabeleçam relações e estratégias para solucionar os problemas.

Outro recurso utilizado nas atividades foi o software GeoGebra, cujas funcionalidades facilitam na visualização e verificação dos resultados. Procuramos em nossa proposta

---

[1] PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional
[2] (http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1010)

contextualizar alguns problemas históricos para mostrar aos alunos que muitos conceitos matemáticos surgiram da necessidade dos povos antigos de resolver problemas do dia a dia.

Tornar o aluno protagonista do seu aprendizado é um dos objetivos do nosso trabalho, assim em todas as atividades práticas realizadas incentivamos o alunos a utilizar sua curiosidade e criatividade.

Esta dissertação está organizada em seis capítulos. O primeiro, a introdução, apresentamos uma síntese do trabalho proposto e a organização dos capítulos.

No segundo capítulo apresentamos a origem e a importância da geometria, a técnica de resolução de problemas proposta por Polya e o uso do GeoGebra nas aulas de geometria.

Iniciamos o terceiro capítulo com a história de Tales de Mileto e o famoso fato em que ele determina a altura da pirâmide de Quéops usando a semelhança de triângulos. Em seguida é feita uma análise de como o teorema é apresentado nos livros didáticos, a demonstração do teorema e como consequência deste a demonstração dos casos de semelhança de triângulos e sua aplicação em homotetias.

A metodologia utilizada nas atividades propostas é apresentada no quarto capítulo com o uso da técnica de resolução de problemas, o uso das TIC e as técnicas propostas para o cálculo de distâncias inacessíveis.

No quinto capítulo relatamos todo o desenvolvimento desde a apresentação do conteúdo de forma tradicional até as práticas efetuadas no pátio da escola, bem como as realizadas no laboratório de informática. Finalizamos o capítulo recriando o projeto do Aqueduto de Eupalinos construído há mais de 2500 anos na Ilha de Samos utilizando a semelhança de triângulos.

Finalmente, no sexto capítulo, apresentamos as considerações finais e a conclusão acerca dos resultados obtidos com o uso dos recursos propostos.

Sendo assim, o presente trabalho busca disponibilizar uma alternativa para o ensino de semelhança de triângulos, bem como trazer melhorias no aprendizado dos alunos através de atividades práticas onde os mesmos se tornem protagonistas do seu próprio aprendizado.

2 ENSINO DE GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: ALTERNATIVA OU NECESSIDADE?

Segundo o dicionário Aurélio Geometria é definida como “parte da Matemática que estuda rigorosamente o espaço e as formas (figuras e corpos) que nele podem estar”. “GEO (terra) + METRIA (medida) = Medir a Terra. A origem da palavra geometria remete-nos para os agrimensores do antigo Egito, que com cordas (cordéis) esticados sobre as parcelas de terreno traçavam linhas simples: reta e circunferência”[3].

Segundo Boyer (1974, p.4), “Heródoto mantinha que a geometria se originava no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação do vale do rio”. A origem da geometria é muito difícil de precisar ou quase impossível, pois outros povos também possuíam conhecimentos de geometria como os babilônios, hindus e chineses.

Porém não podemos negar que ela desenvolveu-se a partir de necessidades práticas dos povos antigos.

> Das necessidades práticas das sociedades, que viviam às margens de grandes rios como o Nilo, o Eufrates e o Ganges, de demarcar, delimitar e quantificar as superfícies alagadas pelas enchentes e de calcular custos e impostos relativos as áreas dessas superfícies, foram sendo formadas e estabelecidas as ideias geométricas. (KALEFF, 1994, p.20)

Todo esse conhecimento acumulado pelas civilizações passou a ser compartilhado com pessoas que tiveram contato com ela, passando a utilizá-la conforme sua necessidade. Na Grécia esse conhecimento começou a ser estudado e organizado, “[...] começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a.C.) e culminando com os notáveis *Elementos* de Euclides (por volta de 300 a.C.)”. (EVES, 2008, p. 129).

A partir de Euclides (300 a.C.) que o conhecimento até então adquirido passou a ser organizado, contendo conceitos primitivos, axiomas e algumas definições. Euclides estabeleceu através de leis da lógica usual, teoremas que podiam ser demonstrados através de uma sequência lógica. Esses conceitos estruturados por Euclides formam o que conhecemos atualmente por Geometria Euclidiana.

Para Kaleff (1994, p.20), “por muito tempo a geometria foi ensinada utilizando o método dedutivo, e era a base para o desenvolvimento tecnológico. Porém na metade do

[3] Disponível em: <https://www.dicionarioetimologico.com.br/geometria/> acesso em dezembro de 2018.

século passado surgiu um movimento de reforma do ensino de matemática denominado ‘Matemática Moderna’”.

> “Um dos pontos centrais da reforma era o currículo. Os promotores da reforma consideravam que a matemática ensinada nas escolas era antiquada e se limitava aos conhecimentos adquiridos antes de 1700”. (AVILA, 2010, p.4).

Também pode ser constatada em Brasil (1998) a preocupação com essas reformas, que tornaram a matemática complexa, comprometendo a aprendizagem pelo uso excessivo da formalização.

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas. (BRASIL, 1998, p.19)

Para os reformistas, deveriam ser incluídos tópicos mais recentes como álgebra moderna, lógica simbólica, noções de topologia e teoria dos conjuntos, com ênfase em demonstrações rigorosas, nos axiomas e nos conceitos fundamentais, proporcionando a integração da matemática como um todo. Esse movimento iniciou nos Estados Unidos, França e Bélgica e se espalhou por muitos outros países, inclusive o Brasil.

> Nas décadas de 60/70, o ensino de Matemática no Brasil, assim como em outros países, foi influenciado por um movimento de renovação que ficou conhecido como Matemática Moderna. A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente do ensino por se considerar que, juntamente com a área de Ciências, ela constituía uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. Para tanto procurou-se aproximar a Matemática desenvolvida na escola da Matemática como é vista pelos estudiosos e pesquisadores. O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática (BRASIL, 1998, p.19)

Um dos reflexos foi o quase abandono da geometria euclidiana do currículo das escolas, com consequências sentidas até hoje.

> As tentativas de axiomatizar rigorosamente a geometria eram (e ainda são!) difíceis para os próprios professores. O resultado é que, no cumprimento dos programas, a geometria ia sendo relegada para o final do ano e acabava não sendo ensinada devidamente. Desde então, depois de muitas outras reformas do ensino que têm sido implantadas até os dias de hoje, o ensino de geometria nunca mais foi contemplado com a atenção que deve receber. (AVILA, 2010, P.6).

O estudo de geometria é fundamental na formação do aluno. Lorenzato (1995), ressalta que um dos méritos da geometria seja o fato dela exigir do aluno uma maneira específica de raciocinar, pois ser bom em aritmética ou álgebra, não é suficiente para resolver problemas de geometria. Ela vai muito além do saber geometria para resolver problemas geométricos, Lorenzato (1995, p.5) acrescenta:

> [...] sem estudar geometria as pessoas não desenvolvem o pensamento geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações da vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas do conhecimento humano. Sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida.
> "A Geometria está em toda parte", desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la...mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com a ideia de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual(formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a geometria. (LORENZATO, 1995, p.5)

A geometria possibilita ativar estruturas mentais para passarmos do estágio concreto para o abstrato, oferecendo uma variedade de métodos para o desenvolvimento intelectual do aluno e seu raciocínio lógico. Portanto passando da intuição e dos dados concretos para processos de abstração e generalização.

> Por outro lado, as propostas curriculares mais recentes são ainda bastante desconhecidas de parte considerável dos professores, que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que ideias ricas e inovadoras, veiculadas por essas propostas, não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente, ou ainda recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis. (BRASIL, 1998, p. 21)

Para mudar esse panorama, os esforços estão voltados para que o aluno tenha um papel ativo na construção do seu conhecimento, com ênfase na resolução de problemas que os levem a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação.

Então, em muitas situações este desconhecimento faz com que o ensino continue a ser organizado da mesma forma que era há anos atrás, ou seja, a geometria, embora presente nos livros atuais continue sendo apresentada aos alunos de forma isolada no currículo.

> Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas. (BRASIL, 1998, p. 21)

Assim o estudo da geometria no ensino fundamental deve ser encorajado, por tudo que já foi dito anteriormente, não podemos nos omitir a fim de evitar que a geometria continue sendo deixada de lado em nossas escolas e ocupe seu lugar como parte fundamental do saber matemático, e de acordo com Kaleff (1994) “a geometria deve ocupar o espaço que lhe é devido nas aulas de matemática, porém adequando seu ensino a realidade educacional, científica e tecnológica de nossos dias”.

Segundo Kaleff (1994), é necessário que voltemos a tomar o ensino de geometria em nossas mãos. (KALEFF, 1994, p.20).

Sendo assim, o presente trabalho trata de geometria euclidiana, mais especificamente semelhança de triângulos, utilizando a técnica de resolução de problemas, partindo de situações cotidianas para calcular medidas inacessíveis, com o uso de teoremas elementares sistematizados por Euclides em 300 A.C.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Durante muito tempo o ensino de matemática tem sido voltado para a memorização e aplicação de fórmulas sem ter a preocupação de mostrar a utilidade prática, ou seja, dar significado para aquele conteúdo.

Essa maneira de ensinar priorizou a mecanização dos exercícios, que são meras reproduções dos exemplos apresentados. Assim o aluno não precisa pensar o que tem que fazer e nem questionar o resultado tornando o estudo da matemática desinteressante e de certa forma monótono.

A técnica de resolução de problemas é uma alternativa para trabalhar com problemas matemáticos, possibilitando ao aluno mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade de organizar informações, tornando significativa a aprendizagem, pois possibilita aproximar conceitos de situações do dia a dia do aluno. Vários autores a consideram essencial para o aprendizado de matemática.

> Pesquisadores como Schoenfeld (1985), Gage e Berliner (1992) consideram que levar os estudantes a resolverem situações-problema é a própria razão para se ensinar Matemática. Situações-problema que requeiram dos estudantes: levantar fatos básicos, identificar incógnitas, buscar significados às incógnitas desconhecidas, (re)conhecer as operações matemáticas fundamentais, perceber as relações entre as operações e suas implicações em situações reais – formular, solucionar –, e ainda, avaliar e argumentar se a resposta encontrada é compatível com as informações disponíveis no problema. Bienbengut (2014, p.205)

Implantar essa técnica exige do professor uma mudança de postura, de transmissor de conhecimento para um orientador do aprendizado, deixando para o aluno o protagonismo da resolução e consequentemente do aprendizado. O objetivo é fazer o aluno pensar produtivamente, com problemas que o desafiem, o envolvam e o motivem a trabalhar numa solução para o mesmo, só assim fará o aluno pensar, conjecturar e estimar soluções.

O que seria um problema matemático? Os PCN definem problema matemático do seguinte modo:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas, porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução. (BRASIL, 1998, p.41)

A resolução de problemas como uma forma de ensinar matemática é apresentada por Polya, na obra "A Arte de Resolver Problemas" Polya (1986). Seu trabalho baseou-se em descobrir como resolver problemas com técnicas que levassem, através de passos, a uma solução, pois procedimentos rotineiros e repetitivos diminuem o interesse do aluno prejudicando seu desenvolvimento intelectual.

Um problema ao ser apresentado ao aluno deve ser adequado para que o objetivo pretendido seja alcançado. O mesmo precisa desafiar a curiosidade e cativar o aluno para o desenvolvimento da sua resolução, mesclando situações concretas do cotidiano e a metodologia proposta, fazendo com que o aluno atribua significado a aprendizagem.

Em Polya (1986), o autor estabelece estratégias para a resolução do problema. Polya recomenda quatro passos a serem seguidos para determinar a solução: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano proposto e fazer o retrospecto.

Compreensão do problema: nesta primeira fase o autor destaca a importância do problema ser compreendido pelo aluno. O professor deve escolher um problema, nem muito difícil, nem muito fácil, que seja interessante e natural para o aluno.

> Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante. Daí porque, raramente, pode o professor dispensar as indagações: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? (POLYA, 1986, P.4)

Nesta fase é importante considerar as partes principais do problema; se houver uma figura relacionada, devemos indicar as incógnitas, adotar uma notação adequada às indagações vistas acima. O que pede o problema? Quais os dados? Quais as condições? Posso fazer um esquema, um diagrama, uma figura?

> Ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio e incentivo do professor. (DANTE, 2010, p.66)

Estabelecimento de um plano: Nesta fase os alunos deverão propor estratégias para solucionar o problema, de modo geral saber quais os cálculos necessários, qual a aparência do desenho, quando este existir, o caminho a seguir. As ideias podem surgir gradualmente ou não, nesse caso o professor pode ajudá-los com indagações e sugestões que tendam a provocar tais ideias.

> Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes. (POLYA, 1986, p.6)

Polya (1986) destaca a importância dos conhecimentos matemáticos já adquiridos, problemas anteriormente resolvidos, teoremas já demonstrados a fim de relacionarmos com o problema proposto e acrescenta que sempre devemos perguntar: conhece um problema correlato?

Execução do plano: Nesta fase os planos traçados anteriormente são executados e devemos verificar todos os passos do nosso raciocínio até perceber com clareza de que o passo é correto.

> A ênfase que deve ser dada aqui é à habilidade do aluno em executar o plano traçado, e não aos cálculos em si. Há uma tendência muito forte (que devemos evitar) de reduzir todo o processo de resolução de problemas aos simples cálculos que levam às respostas corretas. (POLYA, 1986)

Retrospecto: Nesta fase temos que verificar se a solução está correta, ver se é possível chegar a ela por outro caminho, justificar os passos realizados. É preciso pôr a prova os resultados. Para Dante (2010, p.25) dessa forma "...o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução" e acrescenta:

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação reflexiva que constrói conhecimentos. (DANTE, 2010, p.25)

Polya (1986) também evidencia a importância de ao final verificar se a solução encontrada é realmente correta, ainda mais se a solução for longa.

> Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA,1986, p.10).

O uso da técnica de resolução de problema não necessariamente precisa ser seguido na ordem estabelecida, caso no momento de estabelecer um plano o aluno não tenha ideia de como fazer ele deve voltar ao primeiro passo e ler novamente, com calma e prestando atenção em todos os dados do problema e quando bem entendido ir ao passo seguinte.

Portanto no nosso entendimento a técnica de resolução de problemas proporciona a quem resolve por seus próprios meios a descoberta e a consolidação do seu conhecimento e principalmente o gosto pelo raciocínio independente.

2.2 O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA VERIFICAR RESULTADOS E AUXILIAR NA APRENDIZAGEM.

Muitos estudos apontam a relevância do uso de recursos tecnológicos no ensino de matemática. O uso de tais recursos cria um ambiente de maior interação e colaboração entre professor e aluno.

> A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores.
> [...]pode ser utilizada para gerar situações de aprendizagem com maior qualidade, ou seja, para criar ambientes de aprendizagem em que a problematização, a atividade reflexiva, atitude crítica, capacidade decisória e a autonomia sejam privilegiados. (BRASIL,1998, p.140 - 141).

Neste trabalho, optamos pelo uso do GeoGebra por ser um software de domínio público e que depois de instalado, no computador ou no smartphone, pode ser utilizado sem estar conectado à internet.

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que permite a construção de diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas, os quais podem ser modificados dinamicamente. Os valores e coordenadas podem ser introduzidas diretamente com o teclado, além da vantagem de podermos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos (PET MATEMÁTICA, 2016[4]). A partir da interação com o software, explorando e manipulando as figuras, o aluno pode compreender com mais facilidade as propriedades geométricas da figura.

O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática[5].

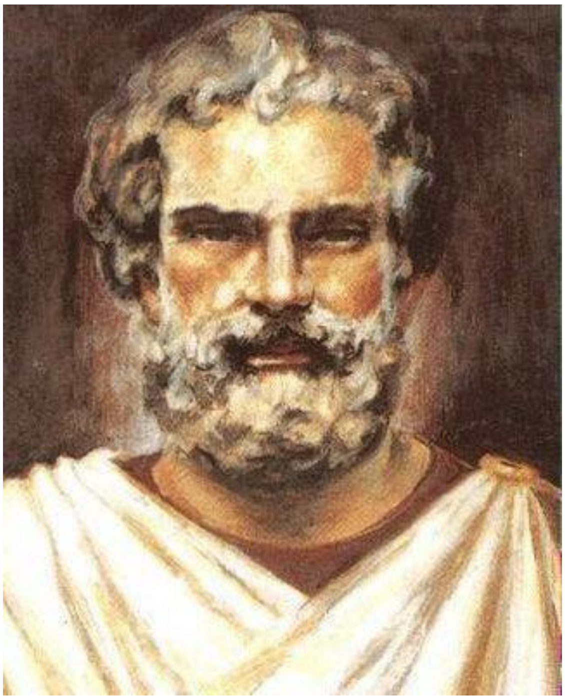
Assim, o uso de novas tecnologias pode proporcionar um ambiente de aprendizagem que ajuda o aluno a desenvolver suas capacidades e nesse contexto o professor desempenha um papel de suma importância sendo um incentivador e mediador do desenvolvimento da capacidade de explorar, conjecturar e pensar logicamente do aluno.

[4]Disponível em: < http://w3.ufsm.br/petmatematica/images/minicursos/Apostilas/Apostila_GeoGebra.pdf> acesso em agosto de 2018.
[5] Disponível em: <https://www.geogebra.org/about> acesso em novembro de 2018.

3 A HISTÓRIA DE TALES DE MILETO, O TEOREMA DE TALES E A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS.

Neste capítulo discutiremos alguns aspectos da vida e obra de Tales de Mileto, (figura 1), devido a sua importância para a matemática, principalmente na geometria. Por vezes sua história confunde-se com a própria história da matemática e da geometria.

Figura 1 – Gravura de Tales de Mileto



Fonte: (GEORGIA, 2016)

Para Eves (2008, p.94) "a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos sete sábios da antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a.C".

Tales começou sua vida como mercador, sua vida próspera no comércio permitiu que na parte final de sua vida pudesse dedicar-se aos estudos e viagens.

> A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filosofo – por acordo geral o primeiro dos sete sábios. Era considerado um "discípulo dos egípcios e caldeus", hipótese que parece plausível. A proposição agora conhecida como teorema de Tales – que um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto – pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia. No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso Tales foi frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro – originador da organização dedutiva da geometria. (BOYER, 1993, p. 34)

Para Bianchini, (2015, p.64), Tales foi o primeiro filósofo e geômetra da Grécia, acredita-se que ele tenha criado a geometria demonstrativa, acrescenta ainda que nenhum dos escritos de Tales tenha chegado até nós, o que dificulta precisar sua idade e suas descobertas matemáticas. “Muito do que sabemos vem do chamado Sumário Eudemiano[6], escrito pelo matemático, filosofo e comentarista grego Proclus (411- 485 d.C.)”.

De acordo com Eves (2008, p. 95) “Tales ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo”.

> Tales foi o primeiro a quem atribuem-se descobertas matemáticas. Segundo Tales, em geometria, temos os seguintes resultados elementares:
> 1.Qualquer diâmetro efetua a bisseção do círculo em que é traçado.
> 2.Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
> 3.Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
> 4.Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
> 5.Um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (Este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes).
> “O valor desses resultados não deve ser aquilatado por eles mesmos, mas antes pela crença de que Tales obteve-os mediante algum raciocínio lógico e não pela intuição ou experimentalmente.”. (EVES, 2008, p.95).

Segundo Gay (2014, p.94) “Conta-se que por volta de 600 a.C., Tales, em uma de suas viagens ao Egito, (figura 2), foi desafiado pelo faraó a calcular a medida da altura da pirâmide de Quéops”.[7]

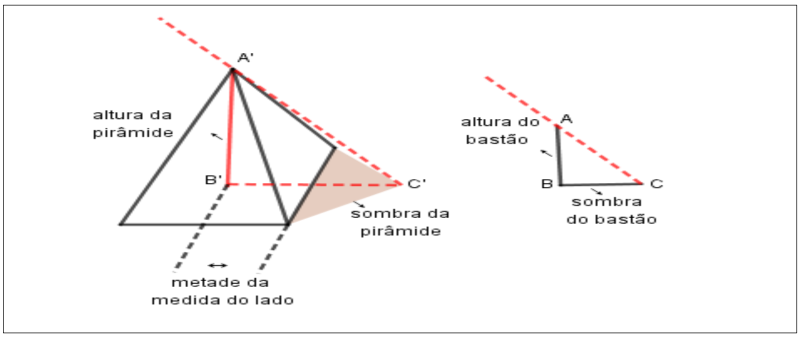
Figura 2 – Vista aérea da Pirâmide de Quéops.

Fonte: (DANTE, 2010, p. 160)

[6] Sumário Eudemiano é um breve resumo do desenvolvimento da geometria desde os primeiros tempos até a época de Euclides e é, ainda hoje, o principal registro histórico do início desta ciência na Grécia.
[7] A Pirâmide de **Quéops**, também conhecida como a Grande Pirâmide, é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesa em torno de 2,5 toneladas.Com mais de 146 metros de altura. < https://www.sohistoria.com.br/ef2/egito/piramides.php> acesso janeiro de 2019.

Em seguida, figura 3, vemos como foi o raciocínio de Tales:

Figura 3 – Esquema semelhante ao pensado por Tales.



Fonte: o autor

> Em um dia de sol, Tales observou que a pirâmide de base quadrada formava uma sombra. Nesse mesmo instante, fincou um bastão no chão e percebeu que ele também projetava uma sombra. Tales esperou até o momento em que a altura e a sombra do bastão tivessem a mesma medida e pediu a um de seus ajudantes que medisse imediatamente o comprimento da sombra e a medida do lado da pirâmide.
> Analisando as medidas encontradas e baseando-se no fato de os raios solares serem paralelos, o filosofo teve a ideia de fazer um esquema:
> Os triângulos A’B’C’ e ABC (figura 3) são semelhantes, pois têm um ângulo reto e os raios solares incidem com o mesmo ângulo sobre os objetos.
> Como os triângulos são semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais:
>
> $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$
>
> Portanto Tales concluiu que, como a medida da altura do bastão e a do comprimento da sua sombra eram iguais, a medida da altura da pirâmide era igual a medida do comprimento da sombra da pirâmide mais metade da medida do seu lado. (GAY, 2014, p.94)

3.1 TEOREMA DE TALES E SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NOS LIVROS DIDÁTICOS.

Neste trabalho além do livro que é adotado pela escola, Matemática Bianchini 9º ano, analisamos também outros dois, Praticando Matemática 9º ano e Projeto Araribá Matemática 9º ano, também aprovados pelo Programa nacional do livro didático (PNLD)[8] e selecionados como opções para ser adotado pela escola.

Num primeiro momento elencamos alguns itens importantes para o desenvolvimento dos conteúdos que iremos trabalhar. Como visto anteriormente neste trabalho é muito

---

[8] PNLD: programa nacional do livro didático.

importante que as atividades constantes no material estejam de tal forma que direcione o aluno para um aprendizado efetivo, para que isso ocorra os alunos devem ser instigados a conjecturar, formular hipóteses e verificar se suas soluções estão corretas.

Mas o que então deveria fazer parte do livro? A história da matemática é um fator importante na motivação dos alunos, pois ajuda a mostrar quanto ela foi e continuará sendo uma ferramenta que permite aos alunos conhecer a evolução do conhecimento, como as teorias são formuladas, como buscar solução para os problemas do nosso dia a dia.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, 1998, p.42)

Outro item a ser considerado são as demonstrações, pois pertencem a conceituação e Lima (1999), chama a atenção para a importância das demonstrações, “elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. No nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade”.

Aplicações são fundamentais pois relacionam o conteúdo aprendido com a realidade vivida dos alunos, tornando mais interessante e menos cansativo, do que só aplicar fórmulas que às vezes não faz sentido algum para o aluno.

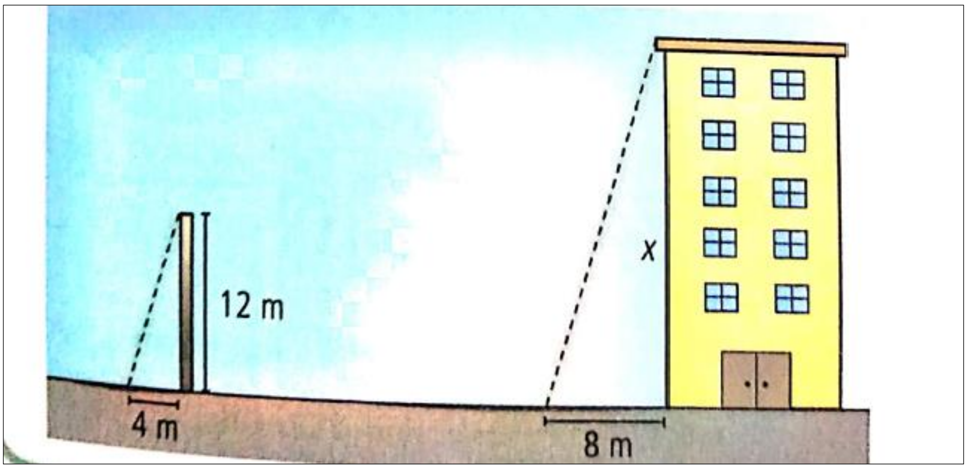
> As aplicações constituem, para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da Matemática que estudam. Se forem formuladas adequadamente, em termos realísticos, ligados a questões e fatos da vida atual, elas podem justificar o estudo, por vezes árido, de conceitos e manipulações, despertando o interesse da classe. (LIMA, 1999).

Também não menos importantes podemos destacar as atividades propostas e o uso das TIC, que exercem um papel importantíssimo no aprendizado.

Quanto as atividades, os livros analisados possuem muitos exercícios repetitivos, onde o aluno apenas aplica a fórmula e encontra a solução. Também trazem exercícios de aplicação, a maioria deles, exercícios que no nosso entendimento poderiam ser propostos na forma de práticas onde os próprios alunos fariam as medidas para montar a equação e chegar à solução. Tomemos como exemplo as atividades (figura 4 e figura 5), onde o aprendizado seria mais significativo se o aluno interagisse com o problema e não somente utilizasse as medidas já estabelecidas.

Exemplo 1: Um edifício projeta uma sombra de 8 m ao mesmo tempo que um poste de 12 m projeta uma sombra de 4 m. Qual é a altura do edifício, sabendo que o edifício e o poste são perpendiculares ao solo?

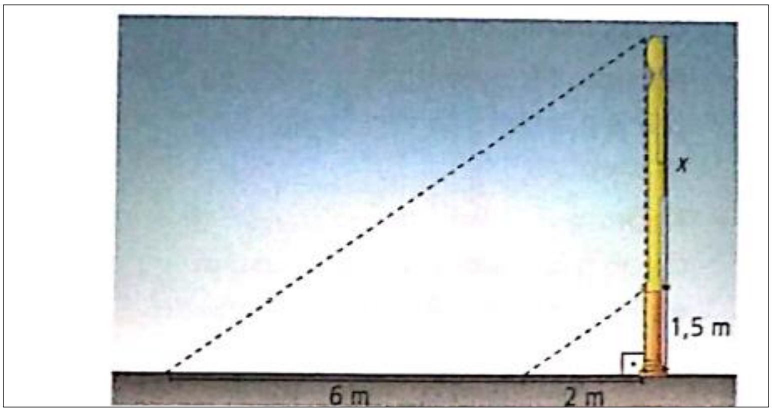
Figura 4 – Cálculo da altura do prédio.



Fonte: (ANDRINI, 2012, p. 175)

Exemplo 2: Qual é a altura de uma estátua que projeta uma sombra de 6 m, sabendo-se que seu pedestal de 1,5 m projeta uma sombra de 2 m?

Figura 5 – Altura da escultura

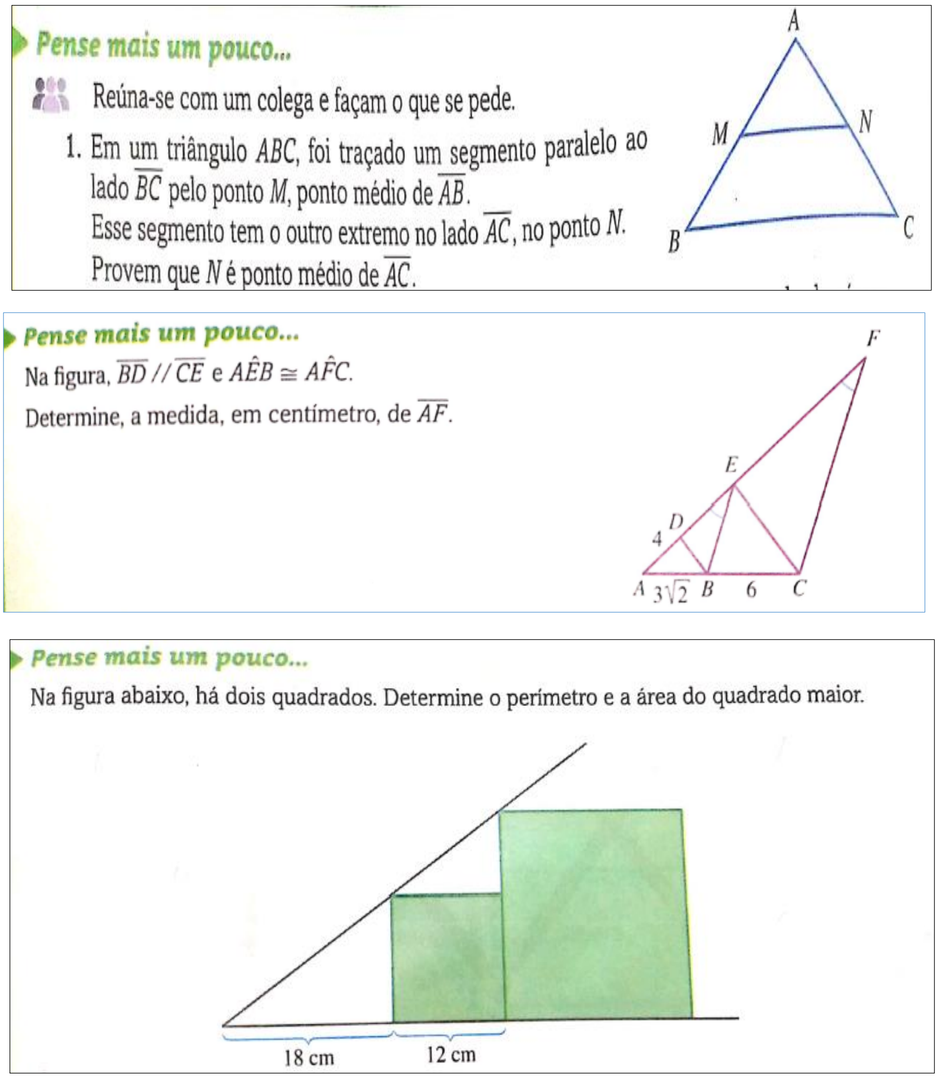


Fonte: (ANDRINI, 2012, p. 175)

Esse tipo de fato ocorre em todos os livros analisados, claro que eles também são importantes, mas devemos sempre que possível, tornar o aluno protagonista do seu aprendizado, e uma maneira para que isso ocorra é aproveitar essas oportunidades para que ele, através das práticas construam o seu conhecimento.

Em Bianchini (2015), figura 6, encontramos a seção "Pense mais um pouco...", que ao nosso ver, faz o aluno interagir e exercitar o pensamento geométrico. Nela o autor propõe problemas não convencionais em que o aluno precisa demonstrar seus conhecimentos e habilidades adquiridas do conteúdo visto, são questões em que juntamente com a técnica de resolução de problemas torna mais interessante o aprendizado.

Figura 6 – Exemplos da seção Pense mais um pouco.



Fonte: (BIANCHINI, 2015, p.54, p.63, p.71)

Porém em relação as TIC nenhum dos livros analisados fez menção, o que acreditamos ser uma falha, pois tratam-se de livros aprovados pelo PNLD e os PCN determinam que as TIC façam parte dos conteúdos presentes no livro didático "O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática" (BRASIL, 1998, p.43)

Para um melhor entendimento, o quadro abaixo é uma síntese do relato feito acima, a análise feita refere-se apenas aos tópicos de Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos.

Quadro 1 – Comparativo entre os livros didáticos analisados.

Livros / Itens Analisados	Matemática Bianchini		Projeto Araribá Matemática		Praticando Matemática	
	Apresenta	Não apresenta	Apresenta	Não apresenta	Apresenta	Não apresenta
História da matemática	X		X		X	
Demonstração Teorema de Tales	X		X		X	
Demonstrações dos casos de Semelhança de triângulos		X		X	X	
Exercícios mecânicos	X		X		X	
Aplicações	X		X		X	
Problemas		X		X	X	
Atividades diversificadas fora da sala de aula		X		X		X
Uso de TIC		X		X		X

Fonte: o autor

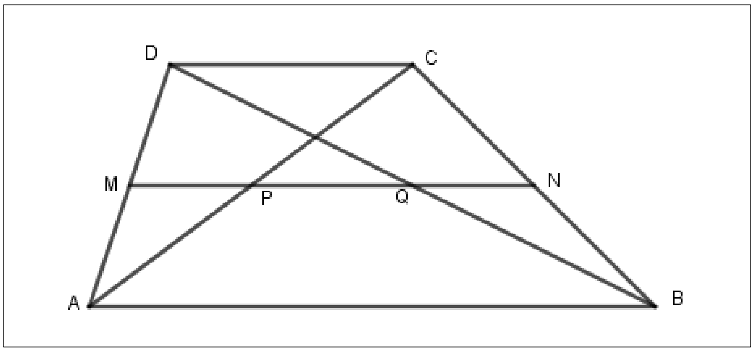
3.2 TEOREMA DE TALES

Nesta seção vamos apresentar e demonstrar o Teorema de Tales. A referência utilizada é (NETO, 2013).

Para a demonstração do Teorema de Tales, precisaremos do seguinte resultado, conhecido como Teorema da Base Média do Trapézio, (figura 7) cuja demonstração pode ser encontrada em (NETO,2013, p.74).

Proposição: Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB e CD e lados não paralelos AD e BC. Sejam, ainda, M e N os pontos médios dos lados não paralelos AD e BC, respectivamente, e P e Q os pontos médios das diagonais AC e BD, também respectivamente, então:

Figura 7 – Teorema da Base Média do Trapézio.



Fonte: o autor

(a) M, N, P e Q são colineares e $\overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$.

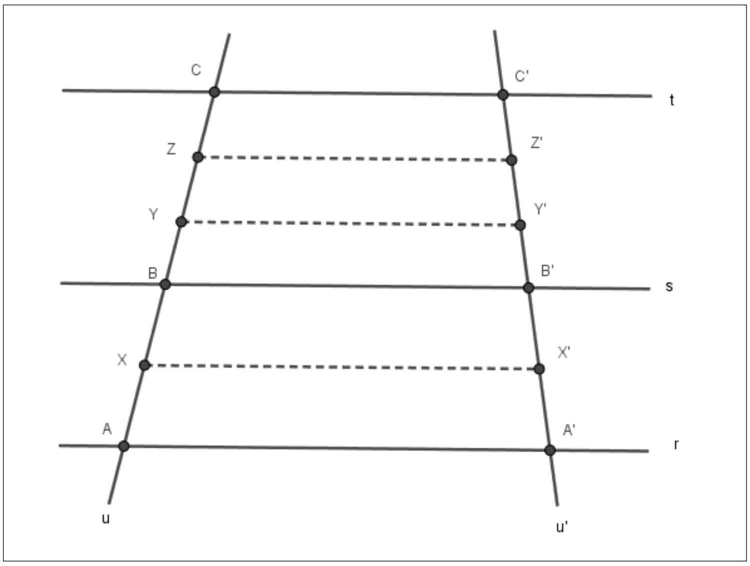
(b) $\overline{MN} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} - \overline{CD}\right|$

Consideremos a seguinte situação: temos, no plano, retas paralelas r, s e t. Traçamos, em seguida, retas u e u', a primeira intersectando r, s e t respectivamente nos pontos A, B e C, e a segunda intersectando r, s e t respectivamente em A', B' e C'.

Se tivermos $\overline{AB} = \overline{BC}$, então, pelo teorema da base média de um trapézio teremos que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Dessa forma, já sabemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = 1.$$

Figura 8 - Retas paralelas cortadas por transversais.



Fonte: o autor

Suponha, agora, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ seja um número racional, digamos $\frac{2}{3}$. Dividamos, então, os segmentos AB e BC respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo pontos X, Y e Z em u, tais que $\overline{AX} = \overline{XB} = \overline{BY} = \overline{YZ} = \overline{ZC}$.

Se traçarmos por X, Y e Z paralelas às retas r, s e t, as quais intersectam u' respectivamente em X', Y' e Z', então mais três aplicações do teorema da base média de um trapézio garantem que $\overline{A'X'} = \overline{X'B'} = \overline{B'Y'} = \overline{Y'Z'} = \overline{Z'C'}$ e, dai,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2}{3}.$$

Suponha, agora, que fosse $\frac{\overline{AB}}{BC} = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Então dividindo inicialmente AB e BC em m e em n partes iguais, respectivamente garantiria que $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{m}{n}$, assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{B'C'} = \frac{m}{n}.$$

De outra forma concluímos que a relação $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, é válida sempre que o primeiro ou o segundo membro for um número racional.

Precisamos verificar se a igualdade das razões acima se mantém quando um dos membros da mesma for um número irracional. A resposta é sim, para entender utilizaremos o seguinte fato: dado $x \in R$ e $n \in \mathbb{N}$, existe $a \in \mathbb{Q}$ tal que $x < a < x + \frac{1}{n}$.

Suponha que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$, com x irracional. Escolha uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ de racionais positivos, tal que $x < a_n < x + \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em seguida marque o ponto $C_n \in u$ tal que

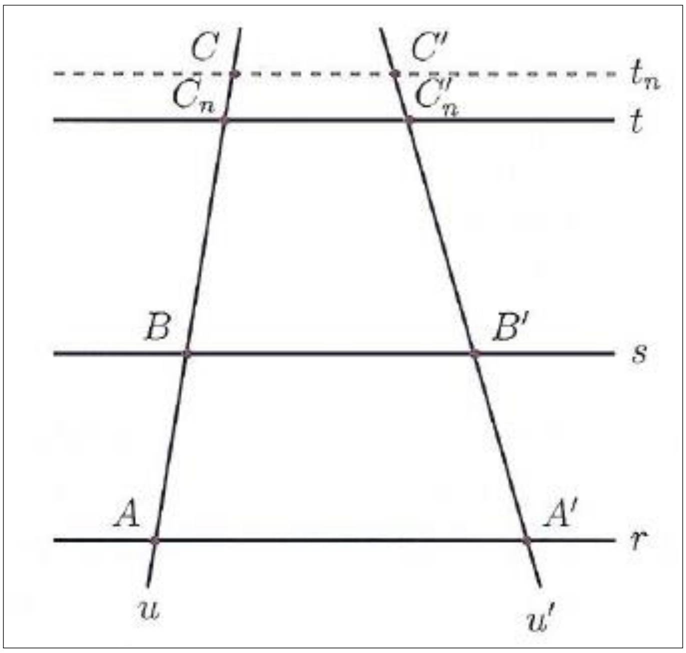
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} = a_n$$

Seja t_n a reta paralela às retas r, s e t traçada por C_n e C'_n o ponto onde t_n intersecta u'.

Como $a_n \in \mathbb{Q}$, um argumento análogo ao anterior garante que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} = a_n$$

Figura 9 - Razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ irracional



Fonte: (NETO, 2013, p.140).

De outra forma, obtivemos que

$$x < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < x + \frac{1}{n}$$

Ou, ainda

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}$$

Então as desigualdades do primeiro membro acima garantem que, a medida que n aumenta, os pontos C_n aproximam-se cada vez mais do ponto C. Mas, como $t_n // t$, segue então que os

pontos C'_n aproximam-se mais e mais do ponto C', de maneira que a razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}}$ aproxima-se mais e mais da razão $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, escrevendo

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ quando } n \to +\infty$$

Por outro lado, utilizando notação análoga à da linha acima, podemos concluir, a partir da desigualdade do segundo membro

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + \frac{1}{n}, \text{ que}$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'_n}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{ quando } n \to +\infty$$

Utilizando o fato de que uma sequência de reais não pode aproximar-se simultaneamente de dois reais distintos quando $n \to +\infty$ concluímos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

A discussão acima provou um dos resultados fundamentais da Geometria euclidiana plana.

Teorema de Tales. Sejam r, s e t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, A' \in r, B, B' \in s$ e $C, C' \in t$, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

Abordaremos as definições e resultados sobre semelhança e homotetia de acordo com os livros Matemática Bianchini (2015) e Medidas e Formas Geométricas (LIMA, 1991).

3.2.1 Definição de Semelhança

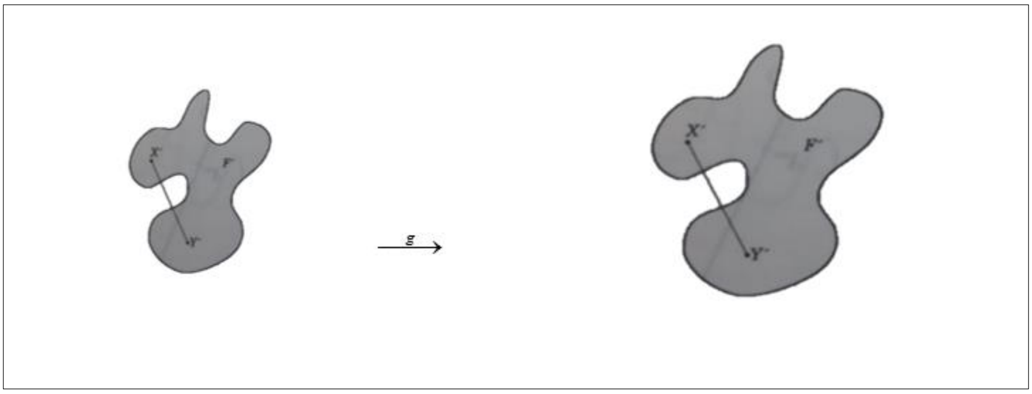
Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $g: F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade:

Se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = g(X)$, $Y' = g(Y)$ são seus correspondentes em F' então $\overline{X'Y'} = \text{r} \, . \, \overline{XY}$.

A correspondência biunívoca $g: F \to F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r, chama-se uma semelhança de razão r entre F e F'.

Se $X' = g(X)$, diz-se que os pontos X e X' (figura 10) são homólogos.

Figura 10 – Ilustração da definição de semelhança



Fonte: (LIMA, 1991, p.33)

Evidentemente, toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $g: F \to F'$ é uma semelhança de razão 1.

Também, se F é semelhante a F ’ então F ’ é semelhante a F pois, dada uma semelhança $g:F \rightarrow F'$ de razão r, a função inversa $g^{-1}:F \rightarrow F'$ é uma semelhança de razão 1/r.

Tem-se ainda transitividade: se F é semelhante a F ’ e F ’ é semelhante a F ’’ então F é semelhante a F ’’. Com efeito, se $g:F \rightarrow F'$ e $g':F' \rightarrow F''$ são semelhanças, de razão r e r’ respectivamente, então a função composta $g'og:F \rightarrow F''$ é uma semelhança de razão r.r’.

Uma semelhança de razão 1 chama-se uma isometria[9]. Portanto, uma isometria $g:F \rightarrow F'$ é uma correspondência biunívoca tal que, para quaisquer pontos X, Y em F, a distância de $X'=g(X)$ a $Y'=g(Y)$ é igual à distância de X a Y.

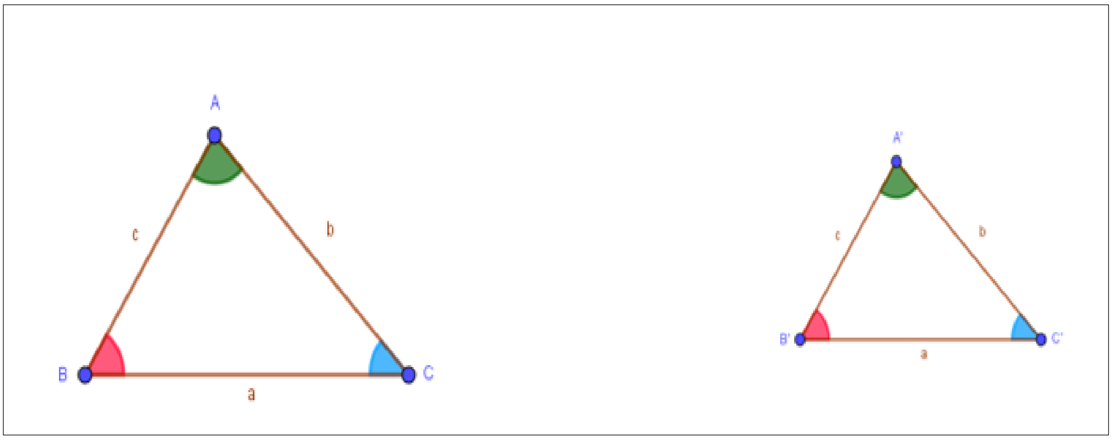
Quando existe uma isometria entre as figuras F e F ’, diz-se que estas são congruentes.

3.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando satisfazem ao mesmo tempo as duas condições: os lados correspondentes têm medidas proporcionais e os ângulos internos correspondentes são congruentes. (Figura 11)

Observe os triângulos ABC e A’B’C’:

Figura 11 – Triângulos semelhantes.



Fonte: o autor

[9] Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre pontos.

ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são semelhantes e indicamos assim;

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C',$$

pois:

*os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{A}', \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'$$

*os lados correspondentes são proporcionais:

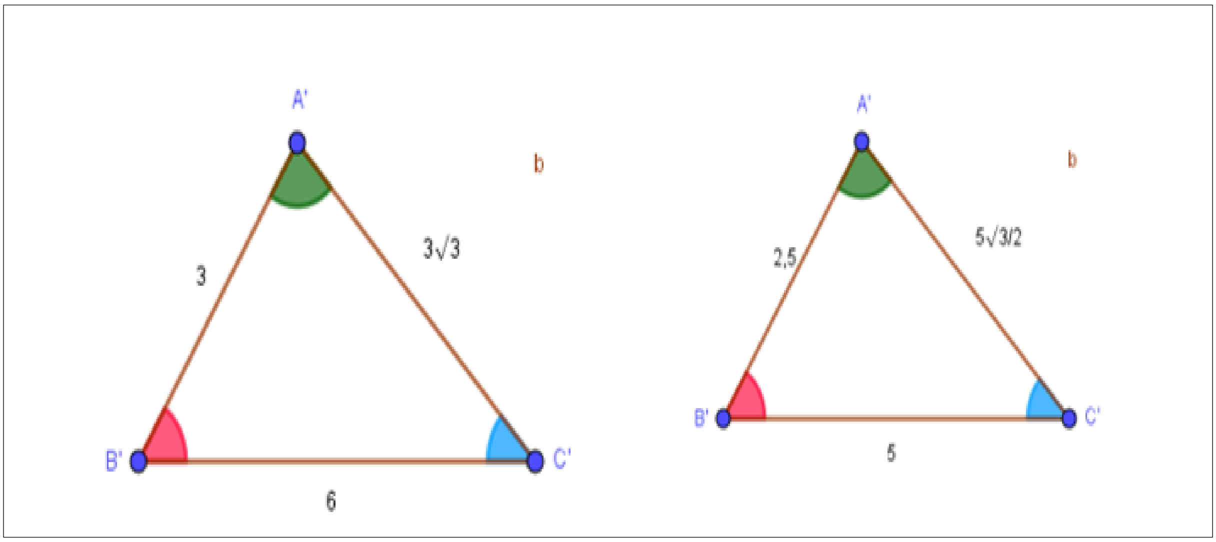
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \text{ (Razão de semelhança)}$$

Portanto: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$

OBS: Se dois triângulos são semelhantes com razão de semelhança K, então quaisquer elementos lineares homólogos desses triângulos (altura, perímetro, mediana, etc.) também serão proporcionais com razão K (figura 12).

Exemplo:

Figura 12 – Exemplo para o cálculo numérico da razão de semelhança.



Fonte: o autor

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K \Rightarrow \frac{3}{2{,}5} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{5} \text{(Razão de semelhança)}$$

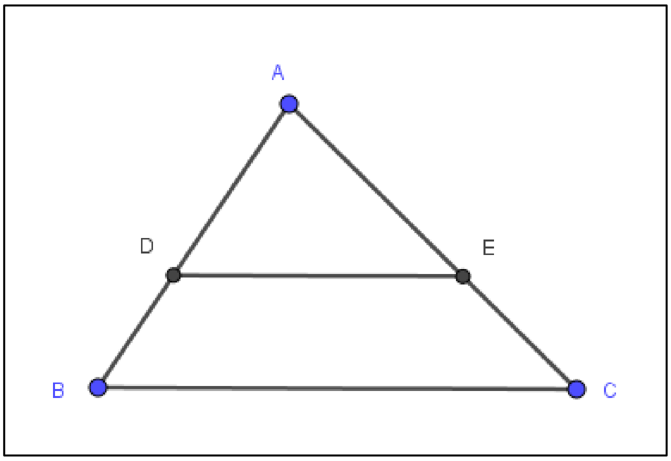
3.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA

Como consequência do Teorema de Tales obtemos o seguinte teorema.

Teorema. Toda reta paralela a um lado de um triângulo que cruza os outros lados em dois pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Observe (figura 13), a seguir, em que $\overline{DE} // \overline{BC}$

Figura 13 – Ilustração para a demonstração da semelhança de triângulos.



Fonte: o autor

Demonstração: De acordo com a figura 13, vamos provar que os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

Hipótese: $\overline{DE} // \overline{BC}$

Tese: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

* traçamos $\overline{EF}$ // $\overline{AB}$ (figura 13)

* temos que $\overline{DE}//\overline{BC}$, por hipótese. Logo, pelo Teorema de Tales

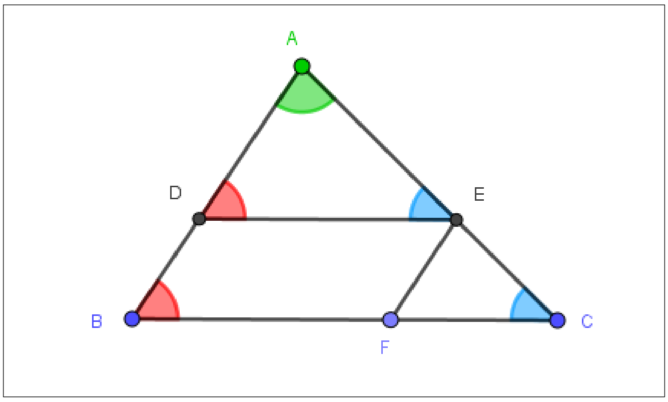
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

* $\hat{A} \cong \hat{A}$ (ângulo comum)

*$\hat{B} \cong \hat{D}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

*$\hat{C} \cong \hat{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

Figura 14 – Ilustração II para a demonstração da semelhança de triângulos.



Fonte: o autor

Novamente pelo Teorema de Tales temos (figura 14)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

* $\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

Juntamente com os resultados anteriores, obtém-se

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Portanto,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = K \quad \text{(Razão de semelhança)}$$

Logo.

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC,$$

ou seja, são triângulos semelhantes.

Para saber se dois triângulos são semelhantes basta verificar alguns de seus elementos específicos, ou seja, ao verificar apenas algumas informações sobre dois triângulos podemos garantir a semelhança entre eles. Isso é consequência dos casos de semelhança de triângulos que abordaremos a seguir.

3.4.1 Caso AA (ângulo-ângulo)

Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um são congruentes a dois ângulos do outro. (Figura 15)

Vamos mostrar que:

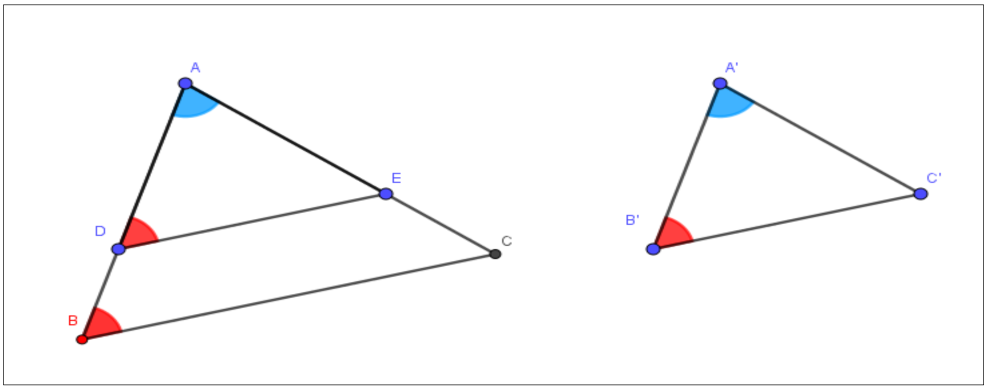
Se ΔABC e $\Delta A'B'C'$ tem $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$, então

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Hipótese$\begin{cases} \hat{A} \cong \widehat{A'} \\ \hat{B} \cong \widehat{B'} \end{cases}$

Tese $\{ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Figura 15 – Ilustração do caso de semelhança (AA).



Fonte: o autor

1º CASO:

Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ pelo caso ALA de congruência de triângulos temos que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ e dai $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, pois dois triângulos congruentes são semelhantes com razão de semelhança 1

2º CASO:

*Se $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$, vamos analisar $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Marcamos sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que

$$\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$$

Por D traçamos $\overline{DE} // \overline{BC}$. Assim temos:

*$\hat{B} \cong \hat{D}$, ângulos correspondentes em retas paralelas.

* $\hat{A} \cong \hat{A}'$, por hipótese

* $\hat{D} \cong \hat{B}$, pois $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e $\hat{D} \cong \hat{B}$., logo, os triângulos ADE e A’B’C’ são congruentes pelo caso ALA.

Temos também, pelo teorema fundamental da semelhança que

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

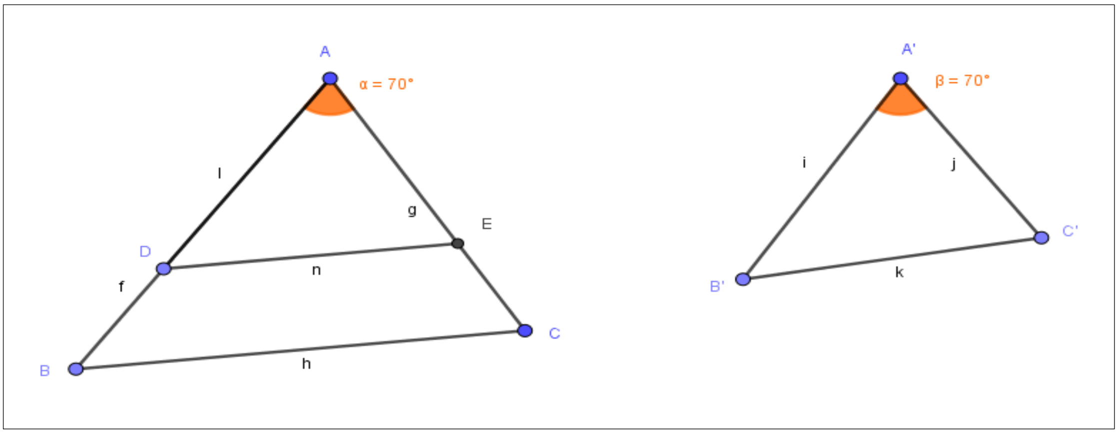
Assim, com $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ e $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$, então

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3.4.2 Caso LAL (lado-ângulo-lado)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes. (Figura 16)

Figura 16 – Desenho do caso de semelhança (LAL)



Fonte: o autor

*Vamos supor que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$

Hipótese: $\begin{cases} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{cases}$

$\{\hat{A} \cong \hat{A}'$

*Marcamos sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D traçamos $\overline{DE} \mathbin{//} \overline{BC}$

Pelo teorema fundamental da semelhança

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

*Vamos mostrar que $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$.

*Temos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, por construção e $\hat{A} \cong \widehat{A'}$, por hipótese

Provaremos que

$$\overline{AE} \cong \overline{A'C'}.$$

Da conclusão acima $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

ou ainda

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{AE},$$

pois

$$\overline{AD} \cong \overline{A'B'}.$$

Comparando $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ com $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ (hipótese), e usando os fatos que

$\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$, então $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$ e $\hat{A} \cong \widehat{A'}$.

Logo:

$$\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$$

pelo caso LAL de congruência de triângulos.

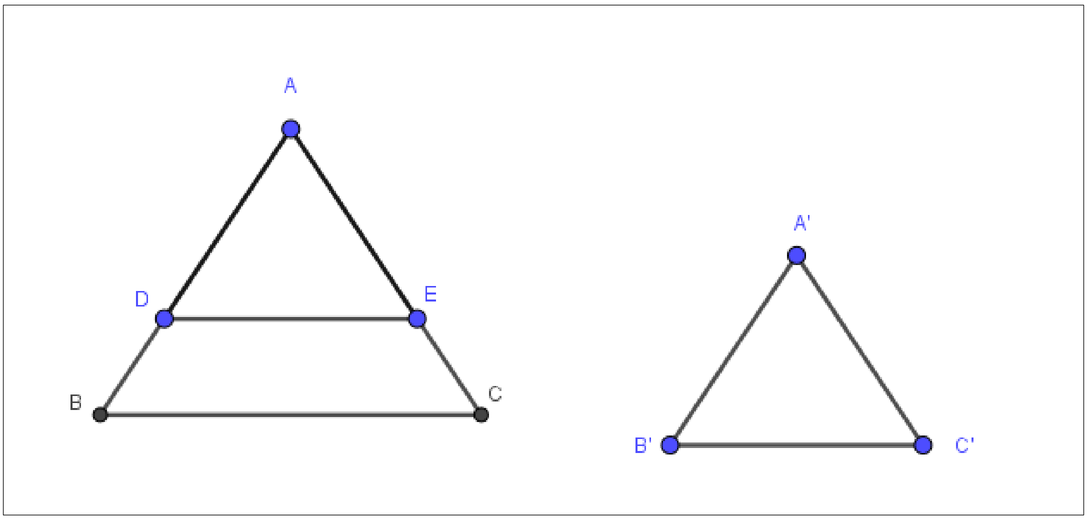
Se $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ e $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$, então

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

3.4.3 Caso LLL (lado-lado-lado)

Se dois triângulos tem os três lados correspondentes e proporcionais, então esses triângulos são semelhantes. (Figura 17)

Figura 17 – Desenho ilustrativo para o caso (LLL).



Fonte: o autor

Hipótese: $\left\{ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \right.$

Tese: $\{ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Vamos demonstrar que

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Supondo que $AB > A'B'$, devemos marcar sobre $\overline{AB}$ um ponto D, tal que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Por D traçamos $\overline{DE} // \overline{BC}$.

Pelo teorema fundamental da semelhança

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

Vamos mostrar que $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$, por (LLL).

Sabemos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, por construção.

Resta provar que

$$\overline{AE} \cong \overline{A'C'} \text{ e que } \overline{DE} \cong \overline{B'C'}.$$

Da conclusão acima $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \text{ ou ainda, } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \text{ pois } \overline{AD} \cong \overline{A'B'}.$$

Comparando $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (hipótese), temos $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}, \text{ ou ainda } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}, \text{ pois } \overline{AD} \cong \overline{A'B'}.$$

Comparando $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE}$, com $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ (hipótese), temos que

$$\overline{DE} \cong \overline{B'C'}.$$

Então

$$\overline{AD} \cong \overline{A'B'},\ \overline{AE} \cong \overline{A'C'} \text{ e } \overline{DE} \cong \overline{B'C'}.$$

Logo $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$,por (LLL).

Como $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ e $\Delta ADE \cong \Delta A'B'C'$, então

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

3.5 HOMOTETIA

A homotetia[10] é uma transformação geométrica que mantém a forma da figura original, mas não necessariamente seu tamanho. Assim, a figura original e a figura obtida por homotetia são semelhantes.

Sejam O um ponto do plano Π (ou do espaço E) e r um número real positivo. A homotetia de centro O e razão r é a função $g:\Pi \to \Pi$ (ou $g: E \to E$) definida do seguinte modo: $g(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$, $g(X) = X'$ é o ponto da semirreta OX tal que $\overline{OX'} =$ r $\overline{OX}$.

[10] A homotetia é um tipo de transformação geométrica que ficou em segundo plano quando o assunto era semelhança de figuras. Todavia, ela é uma forte aliada para a ampliação ou redução de figuras geométricas. Em geral, quando se aplica a homotetia em algum desenho, as características principais, como a forma e os ângulos, são preservadas; mas o tamanho da figura sofre alterações. Essa relação pode ser explicada através da derivação grega da palavra homotetia, em que ***homós*** significa **igual**, e ***thetós*, colocado**, isto é, as figuras homotéticas são colocadas a uma distância igual a “algo”. Máquinas copiadoras que fazem ampliações ou reduções geralmente utilizam a homotetia como princípio em seu funcionamento. (RIBEIRO, A.G.)

Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma.

Toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão 1/r.

Duas figuras F e F ’ chamam-se homotéticas quando existe uma homotetia g tal que $g(F) = F'$.

Numa homotetia, os pontos O, X e X ’ são sempre colineares, nesta ordem se r > 1 ou na ordem O, X ’ e X se 0 < r < 1. Já numa semelhança as figuras F e F ’ podem ocupar posições quaisquer como numa foto e sua ampliação, que podem ser colocadas em vários lugares mas continuam semelhantes.

Em uma transformação por homotetia, em função do valor de r, pode-se ter:

→ r > 1, OX ’ será maior que OX e a figura terá a sua imagem ampliada.

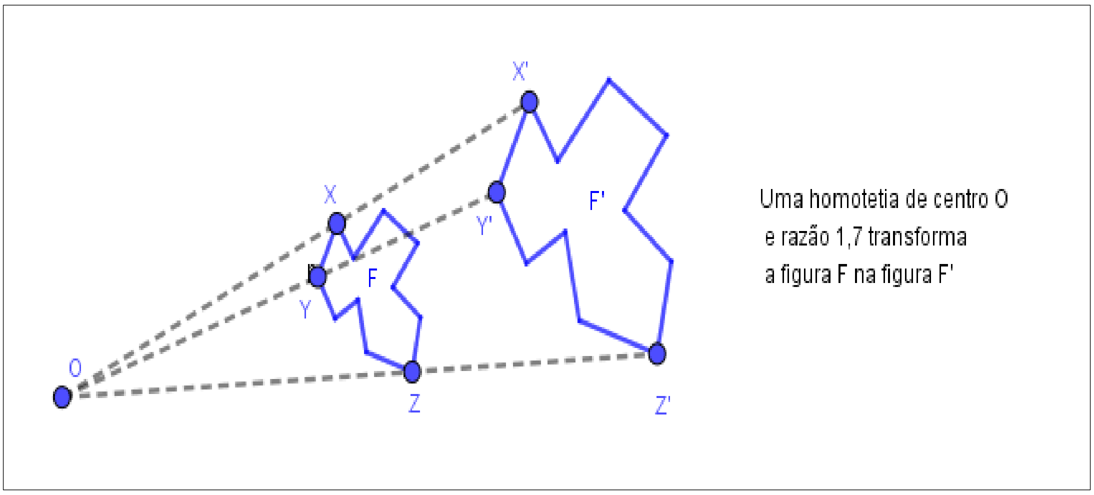
→ r = 1, OX ’ será igual a OX, logo a figura e a imagem serão coincidentes.

→ 0 < r < 1, OX ’ será menor que OX e a imagem da figura reduzida.

→ r < 0, terá a imagem ampliada ou reduzida seguindo as mesmas características anteriores de acordo com o modulo de r, com um giro na imagem.

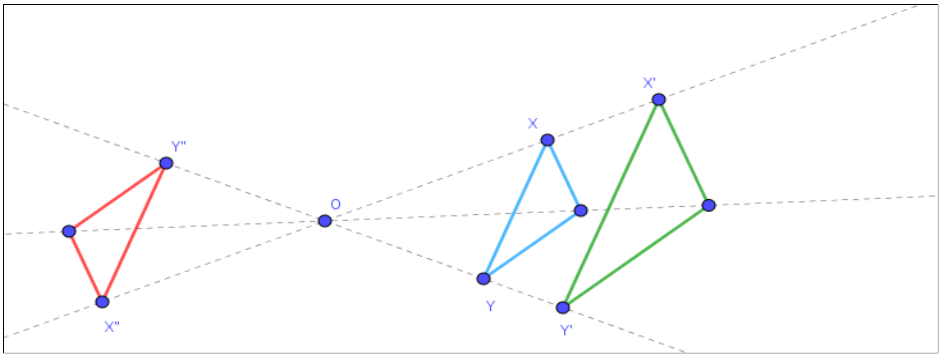
→ $r \neq 0$, pois se r = 0 não existe imagem.

Figura 18 – Homotetia com centro e razão dada.



Fonte: o autor

Figura 19 – Homotetias.



Fonte: o autor

Em uma homotetia as características principais, como a forma e os ângulos, são preservadas; mas o tamanho da figura sofre alterações (figura 18) e quando a razão é negativa além de sofrer alterações ocorre um giro na imagem (figura 19).

4 A PROPOSTA

O presente trabalho foi realizado em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental Princesa Isabel no município de Tucunduva, no estado do Rio Grande do Sul. As atividades foram realizadas no terceiro trimestre do ano de 2018, pois o conteúdo estava definido para este período do ano letivo.

Durante o turno normal das aulas os alunos tiveram o conteúdo teórico e no contra turno foram realizadas as práticas propostas neste trabalho. A opção por realizar as práticas no contraturno, deu-se pela falta de tempo, tendo em vista que este conteúdo está no final do programa para esta série.

A escola possui alunos do sexto ao nono ano do ensino fundamental, sendo a única escola estadual do município que atende alunos nesta fase de ensino. A estrutura é boa, todas as salas são climatizadas e possuem projetor multimídia. Possui um laboratório de informática com computadores suficientes para todos os alunos.

A referida turma tem um aluno com necessidades especiais, possuindo 25 alunos, por força de lei. Por ser uma turma do turno da tarde, são alunos oriundos da área urbana pois no turno da manhã é dada a preferência a alunos da área rural que dependem do transporte escolar para chegar até a escola.

A escola recebe o livro didático distribuído pelo MEC, disponível no Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), sendo assim utilizado o livro BIANCHINI, E.; Matemática Bianchini – 9º ano**.** 8ª edição. Editora Moderna, 2015.

No trabalho realizado foi optado por utilizar tal livro, pois constatamos que, em parte, coincide com a proposta apresentada. O livro citado apresenta atividades em que o aluno precisa pensar na solução, que vem de encontro com o que pensamos e podemos utilizar o método de resolução de problemas, assim intercalou-se o uso do livro com materiais de outras fontes, como o site disponibilizado pela OBMEP – Portal da Matemática[11], além de materiais próprios.

Utilizamos a técnica de resolução de problemas, tendo como base o método desenvolvido por George Polya (POLYA, 2006) e recomendado nos PCN.

Temos como objetivo aplicar os conhecimentos de semelhança de triângulos ao cálculo de distâncias inacessíveis utilizando técnicas variadas. Para que isso fosse possível era necessário que os alunos tivessem conhecimento do Teorema de Tales, Teorema Fundamental da Semelhança e dos casos de semelhança de triângulos.

[11] disponível em <https://portaldosaber.obmep.org.br/>

Os trabalhos foram realizados em momentos distintos:

1º momento: Para iniciar os trabalhos os alunos responderam um questionário (Apêndice A) para avaliar qual o grau de conhecimento que possuíam sobre definições básicas de geometria. As questões eram dissertativas para que pudéssemos avaliar o entendimento que possuíam.

O questionário utilizado, era composto de perguntas nas quais os alunos deveriam responder o que entendem por: reta, segmento de reta, retas paralelas, polígono, triângulo, figuras semelhantes, triângulos semelhantes, altura do triângulo, cevianas e ângulos.

Após essa sondagem, sabendo do conhecimento apresentado pelos alunos, iniciamos a introdução do conteúdo, semelhança de triângulos, apresentando a história de Tales de Mileto, destacando a parte em que Tales, a pedido do Faraó determina a altura da pirâmide de Quéops, utilizando a sombra da pirâmide, uma estaca e a semelhança de triângulos. Assim os alunos tiveram conhecimento da história e de alguns fatos curiosos sobre a vida de Tales de Mileto.

Nesta etapa, com o auxílio do livro didático, os alunos tiveram o primeiro contato com os teoremas e suas demonstrações que foram desenvolvidos no quadro com o apoio do software GeoGebra. Após as explicações os alunos resolveram atividades do livro didático.

Finalizado este momento aplicamos uma avaliação para verificar qual o entendimento que possuem sobre semelhança de triângulos.

A avaliação era composta de três questões em que o aluno deveria resolver e justificar suas respostas.

Na aula seguinte, no laboratório de informática, desenvolvemos uma atividade, em que os alunos construíram triângulos e seguindo um roteiro, determinaram se eram ou não semelhantes utilizando os casos de semelhança vistos anteriormente. (Atividade apresentada no relato da experiência).

2º momento: no turno inverso fomos ao pátio para aplicar na prática, com situações reais, os teoremas vistos na aula anterior.

O objetivo do trabalho vai além de medir alturas. Com o uso de semelhança vamos medir distâncias que não temos acesso por existir um obstáculo, por exemplo um rio, uma montanha.

Nesse momento foram apresentadas aos alunos outras técnicas que também poderiam ser utilizadas para determinar estas distâncias incessíveis, como por exemplo:

- Determinar a altura utilizando um triângulo retângulo isósceles,
- Com uma fotografia, usar a razão entre a altura real do aluno e a altura medida na foto e a altura do objeto na foto, para montar uma proporção e determinar a altura real do objeto.

- Com o uso de triângulos semelhantes simular que a quadra de voleibol da escola seria um rio e calcular a sua largura. Os alunos foram divididos em pequenos grupos e cada grupo coletou os dados para determinar a altura de um objeto utilizando técnicas diferentes. Como a turma possuía 25 alunos foram divididos em 5 grupos de 5 alunos.

Após terminada a etapa das atividades práticas, realizamos com os alunos outro teste a fim de verificar se houve evolução nos conceitos e na forma de argumentar os resultados. Os testes feitos serviram para avaliarmos o desempenho dos alunos no decorrer da atividade

A avaliação foi realizada em todas as etapas, observando as atividades desenvolvidas na sala de aula, durante as práticas realizadas no pátio da escola e no laboratório de informática e também através dos testes realizados.

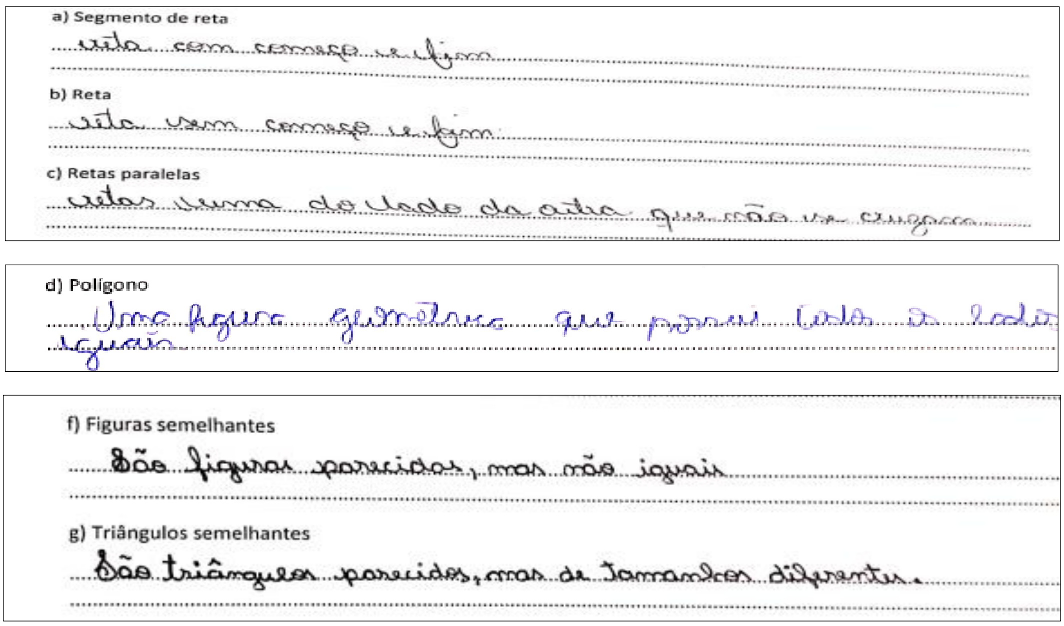
5 RELATO DA EXPERIÊNCIA

As aulas ocorreram durante o ano letivo, na ordem em que estavam no plano de estudo da série. O plano de estudo não segue a ordem em que os conteúdos estão no livro, pois no livro, o conteúdo está no capítulo 2. O que vem ao encontro do que diz Lorenzato (1995), sobre o estudo da geometria, “quase sempre ela é apresentada no final e acaba por não ser estudada por falta de tempo”.

Esse foi um dos motivos pelo qual as aulas foram tão perto do final do ano, nos obrigando a utilizar períodos do turno inverso. Durante toda a experiência as aulas ministradas foram no recinto da escola: sala de aula, laboratório de informática e pátio.

Após apresentada a proposta para os alunos foi feita a aplicação de um questionário, (Apêndice A) para ver o quanto sabiam dos conceitos básicos de geometria, como noção de semelhança de figuras, conceito de retas paralelas, que necessitaríamos naquele momento. Após analisar as respostas percebemos que os alunos possuíam muitas lacunas em relação aos conhecimentos básicos de geometria pedidos no questionário, apresentavam dificuldades com a linguagem matemática como pode ser visto na figura 20, e a grande maioria tinha a noção intuitiva dos conceitos mas não conseguia expressá-los corretamente de forma precisa, levando-nos a fazer uma “revisão” desses conceitos para depois iniciarmos com o conteúdo programado.

Figura 20 – Respostas dadas pelos alunos no questionário do Apêndice A.


a) Segmento de reta
reta com comesso e fim
b) Reta
reta sem comesso e fim
c) Retas paralelas
retas uma do lado da outra que não se cruzam
d) Polígono
Uma figura geometrica que possui lado a lado iguais
f) Figuras semelhantes
São figuras parecidas, mas não iguais
g) Triângulos semelhantes
São triângulos parecidos, mas de tamanhos diferentes.

Fonte: o autor

Na figura 20 podemos perceber que os alunos não tinham o domínio correto das definições e sim uma noção intuitiva do que são retas paralelas, figuras semelhantes e outros conceitos importantes que necessitaríamos.

Então devido ao resultado do questionário (Apêndice A), o planejamento teve que ser mudado e iniciamos com uma pequena revisão de conceitos, para em seguida abordarmos o conteúdo de semelhança de triângulos. Depois da revisão, apresentamos o Teorema Fundamental da Semelhança, demonstração e exemplos, seguido de algumas atividades.

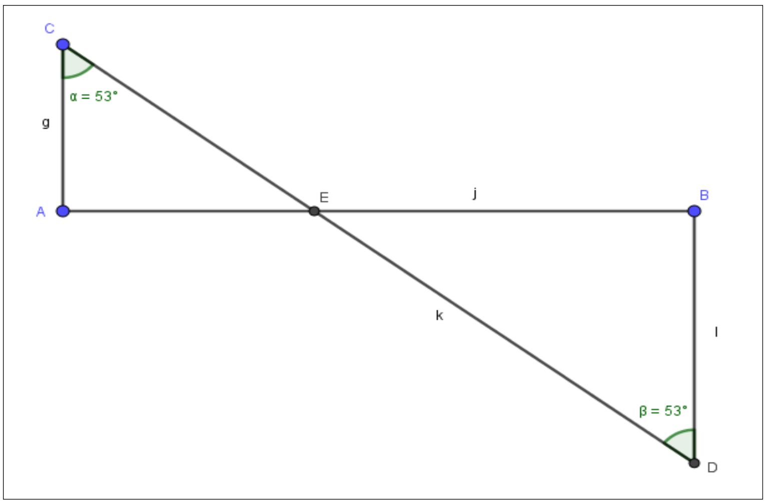
Após as demonstrações, que os alunos não estavam acostumados a ver, passamos para alguns exemplos, e pude perceber que só então os alunos estavam mais confortáveis em relação ao conteúdo.

Procedendo da mesma forma, vimos os casos de semelhança, (vistos no referencial teórico), e algumas atividades pontuais para que houvesse uma melhor assimilação do conteúdo.

Os alunos mostraram-se interessados pelo conteúdo, e a cada atividade proposta surgiam novas perguntas. Como a atividade abaixo:

Exercício 1: Os triângulos ΔACE e ΔBDE (figura 21), são semelhantes? Justifique sua resposta.

Figura 21 – Desenho do triângulo do exercício 1.

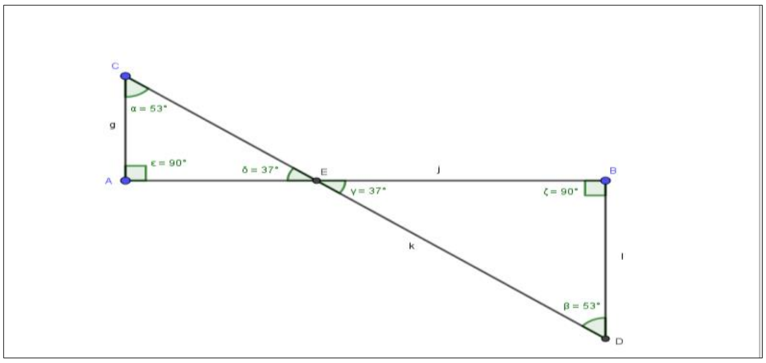


Fonte: o autor

Nesta atividade os alunos deveriam justificar que os triângulos eram semelhantes por possuírem dois ângulos correspondentes iguais. Os ângulos $A\hat{E}C = B\hat{E}D$ são opostos pelo vértice, possuindo assim dois ângulos correspondentes iguais

Após cada atividade é feita a verificação. A figura é construída e utilizando as ferramentas disponíveis no GeoGebra (figura 22) medimos todos os ângulos, e utilizando as propriedades de semelhança de triângulos é possível verificar que os ângulos possuem a mesma medida, assim concluir que são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo.

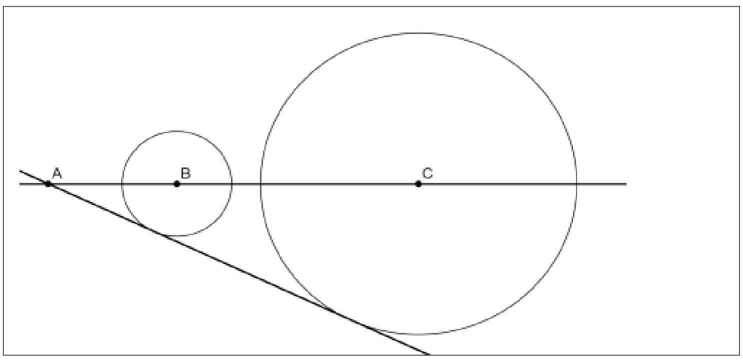
Figura 22 – Verificação no GeoGebra do resultado do exercício 1.



Fonte: 0 autor

2) Na figura 23, temos uma reta que passa pelos pontos A, B e C e outra que passa por A e é tangente as circunferências de centros B e C e raios 3cm e 5cm. Se AB = 7cm, determine BC.

Figura 23 – Exercício 2 proposto no portal da matemática (OBMEP).



Fonte: Portal da matemática (OBMEP).

Temos que ΔABD e ΔACE (figura 23) são triângulos semelhantes, como $AB = 7$ e chamando a distância $BC = x$, aplicando a razão de semelhança, e sabendo que o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência, então:

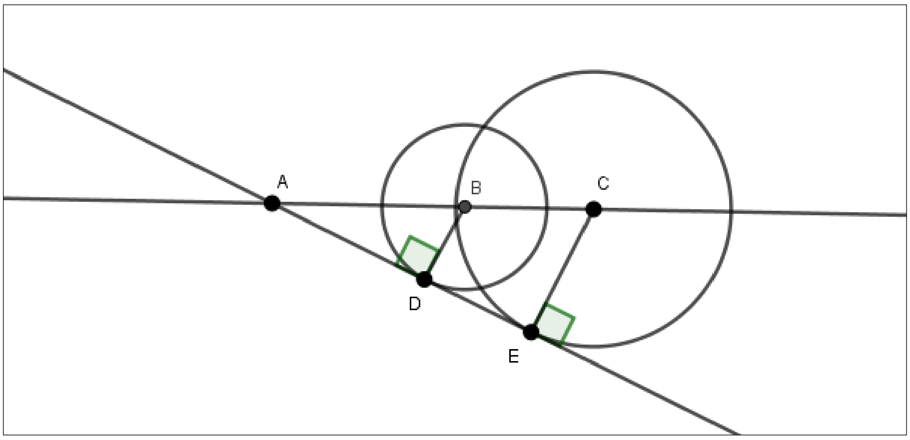
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{7+x}{5}$$

$$21 + 3x = 35$$

$$x = \frac{14}{3}.$$

Figura 24 – Verificação feita no GeoGebra da solução do exercício 2.



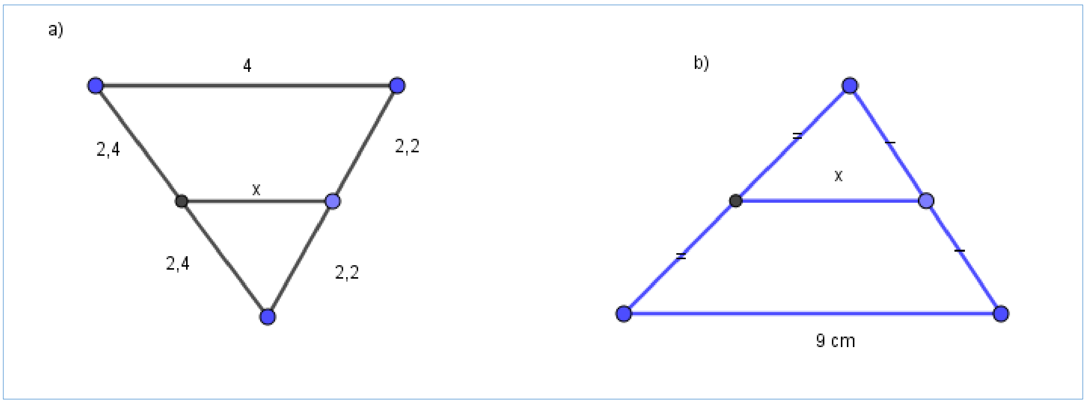
Fonte: Autor

Ao final da atividade, com os valores em mãos construímos no GeoGebra a figura e podemos perceber que nem sempre ela está de acordo com a questão, nesse caso a figura correta (figura 24) tem os dois círculos se intersectando, o que às vezes confunde os alunos, que ao olhar para a figura (figura 23) questiona o seu resultado, pois a figura posta na questão não está de acordo com a real situação do problema.

3) Calcule x nos seguintes triângulos (figura 25).

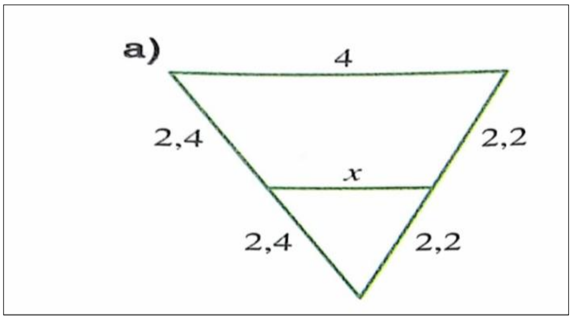
A letra "a" os alunos resolveram com certa facilidade usando semelhança de triângulos e com o auxílio do GeoGebra verificamos o resultado.

Figura 25 – Exercício proposto no livro didático (BIANCHINI, 2015, p. 66).



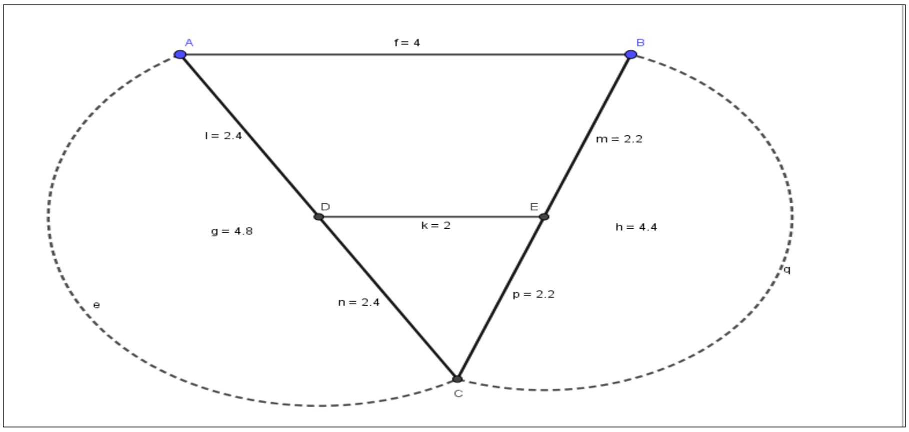
Fonte: (BIANCHINI, P.66)

Figura 26 – Exercício que exige apenas a aplicação de fórmulas para chegar ao resultado.



Fonte: (BIANCHINI, P.66)

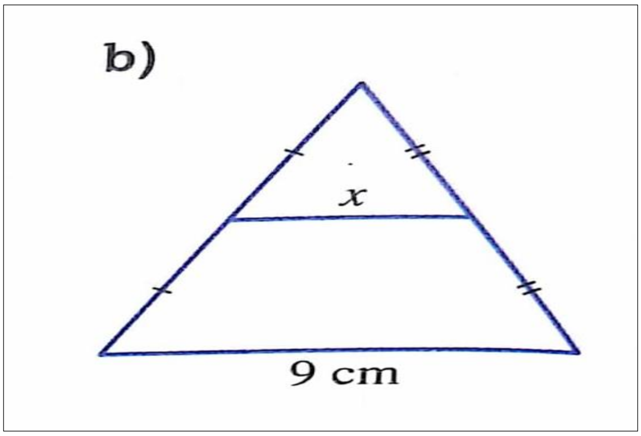
Figura 27 – Verificação do resultado do exercício 3 no geogebra.



Fonte: o autor

Já no exercício “b” (figura 28) os alunos tiveram dificuldades na resolução, pois segundo eles “não havia números”, este foi o comentário quase que unânime dos alunos. Esta atividade rendeu muita discussão. “Como vamos resolver se só tem um valor?” Então passamos a analisar com mais calma e fui perguntando, “vocês entendem todos os símbolos presentes na figura? O que significa os traços marcados nos lados do triângulo?” Para muitos alunos aquela simbologia era novidade, nunca tinham visto antes esse tipo de representação. Expliquei que os traços representavam segmentos de mesma medida e como o lado estava dividido em dois segmentos iguais, o segmento que queríamos medir passava pelo ponto médio dos lados do triângulo. Mas mesmo assim ainda não entendiam como resolver a questão, colocamos valores numéricos para facilitar o entendimento dos alunos e sempre o resultado para o *x* era o mesmo, depois generalizamos para concluirmos que se tratava do teorema da base média. Esta questão, com certeza foi muito proveitosa.

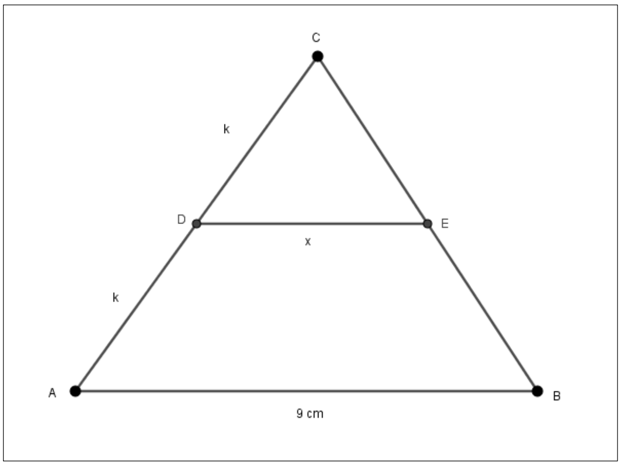
Figura 28 – Exercício 3b do livro (BIANCHINI, P.66).



Fonte: (BIANCHINI, P.66)

Como auxílio do GeoGebra construímos o triângulo, o que facilita muito a visualização e a compreensão.

Figura 29 – Construção no GeoGebra para auxiliar na compreensão da questão.



Fonte: o autor

Pela semelhança de triângulos temos que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (figura 29). Como D é ponto médio de $\overline{AC}$, temos que $\overline{CD} = \overline{DA} = k$, então:

$$\frac{CD}{DE} = \frac{CA}{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{k}{x} = \frac{2k}{9}$$

$$\Rightarrow \quad 2kx = 9k \text{, dividindo os dois membros por } k$$

Temos:

$$2x = 9,$$

$$\text{Portanto } x = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

De toda essa discussão chegamos à conclusão: “Dado um triângulo qualquer, a base média com extremos nos pontos médios de dois lados desse triângulo é paralela ao terceiro lado e a sua medida é igual à metade da medida desse terceiro lado”. Que é o chamado Teorema da Base Média.

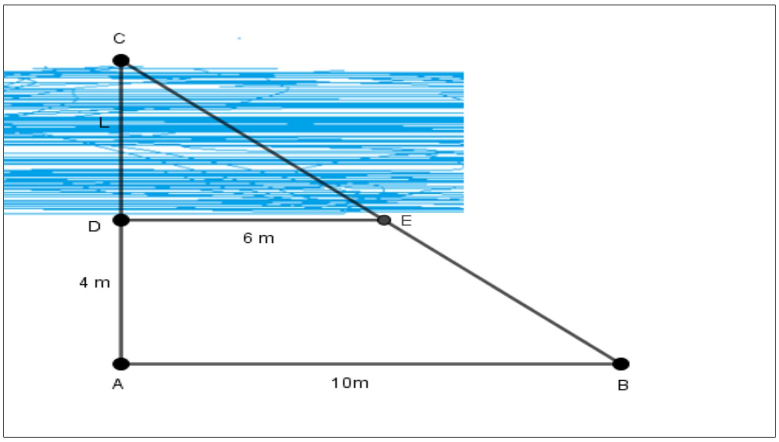
Depois de vista a parte teórica aplicamos uma pequena avaliação para verificar o que os alunos entenderam do conteúdo exposto da maneira tradicional, ou seja, todas as atividades foram feitas em sala de aula e os alunos resolveram atividades do livro didático.

A referida avaliação foi composta por três questões em que os alunos deveriam verificar e demonstrar o quanto assimilaram do conteúdo.

Questões da avaliação (1)

1) Observe o desenho abaixo, (Figura 30) os dados que aparecem são suficientes para determinar a largura do rio? Calcule a largura.

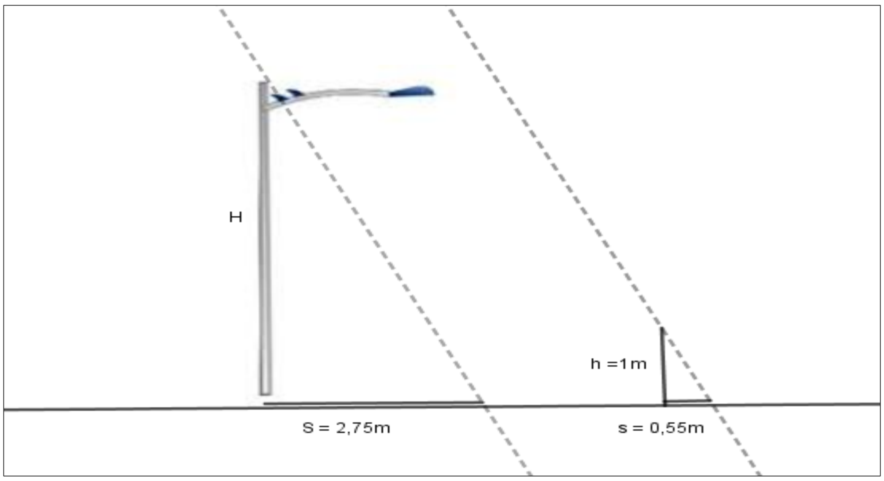
Figura 30 – Esquema para calcular a largura do rio.



Fonte: O autor

2) Sabendo que o poste e a estaca da figura abaixo (Figura31) são perpendiculares em relação ao solo, qual a medida da altura do poste?

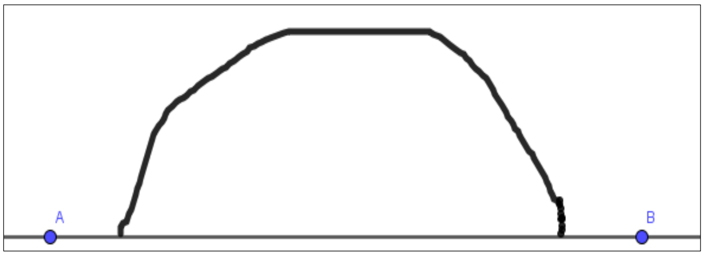
Figura 31 – Esquema para o cálculo da altura do poste.



Fonte: O autor

3) Desejamos determinar a distância entre os pontos A e B, sabendo que é impossível fazer a medição direta entre eles. Monte uma estratégia para determinar esta distância entre os dois pontos

Figura 32 – Representação para o cálculo da distância entre dois pontos.



Fonte: O autor

O objetivo da avaliação era verificar quanto do conteúdo visto de forma tradicional, utilizando somente aula expositivas, foi entendido pelos alunos, e após realizadas as atividades práticas aplicaremos outro teste para verificar se houve mudanças nos resultados, ou seja, se após as práticas, os alunos tiveram um melhor entendimento na maneira de como abordar o problema e se houve progressos na aprendizagem em relação ao conteúdo proposto.

Ao analisar as respostas dos alunos neste primeiro teste, observamos que eles ainda apresentam dificuldades no entendimento das questões.

Na primeira questão a dificuldade apresentada foi na colocação dos dados, quando tinha que relacionar os dados do triângulo menor com os dados do triângulo maior, ou usava só o 4 como lado do maior ou uniam os dados de maneira incorreta, o valor do lado 4L em vez de 4+L.

A segunda questão foi a que a grande maioria acertou, acredito pelo fato de na introdução termos visto a história em que Tales determinou a altura da pirâmide usando uma estaca e a sombra e também por ser possível usar os dados como aparecem na figura.

A última questão, por não apresentar nenhum valor, os alunos não conseguiram pensar em uma maneira de resolvê-la.

Após a correção das atividades percebemos que, para que haja um melhor entendimento devemos abordar o conteúdo de outras formas para alcançarmos o objetivo a que nos propusemos, que é a aquisição do conhecimento significativo pelo alunos.

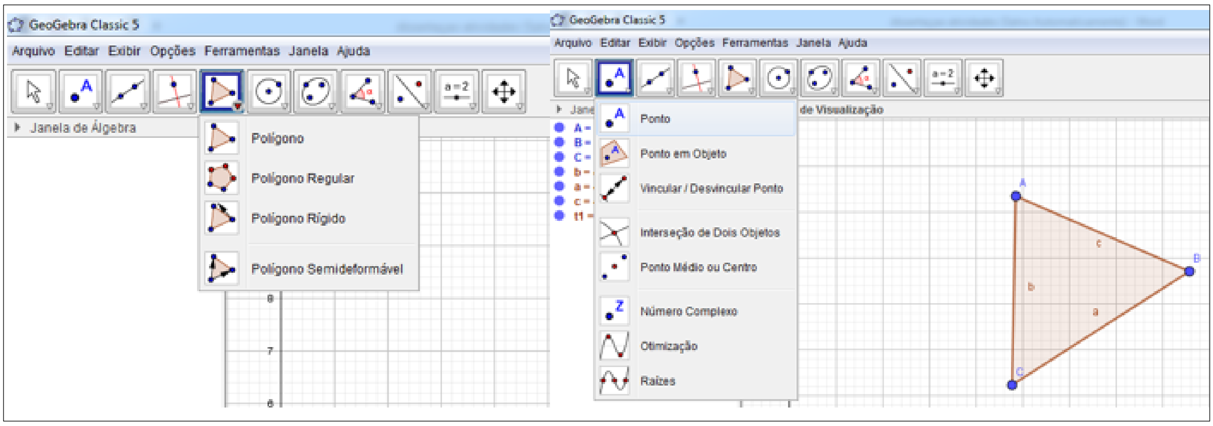
Seguindo o programa proposto para nossas atividades, fomos ao laboratório de informática onde os alunos tiveram a oportunidade de utilizar o GeoGebra para construir triângulos e verificar as propriedades e os casos de semelhança.

Com um roteiro já estabelecido (Apêndice B), os alunos construíram triângulos e verificaram as propriedades, respondendo às perguntas fornecidas junto com os passos para a construção.

Atividade 1: Construção de dois triângulos semelhantes com homotetia.

Construa o triângulo ABC, usando a ferramenta "polígono", janela 5.

Figura 33 – Construção do triângulo no GeoGebra.

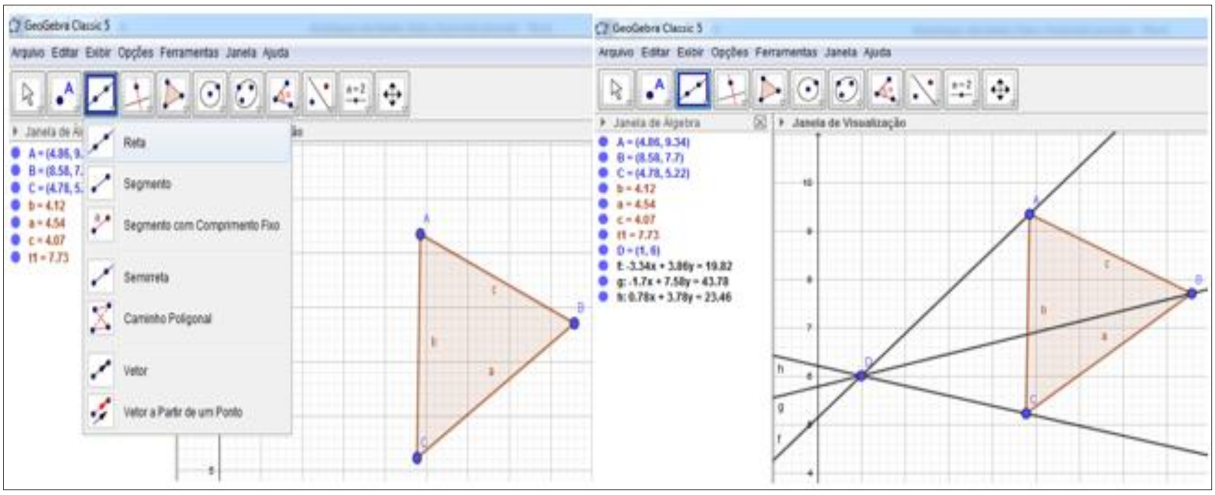


Fonte: o autor

Marque um ponto D fora do triângulo, para isso na janela 2 clique na ferramenta ponto.

Logo após, crie retas que passem pelos vértices do triângulo e por este ponto D, clicando na janela 3, na ferramenta reta.

Figura 34 – Construção das retas que passam pelos pontos do triângulo.



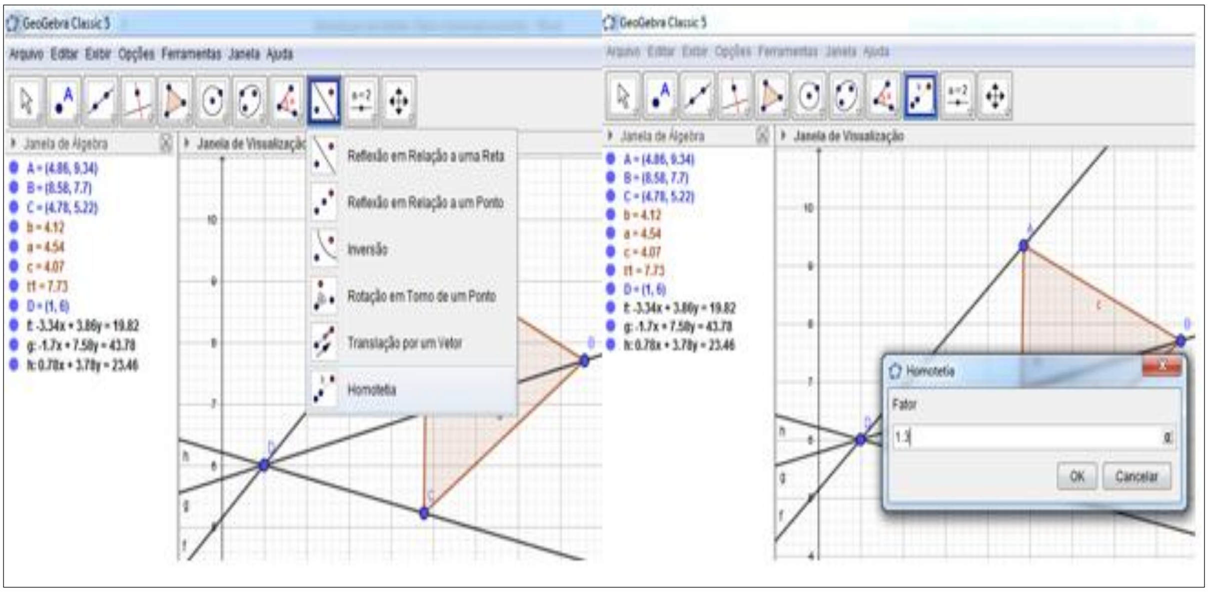
Fonte: o autor

Na janela 9 clique na opção "homotetia".

Clique no interior do triângulo para selecioná-lo e, em seguida no ponto D. A caixa de homotetia abrirá pedindo o fator de ampliação (fator maior que 1) ou redução (menor que 1).

Digite o fator, (ex: 1,3) e clique em ok ou pressione enter.

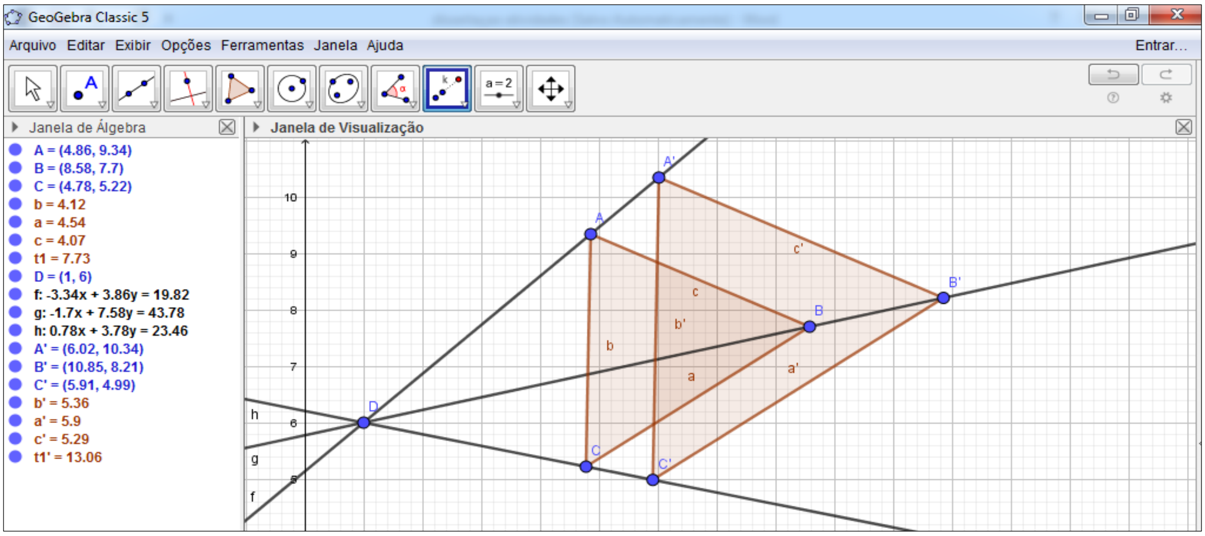
Figura 35 – Aplicação da ferramenta homotetia.



Fonte: o autor

Um novo triângulo surgirá a partir do triângulo ABC e será A'B'C'.

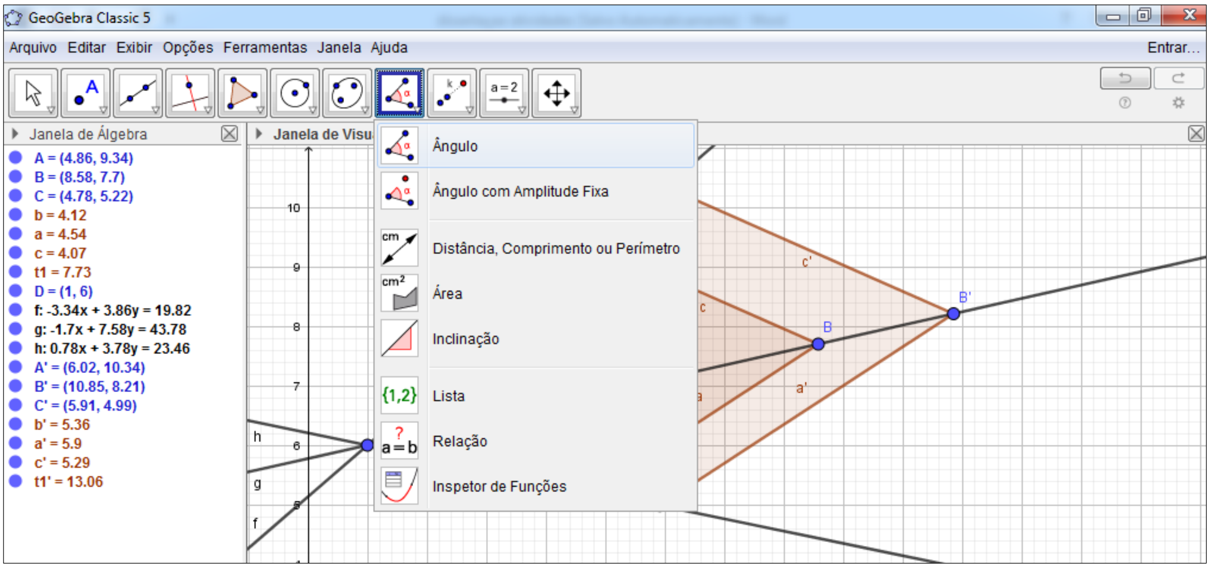
Figura 36 – Semelhança por homotetia.



Fonte: o autor

Marque os ângulos dos triângulos ABC e A’B’C’ e observe se os ângulos correspondentes possuem a mesma medida. Para isso clique na janela 8 opção “ângulo “.

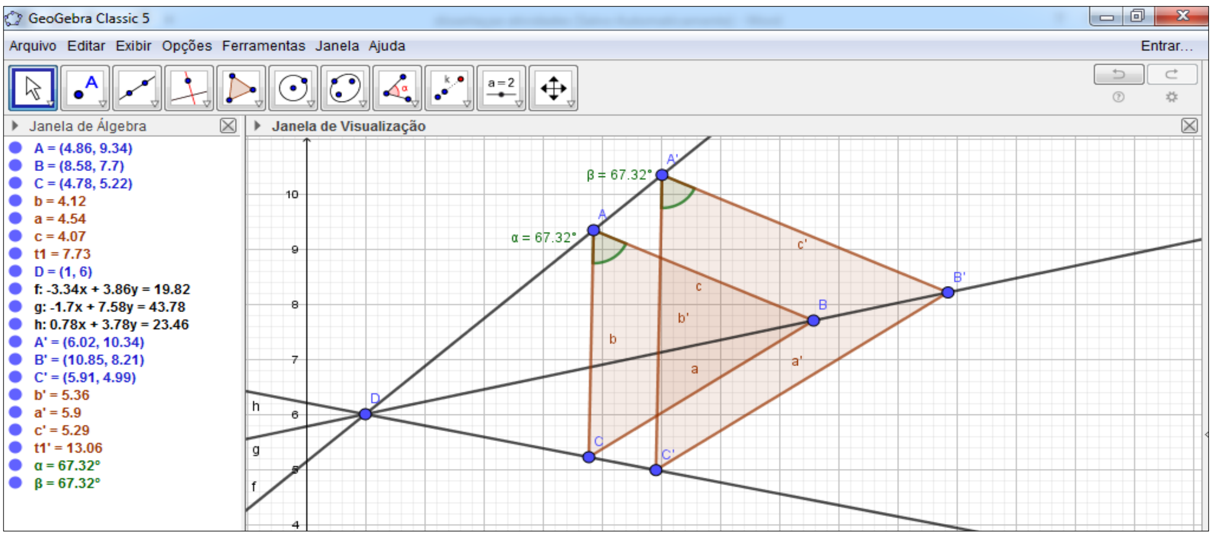
Figura 37 – Marcação dos ângulos nos triângulos.



Fonte: o autor

Em seguida nas retas que formam o ângulo, primeiro na reta à direita do ângulo e depois na reta à esquerda do ângulo.

Figura 38 – Ângulos em triângulos homotéticos.



Fonte: Autor

Responda as questões a seguir:

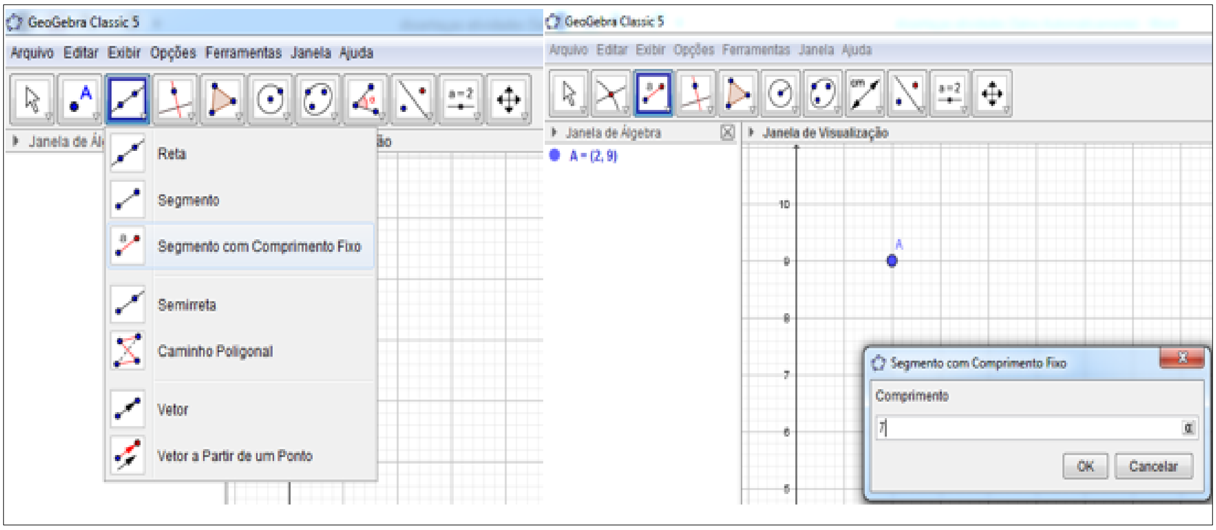
1) O que é homotetia?
2) As figuras homotéticas são semelhantes, por quê?
3) Verifique se a razão de semelhança entre os dois triângulos é igual ao fator colocado na caixa de homotetia. Para isso, faça a divisão das medidas dos lados do triângulo A'B'C' pelas medidas correspondentes do triângulo ABC. (ex: $\frac{a'}{a}$).

Atividade 2: Construção de triângulos semelhantes, utilizando o caso LAL.

Na janela 3 clique na opção segmento com comprimento fixo.

Após selecionada a opção, aparecerá uma caixa pedindo o comprimento, coloque o valor desejado, por exemplo "7"e pressione enter.

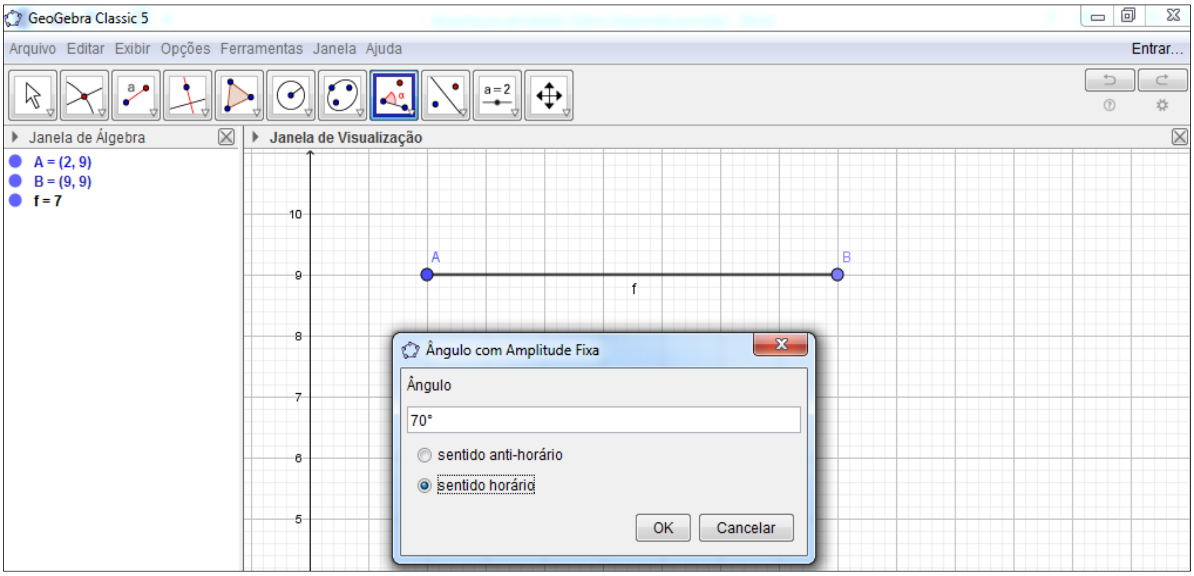
Figura 39 – Passos para a construção do triângulo.



Fonte: o autor

Na janela 8 clique na opção ângulo com amplitude fixa, marque os pontos B e A nessa ordem e na caixa digite o ângulo desejado, por exemplo 70° e marque sentido horário. Pressione ok.

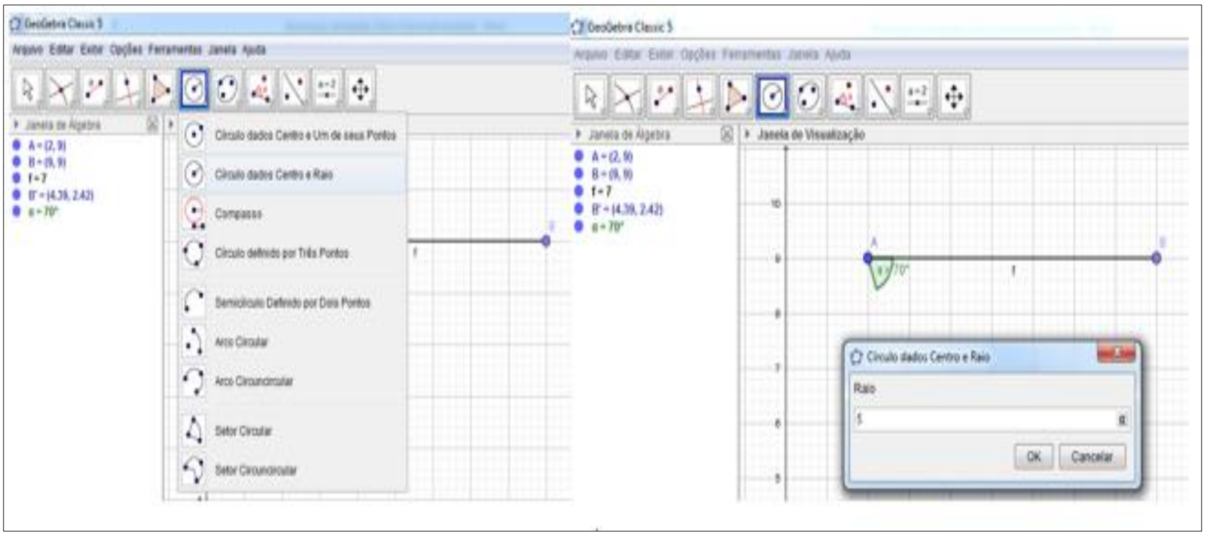
Figura 40 – Construção do segmento.



Fonte: o autor

Na janela 6 clique na opção; círculo dado centro e raio, marque o ponto A e na caixa digite raio 5

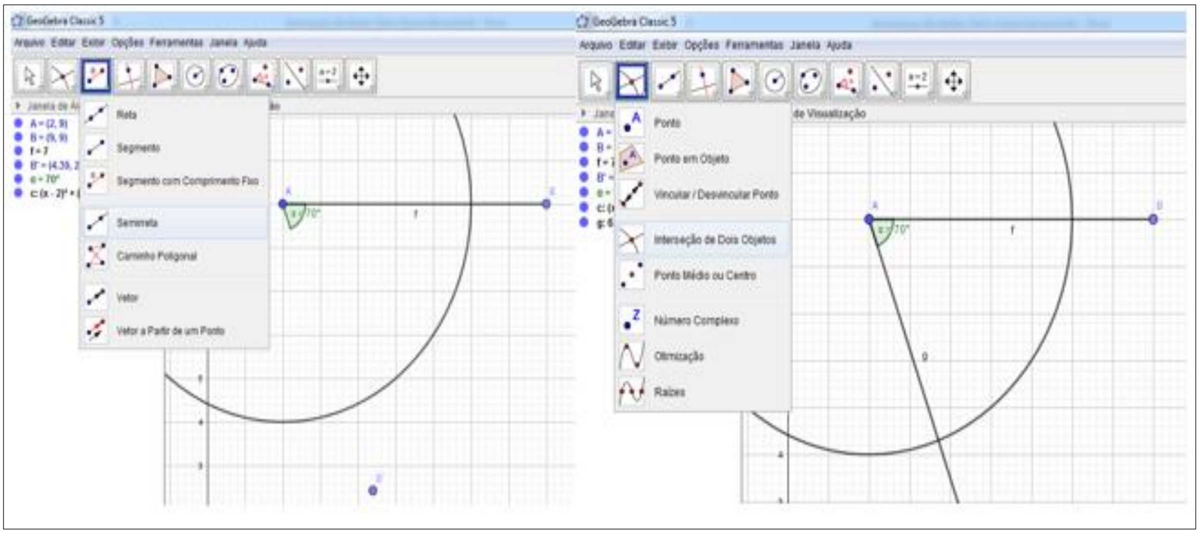
Figura 41 - Construção do triângulo com ângulo fixo.



Fonte: o autor

Com a circunferência construída, na janela 3 marque a opção semirreta do ponto A passando por B’

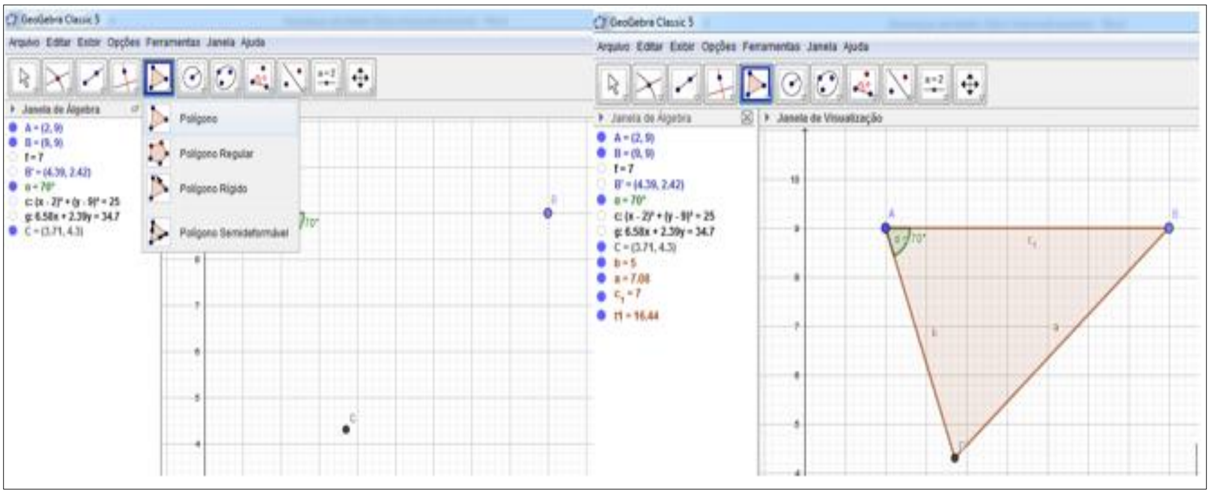
Figura 42 - Desenvolvimento da construção.



Fonte: o autor

Na janela de álgebra desmarque a circunferência, a semirreta e o segmento. Construa o triangulo ABC com a ferramenta polígono.

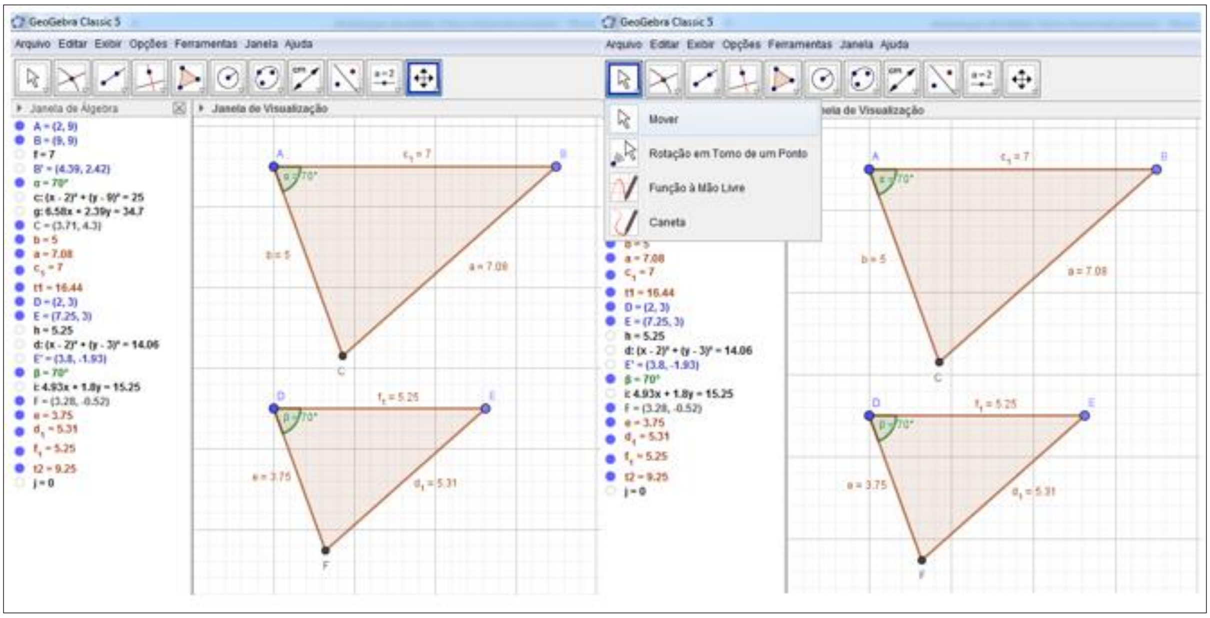
Figura 43 - Triângulo com ângulo fixo construído.



Fonte: o autor

Repita todo o processo e construa outro triângulo com o segmento medindo 5,25 e o raio do círculo 3,75 e o ângulo de 70°. Na janela 1 com a ferramenta mover sobreponha o triangulo menor.

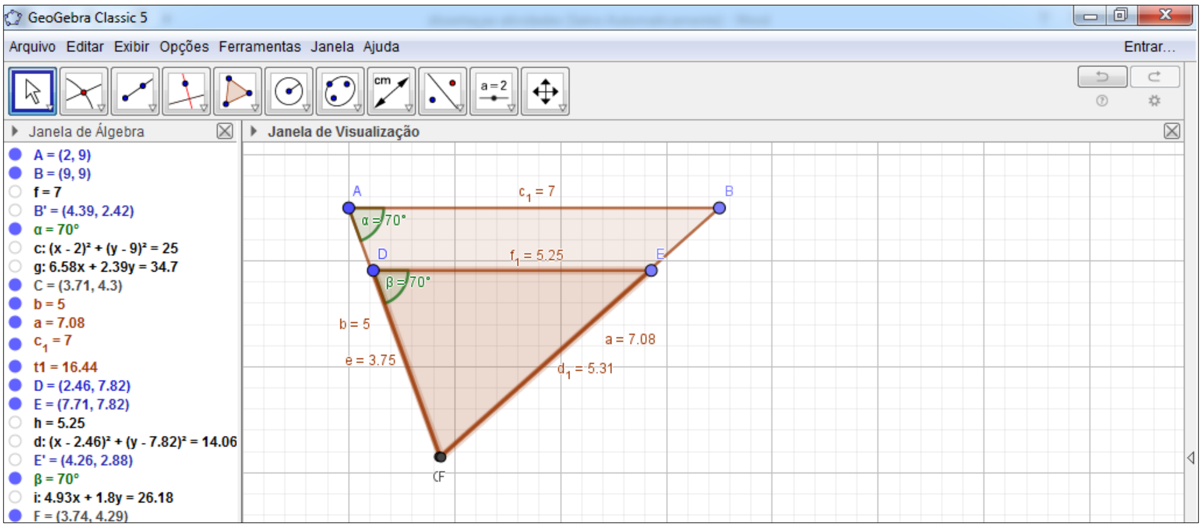
Figura 44 – Dois triângulos semelhantes pelo caso (LAL) construídos.



Fonte: o autor

Verifique que os triângulos são semelhantes.

Figura 45 – Triângulos sobrepostos.



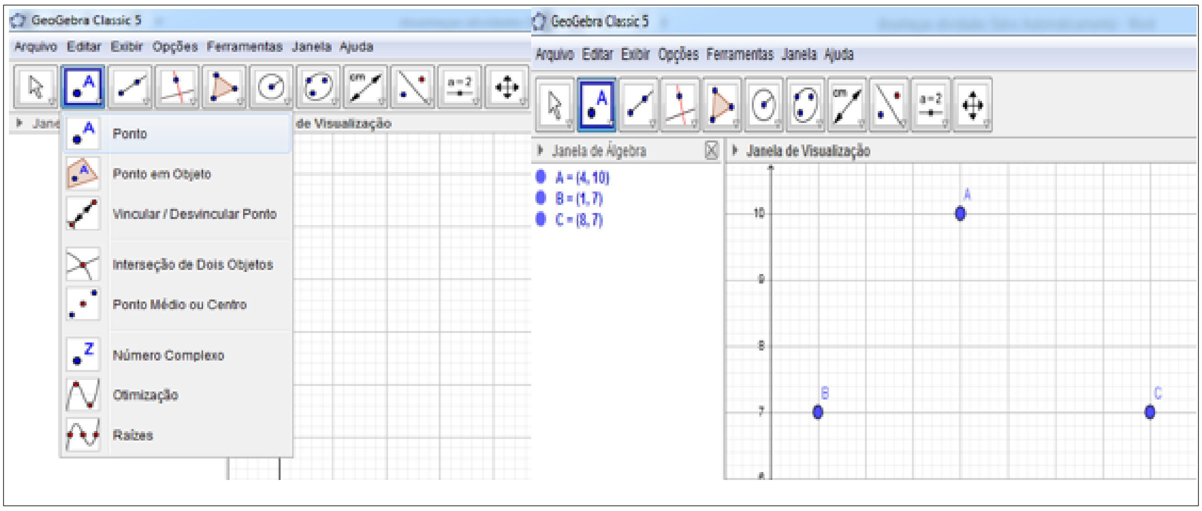
Fonte: Autor.

1) Os triângulos construídos acima são semelhantes? Justifique.
2) O que é necessário para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso LAL?

Atividade 3: Construção de triângulos semelhantes, utilizando o caso (LLL).

Marque os pontos A(4,10), B(1,7) e C(8,7). Na janela 2, clique na ferramenta ponto e marque os pontos ou digite na caixa de entrada.

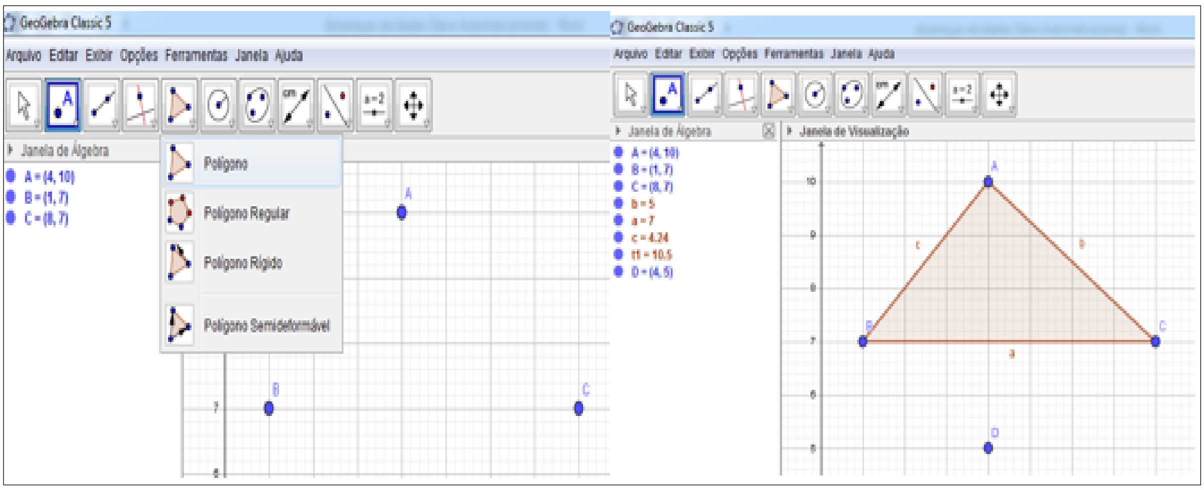
Figura 46 – Início da construção do triângulo.



Fonte: o autor

Após marcados os pontos na janela 5 com a ferramenta polígono construa o triângulo ABC e na janela 2 novamente com a ferramenta ponto marque o ponto D ou na caixa de entrada digite o ponto (4,5)

Figura 47 – Triângulo construído.

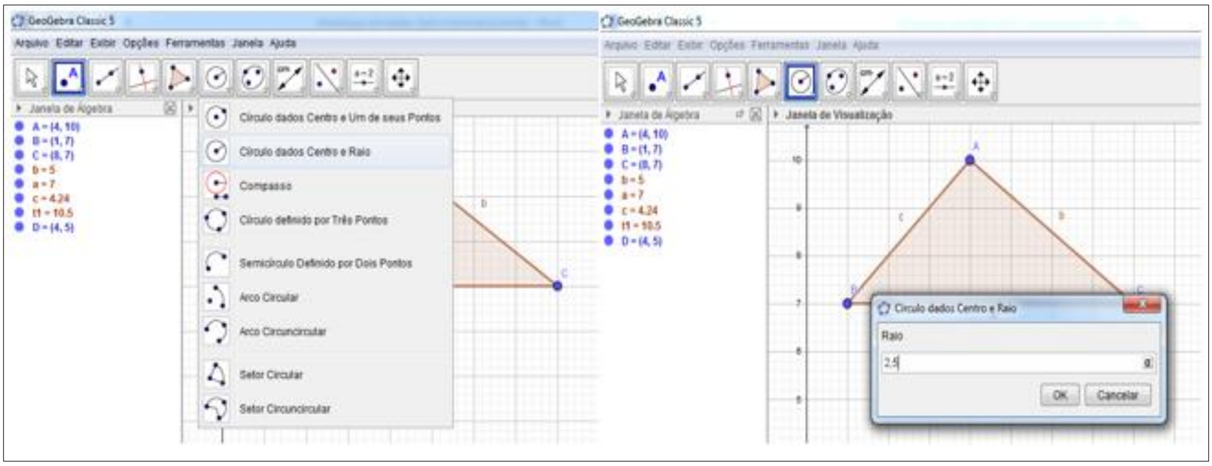


Fonte: o autor

Agora vamos construir o triângulo DEF com as medidas já estabelecidas, assim na janela 6 com a ferramenta círculo dados centro e raio, clique no ponto D e na caixa digite o raio 2,5.

Novamente clique no ponto D e na caixa agora digite para o raio 2,12 e pressione ok ou enter.

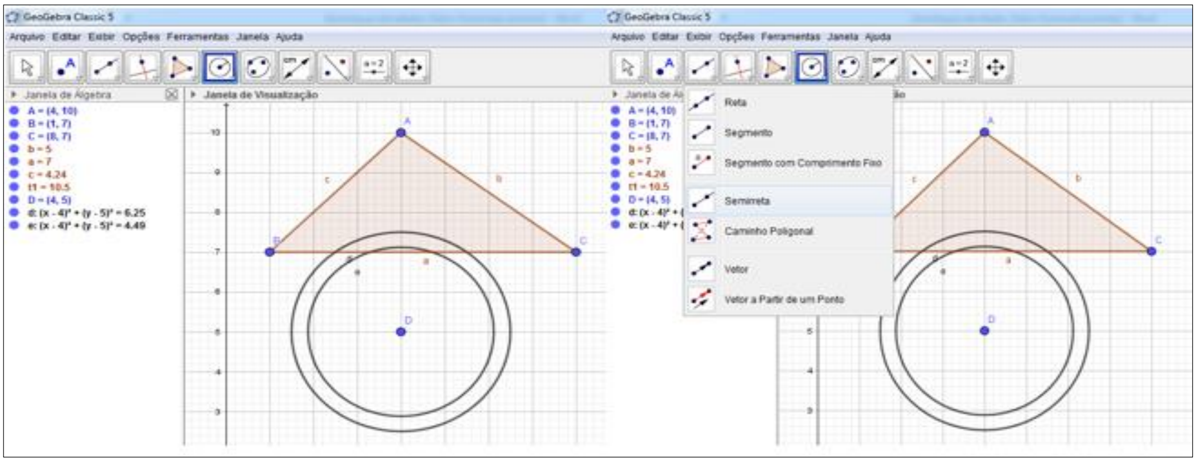
Figura 48 – Início da construção do segundo triângulo.



Fonte: o autor

Na janela de visualização aparecerão dois círculos concêntricos, na janela 3 com a ferramenta semirreta, trace-a partindo de D e intersectando o círculo maior no ponto E.

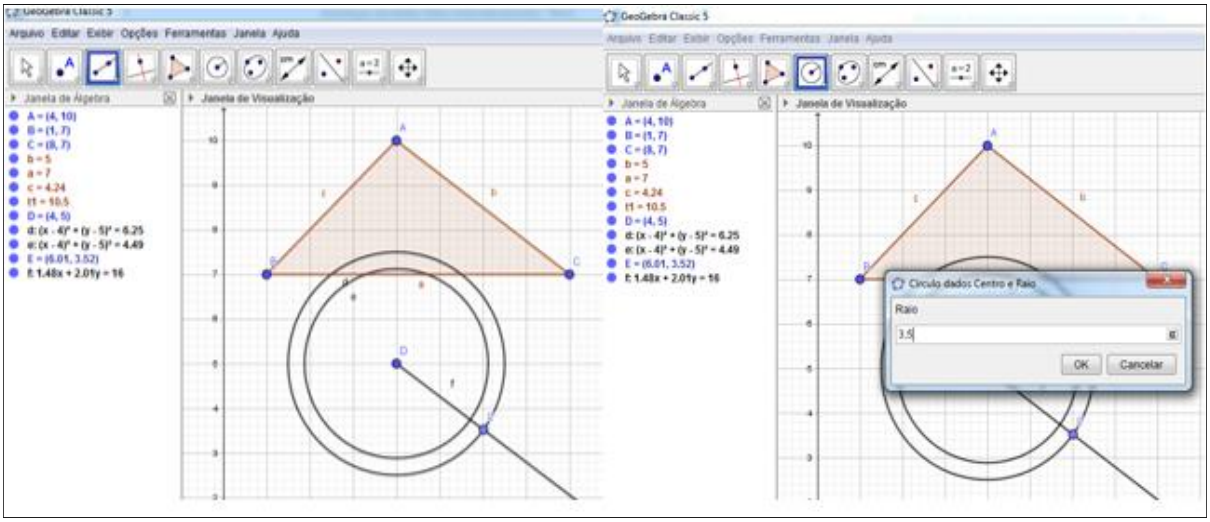
Figura 49 – Passos I para a construção do segundo triângulo.



Fonte: o autor

Com a semirreta traçada e o ponto E marcado, na janela 6 clique na ferramenta círculo dados centro e raio e clicando em E, na caixa digite o raio 3,5 e ok.

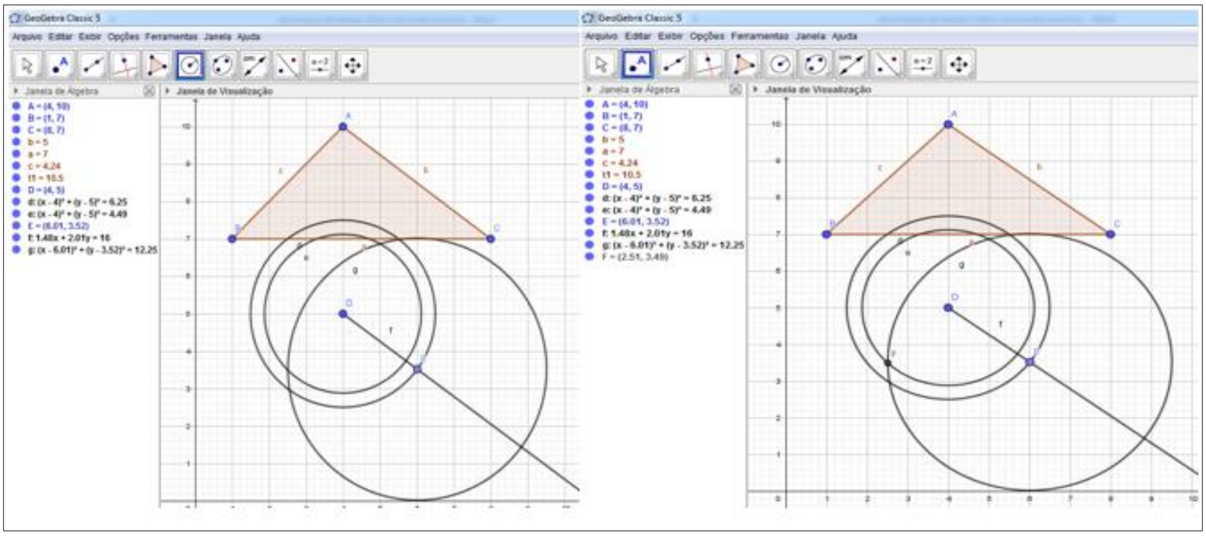
Figura 50 – Passos II para a construção do segundo triângulo.



Fonte: o autor

Agora na janela 2 com a ferramenta ponto marque o ponto F que é a interseção do círculo com centro em E e o círculo menor de centro D, existem duas possibilidades, marque só a que está abaixo de D.

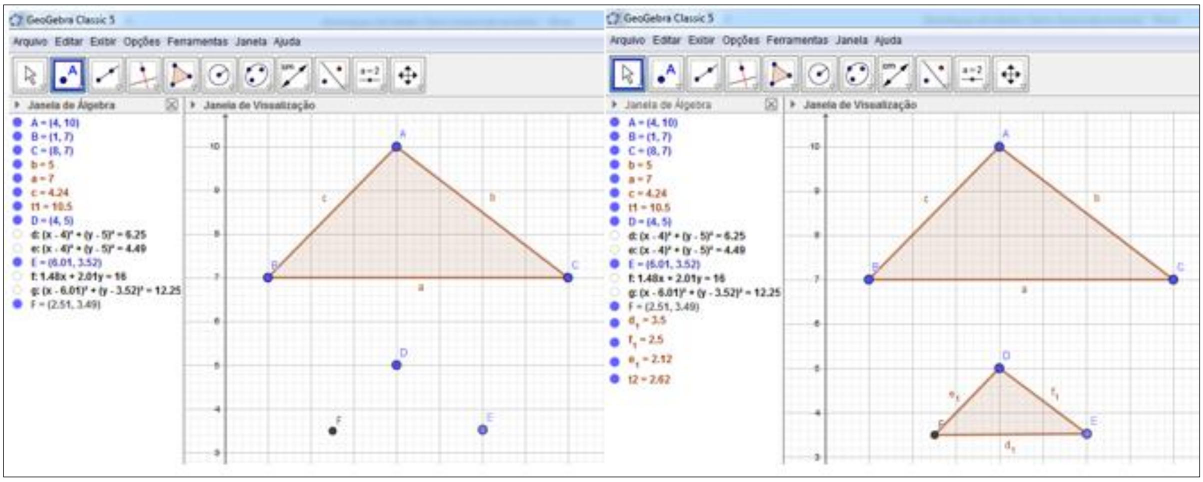
Figura 51 – Passos III para a construção do segundo triângulo.



Fonte: o autor

Na janela de álgebra desmarque a equação da semirreta e as equações das três circunferências e na janela 5 com a ferramenta polígono construa o triângulo DEF.

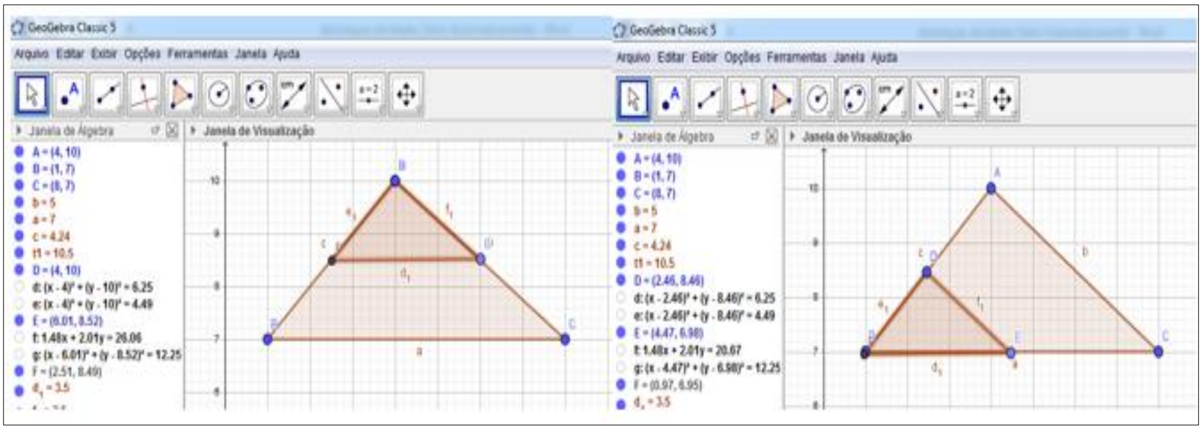
Figura 52 – Triângulos construídos pelo caso (LLL)



Fonte: o autor

Na janela 1 com a ferramenta mover sobrepondo o triângulo menor é possível ver que ele se encaixa perfeitamente ao maior.

Figura 53 – Sobreposição dos triângulos para verificar a semelhança.



Fonte: o autor

1) O que é necessário para que dois triângulos sejam semelhantes pelo caso LLL?

2) verifique se todos os lados estão com a mesma razão de proporcionalidade

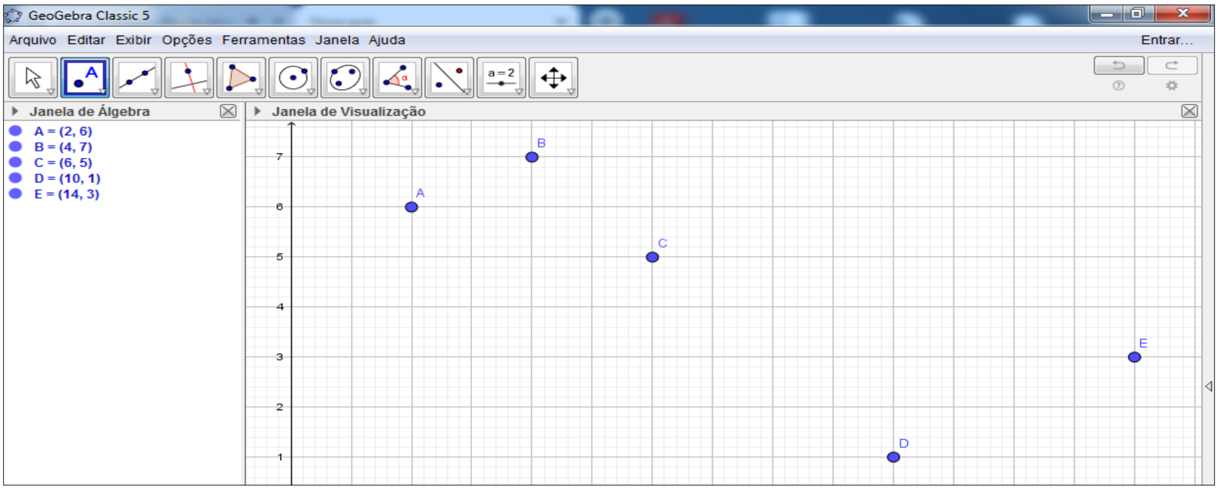
3) Qual é a razão de semelhança do exemplo acima?

4) Usando o teorema fundamental da semelhança é possível verificar se os triângulos ABC e DEF são semelhantes? Justifique.

Atividade 4: Construção de triângulos semelhantes utilizando o caso (AA).

Na janela 2, com a ferramenta ponto marque os pontos A(2,6), B(4,7), C(6,5), D(10,1) e E(14,3)

Figura 54 - Pontos marcados na janela de visualização.

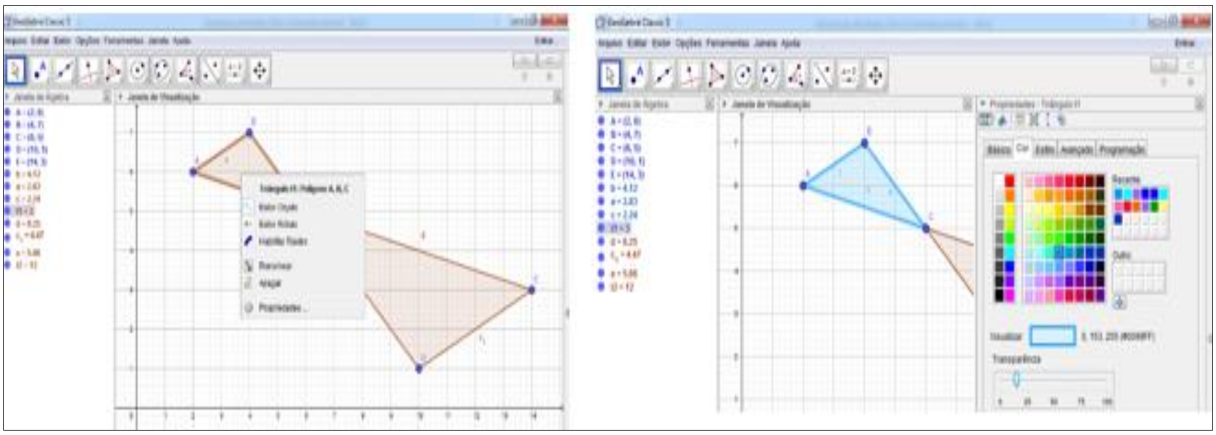


Fonte: Autor

Na janela 5 com a ferramenta polígono construa os triângulos ABC e CDE

Com o botão direito do mouse clique dentro do triângulo e na opção propriedades, mude a cor do triangulo. Escolha cores diferentes para os dois triângulos.

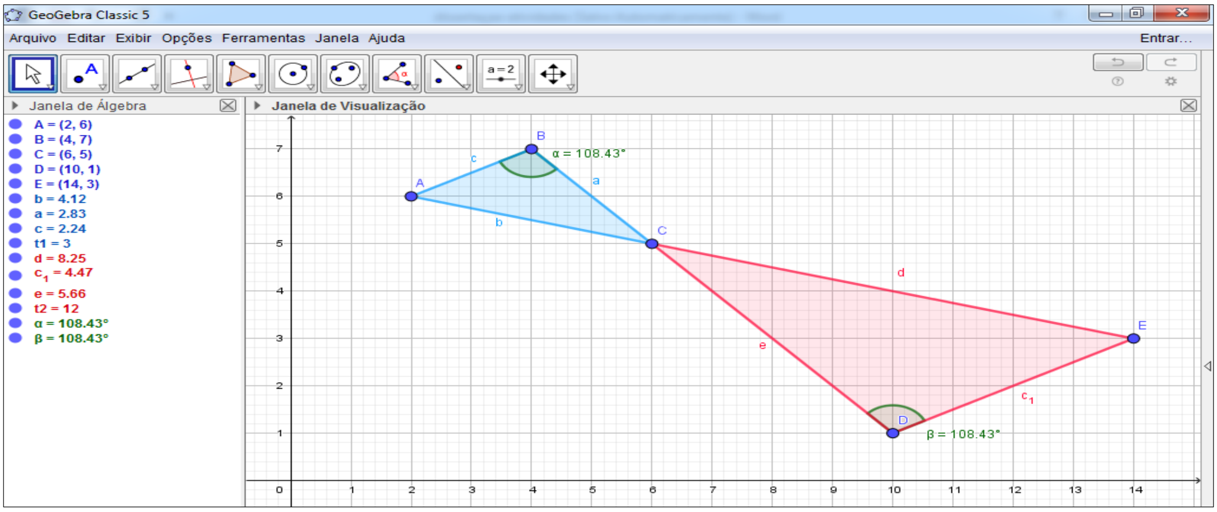
Figura 55 – Triângulos construídos através de pontos.



Fonte: o autor

Na janela 8, na ferramenta ângulo marque os ângulos B e D

Figura 56 – Verificação do caso de semelhança (AA)



Fonte: Autor

1) Com as informações da tela podemos afirmar que os triângulos são semelhantes?

2) O que podemos dizer dos ângulos ACB e DCE?

3) Qual o caso de semelhança que usamos para definir que eles são semelhantes?

Ao final das atividades no laboratório de informática, percebemos que os alunos possuem muita dificuldade em usar as tecnologias, pois não conheciam o software GeoGebra, mas com os passos fornecidos e auxiliando os que tinham mais dificuldade conseguimos construir as figuras e o mais importante, com as figuras construídas facilitou para que visualizassem as propriedades e os casos de semelhança de triângulos, alcançando o objetivo proposto para aquela atividade.

O próximo passo é a aplicação em situações práticas, no pátio da escola, com os conhecimentos já adquiridos, vamos determinar distâncias inacessíveis utilizando as técnicas vistas em sala de aula.

Primeiro calculamos alturas medindo a sombra do aluno e a sombra do objeto, que foi um objeto escolhido pelos alunos, nesse caso um poste. Em seguida para calcularmos a altura de uma árvore utilizamos uma estaca, para reproduzir o que Tales fez no Egito, cravamos uma estaca no chão e esperamos a sombra estar do tamanho dela e então medimos a sombra da árvore. No decorrer das práticas, enquanto esperávamos a sombra ter a mesma medida da estaca foram surgindo perguntas. Se estiver nublado e eu precise determinar a altura, tem como?

Então para medir o poste utilizamos a técnica da fotografia, onde tiramos uma foto da aluna ao lado do poste e utilizamos a proporção da fotografia com o real. Para essa atividade imprimimos a foto e medindo a altura do poste na foto obtemos 9,27 cm e a altura da aluna 2,53 cm e sabendo a altura real da aluna montamos a proporção (figura 57).

Figura 57 – Cálculo de altura utilizando fotografia.

$$\frac{9{,}27}{2{,}53} = \frac{h}{163}$$

$$h = \frac{9{,}27 \times 163}{2{,}53}$$

$$h = 597{,}24cm$$

Fonte: o autor

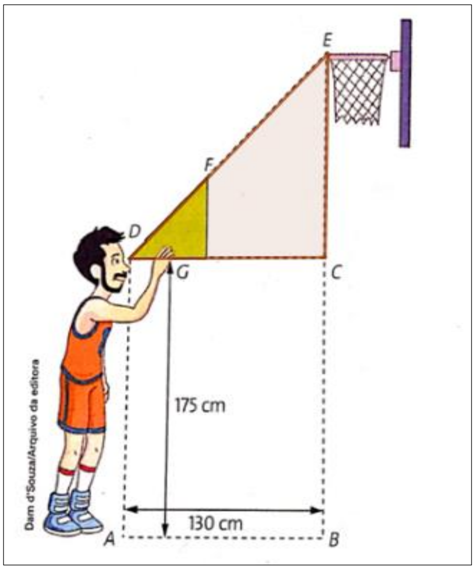
Para um melhor entendimento, elaboramos um esquema para usarmos a semelhança de triângulos (figura 58), que facilitou muito o entendimento dos alunos, que após visualizarem, não tiveram mais dúvida de como proceder nesse tipo de atividade.

Figura 58 – Imagem de como obter a altura através da foto.

Fonte: o autor

Também utilizamos a técnica do triângulo retângulo isósceles (figura 59) para determinar alturas. Para utilizar este método o aluno deve se posicionar a uma distância de forma que, na sua linha de visão observe a hipotenusa alinhada com o topo do objeto a ser medido, a distância do aluno ao objeto somada à altura de sua linha de visão é a altura procurada.

Figura 59 – Exemplo de como obter a altura com o uso de um triângulo retângulo isósceles.



$$130cm + 175cm = 305cm$$

Por ser isósceles o triângulo que o aluno usa para mirar o topo do objeto, forma outro triângulo semelhante e portanto também isósceles, então a distância do aluno até a perpendicular ao objeto é a mesma da linha de visão ao objeto. Portanto, $\overline{DC} = \overline{CE}$

Fonte: (DANTE, 2016, p. 244)

Figura 60 – Alunos medindo altura com triângulo retângulo isósceles.

Fonte: o autor

Calcular distâncias inacessíveis não se limita determinar alturas, podemos calcular distâncias de difícil acesso, como por exemplo a largura de um rio sem ter que atravessá-lo.

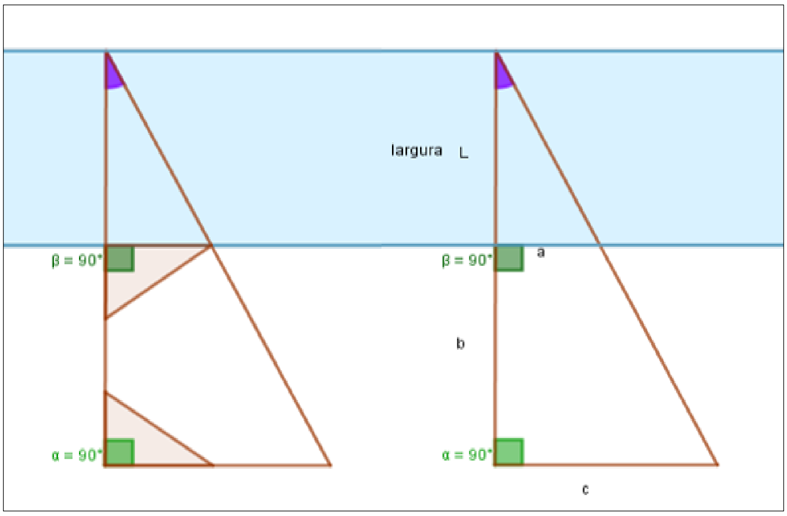
Nesse experimento imaginamos que a quadra de vôlei fosse o rio, então, com estaca marcamos os pontos para com as medidas determinar a largura do “rio” (figura 61).

Figura 61 – Marcação para determinar a largura da quadra “rio”

Fonte: o autor

Para marcarmos os triângulos semelhantes primeiro construímos uma linha reta e como tínhamos visto no início, a história da matemática, em que eram usadas pelos Egípcios, cordas com doze nós, para medir terras após cada enchente do rio Nilo. Os nós da corda eram de igual distância um do outro, e com ela construíam um triângulo com lados 3, 4 e 5 que é um triângulo retângulo, pois um dos ângulos internos mede 90°. Usamos a mesma técnica para obtermos triângulos retângulos semelhantes (figura 62). Primeiro construímos o ângulo reto no vértice oposto ao rio em seguida construímos outro na margem garantindo assim que os triângulos seriam semelhantes.

Figura 62 - Construção dos triângulos semelhantes para determinar a largura do rio.



Fonte: o autor

A dificuldade encontrada nesta atividade foi que muitos alunos, quando montavam a proporção não utilizavam todo o comprimento do maior triângulo, sendo necessário uma maior discussão para convencê-los que o comprimento do lado do maior triangulo era $L + b$ e não Lb ou somente b.

Na quadra de futsal marcamos no chão pontos para calcular a distância e imaginamos o círculo central como sendo um objeto que impedia a medição direta (figura 63).

Figura 63 – Alunos medindo para calcular distância entre dois pontos.

Fonte: o autor

Nesta atividade os alunos precisavam lembrar que em aulas anteriores discutimos um problema que utilizava o teorema da base média. Pensando na metodologia proposta para nossas atividades perguntei para eles, “como posso garantir que terei triângulos semelhantes sem medir os ângulos?” Continuei questionando, “como garantir que traçando uma reta fora do círculo ela será paralela àquela que queremos saber a medida?” Então os alunos perceberam que pegando o ponto médio dos lados garantimos que as retas serão paralelas e mais, que a medida procurada será o dobro da medida dessa reta que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo.

Marcamos o vértice superior do triângulo em várias posições diferentes para mostrar que não importava a forma do triângulo, utilizando a base média, sempre chegávamos a mesma medida.

Como previsto em todas as atividades não houve resultados iguais entre os grupos, mas a variação foi pequena. A discussão passou a ser, o que teria ocorrido para que os resultados tivessem essas diferenças? Pois era o mesmo objeto que estava sendo medido.

Após a conclusão das práticas, podemos perceber que o envolvimento dos alunos nas atividades práticas foi muito maior e as discussões principalmente nas atividades de distâncias inacessíveis foi muito proveitosa e com certeza agregou muito conhecimento aos alunos.

Com o andamento das atividades era visível que quanto mais eles entendiam mais se interessavam pelas atividades, até os alunos que ficavam mais reservados, começaram a se dispor para realizar as medidas, principalmente na atividade com o uso do triângulo retângulo e da medida inacessível na quadra de futsal.

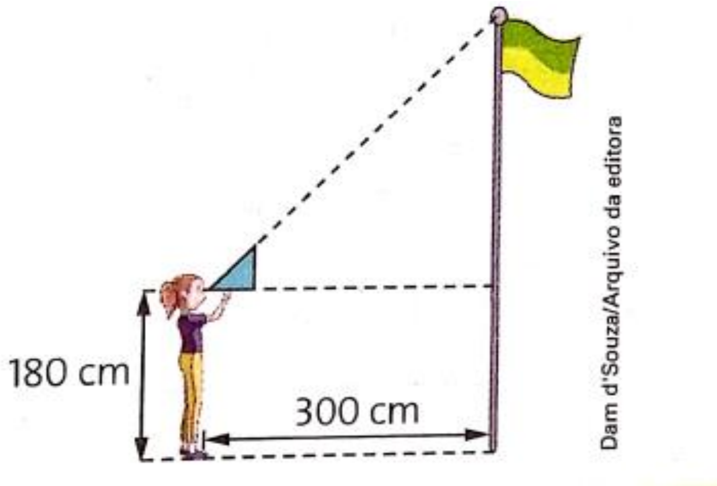
Quando retornamos a sala de aula, selecionei algumas atividades sobre semelhança de triângulos encontradas em provas como ENEM e vestibulares, que os alunos encontrarão no decorrer da sua vida estudantil. (Anexo A)

As questões propostas foram resolvidas como uma atividade e após discutidas proporcionaram aos alunos um melhor entendimento de como o conteúdo, semelhança de triangulo, é cobrado e que eles devem levar este entendimento para utilizar futuramente.

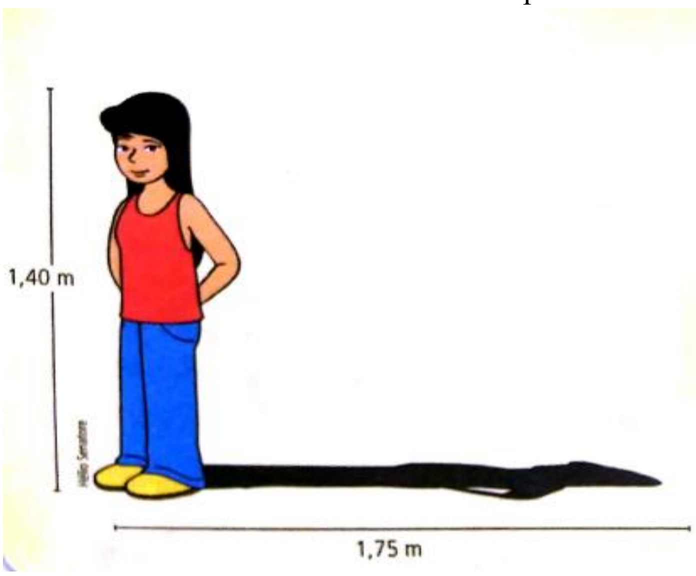
Após terminadas todas as atividades relacionadas com as práticas aplicamos a avaliação 2, para verificar se houve mudança por parte dos alunos em relação ao conteúdo visto.

Questões da avaliação (2)

1) (Adaptado, DANTE, 2016, P.244). Conforme o método do triangulo retângulo isósceles, determine a altura do mastro da bandeira do desenho abaixo.

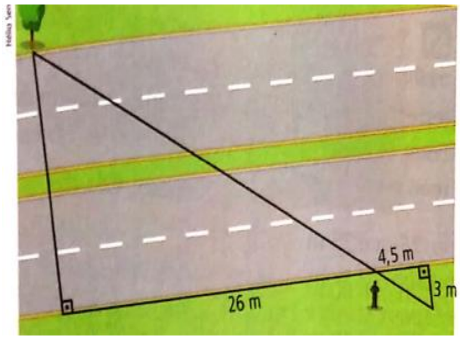


2) (Adaptado, ANDRINI, 2012, p.174). Mariana tem 1,40 m de altura. Ela mediu o comprimento da sua sombra como vemos na ilustração. Calcule o comprimento da sombra de alguns dos amigos dela no mesmo dia e à mesma hora e complete a tabela.



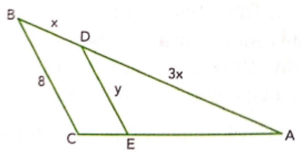
Nome	Marcos	Adriana	Rafael
Altura	1,60 m	1,48 m	1,56 m
Sombra			

3) (ANDRINI, 2012, P. 179) Qual a largura desta rodovia?

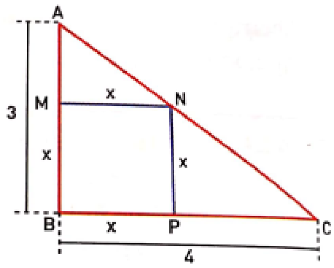


4) (DANTE, 2010, P.159). Na figura abaixo, $\overline{BC} // \overline{DE}$. Calcule:

a) A razão de semelhança $\left(\dfrac{AB}{AD}\right)$
b) A razão entre os perímetros dos triângulos ABC e ADE
c) A medida de y.

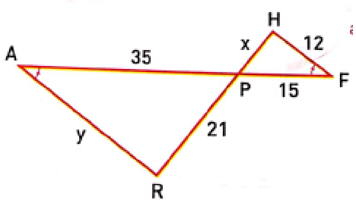


5) (DANTE, 2010, P.157). Na figura, ABC é um triângulo retângulo cujo os catetos medem 3 cm e 4 cm. $MNPB$ é um quadrado cujo lado mede x. O perímetro do triângulo retângulo mede 12 cm. Verifique se é verdade que o perímetro do quadrado $MNPB$ é a metade do perímetro do triangulo ABC .



6) (DANTE, 2010, P.157). Na figura temos $\overline{AR} // \overline{FH}$.

a) Mostre que $\Delta ARP \sim \Delta FHP$.
b) Calcule x e y.



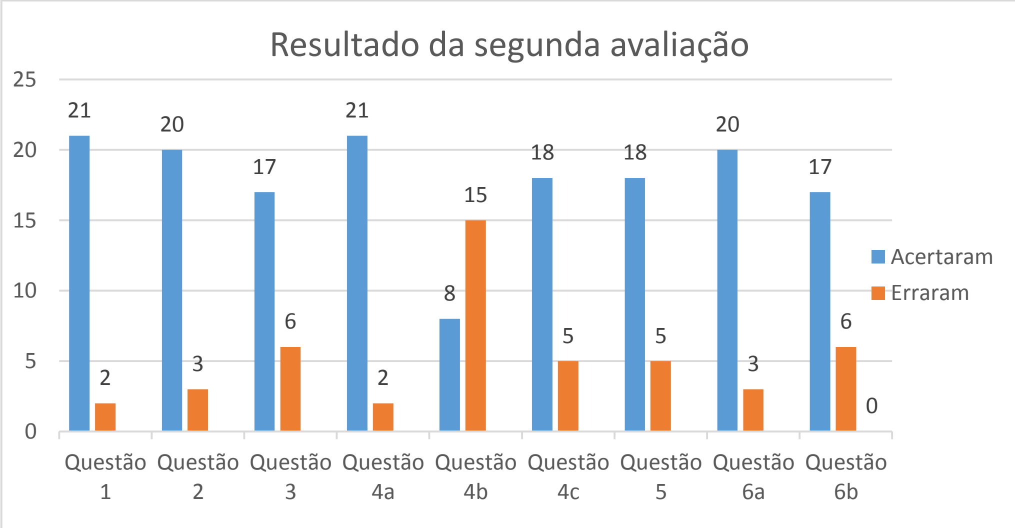
Após realizada a segunda avaliação, que embora sendo uma avaliação mais complexa sobre as exigências do conteúdo do que a primeira, notamos que o desempenho dos alunos foi muito melhor do que na avaliação anterior. A primeira tinha apenas três questões e a segunda tinha seis questões. Na segunda avaliação, as questões 1 e 2 estavam relacionadas com as atividades feitas no pátio da escola, uso do triângulo retângulo isósceles e medida de alturas utilizando a sombra. Sendo assim, os alunos resolveram essas questões com certa facilidade, dos 23 alunos presentes no dia da avaliação 21 acertaram a primeira (91%) e 20 a segunda (87%) na íntegra e todos acertaram pelo menos um item da questão 2. A questão 3 era similar a atividade proposta no pátio, medir a largura do rio, mas era apresentada de uma maneira diferente, pois na prática realizada os triângulos ficavam sobrepostos e na questão da avaliação eles estavam invertidos, isso exigiu mais dos alunos e alguns confundiram as medidas dos lados, pois não perceberam que para sobrepor os triângulos eles deveriam fazer em um deles um giro de 180°em torno do vértice que unia os triângulos. Na questão 3, 17 alunos (74%) acertaram a questão.

Na questão 4, a letra “a” notamos que uma dificuldade apresentada na primeira avaliação foi superada, todos perceberam que o lado AB era a soma $3x + x$ e apenas 2 alunos eraram este item, 21 acertaram (91%). Já, no item “b” muitos não perceberam que em um triângulo semelhante a razão de seus lados é a mesma do seu perímetro, como não podiam determinar as medidas de todos os lados do triângulo deixaram em branco o item. Somente 8 alunos acertaram este item (35%), então percebemos que essas relações de áreas, perímetro, e razões entre lados devem ser melhor trabalhadas. No item “c” com o auxílio do item “a” a maioria não teve dificuldade para determinar o valor do “y”. Neste item 18 acertaram (78%).

Na questão 5 os alunos tinham de usar semelhança de triângulos para determinar o valor do lado do quadrado. Determinar o valor do x, 18 conseguiram (78%).

A última questão, o item “a “era muito parecido com uma atividade realizada no laboratório de informática em que verificamos a semelhança de triângulos pelo caso AA, então os alunos não tiveram grande dificuldade em mostrar a semelhança, 20 alunos acertaram este item (87%). No item “b” repetiu-se o mesmo erro da questão 3 e novamente muitos alunos confundiram os lados proporcionais levando ao erro, 17 acertam o item “b” (74%). Ao final desta avaliação percebemos que as atividades práticas ajudaram os alunos na resolução das questões e que se fossem utilizados materiais concretos na atividade em que os triângulos eram opostos pelo vértice, minimizaria a confusão que os alunos fizeram na questão 3 e 6b.

Figura 64 - Gráfico com o desempenho dos alunos na segunda avaliação.



Fonte: o autor

5.1 PRÁTICA: TÚNEL DE EUPALINOS

Para finalizar as atividades, propomos a atividade encontrada em Matemática Multimídia, elaborado pela Universidade Estadual de Campinas (RODRIGUES, 2010). Esse experimento conta com um roteiro metodológico para o professor, uma folha de acompanhamento para os alunos e um guia com informações adicionais para o professor. Neste experimento os alunos deverão encontrar uma maneira de planejar como será escavado um túnel partindo ao mesmo tempo de duas extremidades, uma em cada lado da montanha. O desafio é planejar como será a construção do túnel utilizando conceitos de geometria plana.

A história da humanidade possui muitos problemas resolvidos com ideias simples e criativas. Esses problemas se trazidos para os nossos dias, com a tecnologia que possuímos, seriam resolvidos com certa facilidade, mas para a época foram grandes feitos, por serem realizados com ferramentas rudimentares.

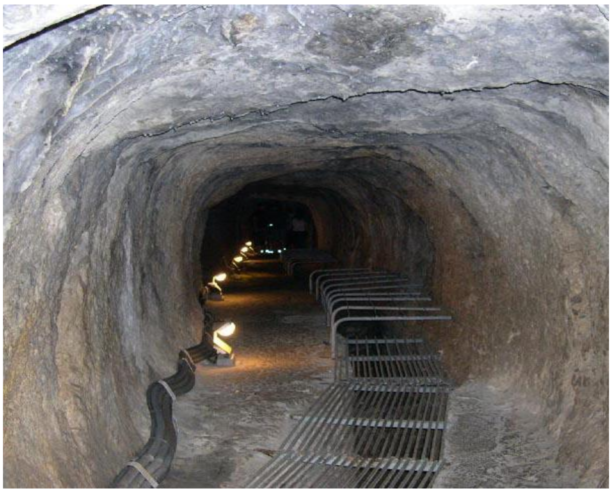
Há mais de 500 anos antes de Cristo, na ilha de Samos, Eupalinos, um engenheiro da época, recebeu a missão de construir um túnel para trazer a água existente no outro lado de uma montanha.

> O aqueduto de Eupalinos na cidade de Samos é uma das obras mais impressionantes da antiguidade grega. Esta cidade é na verdade uma ilha, localizada no mar Egeu, a cerca de 2 quilômetros da costa da Turquia. Nessa ilha, nasceu o filósofo e matemático Pitágoras (582-507 a.C). O aqueduto (ou túnel) de Samos possui 1036 metros de comprimento, de um lado a outro, atravessando a grande montanha de Kastron, começando do lado norte e terminando no lado sul. Este túnel se encontra a 55 metros acima do nível do mar, e a 180 metros abaixo do topo da montanha Kastron. Suas dimensões são 1,80 x 1,80, e, no seu interior, a profundidade varia de 2 a 9 metros. (UOL, 2010).

A construção do túnel através da montanha, embora existisse muita mão de obra disponível demoraria muito tempo, mas Eupalinos surpreendeu a todos ao propor agilizar a obra utilizando dois grupos de trabalho um em cada lado da montanha, assim o tempo para a construção se reduziria à metade, já que os grupos se encontrariam no meio, ou seja no interior da montanha.

"Assim foi feito (Figura 65) e o mais impressionante foi o pequeno erro em relação ao encontro dos túneis que distavam em 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Esses valores correspondem a menos de 1% do comprimento do túnel." (ALVES.L.F.G., 2018)

Figura 65 – Imagem do túnel de Eupalinos



Fonte: (POLEGATTO, 2012)

A atividade prática foi deixada para ser aplicada por último por necessitar de um maior domínio do conteúdo para que ela possa ser realizada.

Quando foi sugerido a atividade "Engenharia de Grego" proposta em, Matemática Multimídia (RODRIGUES, 2010) achamos muito interessante e resolvemos fazer primeiro para que quando os alunos fossem realizá-la, já saberíamos de antemão quais as dificuldades que eles encontrariam.

Este problema histórico da matemática nos possibilitou que usássemos a técnica de resolução de problemas proposta por Polya (1986) e também trabalhada por Dante (2010).

Para resolver com os alunos seguimos os passos apresentados no material e utilizamos a técnica de resolução de problemas propostos por Polya.

Os alunos foram separados em grupos, o material sugeria grupos de três alunos, mas como já havíamos formados grupos anteriormente, em outras atividades, por sugestão dos alunos seguimos com a mesma formação de grupos, ou seja cada grupo com cinco componentes.

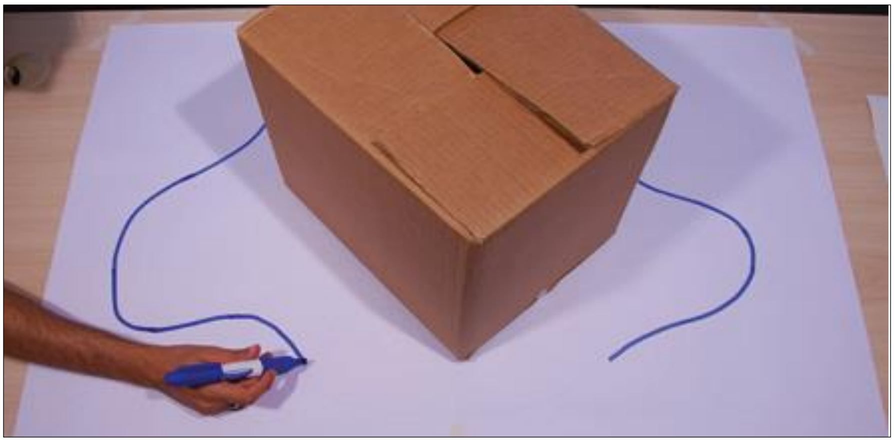
Problema: Planejar a construção de um túnel através de uma montanha, conhecendo os pontos de entrada e saída. Para economizar tempo as escavações devem ter início com duas frentes de trabalho, cada uma partindo de uma extremidade. Como garantir que os túneis se encontrem no interior da montanha?

O material necessário para a realização da atividade foram, duas cartolinas, régua, esquadro, compasso, transferidor, fita adesiva e caixa de papelão para simular a montanha.

Com os grupos formados foram dadas algumas orientações e regras a serem seguidas, cada grupo deve pensar a atividade, não sendo permitido circular entre os grupos. Para a execução do trabalho o obstáculo que representa a montanha não deve ser removido, nem fazer marcações sobre a montanha.

Para resolvermos o problema de Eupalinos, (Figura 66) temos que, com o auxílio de um objeto que impeça a visualização dos pontos opostos da montanha, marcar o contorno. Para isso, junte as carteiras para que nela possamos fixar duas cartolinas.

Figura 66 - Desenho do contorno da montanha com o obstáculo.



Fonte: (RODRIGUES, 2010)

Com o contorno marcado, devemos marcar os pontos de entrada e saída do túnel. Os pontos devem estar em lados opostos da montanha.

Cada grupo deve pensar e ir anotando como será feita a execução do trabalho. Como o material propõe, os grupos devem anotar as orientações a serem seguidas para a construção do túnel, um roteiro deve ser criado.

Após algum tempo percebi que os alunos estavam ficando inquietos, então circulando pelos grupos, notei que suas tentativas eram muito aleatórias, baseadas em; "eu acho que" então chamando a atenção de todos os grupos, e usando a resolução de problemas proposta por Polya (1986), relemos o problema e partimos para o primeiro passo: compreender o problema. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

Seguindo as orientações da técnica de resolução de problemas, em um rascunho os alunos foram orientados a fazer um desenho para visualizar o problema, também fiz o desenho no quadro. Com o desenho feito e os pontos marcados começamos a perguntar: Qual seria a melhor maneira de ligar os dois pontos? Já vimos algum problema parecido? Como podemos determinar essas medidas?

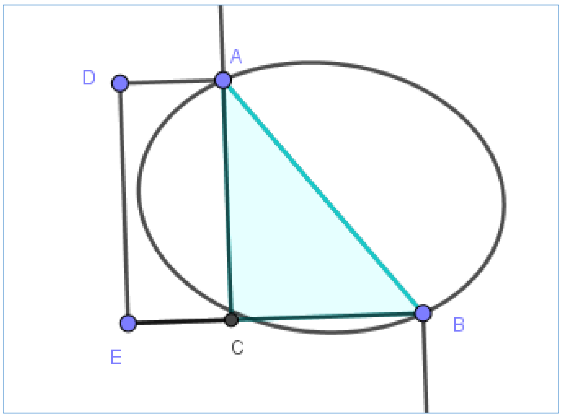
Nesse momento os alunos começaram a opinar sobre situações vistas nas práticas realizadas anteriormente. Anterior a essa atividade havíamos feito outras práticas, que precisávamos calcular distâncias inacessíveis. (Visto anteriormente).

Para auxiliar os alunos começamos um diálogo em que através de algumas perguntas fosse possível direcionar a atividade. Qual é o nosso objetivo? O que pede o problema? Cavar um túnel, começar nas duas extremidades, cavar em linha reta, se encontrar no meio da montanha, terminar o mais rápido possível, essas foram algumas das respostas dadas pelos alunos.

Segundo as orientações devemos lembrar de um problema similar, dividir o problema em problemas menores, são estratégias que podem auxiliar na resolução do problema original. O diálogo fez os alunos recordarem as atividades realizadas; determinar a largura de um rio, calcular a distância entre dois pontos.

O tempo que tínhamos para fazer a atividade nos obrigou a dar mais dicas para que pudessem terminar, então foram orientados a traçar uma poligonal no contorno da montanha, (Figura 67) para unir os dois pontos, mas os ângulos dessa poligonal teriam que ser todos ângulos retos.

Figura 67 – Desenho feito no GeoGebra que representa o contorno da montanha e a poligonal.



Fonte: o autor

Com essas dicas notei um certo alívio nos alunos que já estavam angustiados, pois todos os grupos perceberam o triângulo retângulo formado no interior da montanha.

Com a poligonal construída percebe-se que a medida do cateto AC é igual a medida do segmento da poligonal DE e podemos determinar o comprimento do cateto BC. (Figura 67), onde o ponto C da figura é tal que $BC = BE - AD$ e $AC = DE$.

Vamos agora explicar como garantir o alinhamento.

Construímos agora dois triângulos retângulos auxiliares BEF e HGA (figura 68) de modo que as razões entre os catetos $\frac{\overline{GH}}{\overline{HA}}$ e $\frac{\overline{BE}}{\overline{EF}}$ sejam iguais à razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

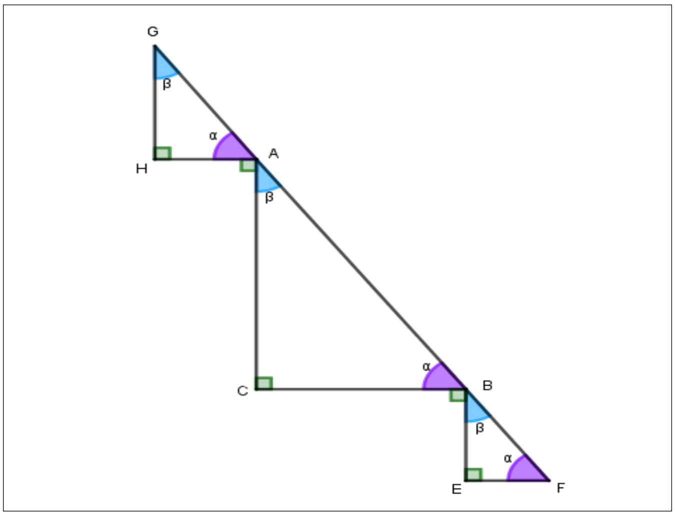
Como esses triângulos são retângulos e a razão entre os catetos é a mesma, eles são semelhantes pelo caso de semelhança LAL. Portanto, os ângulos

$$A\hat{B}C = B\hat{F}E = G\hat{A}H = \alpha \quad \text{e} \quad B\hat{A}C = F\hat{B}E = A\hat{G}H = \beta$$

Se os pontos A e B estiverem na reta FG, então teremos encontrado a solução.

Para mostrarmos isto, usamos a seguinte figura (figura 68), como os ângulos α e β são complementares, segue que os ângulos nos vértices A e B somam 180°. Logo, os pontos estão alinhados.

Figura 68 - Hipotenusas alinhadas



Fonte: o autor

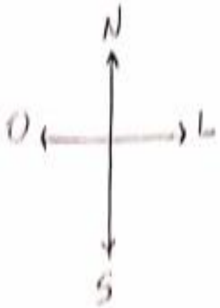
No momento da execução era preciso obedecer as regras já estabelecidas anteriormente, só depois de todas as marcações feitas retirar a caixa e traçar o segmento que determinará a direção das escavações.

Após as marcações serem feitas e a caixa retirada, foi o momento de traçar o percurso que teria o túnel. A marcação partiu das duas extremidades e percebemos que as “linhas” não ficaram exatamente alinhadas, o que motivou muitas perguntas. Um dos grupos achou que seu trabalho não deu certo porque usou triângulos de tamanhos diferentes. O motivo de usarem tamanhos diferentes para os triângulos, foi que do mesmo tamanho não caberia no papel. Expliquei que muitos fatores podem ter levado ao erro mas a diferença de tamanho, desde que mantida a proporcionalidade não, pois os triângulos são dois a dois semelhantes e o tamanho diferente não influenciaria, mas o que pode ter levado ao erro é a imprecisão dos instrumentos de medida ou erro na construção.

Na construção do túnel Eupalinos também cometeu um erro, o seu erro foi de menos de 1%, o que para a época é um erro muito pequeno. O erro de Eupalinos foi de 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Provavelmente o erro cometido na construção deve-se a imprecisão dos equipamentos, mas historicamente esse erro prova que o túnel foi cavado por duas frentes de trabalho, provando o quão fascinante foi o feito de Eupalinos.

Um dos grupos propôs uma solução diferente da solução de Eupalinos utilizando a semelhança e a congruência de triângulos (Figura 69).

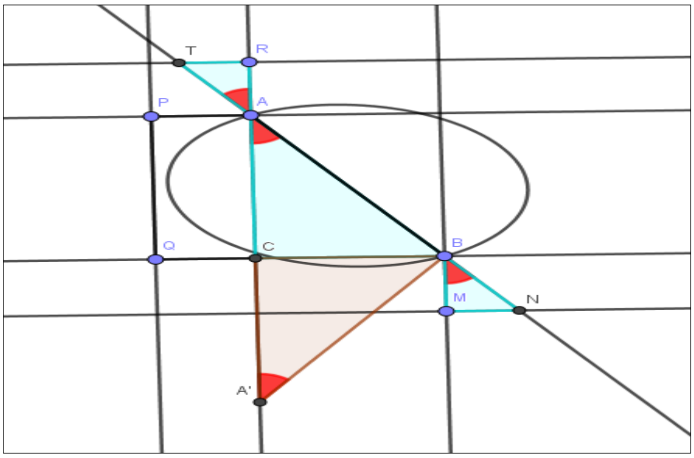
Figura 69 – Plano do grupo 2 para a construção do túnel.



- Considere A ao norte da montanha
- Traçamos uma reta em direção a oeste, saindo do contorno da montanha, no ponto P.
- Em seguida fazer um giro de 90° ao sul e traçar uma reta.
- Na altura do ponto q gire novamente 90° em direção a leste, de tal modo que a reta que parte de Q encontre o ponto B.
- Sobre QB marque C em que $QC = PA$
- Em C gire 90° ao sul e trace uma reta tal que $\overline{CA'} = \overline{Pq} = AC$
- De A' trace uma reta até B e $\Delta ABC \cong \Delta A'BC$
- O ângulo $C\hat{A}'B = C\hat{A}B$
- Na reta qB em B gire 90° ao sul e trace uma reta e marque o ponto M, gire 90° ao leste
- Agora construa o triângulo $\Delta M\hat{B}N$ com $\hat{B}$ igual ao ângulo $\hat{A}'$
- Faça o mesmo na entrada em A, de forma a ter $\Delta R\hat{A}T$ com $\hat{A} = \hat{A}'$

Fonte: o autor

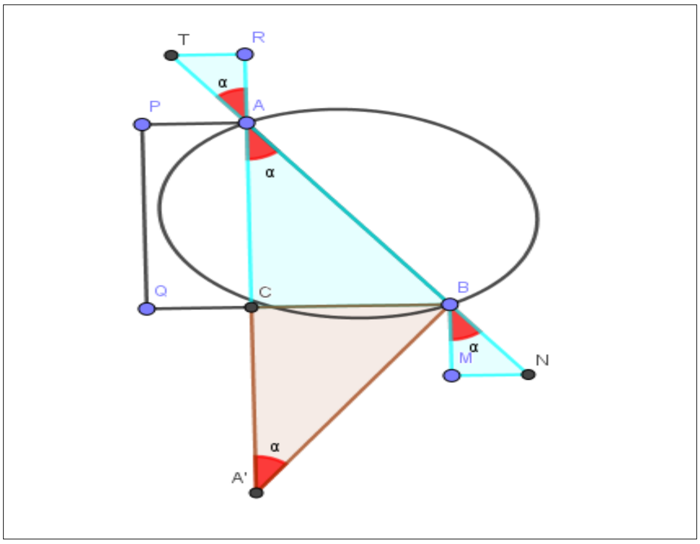
Figura 70 – Desenho da solução feita no GeoGebra.



Fonte: o autor.

Desenhamos no GeoGebra (figura 70) a solução proposta pelo grupo 2 e em conjunto analisamos a solução apresentada. Todos concordaram que a solução estava correta, apenas foi questionada a viabilidade de pôr em prática essa solução, se haveria espaço para a construção do triângulo congruente ao triângulo formado dentro da montanha. Se era viável ou não o importante é que o grupo pensou e deu outra solução, mostrando que entenderam o conteúdo.

Figura 71 – Solução sem as retas utilizadas para a construção.



Fonte: Autor

Para encerrar a atividade apresentamos a solução de Eupalinos existente no material disponível em “matemática multimídia” (RODRIGUES, 2010).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve por finalidade principal introduzir atividades práticas e resolução de problemas relacionados ao ensino de geometria, mais especificamente, semelhança de triângulos, com o objetivo de despertar um maior interesse do assunto pelos alunos e melhorar o aprendizado.

Ao realizarmos a pesquisa percebemos que os alunos tinham conhecimentos superficiais de geometria, sem precisão de linguagem e definições. Por isto, precisamos revisar alguns conceitos básico antes de iniciarmos o assunto.

Quando aplicamos o primeiro teste, depois das aulas teóricas, percebemos que muitos alunos, 52%, apresentam algum tipo de dificuldades no entendimento das questões ou dificuldades na colocação dos dados, o que levou a ocorrência de erros, então necessitaríamos utilizar outras estratégias para alcançar nosso objetivo. Passamos a utilizar a técnica de resolução de problemas, seguindo os passos estabelecidos por este método e o entendimento teve significativas melhoras.

A utilização da técnica deu-se da seguinte forma, compreensão do problema, com a leitura do mesmo, seguido de alguns questionamentos para despertar a curiosidade e o interesse dos alunos, estabelecimento de um plano e a execução do plano, com o apoio dos desenhos e a utilização dos teoremas vistos anteriormente e finalmente o retrospecto, onde utilizamos o software GeoGebra para verificar se o resultado comparado com a construção eram compatíveis.

Ao utilizarmos a técnica de resolução de problemas proposta por Polya, a partir das atividades práticas no pátio da escola e principalmente na atividade da elaboração do plano para escavação do túnel, seguimos os passos propostos em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” (POLYA 2006) de forma a instigar os alunos a refletir sobre suas ações no desenvolvimento de cada uma das atividades, tornando assim o desempenho dos alunos visivelmente melhor.

A análise que podemos fazer é que muitos alunos, 52%, apresentavam dificuldade no entendimento das questões ou dificuldades na colocação dos dados na primeira avaliação, esse número diminuiu muito passando para 23% na segunda avaliação, ficando evidente que quando trabalhamos com atividades práticas e com a resolução de problemas mais alunos acertaram as questões e quando utilizamos recursos em que precisava que o aluno tivesse uma postura mais ativa, construção no GeoGebra de triângulos semelhantes e cálculos de distâncias inacessíveis, o envolvimento comparado com a apresentação apenas teórica do conteúdo, foi significativamente maior.

Temos que considerar, que os livros didáticos deveriam contemplar mais atividades desafiadoras, que permitam construir um maior significado dos conceitos envolvidos. Atividades repetitivas que apenas exigem a aplicação de fórmulas, também são importantes, mas elas não devem ser o foco principal e sim os problemas, pois são eles juntamente com atividades práticas que proporcionam uma melhor aquisição de conhecimento.

Também é necessário que os livros didáticos estejam em sintonia com a realidade educacional, científica e tecnológica, ou seja, utilizar as TIC, tão presentes na vida dos nossos alunos e até agora ignorados pelos autores, como representado no quadro 1, visto anteriormente.

Os grupos que se empenharam em coletar os dados com mais rigor e cuidado, chegaram a resultados mais próximos ao real, e se apropriaram com mais clareza dos conceitos geométricos vistos em aula.

Portanto, o uso de diferentes formas de apresentar o conteúdo, proporciona aos alunos possibilidades de eles perceberem que a matemática tem muita utilidade prática no dia a dia, que alguns alegaram não terem percebido anteriormente.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Á.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática**, 9º ano. 3ª ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

ALVES.L.F.G. **Engenharia de Grego**. Ano desconhecido. Disponível em: < https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1010 >. Acesso:15 de novembro de 2018

AVILA, G. **Reflexões sobre o ensino de Geometria**. In: RPM - Revista do Professor de Matemática, n. 71 – 1º quadrimestre de 2010 (p. 3 – 8).

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**, 9º ano. 8ª ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.7, n.2, p.197-219, novembro 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/38224/29125>. Acesso: Setembro de 2018.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1987.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: **matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Secretaria de Educação Fundamental, Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica,** 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em: 16 nov 2018.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática** . São Paulo, Editora Ática, 2010.

DANTE, L. R. **Matemática: contextos e aplicações: ensino médio**, 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática: v.4**, 3ª ed. São Paulo: Ática, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. – 1ª reimpressão 2005.

GAY, M. R. G. (Editora). **Projeto Araribá Matemática**. 9º ano, 4ª ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GEORGIA, N. **Biografia do filosofo Tales de Mileto**. Disponível em: < https://www.estudopratico.com.br/biografia-do-filosofo-tales-de-mileto/>. Acesso 10/01/2019.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas SA, 2008.

KALEFF, A. M. **Tomando o ensino da GEOMETRIA em nossas mãos**... In: A Educação Matemática em Revista - SBEM. Ano I, n. 2 - 1º Semestre 1994 (p. 19 -25).

LIMA, E.L. **Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da matemática.** Revista do professor de Matemática, v.41, p1-6. 1999.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria.** Rio de Janeiro, Graftex, 1991.

LOBO, J. S.; BAYER. A. **O Ensino de Geometria no Ensino Fundamental**. In: ACTA SCIENTIAE – v.6 – n.1 – jan./jun. 2004. (p. 19-26).

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista - SBEM. Ano 03, n.4 - 1º Semestre 1995 (p. 3-13).

MUNIZ NETO, Antônio Caminha; **Geometria:** Rio de Janeiro, SBM, 2013.

UOL APOIO ESCOLAR**. O Brilhante Túnel de Eupalinos.** 2010. Disponivel em: <http://clickeaprenda.uol.com.br/portal/mostrarConteudo.php?idPagina=20785.> Acesso em 15/11/2018.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências.** In Revista Zetetidé. Ano I, n. 1, 1993

POLEGATTO, P. **Túnel de Eupalinos.** 2012. Disponivel em: <https://www.percepolegatto.com.br/2012/02/08/eupalino/>. Acesso em: 10 de dezembro de 2018.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** 2ª edição. Tradução Heitor Lisboa de Araújo, Rio de Janeiro, Interciência, 2006.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves**. "Homotetia";** *Brasil Escola*. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/homotetia.htm>. Acesso em: 09 de novembro de 2018.

RODRIGUES, C. I.; et al. **Engenharia de grego.** UNICAMP, 2010. Disponível em: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1010>. Acesso em: 22 novembro de 2018

APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

PROFMAT Mestrado Profissional em Matemática

Universidade Federal de Santa Maria 1960 UFSM

1) Responda com suas palavras, o que você entende por:

a) Segmento de reta

....
....

b) Reta

....
....

c) Retas paralelas

....
....

d) Polígono

....
....

e) Triângulo

....
....

f) Figuras semelhantes

....
....

g) Triângulos semelhantes

....
....

h) Altura de um triângulo

....
....

i) Cevianas

....
....

j) Ângulo

....
....

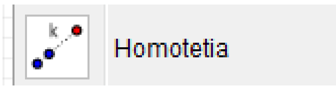
APENDICE B - ATIVIDADE COM O GEOGEBRA PARA CONSTRUIR TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Atividade 1: Construção de dois triângulos semelhantes.

a) Construa o triângulo ABC, usando a ferramenta "polígono", 

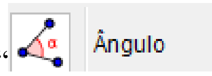
, janela 5.

b) Marque um ponto D fora do triângulo e logo após, crie retas que passe por um dos vértices do triângulo e por este ponto D.

c) Na janela 9 clique na opção "homotetia", 

, clique no interior do triângulo para seleciona-lo e em seguida no ponto D. A caixa de homotetia pedindo o fator de ampliação (fator maior que 1) ou redução (menor que 1). Digite o fator, (ex: 1,3) e clique em ok ou pressione enter. Um novo triângulo surgira a partir do triângulo ABC e será A'B'C'.

d) Verifique se a razão de semelhança entre os dois triângulos é igual ao fator colocado na caixa de homotetia. Para isso, faça a divisão das medidas dos lados do triângulo A'B'C' pelas medidas correspondentes do triângulo ABC. (ex: a'/a).

e) Marque os ângulos dos triângulos ABA e A'B'C' e observe se os ângulos correspondentes possuem a mesma medida. Para isso clique na janela 8 opção "ângulo " 

, em seguida nas retas que formam o ângulo, primeiro a direita do ângulo e depois na reta a esquerda do ângulo.

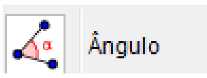
Perguntas:

Atividade 2: Construção de triângulos congruentes, utilizando o caso LAL.

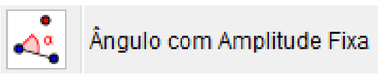
a) Construa um triângulo ABC com a opção "polígono" 

, janela 5 da barra de ferramentas.

b) Clique com o botão direito do mouse no interior do triângulo e selecione a opção "propriedades". Mude a cor do triangulo e marque "transparência zero".

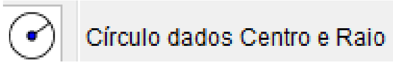
c) Marque o ângulo (CBA), clique na janela 8 opção "ângulo", 

aparecera a medida do ângulo α com medida em graus.

d) Na janela 8 da barra de ferramentas escolha a opção "ângulo com amplitude fixa" 

e clique em dois pontos da tela, a janela vai abrir , digite a medida igual a do ângulo α e em seguida ok. Aparecera na tela o ângulo DED' que é congruente ao ângulo CBA.

e) Construa uma circunferência com centro em E, e raio com a mesma medida do lado AB. Clique na janela 6 da barra de ferramentas na opção "círculo dado centro e raio"



. Na caixa digite o raio com mesma medida do lado AB, e clique em ok.

f) De modo análogo, construa outra circunferência com centro em E e raio igual a medida do lado BC.

g) Trace as semirretas partindo de E e passando por D e outra partindo de E e passando por D’.

h) Determine o ponto de interseção da semirreta com a circunferência de raio igual a medida de c (ponto F). De modo análogo com a outra semirreta e o circunferência de raio com medida a (ponto G).

i) Na janela 3 da barra de ferramentas clique em segmento


e construa o triangulo EFG.

Perguntas:

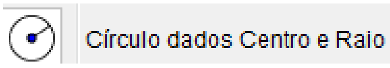
Atividade 3: Construção de triângulos congruentes, utilizando o caso LLL.

a) Construa um triângulo ABC com a opção “polígono”


janela 5 da barra de ferramentas.

b) Clique com o botão direito do mouse no interior do triângulo e selecione a opção “propriedades”. Mude a cor do triangulo e marque “transparência zero”.

c) Na janela 2 da barra de ferramentas, na opção “ponto”


marque um ponto D fora do triângulo, construa uma circunferência com centro em D e raio igual a medida do segmento AB, clicando na janela 6 opção “círculo dado centro e raio”


.

d) Marque um ponto E nesta circunferência e observe que DE é o raio, e possui a mesma medida do segmento AB.

e) Construa outra circunferência, análoga a anterior, com centro no ponto E e raio igual ao segmento AC.

f) De maneira análoga, construa uma circunferência com centro em D e raio igual a medida do segmento BC.

g) Marque o ponto de interseção (ponto F) das circunferências de centro em D e em E, Construa o triângulo DEF.

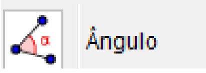
Perguntas:

Atividade 4: Construção de triângulos congruentes utilizando o caso ALA.

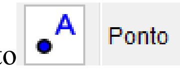
a) Construa um triângulo ABC com a opção “polígono”


janela 5 da barra de ferramentas.

b) Clique com o botão direito do mouse no interior do triângulo e selecione a opção “propriedades”. Mude a cor do triangulo e marque “transparência zero”.

c) Determine as medidas dos ângulos CBA e ACB. Para isso clique na janela 8 opção “ângulo “ 

em seguida nas retas que formam o ângulo, primeiro a direita do ângulo e depois na reta a esquerda do ângulo.

d) Construa um segmento DE. Clique na janela 2 na opção “ponto 

” e construa o segmento DE, clicando o ponto D mais à direita e o ponto E mais à esquerda, com a mesma medida do segmento BC.

e) Crie um ângulo congruente ao ângulo B com vértice no ponto E. Para isto clique na janela 8 e na opção “ângulo com amplitude fixa” 

, clique primeiro no ponto D depois no ponto E e digite o valor do ângulo B, observe que surgiu um ponto D’. De mesmo modo construa um ângulo congruente a C, clicando primeiro no ponto E e depois no ponto D, marque a opção “sentido horário”, observe que foi criado o ponto E’.

f) Trace as semirretas ED’ e DE’. Marque a interseção das duas semirretas (ponto F).

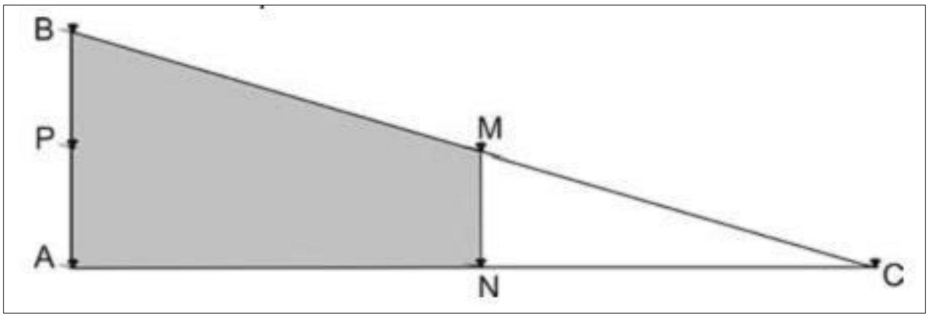
g) Construa o triângulo DEF e esconda as outras construções auxiliares, na janela 11 opção “exibir/esconder objeto” ou desmarcando na janela de álgebra.

ANEXO A - QUESTÕES DE ENEM E VESTIBULAR COM SEMELHANÇA

1) (Enem 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metros. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metros
b) 3,0 metros
c) 5,4 metros
d) 5,6 metros
e) 7,04 metros

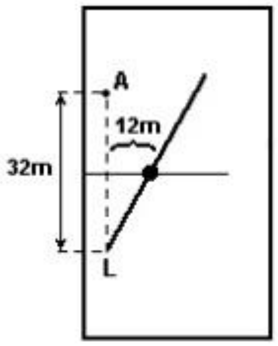
2) (Enem 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

a) Á mesma área do triângulo AMC
b) À mesma área do triângulo BNC
c) À metade da área formada pelo triângulo ABC
d) Ao dobro da área do triângulo MNC
e) Ao triplo da área do triângulo MNC

3) (Fuvest 2004) Um lateral L faz um lançamento para o atacante A, situado a 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha do meio de campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está a mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



a)18,8m

b)19,2 m

c) 19,6m

d) 20m

e) 20,4m