



**PROFMAT**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL  
- PROFMAT**

**ANTÔNIO MARCOS MENDES CARDOSO**

**O CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL - UM RECURSO DIDÁTICO  
PEDAGÓGICO MEDIADOR DO PROCESSO DE ENSINO - APRENDIZAGEM DA  
TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Vitória da Conquista  
2019**

**Antônio Marcos Mendes Cardoso**

**O CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL - UM RECURSO DIDÁTICO  
PEDAGÓGICO MEDIADOR DO PROCESSO DE ENSINO - APRENDIZAGEM DA  
TRIGONOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Nagamine  
Coorientador: Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

Vitória da Conquista  
2019

## Catálogo

C26c Cardoso, Antônio Marcos Mendes.

O ciclo trigonométrico virtual – um recurso didático pedagógico mediador do processo de ensino-aprendizagem da trigonometria na educação básica. / Antônio Marcos Mendes Cardoso, 2019.

101f. il.

Orientador (a): Dr. André Nagamine.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2019.

Inclui referências. 61 - 63.

1. Matemática - Ensino-Aprendizagem. 2. Trigonometria. 3. Tecnologia - Virtual. I. Nagamine, André. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD. 510.7

*Catálogo na fonte:* Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL –  
PROFEMAT

**O CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL – UM RECURSO DIDÁTICO  
PEDAGÓGICO FACILITADOR DO PROCESSO DE ENSINO –  
APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

Antônio Marcos Mendes Cardoso  
Orientador: Prof. Dr. André Nagamine

Esta Dissertação foi apresentada à banca examinadora da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – Campus Vitória da Conquista, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. André Nagamine

Aprovado em: 25 de Outubro de 2019.

BANCA EXAMINADORA



---

Prof. Dr. André Nagamine (Orientador)  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB



---

Prof. Dr. Afonso Henriques (Convidado)  
Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC



---

Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade (Convidado)  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Vitória da Conquista  
Bahia – Brasil  
2019

## **DEDICATÓRIA**

**Dedico este trabalho à memória de minha mãe Rosa Nice Mendes, que  
infelizmente me deixou no final dessa minha caminhada, mas continua  
sendo minha maior força e inspiração na vida.”**

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Deus por me permitir chegar até aqui, com saúde e vencedor de todos os obstáculos.

Ao meu orientador Prof. Dr. André Nagmine, pelos seus ensinamentos, sugestões e incentivos para a conclusão desse trabalho.

A todos os professores que estiveram presentes nestes dois anos, proporcionando momentos de profunda reflexão e conhecimento na minha formação como professor. Em especial ao professor Dr. Roque Mendes Prado Trindade pelas sugestões e incentivos.

À minha família que sempre torceu por mim.

Aos colegas de Mestrado, pelo apoio, cumplicidade, companheirismo e sugestões.

Enfim, a todos que acreditaram em mim, com palavras de força e coragem, para que continuasse nesta caminhada.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar.

Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

Madre Teresa de Calcuta

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa que comprova a eficiência de uma ferramenta denominada “*O Ciclo Trigonométrico Virtual*”, desenvolvida pelo autor, utilizando o HTML – 5 conjuntamente com a linguagem Java Script e disponibilizada em ambiente web. Trata-se de um recurso didático-pedagógico que faz o uso da tecnologia com o objetivo de facilitar o trabalho do Professor de Matemática da Educação Básica, no processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria, tema muito importante, devido a sua relevância para a Matemática e outras áreas do conhecimento, como a Física, Engenharia, Medicina, Astronomia dentre outras. Auxilia o estudante, na sua tarefa de aprender, possibilitando formas dinâmicas, agradáveis e simples para estudar o conteúdo, podendo ser acessado do smartphone, em qualquer lugar e hora, sendo este um fator motivador, além da simplicidade e objetividade no entendimento da teoria das razões trigonométricas e na resolução de problemas considerados complexos. Exige do aluno apenas interpretar a situação-problema e fornecer os dados nas caixas de textos, conforme a sua necessidade. Essa ferramenta abrange todas as razões trigonométrica: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente, além de problemas sobre arcseno e arccosseno e auxilia na visualização da relação dessas razões trigonométricas com os seus respectivos eixos, deixando claro para o usuário a relação entre as próprias razões, inclusive quanto à simetria dos arcos em relação ao eixo das ordenadas, à origem e ao eixo das abscissas. O entendimento dos sinais dessas funções, suas tendências e seus valores máximos e mínimos ficam evidentes com o uso da ferramenta. Sendo assim, o *Ciclo Trigonométrico Virtual*, vem contribuir com a melhoria do ensino da Trigonometria em uma escola inserida e harmonizada com as novas formas de ensinar e aprender, em um mundo virtual e uma geração conectada.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem, Trigonometria, Tecnologia, Virtual.

## ABSTRACT

This paper presents a research that includes an efficiency tool called "The Virtual Trigonometric Cycle", developed by the author, using HTML - 5 together with the Java Script language and available in the web environment. It is a didactic-pedagogical resource that makes use of technology in order to facilitate the work of the Basic Education Mathematics Teacher, without trigonometry teaching-learning process, very important theme, due to its relevance to Mathematics and others. areas of knowledge, such as Physics, Engineering, Medicine, Astronomy and others. Helps or studies, helps to learn, enables dynamic, pleasant and simple ways to study content, can be accessed by smartphone, anywhere and anytime, which is a motivating factor, as well as simplicity and objectivity in understanding the theory of trigonometric reasons and problem solving considered complex. Requiring the student to only interpret a problem situation and provide the data in the text boxes as needed. This tool covers all trigonometric ratios: sine, cosine, tangent, cosecant, secant, and cotangent, as well as arc and arc and cosine problems and ancillary answers to trigonometric factor-related answers with their own tests, only clear to the use among users as reasonable arguments, including as to the symmetry of the arches in relation to the axis of the orders, the origin and the axis of the abscissa. The understanding of the signs of these functions, their trends and their maximum and minimum values are evident with the use of the tool. Thus, the Virtual Trigonometric Cycle contributes to the improvement of the teaching of trigonometry in a school inserted and harmonized with new forms of learning, in a virtual world and a connected generation.

Keywords: Teaching-Learning, Trigonometry, Technology, Virtual.

## LISTAS DE FIGURAS E GRÁFICOS

FIGURA 1. IDEB RESULTADOS E METAS POR ETAPA DE ENSINO 2017.....	13
FIGURA 2- PAPIRO RHIND, MUSEU DE LONDRES	
FIGURA 3- O SEQT EGÍPCI.....	20
FIGURA 4– PLIMPTON 322, UNIVERSIDADE DE COLUMBIA .....	20
FIGURA 5- TEOREMA DE PTOLOMEU .....	23
FIGURA 6- VISUALIZAÇÃO DOS TRIÂNGULOS SEMELHANTES .....	24
FIGURA 7- O “JIVA” HINDU.....	25
FIGURA 8- CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL .....	38
FOTO 1- APRESENTAÇÃO DA FERRAMENTA CTV PARA OS ALUNOS .....	438
FOTO 2- ALUNOS RESOLVENDO EXERCÍCIOS COM O CTM.....	43
FOTO 3- ALUNOS SENDO ORIENTADO PELO AUTOR PARA USAR O CTM.....	49
GRÁFICO 1- SEXO DOS PARTICIPANTES DOCENTES E ACADÊMICOS.....	40
GRÁFICO 2- SEXO DOS PARTICIPANTES DOCENTES E ACADÊMICOS.....	40
GRÁFICO 3- EXPERIÊNCIA PROFISSIONAL DOS ENTREVISTADOS .....	41
GRÁFICO 4- NÍVEL DE DIFICULDADES PARA ENSINAR O CICLO TRIGONOMÉTRICO .....	42
GRÁFICO 5- SEXO DOS DISCENTES.....	43
GRÁFICO 6- IDADE DOS DISCENTES.....	43
GRÁFICO 7 – COMO OS ALUNOS ENTREVISTADOS VEEM A MATEMÁTICA ....	44
GRÁFICO 8- RELAÇÃO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS CONHECIDAS PELOS DISCENTES.....	45
GRÁFICO 9- RELAÇÃO EIXOS TRIGONOMÉTRICOS CONHECIDOS PELOS PARTICIPANTES.....	46
GRÁFICO 10- NÚMERO DE ACERTOS NA ATIVIDADE DE SONDAÇÃO: DETERMINAÇÃO DO SINAL.....	46
GRÁFICO 11- OPÇÃO DOS DOCENTES OU ACADÊMICOS EM RELAÇÃO AS FERRAMENTAS CTM X CTC.....	51
GRÁFICO 12- LISTA I DESEMPENHO DOS ALUNOS .....	52
GRÁFICO 13- LISTA II DESEMPENHO DOS ALUNOS .....	52

## LISTA DE SIGLAS

AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem

CTM – Ciclo Trigonométrico Manipulável

CTV – Ciclo Trigonométrico Virtual

E4 – Educação 4.0

IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

IFNMG – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA – Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes

PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica

TD - Tecnologias Digitais

## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	13
2 REFERENCIAL TEÓRICO .....	18
2.1 Como Surgiu a Trigonometria .....	18
2.1.1 A trigonometria na Grécia.....	21
2.1.2 A contribuição da Índia e dos países árabes.....	26
2.2 O Uso de Materiais Virtuais nas Aulas de Matemática.....	27
2.3. O Ensino de Trigonometria.....	30
3 PROPOSTA METODOLÓGICA .....	33
3.1. Participantes da Pesquisa .....	35
3.2. Instrumentos da Pesquisa .....	36
4 MÉTODO DE FUNCIONAMENTO E CONSTRUÇÃO DA FERRAMENTA.....	37
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....	39
5.1 Pesquisa Exploratória (Projeto Piloto) .....	39
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	53
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	57
APÊNDICE A – Questionários e exercícios – Minicurso .....	61
APÊNDICE B - APÊNDICE B – Código Fonte do CTV.....	73

## 1 INTRODUÇÃO

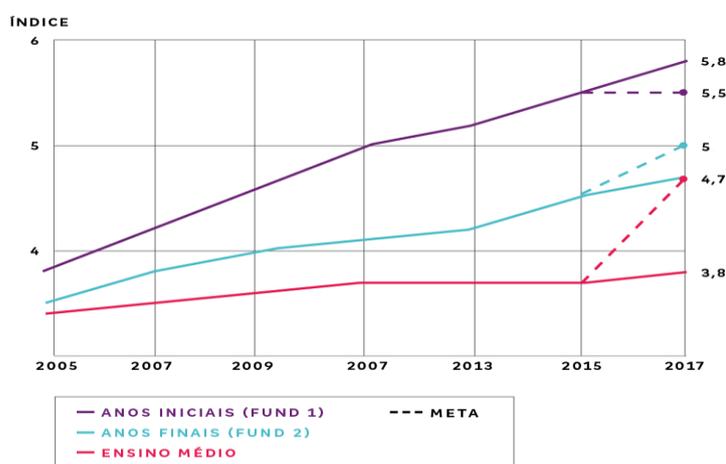
O Ensino de Matemática no Brasil carece de muitas melhorias, isto é o que se observa de acordo com informações extraídas do Portal do MEC – Ministério da Educação, analisando alguns indicadores como, por exemplo, o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos) o qual é realizado a cada três anos e o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) tendo como objetivo medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino. Isso para apontar apenas dois índices.

Do último resultado do PISA, divulgado no terceiro trimestre de 2016 o Brasil aparece entre os últimos do ranking, a Matemática aparece na 65ª posição. O Brasil está muito aquém se comparado com outros países, como Cingapura, China e Finlândia, que são grandes potências no quesito educacional. (DEUTSCH, 2018).

O IDEB, que reúne em um só indicador os resultados de dois conceitos igualmente importantes para a qualidade da Educação, que é o fluxo escolar e as médias de desempenho nas avaliações nos setores públicos e privados. O fracasso é notório principalmente no Ensino Médio. (INEP, 2018), conforme se pode observar nos resultados do IDEB de 2017 que ilustramos na Figura 1.

Figura 1. IDEB resultados e metas por etapa de ensino 2017

### IDEB: TRAJETÓRIA NACIONAL EM CADA ETAPA DE ENSINO E META 2017



Fonte: Peres (2018)

Assim, fica evidenciado que o ensino da Matemática, no Brasil, precisa melhorar e muito pois, sabe-se que sem uma educação de qualidade não se aproveita as reais potencialidades do país e os talentos individuais dos alunos.

A impressão que fica é que o mundo mudou, conseqüentemente os alunos mudaram, mas a educação no Brasil estagnou-se no tempo. Diante dessa realidade, desponta a necessidade de se fazer algo para contribuir na mudança desse quadro. Algumas tentativas de mudanças já estão sendo feitas, como a reforma curricular do Ensino Médio e a implantação do PROFMAT (Mestrado em Matemática do Ensino Médio em Nível Nacional), que é um ótimo programa que muito contribui na capacitação/ formação do professor de Matemática que atua nessa área mais crítica, o Ensino Médio, (SILVA, 2018).

Como é do conhecimento dos docentes que lecionam nesse nível de ensino, sabe-se que os alunos chegam sem dominar as operações de divisão e interpretação de fatos básicos da Matemática. Com isso, um dos assuntos em que os discentes apresentam muita dificuldade é o que se refere à trigonometria, assunto que se inicia no último ano do Ensino Fundamental, com o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo, e no segundo ano do Ensino Médio, exatamente, os anos em que o Sistema de avaliação da educação básica - SAEB aponta maiores problemas na aprendizagem em Matemática, como mostra a Figura 1.

Nessa perspectiva, diante dos fatos, percebe-se a necessidade em desenvolver recursos didático-pedagógicos capazes de contribuir no ensino e na aprendizagem desse assunto. Sendo assim, surge a ideia da criação de uma ferramenta denominada de *Ciclo Trigonométrico Virtual (CTV)*, baseada no Ciclo Trigonométrico Manipulável (CTM), uma versão virtual do CTM, com a qual os usuários (alunos e Professores) poderão realizar atividades online que abordam aspectos teóricos e práticos do cotidiano, nos quais a Trigonometria se faz presente.

Essa ferramenta terá impacto no ensino-aprendizagem como um recurso didático-pedagógico a qual trará benefícios aos seus usuários, auxiliando-os nas etapas necessárias para obter êxitos no processo de ensinar e de aprender e ao mesmo tempo, observando um mecanismo que seja, agradável, atual e de interesse dos alunos, que é aprender fazendo e utilizando a tecnologia. Assim, ao criar o CTV, pretende-se além de facilitar o entendimento do conteúdo, motivá-los a estudar a Trigonometria de maneira prazerosa e com independência.

Com a criação e a utilização dessa ferramenta pretende-se iniciar um caminho

no sentido de desmistificar o senso comum difundido no Ensino Médio, ao que diz respeito à aprendizagem da Trigonometria considerada como um dos assuntos mais difíceis nesse nível de ensino. O CTV tem o propósito de conectar o aluno com uma Matemática voltada para a sua atual realidade.

De acordo com Cunha (2013), o fracasso na disciplina de Matemática está atrelado ao fato de os alunos estarem insatisfeitos como ela é desenvolvida no ambiente escolar, de maneira mecânica e desconectada com o cotidiano dos estudantes. Sendo assim, os professores voltam suas atenções para a Trigonometria, pois é um assunto importante do Ensino Básico, que aborda uma gama de situações da vida cotidiana do aluno, além de servir como pré-requisito para outros conhecimentos matemáticos, bem como para áreas afins, como a Física e a Geografia (CORDEIRO, 2008).

Oliveira (2006) corrobora com as ideias defendidas por Cordeiro (2008) no tocante à relevância dessa temática. Segundo o autor a Trigonometria é uma matéria extremamente importante no momento em que o aluno está estudando os conceitos da Geometria, da Física e de funções periódicas. Para ilustrar tal relevância Oliveira (2006) faz referência ao estudo de vetores e a decomposição de forças empregadas em um objeto que necessitam da aplicação do seno e cosseno.

Silva (2005) em sua dissertação de Mestrado, pesquisou a aprendizagem significativa da trigonometria no triângulo retângulo com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Nesse trabalho ficou evidente de que é possível construir uma aprendizagem significativa quando há uma correlação direta da teoria com as situações-problema ligadas às construções geométricas e aspectos reais de seu cotidiano.

No Brasil temos os **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)** que são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal que orientam a Educação, apesar de ter caráter não obrigatório, recomendam para o Ensino Médio em Matemática, enfatizar o ensino da Trigonometria no sentido de trabalhar as habilidades e competências voltadas para o cálculo de medidas inacessíveis e em situações-problema que estão relacionadas com as funções periódicas, conforme ratificada a seguir:

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus

gráficos. (...), o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 2000, p. 44 apud OLIVEIRA, 2015, p. 15-16).

Realizando a pesquisa para trabalhar o CTV, depara-se com a monografia de Oliveira (2015), em que trata do Ciclo Trigonométrico Manipulável (CTM), com o qual podemos fazer muitas analogias em termos comparativos para evidenciar as vantagens do CTV. Assim ficará claro os ganhos que terá em relação aos custos, aplicabilidade, praticidade em relação ao espaço-temporal e um ponto bastante positivo, o fato de o mesmo fazer o uso da tecnologia, aspecto bastante necessário nos dias atuais, para inclusive, atingir o interesse e a motivação dos estudantes em aprender.

Contudo, podemos nos colocar o seguinte questionamento: como elaborar uma ferramenta tecnológica e diagnosticar se a mesma realmente pode contribuir para melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Trigonometria?

Então o objetivo geral da presente pesquisa é propor a construção da ferramenta Ciclo Trigonométrico Virtual e, em seguida, fazer um estudo abrangendo, a utilização da ferramenta por parte dos alunos, a facilidade e os entraves que possam se apresentar durante o uso, a comparação da ferramenta relativamente ao Ciclo Trigonométrico Manipulável e, por fim, a obtenção de resultados que apontem no sentido de verificar se de fato a ferramenta facilita o processo de Ensino-aprendizagem da Trigonometria na Educação Básica, motivando os usuários através do uso da tecnologia.

Em decorrência do objetivo geral mencionado acima estabelece-se os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver a ferramenta *Ciclo Trigonométrico Virtual* em ambiente web;
- Disponibilizar videoaulas aos alunos do 2º ano do Ensino Médio do IFNMG Campus Montes Claros, Professores da rede pública de Ensino e acadêmicos do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática da Unimontes, participantes da pesquisa, abordando os aspectos teóricos e a utilização do *Ciclo Trigonométrico Virtual* envolvendo as seis razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente e suas relações com seus respectivos eixos;
- Observar a aceitação e o domínio da ferramenta pelos usuários colaboradores;

- Comparar a eficiência do aparelho do CTM e da ferramenta CTV como recursos didático-pedagógicos na resolução de problema de trigonometria em uma turma de 30 voluntários (alunos, professores e acadêmicos).

Diante destes objetivos, parte-se da hipótese de que a ferramenta CTV, contribui no processo ensino-aprendizagem da Trigonometria, por causa da sua eficiência tecnológica de permitir tanto o Professor quanto o aluno resolver problemas que envolvem esse objeto matemático.

Para tanto, afim de viabilizar o teste da hipótese, realiza-se uma pesquisa de finalidade básica estratégica, descritiva, exploratória com abordagem quanti-qualitativa, procedimento de pesquisa bibliográfica e de campo.

Esta pesquisa será apresentada em seis capítulos, sendo este o primeiro, denominado Introdução, em que se apresenta a justificativa, o tema, problema da pesquisa, o objetivo Geral, os objetivos específicos e a hipótese. Enquanto o segundo capítulo está subdividido em um histórico da Trigonometria, o uso de materiais virtuais nas aulas de Matemática e o Ensino de Trigonometria na Educação Básica. Já no terceiro capítulo, está apresentada a Metodologia utilizada na pesquisa, apontando o caminho percorrido para realização da investigação, o tipo de pesquisa abordado e as conjecturas metodológicas pensadas pelo autor.

O quarto capítulo aborda a criação da ferramenta do CTV e as atividades realizadas com os colaboradores da pesquisa, também uma página virtual que será o canal de comunicação com os colaboradores desta pesquisa. A construção da ferramenta do CTV e das disponibilidades das videoaulas para revisitação teórica e prática do *Ciclo Trigonométrico Virtual* e os procedimentos em que se submeteu a ferramenta para verificar sua eficiência.

No quinto capítulo encontram-se os resultados da pesquisa. Onde estão expostos, interpretados e analisados os dados coletados através de questionários aplicados presencial e virtualmente, após uso e resolução de problemas no CTM e no CTV. Finalmente no sexto capítulo apresentam-se as considerações finais, onde o autor conclui-se o trabalho realizado em conformidade com o atendimento dos objetivos, responder a questão da pesquisa, assim como a validação da hipótese indicando a eficácia da ferramenta CTV em permitir resolver problemas sobre a Trigonometria sobrepondo à eficiência do aparelho do CTM.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresentará importantes ideias para a compreensão do trabalho. Parte-se de uma abordagem histórica da Trigonometria, elencando motivações, contribuições e estudiosos que colaboraram para esse campo de conhecimento. Com isso, será possível notar que problemas práticos foram cruciais para a elaboração da Trigonometria, o que permite inferir que, do mesmo modo, o contexto em que os estudantes estão e os seus problemas práticos devem ser parte do processo de ensinar, algo inclusive sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática. Também serão apresentadas ideias acerca das Tecnologias de Informação e Comunicação, tão presentes hoje em nossa sociedade e que precisam aparecer, cada vez mais, nos ambientes educacionais em busca de maior motivação dos estudantes. Assim como no passado diversos instrumentos foram construídos com os recursos disponíveis, como os relógios de Sol, hoje os professores precisam utilizar das tecnologias para ensinar.

Portanto, as partes deste Referencial Teórico são: a primeira traz um histórico da Trigonometria acerca do seu surgimento; a segunda refere-se ao uso de materiais virtuais no ensino de Matemática; e, finalmente, a terceira parte faz menção ao Ensino de Trigonometria.

### 2.1 Como Surgiu a Trigonometria

O estudo do aparecimento de novos conceitos é importante, em particular, para os Professores de Matemática, que precisam entender “o como” e “o porquê”, ou seja, o que provocou o aparecimento do novo conceito e quais são as consequências do seu aparecimento: o que será alterado e em que escala. Além disso, uma análise histórica colabora para evidenciar as dificuldades para a construção do raciocínio lógico-matemático e, portanto, as dificuldades dos estudantes. Afinal, o entendimento da própria história e evolução da Matemática pode ser ampliado a partir da análise dos erros e embaraços dos estudantes (SIERPINSKA, 1985; VERGNAUD, 1994).

A palavra trigonometria tem origem na Grécia da palavra trigono (triângulo) + metro (medida). Etimologicamente, significa medida de triângulos, (LIMA et al., 2006).

Na possibilidade de se considerar a Trigonometria como conceito estudado atualmente, então a sua origem provem do século XVII. Mas, se levar em conta o termo Trigonometria, para dar significado a Geometria ligada à Astronomia, as origens remontarão aos trabalhos de Hiparco, ocorrido no Século II a.C., apesar de existirem traços anteriores de seu uso. Contudo, conforme explicado acima, para significar no sentido literal “medidas do triângulo”, aí, diremos que a sua origem se deu no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Diante destes fatos, não é possível afirmar com precisão a origem da Trigonometria. Como acontece no geral, quando o assunto é Matemática, a Trigonometria surgiu por muitos estudiosos, vindo à tona principalmente, devido aos problemas gerados pela astronomia, agrimensura e navegação, por volta do século IV ou V a.C.. Logo, temos os egípcios e os babilônios, povos que deram importantes contribuições para a descoberta e avanços desse conhecimento matemático, que foi e continua sendo muito importante na atualidade (MENDES, 2009).

Os primeiros sinais sobre Trigonometria apareceram no Egito e também na Babilônia, com os cálculos envolvendo triângulos semelhantes. Observa-se pelo Papiro Rhind<sup>1</sup> (Figura 2), de origem egípcia, onde há vários problemas que se relacionam com a cotangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide, conforme mencionado pelo autor, indicado no ângulo OMV, da Figura 3. Na construção das pirâmides os egípcios mediam a inclinação de uma face, com o que eles conceituavam de *seqt*, que representava a razão entre o afastamento horizontal (OM) e a elevação vertical (OV), assim, tem-se  $seqt = \frac{O.M}{O.V} = cotangente$  do ângulo OMV.

---

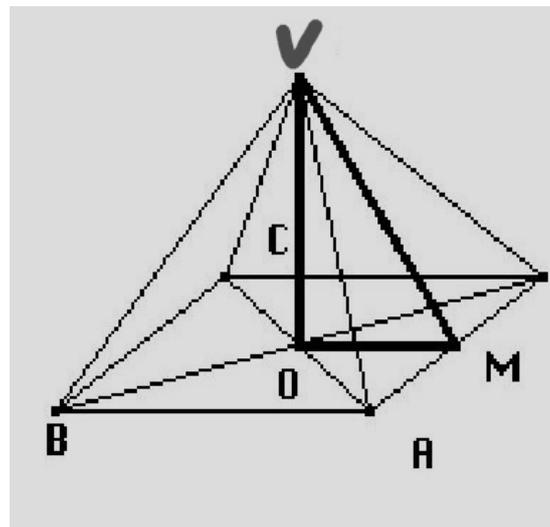
<sup>1</sup> O papiro de Rhind é um longo papiro de origem egípcia datado de cerca de 1650 a. C.. Tem aproximadamente 5,5 m de comprimento e 0,32 m de largura. Contém 85 problemas ligados à Aritmética e à Geometria, com as respectivas soluções.

Figura 2- Papiro Rhind, Museu de Londres



Fonte: MENDES (2010)

Figura 3- O seqt egípcio



Fonte: O autor

Ainda no Egito apareceu (1500 a.C.) a ideia de relógios de sol, que tinha a relação da sombra projetada por uma vara na posição vertical, comparando seus comprimentos com horas do dia. Séculos depois essa conjuntura leva às funções tangente e cotangente. Assim, a necessidade da medição de distâncias e alturas motivaram o aparecimento da tangente e da cotangente.

Os primeiros registros trigonométricos na Babilônia foram observados em uma notável tábua de secantes cuneiforme **Plimpton 322 (figura 4)**, é uma tábua construída pelos babilônios, contendo problemas envolvendo secantes (1900 a 1600 a.C.).

Figura 4– Plimpton 322, Universidade de Columbia



Fonte: MENDES (2010)

Conforme visto, os babilônios tiveram destaque no desenvolvimento da Astronomia, como por exemplo na construção de calendário voltado à astrologia, ainda no século 28 a.C. Além de construírem em 747 a.C uma tábua de eclipses

lunares, essas contribuições estão presentes na atualidade (SMITH, 1958)

Por vezes pensa-se que a origem da Trigonometria está exclusivamente ligada a resolução de situações de medição de terrenos ou determinação de medidas sobre a superfície da terra.

O seu desenvolvimento como ciência exata veio a exigir medições e cálculos de grande precisão. Contudo, a importância da Trigonometria não se limita apenas à determinação de medidas de triângulo. No âmbito do estudo das funções, ela pode servir de modelo para a representação de fenômenos periódicos. Os fenômenos periódicos são aqueles que apresentam algum tipo de ciclo ou repetição temporal, como, por exemplo, o movimento dos planetas, as estações do ano, os ciclos biológicos, etc. (GRANJA, 2006, p.134-135).

O autor deixa claro que o ensino da Trigonometria é muito importante. Ainda de acordo com Granja (2006), conhecer bem a Trigonometria a partir do Ensino Médio é essencial para que o aluno tenha sucesso em sua progressão nos estudos. O estudante que domina esse tema desempenha melhor as suas habilidades quando no nível superior, uma vez que esse conhecimento não se restringe em medições de distâncias, mas em várias outras áreas de conhecimentos inerentes ao seu cotidiano, tais como fenômenos periódicos e nos movimentos circulatorios.

Fica evidente, diante do exposto acima que a Trigonometria não foi um fato isolado, pois várias civilizações deram suas contribuições para com o seu desenvolvimento, como os povos indianos, europeus e muçulmanos. Na busca em solucionar problemas advindos da astronomia, agrimensura e navegação, esses povos impulsionaram o desenvolvimento da Trigonometria inclusive chegando a construir as primeiras tabelas trigonométricas. Assim, o estudo da Trigonometria estava voltado para a Trigonometria esférica, a qual estuda o triângulo na superfície de uma esfera, com isso logo viram as necessidades de desenvolver a Trigonometria plana.

### **2.1.1 A contribuição grega para a trigonometria**

Muito são os nomes de personalidades relevantes quando se trata da contribuição grega para o advento da trigonometria, tais como Aristarco de Samos (320 a.C - 250 a.C.), Hiparco de Neceia (180 - 125 a.C.), Eratostenes e Ptolomeu (90 –

168 a.C.). Esse primeiro através de seus trabalhos sobre medidas astronômicas vem motivar Hiparco de Neceia, o qual é chamado o “Pai da Trigonometria,” pelos trabalhos realizados na segunda metade do século II a.C.,. Trabalhos estes que só ficaram conhecidos por citações em trabalhos posteriores de outros matemáticos. Dentre os trabalhos principais tem-se, em especial a primeira tabela trigonométrica, que tratava de arcos e ângulos em um tratado de doze livros e seu pioneirismo na astronomia científica, Boyer (1958).

Tudo leva a acreditar que Hiparco tenha sido um dos astrônomos de maior relevância da antiguidade. Referindo-se as suas contribuições em astronomia, EVES (2004) menciona as principais contribuições à astronomia atribuídas a ele tais como: a organização de dados empíricos advindos da Babilônia; a construção de um catálogo estelar; o aparecimento de algumas constantes astronômicas, como a duração do mês e do ano, a dimensão da Lua e a inclinação da eclíptica e também a descoberta de um fenômeno astronômico que marca o início da primavera e do outono, chamado de equinócio.

Dando continuidade às contribuições de Hiparco surge Menelau de Alexandria, um notável astrônomo e matemático grego (70 - 130 d.C.), que atuava principalmente na defesa da Geometria Clássica. Foi atribuído a ele, por Teon de Alexandria (Sec. IV), um trabalho envolvendo as cordas de um círculo, isto foi retratado em livros e, juntamente a muitos outros ficaram perdidos (COSTA, 1997). Porém, para o bem da comunidade Matemática um tratado de sua autoria chamado *Sphaerica*, publicado em três livros, foi preservado em uma versão árabe. No campo da Trigonometria esférica esse é conhecido como o mais antigo.

No Livro I desse tratado Menelau estabeleceu uma base para triângulos esféricos (...). O segundo livro de *Sphaerica* descreve a aplicação da geometria esférica aos fenômenos astronômicos e é de pouco interesse matemático. O Livro III, o último, contém o bem conhecido “teorema de Menelau” como parte do que é essencialmente trigonometria esférica na forma grega. (BOYER, 1974, p. 119).

Na Grécia tem-se grandes matemáticos que mostram a ligação da Trigonometria com a Geometria. Entre eles são notórios Thales de Mileto (625 – 546 a. C.), que estudou a semelhança que fundamenta a Trigonometria e, Pitágoras (570

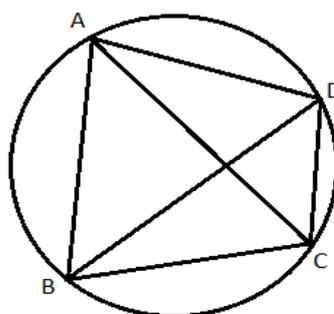
– 495 a. C.) do qual presume-se que seja ele o primeiro a demonstrar o Teorema que leva o seu nome, o famoso Teorema de Pitágoras: que diz que *a área do quadrado cujo lado tem a mesma medida da hipotenusa é igual à soma das áreas de outros dois quadrados que têm lados com medidas iguais às dos catetos desse mesmo triângulo retângulo.*

Porém, em se tratando de obra sobre a Trigonometria da antiguidade, temos a *Mathematiki Syntaxi*, escrita por Cláudio Ptolomeu (100 - 178 d.C.), é a mais eminente e significativa, composta por treze livros. De acordo com EVES (2004, P. 204), a obra de Ptolomeu “Síntese Matemática”, é uma referência sobre astronomia, chegando a ser tratada de Almagesto (“o maior”) pelos árabes, sendo assim, conhecida até hoje.

O Almagesto descreve matematicamente de forma completa o modelo grego Geocêntrico, que considerava a Terra no centro do universo, Teoria refutada por Copérnico, no sec. XV, pela Teoria Heliocêntrica (o sol no centro do universo). Ptolomeu em seu primeiro livro já tratou da trigonometria, constante dos capítulos 10 e 11, sendo que nesse último aborda a tabela dos senos (de cordas). ROQUE (2012).

No Almagesto consta também, além do que foi mencionado, uma tabela com ângulo de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  com incremento de meio em meio grau, que a faz mais completa que a de Hiparco; traz também o uso da base 60, com a circunferência dividida em  $360^\circ$  e raio dividido em 60 partes, ele também nos trouxe um resultado muito importante que ficou conhecido como o Teorema que levou o seu nome "Teorema de Ptolomeu" que se anunciava assim: "*Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais*". Veja figura 5.

Figura 5- Teorema de Ptolomeu

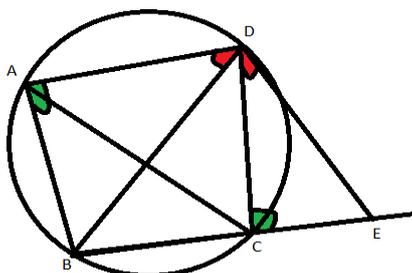


Fonte: O autor

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

A demonstração deste Teorema pode ser feita traçando o segmento BE de maneira que os ângulos CDE e ADB sejam congruentes (cf. Figura 6) e devido o quadrilátero ABCD ser inscritível temos os ângulos BAD e DCE também congruentes, com a semelhança desses triângulos demonstra-se o teorema.

Figura 6- Visualização dos triângulos semelhantes



Fonte: o autor

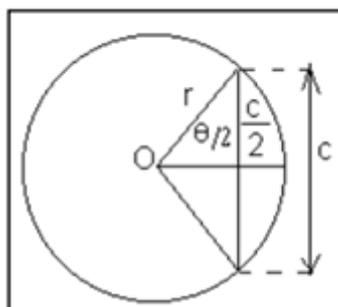
Operando com as cordas dos arcos, conforme o resultado citado acima, o autor deixa claros que, usando as funções seno e cosseno, consegue chegar a um resultado que conhecemos hoje pela fórmula da soma e da diferença de dois arcos. Ou seja,  $\text{sen}(a + b)$  e  $\text{sen}(a - b)$ , esta última foi utilizada por ele na construção da tabela trigonométrica.

Outra maneira de se usar a corda feita por Ptolomeu, foi a função seno do arco metade chegando na seguinte relação  $\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi)$ . Com as fórmulas citadas anteriormente, Ptolomeu teria um mecanismo para uma construção mais refinada de uma tabela de cordas. Chegamos à conclusão de que o Almagesto foi primordial em deixar claro que uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais era perfeitamente possível pela Matemática, pois ele desenvolveu, como escreveu Aaboe (1984, p. 128 - 129):

"[...] não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria. Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a ideia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer previsões confiáveis, é possível e desejável".

Das descobertas referentes à Trigonometria, encontra-se a construção de uma tabela de cordas, referindo-se aos senos, a qual possuía consecutivamente vários arcos de circunferência, que ao usar na Astronomia, teria que dobrar o arco antes da aplicação da função corda. Assim, parte-se do dobro do arco, visto que mesmo que se saiba que este não corresponde ao seno, é possível encontrar o valor almejado, apenas calculando o seno da metade deste arco, ou seja, há relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente. O seno de um ângulo apareceu pela primeira vez no trabalho dos hindus, pelo matemático Aryabhata aproximadamente, no ano 500 d.C., que implementou tabelas em que a relação usada era entre a metade da corda e a metade do arco central correspondente, que eram as tabelas de senos, chamadas por eles de Jiva, com isso ficou evidenciado um triângulo retângulo na circunferência como se observa na Figura 7.

Figura 7- O “Jiva” Hindu



Fonte: adaptado de BOYER (1996)

A origem da palavra seno, provém de uma confusão na tradução árabe para o latim, confundindo o termo jiba (corda) com jaib (dobra, cavidade, sinus em latim). (LIMA, 2006, p. 240). Devido Fibonacci fazer o uso do termo sinus rectus arcus, rapidamente se propagou o uso universal de seno.

Quanto a origem da palavra cosseno, esta surgiu no sec. XVII, segundo Lima et al. (2006), “(...), a partir da definição, que o cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento e vice-versa. Daí a palavra “cosseno” (seno do complemento)”. Conceitualmente, essas razões trigonométricas tiveram suas origens

nos problemas ligados à Astronomia, ao passo que tudo indica que a tangente foi definida com objetivo de solucionar problemas envolvendo distâncias e alturas inacessíveis.

### 2.1.2 A Trigonometria na Índia e nos países árabes

Os indianos usaram a Trigonometria, principalmente para solucionar problemas astronômicos. Pode ser observado em BOYER (1974, p. 157) que os indianos introduziram um novo conceito equiparado à função seno, que foi utilizado com êxito na substituição da tabela de cordas usadas pelos gregos. O Surya Siddhântas, que significa Sistema do Sol, redigido, aproximadamente do ano de 400 d, C., este registro é tido como o único que se tem notícia de ter-se mantido intacto por inteiro. Pode-se destacar como uma importante contribuição do Surya, a abertura de novas perspectivas para a Trigonometria, por tomar caminho diferente ao seguido por Ptolomeu, o qual relacionava as cordas de um círculo com o ângulo central correspondente.

Os hindus, ao estudar as funções trigonométricas, o uso do que chamaram de meia-corda, que mais tarde ficou conhecido como o seno hindu. Segundo Morey (2003, p. 19-20),

[...] para os indianos as funções trigonométricas ainda eram definidas como comprimento de um segmento e não como uma relação entre dois comprimentos, como é o caso as funções trigonométricas modernas. Então quando dizemos seno indiano estamos nos referindo ao comprimento da meia-corda do ângulo central.

A função seno foi incorporada na trigonometria árabe vinda da Índia. Assim, os árabes com muita notoriedade vêm contribuir sistematicamente para a trigonometria em relação à influência helenística, babilônica e indiana. Até então existiam dois tipos de trigonometria, uma baseada na geometria das semicordas que foi a invenção indiana e a outra baseando na geometria das cordas abordada no Almagesto de Ptolomeu.

Porém, de acordo com Mendes (2009, p. 17-18), as razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente) foram introduzidas pelos árabes, embora, as funções secante e cossecante raramente aparecem nas

tabelas trigonométrica existentes. Os árabes utilizaram um círculo unitário na definição do seno, utilizada pelos indianos na astronomia, compatível com a forma usada nos dias atuais, ademais, compreenderam que os cálculos trigonométricos, aplicados à astronomia e/ou à geometria, necessitavam de tabelas com mais precisão.

Logo, deram início a construção de tabelas com intervalos cada vez menores, o Al-Hasib (c. 850) foi o primeiro a apresentar uma tabela contendo senos e tangentes com iteração de  $1^\circ$  e a partir daí, sempre na perspectiva de redução dos intervalos, vários procedimentos de interpolação foram experimentados semelhante ao utilizado por Ptolomeu em seu Almagesto. Entretanto, o árabe Al-Kashi calculou o seno de  $1^\circ$  sem utilizar os procedimentos empregados até então, apenas usando os conhecimentos que os matemáticos árabes possuíam há pelo menos três séculos, os quais, consideravam: dado um ângulo  $\theta$ ,  $\text{sen}3\theta = 3.\text{sen}\theta - 4.\text{sen}^3\theta$  e  $\text{sen}3^\circ = 0,013083989$ . (MOREY, 2003)

É comum na história da Matemática se pensar a desenvolver um determinado conhecimento, afim de aprimorar, evoluir ou auxiliar no desenvolvimento de outras áreas. Assim a Trigonometria surge como uma ferramenta para contribuir com o desenvolvimento da Astronomia, Agrimensura e navegação, semelhante ao que ocorreu com o advento do Cálculo Infinitesimal, com Isaac Newton. No caso da história da Trigonometria o que se nota é o resultado da dedicação de vários povos, civilizações ou pessoas, cada um contribuindo de sua maneira em direção à algo, com o propósito de responder uma pergunta, solucionar um problema, ou seja, contribuir com algum benefício que possa melhorar a vida das pessoas.

## **2.2 O Uso de Materiais Virtuais no Ensino de Matemática**

Com a visão histórica apresentada, é possível perceber que foram os problemas práticos que motivaram os estudos sobre a Trigonometria, sobretudo, os problemas relacionados à Astronomia, à Agrimensura e à Navegação. Ou seja, os conceitos desenvolvidos estiveram relacionados à realidade das pessoas que pesquisavam o assunto. Por esse motivo, deve-se enfatizar a necessidade de trazer as ideias da Matemática – neste caso, da Trigonometria – para o contexto em que os estudantes estão, o que facilita a assimilação do conteúdo e os motiva a estudar, uma

vez que a utilidade dos conceitos fica explícita. Por fim, fazer uso de recursos tecnológicos é bastante importante porque é parte da vida dos estudantes e é algo que os atrai.

Contudo, para que a aprendizagem significativa aconteça, é necessário que o tema a ser estudado seja igualmente significativo para os estudantes. De acordo com Ausubel et al (1980), é preciso que o estudante esteja disposto a aprender e, isso, implica a existência de elementos motivacionais, logo uma estratégia eficaz nesse sentido é fazer uma boa escolha dos recursos didáticos, afinados com a realidade dos alunos, que na atualidade deve passar pelo uso da tecnologia digital. Percebe-se em tudo a presença da tecnologia e seu uso por meio de *computadores, tablets, smartphones, etc.*, recursos que estão ao alcance das pessoas que ficam articuladas e conectadas o tempo todo, em especial, a comunidade estudantil. O que é possível observar é que muitas escolas, apesar de possuírem laboratórios de informática e serem conectadas via *internet*, atendendo alunos que pertencem à geração tecnológica, não acompanham tal evolução. Mesmo porque o que é possível constatar, como regra geral, são professores insistindo na forma de aula com quadro negro e giz (BRITO, 2008) ou similares, como lousa e pincel, sendo por falta de preparo e/ou capacitação ou até mesmo apoio pedagógico no seu ambiente de trabalho.

Até existem e são bem utilizados materiais manipulativos, principalmente na educação infantil e no Ensino Fundamental I e isso é importante pois acredita-se que essa metodologia é facilitadora da aprendizagem, uma vez que ao ter o contato manual com o objeto, o estudante tem uma possibilidade maior de observar aspectos importantes que colaborarão para a formação de seu conhecimento sobre o objeto estudado (CALDEIRA, 2009).

O que não existe nessa mesma proporção é o uso de Materiais Virtuais, em especial nas aulas de Matemática, o que dificulta o ensino-aprendizagem dessa disciplina; isto é, não são aproveitados recursos que há muito tempo poderiam estar disponíveis para auxiliar na tarefa de ensinar e/ou aprender. De fato, o Professor Netto(2001), há quase duas décadas já nos alertava em seu livro sobre as mídias educativa, anunciando as transformações dos meios e mostrando a importância do emprego dos recursos tecnológicos na Educação.

Nos dias atuais, vive-se a 4ª Revolução Industrial, que vem alterando, como jamais visto, a forma de se viver, trabalhar e se relacionar. É preciso algum esforço para se ver inserido em um mundo com possibilidades ilimitadas de bilhões de pessoas conectadas, principalmente por dispositivos móveis, tendo, com isso, um poder de processamento, armazenamento e, principalmente, acesso ao conhecimento de forma extremamente facilitada. Essa é a Revolução Industrial 4.0. (SCHWAB, 2019).

Nesse contexto, as máquinas usam auto-otimização, auto-confirmação e até mesmo inteligência artificial para completar tarefas complexas, a fim de proporcionar eficiência de custo muito superiores e bens ou serviços de melhor qualidade (BAHRIN et al., 2016).

Partindo do pressuposto de que o ser humano deva estar preparado para ocupar o seu lugar nesse ambiente proposto pela Revolução Tecnológica, exige-se, então, que a educação esteja nele inserida, assim, juntamente com a revolução 4.0 nasce também a educação 4.0 (E4), a qual requer uma escola que tenha uma metodologia ativa, inovadora dentro das novas tecnologias, ou seja, é necessário inserir a escola dentro do mundo atual.

Entende-se por metodologia ativa a que interage ensino online e offline: o conteúdo é estudado em casa e, na escola, são realizadas discussões (diálogos), para esclarecer dúvidas e compartilhar o conhecimento. Isso já é realidade em vários países, segundo informações difundida no Fórum Mundial de Incheon. No painel temático sobre a criação de uma agenda educacional pós-2015, há o exemplo da Coreia do Sul, em que as escolas já estão trocando todo o seu material didático por livros digitais. Assim, os estudantes podem estudar em qualquer lugar e hora, indo para a escola apenas para validar e compartilhar o conhecimento. Essa modalidade de educação já está em debate aqui no Brasil, sendo assim, mais do que nunca o uso da tecnologia no cotidiano da sala de aula é imprescindível, afim de adaptar à realidade do mundo virtual para estimular e motivar o interesse dos estudantes. Nesse aspecto o CTV tem muito a contribuir, proporcionando uma relação professor/aluno com maior proximidade, cumplicidade e independência na realização de suas tarefas.

Segundo Netto (2001, P. 38), “[...] da televisão, rádio e informática educativa, ocorreu um refinamento inegável nos procedimentos de produção de materiais para

fins de ensino, que gerou nova linguagem, (...), novas concepções, novas técnicas e novos instrumentos de avaliação". Os apontamentos do autor, corroboram para um cenário educacional hodierno que demonstra interesse pelas novas tecnologias, como os *smartphones* e *tablets* conectados à *internet*, que provocam constantes mudanças e inovações que interferem na escolha do material didático.

Como aconteceu com o ensino à distância (MEC, 2007a, 2007b), há a concepção de que o material didático pedagógico deverá ser escolhido de acordo com o projeto político-pedagógico de cada curso e, além disso, deve haver integração e interatividade: "[...] entre materiais impressos, radiofônicos, televisivos, de informática, de videoconferências e teleconferências, dentre outros, sempre na perspectiva da construção do conhecimento e favorecendo a interação entre os múltiplos atores" (MEC, 2007a, p. 14). Essa recomendação deverá ser expandida a toda a educação básica nos moldes presenciais, pois o que se deve enfatizar é a "adequação", da realidade dos estudantes nas salas de aula e seu cotidiano fora da escola, e essa adaptação perpassa pelo uso da tecnologia em materiais didáticos-pedagógicos, o que acarreta em investir e envolver mais materiais virtuais em aulas, em especial, nas aulas de Matemática.

Pode-se constatar que "diante do contexto atual de mudanças, marcado pela presença das TIC, é necessário estar atentos aos alardeados processos de modernização do sistema educacional pautados no simples uso das ditas "novas" tecnologias, (...)" (BONILLA, 2005, p. 2). Assim, o autor nos mostra com muita clareza e objetividade o quão é imprescindível fazer uso da tecnologia como recurso no ensino e aprendizagem na educação atual, uma vez que a tendência é que cada vez mais a tecnologia esteja presente no cotidiano dos autores envolvidos nesse processo, de ensinar e de aprender. Nesse processo estão presentes diversas discussões que giram em torno da Trigonometria enquanto objeto do saber, que discorreremos a seguir.

### **2.3 O Ensino-aprendizagem de Trigonometria**

Como aprender e como ensinar Trigonometria, é um assunto sempre presente nas discussões dos agentes envolvidos com a Educação Matemática, sendo publicado em livros e em textos científicos, abordando principalmente a respeito das

dificuldades no âmbito do ensino-aprendizagem. Segundo Oliveira (2006), ao observar uma turma da segunda série do Ensino Médio, em um trabalho de pesquisa para o mestrado, aparecem dificuldades que vão desde o espaço físico, passando pelo uso de materiais didáticos-pedagógicos, nos moldes de um ensino convencional até os dilemas referentes à profissão docente.

Em alusão ao autor citado acima, pode-se constatar algumas propostas que poderão vir a sanar as dificuldades do ensino, tais como conhecer os estudantes através de diálogos e avaliação diagnóstica e elaborar materiais didático direcionados à turma, sendo que, ao preparar as aulas, deve-se abordar mecanismos e habilidades as quais os estudantes não têm domínio. Enfatiza-se aí um fato primordial, que é o docente ter conhecimento dos recursos que a escola possui, assim, eles serão utilizados com mais eficiência.

Portanto, os professores, ao tomarem conhecimento dos recursos didáticos disponíveis para trabalhar no ensino de objetos de saberes, em particular matemáticos, eles começam a aderir a uma tendência que, gradualmente tem sido possível e que têm muita aceitação por parte dos estudantes: os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVA), pois os recursos multimídia e ferramenta de ensino que envolvem aparelhos tecnológicos, como os computadores, principalmente se estão *online*, propiciam uma aprendizagem mais eficiente e contribuem para uma maior interação entre aluno, Professor e instituição, em que todos são beneficiados. Um ponto bastante positivo é que há mudança de paradigmas, como o Professor deixa de ser o ponto central no processo educativo, enquanto o aluno ganha protagonismo em sua aprendizagem. Adicionando-se a isso, tem-se um aluno mais motivado e conseqüentemente aulas mais dinâmicas. Segundo LITWIN(2001), o uso dos AVA possibilitam a troca de dados, sons e imagens, através da tecnologia em tempo real, proporcionando assim maior interatividade entre professor e aluno, o que só fortalece a relação Professor/aluno.

Nesse sentido, tem-se o trabalho de mestrado de Fernandes (2010) com a finalidade de construir uma aprendizagem significativa em relação aos princípios básicos da Trigonometria na circunferência, fundamentados em conceitos da teoria de Ausubel(1980), que apontam importância de elementos motivacionais no ensino. Nessa pesquisa, o autor fez uso de duas abordagens para construir o ciclo

trigonométrico, sendo um utilizando lápis, régua e transferidor e a outra utilizando o *software* Geogebra. A conclusão relatada pela pesquisa foi que ambos os métodos foram importantes na aprendizagem dos pesquisados, porém o *software* Geogebra proporcionou aos estudantes uma correlação com uma aprendizagem significativa. Isto é, conseguiram visualizar uma relação direta entre as novas informações com as já adquiridas.

Nessa perspectiva fica claro que fazer o uso de materiais virtuais no ensino da Trigonometria é bastante positivo. Essa informação corrobora com o que dizem Borba e Penteado (2001) ao destacarem as Tecnologias Digitais (TD) como um meio eficiente e eficaz na superação das práticas pedagógicas tradicionais por serem mais atrativas e com vastos recursos disponíveis na aplicação de tabelas, gráficos, vídeos e tantos outros.

Mas, infelizmente não há registro de muitos usos desses materiais no ensino da Trigonometria, segundo Cassol (2012), que na defesa de sua dissertação fez uma investigação estatística observando dissertações e teses brasileiras da última década que tinham como tema as tecnologias no ensino e na aprendizagem da Trigonometria. O resultado foi que a autora não encontrou nenhuma tese com o tema em questão, restando, então, fazer o trabalho proposto somente com dissertações, em que apenas sete foram analisadas. Dessa análise observou-se que havia um interesse em especial de voltar o uso das TD para o ensino-aprendizagem, visto que todos utilizaram *Softwares* com a finalidade de facilitar o ensino-aprendizagem. Dessas dissertações, seis lançaram mão do Geogebra para ensinar a Trigonometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) constam em sua organização a área de Matemática, abordando o conhecimento científico-tecnológico e a vida social e produtiva. Essa articulação se deve ao fato de estarem envolvidas nesse campo de conhecimento processos naturais ou tecnológicos.

Quanto aos PCN, como o próprio nome sugere, se tratam de parâmetros e, portanto, não têm a pretensão de definir especificamente conteúdos que os docentes deverão trabalhar em suas aulas, apesar de apontarem diretrizes importantes para a formação do estudante, como pode-se conferir em (BRASIL, 1998, p. 45).

Compreender os conceitos, procedimentais e estratégias matemáticas que permitam ao aluno desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral[...]. Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação [...]

Observa-se nos PCN do Ensino Fundamental II uma ênfase no tratamento dos assuntos referentes à semelhança de figuras planas ao aplicar o Teorema de Tales e o Teorema de Pitágoras, assuntos que são base para o estudo da trigonometria.

Já no Ensino Médio os PCN de Matemática orientam que o Ensino da trigonometria deve ser voltado a situações do cotidiano, sem algebrismo, com as identidades trigonométricas. Em conformidade com os referidos documentos, a aplicação deverá estar voltada para resolver problemas envolvendo a medição de distâncias inacessíveis e em situações de fenômenos periódicos.

Ocorre que, o aluno, ao entrar em contato com a Trigonometria, em regra geral, é apresentado a ele, na maioria das vezes, de maneira desconectada da realidade, abusando do algebrismo nas atividades trigonométricas, deixando em segundo plano a exploração das habilidades e competências que os PCN recomendam, resolver problemas do cotidiano do aluno, ou seja, aplicado a situações reais, abordando situações para medir distâncias inacessíveis e na modelagem de fenômenos periódicos.

### **3 PROPOSTA METODOLÓGICA**

Este estudo tem por finalidade realizar uma pesquisa aplicada, uma vez que utilizou conhecimento da pesquisa básica para resolver problemas.

Para um melhor tratamento dos objetivos e melhor apreciação desta pesquisa, observou-se que ela é classificada como pesquisa exploratória.

A pesquisa exploratória segundo Prodanov e Freitas (2013) tem como objetivo principal oferecer mais informações sobre os assuntos investigados, delimitando assim, o tema da pesquisa.

Detectou-se também a necessidade da pesquisa bibliográfica no momento em que se fez uso de materiais já elaborados: livros, artigos científicos, revistas, documentos eletrônicos na busca e alocação de conhecimento sobre o ciclo

trigonométrico virtual como nova forma de ensinar e aprender Trigonometria, correlacionando tal conhecimento com abordagens já trabalhadas por outros autores.

Essa pesquisa foi dividida em duas etapas: a primeira realizou-se uma oficina com o material do CTM, com grupo de trinta participantes, sendo dezenove estudantes da segunda série do ensino médio; cinco acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da UNIMONTES – Campus Darcy Ribeiro que atuam como docentes e tenham trabalhado ou estejam trabalhando o conteúdo de Trigonometria e seis professores da Educação Básica que tenham experiência em trabalhar o ciclo trigonométrico.

A abordagem desta primeira parte foi similar ao trabalho realizado em OLIVEIRA (2015), ou seja, os participantes fizeram uso do material do CTM na realização das atividades recomendadas.

Na segunda parte ocorreu a realização de um minicurso 100% virtual, onde houve a criação de uma página virtual no Google Classroom, o canal de comunicação entre os colaboradores e o autor. Nesta página foram disponibilizados os links das videoaulas hospedadas no canal do Youtube, criado para este fim, estas videoaulas trataram-se da exposição teórica do tema, da apresentação da Ferramenta do CTV e resolução de exemplos fazendo o uso da mesma. Na página, ainda ficaram disponíveis as listas de atividades para serem resolvidas pelos participantes da pesquisa, após assistirem e entender a utilização do CTV.

Depois de muitas discussões: trocas de ideias, críticas, sugestões e ajustes na ferramenta foi encerrada esta etapa com o preenchimento dos questionários por cada um desses subgrupos (alunos x professores/acadêmicos). Com a finalidade de haver uma comparação mais fidedigna entre o aparelho CTM e a ferramenta CTV quanto à eficiência de resolver problemas de trigonometria, estas etapas foram realizadas com os mesmos participantes e as mesmas atividades. Foram observados também, em ambas as modalidades de aprendizagem, quanto aos quesitos motivacional e a aceitação e domínio no uso da tecnologia.

Esta segunda parte foi realizada de forma virtual, portanto, não havendo a necessidade de um espaço físico único e horário rígido para a realização das atividades e verificação da aprendizagem; aspecto importante e que difere o CTM da ferramenta CTV, sendo necessário apenas um dispositivo conectado na internet e um navegador.

Nessa etapa final aconteceu a pesquisa-ação, uma vez que houve o

envolvimento dos participantes e do pesquisador, tendo assim um caráter quanti-qualitativo. Essa abordagem foi possível, devido à natureza da metodologia que está inteiramente aliada à tecnologia, fazendo o uso também de entrevistas por meio de questionários com a finalidade de evidenciar o alcance da aprendizagem, visando aspectos importantes no tocante à facilidade, prazer na realização das atividades e otimização do tempo e espaço. Além de um ambiente propício ao mundo da pesquisa, através da conexão com a internet de maneira rápida e abrangente.

Segundo (TERENCE e FILHO, 2006), o fato de usar métodos quantitativos e qualitativos, mesmo levando em consideração suas especificidades, não são excludentes, pois é perfeitamente possível usá-los de forma integrada, possibilitando assim um melhor resultado à luz de uma gama maior de características. Evidenciando assim, um lado positivo da pesquisa-ação, no momento em que possibilita, mais que isso, promove uma interação entre as partes, pesquisados e pesquisador.

### **3.1. Participantes da Pesquisa**

Os participantes desta pesquisa, foram escolhidos pensando na diversidade de um público que está diretamente relacionado ao nosso objeto de estudo. Sendo assim, foram selecionados de cada universo, em caráter experimental: cinco alunos da turma do segundo ano do Curso Técnico em Informática e quatorze alunos do Curso Técnico em Química, ambos Integrados ao Ensino Médio, do INSTITUTO FEDERAL DO NORTE DE MINAS GERAIS (IFNMG) do Campus Montes Claros, sendo a turma do segundo ano de Química tendo o autor como professor no decorrente ano; cinco acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UNIMONTES – Campus Darcy Ribeiro e finalmente seis Professores de Matemática da educação básica, que costumeiramente trata do tema em questão na sua rotina profissional.

Portanto, temos representantes legítimos dos principais aspectos no que se refere ao Ensino, aí representado diretamente pelos docentes e pelos acadêmicos, e a aprendizagem representada pelos estudantes do Ensino Médio e pelos acadêmicos. Essa divisão ilustrativa dos representantes se deve principalmente levando em conta o substancial que cada um deverá desempenhar de acordo com seus objetivos. Uma vez que é do conhecimento de todos que no processo de Ensino-aprendizagem todas as partes envolvidas aprendem e também ensinam.

### 3.2. Instrumentos da Pesquisa

Inicialmente, foi confeccionado uma réplica do aparelho do CTM pelos alunos da segunda série do curso de Química Integrado ao Ensino Médio do IFNMG – Campus Montes Claros, onde foi realizada a primeira parte da pesquisa, com espaço físico e horário definidos, dividido em dois tempos, o primeiro com os docentes e os acadêmicos e o segundo tempo com os discentes em um período de cinco horas, sendo duas horas e meia para cada grupo.

Neste momento iniciou-se com os participantes respondendo o questionário A, versando sobre a experiência profissional no caso dos professores e os acadêmicos e sobre habilidades e conhecimentos prévios aplicados aos alunos. Continuando para a apresentação e a resolução da lista de atividades fazendo o uso do CTM. No final do período ocorreu o preenchimento do questionário B pelos participantes, com perguntas sobre a eficiência do CTM em resolver as atividades.

No segundo momento as ações foram 100% virtuais, comunicação através de uma sala virtual no Google Classroom, local onde houve a disponibilidade de videoaulas, questionários, discussões, sugestões e links para acessos às videoaulas hospedadas no canal do Youtube. Para acesso à página da web onde está hospedada a ferramenta do CTV, as videoaulas, abordam desde aspectos teóricos sobre a trigonometria, em especial o ciclo trigonométrico e as seis razões trigonométricas, a apresentação da ferramenta do CTV e, resolução de exemplos de questões de trigonometria para capacitar os colaboradores a resolverem os problemas constantes das listas de atividades com questões propostas.

As videoaulas foram gravadas com o OBS Studio e uma mesa digitalizadora e disponibilizadas no canal do autor no Youtube, feito exclusivamente para esta pesquisa. Seus links foram disponibilizados na sala virtual do projeto no Google Classroom onde os participantes têm acesso, desta forma pode-se comunicar com o autor individualmente ou em grupo, contando com o auxílio da tecnologia, otimizando o espaço-temporal, colaborando inclusive com o Ensino à Distância, o qual tem uma tendência a crescer.

Na etapa da exposição (Teoria), mencionada anteriormente, foi encerrada com a recomendação de uma lista de atividades sobre a trigonometria no ciclo trigonométrico, disponibilizada na plataforma Google Classroom, abordando habilidades e competências sobre as principais funções trigonométricas: seno,

cosseno, tangente, secante, cossecante, cotangente e suas inversas. as quais foram realizadas nos dois modos (CTM, CTV).

Para efeito de comparação os participantes, tiveram que realizar as mesmas atividades. Depois de cumpridas essas etapas, eles estavam aptos a responder o questionário C (apêndice A), o qual foi usado para chegar ao resultado.

Para ajudar na coleta dos dados qualitativos, o autor usou também observações e diálogos com os participantes, após a realização das atividades propostas, baseando inclusive na facilidade de solucionar as questões com êxito, deixando claro, o melhor método entre o CTM e o CTV, expressando suas considerações.

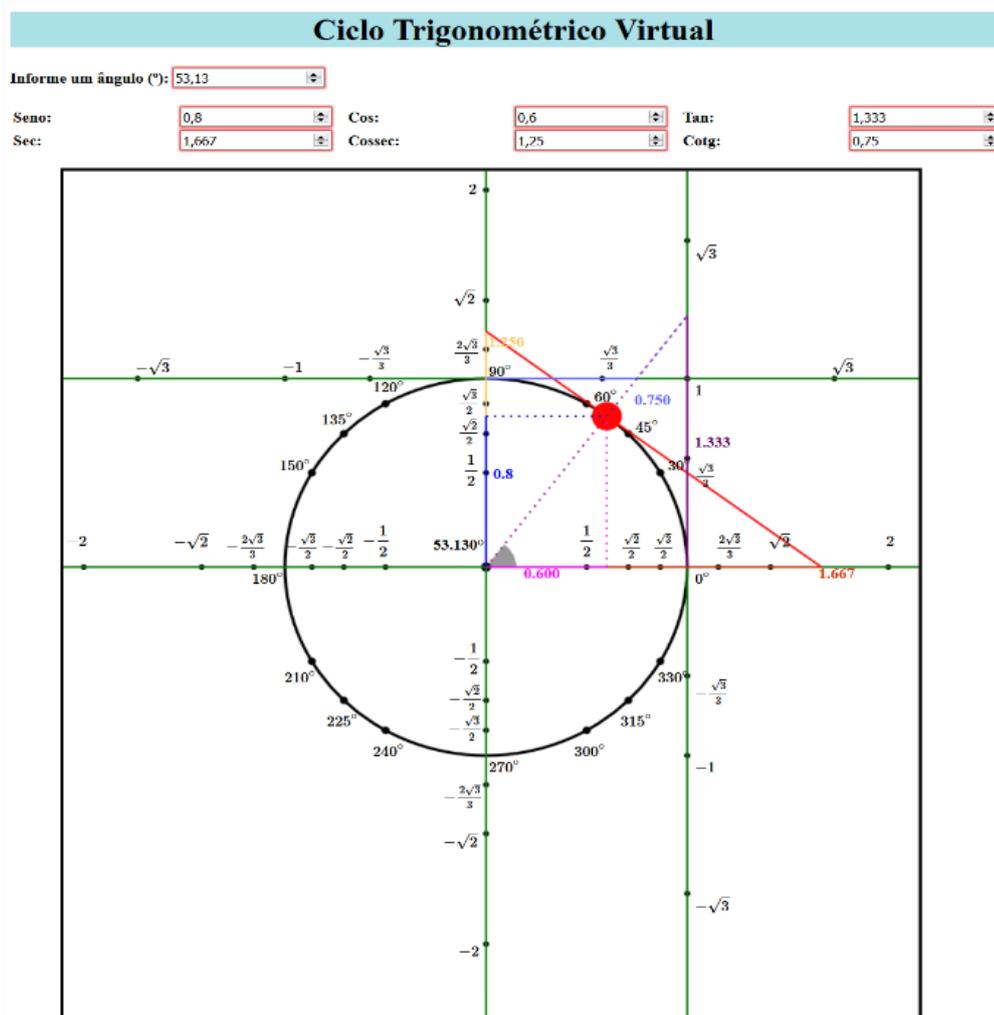
#### 4 MÉTODO DE FUNCIONAMENTO E CONSTRUÇÃO DA FERRAMENTA

A ferramenta foi desenvolvida utilizando-se o HTML 5 e o seu recurso Canvas, juntamente com a linguagem JavaScript e seu *framework* CreateJS, que permitem a construção de desenhos e a interatividade deles com o usuário. Foi utilizado o ambiente Web por permitir a facilidade de acesso, sendo necessária apenas uma conexão com a Internet e um navegador para o uso da ferramenta. Além disso, é desnecessária a instalação de qualquer elemento e há compatibilidade com diversos sistemas. O *link* para acesso é: <https://ciclotrigonometrico.000webhostapp.com/>.

O CTV está ilustrado na Figura 8.

A ferramenta se resume em uma circunferência que também possui um círculo vermelho. Na verdade, a interatividade se dá principalmente através da movimentação do círculo vermelho com o *mouse*, com as teclas do teclado ou com a inserção do valor de um ângulo na caixa de texto denominada “Informe um ângulo”, ou o valor da razão trigonométrica na caixa de texto correspondente. Ao fazer qualquer um desses preenchimentos o pequeno círculo vermelho será posicionado para o local adequado, e as informações de Seno, Cosseno, Tangente, Secante, Cossecante e Cotangente serão atualizadas e explicitadas no topo da página ou em destaque no Ciclo Trigonométrico. Conforme as escolhas do usuário, a ferramenta reage mostrando nos eixos (de senos, de cossenos, de tangentes, de secantes, de cossecantes e de cotangentes) as medições das Relações Trigonométricas. Essas informações também são mostradas em caixas de texto e em rótulos na imagem.

Figura 8- Ciclo Trigonométrico Virtual



Fonte: o autor

Foto1 – Apresentação da ferramenta CTV para os alunos



## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo refere-se a fase de validação e análise a posteriori dos resultados da pesquisa.

### 5.1 Pesquisa Exploratória (Projeto Piloto)

O Projeto Piloto teve como objetivos mostrar que a ferramenta do CTV em comparação ao aparelho do CTM, que de acordo com Fernandes (2015) já possui grande diferencial em relação às aulas de Trigonometria ministradas tradicionalmente, sem materiais manipuláveis, apresenta vantagens tais como: interesse em realizar as atividades devido ao uso da tecnologia, espaço-temporal flexível, acesso a uma gama de oportunidade para ampliar o entendimento de exemplos e conceitos enquanto usa a ferramenta por meio da internet, o que contribui para uma melhor aprendizagem; oportunizar uma revisitação da teoria da Trigonometria através de videoaulas deixando claro as deficiências antes do minicurso em relação as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente, observadas na participação dos alunos do 2º ano dos cursos Técnicos em Informática e Química Integrados ao Ensino Médio do IFNMG – Campus Montes Claros; propiciar aos docentes participantes da pesquisa um recurso didático contributivo para a melhoria do Ensino da Trigonometria na Educação Básica.

Com a finalidade de verificar o efeito dessa ferramenta – CTV, no ensino-aprendizagem, foram realizadas atividades em dois momentos:

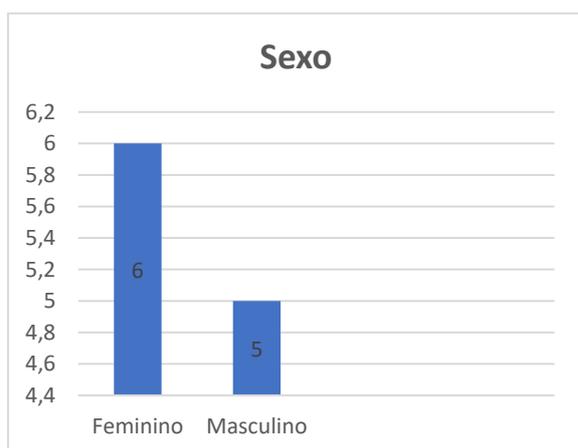
- No primeiro momento o grupo de participantes recebeu uma atividade para ser realizada no CTM, a qual se deu em subgrupos específicos formados por estudantes do 2º ano do Ensino Médio e outro composto por docentes de Matemática na Educação Básica e acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, que têm experiência em trabalhar com o conteúdo de Trigonometria nesse nível de ensino.
- No segundo momento tivemos as videoaulas ministradas pelo autor e disponibilizadas na sala virtual do Google Classroom aos participantes inclusive abordando a apresentação da ferramenta do CTV, deixando então os participantes atualizados em relação à teoria e o funcionamento da referida ferramenta, além de resolução de problemas sobre a trigonometria, utilizando a ferramenta a título de

exemplos. Logo em seguida receberam a mesma lista de atividades que foi feita no primeiro momento, para ser resolvida no CTV.

Foi realizado um encontro presencial, na tarde do dia 16 de julho de 2019 na sala de EAD, no prédio 1 de Ensino do IFNMG - Campus Montes Claros. No período das 13:30 às 15:30 o encontro aconteceu com os seis docentes e com os cinco acadêmicos. Na primeira hora o autor se apresentou, falou da pesquisa e solicitou aos participantes o preenchimento de um questionário que compõe essa pesquisa, apêndice A – questionário A que tem como objetivo levantar um diagnóstico quanto à experiência e realização do seu trabalho na docência. Após a devolução do questionário A respondido, na sequência foi apresentado o CTM e feito algumas questões a título de exemplo de seu funcionamento pelo autor, seguindo então com a resolução de uma lista de atividades (apêndice A), fornecida pelo autor para que os mesmos resolvessem usando o CTM. Nos últimos minutos do tempo foi disponibilizado o questionário B, apêndice A, para que os mesmos respondessem, versando de questionamentos sobre o uso do CTM.

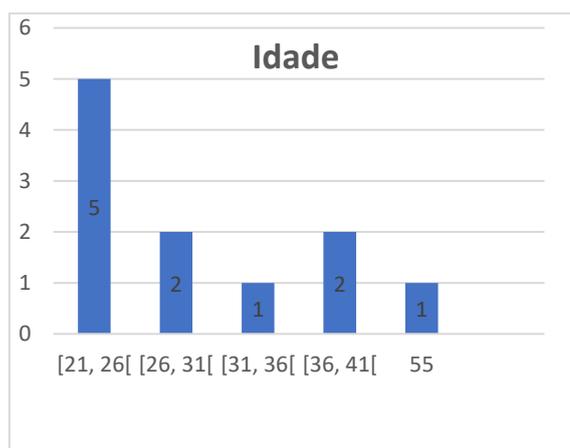
Abaixo temos representado nos Gráficos 1 e 2, o perfil dos participantes do subgrupo dos docentes e acadêmicos quanto ao sexo e idade.

Gráfico 1- Sexo dos participantes docentes e acadêmicos



Fonte: o autor

Gráfico 2- Idade dos participantes docentes e acadêmicos



Fonte: o autor

Dos gráficos acima observa-se que em relação aos docentes e acadêmicos participantes 55% são mulheres e aproximadamente 64% tem menos de 31 anos, isto é, a maioria dos participantes são jovens do sexo feminino. Esses dados ratificam o Censo escolar 2018 (INEP, 2019), o qual aponta uma superioridade feminina no

magistério em todas as etapas do ensino, em especial na Educação Básica.

Quanto à experiência na docência foi perguntado há quantos anos atua como docente e se já havia lecionado no Ensino Médio. Em relação a lecionar no Ensino Médio a resposta foi positiva em sua totalidade. Quanto ao tempo de atuação houve uma grande variação ilustrada no Gráfico 3.

Gráfico 3- Experiência profissional dos entrevistados



Fonte: O autor

Observa-se do gráfico acima que 73% dos entrevistados possuem menos de 5 anos na docência e que destes 62,5% não tem um ano na profissão, esse é um resultado relevante para análises dos demais dados abordados posteriormente neste questionário, e melhor fazer inferências que vêm de encontro com o objetivo desta pesquisa.

Em relação à atuação dos entrevistados na Educação Básica, todos declararam lecionar neste nível de ensino e destes apenas dois dizem não ter ensinado o conteúdo de Trigonometria, 100% dos que ensinaram Trigonometria afirmam ter também trabalhado com o Ciclo Trigonométrico.

No que se refere às estratégias didáticas dos participantes, foi perguntado: Quais são as estratégias didáticas mais utilizadas por você em suas aulas?

Aulas expositivas foi uma resposta comum a todos os participantes deste subgrupo, outras foram: aulas dialogadas, desenhos no quadro, frases feitas para memorização de fórmulas, resolução de exercícios como exemplos na lousa e dois dos participantes informaram que já tinham utilizado material manipulável.

Em resposta à pergunta sobre quais são as outras estratégias e/ou recursos didáticos que gostaria de utilizar em sala de aula? Justifique o porquê não os utiliza.

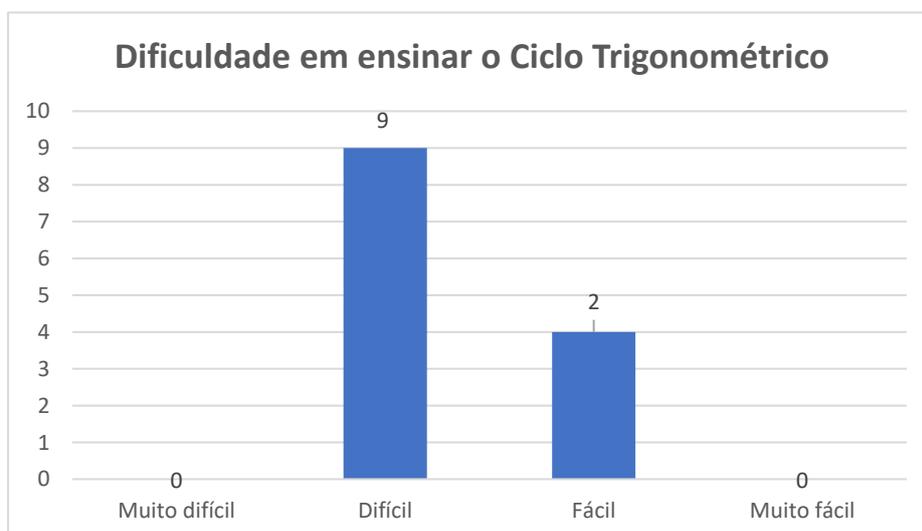
As respostas também foram muito parecidas: gostariam de usar softwares matemáticos, recursos tecnológicos, ferramentas computacionais e videoaulas, apenas um entrevistado respondeu material manipulável. Apontaram como motivo de sua não utilização respostas como: falta de tempo, não conhecer, falta de suporte informatizado na escola, materiais indisponíveis nas escolas em que trabalham.

Uma pergunta deste questionário que muito veio a contribuir para a pesquisa foi: Você já utilizou algum material virtual para ensinar o Ciclo trigonométrico? Caso não, qual é o motivo?

Neste quesito os entrevistados foram unânimes em responder não. Quanto aos motivos: não conhecer foi a justificativa de maior aparição, outras com menos frequência foram: não ter tempo de procurar e falta de recursos tecnológicos no ambiente escolar.

Foi questionado ainda quanto à dificuldade em ensinar o Ciclo Trigonométrico, veja no gráfico 4 o resultado.

Gráfico 4- Nível de dificuldades para ensinar o Ciclo Trigonométrico



Fonte: o autor

Observa-se que cerca de 81,8% dos entrevistados considera o Ciclo Trigonométrico difícil de ser ensinado, comparando com as respostas dadas as questões anteriores sobre as estratégias e recursos utilizados nas aulas, que em sua grande maioria utiliza aulas expositivas para ensinar, pode se pensar que fazendo o uso de materiais manipuláveis e/ou virtual tenha um melhor resultado.

No período de 15:30 às 17:30 o mesmo processo ocorreu, agora com os alunos

do segundo ano dos Cursos Técnicos em Informática e Química Integrados ao Ensino Médio do IFNMG Campus Montes Claros.

Foi aplicado previamente o questionário A (apêndice A), para discentes. Ainda que estes alunos tivessem contato com o conteúdo do Ciclo Trigonométrico, no caso dos alunos do curso técnico em Química, ministrado pelo autor, foi feito um resumo do conteúdo que seria abordado utilizando o CTM e em seguida esse aparelho foi apresentado pelo autor. Os alunos participantes resolveram a lista de atividades (em anexo) sobre as seis razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente.

Devido à quantidade limitada de aparelhos a execução das atividades ocorreram em grupo, de forma que cada aluno participante mostrava a solução de um exercício da lista aos demais. Ver Foto 1. Finalmente nos últimos minutos desse período foi respondido o questionário B para discentes (apêndice A).

Foto 2- Alunos resolvendo exercícios com o CTM



Abaixo temos representado nos Gráficos 5 e 6, o perfil dos participantes do subgrupo dos Estudantes quanto ao sexo e idade.

Gráfico 5- Sexo dos discentes

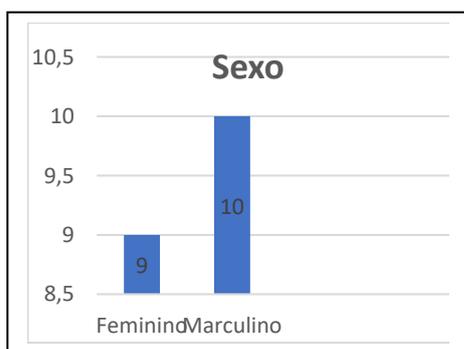
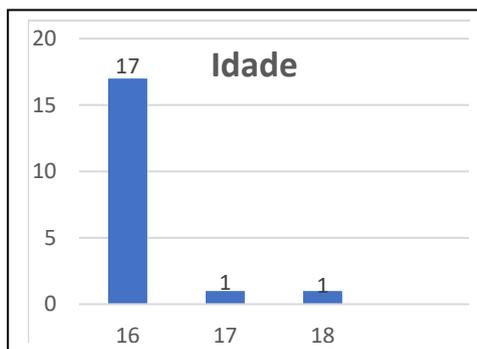


Gráfico 6- Idade dos discentes



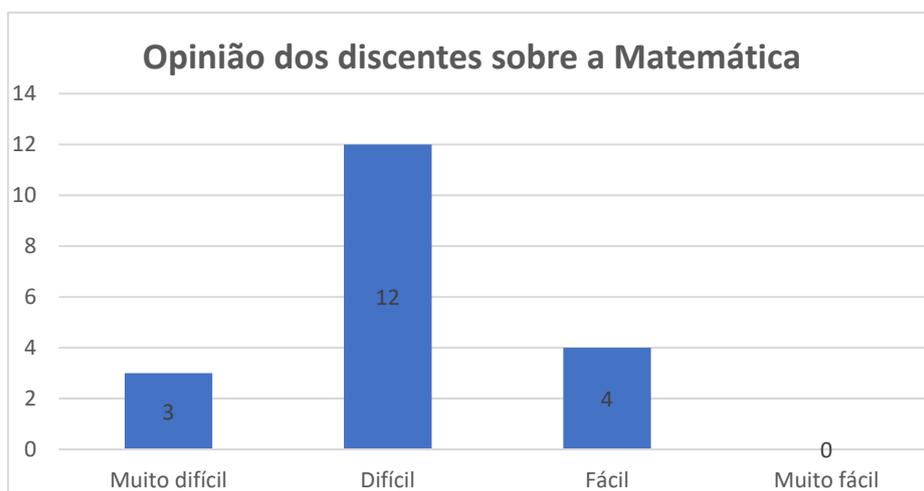
Fonte: o autor

Observa-se que aproximadamente 53% dos participantes desse grupo são do sexo masculino e 100% tem idade entre 16 e 18 anos, ou seja, tem-se um grupo jovem cuja maioria são do sexo masculino.

Antes de iniciar o minicurso os participantes responderam um questionário diagnóstico (apêndice A), que investigava a habilidade do entrevistado em relação à Matemática e o seu nível de conhecimento de trigonometria.

As questões foram tabuladas e estão representadas nos Gráficos 7, 8, 9, e 10 mostrados a seguir.

Gráfico 7 – Como os alunos entrevistados veem a Matemática



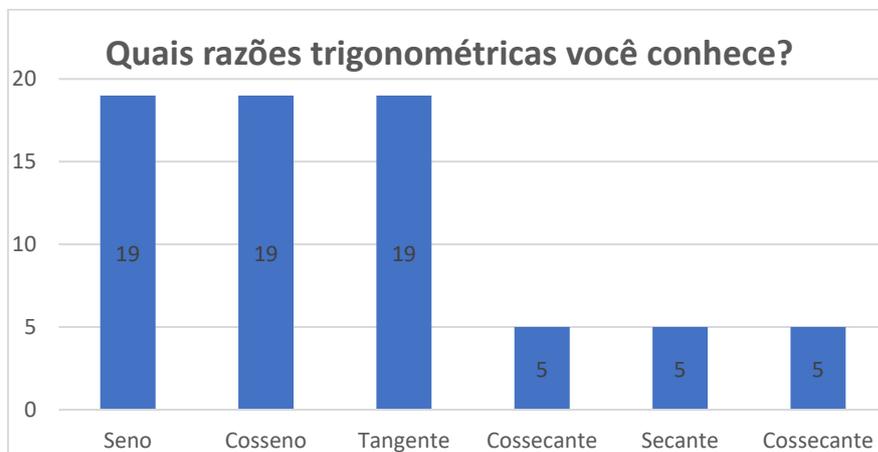
Fonte: o autor

Da leitura do gráfico temos que 63% dos discentes entrevistados acham a Matemática uma disciplina difícil, embora quando perguntado qual a disciplina que estuda, que mais gosta 15 dos 19 entrevistados responderam Matemática, isso nos leva a conjecturar que esta dificuldade pode não está diretamente ligada ao aspecto de complexidade da disciplina, mas dentre outros, o pedagógico, pois neste mesmo questionário quando perguntado se seu professor já utilizou material manipulável em sala de aula, salvo os alunos que estudaram o Ciclo Trigonométrico com o autor que fez uso do CTM nas aulas, todos os demais responderam não a esse item.

### Quanto ao ensino da Trigonometria em especial ao Ciclo Trigonométrico.

No item que se refere à facilidade ou dificuldade em trigonometria 17 dos 19 participantes marcaram que tinham dificuldades e ao responderem sobre as estratégias e recursos utilizados pelo professor nas aulas, as respostas mais comuns foram desenho na lousa, “trocadilho” para decorar regras, resolução de exercícios. Observa-se que na comparação com a mesma pergunta feita no questionário A para os docentes e acadêmicos as respostas são compatíveis.

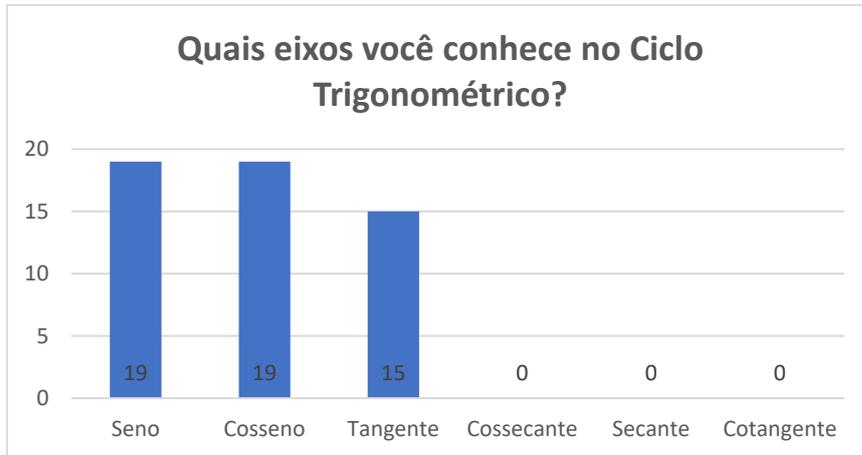
Gráfico 8- Relação das razões trigonométricas conhecidas pelos discentes



Fonte: o autor

Nessa questão, esperava-se que todos os entrevistados declarassem conhecer as 6 razões trigonométricas, uma vez que esse assunto faz parte do currículo do Ensino Médio e todos os participantes são estudantes do 2º ano do ensino médio e declararam já ter estudado trigonometria neste ano, mas o que se nota é que as razões Cossecante, Secante e Cotangente não são tratadas no ensino básico como o esperado.

Gráfico 9- Relação eixos trigonométricos conhecidos pelos participantes

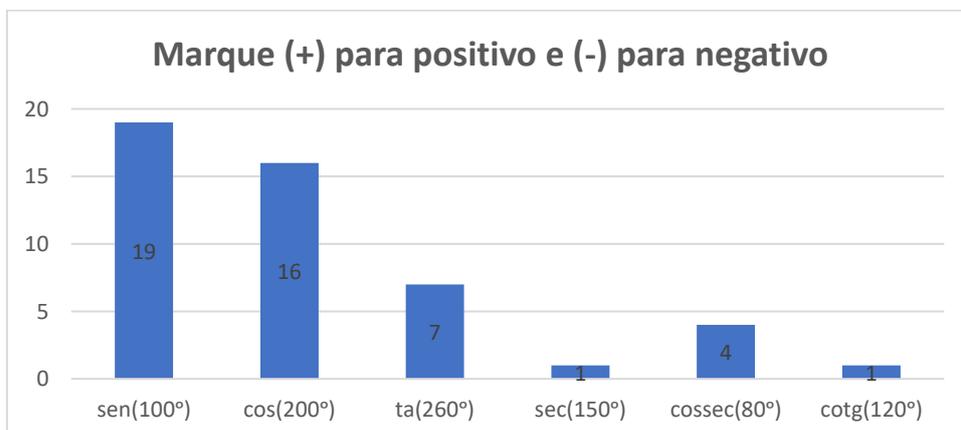


Fonte: o autor

Da observação dos gráficos 8 e 9, percebe-se um equilíbrio sobre o conhecimento das razões trigonométricas e seus respectivos eixos trigonométricos, o Gráfico 9 mostra que os integrantes do grupo conhecem apenas os eixos: seno, cosseno e tangente, pois nenhum aluno declarou conhecer os eixos trigonométricos das razões associadas (cossecante, secante e cotangente). Questionados os alunos que declararam conhecer as razões trigonométrica Secante, Cossecante e Cotangente e não os seus eixos, eles justificaram ter conhecimento destas razões trigonométricas superficialmente através de videoaulas nos canais do Youtube.

Nesta questão, foi avaliado a capacidade dos entrevistados de determinar o sinal de algumas razões trigonométricas, cujo resultado está representado no Gráfico 10, mostrado a seguir.

Gráfico 10- Número de acertos na atividade de sondagem: Determinação do sinal



Fonte: o autor

Observa-se no Gráfico 10, que os participantes seguem a mesma tendência das questões anteriores quanto ao seno e o cosseno e destoa bastante em relação à tangente e a cossecante, mostrando insegurança quanto aos sinais das demais razões, pois erraram muitos itens, vale destacar que a maioria declarou não conhecer as razões secante, cossecante e cotangente. Portanto é provável que tenham determinado os sinais de forma aleatória.

### **Questionário B respondido pelos docentes e acadêmicos**

Fazendo uma análise do questionário B, apêndice A, respondido pelos docentes e acadêmicos, que avaliava o grau de satisfação, interesse e suas considerações sobre o CTM, percebe-se uma grande aceitação do CTM, pois segundo eles, o CTM torna a trigonometria mais atrativa e interessante em relação a aulas expositivas, além de facilitar a visualização dos valores dos arcos notáveis das razões trigonométricas.

Ao serem questionados se o Ciclo Trigonométrico apresentado poderia ser utilizado em suas aulas, 81% dos entrevistados disseram sim, justificando que melhoraria e muito a qualidade da aula.

Quanto aos pontos positivos e negativos abordados na última pergunta do questionário. Na maioria das respostas foram citados em relação aos pontos positivos o fato do aluno ter algo concreto para melhor visualização dos valores das razões trigonométricas do seno, cosseno e tangente e também trabalhar a simetria; já para os pontos negativos foi comum em suas respostas uma preocupação quanto aos alunos ficarem dependentes do aparelho para memorizar os valores das razões Trigonométricas citadas anteriormente e dos ângulos notáveis, algo semelhante ao que acontece com o uso indiscriminado da calculadora nas aulas de matemática.

### **Questionário B respondido pelo discentes**

Fazendo uma análise do questionário B, apêndice A, respondido pelos alunos, percebe-se uma grande aceitação do CTM de acordo com suas respostas.

Uma vez que em sua totalidade, os estudantes opinam sobre o CTM como um aparelho que facilita bastante a visualização dos valores das razões trigonométricas

em relação aos ângulos notáveis ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$  e seus simétricos), nos sinais e quanto à simetria dos arcos. 55% dos entrevistados concordam que poderão utilizá-lo em eventuais estudos futuros.

Quanto ao questionamento sobre os pontos positivos e negativos do uso do CTM tivemos presentes na maioria das respostas como pontos positivos a facilidade em visualizar os valores do seno, cosseno e da tangente dos ângulos notáveis e também os sinais, principalmente da tangente e a relação de simetria. E como pontos negativos foi apontado o fato de ser difícil construir várias réplicas do material para formar pequenos grupos de trabalhos durante a aula, uma vez que um ciclo manipulável por sala é pouco; a dificuldade em relação às razões associadas (cossecante, secante e cotangente), segundo eles não tiveram a mesma facilidade em visualizar os valores, sinais e localização dos eixos referentes a essas razões trigonométricas.

Posteriormente à resolução de uma lista de atividades (apêndice A) no aparelho CTM, chegou o momento de investigar a eficiência do mesmo em resolver problemas de trigonometria pelos alunos da 2ª série do ensino médio ao qual este estudo foi inicialmente pensando e direcionado.

Foto 3 – alunos sendo orientados pelo autor para utilizar o CTM



Ficou evidente a eficiência do CTM em resolver problemas envolvendo os ângulos notáveis e compreendidos na primeira volta positiva, ou seja, maior ou igual que zero e menor que 360 graus, porém é notória a dificuldade encontrada pelos alunos na resolução de problemas com um grau de maior complexidade e precisamente em atividades que envolvia arcos que não são notáveis. Os resultados foram tabulados e apresentados nos gráficos 11 e 12.

A última parte da pesquisa, ocorreu em um período de aproximadamente 35 dias, entre os dias 20 de julho aos dias 25 de agosto de 2019. Neste período toda as ações foram realizadas de forma virtual, sendo a comunicação por mensagens em forma de bate papo na sala virtual do Google Classroom, criada especificamente para

o projeto desta pesquisa, além de mensagens via whatsapp no grupo criado com os participantes em alguns momentos. Os procedimentos se estabeleceram com a disponibilização de uma sequência de videoaulas no canal do Youtube, também criado com o fim de realização desta etapa da pesquisa, para que os colaboradores tivessem acesso aos vídeos que trataram de assuntos desde revisitação da teoria sobre o conteúdo da trigonometria, no tocante as seis razões trigonométricas, até a apresentação da ferramenta, inclusive na resolução de problemas que serviram de exemplos para que os usuários pudessem entender o funcionamento e usassem para praticar resolvendo as listas de atividades solicitada pelo autor.

No momento da realização das atividades pelos colaboradores houve críticas e sugestões as quais foram acatadas, o que veio a aprimorar a ferramenta para um melhor funcionamento, como a construção das caixas de textos nas funções Senos, Cossenos, Tangentes, Cossecantes, Secantes e Cotangentes para receber o valor e retornar o ângulo do mesmo, sugestão muito bem-vinda e que propiciou uma maior praticidade inclusive na resolução de questões arccoseno, arccosseno, pois antes usava-se o mouse para a localização desse valor o que não era muito preciso, acarretando uma distorção no valor final da solução.

Assim, após todos os ajustes e o uso dos participantes para resolver todos os problemas das listas de atividades (em anexo) chegou o momento de os colaboradores responderem o último questionário, direcionado aos docentes e acadêmicos e um questionário específico para os discentes. Com a entrega virtual desses questionários preenchidos foram feitas as tabulações dos dados e as seguintes observações e conclusões.

### **Questionário C respondido pelos docentes e acadêmicos**

Chegou o momento de investigar a eficiência da ferramenta CTV na visão dos docentes e acadêmicos. Fazendo uma análise dos questionários percebe-se uma avaliação positiva, uma vez que todos os entrevistados deste grupo declararam considerar a ferramenta motivadora, dinâmica e de fácil utilização, ainda sobre o uso da ferramenta quando perguntado se é uma maneira melhor para realizar as atividades que o uso do CTM e em caso afirmativo em quais aspectos, a resposta objetiva foi na sua totalidade sim, e os motivos apontados como justificativa, no geral,

foram no sentido da praticidade, acesso em qualquer lugar, e principalmente o fato de resolver problemas envolvendo qualquer ângulo, não somente os notáveis.

Houve relatos de professores no sentido de ter despertado um maior interesse em ensinar o conteúdo, pois a tempos procuravam algo assim, simples e prático. Foi destacada a existência das caixas de textos usadas para receber o valor de uma razão trigonométrica e retornar o valor do arco, e o fato de ter uma visão geral de todos os valores das seis razões trigonométrica simultaneamente, também foi apontada por um acadêmico participante da pesquisa a comparação da ferramenta com uma calculadora científica, considerando esta mais eficiente, citando o fato da ferramenta CTV mostrar todos os valores e não um de cada vez como seria na calculadora.

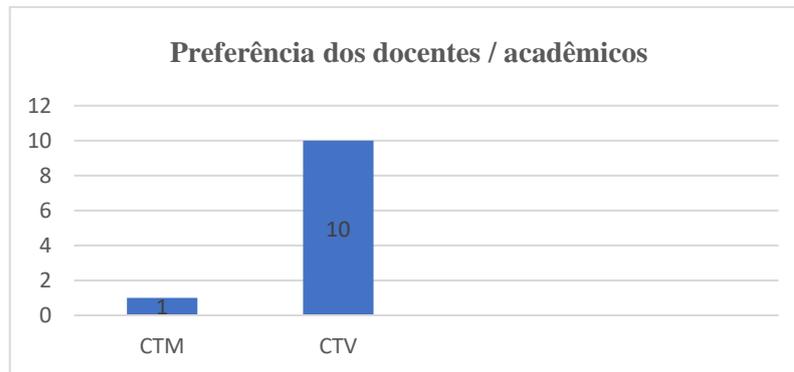
Dando continuidade aos relatos dos participantes, que demonstram satisfação e aceitação do CTV ao observar as respostas da pergunta 9 do questionário que extraía dos participantes a sua opinião sobre o CTV, algumas respostas foram: “excelente ferramenta”, “interessante pois faz o uso da tecnologia”, “motivadora e eficiente no processo de ensino-aprendizagem”.

Quanto aos pontos positivos e negativos da ferramenta, todos alegaram não ver pontos negativos e como pontos positivos observa-se alguns como: facilidade para ensinar, rapidez na resolução de exercícios, dinamismo, atual, abrangente, possuir função arco, dentre outros.

A última pergunta do questionário foi: na comparação do aparelho do CTM e a ferramenta do CTV, qual você optaria para trabalhar as seis razões trigonométricas? E qual a justificativa.

Como essa pergunta é uma das chaves para confirmação da hipótese dessa pesquisa foi tabulado e representado o resultado no gráfico 11.

Gráfico 11- Opção dos docentes ou acadêmicos em relação as ferramentas CTM X CTC



Fonte: o autor

Observa-se pelo gráfico que aproximadamente 91% do grupo dos professores optaria pela ferramenta do CTC para usá-la como recurso didático pedagógico e, dentre as justificativas destaca-se: por ser uma ferramenta mais simples e mais funcional; fazer o uso da tecnologia; ser mais dinâmico; resolver problemas envolvendo quaisquer ângulos notáveis ou não; acreditar em motivar mais os alunos nessa era digital. Só para constar, o único acadêmico que optaria pelo CTM alegou em sua justificativa que essa opção seria em um estágio inicial para que o aluno tivesse um primeiro contato com material manual, mas que em uma segunda fase trabalharia com o CTC por ser mais abrangente e mais dinâmico.

### Questionário C respondido pelos discentes

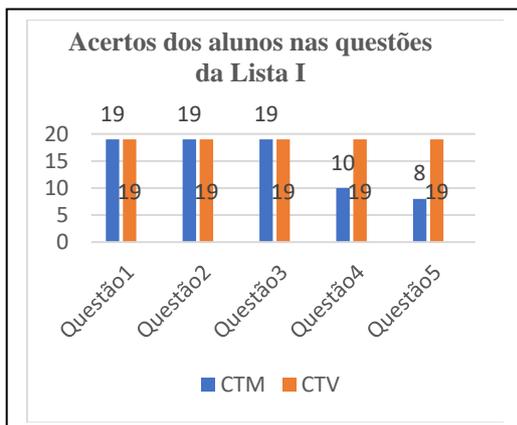
Observando o questionário C respondido pelos discentes, percebe-se que houve uma aprovação bastante positiva, pois foi unânime entre os dezenove alunos colaboradores da pesquisa em dizer que a ferramenta é simples, interessante e com ela fica mais fácil realizar as atividades sobre a trigonometria, além disso é dinâmica e faz uso do smartphone para fazer os exercícios, isso os motiva bastante em estudar o conteúdo. Em resposta a pergunta 3 do questionário C (apêndice A) se o uso do CT é uma maneira melhor para realizar as atividades que no CTM, mais uma vez todos concordam ser melhor a ferramenta CTC, justificando como principais aspectos o fato de a ferramenta ser dinâmica, online, poder acessar de qualquer lugar e hora e também ser abrangente nos recursos, principalmente o fato de ela não estar restrita ao uso de apenas ângulos notáveis.

Finalmente chega-se às últimas perguntas do questionário C dos discentes, sobre elas foram apontados pela maioria absoluta dos pesquisados, que apresentam dificuldades em encontrar pontos negativos na ferramenta, sendo apontado por um dos entrevistados que a dependência da conexão com internet, poder vir a ser um ponto negativo. Por outro lado, todos tiveram muita facilidade em apontar aspectos positivos, tais como: praticidade, simplicidade, funcionalidade, uso da tecnologia, acesso por smartphones, eficiência na resolução de problemas complexos com o tratamento simples. Com isso fica claro a convergência entre as opiniões dos docentes, dos acadêmicos e dos discentes.

Quanto a última pergunta todos os discentes participantes declararam optar pela ferramenta do CTV em relação ao CTM, alegando basicamente as justificativas ressaltadas anteriormente.

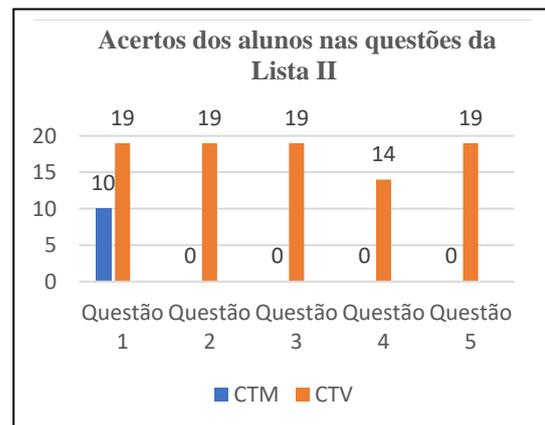
Para finalizar foi feita uma análise dos acertos e erros das questões das listas de atividades (lista I e lista II), realizadas nos dois equipamentos, CTM e CTV, esses resultados foram tabulados, analisados e apresentados, simultaneamente nos gráficos 12 e 13.

Gráfico 12- Lista I desempenho dos alunos



Fonte: o autor

Gráfico 13- Lista II desempenho dos alunos



Fonte: o autor

Da análise dos gráficos podemos inferir que as questões da lista I que abordavam apenas ângulos notáveis, como as questões 01, 02 e 03 todos acertaram todas as questões nas duas ferramentas, salvo a questão 04 que tratava do comportamento da tangente indo para  $+\infty$  ou  $-\infty$ , que no CTM alguns tiveram essa

dificuldade, enquanto no CTV a variação contínua dos valores pode ter feito a diferença para a observação dessa tendência. Houve também uma dificuldade na questão 05 no CTM, a qual tratava dos valores máximos e mínimos. Questionando o fato de ter errado no CTM e acertado no CTV alguns alegaram que após a realização da questão no CTM teve as videoaulas onde foi esclarecido esse aspecto, precisamente a resolução do exemplo 1 no CTV que trata do mesmo assunto. Já a lista II percebe-se claramente uma diferença gritante entre as ferramentas. Em conversa com os alunos participantes eles alegam algo que já havia sido dito em momentos anteriores ao responderem os questionários que é o fato de o CTM não ser eficiente em resolver problemas que se trata de ângulos não notáveis, que são abordados em todas as questões dessa lista. Alguns alunos conseguiram êxito na questão 01, pois basicamente dependia da localização aproximada em um quadrante.

Portanto, essas análises vêm corroborar com o discurso feito anteriormente a despeito da eficiência das ferramentas CTM versus CTV.

## **6 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

No início do trabalho partiu-se da ideia de que realizar a pesquisa era relevante devido a urgência em se fazer algo para contribuir com a melhora do ensino-aprendizagem da Matemática, fazendo o uso da tecnologia, particularmente no que tange ao ensino da Trigonometria. Esse assunto em geral é tratado em ambientes estáticos, monótonos e entediantes, portanto, nada atraentes ao público interessado, que são os alunos. Pensando nesse cenário e em como contribuir com os docentes que lecionam na 2ª série do Ensino Médio, com o conteúdo de Trigonometria e que não encontram com facilidade recursos didáticos com tais características, surgiu a ideia da criação da ferramenta do CTV, que foi baseada na existência do aparelho do CTM.

Desse modo, com o desenvolvimento da pesquisa, constatou-se que a relevância, de fato é ainda maior e inadiável, tendo em vista o contexto atual em que acontece uma grande transformação global provocada pela revolução industrial 4.0. Nessa abordagem, as máquinas usam uma tecnologia de automação e troca de dados e até mesmo inteligência artificial para realização de tarefas complexas. Com este

ambiente, exige-se que a educação esteja nele inserida, surgindo assim a E4, que exige dos profissionais da educação em especial do docente, habilidades necessárias para enfrentar esse cenário. Nessa perspectiva os docentes terão cada vez mais um papel de motivar/construir novas possibilidades de atividades, fomentando a autonomia e o desenvolvimento de competências e habilidades nos alunos.

Com a finalidade de modernizar e adequar o ensino da Trigonometria a ferramenta do CTV apresenta-se como recurso didático pedagógico, com uma abordagem virtual e pragmática para auxiliar os docentes e seus alunos no processo de ensino-aprendizagem deste tema.

No trabalho estabeleceu-se como objetivo geral “Analisar se a criação de um Ciclo Trigonométrico Virtual, facilitará o processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria na educação básica, motivando os usuários através do uso da tecnologia”.

Percebe-se nesse momento que tal meta foi atingida, tendo em vista que a ferramenta foi criada utilizando a linguagem HTML 5 juntamente com a linguagem Java Script e hospedada em ambiente web de fácil acesso, a qual foi utilizada pelos colaboradores na resolução de problemas fáceis e difíceis com eficiência.

Os professores e acadêmicos participantes da pesquisa demonstraram interesse em adotá-la como recurso didático-pedagógico em suas futuras aulas para ensinar a trigonometria na Educação Básica. Quanto aos alunos também demonstraram entusiasmo e prazer em resolver as atividades, pois faziam o uso de seus smartphones para a realização das questões, declararam estar motivados a estudar o conteúdo que antes viam de forma estática e “maçante”.

Na comparação das ferramentas CTM e CTV, dentre os participantes desta pesquisa houve uma preferência unânime ao CTV, devido ao uso da tecnologia e o fato da ferramenta CTV solucionar os problemas de trigonometria que envolvam quaisquer arcos e não somente os notáveis, adicionado ao fato de resolver problemas conhecendo o valor da razão e tendo como resultado o valor do arco. Assim diante das reações e falas dos colaboradores ficou evidente que todos os objetivos específicos foram atendidos na integra.

Diante desses objetivos estabeleceu-se como hipótese que a ferramenta CTV, contribui com os alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem da trigonometria, motivados pela eficiência da ferramenta em resolver problemas e o uso

da tecnologia. Portanto, percebeu-se que a hipótese foi confirmada, tendo em vista que, as atividades propostas aos participantes nos minicursos foram realizadas com sucesso.

Outra pergunta que a pesquisa se propôs a responder foi: “Como a tecnologia pode colaborar para o processo de ensino-aprendizagem de trigonometria? Após a coleta de dados e a análise das informações conclui-se que o uso da ferramenta CTV facilitou e muito o processo de ensino-aprendizagem da Trigonometria, pois os participantes utilizaram para resolver problemas com muita facilidade e demonstram interesse, segurança, domínio e clareza em suas resoluções, atribuindo a tudo isso o aspecto primordial de a ferramenta envolver a tecnologia.

Ficou notória a diferença quando as listas de atividades foram resolvidas na primeira parte da pesquisa. Na oficina onde foi utilizado o aparelho do CTM, a lista 2 não foi resolvida naquele momento, porque o CTM não os ajudou, devido as questões abordarem ângulos desconhecidos e não pertencerem ao grupo dos conhecidos ângulos notáveis. Por outro lado, na segunda parte, quando ocorreu o minicurso, notava-se a satisfação e o empenho na realização das mesmas listas, porém, agora realizadas com o auxílio da ferramenta do CTV, com uma motivação bem maior por conseguirem resolver corretamente todos os problemas. Segundo relato de um aluno participante, “até razão trigonométrica que não era conhecida como a cosseno, secante e cotangente foi possível resolver”.

Para a realização desta pesquisa, utilizou-se a seguinte metodologia, no primeiro momento foi realizada uma *oficina presencial* com a duração de 5h, dividida em 2,5h para cada um dos subgrupos (professores e acadêmicos no primeiro tempo e com os alunos da segunda série do Ensino Médio no segundo tempo). Esse teve como objetivo apresentar o aparelho do CTM e utilizá-lo para auxiliar na resolução de exercícios constantes de duas listas (apêndice A), a lista 1 com exercícios básicos, envolvendo problemas apenas com ângulos notáveis, e a lista 2 com problemas mais complexos. Os participantes gostaram muito de conhecer o CTM, embora não sendo muito útil para resolver os problemas constantes da lista 2. No final os participantes responderam o questionário B, sobre o aparelho do CTM.

Num segundo momento em um período de 35 dias, houve a realização de um *minicurso* com todas as ações realizadas virtualmente. Inicialmente foi criada uma sala virtual no *Google Classroom*, onde aconteceu toda a comunicação entre o autor

e os colaboradores, inclusive, divulgação de links para acessos às *videoaulas*, à *ferramenta do CTV*, às *listas de atividades* e os *questionários*, acontecia também troca de ideias no bate papo e comentários no mural, favorecendo inclusive a comunicação via e-mail.

Ainda, neste segundo momento ocorreu a criação do *Canal no Youtube*, com o objetivo de hospedar as *videoaulas* disponibilizadas, que tratavam de revisão da teoria sobre a Trigonometria em especial ao Ciclo Trigonométrico e apresentação da ferramenta do CTV, seu funcionamento e resolução de exemplos com o auxílio da mesma.

Diante do escopo da pesquisa, foram encontradas muitas dificuldades principalmente na parte da realização da oficina. Pelo fato de ser presencial, foi difícil conseguir um horário para conciliar com todos os participantes, diante das diversas atividades que todos possuíam. A falta de tempo e o espaço engessado foi, sem dúvida um grande complicador para a pesquisa. Por outro lado, isso não ocorreu na segunda parte com o minicurso, até porque as ações foram todas realizadas virtualmente, assim, o espaço-temporal não foi problema e as atividades foram realizadas a contento.

Outra parte de muita dificuldade foi encontrar livros com autores, principalmente brasileiros que tratassem do assunto de materiais virtuais no ensino de Matemática, especialmente do ensino de Trigonometria na Educação Básica, com muita escassez é possível encontrar alguns artigos científicos e monografias sobre o tema. Assim, dada a relevância do tema seria de grande importância que cada vez mais pesquisadores possam estar produzindo materiais que norteem esse tipo de trabalho. Tem-se uma necessidade da continuidade de projetos que visem o desenvolvimento de ferramentas virtuais que tratam deste assunto, melhorando inclusive a ferramenta CTV na abrangência de atender os comportamentos de funções que modelam fenômenos periódicos.

A pesquisa também revela através das sugestões dos próprios colaboradores o desejo de ver ferramentas como o CTV voltadas a outros temas da Matemática, que possam desenvolver competências e habilidades a fim de sustentar um ensino de qualidade e que atendam as diferentes metas dos alunos e, deste modo implementar uma prática pedagógica diferenciada.

Por fim o trabalho mostrou que a ferramenta CTV é mais um recurso didático

que o Professor terá para auxiliá-lo a desempenhar o seu papel de Professor mediador, orientador do processo de ensino-aprendizagem de maneira, dinâmica, agradável e principalmente, motivando o estudante de Trigonometria da educação básica a ter cada vez mais disposição e alegria em aprender.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. ***Episódios da História Antiga da Matemática***. trad. de J.B. Pitombeira de **Carvalho - Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.**

AUSUBEL, David P., et al, **Psicologia educacional**. Tradução Eva Nick. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

Bahrin, M. A. K. **Industry 4.0: A Review on Industrial automation and robotic**, Jurnal Teknologi, Universiti Teknologi Malaysia, 2016. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/profile/Fauzi\\_Othman/publication/304614356\\_Industry\\_4\\_0\\_A\\_review\\_on\\_industrial\\_automation\\_and\\_robotic/links/57ac15aa08ae3765c3b7bab8.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Fauzi_Othman/publication/304614356_Industry_4_0_A_review_on_industrial_automation_and_robotic/links/57ac15aa08ae3765c3b7bab8.pdf)>. Acesso em 10/ 07/ 2019

BONILLA, Maria Helena Silveira. **EDUCAÇÃO ONLINE: cibercultura e pesquisa-formação na prática docente**". FACED/UFBA, 2005. Disponível em: <<http://books.scielo.org>> – Acesso em: 05/03/2019.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, Gláucia da Silva; PURIFICAÇÃO, Ivonélia da. **Educação e novas tecnologias: um repensar**. Curitiba: Ibpex, 2008.

CALDEIRA, M. F. T. H. S. **A Importância dos Materiais para uma Aprendizagem Significativa da Matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Ciência da Educação) - Departamento de Didáctica de la Lengua y la Literatura, Universidad de Málaga, Málaga/Espanha. 2009. Disponível em: <[riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/4574/05TMFTHSC.pdf](http://riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/4574/05TMFTHSC.pdf)> acesso em 01/04/2015

CASSOL, V. J. **Tecnologias no ensino e aprendizagem de trigonometria: uma meta-análise de dissertações e teses brasileiras nos últimos cinco**

**anos.** Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

CORDEIRO, V. M. de S. **A trigonometria e o cálculo de distâncias.** In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2008. Curitiba: SEED/PR., 2011. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <[www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20](http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=20)>. Acesso em 12/02/19. ISBN 978-85-8015-039-1.

COSTA, N. M. L. da. **Funções Seno e Cosseno: Uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "Mundo Experimental" e do Computador.** 1997. 250 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11139>>. Acesso em: 03 mar. 2019.

CUNHA, D. da S.. **Matemática e a educação o desinteresse do aluno.** Rebes - Revista Brasileira de Educação e Saúde, Pombal - Pb, v. 3, n. 3, p.20-24, jul. 2013.

DEUTSCH, François. **O que é o PISA?** Disponível em: <<http://www.oecd.org/pisa>>. Acesso em: 11 nov. 2018.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática. Tradução:** Hygino H. Domingues - Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004. Tradução de: An Introduction to the history of mathematics.

FERNANDES, R. U. **Estratégias pedagógicas com uso de tecnologias para o ensino de Trigonometria na circunferência.** 2010. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. **MUSICALIZANDO A ESCOLA: MUSICA, CONHECIMENTO E EDUCAÇÃO.**São Paulo: Escrituras, 2006. 157 p.

INEP. **Ideb.** Disponível em: <<http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultadoBrasil.seam?cid=4740380>>. Acesso em: 15 out. 2018.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006. 280 p.

LITWIN, Edith.(org.) **Educação a Distância: temas para o debate de uma nova agenda educativa.** Porto Alegre: Artmed. 2001. 110p.

MACEDO, Ricardo Pedrosa. **Proposta de Modelo de Ambiente Virtual de Apoio ao Ensino Presencial.** Florianópolis: UFSC, 2001.

MENDES, M. J. de F. **Possibilidades de exploração da história da**

**ciência na formação do professor de matemática: mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico De Revolutionibus Orbium Coelestium.** 2010. 193 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal. 2010

MENDES, M. J. de F.; ROCHA, M. L. P. C.. **Problematizando os caminhos que levam à tabela trigonométrica.** Belém: SBHMat, 2009 (Coleção História da Matemática para Professores)

MOREY, B. B. **Geometria e trigonometria na Índia e nos países árabes.** Rio Claro, SP: Editora SBHMat, 2003. (Coleção História da Matemática para Professores)

NETTO, Samuel Pfromm. **Telas que ensinam – Mídia e aprendizagem: do cinema ao computador.** Campinas: Alinea, 2001. 226 p.

OLIVEIRA, Danivalton Fernandes de. **O Ciclo Trigonométrico Manipulável Como Recurso Didático Facilitador Do Processo de Ensino-aprendizagem da Trigonometria.** 2015. 81 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Matemática, Uesb - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015.

PENTEADO, Miriam Godoy. Interlink – **Rede de Trabalho sobre a inserção de Tecnologia Informática na Educação Matemática,** 2001.

PERES, Paula. **Ideb: veja como estamos em todos os níveis.** Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/12521/mec-e-inep-divulgam-resultados-do-ideb-2017>>. Acesso em: 15 out. 2018.

PRODANOV, Cleber Cristiano; FREITAS, Ernani Cesar de. **Metodologia do trabalho científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico.** 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 277 p.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

SCHWAB, Klaus. **A Quarta Revolução Industrial.** Edipro, Edipro, 2019, 2019. 160 p.

SIERPINSKA, A. . **“Obstacles Épistémologiques Relatifs a la Notion de Limite”-** RDM vol. 6, 1, pp 5-67, 1985.

SILVA, Hilário Alencar da. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Disponível em: <<http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento/>>. Acesso em: 17 set. 2018.

SILVA, S. A. da. **Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVEIRA, M. R. A. “**Matemática é difícil**”: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. Rio de Janeiro, 2002. Disponível em: <[http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo\\_producoes/docs\\_25/matematica.pdf](http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf)> Acesso em: 16 dez. 2018.

SMITH, D.E. “**History of Mathematics**”, vol. I, Dover Publications, INC. New York, 1958.

TERENCE, Ana Cláudia Fernandes; ESCRIVÃO FILHO, Edmundo. **Abordagem quantitativa, qualitativa e a utilização da pesquisa-ação nos estudos organizacionais**. Anais.. Fortaleza, CE: [s.n.], 2006. Disponível em: < [http://www.abepro.org.br/biblioteca/ENEGEP2006\\_TR540368\\_8017.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/ENEGEP2006_TR540368_8017.pdf) >. Acesso em 15/05/2019.

VERGNAUD, G. “**Epistemology and Psychology in Mathematics Education**” em “**Mathematics and Cognition**”, Neshier, P. e Kilpatrick, J., pp 14 -30, Cambridge University Press, 1994.

## APÊNDICES

### 1. APÊNDICE A – Questionários e exercícios – Minicurso

#### Questionários – Minicurso docente / acadêmico

##### Questionário A

Minicurso:

**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA:  
CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL**

##### Questionário – Docente e/ou acadêmico

Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)

Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

Escolaridade: [Clique aqui para digitar texto.](#)

#### Quanto a sua experiência na docência:

1. Quantos anos atua como docente? [Clique aqui para digitar texto.](#)

2. Você leciona no ensino básico?  Sim  Não

Se sim, há quantos anos?

3. Trabalha ou já trabalhou em algum momento com o Ensino da Trigonometria?

4. Ministrou aulas sobre o Ciclo Trigonométrico?  Sim  Não

Se sim, já teve alguma dificuldade para ensiná-lo? Qual(is)?

5. Quais são as estratégias didáticas mais utilizadas por você em suas aulas?

6. Que outras estratégias e ou recursos gostaria de usar em suas aulas e quais os motivos de sua não utilização neste momento?

7. Você já utilizou material manipulável para ensinar o Ciclo Trigonométrico?  Sim  Não

Se não, por quê?

8. Você já utilizou algum material virtual para ensinar o Ciclo Trigonométrico?  Sim  Não

Se não, por quê?

9. Levando em consideração o Ensino-aprendizagem da Trigonometria em especial ao Ciclo Trigonométrico. Você avalia:

Muito difícil  difícil  fácil  Muito fácil

### Questionário B

Minicurso:

**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA:  
CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL**

#### Questionário – Docente e/ou acadêmico

Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)

Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

#### 1. Indique seu grau de escolaridade

- Ensino Médio completo
- Superior incompleto em [Clique aqui para digitar texto.](#)
- Superior completo em [Clique aqui para digitar texto.](#)
- Pós-Graduação

2. Se você assinalou a última opção do item anterior, cite o(s) curso(s) que fez ou está fazendo (Especialização, Mestrado, Doutorado).

Escolher um item.

3. Qual sua opinião sobre o ciclo trigonométrico manipulável apresentado nesse minicurso?

4. Em sua opinião, o uso do ciclo trigonométrico manipulável pode auxiliar os alunos a compreender o conteúdo de trigonometria?

Sim, muito  Sim, pouco  Não

5. Este material poderá ser utilizado por você em suas aulas?

Sim  Talvez  Não

Justifique:

9. Na sua opinião quais os pontos positivos e negativos do material apresentado?

**Questionário B****Minicurso:****ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA:  
CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL****Questionário – Discente**Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

1. Qual sua opinião sobre o ciclo trigonométrico manipulável apresentado nesse minicurso?

2. O uso do ciclo trigonométrico manipulável facilitou a compreensão do conteúdo de trigonometria?

Sim, muito  Sim, pouco  Não

Justifique:

3. Este material poderá ser utilizado por você em seus estudos futuros?

Sim  talvez  Não

Justifique:

4. Na sua opinião quais os pontos positivos e negativos do material apresentado (CTM)?

## Questionário C

Minicurso:

**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA:  
CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL**

### Questionário – Docente e/ou acadêmico

Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)

Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

Escolaridade: [Clique aqui para digitar texto.](#)

### O uso da Ferramenta CTV

1. Tornou a aula mais motivadora e dinâmica?  Sim  Não
2. Contribuiu para um maior entendimento do conteúdo?  Sim  Não
3. É uma maneira melhor para realizar as atividades que o uso do CTM?  Sim  Não

Em quais aspectos?

4. Proporcionou um maior interesse para a realização dos exercícios?  Sim  Não

Se sim, por quê?

5. Despertou o seu interesse em estudar e/ou ensinar o Ciclo Trigonométrico?  Sim  Não

Por quê?

6. A ferramenta do CTV é de fácil compreensão?  Sim  Não

7. Deseja que outros assuntos estudados e/ou ensinados em matemática usassem ferramentas virtuais?  Sim  Não

8. Gostou de conhecer o CTV?  Sim  Não

9. Qual sua opinião sobre o Ciclo Trigonométrico Virtual apresentado nesse minicurso?

10. . Quais os pontos positivos e negativos ao usar o CTV?

---

---

**11. Na comparação das ferramentas CTM x CTV.**

Fazendo alusão ao uso do aparelho do CTM e da ferramenta CTV, além dos itens respondidos anteriormente, qual das duas ferramentas você optaria para resolver as atividades sobre as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente? Justifique

---

---

## **Questionários – Minicurso discente**

**Questionário A – Aplicado aos alunos do 2º ao dos Cursos Técnicos de Informática e Química Integrados ao Ensino Médio do IFNMG-Campus Montes Claros.**

Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)

Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

1. Qual Disciplina você estuda que mais gosta?

[Clique aqui para digitar texto.](#)

Por quê? [Clique aqui para digitar texto.](#)

2. Quanto à Matemática você considera

Muito difícil  Difícil  Fácil  Muito fácil

3. Seu professor já utilizou material manipulável em sala de aula? **Selecione**  
Se sim, Qual ou quais? [Clique aqui para digitar texto.](#)

4. Sobre o conteúdo trigonometria?

Não tenho dificuldades  Tenho dificuldades

5. Você conhece o ciclo trigonométrico?

Sim  Não  Pouco

6. Quais estratégias e recursos seu professor tem usado na aula que mais contribui no seu processo de aprendizagem em relação ao Ciclo Trigonométrico?

---

7. Que outros recursos e estratégias você sugere para as aulas em seu curso?

---

8. Quais razões trigonométricas você conhece?

seno  cosseno  tangente  cotangente  secante  
 cossecante

9. Quais eixos você conhece no ciclo trigonométrico?

seno  cosseno  tangente  cotangente  secante  
 cossecante

10. Marque ( + ) para positivo e ( - ) para negativo nos itens abaixo

$\sin 100^\circ$        $\cos 200^\circ$        $\operatorname{tg} 260^\circ$        $\operatorname{sec} 150^\circ$        $\operatorname{cossec} 80^\circ$   
 $\operatorname{cotg} 120^\circ$

11. Determine o valor dos itens abaixo

$\sin 30^\circ = \text{valor}$	$\cos 45^\circ = \text{valor}$	$\text{tg } 135^\circ = \text{valor}$
$\text{sec } 240^\circ = \text{valor}$	$\text{cosec } 60^\circ = \text{valor}$	$\text{cotg } 225^\circ = \text{valor}$

### Questionário B

**Minicurso:**  
**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA:**  
**CICLO TRIGONOMÉTRICO MANIPULÁVEL**

#### Questionário – Discente

Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)

Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

1. Qual sua opinião sobre o ciclo trigonométrico manipulável apresentado nesse minicurso?

2. O uso do ciclo trigonométrico manipulável facilitou a compreensão do conteúdo de trigonometria?

Sim, muito  Sim, pouco  Não

Justifique:

3. Este material poderá ser utilizado por você em seus estudos futuros?

Sim  talvez  Não

Justifique:

4. Na sua opinião quais os pontos positivos e negativos do material apresentado (CTM)?

## Questionário C

**Minicurso:**  
**ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA:**  
**CICLO TRIGONOMÉTRICO VIRTUAL**

## Questionário – discente

Nome: [Clique aqui para digitar texto.](#)

Sexo:  Masculino  Feminino Idade:

Escolaridade: [Clique aqui para digitar texto.](#)

## O uso da Ferramenta CTV

1. Tornou a aula mais motivadora e dinâmica?  Sim  Não

2. Contribuiu para um maior entendimento do conteúdo?  Sim  Não

3. É uma maneira melhor para realizar as atividades que o uso do CTM?  Sim  Não

Em quais aspectos?

---

4. Proporcionou um maior interesse para a realização dos exercícios?  Sim  Não

Se sim, por quê?

---

5. Despertou o seu interesse em estudar mais a disciplina?  Sim  Não

Por quê?

---

6. A ferramenta do CTV é de fácil compreensão?  Sim  Não

7. Deseja que outros assuntos estudados em matemática usassem ferramentas virtuais?  Sim  Não

8. Gostou de conhecer o CTV?  Sim  Não

9. Quais os pontos positivos e negativos ao usar o CTV?

**Na comparação das ferramentas CTM x CTV.**

Fazendo alusão ao uso do aparelho do CTM e da ferramenta CTV, além dos itens respondidos anteriormente, qual das duas ferramentas você optaria para resolver as atividades sobre as razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente? Justifique.

--

## LISTA DE ATIVIDADES

## Lista 1

Nome: \_\_\_\_\_

As atividades abaixo foram elaboradas ou escolhidas pelo autor, com o objetivo de os participantes da pesquisa verificarem em termos comparativo a eficiência no ensino-aprendizagem do aparelho CTM, no primeiro momento, e da ferramenta do CTV, no segundo momento, ao resolver os problemas básicos da trigonometria no ensino médio.

**Observação:** todas essas atividades deverão ser resolvidas fazendo o uso do aparelho do CTM ou CTV de acordo com o momento de sua realização.

**01.** Determine o valor de:

$\text{sen } 330^\circ = \text{----}; \text{cos } 240^\circ = \text{-----}; \text{sen } 30^\circ = \text{-----}, \text{tg}135^\circ = \text{-----}, \text{sec}45^\circ = \text{----}$   
 $\text{cossec}180^\circ = \text{-----}, \text{cotg}90^\circ = \text{-----}.$

**02.** Dê todos os valores de  $\alpha$ , considerando o intervalo  $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , tais que

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \text{tg} \alpha = 1, \quad \text{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{2},$$

$$\text{sec} \alpha = 2, \quad \text{cossec} \alpha = \sqrt{2}, \quad \text{cotg} \alpha = -\sqrt{3},$$

**03.** Dê o sinal de

$\text{sen } 112^\circ \quad \text{cos } 308^\circ \quad \text{tg}265^\circ \quad \text{cossec}328^\circ \quad \text{sec}185^\circ \quad \text{cotg}341^\circ$

**04.** Faça com que  $\alpha$  varie no intervalo  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  o que você percebe quanto aos valores da tangente? E se  $\alpha$  variar no intervalo de  $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ ? Que conclusão você chega?

Faça o mesmo com os intervalos  $270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  e com  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ . O que você percebe quanto a periodicidade dos valores da tangente?

**05.** Qual o valor máximo e valor mínimo de  $y$ ? sendo  $y = 5 - 2\cos\beta$ , para  $\beta \in [0, 2\pi]$ . E qual o valor de  $\beta$  faz com que  $y$  assumo esse máximo e mínimo?

**Lista 2**

01. Determinar o sinal da expressão  $Y = \sin 107^\circ + \cos 107^\circ$

02. (PUC – SP) Adaptada. Se  $\cos 2x = 0.2$ , Calcule a  $\operatorname{tg}^2 x$ .

03.(USININOS-RS) Adaptada. Um avião levanta voo sob um ângulo constante de  $24^\circ$ . Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente, neste momento?

04. Determine o valor do arco "x", para o qual  $32^{-\cos(x)} = \frac{1}{8}$ , para  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .

05. (ITA – 2017) Adaptada- O maior valor de  $\operatorname{tg} x$ , com  $x = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$  e

$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  é:

a)  $\frac{1}{4}$

b)  $\frac{1}{3}$

c)  $\frac{1}{2}$

d) 1

06. Aponte eventuais dificuldades consideradas por você ao resolver as atividades propostas nas ferramentas CTM / CTV.

Obrigado pela participação!

## APÊNDICE B – Código Fonte do CTV

```

<!DOCTYPE HTML>
<html>
<head>
<meta http-equiv="Content-type" content="text/html; charset=UTF-8">
<meta name="viewport"
      content="width=device-width, initial-scale=1.0, user-scalable=no">

<!--<script src="https://ajax.googleapis.com/ajax/libs/jquery/3.4.0/jquery.min.js"></script-->
<script src="https://code.createjs.com/1.0.0/easeljs.min.js"></script>
<script src="https://code.createjs.com/1.0.0/tweenjs.min.js"></script>
<script src='https://cdnjs.cloudflare.com/ajax/libs/mathjax/2.7.5/MathJax.js?config=TeX-MML-AM_CHTML'
      async></script>

<title>Ciclo trigonométrico </title>
<style>
.unselectable {
  -webkit-touch-callout: none;
  -webkit-user-select: none;
  -khtml-user-select: none;
  -moz-user-select: none;
  -ms-user-select: none;
  user-select: none;
}

#corpo {
  margin: auto;
  //max-width: 1300px;
  width: 1000px;
  //border-style: dashed;
  position: relative;
}

#corpo canvas {
  touch-action: none;
  margin-left: 50px;
  position: relative;
  //background-color: powderblue;
  //position: absolute;
  //background-color: #ffffe6;
}

#titulo {

```

```

        text-align: center;
        background-color: powderblue;
    }

table
{
    table-layout: fixed;
    position: relative;
    //width: 100px;
}

#corpo input {
    width: 60px;
}
</style>

<script type="text/x-mathjax-config">
MathJax.Hub.Config({
    tex2jax: {inlineMath: [['$', '$'], ['\(', '\)']]}
});
TeX: {
    extensions: ["AMSmath.js", "AMSsymbols.js"]
}
</script>
<script type="text/javascript" async
    src="https://cdnjs.cloudflare.com/ajax/libs/mathjax/2.7.5/MathJax.js?config=TeX-MML-AM_CHTML">
</script>

<script>

    const X_CENTRO = 420;
    const Y_CENTRO = 420;
    const RAIO = 200;
    const DESLOCAMENTO = 50;

    var stage;

    var s = new createjs.Shape();
    var ball = new createjs.Shape();
    var centro = new createjs.Shape();
    var notavel = new createjs.Shape(); //Pontos notáveis
    var dragger;

```

```
var linha = new createjs.Shape();

var seno = new createjs.Shape();
var cosseno = new createjs.Shape();
var tangente = new createjs.Shape();
var secante = new createjs.Shape();
var cossecante = new createjs.Shape();
var cotangente = new createjs.Shape();

var retaSecCossec = new createjs.Shape();

var textoSeno;
var textoCosseno;
var textoTangente;
var textoAngulo;
var textoSecante;
var textoCossecante;
var textoCotangente;

var anguloMostrar;

var containerSeno;
var containerCosseno;
var containerTangente;
var containerAngulo;
var containerValoresNotaveis;
var containerSecante;
var containerCossecante;
var containerCotangente;

var graus = new createjs.Shape();

var textoValoresNotaveis, valoresNotaveis;

function init() {
    /*document.getElementById("corpo").addEventListener('touchmove', function(e) {
        mouse.x = e.pageX;
        mouse.y = e.pageY;
        handlerPos.x = e.pageX;
        handlerPos.y = e.pageY;
    }, false);*/

    stage = new createjs.Stage("demoCanvas");
```

```

// Enable touch events while allowing the touch events to bubble up to the document.
createjs.Touch.enable( stage, false, true );

// Don't let the stage to automatically prevent default touch events.
stage.preventSelection = false;

//DESENHA CICLO TRIGONOMÉTRICO
s.graphics.setStrokeStyle(3);
s.graphics.beginStroke("#000000");
s.graphics.drawCircle(X_CENTRO,Y_CENTRO,RAIO);

stage.addChild(s);
stage.update();

//DESENHA CENTRO
centro.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO,Y_CENTRO,5);
stage.addChild(centro);
stage.update();

//DESENHA PONTOS NOTÁVEIS
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, 1/2*RAIO + Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, Math.sqrt(2)/2*RAIO + Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, Math.sqrt(3)/2*RAIO + Y_CENTRO, 3);

notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, - 1/2*RAIO + Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, - Math.sqrt(2)/2*RAIO + Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, - Math.sqrt(3)/2*RAIO + Y_CENTRO, 3);

notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(- 1/2*RAIO + X_CENTRO, Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(- Math.sqrt(2)/2*RAIO + X_CENTRO, Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(- Math.sqrt(3)/2*RAIO + X_CENTRO, Y_CENTRO, 3);

notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(1/2*RAIO + X_CENTRO, Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(Math.sqrt(2)/2*RAIO + X_CENTRO, Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(Math.sqrt(3)/2*RAIO + X_CENTRO, Y_CENTRO, 3);

notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, RAIO + Y_CENTRO, 3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, - RAIO + Y_CENTRO, 3);

notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, - Math.sqrt(3) * RAIO + Y_CENTRO,
3);
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, + Math.sqrt(3) * RAIO + Y_CENTRO,
3);

```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, - Math.sqrt(3)/3 * RAIO +
Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, + Math.sqrt(3)/3 * RAIO +
Y_CENTRO, 3);
```

```
//COSSECANTE
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAIO + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, - 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAIO + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, 2 * RAIO + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, - 2 * RAIO + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, Math.sqrt(2) * RAIO + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO, - Math.sqrt(2) * RAIO + Y_CENTRO, 3);
```

```
//SECANTE
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO - Math.sqrt(2) * RAIO, + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + Math.sqrt(2) * RAIO, + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAIO, + Y_CENTRO,
3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO - 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAIO, + Y_CENTRO,
3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO - 2 * RAIO, + Y_CENTRO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + 2 * RAIO, + Y_CENTRO, 3);
```

```
//COTANGENTE
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO, Y_CENTRO - RAIO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO - RAIO, Y_CENTRO - RAIO, 3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO * Math.sqrt(3), Y_CENTRO - RAIO,
3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO - RAIO * Math.sqrt(3), Y_CENTRO - RAIO,
3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO + RAIO * Math.sqrt(3)/3, Y_CENTRO - RAIO,
3);
```

```
notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(X_CENTRO - RAIO * Math.sqrt(3)/3, Y_CENTRO - RAIO,
3);
```

```
desenhaPonto(notavel, Math.PI/6);
```

```
desenhaPonto(notavel, Math.PI/4);
```

```
desenhaPonto(notavel, Math.PI/3);
```

```
desenhaPonto(notavel, -Math.PI/6);
```

```
desenhaPonto(notavel, -Math.PI/4);
```

```
desenhaPonto(notavel, -Math.PI/3);
```

```

desenhaPonto(notavel, Math.PI-Math.PI/6);
desenhaPonto(notavel, Math.PI-Math.PI/4);
desenhaPonto(notavel, Math.PI-Math.PI/3);

desenhaPonto(notavel, Math.PI+Math.PI/6);
desenhaPonto(notavel, Math.PI+Math.PI/4);
desenhaPonto(notavel, Math.PI+Math.PI/3);

stage.addChild(notavel);

//stage.update();

//DESENHA EIXO X
desenhaReta(linha, {x: X_CENTRO - RAI0 - 300 , y: Y_CENTRO}, {x: X_CENTRO + RAI0 + 300 , y:
Y_CENTRO}, 'green');
stage.addChild(linha);
stage.update();

//DESENHA EIXO Y
desenhaReta(linha, {x: X_CENTRO , y: Y_CENTRO - RAI0 - 500}, {x: X_CENTRO , y: Y_CENTRO +
RAI0 + 500}, 'green');
stage.addChild(linha);
stage.update();

//DESENHA EIXO TANGENTE
desenhaReta(linha, {x: X_CENTRO + RAI0 , y: 0}, {x: X_CENTRO + RAI0 , y:
document.getElementById("demoCanvas").height}, 'green');
stage.addChild(linha);
stage.update();

//DESENHA EIXO COTANGENTE
desenhaReta(linha, {x: 0 , y: Y_CENTRO - RAI0}, {x: document.getElementById("demoCanvas").width ,
y: Y_CENTRO - RAI0}, 'green');
stage.addChild(linha);
stage.update();

//DESENHA CÍRCULO MÓVEL
ball.graphics.beginFill("red").drawCircle(0, 0, 15);

dragger = new createjs.Container();
dragger.x = X_CENTRO+RAI0;
dragger.y = Y_CENTRO;
//$(dragger).css("touch-action","none");

```

```
//dragger.style.touch-action = "none";

dragger.addChild(ball);

stage.addChild(dragger);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR VALOR DO SENO
containerSeno = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerSeno, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR VALOR DO COSSENO
containerCosseno = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerCosseno, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR VALOR DA TANGENTE
containerTangente = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerTangente, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR SECANTE
containerSecante = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerSecante, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR COSSECANTE
containerCossecante = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerCossecante, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR COTANGENTE
containerCotangente = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerCotangente, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER PARA ADICIONAR VALOR DO ÂNGULO
containerAngulo = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerAngulo, DESLOCAMENTO, 0, true);

//CRIAR CONTAINER DE VALORES NOTÁVEIS
containerValoresNotaveis = new createjs.Container();
inicializaContainer(containerValoresNotaveis, DESLOCAMENTO, 0, true);

//SELECIONA DIVS QUE CONTERÃO TEXTO COM VALORES
textoSeno = new createjs.DOMElement("txtSenoP");
textoCosseno = new createjs.DOMElement("txtCossenoP");
textoTangente = new createjs.DOMElement("txtTangenteP");
textoAngulo = new createjs.DOMElement("txtAnguloP");
```

```

textoSecante = new createjs.DOMElement("txtSecanteP");
textoCossecante = new createjs.DOMElement("txtCossecanteP");
textoCotangente = new createjs.DOMElement("txtCotangenteP");

containerSeno.addChild(textoSeno);
containerCosseno.addChild(textoCosseno);
containerTangente.addChild(textoTangente);
containerAngulo.addChild(textoAngulo);
containerSecante.addChild(textoSecante);
containerCossecante.addChild(textoCossecante);
containerCotangente.addChild(textoCotangente);

//CRIA VALORES NOTÁVEIS PARA MOSTRAR

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("seno1");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 30, 1/2*RAIO + Y_CENTRO- 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("seno2");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 20, - 1/2*RAIO + Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("seno3");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 35, Math.sqrt(2)/2*RAIO + Y_CENTRO - 30,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("seno4");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 25, - Math.sqrt(2)/2*RAIO + Y_CENTRO - 30,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("seno5");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 35, Math.sqrt(3)/2*RAIO + Y_CENTRO - 30,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("seno6");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 25, - Math.sqrt(3)/2*RAIO + Y_CENTRO - 30,
containerValoresNotaveis, true);

```

```

//-----

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cos1");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, 1/2 * RAIO + X_CENTRO - 5, Y_CENTRO - 75,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cos2");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - 1/2 * RAIO + X_CENTRO - 20, Y_CENTRO - 75,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cos3");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(2)/2 * RAIO + X_CENTRO - 5, Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cos4");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(2)/2 * RAIO + X_CENTRO - 20, Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cos5");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(3)/2 * RAIO + X_CENTRO - 5, Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cos6");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(3)/2 * RAIO + X_CENTRO - 25, Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

//-----

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("tg1");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, RAIO + X_CENTRO + 10, - RAIO + Y_CENTRO - 10,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("tg2");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, RAIO + X_CENTRO + 10, RAIO + Y_CENTRO - 10,
containerValoresNotaveis, true);

```

```

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("tg3");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, RAIO + X_CENTRO + 10, - Math.sqrt(3)/3 * RAIO + Y_CENTRO -
10, containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("tg4");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, RAIO + X_CENTRO + 10, Math.sqrt(3)/3 * RAIO + Y_CENTRO -
10, containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("tg5");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, RAIO + X_CENTRO + 10, - Math.sqrt(3) * RAIO + Y_CENTRO - 10,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("tg6");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, RAIO + X_CENTRO + 10, Math.sqrt(3) * RAIO + Y_CENTRO - 10,
containerValoresNotaveis, true);

//-----
textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("sec1");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAIO + X_CENTRO , Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("sec2");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAIO + X_CENTRO - 25, Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("sec3");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(2) * RAIO + X_CENTRO , Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("sec4");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(2) * RAIO + X_CENTRO - 25 , Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("sec5");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, 2 * RAIO + X_CENTRO , Y_CENTRO - 50,

```

```

containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("sec6");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - 2 * RAI0 + X_CENTRO - 15 , Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

//-----
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cossec1");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 30, - 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAI0 + Y_CENTRO - 25,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cossec2");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 40, 2 * Math.sqrt(3)/3 * RAI0 + Y_CENTRO - 15,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cossec3");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 30, - Math.sqrt(2) * RAI0 + Y_CENTRO - 25,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cossec4");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 40, Math.sqrt(2) * RAI0 + Y_CENTRO - 15,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cossec5");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 15, - 2 * RAI0 + Y_CENTRO - 25,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cossec6");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - 25, 2 * RAI0 + Y_CENTRO - 15,
containerValoresNotaveis, true);

//-----
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cotg1");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(3) * RAI0 + X_CENTRO, - RAI0 + Y_CENTRO - 35,
containerValoresNotaveis, true);

```

```

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cotg2");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(3) * RAIO + X_CENTRO, - RAIO + Y_CENTRO - 35,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cotg4");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - RAIO + X_CENTRO, - RAIO + Y_CENTRO - 35,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cotg5");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(3)/3 * RAIO + X_CENTRO, - RAIO + Y_CENTRO - 50,
containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("cotg6");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(3)/3 * RAIO + X_CENTRO - 10, - RAIO + Y_CENTRO -
50, containerValoresNotaveis, true);

//-----
textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a30");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(3)/2 * RAIO + X_CENTRO + 10, - 1/2 * RAIO +
Y_CENTRO - 30, containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a45");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(2)/2 * RAIO + X_CENTRO + 10, - Math.sqrt(2)/2 * RAIO +
Y_CENTRO - 30, containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a60");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, 1/2 * RAIO + X_CENTRO + 10, - Math.sqrt(3)/2 * RAIO +
Y_CENTRO - 30, containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a120");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - 1/2 * RAIO + X_CENTRO - 10, - Math.sqrt(3)/2 * RAIO +
Y_CENTRO - 40, containerValoresNotaveis, true);

textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a240");
containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - 1/2 * RAIO + X_CENTRO - 10, Math.sqrt(3)/2 * RAIO +

```

```
Y_CENTRO , containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a300");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, 1/2 * RAI0 + X_CENTRO - 10, Math.sqrt(3)/2 * RAI0 +
Y_CENTRO, containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a135");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(2)/2 * RAI0 + X_CENTRO - 20, - Math.sqrt(2)/2 * RAI0
+ Y_CENTRO - 38, containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a225");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(2)/2 * RAI0 + X_CENTRO - 15, Math.sqrt(2)/2 * RAI0 +
Y_CENTRO, containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a315");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(2)/2 * RAI0 + X_CENTRO - 5, Math.sqrt(2)/2 * RAI0 +
Y_CENTRO , containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a150");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(3)/2 * RAI0 + X_CENTRO - 30, - 1/2 * RAI0 +
Y_CENTRO - 30, containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a210");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, - Math.sqrt(3)/2 * RAI0 + X_CENTRO - 25, 1/2 * RAI0 +
Y_CENTRO - 5, containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a330");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, Math.sqrt(3)/2 * RAI0 + X_CENTRO, 1/2 * RAI0 + Y_CENTRO -5,
containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a0");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO + RAI0 + 10, Y_CENTRO - 10,
containerValoresNotaveis, true);
```

```
    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a90");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
```

```

    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO + 5, Y_CENTRO - RAIO - 30,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a180");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO - RAIO - 30, Y_CENTRO - 10,
containerValoresNotaveis, true);

    textoValoresNotaveis = new createjs.DOMElement("a270");
    containerValoresNotaveis.addChild(textoValoresNotaveis);
    atualizaLabel(textoValoresNotaveis, X_CENTRO + 5, Y_CENTRO + RAIO - 10,
containerValoresNotaveis, true);

    stage.addChild(containerValoresNotaveis);
    stage.update();

    ///INICIALIZAÇÃO DO DESENHO COM BASE NO ANGULO 0
    document.getElementById("anguloEntrada").value = 0;
    atualizarAngulo();

    ///INICIALIZAÇÃO GRAUS
    desenhaAngulo(0);
    stage.addChild();

    dragger.on("touchstart", function(event) {event.preventDefault();});
    dragger.on("touchmove", function(event) {event.preventDefault();})
    dragger.on("touchend", function(event) {event.preventDefault();})
    dragger.on("touchcancel", function(event) {event.preventDefault();})

    dragger.on('pressmove', function(event) {
        event.preventDefault();

        limparParaMovimento();

        //Ângulo entre dragger e centro, considerando eixo horizontal
        var angulo = Math.atan2(event.stageY - Y_CENTRO, event.stageX - X_CENTRO);

        event.currentTarget.x = RAIO * Math.cos(angulo) + X_CENTRO;
        event.currentTarget.y = RAIO * Math.sin(angulo) + Y_CENTRO;

        atualizarInformacoes(angulo);

```

```

desenhaAngulo(angulo);

//Ângulo em graus
anguloMostrar = (- angulo * 180/Math.PI).toFixed(3);

mostrarAngulo(anguloMostrar);

desenhaRelacoesERotulos(angulo);

stage.addChild(seno);
stage.addChild(cosseno);
stage.addChild(tangente);

stage.addChild(graus);

stage.update();
});

stage.update();

}

//Posiciona o container "container" e atribui visibilidade
function inicializaContainer(container, valorX, valorY, visibilidade) {
    container.x = 0;
    container.y = 0;
    container.visible = visibilidade;
    stage.addChild(container);
}

//Dado o label "texto" dentro do container "container", estabelece suas posições x e y e sua visibilidade
function atualizaLabel(texto, valorX, valorY, container, visibilidade = true) {
    texto.x = valorX + DESLOCAMENTO;
    texto.y = valorY;
    container.visible = visibilidade;
    container.addChild(texto);
}

//Caso o ângulo seja negativo, converte para positivo = ângulos sempre entre 0 e 360
function mostrarAngulo(anguloMostrar) {
    if(anguloMostrar < 0)
        document.getElementById("anguloEntrada").value = (Number(anguloMostrar) +
Number(360)).toFixed(3);

```

```

else
    document.getElementById("anguloEntrada").value = anguloMostrar;
}

//Limpa valores atuais de seno e cosseno representados pelas retas nos eixos x e y
function limparParaMovimento() {
    seno.graphics.clear();
    cosseno.graphics.clear();
    tangente.graphics.clear();
    graus.graphics.clear();

    secante.graphics.clear();
    cossecante.graphics.clear();
    cotangente.graphics.clear();
    retaSecCossec.graphics.clear();

    stage.update();
}

//Desenha reta com variável "eixo" do ponto "p1" ao ponto "p2" com a cor "cor"
//stroke = true ou false
function desenhaReta(eixo, p1, p2, cor, stroke=false) {
    if(stroke == true)
        eixo.graphics.setStrokeDash([2,6],0);
    else
        eixo.graphics.setStrokeStyle(2);

    eixo.graphics.beginStroke(cor);
    eixo.graphics.moveTo(p1.x , p1.y);
    eixo.graphics.lineTo(p2.x , p2.y);
    eixo.graphics.endStroke();
}

function atualizarInformacoes(angulo) {
    document.getElementById("seno").value = - Math.sin(angulo).toFixed(3);
    //document.getElementById("seno").innerHTML = - Math.sin(angulo).toFixed(3);
    document.getElementById("cosseno").value = Math.cos(angulo).toFixed(3);
    //document.getElementById("cosseno").innerHTML = Math.cos(angulo).toFixed(3);

    //TANGENTE
    if(document.getElementById("seno").value == 1 && document.getElementById("cosseno").value == 0) {

```

```

//document.getElementById("tangente").innerHTML = "---";
document.getElementById("tangente").value = "";
}
else {
    if(document.getElementById("seno").value == - 1 &&
document.getElementById("cosseno").value == 0) {
        //document.getElementById("tangente").innerHTML = "---";
        document.getElementById("tangente").value = "---";
    }
    else {
        //document.getElementById("tangente").innerHTML = -Math.tan(angulo).toFixed(3);
        document.getElementById("tangente").value = -Math.tan(angulo).toFixed(3);
    }
}

}

//COSSECANTE e COTANGENTE
if(document.getElementById("seno").value == 0 && document.getElementById("cosseno").value == 1) {
    //document.getElementById("cossec").innerHTML = "---";
    //document.getElementById("cotg").innerHTML = "---";
    document.getElementById("cossec").value = "";
    document.getElementById("cotg").value = "";
}
else {
    if(document.getElementById("seno").value == 0 && document.getElementById("cosseno").value
== -1) {
        //document.getElementById("cossec").innerHTML = "---";
        //document.getElementById("cotg").innerHTML = "---";
        document.getElementById("cossec").value = "";
        document.getElementById("cotg").value = "";
    }
    else {
        //document.getElementById("cossec").innerHTML =
(1/document.getElementById("seno").innerHTML).toFixed(3);
        //document.getElementById("cotg").innerHTML =
(1/document.getElementById("tangente").innerHTML).toFixed(3);
        //alert("Seno" + document.getElementById("seno").innerHTML + "\nTg:" + )
        document.getElementById("cossec").value =
(1/document.getElementById("seno").value).toFixed(3);

        if(document.getElementById("tangente").value != 0)
            document.getElementById("cotg").value =
(1/document.getElementById("tangente").value).toFixed(3);
    }
}

```

```

}

//SECANTE
if(document.getElementById("cosseno").value == 0 && document.getElementById("seno").value == 1){
    //document.getElementById("sec").innerHTML = "---";
    //!!!!!!!document.getElementById("sec").value = "---";
}
else {
    if(document.getElementById("cosseno").value == 0 && document.getElementById("seno").value
== -1){
        //document.getElementById("sec").innerHTML = "---";
        //!!!!!!!document.getElementById("sec").value = "---";
    }
    else
        //document.getElementById("sec").innerHTML =
(1/document.getElementById("cosseno").innerHTML).toFixed(3);
        document.getElementById("sec").value =
(1/document.getElementById("cosseno").value).toFixed(3);
    }
}

function desenhaRelacoesERotulos(angulo) {
    //CRIAR LABEL COM VALOR DO SENO
    document.getElementById("txtSenoP").innerHTML = document.getElementById("seno").value;
    atualizaLabel(textoSeno, X_CENTRO, (dragger.y + Y_CENTRO)/2 - 20, containerSeno);

    //CRIAR LABEL COM VALOR DO COSSENO
    document.getElementById("txtCossenoP").innerHTML = document.getElementById("cosseno").value;
    atualizaLabel(textoCosseno, (dragger.x + X_CENTRO)/2 - 20, Y_CENTRO, containerCosseno);

    //CRIAR LABEL COM VALOR DA TANGENTE
    if(document.getElementById("tangente").innerHTML.localeCompare("---") != 0) {
        document.getElementById("txtTangenteP").innerHTML =
document.getElementById("tangente").value;

        atualizaLabel(textoTangente, X_CENTRO+RAIO, (RAIO * Math.tan(angulo))/2 + Y_CENTRO,
containerTangente);
    }

    //CRIAR LABEL COM VALOR DA COSSECANTE
    if(document.getElementById("cossec").innerHTML.localeCompare("---") != 0) {

```

```

        document.getElementById("txtCossecanteP").innerHTML =
document.getElementById("cossec").value;
        atualizaLabel(textoCossecante, X_CENTRO, Y_CENTRO + RAI0 * 1/Math.sin(angulo),
containerCossecante);
    }

//CRIA LABEL COM VALOR DA COTANGENTE

if(document.getElementById("cotg").innerHTML.localeCompare("---") != 0) {
    document.getElementById("txtCotangenteP").innerHTML =
document.getElementById("cotg").value;
    atualizaLabel(textoCotangente, X_CENTRO - RAI0 * 1/Math.tan(angulo), Y_CENTRO - RAI0,
containerCossecante);
}

//CRIA LABEL COM VALOR DA SECANTE

if(document.getElementById("sec").innerHTML.localeCompare("---") != 0) {
    document.getElementById("txtSecanteP").innerHTML = document.getElementById("sec").value;
    atualizaLabel(textoSecante, X_CENTRO + RAI0 * 1/Math.cos(angulo), Y_CENTRO,
containerSecante);
}

//CRIA LABEL COM VALOR DO ÂNGULO
document.getElementById("txtAnguloP").innerHTML =
document.getElementById("anguloEntrada").value + "&deg";
atualizaLabel(textoAngulo, X_CENTRO - 50, Y_CENTRO - 30, containerAngulo);

//DESENHA RETAS QUE REPRESENTAM SEN0, COSSENO E TANGENTE
desenhaReta(seno, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO}, {x: X_CENTRO, y: dragger.y}, 'blue');
desenhaReta(seno, {x: X_CENTRO, y: dragger.y}, {x: dragger.x, y: dragger.y}, 'blue', true);

desenhaReta(cosseno, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO}, {x: dragger.x, y: Y_CENTRO}, '#ff00ff');
desenhaReta(cosseno, {x: dragger.x, y: Y_CENTRO}, {x: dragger.x, y: dragger.y}, '#ff00ff', true);

anguloAux = document.getElementById("anguloEntrada").value % 360;

if(anguloAux < 270 && anguloAux > 90) {

    desenhaReta(tangente, {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 * Math.tan(angulo) + Y_CENTRO},
{x: X_CENTRO + RAI0, y: Y_CENTRO}, 'purple');
    desenhaReta(tangente, {x: dragger.x, y: dragger.y}, {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 *
Math.tan(angulo) + Y_CENTRO}, 'purple', true);

```

```

        //desenhaReta(tangente, {x: X_CENTRO - RAI0 * 1/Math.tan(angulo), y: Y_CENTRO - RAI0},
        {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 * Math.tan(angulo) + Y_CENTRO}, 'purple', true);
    }
    else {
        if((anguloAux > 270 && anguloAux < 360) || (anguloAux >= 0 && anguloAux < 90)) {

                desenhaReta(tangente, {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 * Math.tan(angulo) +
                Y_CENTRO}, {x: X_CENTRO + RAI0, y: Y_CENTRO}, 'purple');
                //desenhaReta(tangente, {x: X_CENTRO - RAI0 * 1/Math.tan(angulo), y: Y_CENTRO -
                RAI0}, {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 * Math.tan(angulo) + Y_CENTRO}, 'purple', true);
                desenhaReta(tangente, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO}, {x: X_CENTRO + RAI0 , y:
                RAI0 * Math.tan(angulo) + Y_CENTRO}, 'purple', true);
            }
        }

        //DESENHA SECANTE E COSSECANTE e Reta entre elas
        desenhaReta(secante, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO}, {x: X_CENTRO + RAI0 * 1/Math.cos(angulo), y:
        Y_CENTRO}, '#cc3300');
        desenhaReta(cossecante, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO}, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO + RAI0 *
        1/Math.sin(angulo)}, '#ffcc66');

        desenhaReta(retaSecCossec, {x: X_CENTRO + RAI0 * 1/Math.cos(angulo), y: Y_CENTRO}, {x:
        X_CENTRO, y: Y_CENTRO + RAI0 * 1/Math.sin(angulo)}, 'red');

        //DESENHA COTANGENTE
        if(anguloAux < 270 && anguloAux > 90) {

                desenhaReta(cotangente, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO - RAI0}, {x: X_CENTRO - RAI0 *
                1/Math.tan(angulo), y: Y_CENTRO - RAI0}, '#6666ff');
                desenhaReta(cotangente, {x: X_CENTRO - RAI0 * 1/Math.tan(angulo), y: Y_CENTRO - RAI0},
                {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 * Math.tan(angulo) + Y_CENTRO}, '#6666ff', true);
            }
        else {
            if((anguloAux > 270 && anguloAux < 360) || (anguloAux >= 0 && anguloAux < 90)) {

                    desenhaReta(cotangente, {x: X_CENTRO, y: Y_CENTRO - RAI0}, {x: X_CENTRO -
                    RAI0 * 1/Math.tan(angulo), y: Y_CENTRO - RAI0}, '#6666ff');
                    desenhaReta(cotangente, {x: X_CENTRO - RAI0 * 1/Math.tan(angulo), y: Y_CENTRO
                    - RAI0}, {x: X_CENTRO + RAI0 , y: RAI0 * Math.tan(angulo) + Y_CENTRO}, '#6666ff', true);
                }
            }
        }
    }
}

```

```

}

//Desenha o ângulo interno
function desenhaAngulo(anguloRad) {
    graus.graphics.beginFill("rgba(0,0,0,1)");
    graus.alpha = 0.4;
    graus.graphics.arc(X_CENTRO, Y_CENTRO, 30, 0, anguloRad, true);
    graus.graphics.lineTo(X_CENTRO, Y_CENTRO);
    graus.graphics.closePath();
}

//Parte de um ângulo em radianos e desenha ponto na circunferência. Útil para pontos notáveis.
function desenhaPonto(desenho, anguloRad) {
    x = RAIO * Math.cos(anguloRad) + X_CENTRO;
    y = RAIO * Math.sin(anguloRad) + Y_CENTRO;

    notavel.graphics.beginFill("black").drawCircle(x, y, 4);
}

function atualizarAngulo() {
    angulo = - document.getElementById("anguloEntrada").value * Math.PI / 180;

    //alert(angulo);

    dragger.x = RAIO * Math.cos(angulo) + X_CENTRO;
    dragger.y = RAIO * Math.sin(angulo) + Y_CENTRO;

    limparParaMovimento();

    atualizarInformacoes(angulo);
    desenhaAngulo(angulo);

    desenhaRelacoesERotulos(angulo);

    stage.addChild(graus);
    stage.addChild(secante);

    stage.addChild(cossecante);

```

```

stage.addChild(retaSecCossec);
stage.addChild(cotangente);
stage.addChild(seno);
stage.addChild(cosseno);
stage.addChild(tangente);

stage.update();
}

function atualizarSeno() {
  if (isNaN(Math.asin(document.getElementById("seno").value)) === true){
    alert("Valor inválido para seno!");
    document.getElementById("anguloEntrada").value = "0";
    atualizarAngulo();
  }

  document.getElementById("anguloEntrada").value =
(180*Math.asin(document.getElementById("seno").value)/Math.PI).toFixed(3);
  atualizarAngulo();
}

function atualizarCos() {
  if(isNaN(Math.acos(document.getElementById("cosseno").value))) {
    alert("Valor inválido para cosseno!");
    document.getElementById("anguloEntrada").value = "0";
    atualizarAngulo();
  }

  document.getElementById("anguloEntrada").value =
(180*Math.acos(document.getElementById("cosseno").value)/Math.PI).toFixed(3);
  atualizarAngulo();
}

function atualizarTg() {
  if(isNaN(Math.atan(document.getElementById("tangente").value))) {
    alert("Valor inválido para tangente!");
    document.getElementById("anguloEntrada").value = "0";
    atualizarAngulo();
  }

  document.getElementById("anguloEntrada").value =
(180*Math.atan(document.getElementById("tangente").value)/Math.PI).toFixed(3);
  atualizarAngulo();
}

```

```

function atualizarSec() {
    if(isNaN(Math.acos(1/document.getElementById("sec").value))) {
        alert("Valor inválido para secante!");
        document.getElementById("anguloEntrada").value = "0";
        atualizarAngulo();
    }

    document.getElementById("anguloEntrada").value =
(180*Math.acos(1/document.getElementById("sec").value)/Math.PI).toFixed(3);
    atualizarAngulo();
}

function atualizarCossec() {
    if(isNaN(Math.asin(1/document.getElementById("cossec").value))) {
        alert("Valor inválido para cossecante!");
        document.getElementById("anguloEntrada").value = "0";
        atualizarAngulo();
    }

    document.getElementById("anguloEntrada").value =
(180*Math.asin(1/document.getElementById("cossec").value)/Math.PI).toFixed(3);
    atualizarAngulo();
}

function atualizarCotg() {
    if(isNaN(Math.atan(1/document.getElementById("cotg").value))) {
        alert("Valor inválido para cotangente!");
        document.getElementById("anguloEntrada").value = "0";
        atualizarAngulo();
    }

    document.getElementById("anguloEntrada").value =
(180*Math.atan(1/document.getElementById("cotg").value)/Math.PI).toFixed(3);
    atualizarAngulo();
}
}
</script>

<script>

</script>
</head>

```

```
<body id="corpo" onload="init()" >
```

```
<h1 id="titulo"> Ciclo Trigonométrico Virtual </h1>
```

```
<span id="dialogo">
```

```
<b>Informe um ângulo (°):</b>      <input type="number" id="anguloEntrada"
onchange="atualizarAngulo()" maxlength="10">
```

```
</span>
```

```
<br> <br>
```

```
<table style="width:100%">
```

```
<tr>
```

```
<td> <b>Seno: </b> </td>
```

```
<!--<td> <span id="seno"> </span> </td> -->
```

```
<td> <input type="number" id="seno" onchange="atualizarSeno()" maxlength="5"> </td>
```

```
<td> <b>Cos: </b> </td>
```

```
<!--<td> <span id="cosseno"> </span> </td> -->
```

```
<td> <input type="number" id="cosseno" onchange="atualizarCos()"> </td>
```

```
<td> <b>Tan: </b> </td>
```

```
<!--<td> <span id="tangente"> </span> </td>-->
```

```
<td> <input type="number" id="tangente" onchange="atualizarTg()"> </td>
```

```
</tr>
```

```
<tr>
```

```
<td> <b>Sec: </b> </td>
```

```
<!--<td> <span id="sec"> </span> </td> -->
```

```
<td> <input type="number" id="sec" onchange="atualizarSec()"> </td>
```

```
<td> <b>Cossec: </b> </td>
```

```
<!--<td> <span id="cossec"> </span> </td> -->
```

```
<td> <input type="number" id="cossec" onchange="atualizarCossec()"> </td>
```

```
<td> <b>Cotg: </b> </td>
```

```
<!--<td> <span id="cotg"> </span> </td>-->
```

```
<td> <input type="number" id="cotg" onchange="atualizarCotg()"> </td>
```

```
</tr>
```

```
</table>
```

```
<p id="txtSenoP" style="color:#00F; margin: 10px; font-weight: bold;" class="unselectable"> </p>
```

```
<p id="txtCossenoP" style="color:#ff00ff; font-weight: bold;" class="unselectable"> </p>
```

<!-- Cor antiga: #ffccff -->

<p id="txtTangenteP" style="color:#660066; margin: 10px; font-weight: bold;" class="unselectable"> </p>

<p id="txtAnguloP" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable"> </p>

<p id="txtSecanteP" style="color:#cc3300; font-weight: bold;" class="unselectable"> <p>

<p id="txtCossecanteP" style="color:#ffcc66; font-weight: bold; margin: 5px" class="unselectable"> <p>

<p id="txtCotangenteP" style="color:#6666ff; font-weight: bold; margin: 5px;" class="unselectable"> <p>

<p id="seno1" style="color:#000; font-weight: bold; visible: false" class="unselectable">  $\frac{1}{2}$   
</p>

<p id="seno2" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{2}$  </p>

<p id="seno3" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  </p>

<p id="seno4" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  </p>

<p id="seno5" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="seno6" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="cos1" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{2}$  </p>

<p id="cos2" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{2}$  </p>

<p id="cos3" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  </p>

<p id="cos4" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  </p>

<p id="cos5" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="cos6" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="tg1" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $1$  </p>

<p id="tg2" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-1$  </p>

<p id="tg3" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="tg4" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="tg5" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\sqrt{3}$  </p>

<p id="tg6" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\sqrt{3}$  </p>

<p id="sec1" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="sec2" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="sec3" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\sqrt{2}$  </p>

<p id="sec4" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\sqrt{2}$  </p>

<p id="sec5" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $2$  </p>

<p id="sec6" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-2$  </p>

<p id="cossec1" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="cossec2" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$  </p>

<p id="cossec3" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\sqrt{2}$  </p>

<p id="cossec4" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\sqrt{2}$  </p>

<p id="cossec5" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $2$  </p>

<p id="cossec6" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\$2$  </p>

<p id="cotg1" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\sqrt{3}$  </p>

<p id="cotg2" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\sqrt{3}$  </p>

<!--<p id="cotg3" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$1$  </p-->

<p id="cotg4" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\$1$  </p>

<p id="cotg5" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  </p>

<p id="cotg6" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  </p>

<p id="a30" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$30^{\circ}$  </p>

<p id="a45" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$45^{\circ}$  </p>

<p id="a60" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$60^{\circ}$  </p>

<p id="a120" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$120^{\circ}$  </p>

<p id="a135" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$135^{\circ}$  </p>

<p id="a150" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$150^{\circ}$  </p>

<p id="a210" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$210^{\circ}$  </p>

<p id="a225" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$225^{\circ}$  </p>

<p id="a240" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$240^{\circ}$  </p>

<p id="a300" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$300^{\circ}$  </p>

<p id="a315" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$315^{\circ}$  </p>

<p id="a330" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$330^{\circ}$  </p>

<p id="a90" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$90^{\circ}$  </p>

<p id="a180" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$180^{\circ}$  </p>

<p id="a270" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$270^{\circ}$  </p>

<p id="a0" style="color:#000; font-weight: bold" class="unselectable">  $\$0^{\circ}$  </p>

<canvas id="demoCanvas" width="850" height="900" style="border-style: solid;"></canvas>