UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

CAROLINE VANESSA WENDLAND

LOGARITMOS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: ELABORAÇÃO DE UM MATERIAL PARADIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) no Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) como requisito para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Regina Helena Munhoz

JOINVILLE - SC

2019

Wendland, Caroline Vanessa
LOGARITMOS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: : ELABORAÇÃO DE UM MATERIAL PARADIDÁTICO / Caroline Vanessa Wendland. -- 2019.
153 p.

Orientadora: Regina Helena Munhoz
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

1. Logaritmos. 2. História da Matemática. 3. Livro Paradidático. I. Munhoz, Regina Helena. II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

Logaritmos e História da Matemática: Elaboração de um Material Paradidático

por

Caroline Vanessa Wendland

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRA EM MATEMÁTICA

Área de concentração em “Ensino de Matemática”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

Regina Helena Munhoz
Profa. Dra. Regina Helena Munhoz
CCT/UDESC (Orientadora/Presidente)

Tânia Baier
Profa. Dra. Tânia Baier
FURB/Blumenau

EBFigueiredo
Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
CCT/UDESC

Joinville,SC, 24 de setembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado capacidade, disposição e força para superar as dificuldades ao longo dos últimos anos.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A Universidade do Estado de Santa Catarina e seu corpo docente, que oportunizaram minha formação inicial e a conclusão deste mestrado. Em especial, sou grata a minha orientadora, pela atenção, suporte e correções.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha trajetória neste curso, o meu agradecimento.

“Ciência, amor, sabedoria,
- tudo jaz muito longe,
sempre...
(Imensamente fora do nosso
alcance!)

CECÍLIA MEIRELES

RESUMO

O presente trabalho busca incentivar a utilização da história da Matemática como uma ferramenta para os processos de ensino e aprendizagem de logaritmos. Para tanto, objetivou-se construir um livro paradidático que contemplasse essa abordagem diferenciada. Para relacionar adequadamente esses temas, desenvolveu-se uma pesquisa qualitativa. Primeiramente foram explorados conceitos, propriedades e aplicações dos logaritmos, tornando as análises seguintes mais consistentes. Essas análises foram realizadas em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular de Santa Catarina, livros didáticos, nos quais verificou-se a (in)existência da apresentação da relação do tema logaritmo com a história da Matemática, e em avaliações, como Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e vestibulares da região de Joinville, Santa Catarina. Após explorar o assunto logaritmos, foi elaborado um embasamento teórico sobre a tendência em Educação Matemática denominada História da Matemática. Finalizando a etapa de pesquisa bibliográfica, investigou-se sobre materiais paradidáticos, particularmente os de Matemática. Por fim, foi desenvolvido um livro paradidático, que introduz o tema logaritmos utilizando tópicos de história da Matemática, demonstrações e propostas de exercícios. O conjunto do estudo realizado pode despertar em professores e alunos motivação para seguir no processo educacional e se envolver significativamente na construção do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Logaritmos. História da Matemática. Livro Paradidático.

ABSTRACT

This paper seeks to encourage the use of de History of Mathematics as a tool for the teaching and learning process of logarithms. Therefore, the objective was to build a paradidatic book that contemplated this differentiated approach. To properly relate these themes, a qualitative research was developed. First, concepts, properties and applications of the logarithms were explored, making the following analyzes more consistent. These analyzes were carried out in official documents, such as the National Curriculum Parameters and the Santa Catarina Curriculum Proposal, textbooks, which verified the (in)existence of the presention of the relation of the logarithm theme with the History of Mathematics, and in evalutions, such as ENEM and entrance exams in the Joinville region, Santa Catarina. After exploring the subject logarithms, a theoretical background was elaborated on the trend in Mathematical Education called of History of Mathematics. At the end of the bibliographic research stage, we investigated paradidatic materials, particularly Mathematics. Finally, a paradidatic book was developed introducing the theme logarithms using topics of the mathematical history, demonstrations and exercise proposals. The set of the study can arouse in teachers and students motivation to follow the educational process and to be significantly involved in the construction of mathematical knowledge

Keywords: Logarithms. History of Mathematics. Paradidatic Book.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACAFE) - Associação Catarinense de Fundações Educacionais

(BNCC) - Base Nacional Comum Curricular

(ENEM) - Exame Nacional do Ensino Médio

(PCN)- Parâmetros Curriculares Nacionais

(PNLD) - Programa Nacional do Livro Didático

(PROFMAT) - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

(SBHMat) - Sociedade Brasileira de História da Matemática

(UDESC) - Universidade do Estado de Santa Catarina

(UFSC) - Universidade Federal de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante minha vida acadêmica, o estudo da história da Matemática sempre me despertou muito interesse, inclusive meu trabalho de conclusão da graduação abordou esse assunto. Ao analisar possibilidades para desenvolver minha dissertação de mestrado, a presença desse tema era uma certeza. Foi então que a ideia de construir um elo com o tema logaritmos surgiu. Em minha breve carreira docente, esse assunto foi o que mais me chamou a atenção pela dificuldade encontrada pelos alunos. Particularmente, é um dos meus conteúdos preferidos da Educação Básica, então, ao me deparar com a falta de facilidade e envolvimento dos alunos acabei atraída para essa linha de estudos.

Diversos trabalhos da área de Educação Matemática discutem os processos de ensino e aprendizagem visando métodos de torná-los mais eficientes para o avanço da educação. No Ensino Médio brasileiro, em especial, existe uma urgência por melhorias, procurando-se o real desenvolvimento das competências e habilidades que se espera que os estudantes adquiram ao longo da última etapa da Educação Básica.

O tema logaritmo está previsto para o primeiro ano do Ensino Médio. Típico das aulas tradicionais, geralmente o primeiro contato com os logaritmos se dá por meio de uma aula expositiva seguida de exercícios copiados do quadro ou do livro didático. Esse último é fonte absoluta de conhecimento para muitos estudantes, e alguns professores também. Muitas vezes o livro didático guia a ordem de abordagem dos conteúdos durante o ano letivo. Não é comum o incentivo da utilização de materiais complementares e diferenciados de Matemática para professores e alunos. Talvez isso ocorra pela carência de materiais nas escolas, bem como o desconhecimento e escassez de paradidáticos para o ensino da Matemática, em especial os voltados ao Ensino Médio.

Em específico, o ato de introduzir o tema ‘logaritmos’ não costuma ser fácil. Sua notação diferenciada, a série de propriedades que vêm em sequência e o comportamento gráfico da função geralmente assustam por sair do padrão reta/parábola e geram aversão nos estudantes. Nem sempre a proposta de ensino do docente alcança os alunos da maneira esperada, de forma que obtenham apreensão significativa do conteúdo. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+, 2006) falam especialmente das funções exponenciais e logarítmicas.

> O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas. As funções exponencial e logarítmica, por exemplo, são usadas para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente é muito rápido, sendo aplicada em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras. (BRASIL, 2006, p. 121).

Em suas mais diversas formas de aplicações, os logaritmos tornam possível a resolução de inúmeros problemas. Entretanto, é importante destacar que os logaritmos não surgiram através de um estudo rápido. Há um longo processo de desenvolvimento inerente a forma como o conteúdo é conhecido atualmente. O saber histórico dessa composição de conceitos e propriedades pode ser instrumento de apoio para os processos de ensino e aprendizagem, utilizando a história da Matemática como recurso didático.

Buscando explorar a origem dos logaritmos e evidenciar a importância do conteúdo em questões atuais, torna-se possível relacionar a aplicação desse tema em diversas áreas com a história da Matemática. Uma das formas de divulgar e fortalecer essas tendências de ensino e aprendizagem surgiu na década de 1980: os paradidáticos de Matemática. Esse tipo de material pode “acabar reforçando e legitimando determinadas crenças e concepções a respeito da matemática e de seu ensino” (MIORIM; VILELA, 2010, p. 259). Portanto, procurar-se-á unir a ideia de um produto educacional para o Ensino Médio, a tendência História da Matemática e o conteúdo logaritmos num paradidático de Matemática.

Feitas as primeiras considerações, pergunta-se: conhecendo a história, o conceito, as propriedades e a presença do tema logaritmos no Ensino Médio e em suas avaliações posteriores, como possibilitar o ensino de logaritmos utilizando a história da Matemática?

Para responder à pergunta motivadora dessa pesquisa, tem-se como objetivo geral desenvolver um livro paradidático para a abordagem do tema logaritmos através da história da Matemática. Para alcançar este objetivo principal, tem-se objetivos específicos que auxiliam no seu alcance, são eles:

- Reconhecer aspectos históricos dos logaritmos;
- Enunciar o conceito, as propriedades e aplicações dos logaritmos;
- Identificar como o tópico é abordado no Ensino Médio e analisar o tópico em alguns livros didáticos;

- Investigar como o tema vem sendo abordado em exames de nível nacional do Ensino Médio e vestibulares de algumas instituições de Ensino Superior do estado de Santa Catarina nos últimos três anos;
- Estudar a tendência de ensino História da Matemática;
- Reconhecer e analisar livros paradidáticos para o ensino da Matemática;
- Construir um livro paradidático para os processos de ensino e aprendizagem de logaritmos.

Esta dissertação está dividida em nove capítulos, acrescida de referências e apêndice, sendo essa introdução o primeiro dos capítulos.

No segundo capítulo há uma revisão de literatura de dissertações do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Nele, são apresentadas considerações acerca de trabalhos que possuem semelhanças com a proposta dessa pesquisa. Apresenta-se também, em comparação aos demais trabalhos aqui apresentados, o que esse traz de diferente e suas possíveis contribuições com a área.

O terceiro capítulo apresenta a metodologia de pesquisa adotada nesta dissertação. Fala-se sobre o método qualitativo, pesquisa bibliográfica e, ainda, a respeito do produto educacional desenvolvido.

No quarto capítulo, encontra-se o panorama histórico do desenvolvimento dos logaritmos. Também é realizado o estudo do mesmo tema, com definições, propriedades, teoremas e demonstrações. Por fim, alguns exemplos de aplicações dos logaritmos são apresentados.

O quinto capítulo apresenta algumas análises. Primeiramente, é discutido o que aparece sobre logaritmos e história da Matemática nos documentos oficiais. Na segunda seção, tem-se as análises de livros didáticos, verificando a forma como os logaritmos são abordados neste tipo de material. A última seção deste capítulo tem como objetivo verificar como o tema logaritmos aparece em recentes avaliações para selecionar alunos para o ensino superior.

O sexto capítulo contempla o estudo da tendência em educação matemática chamada História da Matemática. Já o sétimo capítulo apresenta estudos e análises de livros paradidáticos.

No oitavo capítulo, tem-se a breve apresentação da organização do produto educacional e algumas considerações sobre o mesmo.

Para finalizar, o último capítulo contém considerações finais sobre esta pesquisa, bem como perspectivas para futuros trabalhos. Evidencia-se, assim, a possível contribuição desta dissertação para os processos de ensino e aprendizagem de logaritmos.

2 REVISÃO DE LITERATURA: DISSERTAÇÕES DO PROFMAT

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) apresenta no Artigo 23 de seu regimento a obrigatoriedade do trabalho de conclusão final do programa. Segundo o Artigo 21, este trabalho "poderá ser apresentado em diferentes formatos, tais como dissertação, [...], desenvolvimento de materiais didáticos e instrucionais e de produtos[...], de acordo com temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática da Educação Básica" (p.5). Como esta dissertação é requisito parcial para conclusão do curso do programa PROFMAT, optou-se por explorar o banco de dissertações desse programa, buscando trabalhos relevantes referentes ao tema aqui proposto. Foram escolhidos trabalhos recentes, preferencialmente a partir de 2013.

Realizando o levantamento de trabalhos na área, a fim de verificar a existência de dissertações semelhantes à esta pesquisa, alguns estudos foram selecionados. Brener (2013) é um desses. O autor foi orientado no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pelo recentemente falecido doutor Elon Lages Lima. O objetivo do trabalho foi desenvolver uma sequência didática para o estudo da função logarítmica utilizando o *software* Geogebra. Para tanto, primeiramente realizou-se uma análise qualitativa de seis livros didáticos do Ensino Médio. Verificou-se que as aplicações apresentadas são limitadas aos estudos de juros e crescimento populacional. Também nenhum dos livros apresenta atividades que envolvam recurso computacional, apenas um apresenta a definição de logaritmo geometricamente e um outro justifica as propriedades formais de exponenciação.

Outro trabalho que analisa o tema logaritmos em livros didáticos é o de Gomes (2018), desenvolvido na Universidade Estadual do Piauí (UESPI). Buscando verificar quais saberes relacionados aos logaritmos foram priorizados ou omitidos nos livros didáticos, construiu sua dissertação conceituando logaritmos, apresentando sua dimensão metodológica e avaliativa, analisando alguns livros didáticos e propondo tópicos complementares referentes ao conteúdo, usando tendências de ensino como História da Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's). Em suas análises concluiu que o conteúdo "está apresentado de forma satisfatória, levando em consideração o equilíbrio entre as Componentes Básicas: conceituação, manipulação e aplicações. Foi visto também que a maioria dos livros ignoram o número '*e*' e o logaritmo natural" (GOMES, 2018, p. 75).

Na dissertação de Lucca Junior (2017), há uma proposta de abordagem do tema logaritmos utilizando história, aplicações e o cálculo diferencial e integral. A pesquisa, desenvolvida na Universidade Federal do ABC (UFABC), aborda o desenvolvimento histórico dos logaritmos, determina-os mesmos com definições atuais, aponta dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem deste conteúdo e relaciona o conteúdo com outras áreas, como Química, Física e Biologia. Limites e integrais envolvendo exponenciais e logaritmos enriqueceram o trabalho. O autor defendeu o uso da história nas aulas de Matemática, qualificando-a como essencial para o ensino.

> A História é sempre de grande importância para um povo, pois por meio dela ele torna–se consciente do caminho de desenvolvimento tomado por seu espírito, que se expressa em leis, modos, costumes e fatos. Estudar a História de um determinado assunto é aprender o sentido das transformações. Não há como ensinar um conteúdo seja ele qual for, sem uma visão histórica, ainda que sucinta, de seu desenvolvimento. E na História que se percebe as razões de existência do assunto. O aluno deve ter uma ideia da disciplina como um todo e só assim terá motivação para estuda–la. (LUCCA JUNIOR, 2017, p. 11).

No trabalho de Ramos (2015), que concluiu o mestrado na Universidade Federal do Paraná (UFPR), encontra-se uma pesquisa interessante sobre o tema logaritmo. A autora iniciou apresentando análises de documentos oficiais da educação brasileira, bem como tendências metodológicas da Educação Matemática. Além disso, fez um panorama histórico destacando a importância de alguns estudiosos para o desenvolvimento deste conteúdo. A autora também definiu e caracterizou as funções exponenciais e logarítmicas. Por fim, listou aplicações dessas funções com propostas de problemas. Foram apresentadas teoria e atividades de juros e perdas contínuas, crescimento populacional, desintegração radioativa, eliminação de álcool pelo organismo, método do Carbono 14, resfriamento de um corpo, intensidade sonora, escala musical temperada, escala Richter e pH de soluções. As atividades exploradas foram selecionadas em provas de nível nacional anteriores e até mesmo retiradas de Lima (1996).

Para finalizar este reconhecimento de trabalhos com propostas semelhantes ao plano da presente dissertação, destaca-se Pinto (2013). Nessa dissertação, desenvolvida no programa PROFMAT da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), é encontrado um breve histórico geral dos paradidáticos no Brasil, bem como as vantagens de utilizar esse tipo de material nos processos de ensino e aprendizagem. Também há uma proposta de texto paradidático como motivação para o ensino de Matemática. Aparecem detalhes da sua aplicação com alunos do Ensino Médio e a análise de resultados obtidos. Neste caso específico, por parte dos alunos, os comentários foram “desperta o interesse”, “incentivo à leitura”, “melhora o entendimento”, entre outros. Na pesquisa aplicada com os professores, verificou que 87% sente falta de paradidáticos e 100% julga este material como motivador para o estudo da Matemática.

Utilizando os seletores “logaritmos” e “história da matemática”, o número de trabalhos encontrados é considerável. Ao utilizar o seletor “paradidático” isto não se repete. Não foram encontrados no banco de dissertações do PROFMAT outros trabalhos recentes que explorassem paradidáticos ou que apresentassem um produto educacional nesta linha.

3 CAMINHOS METODOLÓGICOS

Para descrever a metodologia a ser adotada para o desenvolvimento deste trabalho, inicia-se classificando-o como uma pesquisa qualitativa, a qual inclui, segundo Moreira (2002), as seguintes características:

> 1) A interpretação como foco; 2) A subjetividade é enfatizada; 3) A flexibilidade na conduta do estudo; 4) O interesse é no processo e não no resultado; 5) O contexto como intimamente ligado ao comportamento das pessoas na formação da experiência; e 6) O reconhecimento de que há uma influência da pesquisa sobre a situação, admitindo-se que o pesquisador também sofre influência da situação em pesquisa. (MOREIRA, 2002, p. 56).

De acordo com Goldenberg (2007), na pesquisa qualitativa "a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória, etc." (GOLDENBERG, 2007, p. 14).

Pesquisar, segundo Demo (2001), é um "processo que deve aparecer em todo trajeto educativo, como princípio educativo que é na base de qualquer proposta emancipatória" (DEMO, 2001, p. 16). Ainda, para esse autor, "pesquisa deve ser vista como processo social que perpassa toda vida acadêmica e penetra na medula do professor e do aluno" (DEMO, 2001, p. 17).

Tratando-se de um trabalho teórico com desenvolvimento de um produto educacional, a pesquisa bibliográfica se faz essencial para o desenvolvimento do trabalho final.

> A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. (GIL, 1989, p.710).

Vista a ideia de desenvolvimento de pesquisa bibliográfica para Gil (1989), é possível contemplar alguns dos objetivos específicos deste trabalho, tais como reconhecer aspectos históricos dos logaritmos, enunciar o conceito, as propriedades e aplicações dos logaritmos e estudar a tendência História da Matemática. Isso porque, segundo esse autor, "a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente" (GIL, 1989, p. 71).

Ribeiro (2005) reforça que a principal diferença entre um mestrado acadêmico e um mestrado profissional é o produto. O PROFMAT pode ser classificado como mestrado profissional generalista e focalizado, visto que práticas são revistas criticamente e uma nova instrumentalidade para solucionar problemas é apresentada, gerando a reflexão sobre processos e a união da teoria com a prática. Ribeiro (2005) destaca que, no mestrado profissional, “o objetivo é formar alguém que, no mundo profissional externo à academia, saiba localizar, reconhecer, identificar e, sobretudo, utilizar a pesquisa de modo a agregar valor a suas atividades, sejam essas de interesse mais pessoal ou mais social” (RIBEIRO, 2005, p. 15). Como este trabalho final do mestrado profissional pretende satisfazer esta condição de transferência rápida e direta do conhecimento científico para a sociedade, ao findar da pesquisa bibliográfica foi desenvolvido um produto educacional, visando uma abordagem diferenciada do conteúdo logaritmos, podendo ser utilizado por outros profissionais da área e estudantes interessados.

Em resumo, no decorrer desta pesquisa, procurou-se primeiramente, através de pesquisas bibliográficas, a compreensão do contexto, a interpretação e análise de panoramas históricos acerca dos logaritmos. Semelhantemente, foi estudada a tendência de ensino História da Matemática, bem como os materiais paradidáticos. Por fim, houve a produção de um material paradidático para oportunizar maior aprofundamento e melhor entendimento do tema logaritmos no Ensino Médio. Este foi construído de forma estratégica, buscando esclarecer de forma singela o desenvolvimento do tema logaritmos e construir o domínio sobre esse tema.

O livro paradidático produzido nesta pesquisa é um material composto por três unidades: a primeira tem como foco a história dos estudos acerca dos logaritmos, a segunda traz as definições e demonstrações em linguagem atual (como aparece nos livros didáticos atualmente utilizados) e a terceira unidade tem como objetivo apresentar aplicações e propostas de atividades. Em todos os capítulos encontram-se exercícios sobre o que foi exposto anteriormente no respectivo capítulo. Este material traz uma orientação ao professor e também ao aluno, que pode vir a utilizar o livro de forma independente em seus estudos. Desta forma, é um material de fácil compreensão e acesso, visto que estará disponível na rede após aprovação da dissertação.

4 OS LOGARITMOS

Neste capítulo primeiramente são reconhecidos aspectos históricos dos logaritmos. Posteriormente são apresentados os estudos realizados sobre as definições, propriedades, teoremas, caracterizações e as suas aplicações.

4.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Para a apresentação de aspectos históricos dos logaritmos foram utilizados Boyer e Merzbach (1996), especificamente o capítulo 16, Eves (2004), capítulo 9, e Maor (2008).

No meio da difusão de obras eruditas, em 1447 é impresso o primeiro livro da Europa Ocidental, seguido de mais de trinta mil outras edições até o final do século. Já em 1478 é impressa a rara *Aritmética de Treviso*, a obra anônima que trata de aritmética comercial, envolvendo questões recreativas e relações com escambo. Foi a primeira obra impressa de Matemática do Ocidente, seguida de aproximadamente outras três centenas até o século XVII. Na Alemanha, em especial, foram desenvolvidos muitos livros de álgebra. Algumas obras alemãs que merecem destaque são *Die Coss* (1524) de Adam Riese (1492 – 1559), *Coss* (1525) de Christoph Rudolff (1499 – 1545), *Rechmung* (1527) de Peter Apian (1495 – 1552) e *Arithmetica integra* (1544) (Figura 1) de Michael Stifel (1486 – 1567), o maior algebrista alemão do século XVI. Essa última obra é dedicada aos números racionais, números irracionais e álgebra. Nos estudos dos números racionais, Stifel enuncia que para o produto de quaisquer dois termos da progressão geométrica $1, q, q^2, \ldots$ o resultado será o mesmo que a soma dos expoentes correspondentes. Assim, tem-se a propriedade

$$q^m . q^n = q^{m+n}.$$

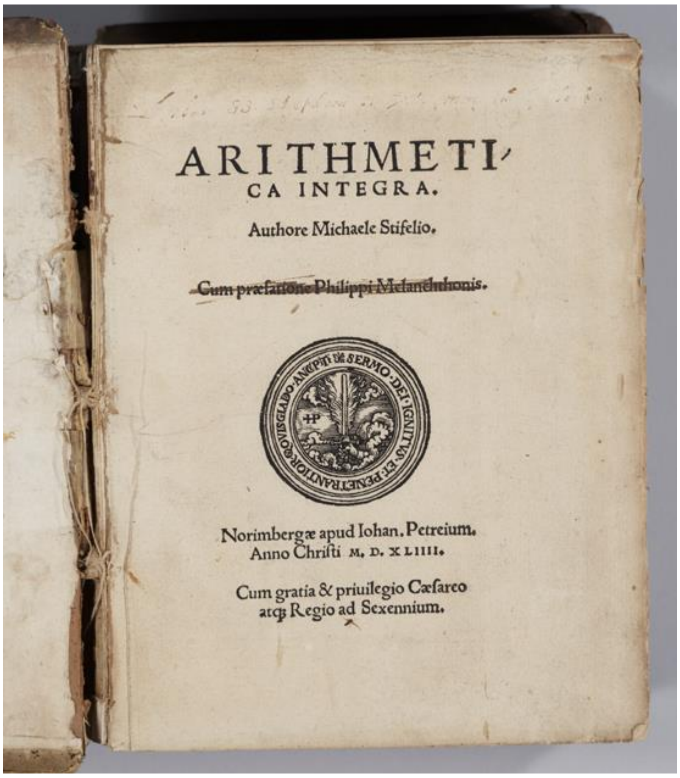
Analogamente, ao dividir um termo de uma progressão geométrica por outro equivale a subtrair os expoentes correspondentes. Segue a propriedade:

$$\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}.$$

Assim, fica também definido $q^0 = 1$ quando $m = n$.

Dessa forma, Stifel verificou que cada termo da progressão é uma potência de razão comum q e que os expoentes formam uma progressão aritmética. Portanto, relacionou progressões geométricas e aritméticas, prenunciando a invenção dos logaritmos.

Figura 1 – *Arithmetica integra* de Michael Stifel



Fonte: Mathematical Association of America, 2011.

No final do século XVI a álgebra já tinha sido bastante aperfeiçoada por um uso significativo de simbolismo e a trigonometria se tornara uma disciplina independente. Durante a transição do Renascimento para o mundo moderno a Matemática foi marcada por um conselheiro de reis que dedicava apenas o tempo de lazer à esta ciência: François Viète (1540 – 1603). O francês fez contribuições para os campos da aritmética, álgebra, geometria e trigonometria. Em *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579), Viète elaborou tabelas de todas as seis funções (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente) de ângulos aproximados até minutos. Nesta época várias identidades trigonométricas estavam sendo desenvolvidas, muitas utilizando as regras de prostaférese (do grego *prosthaphaeresis*, que significa adição e subtração). Assim, por meio dessas fórmulas, era possível transformar produto de funções numa soma ou diferença. Uma divisão pode ser tratada da mesma maneira. Fazendo uso da prostaférese, Viète obtinha as fórmulas a seguir:

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B),$$

$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B),$$

$$2 \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B),$$

$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B).$$

Por vezes essas relações são denominadas como *fórmulas de Werner*, remetendo ao matemático alemão Johannes Werner (1468 – 1528). Ele as utilizou para simplificar cálculos em Astronomia. Para exemplificar a aplicação dessas fórmulas, suponha que se deseja multiplicar 34202 por 81915. Para tanto, consulta-se uma tabela trigonométrica com aproximação de cinco casas decimais e verifica-se qual o valor mais próximo dos fatores da multiplicação, porém, divididos por 10^5. Desta forma, tem-se $sen\, 20° = 0{,}34202$ e $\cos 35° = 0{,}81915$. Aplicando as fórmulas de Werner:

$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$$

$$2 \operatorname{sen} 20° \cos 35° = \operatorname{sen}(20° + 35°) + \operatorname{sen}(20° - 35°)$$

$$2\,.\,0{,}34202\,.\,0{,}81915 = sen\, 55° + sen\, (-15°)$$

$$2\,.\,\frac{34202}{10^5}\,.\,\frac{81915}{10^5} = 0{,}81915 + (-0{,}25882)$$

$$34202\,.\,81915 = \frac{0{,}56033}{2}\,.\,10^{10}$$

$$34202\,.\,81915 = 0{,}280165\,.\,10^{10}$$

$$34202\,.\,81915 \approx 2801650000.$$

Quanto mais casas decimais se conhece, mais exato se torna esse cálculo.

Em 1590, o escocês John Napier (1550 – 1617) tomou conhecimento da prostaférese na Dinamarca. Ele era filho de Sir Archibald Napier e sua primeira esposa, Janet Bothwell. Nasceu na propriedade de sua família, o castelo Merchiston, e com treze anos foi mandado para a Universidade de St. Andrews, onde estudou religião. Tornou-se um ativista religioso que se interessava particularmente por aspectos de computação e trigonometria. Para se descontrair, deleitava-se estudando Matemática. Conhecendo a ideia da prostaférese e inspirado pelas tabelas de multiplicações sucessivas de Stifel, Napier verificou que para conservar próximos os termos de uma progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário que este número seja bastante próximo de um. Para este fim, optou por $1-\frac{1}{10^7}=0{,}9999999$ e, para evitar decimais, multiplicava cada potência por 10^7. Portanto, supondo N um número qualquer, L é seu logaritmo se satisfeita a condição

$$N=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L.$$

Fica claro que o logaritmo de Napier de 10^7 é zero, pois $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0=1$. Também é evidente que o logaritmo de Napier de $10^7(1-\frac{1}{10^7})$ é um, pois $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1=1-\frac{1}{10^7}$. Seguindo essa linha, o escocês construiu uma tabela inicial com 101 elementos e cada termo era obtido subtraindo-se do termo anterior a sua 10^7 parte, conforme Tabela 1.

Tabela 1 - Primeira tabela de logaritmos de Napier

Progressão geométrica	Valor aproximado	Progressão aritmética
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$	9999999	1
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Fonte: Produção da autora, 2019.

Utilizando a proporção $1-\frac{1}{10^5}$, que é a divisão entre o último e o primeiro número de primeira tabela, Napier fez um novo processo de multiplicações sucessivas e obteve cinquenta e um elementos (Tabela 2).

Seguindo o mesmo raciocínio, elaborou a terceira tabela (Tabela 3) com vinte e um elementos, desta vez usando a proporção $\frac{9995001}{10000000}\approx 0{,}9995$.

Tabela 2 - Segunda tabela de logaritmos de Napier

Progressão geométrica	Valor aproximado	Progressão aritmética
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^0$	10000000	0
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^5}\right)$	9999900	100
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^2$	9999800	200
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^3$	9999700	300
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^{49}$	9995101	4900
$10^7.\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^{50}$	9995001	5000

Fonte: Produção da autora, 2019.

Tabela 3 - Terceira tabela de logaritmos de Napier

Progressão geométrica	Valor aproximado	Progressão aritmética
10^7	10000000	0
$10^7.0{,}9995$	9995001	5000
$10^7.0{,}9995^2$	9990002	10000
$10^7.0{,}9995^3$	9985007	15000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$10^7.0{,}9995^{20}$	9900473	200000

Fonte: Produção da autora, 2019.

Por fim, Napier obteve outros sessenta e oito elementos usando a proporção $\frac{9900473}{10000000} \approx 0{,}99$, sendo$10^7.0{,}99^{68} \approx 5048858$ o último elemento. Esse valor é próximo da metade do valor original (10^7).

Para aplicar de fato as tabelas de Napier, procura-se os números que serão multiplicados na coluna de aproximação da progressão geométrica. Então se deve somar os valores correspondentes na coluna da progressão aritmética. O valor obtido deve ser encontrado na coluna da progressão aritmética, daí basta verificar o valor relacionado na coluna de aproximação da progressão geométrica. Por fim, multiplica-se o número por 10^7, aumentando o mesmo em sete ordens decimais. Por exemplo, suponha que se deseja calcular 9999997.9999903. Segunda a Tabela 1, nota-se que os valores a serem multiplicados estão relacionados com os números 3 e 97, respectivamente, na coluna da progressão aritmética. Ora, $3 + 97 = 100$. Na centésima primeira linha da coluna da progressão aritmética, está relacionado o valor $10^7.\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{100}$na coluna da progressão geométrica. Finalmente, multiplicando esse valor por 10^7 obtém-se 99999000000000.

Napier dedicou pelo menos vinte anos ao estudo desse tema. Ele optou por chamar o expoente de cada potência de $logaritmo$ (da composição grega *logos* e *arithmos*, que significa número proporcional). O que se chama de logaritmo de Napier, na verdade ele chamava de logaritmo de um seno. Equivocamente, é comum utilizar o termo *logaritmo neperiano* para designar o logaritmo natural (de base e). Entretanto, encontra-se no trabalho de Napier um sistema de base $\frac{1}{e}$. Isto ocorre pois,

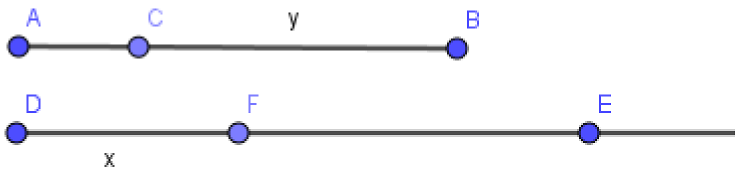
$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

$$\frac{N}{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

$$\frac{N}{10^7} = \left[\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$, usando $n = 10^7$, fica evidente a base $\frac{1}{e}$. Vale destacar que Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da atual. Também não se utilizava o símbolo e na época, apesar de seu valor ser conhecido nos estudos que exploravam os logaritmos. O estudioso escocês explanou os princípios de seu trabalho em termos geométricos. Conforme a Figura 2, considerou um segmento de reta AB e uma semirreta DE com origem em D. Supôs que os pontos C e F se movimentavam simultaneamente, partindo de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas e com mesma velocidade inicial. O ponto C tinha velocidade numericamente sempre igual à distância CB, isto é, velocidade decrescente. Já o ponto F se movia com velocidade uniforme. Assim, Napier definiu DF como logaritmo de CB. Sendo $DF = x$ e $CB = y$, tem-se $x = Nap \log y$.

Figura 2 – Definição geométrica de Napier



Fonte: Produção da autora, 2019.

Para evitar frações, Napier tomou AB com comprimento igual a 10^7, pois as melhores tábuas de seno que o mesmo tinha acesso estendiam-se até sete casas decimais. Se $AC = AB - CB$, então $AC = 10^7 - y$. Daí,

$$velocidade\ de\ C = -\frac{dy}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{y} = -dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int dt$$

$$\ln y + c_1 = -t + c_2$$

$$\ln y = -t + c.$$

Calculando-se a constante c de integração, utiliza-se $t = 0$ e, consequentemente, $y = 10^7$. Então $\ln 10^7 = c$. Logo, $t = \ln 10^7 - \ln y$.

Como a velocidade de F, V_F, é constante, tem-se que:

$$V_F = \frac{dx}{dt} = 10^7$$

$$dx = 10^7 dt$$

$$\int dx = 10^7 \int dt$$

$$x + k_1 = 10^7 t + k_2$$

$$x = 10^7 t + k.$$

Calculando-se a constante k de integração, utiliza-se $t = 0$ e, consequentemente, $x = 0$. Então $k = 0$. Portanto, $x = 10^7 t$.

Segue que:

$$Nap \log y = x$$

$$Nap \log y = 10^7 t$$

$$Nap \log y = 10^7 (\ln 10^7 - \ln y)$$

$$Nap \log y = 10^7 \ln \frac{10^7}{y}$$

$$Nap \log y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \frac{y}{10^7}.$$

Através da utilização desses conceitos (que Napier não conhecia), observa-se que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, ao contrário do que ocorre com os logaritmos naturais. Nota-se também que, para uma sucessão de períodos iguais, y decresce em progressão geométrica e x cresce em progressão aritmética, o que relaciona as progressões. Daí segue um dos resultados estabelecidos por Napier, que diz que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $Nap \log a - Nap \log b = Nap \log c - Nap \log d$.

Em 1614 Napier publicou o trabalho em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos). Nele há uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco. Um trabalho posterior, chamado *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos), foi publicado postumamente por seu filho Robert em 1619. Na Figura 3 encontra-se a folha de rosto da edição de 1619 do *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier, que também contém o seu *Constructio*.

A obra foi adotada rapidamente por estudiosos de toda a Europa e China. Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) divulgou os logaritmos na Itália, bem como Johannes Kepler (1571 – 1630) fez na Alemanha. Além disso, Kepler foi um dos primeiros astrônomos a aplicar os logaritmos. Ele utilizou esse novo conceito no desenvolvimento de seus cálculos envolvendo as órbitas planetárias.

Figura 3 - *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier


MIRIFICI

LOGARITHMO-
RVM CANONIS
DESCRIPTIO,

Ejusque usus, in utraque Trigonome-
tria; *ut etiam in omni Logistica Ma-*
thematica, amplissimi, facillimi,
& expeditissimi explicatio.

ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;
Primò, Mirifici ipsius canonis constructio, & Logarith-
morum ad naturales ipsorum numeros habitudines.
Secundò, Appendix de alia, eáque præstantiore Loga-
rithmorum specie construenda.
Tertiò, Propositiones quædam eminentissimæ, ad Trian-
gula sphærica mirâ facilitate resolvenda.

Autore ac Inventore IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii, &c. Scoto.

EDINBVRGI,
EXCVDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Fonte: Maor, 2008, p. 18.

No ano seguinte à publicação da *Descriptio*, o inglês Henry Briggs (1561 – 1630), professor de geometria do Gresham College em Londres, foi de encontro à Napier para dar o tributo de seu reconhecimento ao inventor dos logaritmos. Ambos concordaram que as tábuas seriam mais eficientes se o logaritmo de um fosse zero, não mais 10^7, e o logaritmo de dez fosse uma potência apropriada de dez. Decidiram que $\log 10 = 1 = 10^0$. Isto é, se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$, então L é o logaritmo *briggsiano* ou *comum* de N, escrito como $\log_{10} N$ ou apenas $\log N$. Assim surgiu o conceito de base, implicando nos logaritmos dos dias atuais. Esses, que são essencialmente de base dez, facilitam cálculos numéricos visto que o sistema de numeração moderno é decimal.

Em 1624, Briggs publicou *Arithmetica logarithmica*. Nesse trabalho apresentou tábuas de logaritmos de base dez para todos os números inteiros de um até vinte mil e de noventa mil até cem mil, com precisão de quatorze casas decimais. A lacuna entre vinte mil e noventa mil foi preenchida em 1628, com o auxílio do holandês Adriaan Vlacq (1600 – 1667), tornando-se padrão por mais de três séculos. Briggs introduziu o termo *mantissa*, que se refere à parte decimal do logaritmo. Já o termo *característica*, que diz respeito à parte inteira do logaritmo, foi sugerido pelo mesmo e usado por Vlacq.

Uma dúvida quanto à prioridade da invenção dos logaritmos parte dos estudos do suíço Jobst Bürgi (1552 – 1632). Possivelmente a ideia inicial de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, mas ele só publicou seus resultados em 1620, caracterizando Napier como o primeiro a anunciar a descoberta ao mundo.

Grande construtor de notações matemáticas, o suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) foi responsável por boa parte do simbolismo utilizado hoje. Numa exposição manuscrita de seus resultados, elaborada por volta de 1728, Euler utilizou a letra e para representar a base do sistema de logaritmos naturais. Até então não existia nenhuma notação padronizada para esse número, que já era bem conhecido. Em 1736, na obra *Mechanica*, de Euler, essa notação apareceu pela primeira vez impressa e se tornou padrão. O suíço apresentou uma definição para logaritmos que difere da de Napier, mas que é utilizada hoje como definição moderna. Essa diz que se $N = b^L$, em que b é um número positivo fixo, diferente de um, então L é o logaritmo de base b de N.

4.2 DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Para esta seção foram utilizados Iezzi, Dolce e Murakami (2004) e Lima (2010). Serão exploradas definições, propriedades, teoremas e demonstrações envolvendo logaritmos e função logarítmica.

4.2.1 Potências e raízes

É necessário ter conhecimento das propriedades de potências de um número real com expoente real qualquer, mesmo que os logaritmos tenham sido inventados antes da notação exponencial.

Definição 1. Seja a um número real não nulo e n um número natural. Potência de base a e expoente n é o número a^n tal que:

$$\begin{cases} a^0 = 1, a \neq 0 \\ a^n = a^{n-1}.a, \qquad \forall n, n \geq 1. \end{cases}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0.a = 1.a = a$$

$$a^2 = a^1.1 = a.a$$

$$a^3 = a^2.a = (a.a).a = a.a.a$$

e, de modo geral, para p natural e $p \geq 2$, temos que a^p é um produto de p fatores iguais a a.

Definição 2. Seja a um número real não nulo e n um número natural. Define-se a potência a^{-n} pela relação

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é definida como o inverso multiplicativo da correspondente potência de inteiro positivo.

Assim, se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ ou $n \neq 0$, tem-se as propriedades (P) abaixo.

P1. $a^m.a^n = a^{m+n}$

P2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$ e $m \geq n$

P3. $(a.b)^n = a^n.b^n$, com $b \neq 0$ ou $n \neq 0$

P4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

P5. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Demonstração da P1: Considere m fixo. Será aplicada indução sobre n.

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$a^{m+0} = a^m = a^m.1 = a^m.a^0.$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^m.a^p = a^{m+p}$. Será verificado que a propriedade vale para $n = p + 1$, isto é, $a^m.a^{p+1} = a^{m+p+1}$. De fato:

$$a^m.a^{p+1} = a^m.(a^p.a) = (a^m.a^p).a = a^{m+p}.a = a^{m+p+1}.$$

Portanto, $a^m.a^n = a^{m+n}$.

■

Demonstração da P2: Considere n fixo. Será aplicada indução sobre m.

A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois:

$$a^{0-n} = a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}.$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $m = p$, isto é, $\frac{a^p}{a^n} = a^{p-n}$. Será verificado que a propriedade vale para $m = p + 1$, isto é, $\frac{a^{p+1}}{a^n} = a^{p+1-n}$. De fato:

$$\frac{a^{p+1}}{a^n} = \frac{a^p.a^1}{a^n} = \frac{a^p}{a^n}.\frac{a}{1} = \frac{a^p}{a^n}.\frac{a}{a^0} = a^{p-n}.a^{1-0} = a^{p+1-n}.$$

Portanto, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$.

■

Demonstração da P3: Será aplicada indução sobre n.

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$(a.b)^0 = 1 = 1.1 = a^0.b^0.$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(a.b)^p = a^p.b^p$. Será verificado que a propriedade vale para $n = p + 1$, isto é, $(a.b)^{p+1} = a^{p+1}.b^{p+1}$. De fato:

$$(a.b)^{p+1} = (a.b)^p.(a.b) = (a^p.b^p)(a.b) = (a^p.a)(b^p.b) = a^{p+1}.b^{p+1}.$$

Portanto, $(a.b)^n = a^n.b^n$, com $b \neq 0$ ou $n \neq 0$.

■

Demonstração da P4: Será aplicada indução sobre n.

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0}.$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$. Será verificado que a propriedade vale para $n = p + 1$, isto é, $\left(\frac{a}{b}\right)^{p+1} = \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}}$. De fato:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p+1} = \left(\frac{a}{b}\right)^p . \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a^p}{b^p}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^p . a}{b^p . b} = \frac{a^{p+1}}{b^{p+1}}.$$

Portanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

■

Demonstração da P5: Considere m fixo. Será aplicada indução sobre n.

A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m.0}.$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = p$, isto é, $(a^m)^p = a^{m.p}$. Será verificado que a propriedade vale para $n = p + 1$, isto é, $(a^m)^{p+1} = a^{m.(p+1)}$. De fato:

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p . (a^m) = a^{m.p} . a^m = a^{m.p+m} = a^{m.(p+1)}.$$

Portanto, $(a^m)^n = a^{m.n}$.

■

Com a definição de potência de expoente inteiro negativo, a propriedade P2, definida para $m \geq n$, passa também a ter significado para $m < n$. Além disso, se $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, 0^{-n} não possui significado.

Definição 3. Dados um número real $a \geq 0$ e um número natural n, $a \geq 1$, existe sempre um número real positivo ou nulo b tal que $b^n = a$. Chama-se o número b de raiz enésima aritmética de a e indica-se pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, em que a é chamado de radicando e n é chamado de índice.

Da Definição 3 decorre que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, para todo $a \geq 0$. Vale destacar que, por exemplo, no cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito tem-se $\sqrt{a^2} = |a|$.

Assim, se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, tem-se as propriedades abaixo.

P6. $\sqrt[n.p]{a^{m.p}} = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$

P7. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

P8. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$

P9. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$

P10. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p.n]{a}$

Demonstração da P6: Seja $x = \sqrt[n]{a^m}$, então:

$$x^{n.p} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n.p} = [\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n]^p = [a^m]^p = a^{m.p}$$

$$x = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}.$$

Portanto, $\sqrt[n.p]{a^{m.p}} = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$.

■

Demonstração da P7: Seja $x = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$, então:

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a.b$$

$$x = \sqrt[n]{a.b}.$$

Portanto, $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.

■

Demonstração da P8: Seja $x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, então:

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Portanto, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, com $b \neq 0$.

■

Demonstração da P9: Considere n fixo. Será aplicada indução sobre m, $m \geq 0$.

A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}.$$

Suponha que a propriedade seja verdadeira para $m = p$, isto é,$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$. Será verificado que a propriedade vale para $m = p + 1$, isto é, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{p+1} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$. De fato:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{p+1} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p . \left(\sqrt[n]{a}\right) = \sqrt[n]{a^p} . \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^p . a} = \sqrt[n]{a^{p+1}}.$$

Se $m < 0$, faça $-m = q > 0$, então:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \frac{1}{\sqrt[n]{a^q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Portanto, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$, para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$.

$\blacksquare$

Demonstração da P10: Seja $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$, então:

$$x^p = \left(\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}\right)^p = \sqrt[n]{a}$$

$$(x^p)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

$$x^{p.n} = a$$

$$x = \sqrt[p.n]{a}.$$

Portanto, $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p.n]{a}$.

$\blacksquare$

Nota-se que, se $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a . b^n} = b . \sqrt[n]{a}, \text{para b} \geq 0 \\ -\sqrt[n]{a . |b|^n} = b . \sqrt[n]{a}, \text{para b} < 0. \end{cases}$$

Isto é, o coeficiente do radical pode ser colocado no radicando com expoente igual ao índice do radical.

Definição 4. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ é o número $a^{\frac{p}{q}}$ tal que:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, adota-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$. O símbolo $0^{\frac{p}{q}}$ com $\frac{p}{q} < 0$ não tem significado, pois se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{N}^*$, então $p < 0$, logo 0^p não tem significado.

Nota-se que toda potência de base positiva e expoente racional é um número real positivo, isto é,

$$a > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0.$$

Assim, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, tem-se as propriedades abaixo.

P11. $a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

P12. $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$

P13. $(a.b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$

P14. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$

P15. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}.\frac{r}{s}}$

Demonstração da P11: Aplicando as propriedades já conhecidas, tem-se que:

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p}.\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q.s]{a^{p.s}}.\sqrt[s.q]{a^{r.q}} = \sqrt[q.s]{a^{p.s}.a^{r.q}} = \sqrt[q.s]{a^{p.s+r.q}} = a^{\frac{p.s+r.q}{q.s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

Portanto, $a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$.

∎

Demonstração da P12: Aplicando as propriedades já conhecidas, tem-se que:

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{\sqrt[q.s]{a^{p.s}}}{\sqrt[s.q]{a^{r.q}}} = \sqrt[q.s]{\frac{a^{p.s}}{a^{r.q}}} = \sqrt[q.s]{a^{p.s-r.q}} = a^{\frac{p.s-r.q}{q.s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}.$$

Portanto, $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$.

■

Demonstração da P13: Aplicando as propriedades já conhecidas, tem-se que:

$$(a.b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a.b)^p} = \sqrt[q]{a^p.b^p} = \sqrt[q]{a^p}.\sqrt[q]{b^p} = a^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}.$$

Portanto, $(a.b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$.

■

Demonstração da P14: Aplicando as propriedades já conhecidas, tem-se que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \sqrt[q]{\frac{a^p}{b^p}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q]{b^p}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}.$$

Portanto, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$.

■

Demonstração da P15: Aplicando as propriedades já conhecidas, tem-se que:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r} = \sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{p.r}}} = \sqrt[s.q]{a^{p.r}} = a^{\frac{p.r}{s.q}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}.$$

Portanto, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$.

■

Dados um número real $a > 0$ e um número irracional α, pode-se construir, com base nas potências de expoente racional, um único número real positivo a^{α} que é potência de base a e expoente irracional α.

Definição 5. Seja $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ e α um número irracional. Considerando os conjuntos $A_1 = \{r \in \mathbb{Q} |\ r < \alpha\}$ e $A_2 = \{s \in \mathbb{Q} |\ s > \alpha\}$, nota-se que todos os elementos de A_1 são menores do que os elementos de A_2, que existem dois números racionais r e s tais que $r < \alpha < s$ e que a diferença $s - r$ é menor do que qualquer número positivo e arbitrário.

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2, consideremos os conjuntos $B_1 = \{a^r | r \in A_1\}$ e $B_2 = \{a^s | s \in A_2\}$. Se $a > 1$, tem-se que:

i. todo número de B_1 é menor do que qualquer número de B_2;

ii. existem dois números a^r e a^s tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor do que qualquer número positivo e arbitrário.

Diz-se que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são classes que definem a^α. Se $0 < a < 1$, ocorre de forma análoga.

Se $a = 0$ e α é um número irracional e positivo, tem-se que $0^\alpha = 0$. Porém, se $a = 0$ e α é um número irracional e negativo, então 0^α não tem significado.

Se $a = 1$, então $1^\alpha = 1$ para qualquer α irracional.

Se $a < 0$ e α número irracional e positivo, então a^α não tem significado.

Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades (P).

Como já foram definidas as potências de base $a \in \mathbb{R}_+^*$ e expoente b (racional ou irracional), já está definida a potência a^b com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Esta potência definida é um número real positivo. Seguem para as potências com expoentes reais, isto é, para $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Como as demonstrações envolvem o conteúdo de limites, não será abordada aqui.

P16. $a^b . a^c = a^{b+c}$

P17. $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$

P18. $(a.b)^c = a^c . b^c$, $b \in \mathbb{R}_+^*$

P19. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$

P20. $(a^b)^c = a^{b.c}$

4.2.2 Logaritmos

Conhecendo os conceitos fundamentais das potências de números reais, pode-se iniciar o estudo dos logaritmos

Definição 6. Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se de logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Isto é,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

em que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo. Lê-se x é o logaritmo de b na base a.

Definição 7. Sejam a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$. Se o logaritmo de b na base a é x, então b é chamado antilogaritmo de x na base a. Isto é,

$$\mathrm{log_a\, b = x \Leftrightarrow b = antilog_a x.}$$

Como consequências imediatas da definição 6, tem-se que:

i. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;

ii. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;

iii. $a^{\log_a b} = b$, pois o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ser igual a b.

Sejam $0 < a$, $a \neq 1$, $0 < b$ e $0 < c$. Seguem propriedades dos logaritmos, conforme definição 6.

P21. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

P22. $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

P23. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

P24. $\mathrm{log_a b^{\propto}} = \propto . \mathrm{log_a b}, \propto \in R$

P25. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c \neq 1$

Demonstração da P21: A demonstração está dividida em duas partes.

($\Rightarrow$) Se $\log_a b = \log_a c$, então, pela definição de logaritmo, $a^{\log_a c} = b$. Pela terceira consequência, segue que $b = c$.

(⇐) Se $b = c$, então, pela terceira consequência, $a^{\log_a c} = b$. Pela definição de logaritmo, segue que $\log_a b = \log_a c$.

Portanto, dois logaritmos de mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais.

■

Demonstração da P22: Considere $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b.c) = z$. Consequentemente, $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = b.c$. Daí,

$$a^z = b.c = a^x.a^y = a^{x+y}$$

$$z = x + y$$

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c.$$

Portanto, o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos de cada termo do produto, todos na mesma base.

■

Demonstração da P23: Considere $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z$. Consequentemente, $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = \frac{b}{c}$. Daí,

$$a^z = \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$z = x - y$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Portanto, o logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos de cada termo do produto, todos na mesma base. Particularmente, para $b = 1$, tem-se:

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c = 0 - \log_a c = -\log_a c.$$

■

Demonstração da P24: Considere $\log_a b = x$ e $log_a b^\alpha = y$. Consequentemente, $a^x = b$ e $a^y = b^\alpha$. Daí,

$$a^y = b^\alpha = (a^x)^\alpha = a^{x.\alpha}$$

$$y = \alpha . x$$

$$\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b.$$

Portanto, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Particularmente, tem-se

$$\log_a a^\alpha = \alpha . \log_a a = \alpha . 1 = \alpha.$$

■

Demonstração da P25: Considere $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, $z \neq 0$. Consequentemente, $a^x = b$, $c^y = b$ e $c^z = a$. Daí,

$$c^{z.x} = (c^z)^x = a^x = b = c^y$$

$$z . x = y$$

$$x = \frac{y}{z}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Portanto, um logaritmo pode ser convertido para o quociente dos logaritmos do logaritmando e da base, nessa ordem e numa nova base que convém. Particularmente, tem-se $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, pois:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

■

Definição 8. Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se de cologaritmo de b na base a o oposto do logaritmo de b na base a. Isto é,

$$\text{colog}_a b = -\log_a b.$$

4.2.3 Funções logarítmicas

Será definida a função logarítmica e também serão estabelecidas suas propriedades básicas.

Definição 9. Uma função real $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ chama-se função logarítmica de base a quando associa a cada x o valor $\log_a x$. Isto é, $f(x) = \log_a x$.

Assim, segue que a função f é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

P26. Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função monótona tal que $f(x.y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração da P26: Sem perda de generalidade, considere f crescente. Por hipótese, $f(x.y) = f(x) + f(y)$. Daí, $f(1) = f(1.1) = f(1) + f(1)$. Logo, $f(1) = 0$. Suponha ainda a existência de $a \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(a) = 1$. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se que $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ tem-se que:

$$f(a^m) = f(a.a.\dots.a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = 1 + 1 + \cdots + 1 = m.$$

Então,

$$0 = f(1) = f\left(\frac{a^m}{a^m}\right) = f(a^m.a^{-m}) = f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m})$$

$$0 = m + f(a^{-m})$$

$$-m = f(a^{-m}).$$

Se $r = \frac{m}{n}$, com $m \in Z$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então $r.n = m$. Logo:

$$m = f(a^m) = f(a^{r.n}) = f((a^r)^n) = n.f(a^r)$$

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r.$$

Ainda, se x é irracional, então, para $r, s \in \mathbb{Q}$ tem-se que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Portanto, todo número racional r menor do que x também é menor do que $f(a^x)$ para qualquer $x \in R$ e todo número racional s, maior do que x, também é maior do que $f(a^x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, se $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$, pois $f(x) = a^x$ é uma função sobrejetiva de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Suponha agora g função crescente tal que $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, com $g(x.y) = g(x) + g(y)$. Como $g(1) = 0$ e $1 < 2$, deve-se ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, é crescente, relaciona produtos e somas e cumpre $f(2) = 1$. Portanto, tem-se que $f(x) = \log_2 x$ para qualquer $x > 0$. Daí,

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = \left(2^{\frac{1}{b}}\right)^{g(x)} = a^{g(x)},$$

para $a = 2^{\frac{1}{b}}$.

Segue que:

$$a^{g(x)} = x$$

$$\log_a a^{g(x)} = \log_a x$$

$$g(x) = \log_a x.$$

■

P27. Uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva.

Demonstração da P27: Considere $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, com $x \neq y$. Então ou $x < y$ ou $x > y$. Para $x < y$, como f é monótona e supostamente crescente (outro caso é análogo), segue que $f(x) < f(y)$. Para $x > y$, $f(x) > f(y)$. Portanto, para quaisquer $x \neq y$ conclui-se eu $f(x) \neq f(y)$. Isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.

■

P28. Os números maiores que um têm logaritmos positivos e os números positivos menores que um têm logaritmos negativos.

Demonstração da P28: Com efeito, sendo f função logarítmica crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $f(x) < f(1) < f(y)$, isto é, $f(x) < 0 < f(y)$.

■

P29. Para todo $x > 0$, tem-se $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

Demonstração da P29: Com efeito, de $x.\frac{1}{x} = 1$, tem-se que $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$, donde, $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

■

P30. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, vale $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

Demonstração da P30: Com efeito,

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x.\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

■

P31. Para todo $x \in R_+^*$ e todo número racional $r = \frac{p}{q}$ tem-se $f(x^r) = r.f(x)$.

Demonstração da P31: Verifica-se que a propriedade funciona para $r = n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$:

$$f(x^1) = f(x) = 1.f(x).$$

Supondo $f(x^n) = n.f(x)$, tem-se:

$$f(x^{n+1}) = f(x^n.x^1) = f(x^n) + f(x^1) = n.f(x) + f(x) = (n+1).f(x).$$

Aplicando indução para demonstrar a propriedade para $n \in \mathbb{N}$.

Se $r = 0$, tem-se $f(x^0) = f(1) = 0 = 0.f(x)$.

Se $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, então, para qualquer $x > 0$ tem-se que $x^n.x^{-n} = x^0 = 1$. Logo,

$$f(x^n.x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-n}) = f(1) = 0$$

$$f(x^{-n}) = -f(x^n) = -n.f(x).$$

Para o caso em que $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, seja $x \in \mathbb{R}_+^*$. Segue que:

$$(x^r)^q = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$$

$$q.f(x^r) = f((x^r)^q) = f(x^p) = p.f(x)$$

$$q.f(x^r) = p.f(x)$$

$$f(x^r) = \frac{p}{q}.f(x)$$

$$f(x^r) = r.f(x).$$

■

P32. Uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Demonstração da P32: Será provado que, dados arbitrariamente números reais α e β, sempre é possível encontrar números positivos x e y tais que $f(x) < \alpha$ e $f(y) > \beta$.

Tome um número n natural tão grande que $n > \frac{\beta}{f(2)}$, que existe pelo fato dos números naturais ser ilimitado superiormente. Como $f(2)$ é positivo (P28), segue que $n.f(2) > \beta$. Aplicando P31, $n.f(2) = f(2^n)$. Portanto, $f(2^n) > \beta$. Escolha $x = 2^n$. Assim, $f(x) > \beta$. Portanto, f é ilimitada superiormente.

Dado qualquer número real α, pode-se encontrar $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) > -\alpha$. Suponha $y = \frac{1}{x}$. Daí, $f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) < \alpha$. Portanto, f é ilimitada inferiormente.

■

Nota-se que , se $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e c uma constante positiva arbitrária, então uma função $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = c.f(x)$, é também uma função do tipo logarítmica.

Teorema 1 (T1). Dadas as funções logarítmicas $f, g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $g(x) = c.f(x)$ para todo $x > 0$.

Demonstração do T1: Suponha inicialmente a existência de um número $a > 1$ tal que $f(a) = g(a)$. Será provado que $f(x) = g(x)$ para todo $x > 0$. De $f(a) = g(a)$ tem-se que $f(a^r) = g(a^r)$ para todo r racional. Com efeito,

$$f(a^r) = r.f(a) = r.g(a) = g(a^r).$$

Suponha, por absurdo, que existe algum $b > 0$ tal que $f(b) \neq g(b)$. Sem perda de generalidade, $f(b) < g(b)$. Logo, $g(b) - f(b) > 0$. Seja n natural suficientemente grande tal que

$$f(a) < n.[g(b) - f(b)].$$

Então,

$$f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = f(a).\frac{1}{n} < g(b) - f(b).$$

Seja $c = f(a^{\frac{1}{n}})$. Os números c, $2c$, $3c$ ... dividem $\mathbb{R}_+^*$ em intervalos justapostos, com mesmo comprimento c. Como $c < g(b) - f(b)$, ao menos um desses valores, $m.c$, por exemplo, pertence ao interior do intervalo $(f(b), g(b))$, ou seja, $f(b) < m.c < g(b)$. Tem-se que:

$$m.c = m.f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = f\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = g\left(a^{\frac{m}{n}}\right).$$

Portanto,

$$f(b) < f\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = g\left(a^{\frac{m}{n}}\right) < g(b).$$

Como f é crescente, foi obtido que $b < a^{\frac{m}{n}}$. Com g também é crescente, obteve-se $b > a^{\frac{m}{n}}$. Ou seja, é impossível a existência de b que satisfaça estas condições simultaneamente. Logo, deve-se ter $f(x) = g(x)$ para todo $x > 0$.

O caso geral reduz-se ao caso particular acima. Dadas f e g, funções logarítmicas arbitrárias, tem-se $f(2) > 0$ e $g(2) > 0$ porque $2 > 1$. Seja $c = \frac{g(2)}{f(2)}$. Considere a função logarítmica $h: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = c.f(x)$. Como $h(2) = c.f(2) = \left[\frac{g(2)}{f(2)}\right].f(2) = g(2)$, então, pelo caso particular, $h(x) = g(x)$ para todo $x > 0$.

Portanto, $g(x) = c.f(x)$ para todo $x > 0$.

■

Teorema 2 (T2). Toda função logarítmica f é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um único número real positivo x tal que $f(x) = c$.

Demonstração do T2: Dado um número real b, deve-se obter um real positivo α tal que $f(\alpha) = b$. Para encontrar α, será utilizado um processo chinês chamado "método do elemento celestial". Esse método consiste em determinar os inteiros $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ que compõem a representação decimal do número real $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$. Para determinar a parte inteira α_0, deve-se usar o fato de f ser uma função crescente ilimitada (base maior do que 1), logo existem k inteiros tais que $f(k) > b$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $f(a_0 + 1) > b$. Então temos $b < f(a_0 - 1) < f(a_0) < f(a_0 + 1)$. Considere os números

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1.$$

Como $f(a_0) \leq b < f(a_0 + 1)$, existem dois elementos consecutivos a_1 e $a_1 + \frac{1}{10}$, nessa sequência, tais que $f(a_1) \leq b < f(a_1 + \frac{1}{10})$. Isto é, deve existir a_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, com $\alpha_1 = a_0$ e $a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$, tem-se $f(\alpha_1) \leq b < f\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right)$. Analogamente, considerando os números $\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \dots, \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10}$, verifica-se a existência de a_2, $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que, com $\alpha_2 = a_0, a_1, a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$, tem-se $f(\alpha_2) \leq b < f(\alpha_2 + \frac{1}{10^2})$. Assim, encontra-se a representação decimal de um número real, dada por

$$\alpha_0 = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

tal que, com $\alpha_n = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$, tem-se $f(\alpha_n) \leq b < f(\alpha_n + \frac{1}{10^n})$, para $n \geq 0$.

Afirmou-se que $f(a) = b$. De fato, se fosse $f(a) < b$, poderia ser aplicado o Lema a seguir, de forma a obter $x > 0$ tal que $f(a) < f(x) < b$. Como f é crescente, isto implicaria em $a < x$. Então, tomando n suficientemente grande tal que $x - a > \frac{1}{10^n}$, tem-se $a + \frac{1}{10^n} < x$, logo $\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x$. Como f é crescente, de $x > \alpha_n + \frac{1}{10^n}$ resultaria $f(x) > f\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) > b$, um absurdo, pois o número x foi obtido de modo que $f(x) < b$. Analogamente, não se pode ter $f(a) > b$. Com efeito, usando novamente o Lema a seguir, seria obtido $x > 0$ tal que $b < f(x) < f(\alpha)$. Como f é crescente, de $f(x) < f(\alpha)$, tem-se $x < \alpha$. Daí, $x < \alpha_n$, para algum n. Então $f(x) < f(\alpha_n) \leq b$, contrariando o fato de que x foi obtido de modo a satisfazer $b < f(x)$.

Portanto, $f(a) = b$.

■

Lema. Seja $f: R_+^* \to R$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais $u < v$, existe $x > 0$ tal que $u < f(x) < v$.

Demonstração do Lema: Fixe um número natural n maior do que $\frac{f(2)}{v-u}$. Daí,

$$n > \frac{f(2)}{v - u}$$

$$v - u > \frac{f(2)}{n}.$$

Seja $c = \frac{f(2)}{n}$. Com m inteiro, os múltiplos inteiros $m.c = \frac{m}{n}.f(2) = f(2^{\frac{m}{n}})$ decompõem a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento$c$ é menor do que o comprimento $v - u$ do intervalo $I = (u, v)$. Portanto, pelo menos um desses múltiplos $m.c = f(2^{\frac{m}{n}})$ cai no interior do intervalo $I = (u, v)$. Supondo $x = 2^{\frac{m}{n}}$, tem-se $u < f(x), v$.

■

Corolário: Toda função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$.

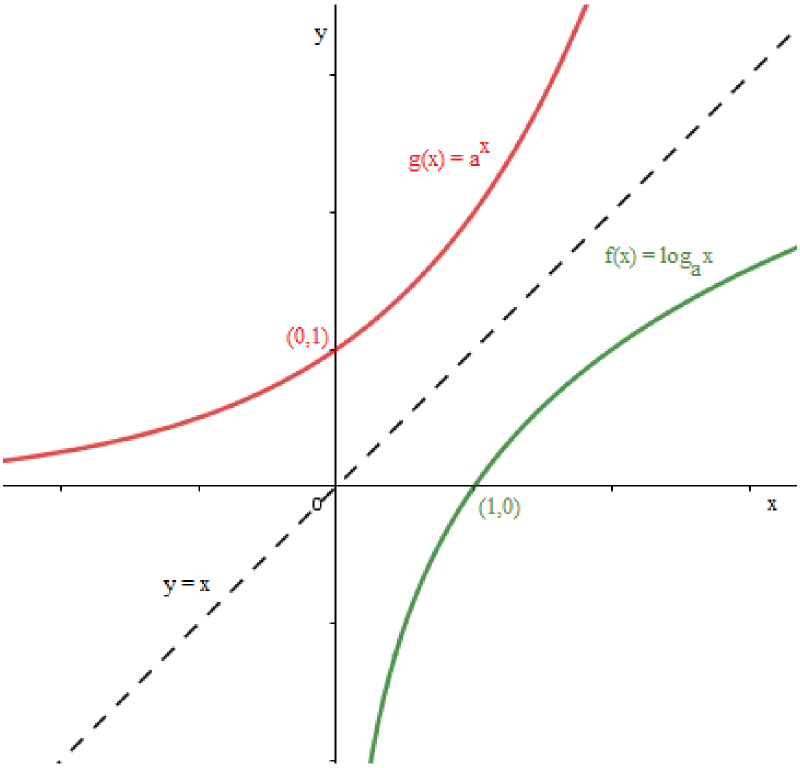
Demonstração do Corolário: Como f é injetiva (P27) e sobrejetiva (T2), segue que há relação de bijeção.

■

Em relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$, com $0 < a$ e $a \neq 1$, pode-se afirmar que:

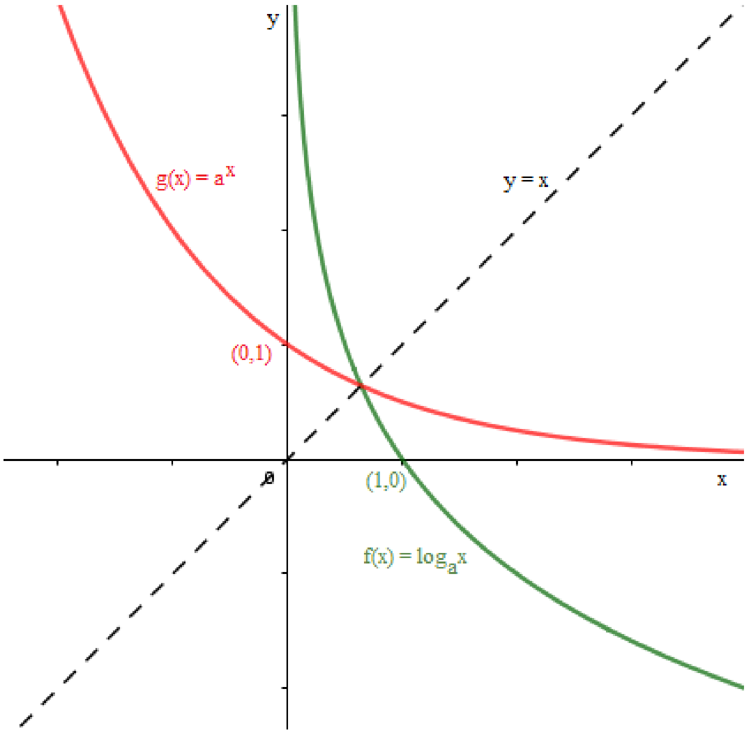
i. está todo à direita do eixo y ($x > 0$);
ii. corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($\log_a 1 = 0$);
iii. é simétrico em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) do gráfico da função $g(x) = a^x$;
iv. toma um dos aspectos a seguir (Figura 4 e Figura 5).

Figura 4 - Gráfico de f para a > 1



Fonte: Produção da autora, 2019.

Figura 5 - Gráfico de f para $0 < a < 1$



Fonte: Produção da autora, 2019.

4.2.4 Logaritmos de números negativos

Segundo Lima (2006), números reais negativos têm logaritmo complexo. Aliás, uma infinidade deles. Abaixo seguem ideias do autor.

Na primeira metade do século XVIII, seguiu-se uma controvérsia entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) e Johann Bernoulli (1667 – 1748). Leibniz acreditava que número negativo não pode ter logaritmo real porque toda potência de expoente real de um número positivo a é um número positivo. Já Bernoulli afirmava que números negativos possuem sim logaritmo real e que $\log(-x) = \log x$. Em 1749, Euler escreve um trabalho intitulado *Da controvérsia entre os Senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logaritmos de números negativos e imaginários*. Nesta obra, adotou como base o valor $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281$ ....O ponto de partida foi a definição da potência e^z, com expoente $z = x + y.i$ complexo. Conhecida a relação

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

sabe-se que a soma das n primeiras parcelas do segundo membro é um valor aproximado para e^x. São conhecidos também os desenvolvimentos para $sen\ x$ e $\cos x$. Segue abaixo.

$$\text{sen x} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Seguindo o desenvolvimento para e^x, tem-se que:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

Se z for imaginário puro (com $x = 0$), tem-se que:

$$e^{y.i} = 1 + (y.i) + \frac{(y.i)^2}{2} + \frac{(y.i)^3}{3!} + \cdots + \frac{(y.i)^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{y.i} = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i.\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$e^{y.i} = \cos y + i.\operatorname{sen} y.$$

Assim se obtém a famosa fórmula de Euler. Dela resulta que, para $z = x + y.i$, tem-se $e^z = e^{x+y.i} = e^x.e^{y.i}$, ou seja, $e^z = e^x.(\cos y + i.sen\, y)$.

Euler definiu o logaritmo de um número complexo w, $w \neq 0$, como um número complexo z tal que $e^z = w$. Se $w = r.(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta) = r.e^{i.\theta}$ é a forma polar do número w, então $w = e^{\log r}.(\cos\theta + i.sen\,\theta) = e^z$, com $z = \log r + i.\theta$. Como θ está definido a menos de um múltiplo de 2π e $r = |w|$, tem-se $\log w = \log|w| + (2k\pi + \theta)i$, para $k \in \mathbb{Z}$. Daí, conclui-se que o logaritmo de um número complexo tem uma infinidade de valores.

4.3 ALGUMAS APLICAÇÕES

A função exponencial e a função logarítmica modelam diversos fenômenos nos quais a taxa de mudança de determinada quantidade é proporcional à própria quantidade. As aplicações dos logaritmos ultrapassam a Matemática, sendo um estudo útil também para áreas como Física, Biologia, Química e Geografia. Nesta seção alguns exemplos serão explorados.

4.3.1 Intensidade Sonora

Intensidade sonora é o fluxo de energia por unidade de área, uma qualidade que permite caracterizar um som como forte ou fraco. Assim, quanto maior a intensidade sonora de uma determinada fonte, mais energia será propagada e mais forte, ou alto, será o som percebido pela unidade receptora. No Sistema Internacional de Unidades, a intensidade é dada em watts por metro quadrado (W/m^2). A menor intensidade audível ou limiar de audibilidade possui intensidade $10^{-12}\ W/m^2$. O volume (nível sonoro) é dado pela unidade bel (β), em homenagem ao britânico Alexander Graham Bell (1847 – 1922), cientista, inventor e fundador da companhia telefônica Bell. Pela limitação da audição humana, é mais utilizado o submúltiplo decibel ($d\beta$), assim, $1d\beta = 0{,}1\beta$. No Quadro 1, uma adaptação de Halliday, Resnick e Walker (2009), é possível verificar alguns exemplos de fontes sonoras e aproximações dos seus respectivos níveis sonoros.

Quadro 1 - Exemplos de nível de intensidade sonora em dβ

Fonte sonora	Nível sonoro
Conversação em voz baixa	$20\ d\beta$
Conversa comum	$60\ d\beta$
Aspirador de pó	$80\ d\beta$
Buzina de caminhão	$100\ d\beta$
Britadeira	$110\ d\beta$
Trovão	$130\ d\beta$
Decolagem de avião	$140\ d\beta$

Fonte: Produção da autora, 2019.

Esse nível de intensidade sonora (N) pode ser expresso por $N = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, em que I_0 é a limiar de audibilidade, dada por $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$, e I é a intensidade sonora da fonte em W/m^2.

Indivíduos expostos a ambientes como indústrias, principalmente de construção, a metalomecânica e de madeira, aeroportos e estabelecimentos de entretenimento com sistema de som em alto volume correm o risco de sofrer perda auditiva. A Norma Regulamentadora nº 07 (NR-07) do Programa de Controle Médico de Saúde Ocupacional determina que os trabalhadores com exposição a ruídos acima de 85 decibéis devem ser submetidos a exame de audiometria no ato da admissão. Ainda deve ser refeito seis meses após a contratação e, após esse período, anualmente.

4.3.2 Magnitude de Terremotos

A magnitude de terremotos é determinada por meio de uma escala logarítmica de base dez, conhecida como Escala Richter. Essa escala quantifica a magnitude de um sismo, fenômeno de vibração que ocasiona o terremoto devido ao intenso atrito de placas tectônicas na litosfera. O sismógrafo detecta, amplia e registra essas vibrações da Terra, podendo determinar a posição do foco dessas ondas e do local da chegada na superfície.

É possível calcular a magnitude M dessas vibrações por meio da equação:

$$M = \log_{10} A + 3\log_{10}(8.\Delta t) - 2{,}92,$$

em que A é a amplitude, em milímetros, medida com o sismógrafo e Δt é o intervalo de tempo, dado em segundos, entre uma onda superficial e uma onda de pressão máxima. Essa escala foi desenvolvida por Charles Francis Richter (1900 – 1985) com colaboração de Beto Gutenberg (1889 – 1960) em 1935. Pode-se estabelecer a relação entre essa magnitude M e os seus efeitos, como segue no Quadro 2, adaptado de um questão do Exame Nacional do Ensino Médio de 2017 (ENEM 2017).

Quadro 2 – Variação da magnitude na Escala Richter e seus efeitos

Magnitude (M)	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido ou pouco sentido.
Entre 3,5 e 5,4	Sentido pela maioria das pessoas. Capaz de partir vidros.
Entre 5,5 e 6,0	Pode ocasionar queda de mobília e danos em construções.
Entre 6,1 e 6,9	Destrutivo em áreas em torno de até $100\ km$ do epicentro. Pode ocasionar queda de edifícios.
Entre 7,0 e 7,9	Causa sérios danos numa grande faixa. Pode ocasionar quedas de pontes e barragens.
Maior ou igual a 8,0	Desastre em larga escala. Causa danos em áreas que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte: Produção da autora, 2019.

A maioria dos terremotos não ultrapassa a magnitude $M = 4$ na Escala Richter. O Brasil não tem registros de grandes desastres devido à terremotos. Mas em 2018, um tremor de magnitude 6,8 foi registrado nos estados do sul e em alguns estados do sudeste, advindo da região sudoeste da Bolívia.

4.3.3 O pH de Soluções

O Potencial de Hidrogênio (pH) permite expressar a acidez ou alcalinidade de uma solução por meio do teor de hidrônio (H_3O^+ ou H^+) na mesma, numa escala de 0 a 14, sendo as com pH menor que sete soluções básicas, igual a sete soluções neutras e superiores a sete soluções ácidas, isso em temperatura ambiente. Esse pode ser verificado por meio de fitas indicadoras de pH ou por meio do peagâmetro, equipamento com grande precisão na medida do pH de uma solução. Segue Quadro 3, adaptado de Peruzzo e Couto (1998), que expõe algumas soluções e seus respectivos potenciais de hidrogênio.

Quadro 3 - pH de soluções

Solução	pH
Ácido de baterias e ácido muriático (clorídrico)	Menor que 1
Suco de limão e vinagre	Entre 1 e 3
Vinhos e cervejas	Entre 3 e 5
Urina humana, leite e água de chuva	Entre 5 e 7
Água do mar e bicarbonato de sódio	Entre 7 e 9
Pasta dental e leite de magnésia	Entre 9 e 11
Amoníaco	Entre 11 e 12
Alvejante	Entre 12 e 14

Fonte: Produção da autora, 2019.

O termo pH foi introduzido em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Sören Peter Mauritz Sörensen (1868 – 1939). O "p" vem do alemão "potenz", para representar poder de concentração, já o "H" vem para representar o íon de hidrogênio. Sörensen desenvolveu os estudos sobre pH a fim de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas. O dinamarquês definiu pH como um logaritmo decimal do inverso da concentração hidrogeniônica, como segue abaixo:

$$pH = \log\left(\frac{1}{[H^+]}\right)$$

$$pH = \log 1 - \log[H^+]$$

$$ph = 0 - \log[H^+]$$

$$ph = -\log[H^+].$$

Atualmente, o pH tem extrema importância na indústria. Por exemplo, produção de vacinas, fermentações e produção de leite e derivados fazem uso de aplicações do estudo do pH.

5 ALGUMAS ANÁLISES SOBRE LOGARITMOS

Neste capítulo primeiramente são reconhecidos aspectos legais dos logaritmos no Brasil. Apresenta-se a análise da forma como este tema aparece em alguns livros didáticos do Ensino Médio. Por fim, aparece a investigação sobre como o conteúdo foi abordado no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e em vestibulares de algumas instituições de Santa Catarina no último triênio.

5.1 OS LOGARITMOS NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

A área de Matemática e suas Tecnologias nas Bases Legais do Ministério da Educação, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apresenta competências específicas. Essa área elegeu três grandes competências e, posteriormente, detalha o sentido dessas no âmbito da Matemática. Fala-se de representação e comunicação, investigação e compreensão e contextualização sociocultural. Lista-se abaixo algumas habilidades a serem desenvolvidas nestas competências.

> Ler e interpretar textos de Matemática. Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.). Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa. Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.). Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema. Interpretar e criticar resultados numa situação concreta. Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades. Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade. (BRASIL, 2000, p. 46).

No tópico da contextualização sociocultural, as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) citam a compreensão do conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana, dentro de um processo histórico e social.

> Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. [...] Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a

> Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. (BRASIL, 2006, p. 117).

Recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) listou cinco competências e, posteriormente, habilidades a serem alcançadas em cada uma delas. A competência três destaca a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos. Para essa competência são listadas dezesseis habilidades, mas aqui serão destacadas apenas duas.

> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 528).

No mesmo documento, o tema logaritmos é usado para exemplificar a explicitação de linguagens que permitem ao aluno perceber a universalidade do conteúdo, comum em diferentes disciplinas. Nota-se geralmente que muitos alunos se mostram confusos com a notação, apenas decoram as propriedades, têm dificuldade para usar o conteúdo em resolução de problemas e não conseguem visualizar uma aplicação próxima da realidade deles. Como ocorre em tantos outros momentos nas aulas de Matemática, os estudantes não entendem o porquê do desenvolvimento desse conteúdo. O estudo desse tema torna-se um processo repetitivo e sem significado. Nota-se que o contexto histórico é mencionado nos documentos de forma a buscar espaço para a história da Matemática no ensino da Matemática. De acordo com o PCN+ (BRASIL, 2006), o aprendizado perde seu contexto quando não se explicita a importância dos logaritmos em questões tecnológicas e em outras ciências (p. 26). Precisa-se explorar o conteúdo de maneira que fique clara a utilidade dos instrumentos de representação do mesmo. A Proposta Curricular de Santa Catarina de 2014 destaca que "é essencial que se mobilizem emoções para promover o desejo da participação, explicitem-se as necessidades, motivos e meios para planejar ações conscientes, por meio das quais os sujeitos aprendem" (SANTA CATARINA, 2014, p. 155).

No final do Ensino Fundamental cabe o estudo de potenciação e radiciação. Já no primeiro ano do Ensino Médio, segundo o PCN+ (BRASIL, 2006), cabe, entre outros, o estudo da noção de função, análise gráfica, função exponencial e logarítmica. É comum o ano letivo não ser suficiente para a quantidade de conteúdos e o tema logaritmo não ser abordado.

O não cumprimento do currículo completo afeta o estudante que, em futuras avaliações no findar do Ensino Médio, enfrentará dificuldades por não conhecer e dominar tal conteúdo.

5.2 OS LOGARITMOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Esta seção busca verificar como o conteúdo logaritmo é abordado em alguns livros didáticos do Ensino Médio. Para tanto, verificou-se a presença das propriedades (P) e aplicações apresentadas, respectivamente, nas Seções 4.2 e 4.3 desta dissertação. Ainda, procurou-se, em especial, a presença da história do tema envolvida com o seu capítulo.

A palavra "didática" vem de uma expressão grega que se traduz como arte ou técnica de ensinar. Assim, um livro didático é um objeto de caráter pedagógico que, por meio de suas técnicas particulares de apresentação, é capaz de instruir algum sujeito.

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é responsável por avaliar e disponibilizar materiais didáticos, como livros didáticos, pedagógicos e obras literárias, às escolas públicas de Educação Básica e às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas conveniadas ao Poder Público. Segundo o Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017, são diretrizes do PNLD:

> I - o respeito ao pluralismo de ideias e concepções pedagógicas; II – o respeito às diversidades sociais, culturais e regionais; III – o respeito à autonomia pedagógica das instituições de ensino; IV – o respeito à liberdade e o apreço à tolerância; e V – a garantia de isonomia, transparência e publicidade nos processos de aquisição das obras didáticas, pedagógicas e literárias. (BRASIL, 2017, p. 7)

O Art. 10 do mesmo documento destaca que a avaliação pedagógica dos materiais didáticos no âmbito no PNLD deve ser baseada nos seguintes critérios:

> I – o respeito à legislação, às diretrizes e às normas gerais da educação; II – a observância aos princípios éticos necessários à construção da cidadania e ao convívio social republicano; III – a coerência e a adequação da abordagem teórico-metodológica; IV – a correção e a atualização de conceitos, informações e procedimentos; V – a adequação e a pertinência das orientações prestadas ao professor; VI – a observância às regras ortográficas e gramaticais da língua na qual a obra tenha sido escrita; VII – a adequação da estrutura editorial e do projeto gráfico; e VIII – a qualidade do texto e a adequação temática. (BRASIL, 2017, p. 7).

Para este trabalho, cinco livros didáticos passaram por análise. Todos são livros de primeiro ano do Ensino Médio e foram disponibilizados recentemente para escolha dos professores em algumas instituições estaduais que ofertam Ensino Médio na cidade de Joinville, norte de Santa Catarina. Esses fazem parte do PNLD e estão de acordo com suas normas. Todas as obras respeitam as diretrizes desse programa. No Quadro 4, pode-se encontrar os títulos dos livros, bem como os seis itens descritos e analisados. A marcação com um (X) indica que o item foi encontrado no livro didático.

Quadro 4 - Análise de livros didáticos

Livro / Item	Quadrante matemática	#Contato matemática	Conexões com a matemática	Matemática: ciência e aplicações	Matemática: contexto e aplicações
Relaciona a história do conteúdo com a parte teórica				X	
Revisão de propriedades de potenciação e radiciação	X	X	X	X	X
Definição de logaritmos e principais propriedades demonstradas	X	X	X	X	X
Função logarítmica, construção gráfica e caracterização	X	X	X	X	X
Apresenta o logaritmo de base *e*				X	X
Apresenta aplicações do conteúdo	X	X	X	X	X

Fonte: Produção da autora, 2019.

Em nenhum livro foi encontrada uma explicação ao menos sucinta sobre a existência de logaritmos de números negativos. Obviamente não se espera que alunos do primeiro ano do Ensino Médio possuam conhecimento matemático suficiente para compreender o que foi apresentado na subseção 2.2.4. Mas algum tipo de comentário ou nota poderia gerar curiosidade e mais interesse pela disciplina em si.

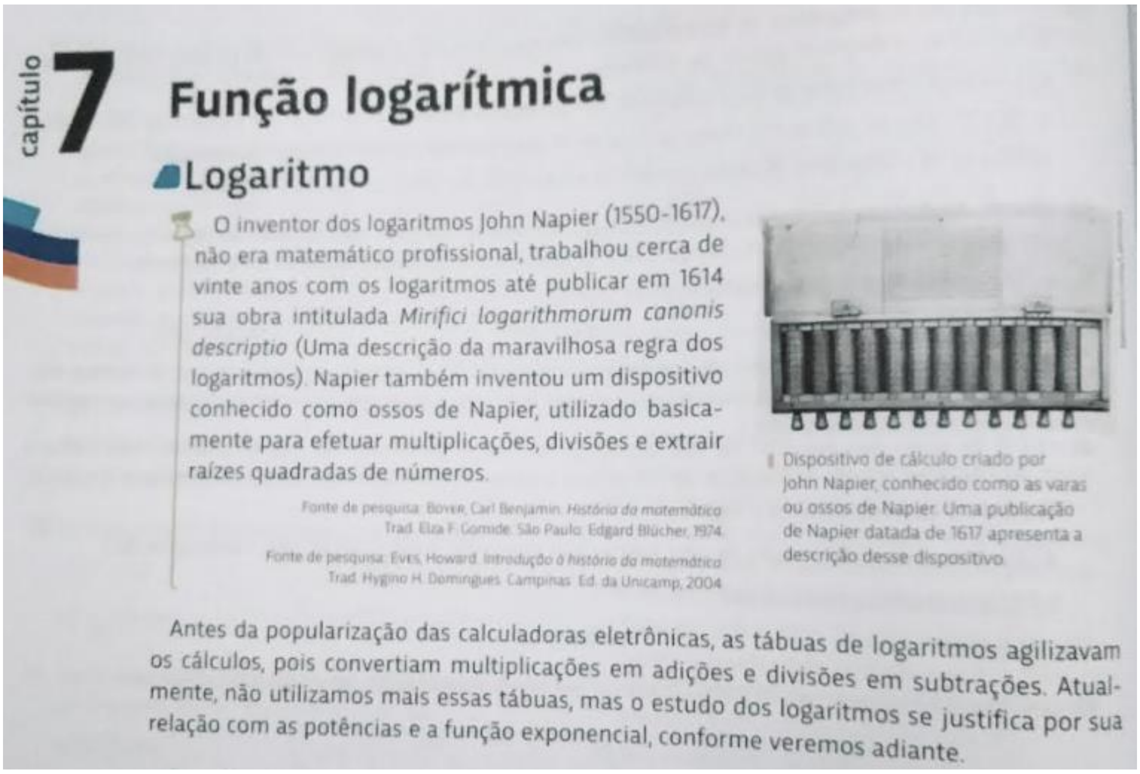
O livro *Quadrante matemática* (Figura 6), da editora SM, é de autoria de Eduardo Chavante e Diego Barboza Prestes. Eduardo Chavante é licenciado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC – PR) e especialista em Mídias na Educação pela Universidade Estadual do Centro – Oeste (UNICENTRO). Diego Barboza Prestes é licenciado em Matemática, especialista em Educação Matemática e mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Essa produção dos autores possui 416 páginas para abordar 10 capítulos, com vinte páginas dedicadas ao estudo dos logaritmos.

Figura 6 - Capa do livro didático *Quadrante matemática*

Fonte: Chavante e Prestes, 2016, capa.

No início do capítulo 6 (Função exponencial), existe uma revisão sobre potências de base real positiva e suas propriedades. O capítulo 7 (Função logarítmica) inicia com uma breve nota sobre John Napier e as tábuas de logaritmos, sem fazer ligações com o restante do capítulo (Figura 7). Segue a definição de logaritmo, de acordo com a Definição 6, e já se explica a notação para logaritmo decimal, o que não ocorre em nenhum momento para logaritmos naturais. As propriedades 21 a 25 são apresentadas e demonstradas. Após algumas atividades propostas, o livro explora o conceito de função inversa dentro desse capítulo, de forma a concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Fala-se da simetria dos gráficos das funções em relação à reta $y = x$. A definição de função logarítmica segue a Definição 9. Os gráficos das funções são construídos e as funções caracterizadas quanto seu comportamento crescente ou decrescente. Nas atividades também aparecem translações de gráficos de funções logarítmicas. Não é falado sobre injetividade e sobrejetividade. A P28 é explicada e é destacado que o logaritmando deve ser sempre um número real positivo. O capítulo ainda explora equações e inequações logarítmicas. No total são 11 exercícios resolvidos e 41 propostos. Para fechar o capítulo, os autores apresentam a Lei de Benford e suas aplicações, único momento em que se fala da aplicabilidade do conteúdo além dos enunciados das atividades.

Figura 7 - Nota histórica do Capítulo 7



capítulo 7

Função logarítmica

Logaritmo

O inventor dos logaritmos John Napier (1550-1617), não era matemático profissional, trabalhou cerca de vinte anos com os logaritmos até publicar em 1614 sua obra intitulada *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos). Napier também inventou um dispositivo conhecido como ossos de Napier, utilizado basicamente para efetuar multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números.

Fonte de pesquisa: Boyer, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Fonte de pesquisa: Eves, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004.

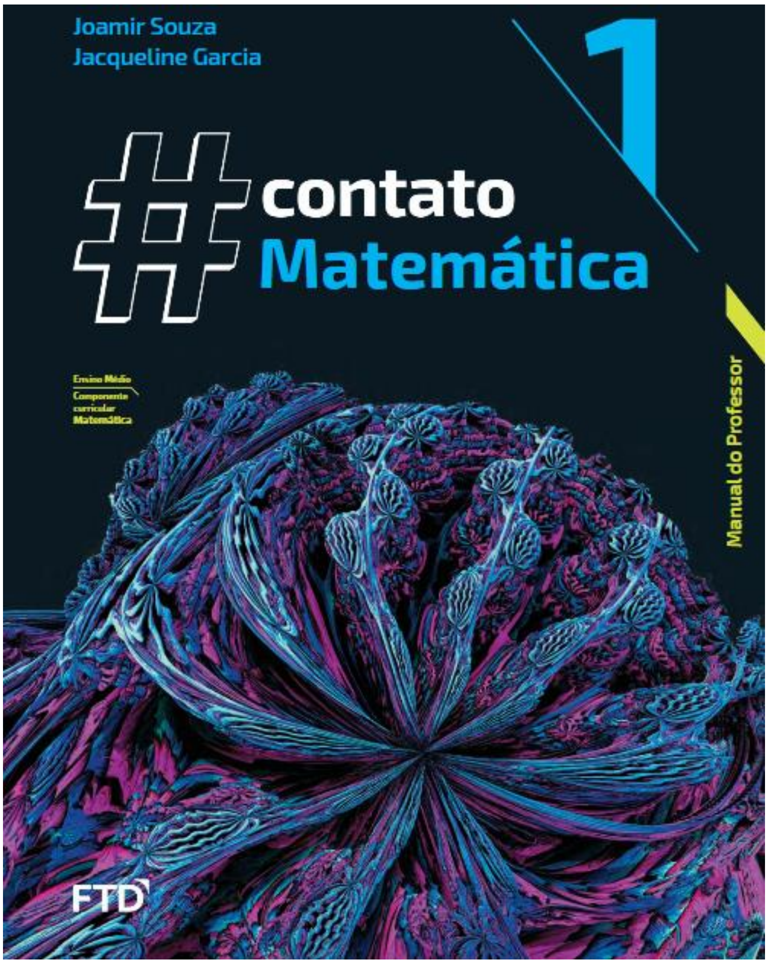
Dispositivo de cálculo criado por John Napier, conhecido como as varas ou ossos de Napier. Uma publicação de Napier datada de 1617 apresenta a descrição desse dispositivo.

Antes da popularização das calculadoras eletrônicas, as tábuas de logaritmos agilizavam os cálculos, pois convertiam multiplicações em adições e divisões em subtrações. Atualmente, não utilizamos mais essas tábuas, mas o estudo dos logaritmos se justifica por sua relação com as potências e a função exponencial, conforme veremos adiante.

Fonte: Chavante e Prestes, 2016, p. 150.

Os autores do livro *#contato Matemática* (Figura 7), da editora FTD, são Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia e Joamir Souza. Os autores possuem graduação em Matemática pela UEL. Joamir Souza também possui especialização em Estatística e mestrado em Matemática também pela UEL. O livro didático possui 400 páginas divididas em 9 capítulos. O capítulo 6, chamado de Logaritmo e função logarítmica, possui 21 páginas, iniciando com um texto sobre microrganismos e sua proliferação para evidenciar uma aplicação do conteúdo a ser estudado e mostrar a utilidade deste tema neste contexto.

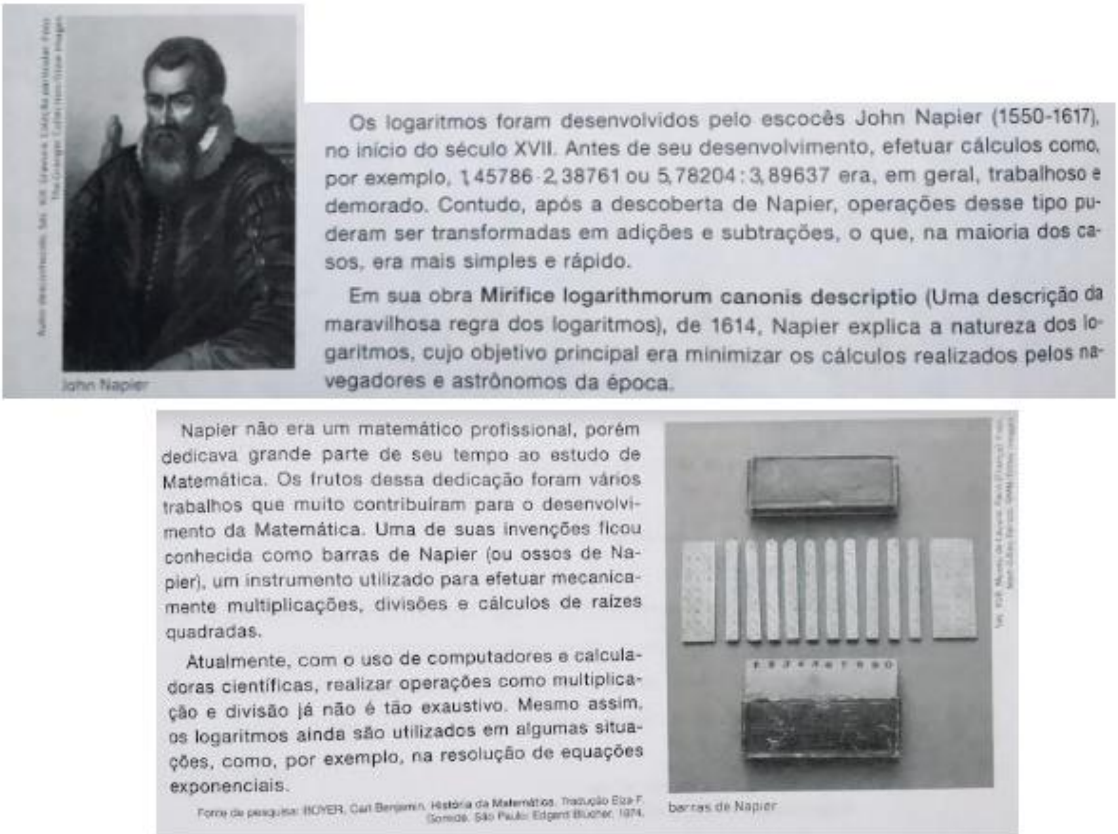
Figura 8 - Capa do livro didático *#contato matemática*



Fonte: Garcia e Souza, 2016, capa.

No capítulo 5, sobre função exponencial, há revisão sobre potenciação, mas sem demonstração das propriedades. Nas primeiras páginas do capítulo 6 há uma introdução contextualizada do conteúdo e, também, considerações históricas (Figura 9). Conta-se que John Napier conseguiu transformar multiplicações e divisões exaustivas em somas e subtrações mais simples e rápidas. Destaca-se que máquinas hoje conseguem resolver esses cálculos exaustivos, mas que logaritmos ainda são utilizados na resolução de equações exponenciais, por exemplo. Nenhuma outra ligação com o conteúdo aparece. Segue a definição de logaritmo, conforme Definição 6. Posteriormente aparecem as consequências imediatas e as propriedades operatórias 21 a 25 demonstradas. É definida a base decimal, mas não se faz uso da base e. Para definir função logarítmica, os autores relembram função exponencial e que ela é bijetiva, ou seja, admite inversa. Assim, segue a definição da função logarítmica, conforme Definição 9, acompanhada da construção gráfica, caracterização quanto ao comportamento crescente ou decrescente e da simetria das funções exponencial e logarítmica. O capítulo aborda ainda as equações logarítmicas, fechando essa parte com uma questão interdisciplinar contextualizada sobre terremotos, aplicação discutida no item 4.3.2 deste trabalho. O capítulo é finalizado com o estudo das inequações logarítmicas. No total, são 13 exercícios resolvidos como exemplos e 61 propostos.

Figura 9 - Nota histórica do Capítulo 6



John Napier

Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617), no início do século XVII. Antes de seu desenvolvimento, efetuar cálculos como, por exemplo, $1{,}45786 \cdot 2{,}38761$ ou $5{,}78204 : 3{,}89637$ era, em geral, trabalhoso e demorado. Contudo, após a descoberta de Napier, operações desse tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que, na maioria dos casos, era mais simples e rápido.

Em sua obra **Mirifice logarithmorum canonis descriptio** (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), de 1614, Napier explica a natureza dos logaritmos, cujo objetivo principal era minimizar os cálculos realizados pelos navegadores e astrônomos da época.

Napier não era um matemático profissional, porém dedicava grande parte de seu tempo ao estudo de Matemática. Os frutos dessa dedicação foram vários trabalhos que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Uma de suas invenções ficou conhecida como barras de Napier (ou ossos de Napier), um instrumento utilizado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e cálculos de raízes quadradas.

Atualmente, com o uso de computadores e calculadoras científicas, realizar operações como multiplicação e divisão já não é tão exaustivo. Mesmo assim, os logaritmos ainda são utilizados em algumas situações, como, por exemplo, na resolução de equações exponenciais.

Fonte da pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

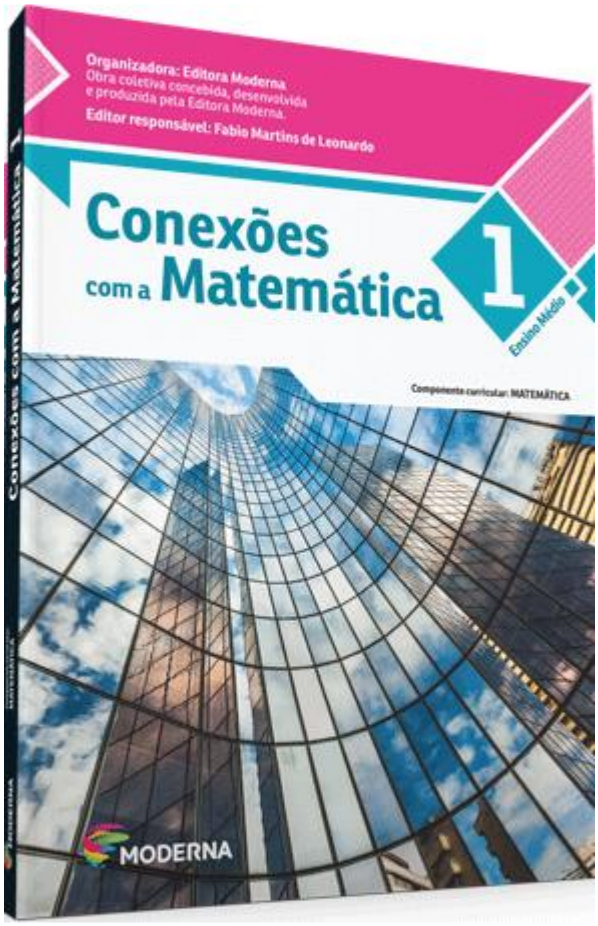
barras de Napier

Fonte: Garcia e Souza, 2016, p. 158 e 159.

O próximo livro analisado, *Conexões com a Matemática* (Figura 10), é uma obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. A elaboração dos originais foi desenvolvida por treze autores: Alexandre Raymundo, bacharel e licenciado em

Matemática pela Universidade São Judas Tadeu; Dario Martins de Oliveira, licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP); Débora Regina Yogui, licenciada em Matemática pela USP; Enrico Briene Casentini, licenciado em Matemática pela USP; Ernani Nagy de Moraes, mestre em Educação pela USP; Fabio Martins Leonardo, licenciado em Matemática pela USP e editor responsável desse livro; Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita, licenciada em Matemática pela USP; Juliana Ikeda, licenciada em Matemática pela USP; Juliane Matsubara Barroso, bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; Kátia Takahashi, licenciada em Ciências pelo Centro Universitário Sant'Anna; Luciana de Oliveira Gerzoschkowitz Moura, mestre em Educação pela USP; Mara Regina Garcia Gay, bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, e Osvaldo Shigueru Nakao, doutor em Engenharia Civil pela USP.

Figura 10 - Capa do livro didático *Conexões com a Matemática*



Fonte: Leonardo et al, 2016, capa.

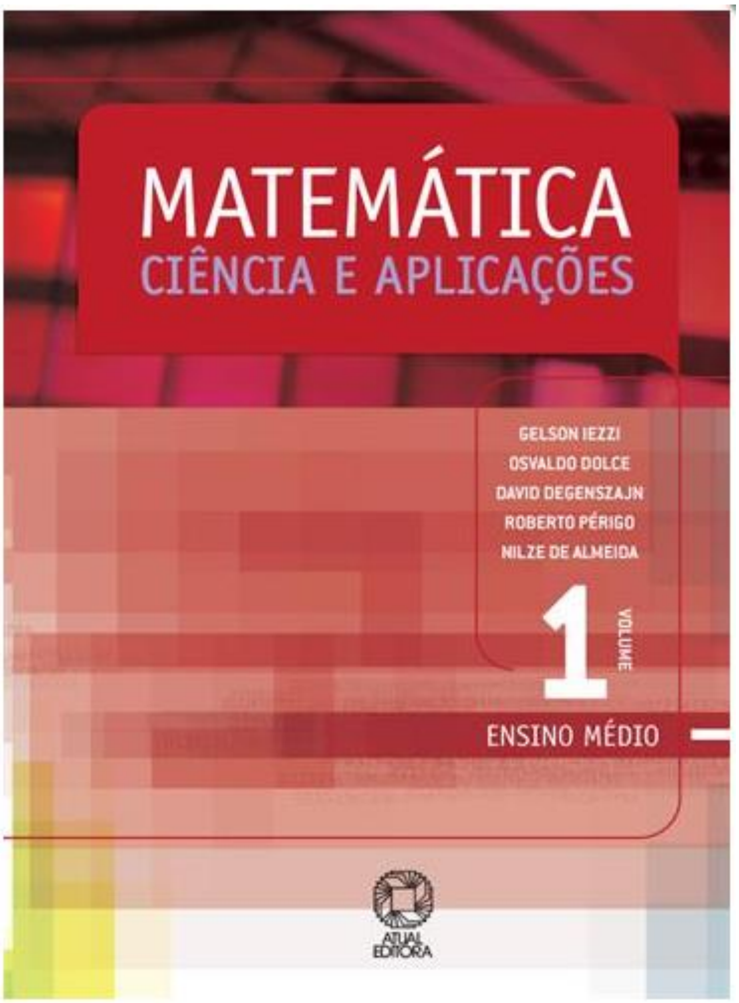
O livro analisado da editora Moderna possui 416 páginas divididas em 11 capítulos, em que o sexto capítulo aborda a função exponencial e o sétimo a função logarítmica. No capítulo 6 há revisão das propriedades de potenciação, mas sem a sua demonstração. O capítulo 7, que possui 20 páginas, inicia com um parágrafo explicando que a medida da escala Richter é determinada por meio de uma função logarítmica, como estudado no item 4.3.2 deste trabalho. Também fala sobre um problema clássico de proliferação de bactérias. Esses breves exemplos de aplicação são os únicos que aparecem no capítulo fora dos enunciados dos exercícios. Não há parte histórica em outra parte do capítulo.

A obra apresenta a definição de logaritmo de acordo com a Definição 6 e apresenta as propriedades P22 a P25 demonstradas. A propriedade P21 é tomada como consequência imediata. Fala-se sobre a base decimal, mas não sobre a base e. A função logarítmica está definida conforme a Definição 9, seguida de sua caracterização quanto à construção e comportamento crescente ou decrescente. Ainda é explorada a simetria das funções exponencial e logarítmica. Para fechar o capítulo, estuda-se as equações e inequações logarítmicas. No total, são 23 exercícios resolvidos como exemplos e 75 outros propostos.

O livro didático *Matemática: ciência e aplicações* (Figura 11), da editora Saraiva, é composto por 480 páginas e 13 capítulos. Possui cinco autores: Gelson Iezzi, engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da USP e professor licenciado pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP; Osvaldo Dolce, engenheiro civil pela Escola Politécnica da USP; David Degenszajn, licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP; Roberto Périgo, licenciado e bacharelado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, e Nilze de Almeida, licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da USP e mestra em Ensino da Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

No início do capítulo 7, referente à função exponencial, há revisão das propriedades de potenciação, sem demonstrações. O capítulo 8, sobre função logarítmica, possui 31 páginas, 10 exemplos resolvidos e 81 exercícios propostos. Inicia com um problema envolvendo juros e mostra a necessidade de conhecer os logaritmos. A definição de logaritmo aparece conforme a Definição 6. O livro propõe que os alunos tentem calcular $\log_2 -4$, o que mostra o porquê da definição limitar os estudos para logaritmandos maiores do que zero nesta fase do Ensino Médio. Seguem algumas consequências imediatas e as propriedades P21 a P25 são demonstradas. A definição de função logarítmica segue a Definição 9. Alguns gráficos de funções logarítmicas são construídos e explorados. Caracteriza-se os mesmos como crescentes ou decrescentes, cita-se a simetria desses gráficos com os gráficos da função exponencial e a P28 também aparece.

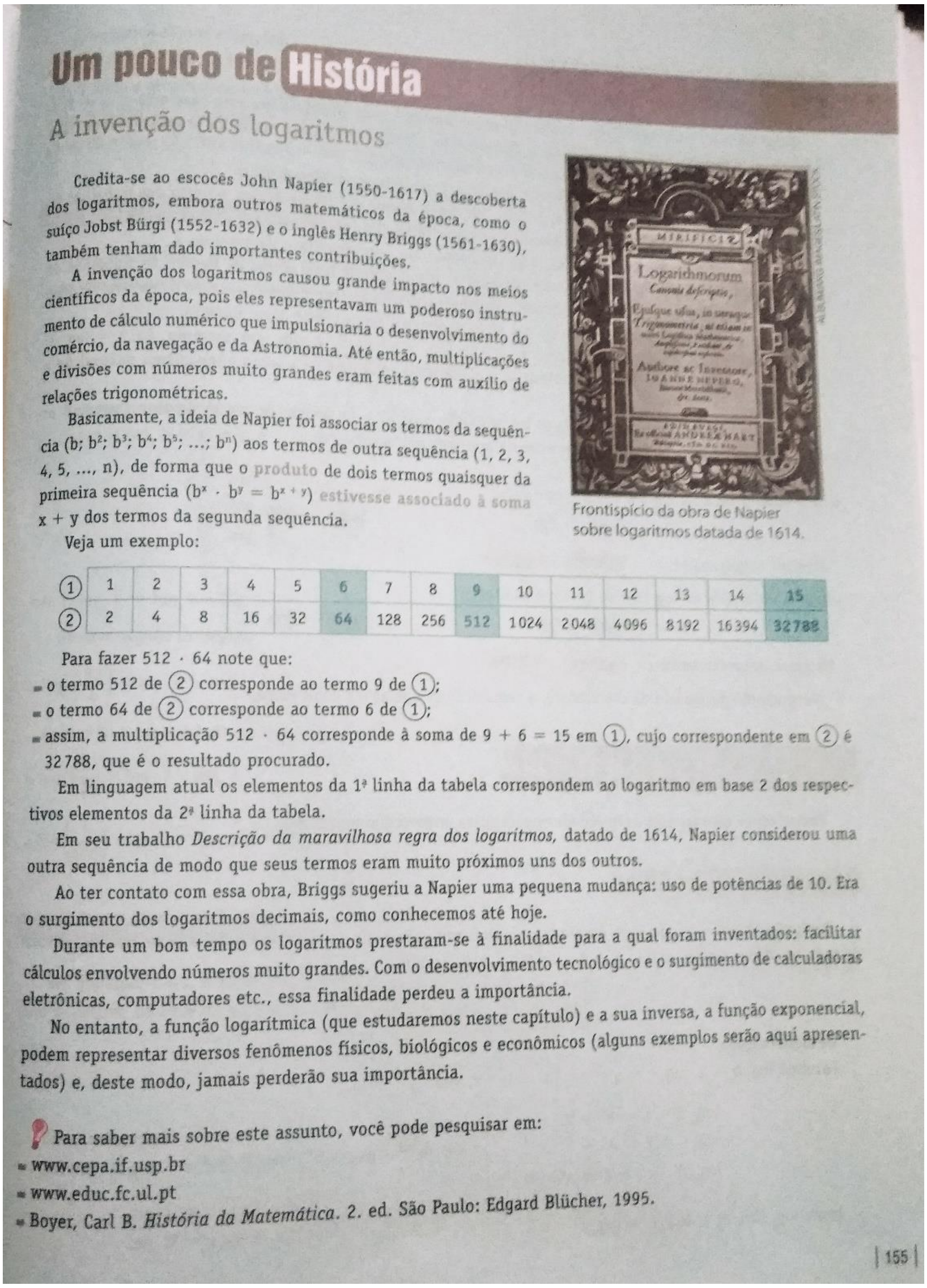
Figura 11 - Capa do livro didático *Matemática: ciência e aplicações*



Fonte: Iezzi et al, 2010, capa.

A página 155 (Figura 12) é dedicada para contar um pouco da história desse conteúdo. Fala-se de Napier, mas de Bürgi e Briggs também. Destaca-se o parágrafo que diz que Napier associou os termos da sequência $(b, b^2, b^3, \dots, b^n)$ aos termos da sequência $(1, 2, 3, \dots, n)$ de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência $(b^x . b^y = b^{x+y})$ estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência. Não se fala em progressão aritmética e progressão geométrica ainda, pois são conteúdos do décimo capítulo. Desta forma, os autores divulgaram de forma interessante o sentido dos primeiros estudos referentes aos logaritmos, justificando o porquê de sua criação.

Figura 12 - Seção *Um pouco de História*



Um pouco de História

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência (b; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Frontispício da obra de Napier sobre logaritmos datada de 1614.

Veja um exemplo:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para fazer $512 \cdot 64$ note que:

- o termo 512 de 2 corresponde ao termo 9 de 1;
- o termo 64 de 2 corresponde ao termo 6 de 1;
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em 1, cujo correspondente em 2 é 32788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*, datado de 1614, Napier considerou uma outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes. Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores etc., essa finalidade perdeu a importância.

No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponencial, podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui apresentados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.

Para saber mais sobre este assunto, você pode pesquisar em:

- www.cepa.if.usp.br
- www.educ.fc.ul.pt
- Boyer, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1995.

155

Fonte: Iezzi et al, 2010, p. 155.

Na página seguinte, são explorados os sistemas decimal e natural de logaritmos. Também é explicado como manipular calculadoras científicas a fim de obter logaritmos de base 10 e e. Estes também aparecem nos estudos posteriores de equações e inequações, mais para o final do capítulo.

Em três momentos do capítulo são bem exploradas as aplicações para o tema. Primeiro aparece a escala de acidez relacionada aos logaritmos, exemplificando cálculos de pH, aplicação explorada no item 4.3.3 deste trabalho. Depois o livro associa a escala Richter com o tema do capítulo, explicando que a magnitude de Richter corresponde ao logaritmo da medida das amplitudes das ondas sísmicas a cem quilômetros do epicentro (item 4.3.2). Por fim, mostra-se a aplicação dos logaritmos para os sons e a audição humana, tal que, com base nos valores de intensidade do som, pode-se definir o nível de intensidade em decibel, aplicação estudada no item 4.3.1 deste trabalho.

Para finalizar a parte de análise de livros didáticos, será comentado sobre a unidade 3 do livro *Matemática: contexto e aplicações* (Figura 12), de Luiz Roberto Dante. O autor é mestre em Matemática pela USP, doutor em Psicologia da Educação (ensino da Matemática) pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista em Rio Claro. A unidade 3 engloba os capítulos 5, sobre função exponencial, e 6, sobre função logarítmica. No capítulo 5 há revisão sobre potenciação, porém, sem demonstrações.

No capítulo 6 a definição de logaritmos apresentada está de acordo com a Definição 6. O livro sugere que os alunos tentem calcular $\log_3(-81)$, isto para que eles verifiquem o porquê da definição limitar os estudos para logaritmandos maiores do que zero, ao menos nesta fase de estudos. É caracterizado o logaritmo decimal. Seguem as consequências imediatas da definição e as propriedades 21 à 25 são demonstradas. É explicado também o procedimento para calcular logaritmos por meio de calculadoras científicas. Nesta parte do capítulo há uma nota na lateral da página informando que logaritmos naturais são logaritmos na base e e são representados por ln. A definição de função inversa é realizada dentro desse capítulo, isso para concluir que as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra. A função logarítmica está definida conforme a Definição 9. São construídos gráficos, analisados os comportamentos quanto a ser crescente ou decrescente e também aparece a P28. Uma seção bastante interessante deste capítulo é a *Matemática e tecnologia*. Nesta seção se ensina passo a passo para construir e explorar gráficos de funções no *software* Geogebra. O capítulo é encerrado com o estudo de equações e inequações logarítmicas.

Figura 13 - Capa do livro didático *Matemática: contexto e aplicações*

Fonte: Dante, 2013, capa.

O capítulo 6 do livro da editora Ática inicia com uma nota histórica (Figura 14), comentando como alguns cálculos antes dos logaritmos surgirem eram trabalhosos. O autor afirma que o tema do capítulo foi criado por Napier e Bürgi. Explica-se que o logaritmo de Napier não é exatamente como se estuda hoje e que ele pode ser aplicado, por exemplo, para calcular a magnitude de terremotos (item 4.3.2). Esse capítulo possui 30 páginas, com 19 exercícios resolvidos e 89 propostos, alguns deles distribuídos nas seções *Pensando no ENEM*, *Outros contextos* e *Vestibulares de Norte a Sul.*

Figura 14 - Introdução do capítulo 6

CAPÍTULO 6

Logaritmo e função logarítmica

Desde a Antiguidade, época do auge da civilização babilônica, os cálculos relacionados à Astronomia eram muito trabalhosos. Mais adiante, quando a navegação foi intensificada entre diversos povos, os cálculos envolvidos tornaram-se um grande problema.

Até o início do século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente árduas, realizadas com base nos senos. Surgiram, então, as primeiras tábuas de logaritmos, criadas pelos matemáticos Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617).

Jost Bürgi

Calculadora antiga criada por John Napier, também conhecido como Neper.

John Napier

Apesar de o logaritmo de Napier não ser exatamente como o logaritmo moderno que estudaremos neste capítulo nem ser associado ao conceito de expoente, sua essência é a mesma, e contribuiu para facilitar os cálculos, principalmente, ao transformar as operações de multiplicação em adição e as de divisão em subtração, como veremos adiante.

Atualmente, com o uso das calculadoras eletrônicas, as operações de multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não representam mais dificuldade. Mas nem por isso os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoente (mérito do inglês John Wallis, em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (apresentada pelo galês William Jones, em 1742) transformaram o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais.

Cálculos com logaritmos estão presentes em várias situações reais, como a medida da magnitude dos terremotos, feita por meio da **escala Richter**.

Você sabia?
Adotada em 1935, a **escala Richter** foi assim batizada em homenagem ao físico norte-americano Charles F. Richter (1900-1985). Ela não mede os efeitos do terremoto, mas indica sua força em termos de energia liberada, conforme medida por sismógrafos. A escala começa em 1 e não tem limite superior. Como tem base logarítmica, cada aumento da magnitude em um número inteiro representa um aumento de 10 vezes na amplitude do terremoto.

174

Fonte: Dante, 2013, p. 174.

Após estudar os referidos capítulos, pode-se perceber que por vezes os livros didáticos apenas apontam o nome do principal indivíduo envolvido com a criação de determinado conteúdo, isto quando existe alguma parte dedicada à história no decorrer da obra. Poucas vezes os materiais indicam a motivação do matemático para desenvolver determinado tema. Ainda menos se encontram referências históricas ligadas com o restante do capítulo. Encontram-se informações espalhadas na página numa tentativa sem êxito de tornar os alunos historicamente situados. Existe a necessidade de construir uma relação entre a lógica do conteúdo e a sua história, isto é, uma mediação para “a relação que fornece elementos para elaboração de sequências lógicas de ensino, mas de forma que estas sequências reflitam a história não em seu aspecto sequencial, mas, sim quanto à lógica intrínseca a esta historicidade” (GIARDINETTO, 1994, p. 81).

5.3 OS LOGARITMOS EM AVALIAÇÕES

Esta seção tem como objetivo investigar se e como o tema logaritmo foi abordado no ENEM e em vestibulares de algumas instituições de Ensino Superior de Santa Catarina nos últimos 3 anos. Para tanto, procurou-se aplicações das propriedades (P) e definições apresentadas na seção 4.2 desta dissertação para a resolução das questões propostas pelos processos seletivos.

5.3.1 Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM

O ENEM é aplicado anualmente em dois dias. As áreas de Linguagens, códigos e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas e suas tecnologias são avaliadas através de 180 questões objetivas, sendo 45 para cada área e 90 por dia, e uma redação. Segundo o documento básico do ENEM, o objetivo do exame é avaliar o desempenho escolar e acadêmico ao final do Ensino Médio. Busca-se alcançar os seguintes objetivos específicos:

> a oferecer uma referência para que cada cidadão possa proceder à sua auto-avaliação com vista às escolhas futuras, tanto em relação ao mercado de trabalho quanto em relação à continuidade de estudos; b. estruturar uma avaliação da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos processos de seleção nos diferentes setores do mundo do trabalho; c. estruturar uma avaliação da educação básica que sirva como modalidade alternativa ou complementar aos exames de acesso aos cursos profissionalizantes pós-médios e ao ensino superior. (BRASIL, 2007, p. 2).

A área de Matemática e suas tecnologias é dividida em cinco setores de conhecimentos: numéricos, geométricos, algébricos, algébricos/geométricos e de estatística e probabilidade. Os conhecimentos numéricos englobam operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências, progressões e princípios de contagem. Os conhecimentos geométricos são integrados por características das figuras geométricas planas e espaciais, grandezas, unidades de medida, escalas, comprimentos, áreas, volumes, ângulos, posições de retas, simetrias de figuras planas ou espaciais, congruência e semelhança de triângulos, teorema de Tales, relações métricas nos triângulos, circunferências e trigonometria do ângulo agudo. Os conhecimentos algébricos são formados por gráficos e funções, funções algébricas do primeiro e segundo graus, funções polinomiais, funções racionais, funções exponenciais e logarítmicas, equações e inequações, relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas. Já os conhecimentos algébricos/geométricos são compostos por plano cartesiano, retas, circunferências, paralelismo e perpendicularidade e sistemas de equações. Por fim, os conhecimentos de estatística e probabilidade englobam representação e análise de dados, medidas de tendência central (médias, moda e mediana), desvios e variância e noções de probabilidade.

Em 2016 o ENEM abordou o tema logaritmo em duas questões na primeira aplicação. A primeira questão é a 145 do caderno amarelo (Figura 15). É uma questão contextualizada e que traz aproximações para logaritmos de determinados valores. Nota-se que são aplicadas as propriedades P22, P23 e P24.

Figura 15 - Questão 145 do caderno amarelo (ENEM 2016)

QUESTÃO 145

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

- A 22.
- B 50.
- C 100.
- D 200.
- E 400.

Fonte: ENEM, 2016, p. 20.

Resolução: Ao afirmar que a temperatura diminui 1% a cada 30 minutos, tem-se que a temperatura é multiplicada por 0,99 a cada 30 minutos. Seja n a quantidade necessária para que a temperatura inicial 3000ºC atinja 30ºC.

$$3000.0{,}99^{n} = 30$$

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n = \frac{30}{3000}$$

$$\left(\frac{3^2.11}{10^2}\right)^n = 10^{-2}$$

$$\log\left(\frac{3^2.11}{10^2}\right)^n = \log 10^{-2}$$

$$n.(2.\log 3 + \log 11 - 2.\log 10) = -2$$

$$n.(2.0{,}477 + 1{,}041 - 2) = -2$$

$$-0{,}005.n = -2$$

$$n = 400.$$

Portanto, são necessárias 400 meias horas, isto é, 200 horas.

Resposta: alternativa “d”.

A segunda questão é a 174 do caderno amarelo (Figura 16). É uma questão contextualizada, que envolve o tema logaritmo com a determinação da magnitude de um terremoto. Para se resolver esta questão, é necessário ter domínio da propriedade P23.

Figura 16 - Questão 174 do caderno amarelo (ENEM 2016)

QUESTÃO 174

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

A) $E_1 = E_2 + 2$

B) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

C) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

D) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

E) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

Fonte: ENEM, 2016, p. 29.

Resolução: No Japão houve um terremoto de $M = 9{,}0$. Assim,

$$\frac{2}{3}.\log\left(\frac{E_1}{E_0}\right) = 9$$

$$\log E_1 - \log E_0 = \frac{27}{2}$$

$$\log E_1 = \frac{27}{2} + \log E_0.$$

Na China houve um terremoto de $M = 7{,}0$. Assim,

$$\frac{2}{3}.\log\left(\frac{E_2}{E_0}\right) = 7$$

$$\log E_2 - \log E_0 = \frac{21}{2}$$

$$\log E_2 = \frac{21}{2} + \log E_0.$$

Logo,

$$\log E_1 - \log E_2 = \left(\frac{27}{2} + \log E_0\right) - \left(\frac{21}{2} + \log E_0\right)$$

$$\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{6}{2}$$

$$\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 3$$

$$10^3 = \frac{E_1}{E_2}$$

$$E_1 = E_2.10^3.$$

Resposta: alternativa “c”.

Em 2017 o ENEM abordou o tema logaritmo em apenas uma questão. A questão 137 (Figura 17) que é contextualizada, descrevendo uma situação que envolve valores, em reais, e prestações. Foram dados valores para aproximações de determinados logaritmos. Para a resolução, faz-se necessário o conhecimento de propriedade de potenciação, bem como domínio da propriedade P24.

Figura 17 - Questão 137 do caderno azul (ENEM 2017)

QUESTÃO 137

Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5\,000 \times 1{,}013^{n} \times 0{,}013}{(1{,}013^{n} - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

- A) 12.
- B) 14.
- C) 15.
- D) 16.
- E) 17.

Fonte: ENEM, 2017, p. 16.

Resolução: Seja $P = \frac{5000.1{,}013^{n}.0{,}013}{1{,}013^{n}-1} = \frac{65.1.013^{n}}{1{,}013^{n}-1}$. De acordo com o enunciado, $P \leq 400$. Logo,

$$\frac{65.1.013^{n}}{1{,}013^{n} - 1} \leq 400$$

$$65.1.013^{n} \leq 400.\,1{,}013^{n} - 400$$

$$400 \leq 335.1{,}013^{n}$$

$$\log 400 \leq \log 335.1{,}013^{n}$$

$$2{,}602 \leq 2{,}525 + n.\,0{,}005$$

$$0{,}077 \leq n.\,0{,}005$$

$$\frac{0{,}077}{0{,}005} \leq n$$

$$n \geq 15{,}4.$$

Portanto, o menor número de parcelas n é 16.

Resposta: alternativa “d”.

Já em 2018 o ENEM abordou o tema logaritmo em duas questões. A primeira delas é a questão 165 do caderno amarelo (Figura 18). Essa questão se refere aos juros compostos, informando a fórmula para o seu cálculo. São dadas aproximações para valores de logaritmos naturais. É necessário conhecimento da P24.

Figura 18 - Questão 165 do caderno amarelo (ENEM 2018)

QUESTÃO 165

Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para ln (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

A) 56ª
B) 55ª
C) 52ª
D) 51ª
E) 45ª

Fonte: ENEM, 2018, p. 25.

Resolução: Uma quantia, que hoje vale p, submetida a juros compostos com taxa de 1,32% ao mês, valerá no final de um período de n meses

$$p.(1 + 1{,}32\%)^n = p.1{,}0132^n.$$

Pelo enunciado, deve-se ter

$$p < 0{,}75.p.(1{,}0132)^n$$

$$1 < \frac{3}{4}.1{,}0132^n$$

$$\frac{4}{3} < 1{,}0132^n$$

$$\ln\frac{4}{3} < \ln 1{,}0132^n$$

$$0{,}2877 < n.0{,}0131$$

$$\frac{0{,}2877}{0{,}0131} < n$$

$$21{,}96 < n$$

$$n \geq 22.$$

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada, junto com a 30ª, é a $30 + 22 = 52$ª.

Resposta: alternativa “c”.

Outra questão que envolve logaritmo do ENEM 2018 é a de número 171 do caderno amarelo (Figura 19). Essa fala sobre o número de transistores no processador de um computador. Para a resolução, é necessário modelar uma função exponencial e aplicar a propriedade P24.

Figura 19 - Questão 171 do caderno amarelo (ENEM 2018)

QUESTÃO 171

Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm² de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

A 1999
B 2002
C 2022
D 2026
E 2146

Fonte: ENEM, 2018, p. 27.

Resolução: A densidade em 1986 é dada por $\frac{100000}{0,25} = 400000 = 2^2.10^5$ transistores por cm². Como o número de transistores dobra a cada 2 anos, podemos montar uma função da quantidade de transistores em função do tempo. Desta forma, $f(t) = 2^2.10^5.2^{\frac{t}{2}}$. O tempo t, após 1986 tal que $f(t) \geq 100.10^9$ é dado por

$$2^2.10^5.2^{\frac{t}{2}} \geq 100.10^9$$

$$2^{2+\frac{t}{2}} \geq 100.10^4$$

$$2^{\frac{4+t}{2}} \geq 10^6$$

$$\log_{10} 2^{\frac{4+t}{2}} \geq \log_{10} 10^6$$

$$\frac{4+t}{2}.0,30 \geq 6$$

$$\frac{4+t}{2} \geq \frac{6}{0,30}$$

$$4 + t \geq 20.2$$

$$t \geq 40 - 4$$

$$t \geq 36.$$

Portanto, atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores em 1986 + 36 = 2022.

Resposta: alternativa “c”.

5.3.2 Vestibular da ACAFE

A Associação Catarinense das Fundações Educacionais (ACAFE) é uma sociedade civil sem fins lucrativos que congrega as fundações educacionais criadas em Santa Catarina com o objetivo de promover o intercâmbio administrativo, técnico e científico entre as instituições. Por meio do vestibular da ACAFE é possível acessar onze universidades e cinco centros universitários do estado, entre eles Universidade Regional de Blumenau (FURB), Universidade do Contestado (UnC), Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI), Universidade da Região de Joinville (UNIVILLE) e Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL).

No vestibular de inverno de 2017, o tema logaritmo apareceu contextualizado na questão 27 (Figura 20). No item I se fala de investimento e resgate de determinado valor. É necessário domínio da P22 para sua resolução.

Figura 20 - Questão 27 (ACAFE 2017/02)

27) Analise as afirmações a seguir.

$\boxed{\text{I}}$ *A função* $V(x)=C_o \cdot (1{,}02)^x$ *indica o valor resgatado correspondente a um investimento no valor* C_o*, num período de* x *semestres. Então, para um investimento de R\$ 6.000,00 aplicado por 2 anos, será resgatado um valor maior que R\$ 6.500,00.*

$\boxed{\text{II}}$ *Se* $\log 2 = a$ *e* $\log 3 = b$*, o valor da expressão* $\log 60 - [a+b+7]$ *é -6.*

$\boxed{\text{III}}$ *Dadas as funções* $f(x)=3x+7$ *e* $g(2x-1)=4x-5$*, então,* $f(g(x))=6x-2$.

$\boxed{\text{IV}}$ *A função* $f: R \to R$ *definida por* $f(x)=x^2-4$ *admite inversa.*

Todas as afirmações **corretas** estão em:

A $\Rightarrow$ II - III
B $\Rightarrow$ III - IV
C $\Rightarrow$ I - II - III
D $\Rightarrow$ II - III - IV

Fonte: ACAFE, 2017, p. 15.

Resolução: Será resolvido apenas o item II.

$$\log 60 - [a + b + 7] =$$

$$\log(10.6) - [\log 2 + \log 3 + 7] =$$

$$\log 10 + \log 6 - \log 2 - \log 3 - 7 =$$

$$1 + \log(2.3) - \log 2 - \log 3 - 7 =$$

$$\log 2 + \log 3 - \log 2 - \log 3 - 6 =$$

$$-6.$$

Resposta: item II está correto.

Já no vestibular de verão de 2018, o conteúdo logaritmo foi abordado na questão 28, conforme a Figura 21. Trata-se de um sistema com uma equação logarítmica. Precisa-se aplicar a mudança de base do logaritmo (P25) para sua resolução.

Figura 21 - Questão 28 (ACAFE 2018/01)

28) Sejam x e y números reais positivos. Se (x,y) é solução do sistema $\begin{cases} 2.\log_9^{\left(\sqrt{10-x^2}\right)} + \log_3^y = 2, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

Determine o produto x.y.

A ⇒ 1/3
B ⇒ 3
C ⇒ 1/2
D ⇒ 1

Fonte: ACAFE, 2017, p. 14.

Resolução: Isolando o valor de y na segunda equação do sistema, tem-se $y = \pm\sqrt{10 - x^2}$. Como a questão afirma que x e y são positivos, segue que $y = +\sqrt{10 - x^2}$. Daí,

$$2.\log_9 \sqrt{10 - x^2} + \log_3 y = 2$$

$$2.\log_9 y + \log_3 y = 2$$

$$2.\frac{\log_3 y}{\log_3 9} + \log_3 y = 2$$

$$\log_3 y + \log_3 y = 2$$

$$2\log_3 y = 2$$

$$\log_3 y = 1.$$

Pela definição de logaritmo, segue que $y = 3$.

Como $x^2 + y^2 = 10$, segue que $x = 1$.

Portanto, $x.y = 1.3 = 3$.

Resposta: alternativa “b”

Por fim, no vestibular de verão de 2019, o tema logaritmo apareceu na questão 14 (Figura 22). É um exercício sobre a função logarítmica $f(x) = \log_2 x$. Para a resolução, precisa-se aplicar a P22, a P24, reconhecer o comportamento da função e determinar sua inversa.

Figura 22 - Questão 14 (ACAFE 2019/01)

14) Considere a função $f(x) = \log_2 x$, analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa correta.

A $\Rightarrow$ Se $f(x+y) = -4$ e $x^2 - y^2 = 32$ então $f(x-y) = 9$.

B $\Rightarrow$ f é crescente para $x \in [0, +\infty)$.

C $\Rightarrow$ Existem dois valores $x \in Dom(f)$ tais que $f(x^2) = 2$.

D $\Rightarrow$ A função f é bijetora e sua inversa é definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Fonte: ACAFE, 2018, p. 15.

Resolução: Serão analisadas todas as alternativas.

Alternativa "A":

$$f(32) = f(x^2 + y^2)$$

$$f(32) = f\big((x+y)(x-y)\big)$$

$$\log_2 32 = \log_2\big((x+y)(x-y)\big)$$

$$5 = \log_2(x+y) + \log_2(x-y)$$

$$5 = f(x+y) + f(x-y)$$

$$5 = -4 + f(x-y)$$

$$f(x-y) = 9.$$

Alternativa "B": o número 0 não faz parte do domínio de f.

Alternativa "C": tem-se que $f(x^2) = \log_2 x^2 = 2.\log_2 x = 2$. Logo, $x = 2$ é único.

Alternativa "D": de fato f é bijetora, mas sua inversa é $f^1(x) = 2^x$.

Resposta: alternativa "a".

5.3.3 Vestibular da UDESC

Todo semestre a Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) realiza um concurso vestibular. Esse destina-se ao provimento de vagas nos cursos de graduação ofertadas nos centros espalhados por Santa Catarina para candidatos que concluem o Ensino Médio até o ato da matrícula na universidade.

No vestibular de inverno de 2016, a UDESC abordou o tema logaritmo na questão 02 (Figura 23). Trata-se de um exercício, no qual é necessário o domínio da definição de logaritmo e das propriedades de potenciação.

Figura 23 - Questão 02 (UDESC 2016/02)

Questão 02

Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações

$$\begin{cases} \log_2(a+b+c)=0 \\ \log(a+2b)=1 \\ \dfrac{2^a.4^b}{8^c}=2 \end{cases}$$

Analise as proposições em relação a a, b e c.

I. Um dos valores é um número primo.
II. Todos os valores são números reais não negativos.
III. Dois dos valores são números naturais.
IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa **correta**.

A. ( ) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
B. ( ) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
C. ( ) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
D. ( ) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
E. ( ) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Fonte: UDESC, 2016, p. 3.

Resolução: Por $\log_2(a+b+c)=0$, tem-se que $a+b+c=2^0=1$. Por $\log(a+2b)=1$, tem-se que $a+2b=10^1=10$. Portanto, $a=10-2b$ e $c=b-9$. Segue que:

$$\frac{2^a.4^b}{8^c}=2$$

$$\frac{2^a.2^{2b}}{2^{3c}}=2$$

$$2^{a+2b-3c} = 2$$

$$a + 2b - 3c = 1$$

$$10 - 3c = 1$$

$$c = 3.$$

Consequentemente, $b = 12$ e $a = -14$.

Resposta: alternativa "A".

Em 2017 a UDESC abordou o temo logaritmo apenas no vestibular de verão. A questão 07 (Figura 24) trata de um exercício de determinação de inversas de funções logarítmicas.

Figura 24 - Questão 07 (UDESC 2017/01)

Questão 07

Considere os valores de x pertencentes ao conjunto $S = \{x \in R \,/\, x > -4\}$. Associe cada uma das funções $f(x)$ com $x \in S$, exibidas na coluna A da Tabela 1 com as suas respectivas inversas, exibidas na coluna B.

Tabela 1: Funções e suas inversas

A	B
(1) $f(x) = \log_2 \sqrt[4]{x+4}$	( ) $f^{-1}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x+4} - 4$
(2) $f(x) = 2\log_2\left(\dfrac{x+4}{4}\right)$	( ) $f^{-1}(x) = 2^{2x-1} - 4$
(3) $f(x) = \log_4(2x+8)$	( ) $f^{-1}(x) = 2^{4x} - 4$

Assinale a alternativa que contém a sequência **correta** de classificação, de cima para baixo.

A. ( ) 3 – 1 – 2
B. ( ) 2 – 1 – 3
C. ( ) 1 – 3 – 2
D. ( ) 3 – 2 – 1
E. ( ) 2 – 3 – 1

Fonte: UDESC, 2016, p. 6.

Resolução: Para (1), seja $y = \log_2 \sqrt[4]{x+4}$ Daí, pela definição de logaritmo, $2^y = \sqrt[4]{x+4}$, isto é, $2^{4y} - 4 = x$. Portanto, a inversa é $f^{-1}(x) = 2^{4x} - 4$.

Para (2), seja $y = 2.\log_2\left(\frac{x+4}{4}\right) = \log_2\left(\frac{x+4}{4}\right)^2$. Daí, pela definição de logaritmo, $2^y = \left(\frac{x+4}{4}\right)^2$, isto é, $x = 2^{\frac{y}{2}}.4 - 4 = 2^{\frac{y}{2}+2} - 4 = \sqrt{2}^{y+4} - 4$. Portanto, a inversa é $f^{-1}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{x+4} - 4$.

Para (3), seja $y = \log_4(2x+8)$. Daí, pela definição de logaritmo, $4^y = 2x + 8$, isto é, $x = \frac{2^{2y}-8}{2} = 2^{2y-1} - 4$. Portanto, a inversa é $f^{-1}(x) = 2^{2x-1} - 4$.

Resposta: alternativa “E”.

No vestibular de verão de 2018, a UDESC abordou o conteúdo logaritmo no concurso na questão 04 (Figura 25). É um exercício com equações logarítmica e exponencial, no qual é necessário o domínio da definição de logaritmo e conhecimento das propriedades P22, P24 e P25.

Figura 25 - Questão 04 (UDESC 2018/01)

Questão 04

O valor de $x \cdot y$ com $x, y \in Z$, sabendo que $\log_2(x) + \log_4(y) = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:

A. ( ) 4 B. ( ) 8 C. ( ) 2 D. ( ) 6 E. ( ) 10

Fonte: UDESC, 2017, p. 3.

Resolução: Aplicando a mudança de base, tem-se:

$$\log_2 x + \log_4 y = 2$$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = 2$$

$$\log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} = 2$$

$$2.\log_2 x + \log_2 y = 4$$

$$\log_2 x^2 + \log_2 y = 4$$

$$\log_2 x^2.y = 4.$$

Pela definição de logaritmo, $x^2.y = 2^4 = 16$.

A questão também informa que $2^{x+y} = 32$, isto é, $x + y = 5$, ou ainda, $y = 5 - x$.

Daí,

$$x^2 . y = 16$$

$$x^2 . (5 - x) = 16$$

$$x^3 - 5x^2 + 16 = 0.$$

A única solução inteira é $x = 4$. Logo, $y = 1$.

Finalmente, $x . y = 4$.

Resposta: alternativa “A”.

No vestibular de inverno de 2018, a UDESC abordou o tema logaritmo na questão 07 (Figura 26). É um exercício longo envolvendo progressão aritmética, progressão geométrica, funções afim, exponencial e logarítmica.

Figura 26 - Questão 07 (UDESC 2018/02)

Questão 07

Considere a progressão aritmética $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{7}{15}, \frac{4}{5}, \cdots\right)$, a progressão geométrica $\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \cdots\right)$ e as funções $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 3^x$ e $h(x) = \log(x)$ para analisar as sentenças a seguir.

I - $\left(f\left(-\frac{1}{5}\right), f\left(\frac{2}{15}\right), f\left(\frac{7}{15}\right), f\left(\frac{4}{5}\right), \cdots\right)$ é uma progressão aritmética.

II - $\left(g\left(-\frac{1}{5}\right), g\left(\frac{2}{15}\right), g\left(\frac{7}{15}\right), g\left(\frac{4}{5}\right), \cdots\right)$ é uma progressão aritmética.

III - $\left(g(2), g\left(\frac{2}{3}\right), g\left(\frac{2}{9}\right), g\left(\frac{2}{27}\right), \cdots\right)$ é uma progressão geométrica.

IV - $\left(h(2), h\left(\frac{2}{3}\right), h\left(\frac{2}{9}\right), h\left(\frac{2}{27}\right), \cdots\right)$ é uma progressão aritmética.

Assinale a alternativa **correta**.

A. ( ) Somente as sentenças II e IV são verdadeiras.
B. ( ) Somente as sentenças I e III são verdadeiras.
C. ( ) Somente a sentença I é verdadeira.
D. ( ) Somente as sentenças I e IV são verdadeiras.
E. ( ) Somente as sentenças II e III são verdadeiras.

Fonte: UDESC, 2018, p. 5.

Resolução: Substituindo os valores nas funções, tem-se que:

I – $\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{5}, \frac{12}{5}, \frac{17}{5}, \ldots\right)$ é progressão aritmética de razão 1;

II - $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{3}}, \sqrt[15]{3^2}, \sqrt[15]{3^7}, \sqrt[5]{3^4}, \ldots\right)$ é progressão geométrica de razão $\sqrt[3]{3}$;

III - $\left(3^2, 3^{\frac{2}{3}}, 3^{\frac{2}{9}}, 3^{\frac{2}{27}}, \ldots\right)$ não é progressão aritmética nem progressão geométrica;

IV - $\left(\log 2, \log\frac{2}{3}, \log\frac{2}{9}, \log\frac{2}{27}, \ldots\right)$ é uma progressão aritmética de razão $\log\frac{1}{3}$.

Resposta: alternativa “D”.

Por fim, no vestibular de verão de 2019, a UDESC abordou o conteúdo logaritmo na questão 10 (Figura 24). Essa envolve logaritmos decimais e naturais. Para a resolução, deve-se conhecer as propriedades P24 e P25.

Figura 27 - Questão 10 (UDESC 2019/01)

Questão 10

Considerando $\ln 10 = 2{,}3$, então o valor da expressão $\frac{\ln a^3 - \log a + 2\ln a}{\log a}$ é igual a:

A. ( ) 4 B. ( ) 10,5 C. ( ) $4a$ D. ( ) $2{,}3a^2$ E. ( ) 1,3

Fonte: UDESC, 2018, p. 7.

Resolução: Aplica-se a mudança de base nos logaritmos de base 10 para base e.

$$\frac{3.\ln a - \frac{\ln a}{\ln 10} + 2.\ln a}{\frac{\ln a}{\ln 10}} =$$

$$\frac{\left(5.\ln a - \frac{\ln a}{2{,}3}\right)}{\frac{\ln a}{2{,}3}} =$$

$$\frac{11{,}5.\ln a - \ln a}{2{,}3} . \frac{2{,}3}{\ln a} =$$

$$10{,}5.$$

Resposta: alternativa “B”.

5.3.4 Vestibular da UFSC

A Universidade Federal de Santa Catarina realiza anualmente concurso vestibular para ocupação de vagas de seus cursos de graduação distribuídos pelo estado. Para entrada em 2017 o tema logaritmo não foi abordado na prova. Já na prova para ingresso em 2018, o tema apareceu em um dos itens da primeira questão de Matemática (Figura 28). Neste item encontra-se um sistema de equações logarítmicas. Para resolver, é necessário aplicar a definição de logaritmo e as propriedades P21 e P22.

Figura 28 - Questão 21 (UFSC 2018)

Questão 21

01. O domínio da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-|x-3|}}$ é um intervalo (a, b). A soma de a com b é 6.

02. Se $f: [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$ admite inversa, então $f^{-1}(5) = 3$.

04. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, se\ x \geq 0 \\ x + 1, se\ x < 0 \end{cases}$, então $(f \circ f)(-1) = 1$.

08. O sistema $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 0 \\ \log_3 2 + \log_3 y = \log_3 x \end{cases}$ tem infinitas soluções.

.16. Se $f:\ A \to B$ e $g: B \to C$ são injetoras, então $gof: A \to C$ pode não ser injetora.

RESPOSTA $\boxed{}$

Fonte: UFSC, 2017, p. 16.

Resolução: Será resolvido apenas o item 08.

De $\log_3 2 + \log_3 y = \log_3 x$, segue que $\log_3(2.y) = \log_3 x$, isto é, $x = 2y$.

De $\log_2(x + y) = 0$, tem-se pela definição que $x + y = 2^0 = 1$.

Logo,

$$x + y = 1$$

$$2y + y = 1$$

$$3y = 1$$

$$y = \frac{1}{3}.$$

Consequentemente, $x = \frac{2}{3}$.

Resposta: o item não está correto.

No concurso vestibular para ingresso em 2019, o conteúdo logaritmo foi bastante explorado. Primeiramente, apareceu no item 02 da questão 23 (Figura 29). Trata de uma comparação de valores de logaritmos, tal que, conhecendo a definição de logaritmo, torna-se simples a resolução.

Figura 29 - Questão 23 (UFSC 2019)

QUESTÃO 23

01. Em 1987, em Goiânia, catadores de materiais recicláveis encontraram um aparelho abandonado que era usado em tratamentos médicos de radioterapia. Ao desmontarem tal aparelho, os trabalhadores foram contaminados com césio-137 e sofreram graves problemas de saúde. Considere que, num instante inicial, havia 19 g de césio-137 e que o tempo de meia-vida desse elemento químico é de 30 anos, ou seja, o tempo que uma amostra de césio-137 leva para reduzir-se à metade é de 30 anos. Dessa forma, a função que modela a massa $m(t)$, em gramas, em função do tempo t, em anos, é dada por $m(t)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R};\ m(t) = 19 \cdot 0{,}5^t$.

02. $log_{\frac{1}{2}}3 < log_{\frac{1}{2}}2 < 0$.

04. Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência λ de raio R. O ângulo $\hat{A}$ mede 45° e a medida do ângulo $\hat{B}$ é igual a $\frac{7}{9}$ do suplemento do ângulo $\hat{A}$. Se o segmento $\overline{BC}$ mede $\sqrt{128}\ cm$, então a área limitada pela circunferência λ é igual a $64\pi\ cm^2$.

08. Uma progressão tem seus termos organizados da seguinte forma:

1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
21	23	25	27	29

....

Nessas condições, o primeiro elemento da 29ª linha é 931.

16. Desenvolvendo a expressão numérica $\left|\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3} - \frac{7}{4}\right|$, obtém-se como resultado um número irracional.

RESPOSTA $\boxed{}$

Fonte: UFSC, 2018, p. 20.

Resolução: Será resolvido apenas o item 02.

De $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 2 < 0$, tem-se que $\log_{\frac{1}{2}} 3 < -1 < 0$. Basta verificar se $\log_{\frac{1}{2}} 3 < -1$.

Ora, se $\log_{\frac{1}{2}} 3 = x$, então $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$. Daí, $-2 < x < -1$. Portanto, $\log_{\frac{1}{2}} 3 < -1$.

Resposta: o item está correto.

Na Figura 30, pode-se encontrar a questão 26 do concurso de 2019. A questão abordou o conteúdo de matrizes e no item 08 explorou a ideia de determinante e de equação logarítmica. Para resolver, analisando apenas a parte que envolve logaritmo, é necessário domínio da P22 e da P24.

Figura 30 - Questão 26 (UFSC 2019)

QUESTÃO 26

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x-1 & x+1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ e $C = A \cdot B$.

01. Pelo menos uma das raízes da equação $detC = 0$ é um número real positivo.
02. O produto dos valores de x que fazem com que a matriz C seja singular (não admita matriz inversa) é um número ímpar.
04. Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = detC - (x^3 - 92)$, então o conjunto-solução de $f(x) < 0$ é $S = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 36\}$.
08. Considere agora $x = 1$ e $y = \det(10C)$, então $log|y| = 3log2 + log7 + 2$.

RESPOSTA

Fonte: UFSC, 2018, p. 21.

Resolução: Será resolvido apenas o item 08.

Para $x = 1$, tem-se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & X \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$.

Como $y = \det(10C)$, pode-se afirmar que $y = det\begin{pmatrix} 40 & 130 \\ 80 & 120 \end{pmatrix} = -5600$.

Segue que $\log|y| = \log|-5600| = \log 5600 = \log(56.10^2) = \log 56 + 2$.

Ainda, $3\log 2 + \log 7 + 2 = \log 2^3 + \log 7 + 2 = \log(8.7) + 2 = \log 56 + 2$.

Portanto, $\log|y| = 3\log 2 + \log 7 + 2$.

Resposta: o item está correto.

Pode-se concluir que, pelos vestibulares analisados, o tema logaritmo foi bastante abordado nas provas dos últimos três anos. O ENEM busca contextualizar mais o tema, já os vestibulares buscam exercícios envolvendo equações e funções logarítmicas diretamente. Entender e aplicar o conceito de logaritmo é essencial nas provas, bem como aplicar as propriedades P22, P23, P24 e P25. Nota-se que o logaritmo natural apareceu nas provas, entretanto, conforme análise dos livros didáticos, nem em todos os livros esse caso particular é estudado.

6 TENDÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Neste capítulo pretendeu-se estudar a tendência de ensino História da Matemática a fim de construir o material paradidático que relacione adequadamente esta tendência de ensino com o tema logaritmos.

6.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

A Educação Matemática é uma ciência social que tem como objetivo estudar os atos de ensinar e aprender Matemática através da investigação da relação professor, aluno e conhecimento matemático, tornando-se a "resultante das múltiplas relações que se estabelecem entre o específico e o pedagógico num contexto construído de dimensões histórico-epistemológicas, psicocognitivas, histórico-culturais e sociopolíticas" (FIORENTINI E LORENZATO, 2007, p. 5).

Atualmente, a Matemática está intimamente ligada ao desenvolvimento técnico-científico do planeta. A partir da década de 1970, por meio da Revolução Técnico-científico-informacional, ou simplesmente Terceira Revolução Industrial, setores ligados à informática, robótica, telecomunicação, biotecnologia, engenharias em geral, entre outros, conquistaram crescimento acelerado e auxiliaram diretamente o processo de globalização, bem como o desenvolvimento do capitalismo moderno. Assim, pode-se afirmar que a Matemática se tornou essencial à evolução da sociedade. Para tanto, busca-se na educação básica gerar o interesse pelo acesso aos cursos de ciências e tecnologia, que solucionam, ou pelo menos facilitam, o cotidiano e potencializam a vida, beneficiando o meio social. E mesmo aos indivíduos que não simpatizam pela carreira na área de exatas, deve-se proporcionar modelos motivadores de ensino dentro da Educação Matemática que exemplifiquem a realidade, por meio de um processo crítico que considere o contexto cultural do grupo e suas perspectivas.

Da Educação Matemática surgem metodologias chamadas de tendências de ensino, que tratam de propostas alternativas para a ação pedagógica para solucionar ou minimizar problemas no ensino da Matemática. Estas tendências possibilitam reflexões e novos trabalhos que beneficiem o processo de ensino e aprendizagem. Alguns exemplos de tendências em Educação Matemática são: Etnomatemática, História da Matemática, Jogos na Educação Matemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas e Tecnologias da Informação e Comunicação.

A tendência em Educação Matemática denominada História da Matemática é um campo de estudo que visa a identificação de fontes que permitam mapear sua origem e descobertas. Para tanto, são considerados registros e anotações matemáticas não somente do indivíduo ou grupo que obteve sucesso, mas também de tentativas falhas ou métodos que foram substituídos por algoritmos mais eficientes. Assim, no estudo da história da Matemática, encontra-se a evolução do pensamento matemático, os fatos que motivaram o desenvolvimento de determinados conceitos e a origem de ideias que auxiliam diversas áreas até os tempos atuais. Segundo D'Ambrosio (1996) "o estudo da construção histórica do conhecimento matemático leva a uma maior compreensão da evolução do conceito, enfatizando as dificuldades epistemológicas inerentes ao conceito que está sendo trabalhado" (p. 61). Assim, evidencia-se uma valorosa implicação do uso dessa abordagem no ensino da Matemática. D'Ambrosio (2008) também diz que:

> Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre matemática e seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre por que e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. (p. 29).

É inquestionável a importância de ser um indivíduo historicamente situado, de tal maneira que conheça as motivações e relações que o trouxeram para determinada realidade. No ramo matemático não é diferente. É inerente ao ser humano perguntar o porquê das coisas, qual o objetivo daquele ato e como proceder. Durante o ciclo da educação básica, em particular nas aulas de Matemática, é comum e aceitável ouvir a pergunta "por que devo aprender isso?" ou "quando vou usar isso na minha vida?". De fato, a forma como alguns conteúdos são desenvolvidos na disciplina acaba dificultando a visualização da importância e da aplicabilidade dos conceitos estudados. O entendimento da necessidade de conhecer novos conceitos é essencial para o envolvimento dos estudantes com a disciplina. É importante também entender o que motivou certos estudiosos em outros tempos a desenvolverem demonstrações inéditas e a investir tempo, às vezes vários anos, em seus estudos. O estudante que internaliza esse entendimento, constrói uma visão diferenciada da Matemática, valorizando-a como ciência indispensável para o desenvolvimento individual e da sociedade em que vive.

No Brasil, a História da Matemática tornou-se área de pesquisa no final da década de 1970. Os estudiosos Clóvis Pereira da Silva, Circe Mary Silva da Silva Dynnikov, Fernando Raul de Assis Neto e Sergio Roberto foram os primeiros doutores na área no Brasil, difundindo investigações nesta linha. Apenas em 1995 ocorreu o primeiro evento brasileiro de grande porte com foco neste tema, o *I Seminário Nacional de História da Educação Matemática*, com aproximadamente cento e vinte participantes. Já em trinta de março de 1999 foi fundada a Sociedade Brasileira de História da Matemática, com sede em Rio Claro, São Paulo, conhecida pela sigla SBHMat.

Em sua pesquisa, Souto (2010) verificou que, dos trabalhos apresentados em Anais de Seminários Nacionais de História da Matemática e de Encontros Luso-brasileiros de História da Matemática entre 2003 e 2007, “apenas 13% dos estudos publicados tratam da participação da História da Matemática em situações de ensino” (SOUTO, 2010, p. 534). Ainda conclui que a baixa produção de pesquisas englobando esse tema “é um indicativo da procedência das queixas de muitos professores a respeito da escassez de material acessível para ensinar Matemática com uma abordagem histórica” (SOUTO, 2010, p. 534). Baroni, Teixeira e Nobre (2005), também relatam essa situação. Destacam que há pobreza de investigações sobre História da Matemática e Educação Matemática em comparação às outras tendências de ensino. Daí, buscam listar 11 motivações, de *a* a *k*, que sustentam investigações que englobam as duas frentes de pesquisa, conforme segue.

a) “O desenvolvimento histórico da Matemática mostra que as ideias, dúvidas e críticas que foram surgindo não devem ser ignoradas diante de uma organização linear da Matemática” (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

O desenvolvimento da Matemática não segue necessariamente a ordem pela qual seus estudos são elaborados didaticamente hoje. Por exemplo, no Ensino Fundamental os conjuntos numéricos são definidos aos estudantes na ordem naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, quando, na verdade, a ordem histórica foi naturais, racionais, irracionais, reais e inteiros. É evidente que a organização apresentada aos alunos segue uma ordem lógica e bem construída, mas cabe ao docente entender que eventuais dúvidas sobre números racionais ainda nos estudos de números inteiros, por exemplo, não são inconvenientes. Explorar esse tipo de questionamento, que traz dúvidas historicamente clássicas e que geraram desenvolvimento da área, já propicia a aparição discreta da tendência História da Matemática nas aulas.

b) “A História da Matemática levanta questões relevantes e fornece problemas que podem motivar, estimular e atrair o aluno” (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

Ao utilizar a História da Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem, busca-se despertar a curiosidade dos alunos para maior envolvimento e aproveitamento no processo educacional. Para Fauvel (1991), a importância do uso da história no ensino da Matemática é justificada por uma série de fatos, tais como o aumento da motivação para a aprendizagem na área, o ato de humanizar a ciência, mostra o desenvolvimento histórico por meio da ordenação e apresentação de tópicos no currículo e oportuniza aos alunos a compreensão do desenvolvimento dos conceitos estudados, bem como contribui para as mudanças de percepções dos alunos com relação à Matemática e suscita oportunidades para a investigação nessa área.

c) "A História fornece subsídios para articular diferentes domínios da Matemática, assim como expor interrelações entre a Matemática e outras disciplinas, a Física, por exemplo" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

A evolução da Matemática se deve ao fato de existir a necessidade de aperfeiçoamento de algo, seja um teorema, uma definição ou uma propriedade. Por vezes essa necessidade surge numa aplicação, na qual se nota que algo "está faltando". Assim, percebe-se a pertinência do conteúdo, não apenas no campo puro de estudos da Matemática, mas também empregando a teoria em situações do cotidiano. Esse campo fornece um ferramental importantíssimo para o desenvolvimento de outras áreas de conhecimento, como Física, Química e Biologia. Entretanto, não se limitando às ciências da natureza, há uma infinidade de outras aplicações, como nas artes, em suas mais diversas manifestações, ou em atividades comerciais. Sem dúvidas, para que o professor explore essas aplicabilidades, é essencial o ato da pesquisa, o apoio em materiais que fogem do domínio apenas matemático e a busca por abordagens diferenciadas, como se encontra em paradidáticos, por exemplo.

d) "O envolvimento dos alunos com projetos históricos pode desenvolver, além de sua capacidade matemática, o crescimento pessoal e habilidades como a leitura, escrita, procura por fontes e documentos, análise e argumentação" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

Muitos jovens finalizam seu ciclo na Educação Básica sabendo muito pouco, ou até mesmo nada, sobre pesquisa e escrita científica. Em plena era informacional, muitos alunos não sabem onde e como procurar informações verídicas, interpretar dados e argumentar com consistência sobre temas estudados. A alfabetização científica pode começar em pesquisas simples que possivelmente construam no indivíduo uma consciência mais crítica sobre a realidade e induzam o mesmo a desenvolver suas competências. Para Freire (1980), a alfabetização "é mais que o simples domínio psicológico e mecânico de técnicas de escrever e ler. É o domínio destas técnicas em termos conscientes [...]. Implica numa autoformação de que possa resultar uma postura interferente do homem sobre seu contexto" (p. 111). Quem estuda pouco e lê pouco, aprende pouco. Assim, articulando adequadamente leituras e escritas que convêm aos processos de ensino e aprendizagem em Matemática, pode-se ultrapassar os aspectos lógicos e sistemáticos dessa ciência.

e) "Os estudantes podem entender que elementos como erros, incertezas, argumentos intuitivos, controvérsias e abordagens alternativas a um problema são legítimos e fazem parte do desenvolvimento da Matemática" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

No processo educativo atual, muitas vezes é transmitida uma ideia de que a Matemática foi uma descoberta, como um achado. Em alguns casos, os estudantes ficam abismados com o que os professores apresentam em uma aula e se sentem desanimados quando não compreendem o conteúdo, pois da forma como o docente expôs parece extremamente trivial chegar em tais conclusões. Por vezes, mesmo quando o conteúdo é compreendido, o estudante usa uma fala bastante comum "eu jamais pensaria nisso" e se julga como incapaz. Aparentemente, há uma falta de empatia nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Todos os envolvidos nesses processo devem se atentar ao fato de que as incertezas e os erros permeiam suas vidas, e com a Matemática não é diferente. Os erros fazem parte da construção do saber matemático e não há um porquê para se criar um sentimento de fracasso quanto a isso. Com todo respeito e admiração, a ideia que deve ser passada para os alunos é de que os famosos matemáticos, que muitas vezes dão nome para diversos teoremas e regras, não foram deuses ou portadores de uma inteligência inalcançável, mas sim indivíduos estudiosos, persistentes e resilientes, isto é, o tipo de conduta que deve servir como exemplo, algo que vai além do raciocínio lógico-matemático.

f) "Os alunos também podem identificar que, além dos conteúdos, a Matemática possui forma, notação, terminologia, métodos computacionais, modos de expressão e representações" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

A Matemática possui uma linguagem característica, com símbolos que aparecem nos mais diversos conteúdos. Existe uma estrutura bem definida que busca expor de modo claro as ideias e facilitar a comunicação. A organização lógica das ideias se deu no desenvolvimento da ciência, bem como as suas representações. A terminologia aplicada favorece aos indivíduos reflexivos que internalizam a natureza dos termos específicos, valorizando a semântica inerente a esse campo de estudo.

g) "Os professores podem identificar, na História da Matemática, motivações na introdução de um novo conceito" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

De fato, aplicando métodos de ensino que envolvem a tendência História da Matemática, oportuniza-se aos estudantes uma aprendizagem com mais significado e a apropriação do saber. Assim, pode se tornar uma fonte de inspiração para iniciar ou seguir o conteúdo, desafiando os discentes com questões pertinentes e impulsionando-os para descobertas individuais e em grupo. A motivação é determinante para o próprio desenvolvimento intelectual, qualificando os processos de ensino e aprendizagem.

h) "Os professores podem identificar que algumas dificuldades que surgem em sala de aula hoje já apareceram no passado, além de constatar que um resultado aparentemente simples pode ser fruto de uma evolução árdua e gradual" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

Tudo o que hoje pode parecer trivial na Matemática, custou exaustivo estudo. Essa ciência tomou forma como um corpo de conhecimento por volta do século XVII, quando houve uma melhor organização de seus campos de estudo. Pode-se afirmar que ainda está em construção, vistas as pesquisas em alto nível desenvolvidas em polos distribuídos pelo mundo. Portanto, erros, persistência e tempo envolvido em toda a evolução dessa ciência não podem ser esquecidos. É incoerente desmerecer alguns desconfortos atuais com algum conteúdo matemático quando o mesmo custou penoso trabalho de indivíduos que dominaram a área de estudo em outros séculos. Deve-se valorizar a dúvida, essa abre caminhos e mostra possíveis soluções.

i) "A História pode evidenciar que a Matemática não se limita a um sistema de regras e verdades rígidas, mas é algo humano e envolvente" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

A Matemática não é algo estático. Por mais que exija extremo rigor em seus conceitos, é um recurso com potencial a ser explorado. Contraindica-se carregar a visão de que a Matemática é a vilã, a destruidora de notas boas e da autoestima escolar. Deve-se ter a Matemática como uma ferramenta, algo que auxilia a vida em sua forma mais simples até a problemas mais complexos. Ela ajuda a desvendar mistérios, utilizando uma série de símbolos para expressar tanto os problemas, quanto as soluções. Ela é amiga e proporciona o prazer da descoberta.

j) "O estudo detalhado de exemplos históricos pode dar a oportunidade aos alunos de compreender que a Matemática é guiada não apenas por razões utilitárias, mas também por interesses intrínsecos à própria Matemática" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

Dada a devida importância da relação entre História da Matemática, Matemática e aplicações, deve-se valer também a parte que é puramente matemática, que busca demonstrar, dar contraexemplos e construir teorias. Não foram apenas as aplicações que motivaram o desenvolvimento dessa ciência, nem só para isso se faz Matemática. Muito do que se fez foi pela e para a Matemática. E ainda se faz. Para D'Ambrósio (2008), "a história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época" (p. 29). Desta maneira, também é possível, através dessa tendência de ensino, conceber a motivação do desenvolvimento de certo tema, seja prático ou teórico.

k) "A História da Matemática fornece uma oportunidade a alunos e professores de entrar em contato com matemáticas de outras culturas, além de conhecer seu desenvolvimento e o papel que desempenharam" (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2005, p. 182).

Essa consideração descaracteriza a falsa visão de que a Matemática é resultante de uma cultura apenas, a ocidental. "A matemática, afinal, é um produto cultural. É criada por pessoas em um momento e lugar dados e frequentemente é afetada por esse contexto. Saber mais sobre isso ajuda a entender como a matemática se ajusta com outras atividades humanas" (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 3). Assim, mostra-se que a Matemática apresentada nas escolas atualmente é uma de tantas outras formas matemáticas desenvolvidas no decorrer dos tempos.

Sem dúvida, o tema história da matemática pode ser mais explorado. Existem grupos de pesquisa espalhados pelo país que estão incentivando a utilização dessa tendência de ensino na educação básica e/ou na formação de professores de Matemática. Em seu endereço eletrônico, a SBHMat apresenta quatro grupos desse tipo: Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT), Grupo de História Oral e Educação Matemática

(GHOEM), Grupo de Pesquisa em História da Matemática e/ou suas Relações com a Educação Matemática (GPHM) e Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM). Para discutir e divulgar investigações na área, eventos como o Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática (ENAPHEM) e Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática (ELBHM) se destacam. Para divulgação dessa área, existem revistas como a Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), a Revista História da Matemática para Professores (RHMP) e a Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT).

6.2 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Nas Bases Legais do Ministério da Educação, aparecem trechos que se referem à história da Matemática. Ao explorar o tema resolução de problemas, o PCN do Ensino Fundamental (terceiro e quarto ciclos) destaca a importância de possibilitar aos alunos a ampliação dos seus conhecimentos através do gerenciamento das informações que já estão a seu alcance.

> A própria História da Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (BRASIL, 1998, p. 40).

Defende-se que “aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema, [...] o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática” (BRASIL, 1998, p. 41). Assim, reproduz-se o processo histórico de desenvolvimento da ciência, demonstrando-se que a Matemática não é algo pronto, mas sim a resultante de exaustivo estudo.

O PCN + destaca o objetivo de “compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social” (BRASIL, 2006, p. 32). Assim, adquire-se uma visão mais crítica da construção da ciência, obra que jamais estará finalizada. Entende-se que o desenvolvimento da ciência foi baseado em momentos históricos que explicam o interesse e a aplicação de algum tema. O PCN garante que “a importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos” (BRASIL, 1998, p. 51). Já o PCN + apresenta um exemplo.

> Ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. (BRASIL, 2006, p. 118).

Reconhecer esse desenvolvimento histórico forma um conhecimento que valoriza o viver da humanidade, com seus aperfeiçoamentos constantes devido ao poder científico e tecnológico de cada época. Sempre aparecem novas necessidades, conforme condições específicas, e essas são resolvidas com pesquisas e avanços práticos e teóricos.

Na Proposta Curricular do Estado de Santa Catarina (1998) aparece uma ideia de que a vertente Educação Matemática busca alicerces em áreas como Psicologia, Sociologia, História e Antropologia para auxiliar na formação do cidadão do século XXI.

> Entende-se a Matemática como um conhecimento produzido e sistematizado pela humanidade, portanto histórico, com o objetivo de conhecer, interpretar e transformar a realidade. Esta compreensão da história da Matemática indissociável da história da humanidade – em processos de produção nas diferentes culturas – busca romper com algumas concepções fundamentais na corrente de pensamento positivista e entender o caráter coletivo, dinâmico e processual da produção deste conhecimento que ocorre de acordo com as necessidades e anseios dos sujeitos. (SANTA CATARINA, 1998, p. 114).

A BNCC destaca que “para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente no cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática” (BRASIL, 2017, p. 295). Os alunos devem desenvolver a capacidade de investigação, de construção de modelos e de resolução de situações-problema, isso de forma concomitante à evolução do processo de reflexão e abstração. Assim, a BNCC defende veementemente ações que sustentem “modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum” (BRASIL, 2017, p. 518).

7 LIVROS PARADIDÁTICOS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresenta-se o estudo realizado acerca dos livros classificados como paradidáticos, bem como a relação dos livros paradidáticos com a tendência de ensino História da Matemática. Também é apresentada uma análise de alguns exemplares de materiais desse tipo. O objetivo foi construir um bom entendimento para a produção do material paradidático que relacione adequadamente o tema logaritmos.

7.1 PARADIDÁTICOS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Na década de 1930 duas obras pioneiras foram publicadas no Brasil: *O homem que calculava*, de Júlio César de Mello e Souza, mais conhecido como Malba Tahan, e *A aritmética de Emília*, de Monteiro Lobato. Esses são exemplos de livros que abordam temas da Matemática numa leitura prazerosa, sem o característico rigor matemático, pois focam no enredo e não na disciplina em si. Materiais que carregam esse aspecto, de uma forma geral, podem ser chamados de paradidáticos de Matemática. Munakata (1997) fez sua sugestão de definição desse tipo de material em sua tese de doutorado da seguinte forma:

> Livros paradidáticos talvez sejam isso: livros que, sem apresentar características próprias dos didáticos (seriação, conteúdo segundo currículo oficial ou não etc.), são adotados no processo de ensino e aprendizagem nas escolas, seja como material de consulta do professor, seja como material de pesquisa e de apoio às atividades do educando [...] Em suma, o que define os livros paradidáticos é o seu uso como material que contempla (ou mesmo substitui) os livros didáticos. Tal complementação (ou substituição) passa a ser considerada como desejável, na medida em que se imagina que os livros didáticos por si sejam insuficientes ou até mesmo nocivos. (MUNAKATA, 1997, p. 101).

Apesar de classificar as obras de Monteiro Lobato e Malba Tahan como paradidáticos, essa denominação surgiu apenas por volta da década de 1970. Nessa década foi estimulada a produção de novos materiais que possibilitassem acesso facilitado ao conhecimento. Assim, as editoras iniciaram a produção de um novo tipo de livro: o paradidático. A editora Ática foi a primeira a publicar livros nessa linha.

> A linha de paradidáticos era um empreendimento inovador. A ideia era criar um material de apoio que, mesmo não sendo tema específico de matéria ministrada em sala de aula, tivesse um conteúdo programático adequado a um certo momento do aprendizado. O objetivo era capturar a atenção do estudante através do aspecto narrativo lúdico (ÁTICA, 1995, p. 236).

A editora Ática lançou as coleções *Bom Livro*, *Vaga-lume* e *Para Gostar de Ler* em meados da década de 1970. Mas a primeira coleção a ser editada com a denominação de paradidática foi *O Cotidiano da História*, no início da década de 1980. Em seu catálogo, apresentou livros paradidáticos para o ensino de História que podem ser utilizados como material de leitura complementar para os anos finais do Ensino Fundamental. Entre os títulos estão *Os Abolicionistas*, *O Engenho Colonial* e *Independência*.

> O clima de abertura política da época favorecia o debate pedagógico e, em consequência, o aparecimento de novas propostas na área. Na rede escolar, diversas experiências de inovação didática estavam sendo levadas a termo. Apostando nesta tendência, a [editora] Ática resolveu investir em uma nova linha de textos, que aliasse o rigor científico à imaginação literária (ÁTICA, 1995, p. 336 - grifo do autor).

Em 1986 surgiram as primeiras obras paradidáticas de Matemática no país. Anteriormente, apareceram obras que versavam a Matemática, mas não como foco e sim como parte do enredo. Agora, busca-se contextualizar o conteúdo matemático, usar ilustrações como recurso pedagógico, utilizar a simbologia matemática de forma simples, sem tornar o texto técnico demais, destacar a parte lúdica da Matemática por meio de desafios, jogos e situações que estimulem a imaginação do leitor.

A série *A Descoberta da Matemática*, da editora Ática, aborda temas dos anos finais do Ensino Fundamental numa leitura prazerosa que explora conceitos com explicações lógicas. Alguns dos catorze títulos são *As Mil e Uma Equações*, *História de Sinais*, *Frações sem mistérios* e *Uma Raiz Diferente*. São textos de Carlos Marcondi, Cláudio Xavier da Silva, Ernesto Rosa Neto, Fernando Louzada, Luzia Faraco Ramos e Nelson Gentil. Já a série *Vivendo a Matemática*, da editora Scipione, traz em seus quinze livros conteúdos do Ensino Fundamental e também do Ensino Médio. Algumas obras são *Descobrindo o Teorema de Pitágoras*, *Os Poliedros de Platão e os Dedos da Mão* e *Semelhança Não é Mera Coincidência*. Os autores que construíram esta coleção são Jose Jakubovic, Luiz Márcio Imenes, Marcelo Lellis, Nilson José Machado, Paulus Gerdes e Renate Watanabe. Para Dalcin (2002), essas coleções apresentam diferenças em seus aspectos gráficos e na opção de abordagem dos conteúdos, “mas apresentam como elemento comum a concepção de que o ensino de Matemática deve considerar a importância do lúdico, ligado diretamente ao prazer de aprender e interagir com outras linguagens e áreas do conhecimento” (DALCIN, 2002, p. 28).

Nos anos 1990 as obras paradidáticas foram mais exploradas por outras editoras, como Atual Editora, Editora do Brasil, Moderna, FTD, entre outras. As coleções que se destacaram foram *Pra Que Serve a Matemática?*, da Editora Atual, *Matemática: Projeto Alternativo,* da Editora do Brasil, *Problemas Matemáticos*, da Moderna, e *O Contador de Histórias e Outras Histórias da Matemática*, da FTD.

Sem o compromisso de apresentar conteúdos programáticos de forma completa visando cumprir estreitos calendários letivos, o material paradidático possibilita uma abordagem por vezes mais dinâmica e agradável aos estudantes. Não existe a obrigatoriedade de ensinar um determinado conteúdo por completo, com todas as definições, demonstrações e propriedades. Mas sim a motivação de envolver o leitor em situações que mostrem a necessidade do uso da Matemática na ficção e/ou na realidade. Além disso, a independência do leitor é algo notório, visto que não necessariamente é imprescindível um mediador para se cumprir o objetivo do livro paradidático.

7.2 PARADIDÁTICOS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Aspectos relacionados à História da Matemática tendem a aparecer de forma mais natural em livros paradidáticos. Assim, esse tipo de material apresenta potencial para a divulgação e ampliação de discussões a respeito da história dessa ciência.

Como apresentado no item “b” do capítulo anterior, a História da Matemática tem a capacidade de estimular e atrair o aluno, assim como fora mencionado no item “i” sobre a Matemática ser algo humano e envolvente. Isso se encaixa perfeitamente com a proposta do material paradidático. Busca-se conquistar ou manter o interesse do estudante por outro caminho que não a tradicional aula expositiva dialogada com apoio do sistemático livro didático. Além disso, seguindo a ideia no item “d” discutida no mesmo capítulo, desenvolver habilidades como leitura, escrita e análise são intrínsecas à História da Matemática, bem como ao material paradidático, que pode não somente proporcionar a leitura, como também propor atividades, desafios e reflexões.

Assim como já foi verificado neste trabalho, muitas vezes livros didáticos trazem breves notas históricas em suas páginas, porém, essas nada acrescentam ao desenvolvimento do capítulo. Algumas descrevem sucintamente sobre a vida de um determinado indivíduo que se destacou nos estudos de certo tema, outras tentam situar historicamente os leitores, contextualizando o tema de forma demasiadamente fictícia. Ao objetivar envolver o paradidático e a História da Matemática, deve-se destacar que é a oportunidade para explorar adequadamente o conteúdo. Pode-se contextualizar, problematizar, estudar a solução e demonstrar como o objetivo foi alcançado.

Ao ler os livros paradidáticos[1] apresentados a seguir, que trabalham com a História da Matemática, é possível analisar alguns aspectos.

O livro ...*E eles queriam contar* (Figura 31), de Luzia Faraco Ramos, data de 1995 e faz parte da série *Turma da Matemática*, da editora Ática. Possui vinte e três páginas e é voltado para o início do Ensino Fundamental.

Figura 31 - Capa do livro paradidático ...*E eles queriam contar*

Fonte: RAMOS, 1995, capa.

A história, que é disposta em quadrinhos, fala sobre pastores de cabras que viviam num tempo em que não existiam números. Dessa forma, para contar suas cabras, resolveram utilizar gravetos. Em determinado momento não foi tão fácil ter tantos gravetos, aí decidiu-se formar grupos de dez, conforme a quantidade de dedos (Figura 32). Daí a ideia de dezena. A mesma ideia seguiu para a questão do ciclo da lua.

[1] Os livros apresentados a seguir foram selecionados pela disponibilidade no Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina.

Figura 32 - Construção do conceito de dezena

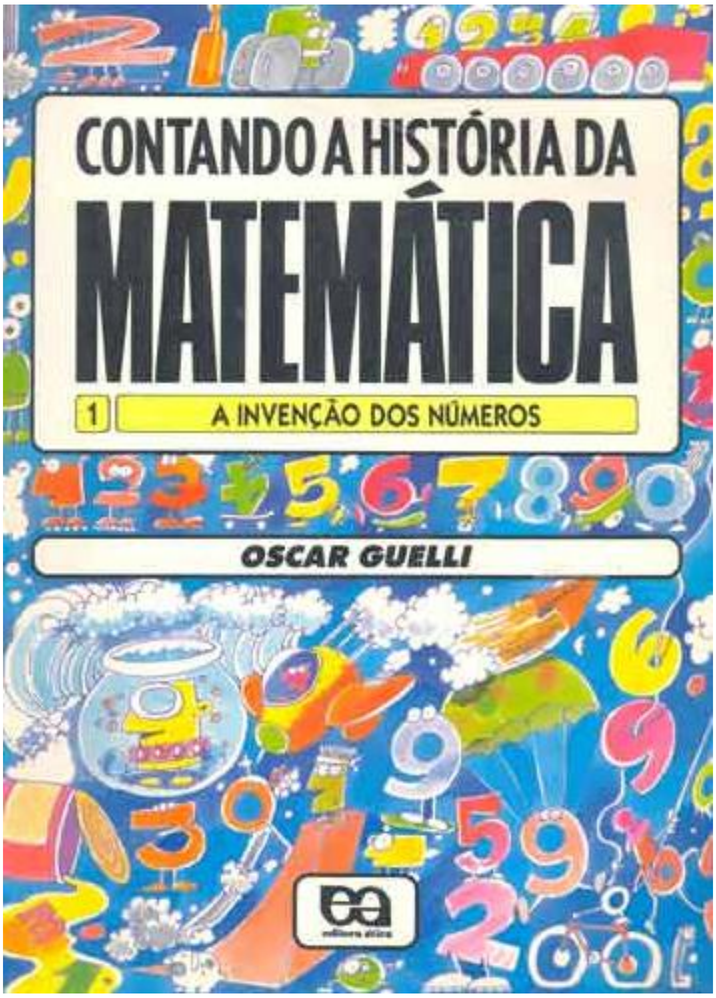
Fonte: RAMOS, 1995, p. 5.

A história é pequena e traz ilustrações, ideal para a faixa etária dos anos iniciais do Ensino Fundamental. De forma simples, mas eficiente, mostrou um problema e uma solução para o mesmo por meio do desenvolvimento de um método de contagem utilizado muito tempo atrás. Portanto, contou uma história envolvendo um problema que, para ser resolvido, fez uso de um conceito da Matemática.

A história é seguida por propostas de atividades e jogos que exploram o conceito de dezena. Vale destacar que esse conceito é formalizado apenas entre as atividades, não na história.

O livro *A invenção dos números* (Figura 33), de Oscar Guelli, tem sua nona edição publicada em 2007 e faz parte da coleção *Contando a História da Matemática*, da editora Ática. Possui sessenta e três páginas mais suplemento de trabalho e é voltado para os anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 33 - Capa do livro paradidático *A invenção dos números*



Fonte: GUELLI, 2007, capa.

O livro é dividido em quatro capítulos. Em cada um é explorado um tipo de número, seguindo a ordem concreto, natural, irracional e negativo. Assim, conta a evolução de parte da Matemática. Em todos há uma contextualização história e geográfica muito boa, com dados relevantes e que dão sentido à evolução da história (Figura 34).

Figura 34 - Contextualização histórica e geográfica


3

O número irracional

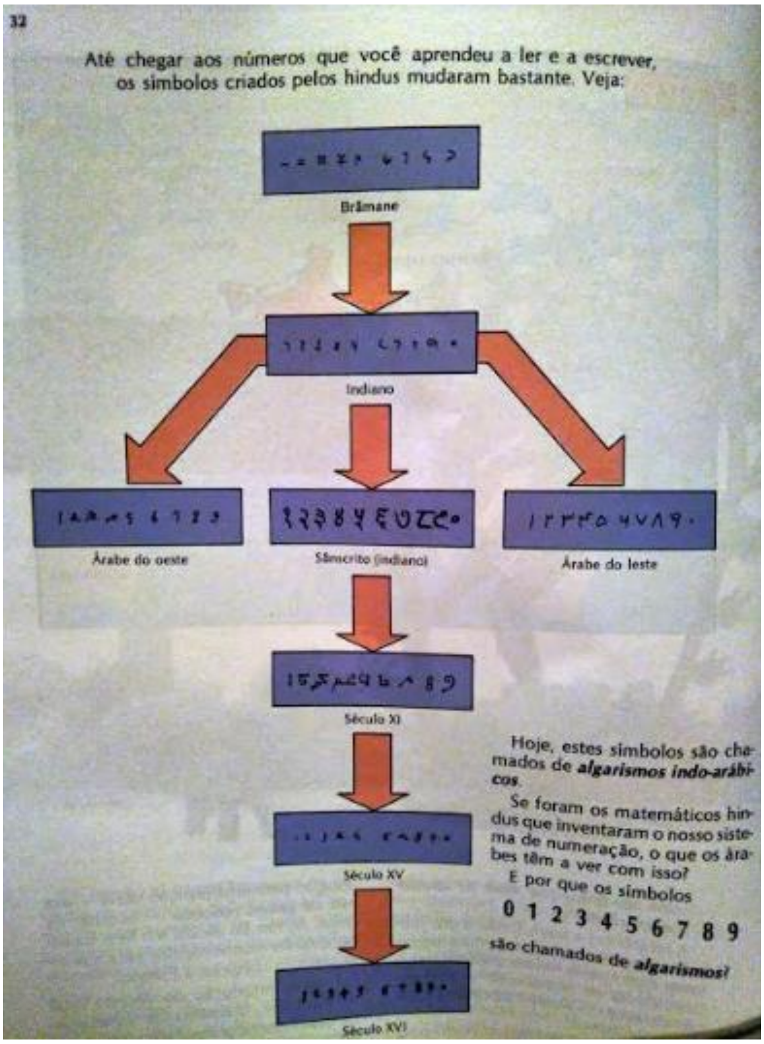
Durante muito tempo, os matemáticos acreditaram que qualquer problema prático podia ser resolvido operando somente com os números naturais e fracionários. Não sentiam falta de nenhum outro tipo de número.

Por volta do ano 530 a.C. existia na Grécia uma espécie de sociedade secreta, cujos membros ficaram conhecidos com o nome de ***pitagóricos***. Eram assim chamados porque o mestre dessa sociedade era o famoso filósofo e matemático ***Pitágoras de Samos***. Samos é a ilha grega onde Pitágoras nasceu.

Fonte: GUELLI, 2007, p. 37.

Nesta obra não existem personagens. Os fatos vão sendo informados de forma bastante explicativa e cronológica. Além disso, curiosidades são apresentadas, o que costuma cativar o leitor. Por exemplo, após falar sobre os hindus, é exposta a evolução dos algarismos indo-arábicos (Figura 35). No final de cada capítulo são propostos desafios para o leitor. Ainda, no final do livro, há um suplemento de trabalho, com exercícios que envolvem o conteúdo explorado no livro, mas com características mais atuais.

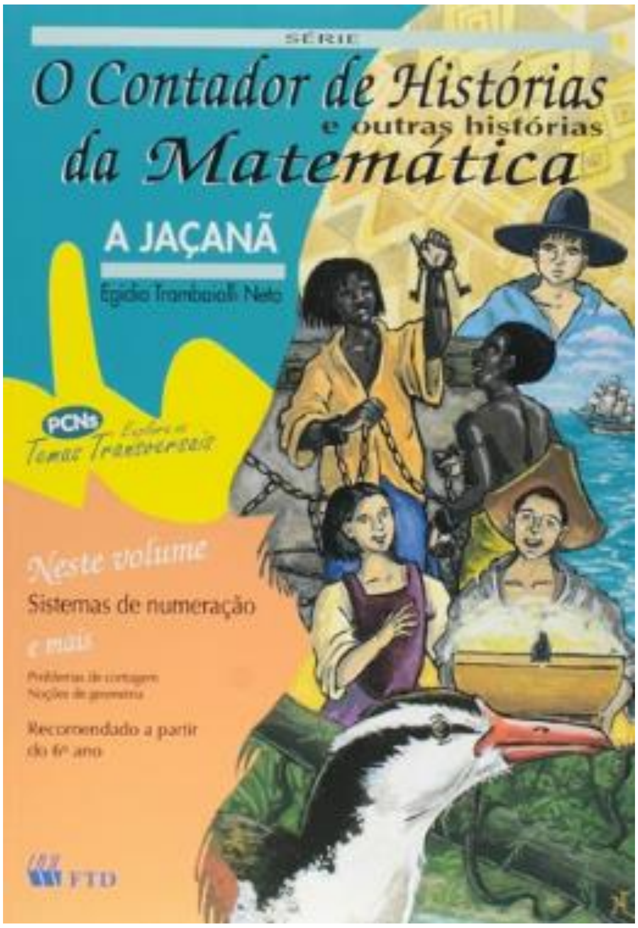
Figura 35 - Evolução dos algarismos indo-arábicos



Fonte: GUELLI, 2007, p. 32.

O livro *A jaçanã* (Figura 36), de Egidio Trambaiolli Neto, publicado em 1998, faz parte da série *O Contador de Histórias e outras histórias da Matemática*, da editora FTD. Possui oitenta páginas mais suplemento de trabalho e é recomendado a partir da quinta série (atual sexto ano do Ensino Fundamental).

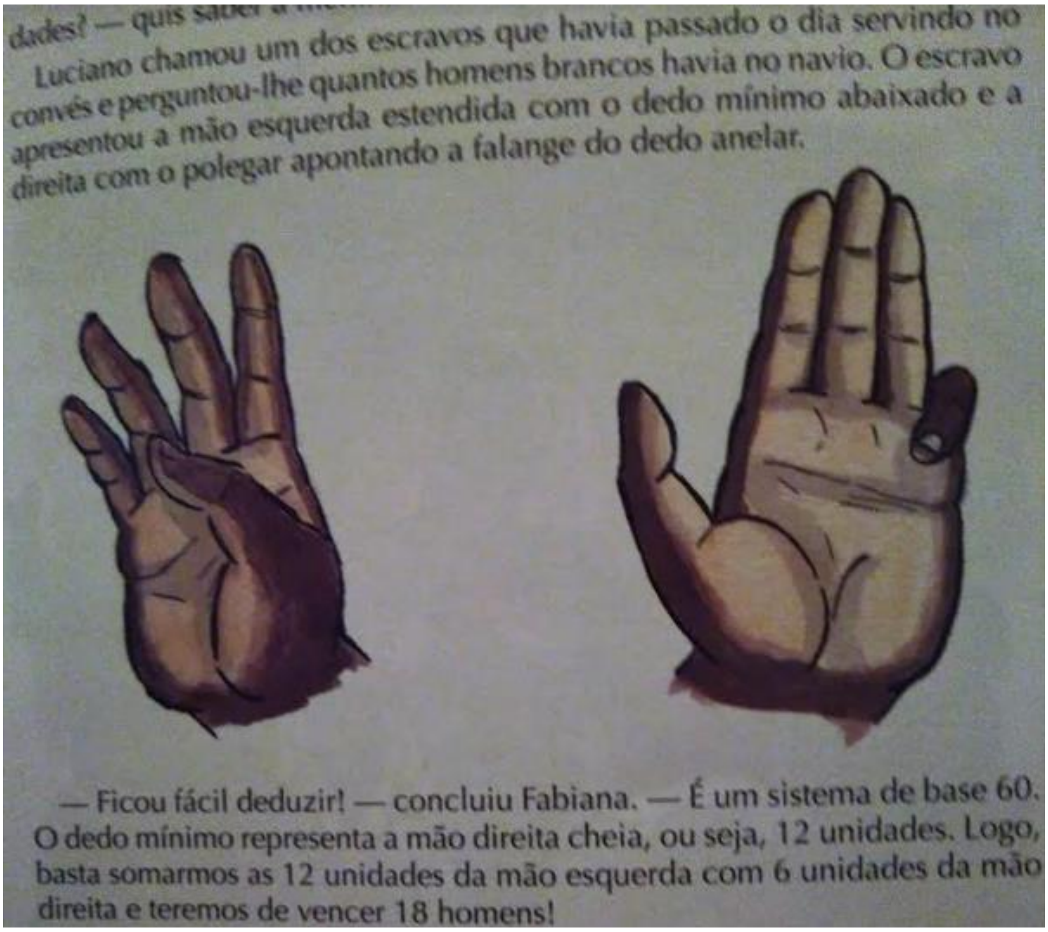
Figura 36 - Capa do livro paradidático *A Jaçanã*



Fonte: TRAMBAIOLLI NETO, 1998, capa.

O livro conta a história de cinco jovens que precisam decifrar enigmas para manter a paz entre os povos, mas, para tanto, precisam aplicar conhecimentos de História, Geografia e da própria Matemática. Nesse exemplar destaca-se a ideia de passar por fatos históricos, mas não necessariamente fatos que implicaram em evoluções diretas para a Matemática. Exemplo disso é o capítulo *O Navio Negreiro*, que apresenta uma ideia entre dedos e falanges num diálogo dentro do navio. Ao entender o processo, uma das personagens deduz que é um sistema de base sessenta (Figura 37).

Figura 37 - Trecho do diálogo no navio negreiro


dades? — quis saber

Luciano chamou um dos escravos que havia passado o dia servindo no convés e perguntou-lhe quantos homens brancos havia no navio. O escravo apresentou a mão esquerda estendida com o dedo mínimo abaixado e a direita com o polegar apontando a falange do dedo anelar.

— Ficou fácil deduzir! — concluiu Fabiana. — É um sistema de base 60. O dedo mínimo representa a mão direita cheia, ou seja, 12 unidades. Logo, basta somarmos as 12 unidades da mão esquerda com 6 unidades da mão direita e teremos de vencer 18 homens!

Fonte: TRAMBAIOLLI NETO, 1998, p. 41.

Pode-se concluir que o modelo de livro paradidático não único, assim como o paradidático que envolve tópicos de História da Matemática também não. Cada exemplar possui sua importância e deve ser valorizado como material de acesso ao conhecimento.

8 PRODUTO EDUCACIONAL

Neste capítulo pretende-se apresentar o livro paradidático "Logaritmos e História da Matemática: algumas conexões" (Apêndice A), produto educacional fruto desta pesquisa. O material será disponibilizado, após aprovação, no banco de dissertações da página do PROFMAT. O objetivo do desenvolvimento desse material é apresentar uma abordagem diferenciada a respeito da construção do conceito de logaritmos através de uma perspectiva histórica.

O livro é composto por cinco partes: história dos logaritmos, curiosidades, sugestões de pesquisas, demonstração de algumas propriedades e propostas e resoluções de exercícios e atividades. O professor pode usar o paradidático completo livremente, ou apenas algumas partes, se assim desejar, com a devida referência.

Na primeira parte do livro é apresentado o desenvolvimento dos logaritmos, objetivando compreender as ideias de Stifel, Napier e Euler. Exemplos são explorados para que a história fique mais compreensível.

A segunda parte do paradidático contempla algumas curiosidades sobre o tema principal. Em especial, destaca-se o número de Euler, o qual ainda se tem dúvidas acerca da origem de sua notação (e).

Na terceira parte há sugestões de pesquisa. Durante essa pesquisa foi destacada a importância do aluno ser um indivíduo curioso, pesquisador e que se interesse pelo seu conhecimento. Acredita-se que a pesquisa não é um método muito explorado na disciplina de Matemática no ensino básico. Contato com artigos científicos muito menos. Desta forma, apresenta-se sugestões tanto para o professor, quanto para o aluno.

Algumas demonstrações de propriedades aparecem na quarta parte do livro. Essas demonstrações formalizam o tema, dando mais sentido para algumas das ideias iniciais de Napier. Por exemplo, que o logaritmo do produto equivale a soma dos logaritmos.

No decorrer das quatro primeiras partes aparecem quadros que sugerem uma visita à quinta parte, de propostas de exercícios e atividades. A primeira proposta revisa propriedades de potenciação e radiciação, essenciais para que se obtenha sucesso nas próximas propostas. A segunda explora a tabela de Napier, verificando se o aluno de fato compreendeu as ideias do escocês. Na terceira proposta é aplicada a definição moderna de logaritmo, a que Euler apresentou. A proposta 4 explora o número e. Trabalhar com limites no primeiro ano do

Ensino Médio não é fácil, assim, nesta parte tem-se a sugestão de usar a calculadora para se aproximar do valor de *e*. Nas últimas propostas aparecem exercícios que exploram as propriedades estudadas na parte anterior do livro, que são encontrados mais facilmente nos dias atuais.

Espera-se que as trinta e oito páginas desse paradidático possam contribuir para uma melhor aprendizagem do tema escolhido.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Na presente pesquisa qualitativa, conforme referencial teórico construído nos capítulos anteriores, explorou-se primeiramente aspectos relacionados ao ensino de logaritmos no Ensino Médio. O conteúdo foi selecionado vista a aversão que os estudantes possuem com essa parte da Matemática e a falta de êxito com ela. Foram apresentadas considerações sobre história e desenvolvimento do tema, definições, propriedades e aplicações. Assim, algumas análises subsequentes adquiriram fundamentação.

Ao analisar cinco livros didáticos, verificou-se que apenas um relaciona o tema, logaritmo com a História da Matemática. Os outros livros ou nada falam sobre a história, ou apresentam uma tentativa falha ao trazer informações sem ligação com o desenvolvimento do conteúdo. A tendência de ensino História da Matemática fornece o entendimento da evolução do pensamento matemático, as motivações que levaram aos estudos iniciais e quais foram as ideias até chegar no que se aprende “pronto” hoje. Assim, esta pesquisa foi conduzida com o intuito de construir um material paradidático, intitulado “Logaritmos e História da Matemática: algumas conexões”, que possa ser utilizado por professores e alunos do Ensino Médio.

A escolha pela construção de um livro paradidático se deu pois ele pode ser utilizado como material de pesquisa, de apoio às atividades ou até mesmo como substituto do livro didático. Além disso, nenhum paradidático sobre logaritmos foi encontrado durante esta pesquisa. Acredita-se que o paradidático pode tornar os processos de ensino e aprendizagem mais interessante, motivando os estudantes através de um método diferente do que estão acostumados, principalmente em Matemática.

O produto educacional aqui elaborado, teve como objetivo apresentar o desenvolvimento dos logaritmos no modo de história contada, destacando os principais momentos para se chegar na forma como se conhece esse assunto atualmente. A maior dificuldade foi transformar certos trechos da história em uma leitura entendível para estudantes do Ensino Médio. Para tanto, foram adicionados ao livro exemplos e propostas de exercícios, que podem medir o quanto os alunos compreenderam sobre o objeto de estudo. Portanto, os objetivos iniciais deste trabalho foram alcançados.

Deseja-se continuar os estudos desta pesquisa, aplicando o material construído e realizando análises e melhorias. Este trabalho contribuiu para enriquecimento do saber acerca de logaritmos, História da Matemática e paradidáticos de Matemática. Também foi agente motivador para demais estudos na área de Educação Matemática, particularmente em História da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACAFE. **Vestibular da Associação Catarinense das Fundações Educacionais.** Disponível em < http://vestibular.acafe.org.br/provas-anteriores/> Acesso em: 13 mar. 2019.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; TEIXEIRA, Marcos Vieira; NOBRE, Sergio Roberto. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012. p. 179 – 202.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Edgard Blücher, 2008. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos (PCN)**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2019.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio (PCN)**. **Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf >. Acesso em: 20 out. 2018.

BRASIL.**ENEM – Documento Básico**. Brasília, 2002. 15 p. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/Exame+Nacional+do+Ensino+M%C3%A9dio+-+ENEM++documento+b%C3%A1sico/e2cf61a8-fd80-45b8-a36f-af6940e56113?version=1.1>. Acesso em: 22 mar. 2019.

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN+)**. **Ciências da Natureza e Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 06 out. 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018. 578 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 12 out. 2018.

BRASIL. **Decreto nº 9.099**, de 19 de julho de 2017. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Diário Oficial, Brasília, DF, 19 jul. 2017. Seção 1, p. 7.

BRASIL. Ministério da Educação. **ENEM – documento básico**. Brasília: MEC, 2007. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/Exame+Nacional+do+Ensino+M%C3%A9dio+-+ENEM++documento+b%C3%A1sico/e2cf61a8-fd80-45b8-a36f-af6940e56113?version=1.1>. Acesso em: 03 fev. 2019.

BRENER, Carlos Luiz da Silva. **Objetos de aprendizagem para o ensino de logaritmos e exponenciais**. Dissertação (mestrado) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), 2013.

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego Barboza. **Quadrante matemática**, 1º ano: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas/SP: Papirus, 1996.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 16. ed. Campinas/SP: Papirus, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. v. 1.

DEMO, Pedro**. Pesquisa: princípio científico e educativo**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

ENEM 2016 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO.pdf> Acesso em: 10 mar. 2019.

ENEM 2017 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2017/cad_7_prova_azul_12112017.pdf> Acesso em: 10 mar. 2019.

ENEM 2018 – Exame Nacional do Ensino Médio. **INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira**. Ministério da Educação. Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2018/2DIA_05_AMARELO_BAIXA.pdf> Acesso em: 10 mar. 2019.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Tradução: Hygino H. Domingues.

FAUVEL, John. Using history in mathematics education. **For the Learning of Mathematics**, 11(2). p. 3 – 6, 1991.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

FREIRE, Paulo. **Educação como prática da liberdade**. São Paulo: Paz e Terra, 1980.

GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro; SOUZA, Joamir Roberto de. **#Contato Matemática**, 1º ano. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **A função metodológica da história para elaboração e execução de procedimentos de ensino na matemática**. **BOLEMA**. UNESP – Rio Claro, ano 9, nº 10, 1994. p. 75 – 82.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 1989.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 10. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2007.

GOMES, Paulo Roberto de Sousa. **Livros didáticos e equilíbrio das componentes básicas para o ensino da matemática no tópico de logaritmo**. Dissertação (mestrado) –

Universidade Estadual do Piauí (UESPI), Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), 2018.

GUELLI, Oscar. **A invenção dos números**. 9. ed. São Paulo: Ática, 2007.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da matemática elementar, 2: logaritmos**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, Gelson; et al. **Matemática: ciência e aplicações**, 1: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LEONARDO, Fabio Martins de (editor responsável). **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 1.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

LUCCA JUNIOR, Horácio Emidio. **Logaritmos: uma proposta de abordagem no Ensino Médio utilizando a história, o contexto com as demais ciências e o Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), 2017.

MAOR, Eli. ***e*: a história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. Tradução de Jorge Calife.

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. **Mathematical Treasures – Michael Stifel's Arithmetica Integra**. 2011. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-michael-stifels-arithmetica-integra >. Acesso em: 14 jan. 2019.

MIORIM, Maria Ângela; VILELA, Denise Silva, orgs. **História, filosofia e educação matemática: práticas de pesquisa**. 2. ed. Campinas, SP: Editora Alínea, 2010.

MOREIRA, Daniel Augusto. **O método fenomenológico na pesquisa**. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

MUNAKATA, Kazumi. **Produzindo livros didáticos e paradidáticos**. São Paulo: PUC, 1997. Disponível em <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10559>. Acesso em: 27 jun. 2019.

PAIXÃO, Fernando (Coord.). **Momentos do Livro no Brasil**. São Paulo: Ática, 1995, p. 209-239.

PERUZZO, F. M.; CANTO, E. L. **Química na abordagem do cotidiano**. São Paulo: Moderna, 1998.

PINTO, Anildo Gonçalves. **Uma proposta de livro paradidático como motivação para o ensino de matemática**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), 2013.

RAMOS, Luzia Faraco. **... E eles queriam contar**. São Paulo: Ática, 1995.

RAMOS, Simone Sozono Alonso. **Logaritmos: uma abordagem didática**. Universidade Federal do Paraná (UFPR), Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), 2015.

RIBEIRO, R. J. **O mestrado profissional na política atual da CAPES**. V. 2, n. 4, p. 8-15, jul. 2005.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta Curricular de Santa Catarina**: educação infantil, ensino fundamental e médio: matemática. Florianópolis: COGEN, 1998.

SANTA CATARINA, Governo do Estado. Secretaria de Estado da Educação. **Proposta curricular de Santa Catarina**: formação integral na educação básica. Santa Catarina, 2014. Disponível em <http://www.sed.sc.gov.br/documentos/ensino-89/proposta-curricular-156/4326-proposta-curricular-final>. Acesso em: 03 mar. 2019.

Sociedade Brasileira de Matemática. **Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**. 2017. Disponível em <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Regimento_2017.pdf>. Acesso em 20 jan. 2019.

SOUTO, Romélia Mara Alves. História na Educação Matemática – um estudo sobre trabalhos publicados no Brasil nos últimos cinco anos. **BOLEMA**. UNESP – Rio Claro, ano 25, nº 35B, 2010. p. 515 – 536.

TRAMBAIOLLI NETO, Egidio. **A Jaçanã.** São Paulo: FTD, 1998.

UDESC 2016/02. **Vestibular de Inverno da Universidade do Estado de Santa Catarina.** Disponível em <http://vestibular.udesc.br/arquivos/id_submenu/2427/2016_2_manha_.pdf> Acesso em: 11 mar. 2019.

UDESC 2017/01. **Vestibular de Verão da Universidade do Estado de Santa Catarina.** Disponível em <http://vestibular.udesc.br/arquivos/id_submenu/2488/manha_.pdf> Acesso em: 11 mar. 2019.

UDESC 2018/01. **Vestibular de Verão da Universidade do Estado de Santa Catarina.** Disponível em <https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/5978/CADERNO_MANH__COM_GABARITO_15117379179292_5978.pdf> Acesso em: 11 mar. 2019.

UDESC 2018/02. **Vestibular de Inverno da Universidade do Estado de Santa Catarina.** Disponível em <https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/6505/CADERNO_MANH__mar_o_2018___COM_GABARITO_15286763773135_6505.pdf> Acesso em: 11 mar. 2019.

UDESC 2019/01. **Vestibular de Verão da Universidade do Estado de Santa Catarina.** Disponível em <https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/7424/CADERNO_Matutino__2019_1_CURVAS_15431862810001_7424.pdf> Acesso em: 11 mar. 2019.

UFSC 2018. **Vestibular da Universidade Federal de Santa Catarina.** Disponível em <https://php.coperve.ufsc.br/vestibular2018/provas/2018-p1-amarela.pdf> Acesso em: 12 mar. 2019.

UFSC 2019. **Vestibular da Universidade Federal de Santa Catarina.** Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/192286/2019-p1-amarela.pdf> Acesso em: 12 mar. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Produto educacional

Apresentação

Caro(a) professor(a),

Este Produto Educacional é resultado do desenvolvimento da pesquisa intitulada "Logaritmos e História da Matemática: elaboração de um material paradidático" realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), sob a orientação da Profa. Dra. Regina Helena Munhoz.

O objetivo desse material paradidático é apresentar uma abordagem diferenciada a respeito da construção do conceito de logaritmo a partir de uma perspectiva histórica. Para tanto, sugiro o uso do mesmo com alunos do Ensino Médio.

O livro está dividido em cinco partes: história dos logaritmos, curiosidades, sugestões de pesquisa, demonstração de propriedades, propostas de exercícios e atividades.

Se desejar mais informações acerca do desenvolvimento deste trabalho, poderá consultar o título no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Espero que esse material contribua para o seu processo de ensino e aprendizagem!

Caroline Vanessa Wendland

Índice

História dos logaritmos

No século XIV surgiu na Itália um movimento cultural, artístico e intelectual chamado Renascimento. A denominação visa a retomada da cultura clássica greco-romana, cultivada nos séculos V e IV a.C.. O Renascimento se difundiu pela Europa nos séculos seguintes, representando, entre outras, uma revolução científica baseada no racionalismo.

No ramo da Matemática, em especial na Alemanha, foram desenvolvidos diversos livros de Álgebra. Um desses é *Arithmetica integra* (1544) de Michael Stifel (1486—1567). Abaixo segue página de rosto desta obra.

Fonte: Mathematical Association of America, 2011.

Stifel enuncia que para o produto de quaisquer dois termos da progressão geométrica *(1, q, q², ...)* o resultado será o mesmo que a soma dos expoentes correspondentes. Assim, tem-se a propriedade abaixo.

$$q^m . q^n = q^{m+n}$$

Segue exemplo.

$$2^3 . 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Analogamente, ao dividir um termo de uma progressão geométrica por outro equivale a subtrair os expoentes correspondentes. Abaixo tem-se a propriedade.

$$\frac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$$

Segue exemplo.

$$\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3$$

Assim, fica também definido $q^0=1$ quando $m = n$.

VEJA
PROPOSTA 1
PÁGINA 24

Desta forma, Stifel verificou que cada termo da progressão é uma potência de razão comum q e que os expoentes formam uma progressão aritmética. Assim, relacionou progressões geométricas e aritméticas, prenunciando a invenção dos logaritmos.

P.G.: é uma sequência numérica a qual todo termo é igual ao produto de seu antecessor com uma constante chamada de razão.

P.A.: é uma sequência numérica a qual todo termo é igual à soma de seu antecessor com uma constante chamada de razão.

Observe a tabela de potências de dois abaixo.

Expoente	Potência	Resultado
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64
7	2^7	128
8	2^8	256
9	2^9	512
10	2^{10}	1024

Na primeira coluna se encontra uma P.A. de razão 1. Já na terceira coluna há uma P.G. de razão 2.

Note que, caso se deseje calcular algumas potências de dois, é possível utilizar as que aparecem na tabela acima.

Alguns exemplos:

$$2^{13} = 2^{10+3} = 2^{10}.2^{3} = 1024.8 = 8192$$

$$2^{20} = 2^{10+10} = 2^{10}.2^{10} = 1024.1024 = 1048576$$

$$2^{17} = 2^{20-3} = \frac{2^{20}}{2^{3}} = \frac{1048576}{8} = 131072$$

$$2^{24} = 2^{8.3} = (2^{8})^{3} = 256^{3} = 16777216$$

De maneira simples, esta foi a ideia de Napier!

Em 1590, o escocês John Napier (1550 – 1617), ativista religioso muito interessado por aspectos da computação e trigonometria, tomou conhecimento da prostaférese na Dinamarca. Prostaférese, do latim *prosthaphaeresis*, refere-se à um algoritmo utilizado para transformar somas e produtos. Unindo o conhecimento da prostaférese com as ideias de Stifel, começou a desenvolver os logaritmos (da composição grega *logos* e *arithmos*, que significa número proporcional) .

Para construir sua primeira tábua de logaritmos, Napier optou por trabalhar com potências de um número próximo de 1. Para este fim, escolheu o valor abaixo.

$$1 - \frac{1}{10^7} = 0{,}9999999$$

O escocês construiu uma tabela inicial com 101 elementos e cada termo era obtido subtraindo-se do termo anterior a sua 10^7 parte. Observe:

Progressão geométrica	Valor aproximado (multiplicado por 10^7)	Progressão aritmética
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^1$	9999999	1
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
⋮	⋮	⋮
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{99}$	9999901	99
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Para aplicar a tabela de Napier, procura-se os números que serão multiplicados na coluna de aproximação da progressão geométrica. Então se deve somar os valores correspondentes na coluna da progressão aritmética. O valor obtido deve ser encontrado na coluna da progressão aritmética, daí basta verificar o valor relacionado na coluna de aproximação da progressão geométrica. Por fim, multiplica-se o número por 10^7, aumentando o mesmo em sete ordens decimais.

Por exemplo, suponha que se deseja calcular 9999999 . 9999901. Segundo a tabela, os valores a serem multiplicados estão relacionados com os números 1 e 99, respectivamente, na coluna da progressão aritmética. Ora, 1 + 99 = 100. Na centésima primeira linha da coluna da progressão aritmética, está relacionado o valor $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$ na coluna da progressão geométrica. Finalmente, multiplicando este valor por 10^7 obtém-se 99999000000000. Em outros termos:

$$\left[10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1\right].\left[10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}\right] =$$

$$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99} =$$

$$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{1+99} =$$

$$10^7.\left[10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}\right] =$$

$$10^7.9999900 =$$

$$99999000000000$$

VEJA
PROPOSTA 2
PÁGINA 25

Assim, Napier transformou multiplicações exaustivas em cálculos bem mais simples!

Para Napier, supondo N um número qualquer, L é seu logaritmo se satisfeita a relação abaixo.

$$N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Em 1614 Napier publicou o trabalho em latim intitulado *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso cânone dos logaritmos). Nele há uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco (o que interessava muito para estudiosos da época). Um trabalho posterior, chamado *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construção do maravilhoso cânone dos logaritmos), foi publicado postumamente por seu filho Robert em 1619. Na figura abaixo encontra-se a folha de rosto da edição de 1619 do *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* de Napier, que também contém o seu *Constructio*.

Fonte: Maor, 2008.

No ano seguinte à publicação da *Descriptio*, o professor inglês Henry Briggs (1561 – 1630), se reuniu com Napier. Ambos concordaram que as tábuas seriam mais eficientes se o logaritmo de um fosse zero, não mais 10^7, e o logaritmo de dez fosse uma potência apropriada de dez. Decidiram que $\log 10 = 1 = 10^0$. Isto é, se um número positivo *N* for escrito como $N = 10^L$, então *L* é o logaritmo *briggsiano* ou *comum* de *N*, escrito como $\log_{10} N$ ou apenas $\log N$. Assim surgiu o conceito de base, implicando nos logaritmos conhecidos hoje.

Em 1736, Leonard Euler (1707 – 1783) apresentou uma definição para logaritmos que difere da de Napier, mas que é utilizada atualmente como definição moderna. Esta diz que se $N = b^L$, onde *b* é um número positivo fixo, diferente de um, então L é o logaritmo de base *b* de *N*.


Stifel


Napier


Euler

VEJA
PROPOSTA 3
PÁGINA 26

Curiosidades

⇒ É comum utilizar o termo *logaritmo neperiano* para designar o logaritmo natural (de base *e*). Entretanto, encontra-se no trabalho de Napier um sistema de base *1/e*. Vale destacar que Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da atual. Também não se utilizava o símbolo e na época, apesar de seu valor ser conhecido nos estudos que exploravam os logaritmos.

⇒ Aproximadamente, *e = 2,718281...* Este resultado é garantido por meio do limite abaixo.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Alunos do Ensino Médio não têm a obrigação de entender essa notação. Aí vai outro processo: escolha um número bastante garnde Com auxílio de uma calculadora com mais ferramentas, faça 1 dividido por esse valor e some 1 ao resultado. Faça esse último resultado elevado pelo valor escolhido. A resposta será um valor que se aproxima do número e.

VEJA
PROPOSTA 4
PÁGINA 27

⇒ Grande construtor de notações matemáticas, o suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) foi responsável por boa parte do simbolismo utilizado hoje. Numa exposição manuscrita de seus resultados, elaborada por volta de 1728, Euler utilizou a letra e para representar a base do sistema de logaritmos naturais. Até então não existia nenhuma notação padronizada para este número, que já era bem conhecido. Em 1736, na obra *Mechanica*, de Euler, essa notação apareceu pela primeira vez impressa e se tornou padrão.

⇒ Uma dúvida quanto à prioridade da invenção dos logaritmos parte dos estudos do suíço Jobst Bürgi (1552 – 1632). Possivelmente a ideia inicial de logaritmo tenha ocorrido a Bürgi em 1588, mas ele só publicou seus resultados em 1620, caracterizando Napier como o primeiro a anunciar a descoberta ao mundo.

Vamos pesquisar?

⇒ Para entender e analisar melhor o Renascimento, sugere-se a leitura do artigo *O Renascimento e as origens da ciência moderna: Interfaces históricas e epistemológicas*, de Abraão Pustrelo Damião. Acesso em: https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/viewFile/34411/25535.

⇒ Os livros *História da matemática*, de Carl Benjamin Boyer e Uta Caecilia Merzbach, e *Introdução a história da matemática*, de Howard Eves, são excelentes leituras para entendimento da evolução dos logaritmos. Além disso, são materiais que podem auxiliar os professores de Matemática em muitos outros conteúdos.

⇒ Johannes Kepler (1571 – 1630) foi um dos primeiros astrônomos a aplicar os logaritmos. Ele utilizou este novo conceito no desenvolvimento de seus cálculos envolvendo as órbitas planetárias. Atualmente, quais são as principais aplicações dos logaritmos?

⇒ Pesquisas em livros de história podem auxiliar o entendimento do período renascentista. Consultar um professor de História pode ser uma boa experiência de troca de conhecimentos. Você já pensou em um projeto com outra matéria ou em uma aula dada por dois professores de diferentes disciplinas? É uma oportunidade interessante!

Demonstrando algumas propriedades

Conhecendo os conceitos fundamentais das potências de números reais, pode-se iniciar o estudo dos logaritmos

Definição. Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se de logaritmo de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Isto é,

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b,$$

em que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e x é o logaritmo. Lê-se x é o logaritmo de b na base a.

Como consequências imediatas da definição 6, tem-se que:

i. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;
ii. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;
iii. $a^{\log_a b} = b$, pois o logaritmo de b na base a é o expoente que se deve dar à base a para a potência obtida ser igual a b.

Sejam $0 < a$, $a \neq 1$, $0 < b$ e $0 < c$. Seguem propriedades dos logaritmos, conforme definição.

Propriedade: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Demonstração: A demonstração está dividida em duas partes.

($\Rightarrow$) Se $\log_a b = \log_a c$, então, pela definição de logaritmo, $a^{\log_a c} = b$. Pela terceira consequência, segue que $b = c$.

($\Leftarrow$) Se $b = c$, então, pela terceira consequência, $a^{\log_a c} = b$. Pela definição de logaritmo, segue que $\log_a b = \log_a c$.

Portanto, dois logaritmos de mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais.

$\blacksquare$

Propriedade: $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b.c) = z$. Consequentemente, $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = b.c$. Daí,

$$a^z = b.c = a^x.a^y = a^{x+y}$$

$$z = x + y$$

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c.$$

Portanto, o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos de cada termo do produto, todos na mesma base.

$\blacksquare$

Propriedade: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = z$. Consequentemente, $a^x = b$, $a^y = c$ e $a^z = \frac{b}{c}$. Daí,

$$a^z = \frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$z = x - y$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

Portanto, o logaritmo do quociente é igual à diferença dos logaritmos de cada termo do produto, todos na mesma base. Particularmente, para $b = 1$, tem-se:

$$\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c = 0 - \log_a c = -\log_a c.$$

∎

Propriedade: $log_a b^{\propto} = \propto . log_a b, \propto \in R$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$ e $log_a b^{\alpha} = y$. Consequentemente, $a^x = b$ e $a^y = b^{\alpha}$. Daí,

$$a^y = b^{\alpha} = (a^x)^{\alpha} = a^{x.\alpha}$$

$$y = \alpha . x$$

$$log_a b^{\alpha} = \alpha . \log_a b.$$

Portanto, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Particularmente, tem-se

$$log_a a^{\alpha} = \alpha . \log_a a = \alpha . 1 = \alpha.$$

∎

Propriedade: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$

Demonstração: Considere $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z$, $z \neq 0$. Consequentemente, $a^x = b$, $c^y = b$ e $c^z = a$. Daí,

$$c^{z.x} = (c^z)^x = a^x = b = c^y$$

$$z.x = y$$

$$x = \frac{y}{z}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Portanto, um logaritmo pode ser convertido para o quociente dos logaritmos do logaritmando e da base, nessa ordem e numa nova base que convém. Particularmente, tem-se $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, pois:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}.$$

■

VEJA
PROPOSTA 5
PÁGINA 28

Propostas de exercícios e atividades

Neste capítulo existem propostas de exercícios e atividades divididas em partes para uma melhor evolução no entendimento do conteúdo. No capítulo seguinte estão as resoluções comentadas.

Sugere-se que as propostas sejam desenvolvidas em sequência, mas nada impede de trabalhar especificamente com apenas uma ou algumas no seu processo de ensino e aprendizagem.

Bons estudos!

Proposta 1

REVISANDO PROPRIEDADES DE POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

1. Calcule:

a) $2^3 . 2^4 =$

b) $3^2 . 3^{-2} =$

c) $\frac{5^6}{5^4} =$

d) $\frac{7^2}{7^8} =$

e) $8^8 . 8^{-9} =$

f) $(2^3)^2 =$

g) $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} =$

h) $\sqrt{6^2} =$

i) $\sqrt{\sqrt{16}} =$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$

2. Seja x um número positivo e diferente de um. Escreva na forma de uma só potência:

a) $x^9 . x^2 =$

b) $x^4 . x^{-7} =$

c) $\frac{x^{12}}{x^2} =$

d) $\frac{x^{10} . x^5}{x^7} =$

e) $\sqrt{x} . x^3 =$

f) (Considere $n \in \mathbb{R}$) $x^n . x^{-n} =$

g) $\sqrt[4]{x^3} . \sqrt[3]{x^4} =$

h) $(x^7)^8 =$

Proposta 2

TABELA DE LOGARITMOS DE NAPIER

1. Abaixo encontra-se o modelo da primeira tabela de logaritmos de Napier.

Progressão geométrica	Valor aproximado (multiplicado por 10^7)	Progressão aritmética
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$	9999999	1
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}$	9999901	99
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Utilize a tabela para aproximar os cálculos a seguir.

a) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^4 =$

b) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{50} =$

c) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{98} =$

d) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{101} =$

e) $9999902 \,.\, 9999998 =$

f) $9999990 \,.\, 9999980 =$

g) $0{,}9999999 \,.\, 0{,}9999991 =$

h) $0{,}999995 \,.\, 0{,}999994 =$

Proposta 3

APLICANDO A DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

1. Calcule:

a) $\log_2 8 =$

b) $\log_3 9 =$

c) $\log_5 125 =$

d) $\log_7 1 =$

e) $\log_3 3 =$

f) $\log 100 =$

g) $\log 0{,}1 =$

h) $\ln e =$

i) $\ln 1 =$

j) $\log_5 \sqrt{5} =$

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine x.

a) $\log_2 \sqrt{32} = x$

b) $\log_6 x = 3$

c) $\log_{0x} 100000 = 5$

d) $\log_{0.5}(4\sqrt[3]{8^5}) = x$

3. (UDESC) Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações $\begin{cases} \log_2(a+b+c) = 0 \\ \log(a+2b) = 1 \\ \dfrac{2^a \,.\, 4^b}{8^c} = 2 \end{cases}$. Analise as proposições em relação a a, b e c.

I. Um dos valores é um número primo.
II. Todos os valores são números reais não negativos.
III. Dois dos valores são números naturais.
IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Proposta 4

O NÚMERO e

1. O número π aparece no cálculo da área e do perímetro do círculo. O número e aparece na resolução de equações em que as incógnitas aparecem em expoente. Esse número é irracional, assim como o π. Para encontrar aproximações para e, faça 3 substituições de valores para *n* em cada caso. Sugere-se o uso de calculadora.

a) $(1+n)^{\frac{1}{n}}$, com n próximo de zero.

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com n infinitamente positivo.

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com n infinitamente negativo.

2. Calcule:

a) $\ln e =$

b) $\ln 1 =$

c) $\ln e^3 =$

d) $\ln(\ln e) =$

e) $\log(\ln e^{10}) =$

f) $\ln -5 =$

Proposta 5

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

1. Determine o valor de x:

a) $\log_2 x = \log_2 16$

b) $\log_7(2x - 5) = \log_7(x + 3)$

c) $\log_3(25 \,.\, 125) = x$

d) $\log_2 \frac{512}{64} = x$

e) $\log_2 8^{21} - x$

f) $\log 0{,}01^{58} = x$

2. Sejam $\log 2 - 0{,}30$, $\log 3 - 0{,}47$, $\log 5 - 0{,}69$ e $\log 7 - 0{,}84$, calcule:

a) $\log 6 =$

b) $\log 4 =$

c) $\log_7 5 =$

d) $\log_7 10 =$

e) $\log_3 7 =$

f) $\log_5 100 =$

3. (UDESC) O valor de $x.y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$, sabendo que $\log_2 x + \log_4 y = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:
   a) 4
   b) 8
   c) 2
   d) 6
   e) 10

Proposta 6

LOGARITMOS EM PROVAS

1. (ENEM) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3.000°C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para log (3) e 1,041 como aproximação para log (11). O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de

a) 22
b) 50
c) 100
d) 200
e) 400

2. (UDESC) O valor de $x.y$ com $x, y \in Z$, sabendo que $\log_2 x + \log_4 y = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:

a) 4
b) 8
c) 2
d) 6
e) 10

Resoluções comentadas

RESOLUÇÕES PROPOSTA 1

1. Calcule:

a) $2^3 . 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b) $3^2 . 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$

c) $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

d) $\frac{7^2}{7^5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$

e) $8^8 . 8^{-9} = 8^{8+(-9)} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

f) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

g) $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$

h) $\sqrt{6^2} = |6| = 6$

i) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2.2]{16} = \sqrt[4]{16}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

2. Seja x um número positivo e diferente de um. Escreva na forma de uma só potência:

Resoluções comentadas

RESOLUÇÕES PROPOSTA 1

1. Calcule:

a) $2^3 . 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b) $3^2 . 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$

c) $\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$

d) $\frac{7^2}{7^5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$

e) $8^8 . 8^{-9} = 8^{8+(-9)} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

f) $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

g) $\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$

h) $\sqrt{6^2} = |6| = 6$

i) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2.2]{16} = \sqrt[4]{16}$

j) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

2. Seja x um número positivo e diferente de um. Escreva na forma de uma só potência:

a) $x^9 . x^3 = x^{9+3} = x^{12}$

b) $x^4 . x^{-7} = x^{4+(-7)} = x^{-3}$

c) $\frac{x^{12}}{x^3} = x^{12-3} = x^9$

d) $\frac{x^{10} . x^5}{x^7} = x^{10+5-7} = x^8$

e) $\sqrt{x} . x^3 = x^{\frac{1}{2}} . x^3 = x^{\frac{1}{2}+3} = x^{\frac{7}{2}}$

f) (Considere $n \in \mathbb{R}$) $x^n . x^{-n} =$

$x^{n+(-n)} = x^0 = 1$

g) $\sqrt[4]{x^3} . \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{3}{4}} . x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} = x^{\frac{25}{12}}$

h) $(x^7)^8 = x^{7.8} = x^{56}$

RESOLUÇÃO PROPOSTA 2

1. Abaixo encontra-se o modelo da primeira tabela de logaritmos de Napier.

Progressão geométrica	Valor aproximado (multiplicado por 10^7)	Progressão aritmética
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$	10000000	0
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$	9999999	1
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	9999998	2
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$	9999997	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{99}$	9999901	99
$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100}$	9999900	100

Utilize a tabela para aproximar os cálculos a seguir.

a) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^4 = 9999996$

b) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{50} = 9999950$

c) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{98} = 9999902$

d) $10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{101} = 9999899$

e) $9999902 \,.\, 9999998 =$

$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{98}.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2 =$

$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{100} =$

$10^7.9999900 = 99999000000000$

f) $9999990 \,.\, 9999980 =$

$10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10}.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{20} =$

$10^7.10^7.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{30} =$

$10^7.9999970 = 99999700000000$

g) $0{,}9999999 \,.\, 0{,}9999991 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^9 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10} = 0{,}9999990$

h) $0{,}999995 \,.\, 0{,}999994 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^5.\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^6 =$

$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{11} = 0{,}999989$

RESOLUÇÃO PROPOSTA 3

1. Calcule:

a) $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$.

b) $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$.

c) $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$.

d) $\log_7 1 = 0$, pois $7^0 = 1$.

e) $\log_3 3 = 1$, pois $3^1 = 3$.

f) $\log 100 = 2$, pois $10^2 = 100$.

g) $\log 0{,}1 = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10}$.

h) $\ln e = 1$, pois $e^1 = e$.

i) $\ln 1 = 0$, pois $e^0 = 1$.

j) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, pois $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. Determine x.

a) $\log_2 \sqrt{32} = x$

$$2^x = 32^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^x = (2^5)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$2^x = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

b) $\log_6 x = 3$

$$6^3 = x \Leftrightarrow x = 216$$

c) $\log_x 100000 = 5$

$$x^5 = 100000 \Leftrightarrow x = 10$$

d) $\log_{0,5}(4\sqrt[3]{8^5}) = x$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^2.(2^3)^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow (2^{-1})^x = 2^2.2^5$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x} = 2^7 \Leftrightarrow x = -7$$

3. (UDESC) Sejam a, b e c valores que satisfazem simultaneamente as equações $\begin{cases} \log_2(a+b+c) = 0 \\ \log(a+2b) = 1 \\ \frac{2^a \cdot 4^b}{8^c} = 2 \end{cases}$. Analise as proposições em relação a a, b e c.

I. Um dos valores é um número primo.
II. Todos os valores são números reais não negativos.
III. Dois dos valores são números naturais.
IV. Todos os valores são números racionais não inteiros.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas II e IV são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas III e IV são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Por $\log_2(a+b+c) = 0$, tem-se que $a+b+c = 2^0 = 1$. Por $\log(a+2b) = 1$, tem-se que $a + 2b = 10^1 = 10$. Portanto, $a = 10 - 2b$ e $c = b - 9$. Segue que:

$$\frac{2^a.4^b}{8^c} = 2 \Leftrightarrow \frac{2^a.2^{2b}}{2^{3c}} = 2 \Leftrightarrow 2^{a+2b-3c} = 2 \Leftrightarrow a + 2b - 3c = 1 \Leftrightarrow$$

$$10 - 3c = 1 \Leftrightarrow c = 3.$$

Consequentemente, $b = 12$ e $a = -14$.

Resposta: alternativa "a".

RESOLUÇÃO PROPOSTA 4

1. O número π aparece no cálculo da área e do perímetro do círculo. O número *e* aparece na resolução de equações em que as incógnitas aparecem em expoente. Esse número é irracional, assim como o π. Para encontrar aproximações para e, faça 3 substituições de valores para *n* em cada caso. Sugere-se o uso de calculadora.

a) $(1+n)^{\frac{1}{n}}$, com *n* próximo de zero. $\begin{cases} n = 0{,}1 \Rightarrow (1+0{,}1)^{\frac{1}{0{,}1}} \approx 2{,}593 \\ n = 0{,}01 \Rightarrow (1+0{,}01)^{\frac{1}{0{,}01}} \approx 2{,}704 \\ n = 0{,}001 \Rightarrow (1+0{,}001)^{\frac{1}{0{,}001}} \approx 2{,}717 \end{cases}$

b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,com *n* infinitamente positivo. $\begin{cases} n = 100 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}704 \\ n = 1000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}716 \\ n = 10000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \approx 2{,}718 \end{cases}$

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com *n* infinitamente negativo. $\begin{cases} n = -100 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-100}\right)^{-100} \approx 2{,}731 \\ n = -1000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-1000}\right)^{-1000} \approx 2{,}719 \\ n = -10000 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{-10000}\right)^{-10000} \approx 2{,}718 \end{cases}$

2. Calcule:

a) $\ln e = 1$, pois $e^1 = e$.

b) $\ln 1 = 0$, pois $e^0 = 1$.

c) $\ln e^3 = 3$, pois $e^3 = e^3$.

d) $\ln(\ln e) = \ln 1 = 0$.

e) $\log(\ln e^{10}) = \log 10 = 1$.

f) $\ln -5 = \nexists$, pois o logaritmando deve ser positivo.

RESOLUÇÃO PROPOSTA 5

1. Determine o valor de x:

a) $\log_2 x = \log_2 16$

$x = 16$

b) $\log_7(2x - 5) = \log_7(x + 3)$

$2x - 5 = x + 3 \Leftrightarrow x = 8$

c) $\log_5(25 \,.\, 125) = x$

$\log_5 25 + \log_5 125 = x \Leftrightarrow$

$2 + 3 = x \Leftrightarrow x = 5$

d) $\log_2 \frac{512}{64} = x$

$\log_2 512 - \log_2 64 = x \Leftrightarrow$

$9 - 6 = x \Leftrightarrow x = 3$

e) $\log_2 8^{21} = x$

$2^x = (2^3)^{21} \Leftrightarrow 2^x = 2^{63} \Leftrightarrow x = 63$

f) $\log 0{,}01^{58} = x$

$10^x = (10^{-2})^{58} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-116}$

$\Leftrightarrow x = -116$

2. Sejam $\log 2 = 0{,}30$, $\log 3 = 0{,}47$, $\log 5 = 0{,}69$ e $\log 7 = 0{,}84$, calcule:

a) $\log 6 =$

$\log 2.3 = \log 2 + \log 3 = 0{,}77$

b) $\log 4 =$

$\log 2^2 = 2.\log 2 = 0{,}6$

c) $\log_7 5 = \frac{\log 5}{\log 7} \approx 0{,}82$

d) $\log_7 10 = \frac{\log 10}{\log 7} \approx 1{,}19$

e) $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1{,}78$

f) $\log_5 100 = \frac{\log 100}{\log 5} \approx 2{,}89$

3. (UDESC) O valor de $x.y$ com $x, y \in \mathbb{Z}$, sabendo que $\log_2 x + \log_4 y = 2$ e $2^{x+y} = 32$, é igual a:
   a) 4
   b) 8
   c) 2
   d) 6
   e) 10

Aplicando a mudança de base, tem-se:

$$\log_2 x + \log_4 y = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = 2 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2.\log_2 x + \log_2 y = 4 \Leftrightarrow \log_2 x^2 + \log_2 y = 4 \Leftrightarrow$$

$$\log_2 x^2.\, y = 4.$$

Pela definição de logaritmo, $x^2.\, y = 2^4 = 16$. A questão também informa que $2^{x+y} = 32$, isto é, $x + y = 5$, ou ainda, $y = 5 - x$. Daí,

$$x^2.\, y = 16 \Leftrightarrow x^2.(5 - x) = 16 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 16 = 0.$$

A única solução inteira é $x = 4$. Logo, $y = 1$. Finalmente, $x.\, y = 4$.

Resposta: alternativa "a".

Considerações

Espera-se que esse material possa contribuir para professores e alunos do Ensino Médio.

Professor(a), fique à vontade para adaptar esse material de acordo com as suas necessidades e da sua turma. Este livro é apenas uma das tantas maneiras de se trabalhar com logaritmos.

Bom trabalho!

Bibliografia

BOYER, Carl Benjamin; MERZBACH, Uta Caecilia. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996. Tradução de Elza F. Gomide.

DAMIÃO, Abraão Pustrelo. O Renascimento e as origens da ciência moderna: Interfaces históricas e epistemológicas. **História da Ciência e Ensino: construindo interfaces**. PUC—SP. v. 17, 2018. p. 22—49.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Tradução: Hygino H. Domingues.

MAOR, Eli. **e: a história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. Tradução de Jorge Calife.

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA. **Mathematical Treasures – Michael Stifel's Arithmetica Integra**. 2011. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-michael-stifels-arithmetica-integra >. Acesso em: 14 jan. 2019.

Para dúvidas, relatos ou troca de experiências entre em contato.

Caroline Vanessa Wendland
E-mail: caroline.wendland@hotmail.com