UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROMÁRIO FREIRE SANTOS

SEMIÓTICA E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO BÁSICO

Vitória da Conquista - BA
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA - UESB
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ROMÁRIO FREIRE SANTOS

SEMIÓTICA E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Roseane Ramos.

Vitória da Conquista - BA
2019

S238s Santos, Romário Freire.
Semiótica e relação de equivalência entre sistemas lineares no ensino básico. / Romário Freire Santos, 2019.
158f. il.
Orientador (a): Dra. Maria Aparecida Roseane Ramos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2019.
Inclui referências. 133 - 136.
1. Matemática. 2. Sistemas lineares. 3. Representações semióticas. 4.Tecnologias digitais. I. Ramos, Maria Aparecida Roseane. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 510

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

ROMÁRIO FREIRE SANTOS

SEMIÓTICA E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Roseane Ramos (Orientadora)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Sandra cristina Ramos

Prof.ª Dr.ª Sandra Cristina Ramos
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

Selma Rozane Vieira

Prof.ª Dr.ª Selma Rozane Vieira
Instituto Federal da Bahia - IFBA

Vitória da Conquista - BA

2019

Dedico este trabalho ao meu avô Manoel Freire (*in memoriam*) que me acompanhou nesta caminhada do mestrado durante vinte e seis meses.

AGRADECIMENTOS

A Deus, Fonte de amor e sabedoria, Digno de toda honra e toda glória.

À minha mãe Lindomar e meu pai Nelson, que me apoiam e incentivam em todos os projetos. Agradeço pelas orações.

Às minhas irmãs Jéssica Thais, Queilla e Franciele, que apoiam e acreditam em meus projetos. Obrigado pelas orações durante toda caminhada.

Aos meus avós, que sempre acreditaram nos meus projetos. Manoel (*in memoriam*), Carmelita obrigado pelo amor e orações.

À minha namorada, Jéssica, pelas orações, incentivo e apoio, por estar sempre acreditando e orientando.

Aos meus colegas, que fizeram parte dessa trajetória, obrigado por toda contribuição, carinho e amizade. A Lupicino, amigo e companheiro de estudos desde a seleção do Mestrado, Deus abençoe pela disponibilidade do carro para realizar as viagens à Vitória da Conquista. A Marcos André, amigo e companheiro de estudos, Deus abençoe pela disponibilidade do carro para realizar as viagens à Vitória da Conquista. À Lídia Vidal, amiga de estudos e companheira das viagens. À Erlon e Júlio Max, pelo companheirismo nos estudos e disponibilização dos carros para viagens.

À professora Cida pelo imenso conhecimento compartilhado. Pela colaboração na escolha do tema, incentivo e orientações. Deus a abençoe.

Aos professores do mestrado, pelo apoio e colaboração. Muito obrigado.

RESUMO

O presente trabalho apresenta o diagnóstico de um estudo da relação de equivalência entre Sistemas Lineares no Ensino Básico, por meio da semiótica, com o desenvolvimento cognitivo do pensamento, para possibilitar aos alunos a apreensão de conceitos e a agregação das ciências. Para tanto, embasou-se nas teorias da Didática da Matemática, especificamente, na *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, de Duval (1937-) e nos obstáculos epistemológicos, de Gaston Bachelard (1884-1962). A abordagem metodológica foi de intervenção, com análise qualitativa e quantitativa, e a realização da pesquisa foi orientada por uma sequência didática desenvolvida para 25 alunos de oitavo ano do Ensino Fundamental II e para 29 alunos de segundo ano do Ensino Médio. Além disso, foi aplicado um questionário aos professores de Matemática das escolas envolvidas, buscando complementar e confirmar o tema da pesquisa. Com base na distinção e classificação dos sistemas semióticos utilizados, a *semiose*, as atividades didáticas envolveram dois tipos de transformações de *Representação Semiótica*: as conversões e os tratamentos. O tema apresentado foi sustentado pela relação entre teoria e prática, a partir da pesquisa de campo, e confirmou a relutância dos alunos com vários tópicos da Matemática, a importância e a necessidade das atividades de produção semiótica no estudo de *sistemas equivalentes*, a possibilidade de inserir o ensino interdisciplinar e, sobretudo, de enriquecer e dinamizar as aulas de Matemática através das Tecnologias Digitais.

Palavras-chave: Matemática. Sistemas Lineares. *Representações Semióticas*. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This work shows the diagnose the study of the equivalence relation between Linear Systems in Basic Education, through semiotic, with the thought cognitive development, in order to enable students the apprehension concepts and aggregate different science areas. This study was based on Mathematics Didactics theories, specifically Duval's (1937-) Theory of Semiotic Representation Records and Gaston Bachelard's (1884-1962) epistemological obstacles. We have used an interventionist methodological approach, with qualitative and quantitative analysis, the research was guided by a didactic sequence that was developed for 25 students from eighth grade school year and 29 students from second year of high school. In addition, a questionnaire was applied to the mathematics teachers from involved schools, in order to complement and confirm the research theme. Based on the distinction and classification of semiotic systems, semiosis, the didactic activities involved two types transformation of semiotic representation: conversions and treatments. The presented theme was supported by the relationship between theory and practice, through a field research, and confirmed the reluctance of students to various mathematical topics, the importance and necessity of semiotic production activities in the study of equivalent systems, the possibility of insert the interdisciplinary teaching and, above all, to enrich and streamline the mathematics classes through Digital Technologies.

Keywords: Mathematics. Linear systems. Semiotic representations. Digital technologies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

E.F. – Ensino Fundamental;

E.M. – Ensino Médio;

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada;

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático;

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais;

RR – Registro de Representação;

RGV – Representação Geométrica Virtual;

RPM – Revista do Professor de Matemática;

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática;

SPD – Sistema Possível e Determinado;

SPI – Sistema Possível e Indeterminado;

SI – Sistema Impossível;

TD – Tecnologias Digitais;

TRRS – Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Segundo Markarian (1998, p. 25) em seu artigo sobre a Matemática na escola, aponta que o objetivo da Matemática é imperceptível e o poder de “desmaterializar” os objetos que estão ao nosso redor é o diferencial entre seres humanos e os animais. Também que a aquisição de objetos matemáticos se faz por meio de reordenação, associação de semelhanças necessárias a uma aprendizagem significativa.

A Matemática é um processo humano e histórico, no qual conceitos são construídos por meio da abstração, de generalizações, de observações e de hipóteses. A aplicação dos conceitos matemáticos na resolução de problemas do cotidiano com a exploração de novas situações e levantamento de novas hipóteses, contribuem para o aprimoramento da aprendizagem desses conceitos. Daí, tornam-se necessários a configuração e o conhecimento de uma linguagem e simbologia próprias inerentes à ciência.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs - BRASIL, 1997), apregoam sobre a importância e a necessidade do conhecimento da linguagem matemática, quais sejam estudantes, pesquisadores, curiosos e amantes dessa disciplina se apropriarem das situações da realidade. Sobretudo, no que diz respeito à capacidade de interpretar informações, conjecturar, estabelecer hipóteses, pois é fato que a linguagem universal favorece para que o estudo e desenvolvimento da Matemática se realizem em diferentes lugares e épocas.

Embora estejamos na era da tecnologia digital, as aulas de Matemática ainda estão centradas na figura do professor em que os alunos não participam na construção de conhecimentos matemáticos. Por consequência, a resolução de exercícios é realizada de forma mecânica e descontextualizada, geralmente, com ênfase nos conteúdos e exercícios do livro didático adotado pela escola. Uma vez que as escolas da Educação Básica adotam o livro pelo Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), no qual a escola deve apresentar duas opções na escolha das obras para cada ano e disciplina. Caso não seja possível a compra da primeira opção, o FNDE envia a segunda coleção escolhida à escola. No entanto a escolha da segunda opção não é tão criteriosa quanto à primeira como apontam Zambon e Terrazzan (2012, p. 10), “um outro aspecto que preocupa bastante é a falta de conhecimentos sobre o próprio Programa”.

Assim, é fundamental que a escolha dos livros didáticos seja a partir de uma análise pedagógica, já que eles são ferramentas de auxílio no procedimento didático e na superação de dificuldades e barreiras que poderão surgir no decorrer do processo de construção do conhecimento. Sabemos que a correta construção dos conceitos matemáticos é indispensável para a construção e desenvolvimento do conhecimento matemático e, assim, esse é um aspecto que deve ser considerado na seleção dos livros didáticos.

Algumas obras não apresentam aplicações da Matemática no cotidiano, ou até abordam a contextualização, mas de uma realidade que pode ser distinta daquela dos alunos, por isso se destaca novamente a importância da análise do livro didático. Além da relevância de analisar a relação dos conteúdos com a realidade do estudante, outro fator importante que se deve observar é a abordagem do processo de construção do conhecimento matemático no decorrer de sua história. No ensino da Matemática, é didaticamente viável fazer referência aos motivos que levaram a investigação e indagação do processo contínuo de desenvolvimento do conhecimento em diferentes épocas.

Muitas vezes, no Ensino Básico, a História da Matemática é abordada apenas de forma anedótica, como ilustração ou como introdução dos assuntos sem a profundidade dos conceitos matemáticos criados em diversas civilizações. Situação essa bem equivocada, distante do que se espera da análise matemática dos conteúdos na compreensão da evolução dinâmica dos fenômenos envolvidos, nas descobertas desses conceitos. Normalmente essa é a situação nos livros didáticos, único recurso que os professores possuem para ministrar suas aulas. A idoneidade das informações é de suma importância para que o professor e alunos não sejam induzidos a erros na análise de fatos históricos com base numa única fonte: os livros didáticos. O processo de apropriação da linguagem matemática, às vezes, se torna angustiante para o aluno, que, frequentemente, não entende qual é o motivo ou a necessidade de se aprender os conteúdos e, assim, surgem questionamentos como: “pra que aprender isso?”, “onde que vou utilizar isso na minha vida?”, além de outros semelhantes. Segundo Vailati e Pacheco (2011, p. 3),

> História da Matemática é um campo do conhecimento que permite ao professor de Matemática a (re)elaboração de sua concepção referente a esta disciplina e a organização de abordagens pedagógicas que podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, pode ser didaticamente viável a utilização de metodologias que apresentem tópicos da História da Matemática. Isso pode ser uma maneira de o professor diversificar o seu método de lecionar, bem como, uma possibilidade de instigar a curiosidade e atrair os alunos para o estudo dessa e de outras ciências.

A apresentação de temas relativos à História da Matemática pode possibilitar o reconhecimento da relação entre a Matemática e o contexto, sobretudo, para a superação da ideologia de que essa ciência surgiu a partir da sua aplicação em uma realidade. Sabemos que conteúdos e tópicos da Matemática tiveram desenvolvimento a partir de pesquisas e estudos que se consolidaram graças à possibilidade de distanciamento da realidade concreta de aplicação, o que faz parte da definição e características da Matemática Pura, onde não há ou não necessita preocupar-se com sua possível aplicação.

A Didática da Matemática defende o princípio da identificação dos parâmetros sobre os quais o professor pode agir na espera de mudanças no processo de ensino aprendizagem. As contribuições de seus estudos refletem na melhoria da relação professor-aluno, independentemente do conteúdo matemático a ser ensinado. Dentre as teorias desenvolvidas, temos a teoria de obstáculos epistemológicos, partindo do conceito comum de obstáculo como impedimento e obstrução, para iniciar a compreensão da definição de conceitos cristalizados.

Na Matemática, obstáculos epistemológicos referem-se aos conhecimentos cristalizados que impedem os alunos de aprenderem novos saberes relativos ao mesmo objeto matemático. Por exemplo: a subtração com números naturais não contempla o caso em que o minuendo é menor do que o subtraendo, porém, isso pode acontecer no conjunto dos *números inteiros*. Se tal possibilidade não for enfatizada nas séries iniciais, posteriormente, os alunos não aceitarão a subtração 3 – 5, na crença de que o "maior não pode se subtrair do menor". Na fase da aprendizagem e síntese do conhecimento matemático, no período escolar, os obstáculos epistemológicos acontecem com maior frequência, mas como eles não são descritos no registro histórico da Matemática, entende-se que, em sua descoberta, haja uma aparente regularidade (BACHELARD, 1996).

A noção de obstáculo epistemológico tem origem nos estudos do filósofo e poeta francês Gaston Bachelard (1884-1962) em que o pensamento está focado principalmente em questões referentes à filosofia da ciência. Isso significa que é através dela que se analisam as condições psicológicas do progresso científico.

Assim, segundo Bachelard (1996), o sucesso da ciência reside, primeiramente, no reconhecimento dos obstáculos e, depois, na sua superação. Os estudos dos obstáculos na Matemática apontam certos momentos de paradas, mas não de erros ou rupturas, com destruição do saber que se construiu anteriormente. O autor ainda aponta que a linearidade presente nos registros da descoberta da Matemática ocorre devido ao método que expandiu essa ciência, com o fim regularizado por meio da demonstração, sem deixar explícitas as dificuldades e barreiras que permearam o processo de investigação e desenvolvimento.

Sabemos que a codificação dos conceitos matemáticos ocorre, sobretudo, com o uso de símbolos próprios da linguagem matemática. Portanto, torna-se necessário que os alunos conheçam e apropriem dessa língua, uma vez que contribuirá efetivamente para o entendimento desses conceitos e, consequentemente, para o processo de construção do conhecimento matemático com maior clareza e precisão, já que poderá proporcionar melhor entendimento das propriedades, operações e axiomas em questão. Pode-se destacar que esse processo contribui para a superação de metodologias mecânicas no processo de ensino aprendizagem da Matemática, as quais, geralmente, induzem os alunos a apenas decorarem algoritmos e descartam a oportunidade de enfatizar e estimular a investigação matemática.

A Matemática existente em áreas de pesquisas sobre saúde, desenvolvimento da tecnologia, assim como em outros contextos, advém da aplicação de conceitos que se caracterizaram antes das necessidades exatas de aplicabilidade. Daí a importância da abstração para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1997), essa abstração deve ser uma das habilidades e competências que a própria Matemática deve proporcionar aos alunos. A capacidade de abstração efetiva-se no processo de adequação da linguagem matemática, com a construção de conceitos, percepção e formalização de padrões.

A organização do processo de ensino aprendizagem do Ensino Básico atual, em disciplinas específicas, pode aparentar que as ciências não mantêm relações entre si, e esse é um dos fatores que contribuem para que a Matemática não tenha significado para muitos estudantes. Ao fazer uso da História da Matemática como ferramenta metodológica, o professor proporciona o entendimento da Matemática como campo que se relaciona historicamente com outras ciências e mostra que sua compreensão possibilita e contribui para a compreensão do mundo e das ciências como um todo, o que corrobora com as palavras de Vailati e Pacheco (2011) ao referenciarem sobre o aspecto interdisciplinar.

Diante de uma realidade em que os discentes estão envoltos pela tecnologia, com aparelhos eletrônicos inovadores e atrativos, participar das aulas pode tornar-se, cada vez mais, desinteressante para alguns discentes que não são atraídos pelas práticas de ensino e, dessa maneira, para eles, a educação não se define como formadora de cidadão crítico e questionador. Assim, apresentar conteúdos matemáticos com um amontoado de fórmulas sem significado para o aluno, de objetos da Álgebra tais como incógnitas e variáveis, contribui para o mito de que a Matemática é um “bicho de sete cabeças”.

Como exemplo, podemos destacar as dificuldades dos alunos do Ensino Básico quando se deparam com a resolução de equações. Essas dificuldades podem ter uma relação com o fato da não compreensão ou pela falta de aulas investigativas que estimulam o aluno a questionar e investigar como ocorrem os processos algébricos a serem estudados. Nas aulas de Matemática, em especial nas aulas de Álgebra, pelo seu caráter abstrato sobre os números, equações e funções, é necessário que os alunos se apropriem das propriedades algébricas que justificam e explicam certas passagens e implicações na resolução de equações e na representação geométrica de funções atreladas às essas equações.

Além disso, os PCNs (BRASIL, 1997) abordam que o estudo sobre Álgebra, no Ensino Fundamental, deve acontecer de maneira que o aluno seja capaz de relacionar a Matemática com situações do cotidiano, isto é, que seja capaz de resolver problemas aritmeticamente insolúveis. Além disso, é preciso que o educando desenvolva capacidade de justificar algebricamente os processos utilizados na resolução de equações. Ainda apontam que o surgimento da Álgebra e da Geometria impulsionou a geração de novos campos na área da Matemática, e a relação existente entre Álgebra e Geometria evidencia-se ao trabalhar com grandezas e medidas. Contudo, deve-se levar em consideração que essa relação pode ser evidenciada, também, ao se trabalhar com a resolução de sistemas de equações do 1º grau, pois a análise do conjunto solução pode ser interpretada de maneira geométrica e, consequentemente, contribuir para o processo de construção do conhecimento.

Um dos objetivos do presente trabalho é estabelecer um paralelo no processo de ensino aprendizagem da Aritmética, Geometria e Álgebra no Ensino Básico, uma vez que, frequentemente, o estudo dessas ciências é visto de maneira desintegrada, apesar de serem três áreas correlatas em Matemática. O ensino interdisciplinar tende a contribuir veementemente para o processo de ensino aprendizagem das três áreas da Matemática, pois são ciências que possuem vínculos entre conteúdos e estão historicamente entrelaçados. O ensino da Aritmética, integrado com a Geometria e a Álgebra, pode contribuir para a superação de dificuldades que surgem no processo de ensino aprendizagem de Matemática. No entanto, as práticas tradicionais de ensino contribuem para um estudo tardio da Álgebra no Ensino Básico e configuram-se, sobretudo, em um processo linear de ensino, em que a Aritmética, a Geometria e a Álgebra são abordadas separadamente.

Nos registros da História da Matemática, a Álgebra aparece com tardio desenvolvimento, o que pode indicar a “[...] existência de dificuldades conceituais importantes, subjacentes à construção deste campo do conhecimento matemático” (Teles, 2004, p.1). De maneira semelhante, no decorrer do Ensino Fundamental, trabalha-se frequentemente com as “quatro operações”, sobretudo, no conjunto dos números naturais, o que contribui para a geração de dificuldades na realização de operações envolvendo números inteiros negativos e números racionais como um todo.

Podemos enfatizar que essas dificuldades surgem também como resultado de uma sequência de definições e conceitos construídos de maneira equivocada, principalmente, com a utilização de didáticas que têm a finalidade de “facilitar” o processo de ensino aprendizagem. Um exemplo disso é quando se “define”, de imediato, as “quatro operações” e assim, se deixa de utilizar das propriedades do inverso aditivo e do elemento neutro da adição para apresentar a subtração, e do inverso multiplicativo e do elemento neutro da multiplicação para apresentar a divisão, assim como, para justificar a necessidade matemática de outros conjuntos numéricos além dos números naturais.

Além do mais, a devida apresentação do elemento neutro da adição e do elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números naturais deve ser feita através de procedimentos algébricos, uma vez que permite a generalização das propriedades para o conjunto infinito. A formação do conceito de elemento neutro da adição propicia o desenvolvimento do conceito algébrico de inverso aditivo e, consequentemente, a formação do conjunto dos números inteiros, nos quais se definem as propriedades da adição e da multiplicação.

A partir do elemento neutro da multiplicação, se define, algebricamente, o elemento inverso multiplicativo, o qual se torna necessário expandir para o conjunto dos números racionais, um conjunto que se define como *corpo*, já que mune de uma operação da adição, uma operação da multiplicação e de propriedades associadas.

Entretanto, de acordo com cada nível de ensino, o professor deve adotar sequências didáticas específicas, de maneira a contribuir para a correta construção dos conceitos e do conhecimento. Relacionar Aritmética, Álgebra e Geometria tende a contribuir para a aprendizagem significativa da Matemática, já que o aluno passa a ter diferentes maneiras de representação e/ou justificação de um mesmo objeto matemático.

Pode-se destacar que a formação adequada dos conceitos e das propriedades relativas aos conjuntos numéricos é fundamental para o desenvolvimento de um sujeito crítico e investigador e torna-se bagagem de conhecimento para o seu desenvolvimento no Ensino Superior. Muitas vezes, as principais dificuldades e barreiras que surgem dentro desse ensino são relativas às propriedades e conceitos básicos que deveriam ser consolidados desde o Ensino Fundamental.

No entanto, vale ressaltar que, assim como existe o processo de escolha do livro didático na comunidade escolar, ocorre também a seleção dos conteúdos matemáticos a serem estudados no decorrer do ano letivo. Ou seja, conteúdos que farão parte do plano de curso e terão prioridade nas atividades que os professores e demais componentes da equipe pedagógica desenvolverão. Como destaca Teles (2004), em que deve-se avaliar, em cada contexto, os limites e relações existentes entre a Álgebra, a Aritmética e a Geometria.

Aritmética, Álgebra e Geometria

As dificuldades que muitos alunos encontram no decorrer do processo de construção do conhecimento matemático e no desenvolvimento das competências e habilidades que compõem uma série de objetivos da escola, geralmente, têm relação com a maneira como os conteúdos matemáticos se apresentam, inclusive, sem promover a relação entre os diferentes campos do conhecimento matemático e do conhecimento em geral. A exemplo da relação entre vetores geométricos da Geometria Analítica, vetores na Álgebra Linear e grandezas vetoriais na Física. Geralmente esses conceitos correlatos são ensinados sem a devida conexão entre si.

Apontaremos no presente trabalho que é possível relacionar a Aritmética, à Álgebra e à Geometria na construção de conceitos algébricos contribuindo para a superação dos obstáculos epistemológicos a nível do Ensino básico e do Ensino Superior. Nos respaldamos na *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (TRRS), fundamentada pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (1937-), como ferramenta importante na construção desses conceitos. Enfatizamos que uma das principais características desse processo metodológico é a possibilidade de diferentes tipos de representações de um mesmo objeto, uma vez que se usa de mais de um tipo de Registro de Representação Algébrico.

Vale ressaltar que os campos de aplicação da Álgebra são diversos e seu uso se ampliou, principalmente, na resolução de problemas tecnológicos da Física e da Análise. Para entender-se a respeito do surgimento da Álgebra é indispensável retomar a ideia e a concepção de número, de acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p.1), “os números eram percebidos pelos antigos como uma propriedade inseparável de uma coleção de objetos, propriedade que não podiam distinguir claramente”. Com o surgimento das relações e operações entre números, através da investigação e assimilação, surgiu a necessidade de aprimoramento dos nomes e símbolos dos próprios números.

A partir de registros em uma das mais antigas obras de Matemática presentes no Papiro de Ahmes ou Rhind (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993), pode-se notar que muitos dos problemas matemáticos tinham relação com situações do cotidiano das pessoas, outros se relacionavam somente aos próprios números. Nesses problemas, as expressões e os procedimentos de resolução eram efetuados através de palavras, pois a utilização dos signos matemáticos surgiu paralelamente à criação dos símbolos numéricos, a qual foi fundamental para o desenvolvimento da Aritmética. Porém, na Álgebra a utilização de signos nas operações aritméticas e de letras para representação de incógnitas e variáveis concretizou-se só após muito tempo.

A palavra “Álgebra” advém da palavra “*al-jabr”*, a qual pertence ao título de um livro, o “Hisab Al-jabr W’al-muqabalah’, escrito pelo matemático árabe Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi[1] (Maome, filho de Moisés de Khwarezm) por volta do ano 825. A tradução direta do título desse livro é “Ciência da restauração e redução” ou “Transposição e cancelamento”, que, matematicamente, significa: operar termos em

[1] Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi nasceu em torno de 780 e morreu por volta do ano 850 d.C.

membros da equação (al-jabr) e simplificar termos iguais em ambos os membros de uma equação (al-muqabalah).

Esse significado se relaciona diretamente com os processos de equivalência na resolução de equações lineares e sistemas de equações lineares utilizados até hoje, principalmente, no processo de ensino aprendizagem no Ensino Básico. Dessa maneira, dada a equação:

$$\boldsymbol{x^2 + 8x + 6 = 6 - 2x + 3x^3} \tag{1.1}$$

em que $\boldsymbol{x}$ representa a incógnita da equação, teremos por *al-jabr:*

$$\boldsymbol{x^2 + 8x + 6 = 6 - 2x + 3x^3}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 8x + 2x + 6 = 6 + 3x^3} \tag{1.2}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 10x + 6 = 6 + 3x^3} \tag{1.3}$$

A partir de operações algébricas de equivalência, sobretudo, com as propriedades do inverso aditivo, se obteve equações equivalentes.

Na sequência, teremos por al-muqabalah:

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x^2 + 10x = 3x^3} \tag{1.4}$$

Assim, tornavam-se expressas as operações algébricas e o desenvolvimento inicial da Álgebra. De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993, p.79),

> A origem da palavra está de acordo com o conteúdo real da própria ciência. A Álgebra tem início, na realidade, quando os matemáticos começam a interessar-se pelas “operações” que podem ser feitas com qualquer número, mais do que pelos próprios números; é, essencialmente, a doutrina das operações Matemáticas considerada formalmente a partir de um ponto de vista geral, com abstração dos números concretos.

Ainda pode-se destacar que as dificuldades na aprendizagem de Matemática e de conceitos algébricos advêm, justamente, da incapacidade que muitos alunos têm de realizar a abstração, ou seja, efetivar a construção de conceitos sem associá-los a exemplos numéricos ou exemplos do cotidiano, mas a partir de generalizações.

No decorrer da expansão do desenvolvimento da Álgebra, apontamos três momentos relacionados à linguagem algébrica: a etapa retórica ou verbal, a etapa sincopada e a etapa simbólica.

A fase retórica existe desde os babilônios (1700 a.C.), com destaque para o matemático grego Diofanto (250 d.C.). Nesse período, a principal característica da Álgebra era não utilizar símbolos ou abreviações para expressar os procedimentos algébricos, que eram registrados a partir da linguagem textual corrente da época. Além dos gregos, os egípcios e os árabes também utilizaram essa forma retórica de expressar o pensamento algébrico.

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), por volta do século IV d.C., Diofanto de Alexandria começou a utilizar símbolos matemáticos que facilitavam os registros e as operações. Ao que se sabe, Diofanto utilizou a letra “sigma” do alfabeto grego para representar uma incógnita e, assim, se iniciava a fase sincopada. Os árabes, apesar da pouca utilização dessa maneira de representação, uma vez que utilizavam a retórica, tiveram importante contribuição para a fase sincopada, especificamente, pelo vocabulário técnico, de maneira que, posteriormente, passou a se considerar o termo “al-jabr” introduzido pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khwarismi. Por volta do século XVI, os algebristas italianos utilizaram o método sincopado.

Na sequência, iniciou-se a fase simbólica, em que se representavam as expressões algébricas somente através de símbolos, sem a utilização da linguagem textual. Pode-se destacar que um dos principais responsáveis pelo desenvolvimento inicial da fase simbólica foi François Viète (1540-1603), que, apesar de utilizar a forma sincopada, introduziu novos símbolos na Álgebra, a exemplo da utilização das vogais para representar valores constantes e as consoantes para representação das incógnitas, além da utilização dos símbolos germânicos “**+**” e “**-**“. Isso contribuiu para que os estudos não tivessem apenas os casos específicos de equações com coeficientes numéricos como foco, mas também, de maneira geral, o desenvolvimento de pesquisas sobre classes de equações.

Graças a François Viète, os problemas de estudo e investigação da Matemática deixaram de ser apenas sobre contextos da realidade das pessoas, como idades, medidas, etc., e se iniciaram as investigações e linearização do próprio campo da

Matemática, com ênfase na própria Álgebra. Assim, evidenciava-se uma das etapas de evolução da Álgebra, em que se deixava de centralizar os estudos matemáticos a respeito das equações e das operações comumente utilizadas para atentar-se às operações aleatoriamente definidas sobre objetos abstratos, como exemplo, as estruturas matemáticas: grupos, anéis, corpos, etc.

É válido destacar que a linguagem simbólica sofreu influências e contribuições para sua consolidação graças aos trabalhos de Descartes (1596-1650), especificamente, o *La Géométrie (1637).* Nesse trabalho, para representar as incógnitas, que eram implicitamente variáveis, Descartes utilizou letras do alfabeto (***x***, ***y***, ***z***, ...) e as primeiras letras (***a***, ***b***, ***c***, ...) para representar valores fixos, as constantes. Assim, comprimentos de segmentos de retas e as próprias retas começaram a ser representadas através de expressões que apresentavam implicitamente várias características e propriedades a respeito dessas curvas, desde o comprimento à posição, de maneira que se assemelha ao método utilizado até hoje.

Ainda sobre a relação entre o surgimento da Álgebra, a expansão da Aritmética, o desenvolvimento e a linearização do conhecimento geométrico, determinadas pesquisas contribuíram, em algum aspecto, para o desenvolvimento da outra. O que corrobora Howard Eves em sua obra *Introdução à História da Matemática*: “Os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à Álgebra” (EVES, 2011, p. 256).

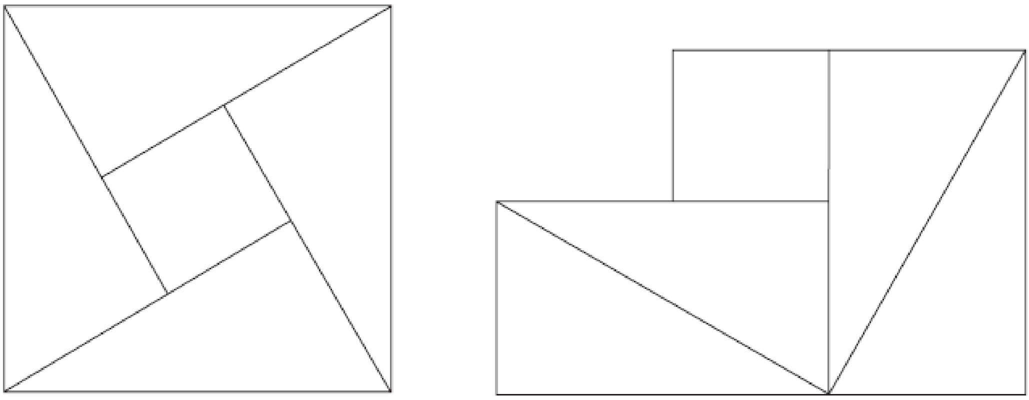
O professor, astrólogo, astrônomo e matemático Bháskara (1114-1185) efetuou, através da Geometria, a demonstração e representação do Teorema de Pitágoras. Com a decomposição de um quadrado em quatro triângulos retângulos e um quadrado de lado menor, através do cálculo de áreas e equivalências de expressões algébricas, se apresenta o referido Teorema. Essa demonstração pode ser utilizada no processo de ensino aprendizagem da Matemática no Ensino Básico, de forma que o aluno tenha mais de uma maneira de representação e entendimento do Teorema de Pitágoras.

A demonstração realizada por Bháskara apresenta a decomposição de um quadrado, com lado igual à hipotenusa de um triângulo retângulo dado, em quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo inicial e em um quadrado com lado igual à diferença dos catetos do triângulo retângulo inicialmente citado. O mais interessante dessa demonstração foi a sutileza como Bháskara a realizou, apenas efetuando o desenho e escrevendo a palavra “**Veja!** ”. A figura abaixo (figura 1) faz uma representação semelhante ao exposto por Bháskara, observe que, com algumas operações algébricas, demonstra-se a expressão do Teorema, considere o triângulo retângulo com hipotenusa ***c*** e catetos ***a*** e ***b***. Igualando as áreas dos polígonos (côncavo e convexo – figura 1), temos:

$$\boldsymbol{c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + (b-a)^2 = a^2 + b^2} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2} \tag{1.6}$$

Figura 1 - Teorema de Pitágoras - Demonstração semelhante à que Bháskara realizou



(Fonte: EVES, 2011, p. 258)

Pode-se perceber que, nesse período, já havia a preocupação com o estudo da Matemática sobre diversos tipos de representação, especificamente, com o emprego e desenvolvimento da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, o que corrobora com os estudos e afirmações de Duval (1937-), ao enfatizar a importância desse tipo de metodologia no processo de ensino aprendizagem da Matemática.

De acordo com Fiorentini, Miguel e Miorim (1993), o desenvolvimento histórico da Álgebra se divide em diversas “leituras”, sendo que, na quinta leitura, o processo de desenvolvimento se remete àquilo que foi objetivo da ciência algébrica por um longo período: a resolução de equações. Ainda de acordo com os autores, os trabalhos de Euler (1707-1783 d.C.), Lagrange (1736-1813 d.C.) e Gauss (1777-1855 d.C.), com aplicação do Cálculo Infinitesimal, foram de essencial importância no desenvolvimento qualitativo da teoria das equações, sobretudo, no processo de transformações de funções contínuas e, consequentemente, nas funções polinomiais e equações algébricas.

As transformações algébricas possibilitam a resolução de equações algébricas a partir de operações que proporcionam a obtenção de expressões equivalentes e, posteriormente, a obtenção do conjunto solução de determinada equação. Podemos destacar que a resolução de sistemas de equações lineares pode ser feita a partir de operações matemáticas com as equações que compõem o sistema e com a obtenção de sistemas equivalentes.

Entretanto, os estudos de conceitos algébricos no Ensino Básico, geralmente é desenvolvido na aquisição mecânica de técnicas que possibilitam a obtenção de equações equivalentes e a resolução de equações específicas. Nesse caso, o principal objetivo não é a natureza e relevância do problema, no sentido de instigar a construção do conhecimento algébrico, mas sim, a aplicação de algumas técnicas consideradas indispensáveis. Assim, configura-se a primeira concepção de Educação Algébrica, a *linguístico-pragmática*.

Outra concepção da Educação Algébrica é a *fundamentalista-estrutural*, na qual se acredita que a introdução de propriedades que compõem as operações responsáveis pelas equivalências algébricas capacitaria os alunos a aplicar e desenvolver os conceitos em diferentes situações. Assim, se tornaria necessária a reorganização dos tópicos algébricos, uma vez que se necessitaria de pré-requisitos para o desenvolvimento da Educação Algébrica.

Na terceira concepção da Educação Algébrica, a *fundamentalista-analógica*, a principal característica é a justificação de equivalências a partir de recursos analógicos geométricos, em que se deixa de abordar sobre o simbolismo algébrico, a construção de conceitos e o desenvolvimento da abstração matemática. Podemos enfatizar que muitos professores utilizam de recursos físicos visuais no processo de ensino aprendizagem de resolução de equações, sobretudo, para justificar as equivalências algébricas, como exemplo, o uso de materiais concretos como balanças para justificar as operações e soluções de equações do primeiro grau.

Essas três concepções sobre a Álgebra deixam de considerar a relevância e a complexidade da Álgebra e do pensamento algébrico, uma vez que se reduz simplesmente à linguagem algébrica. Daí a ênfase da prática do ensino mecânico de fórmulas e regras desconexas e de uma linguagem algébrica já formalizada, sem a preocupação de construir o pensamento algébrico. Isso contribui para uma “falsa” aprendizagem da Matemática, sem sentido e sem significado para o aluno. Enquanto cidadão em formação, as aulas devem incentivar o sujeito crítico, ativo e investigador de diversas situações, inclusive, na própria construção do conhecimento matemático (FREIRE, 2005).

Na construção do pensamento algébrico, é preciso considerar que esse pensamento pode ser expresso através da linguagem geométrica, da linguagem algébrica, da linguagem textual, ou até por mais de um tipo de linguagem, enfim, da maneira que se apresentar, metodologicamente, mais eficaz para o processo de ensino aprendizagem no contexto em questão, principalmente, na realidade em que a tecnologia surge como uma nova ferramenta a compor o campo de construção do conhecimento.

Assim, percebe-se que não é didaticamente aceitável justificar o ensino tardio da Álgebra, no Ensino Básico, com o fato de os alunos ainda não terem o domínio suficiente da linguagem algébrica, pois o pensamento algébrico não deve depender de uma linguagem existente. A aprendizagem dessa linguagem pode ocorrer durante o processo de construção do pensamento algébrico, ao mesmo tempo em que contribui de maneira recíproca para o desenvolvimento do próprio pensamento e conhecimento algébrico.

A maneira de se introduzir e trabalhar com a Álgebra no decorrer do Ensino Básico e até mesmo no Ensino Superior, frequentemente, reduz-se a uma ideia de dependência dessa ciência a outras áreas do conhecimento, como Matemática e Física. Por exemplo, no estudo de vetores geométricos, na Matemática, e grandezas vetoriais, na Física não se estabelece nenhuma ligação entre esses conceitos correlatos. Para Ramos (1999), o estudo didático sobre vetores na Física e na Matemática revela as dificuldades de aprendizagem em relação às noções de grandeza vetorial e de grandeza escalar pela seguinte concepção: “duas grandezas vetoriais são iguais quando os seus módulos (ou normas) são iguais” ou “dois vetores são iguais quando os seus módulos (normas) são iguais”.

Esse foi um ponto de partida fundamental para detectarmos se, em nossa população alvo, existiria a predominância do caráter escalar das grandezas vetoriais em detrimento de suas características de orientação, que são essencialmente geométricas. Do ponto de vista da Física, grandezas escalares são aquelas que ficam completamente definidas apenas pelo seu valor numérico (ou módulo, ou norma), a exemplo de tempo, massa, densidade, volume, temperatura, comprimento, etc. Uma grandeza vetorial fica completamente definida não apenas pelo seu módulo, mas também pelas suas características de orientação: sua direção e seu sentido. Como exemplo das grandezas, temos: deslocamento, força, velocidade, aceleração.

Do ponto de vista da Matemática, um vetor é definido como representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados. Logo, é um representante de um conjunto infinito de vetores que possuem a mesma direção, o mesmo módulo e o mesmo sentido. Assim, a compreensão da igualdade $\vec{AB} = \vec{CD}$ não possui o significado estrito da igualdade dos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$, mas sim, a igualdade de vetores representantes dos segmentos orientados AB e CD, que possuem mesma direção, mesmo módulo e mesmo sentido.

Assim, estudar Álgebra com fundamentos na linearização do conhecimento e como campo imprescindível para a formação de conceitos em áreas correlatas contribui para evitar a construção equivocada da ideia de que ocorre apenas uma aplicação dessa ciência às outras. Ao longo do tempo, a situação persiste, pois em Ramos (2005, p.74, 76), as grandezas vetoriais - força horizontal, peso, aceleração, velocidade e deslocamento - foram identificadas corretamente pelos estudantes dos cursos de Física e Matemática como vetores, porém a tripla com números reais (a, b, c) foi identificada como escalar.

Do ponto de vista cognitivo, o ideal é que, nas universidades, as disciplinas de Física Básica e Geometria Analítica sejam planejadas em conjunto entre professores de Matemática e Física, no ensino de grandezas, no contexto de ambas as disciplinas. A exemplo da aplicação do Teorema de Pitágoras na determinação da soma de vetores geométricos perpendiculares na Matemática e na determinação da resultante de duas forças perpendiculares. Os professores de ambas as áreas podem enfatizar, nessas disciplinas, exemplos com vetores geométricos e grandezas vetoriais perpendiculares em suas aulas.

Em consonância com o que apresentamos anteriormente, podemos ressaltar a importância da construção de conceitos para a realização e desenvolvimento do processo de ensino aprendizagem da Matemática. Compete ao professor recorrer às metodologias que propiciam, de maneira consistente e coerente, a construção dos conceitos científicos, que irão compor a bagagem de conhecimento indispensável para a formação de um sujeito investigador e autônomo, que não irá apenas praticar a repetição de procedimentos unicamente mecânicos.

A Álgebra fornece subsídios que proporcionam a correta formação dos conceitos, especialmente, da Matemática. A construção desses conceitos requer a abstração e a generalização como dimensões básicas, que proporcionam o distanciamento de meios concretos, visuais e sensoriais, sem depender de exemplos ou experiências pessoais. Semelhantemente, no Ensino Básico, a construção dos conceitos matemáticos não ocorre a partir de exemplos, mas de generalizações em um determinado conjunto ou conjuntos numéricos. Porém, percebe-se que, em algumas (ou muitas) vezes, adota-se o método de exemplificar, como maneira de propiciar a "construção" de conceitos, o que gera apenas a apropriação de métodos ou propriedades válidas para alguns casos ou situações específicas.

O estudo de equações lineares no Ensino Básico, às vezes, acontece de forma em que os procedimentos operacionais de equivalências são justificados a partir de procedimentos e métodos aparentemente mais fáceis, pois, ao invés de se recorrer às propriedades das *operações de equivalências*, surge a aplicação mecânica de regras como método mais "prático".

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar sequências didáticas para o ensino-aprendizagem de *Sistemas de Equações Lineares*, com *duas e três incógnitas*, com fundamentação em algumas teorias da Didática da Matemática, dentre elas a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (*TRRS*) de Raymond Duval (1937). Assim, a investigação teve o objetivo de responder à seguinte pergunta: **Quais as contribuições e possibilidades do ensino interdisciplinar para apreensão de conceitos sobre *Sistemas Lineares* (*2x2* e *3x3*) e introdução à Álgebra no Ensino Básico?**

Nesse sentido, busca-se a discussão do paradoxo cognitivo do pensamento matemático, gerado pela atividade de produção semiótica que possibilita acesso aos objetos, e, no entanto, não pode ocorrer a confusão do objeto matemático com a sua representação.

No capítulo 1 ocorre a apresentação da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (*TRRS*), de Raymond Duval, e, a partir desta e de outras teorias da Didática da Matemática ocorreu a análise sobre Sistemas Lineares com a agregação de Matemática, Álgebra e Geometria, entre outras Ciências. Ocorreu também a apresentação da Tecnologia Digital (TD) utilizada como recurso para *Representação Virtual* dos objetos.

No capítulo 2 é apresentada a metodologia empregada no desenvolvimento desta pesquisa, com descrição dos procedimentos e instrumentos, descrição das atividades, relato sobre o ambiente de pesquisa e amostras envolvidas, e a sua relação com o tema proposto. Além disso, neste capítulo são apresentadas as questões do teste final empregado na fase diagnóstico.

No capítulo 3 é descrito o momento da aplicação das sequências, relatando sobre os resultados obtidos com a utilização das metodologias diferenciadas. Descrevendo sobre o dinamismo, interação, discussões, questionamentos e afirmações, proporcionados pela utilização do software Geogebra. É feita também a análise das soluções das questões presentes no teste aplicado aos alunos, utilizando como parâmetro teorias da Didática da Matemática e, além disso, é efetuado a comparação entre turmas de diferentes etapas do Ensino Básico.

As considerações finais apresentam uma síntese dos principais resultados do trabalho, destacando os obstáculos encontrados e avanços no processo de apreensão dos conceitos, além de sugestões sobre a construção do conhecimento significativo (BROUSSEAU, 2008).

A seguir, veremos um estudo de sistemas lineares a partir da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (TRRS), proposta por Raymond Duval (1937).

CAPÍTULO 1: DISCUSSÃO TEÓRICA

1.1 Sobre a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (TRRS) e o Ensino de Álgebra no Ensino Básico: Sistemas de Equações Lineares

Alguns processos de resolução de *equações lineares* e *sistemas de equações lineares* ocorrem praticamente da mesma maneira, a partir de operações que produzem, respectivamente, *equações equivalentes* e *sistemas de equações lineares equivalentes*. As dificuldades que surgem durante o ensino/aprendizagem destes conteúdos no Ensino Básico têm como principal motivo o fato de se estudar primeiramente apenas a Aritmética e o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) para somente, na sequência, iniciar a abordagem de conceitos e propriedades algébricas. Assim, a introdução dos símbolos, incógnitas, variáveis e as operações algébricas no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) tendem a provocar obstáculos epistemológicos no processo de ensino aprendizagem desses objetos da Álgebra.

O ideal é propor aulas investigativas e lúdicas com situações problemas e sequências numéricas, que incitem às generalizações e provoquem a percepção de padrões no desenvolvimento do pensamento algébrico, enfatizando a importância e a necessidade da introdução dos símbolos, incógnitas e variáveis.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs),

> Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar “abstratamente”, se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. Assim, os alunos adquirem base para uma aprendizagem de Álgebra mais sólida e rica em significados. (BRASIL,1998, p.117).

A apropriação dos conceitos algébricos, suas relações e aplicações em outras áreas do conhecimento são fundamentais para despertar a aprendizagem significativa da Álgebra e também da Matemática, assim como para instigar a investigação, uma vez que o aprendiz passa a adquirir bagagem de conhecimento que fundamenta questionamentos e debates em prol da descoberta. Além disso, o domínio dos conceitos algébricos fornece subsídios para o estabelecimento de metodologias e operações algébricas com finalidades e objetivos específicos, que é meta fundamental proposta pelos PCNs para desenvolvimento do estudante e formação do cidadão crítico e autônomo.

Outra contribuição da Didática da Matemática é a **semiótica** que é o **estudo** da construção de significado, o **estudo** do processo de signo (semiose) e do significado de comunicação. Em geral, as teorias **semióticas** levam como **objeto de estudo**, os signos ou sistemas de signos. Portanto ao considerar as dificuldades deparadas no processo de construção do conhecimento matemático ao longo de sua história estabelece-se um ponto importante na superação das dificuldades que os alunos vivenciam no processo de ensino aprendizagem. No entanto, segundo Duval (2003), o acesso aos objetos matemáticos e a construção de conceitos matemáticos não ocorrem através de objetos concretos, diferentemente de outras ciências, como Física, Química e Geometria. Segundo o autor, são necessários diferentes tipos de *Representações Semióticas* e a articulação entre estas para que seja possível o acesso aos elementos matemáticos. Assim, ao se trabalhar com situações problemas e objetos concretos, torna-se necessário a mudança dos tipos de *representações* em questão para que realmente ocorra a aplicação e/ou exploração da Matemática.

O filósofo, psicólogo e didático francês Raymond Duval (1937-)[2] foi quem desenvolveu a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, a qual investiga e analisa a influência e relevância dos tipos de *representações* dos objetos no decorrer do processo de construção do conhecimento em Matemática.

De acordo com Duval (1993), cada objeto matemático tem diferentes tipos de *representações*, assim, podemos dizer que uma notação, um símbolo, representam um número, um vetor, uma equação, etc. E uma ilustração geométrica, uma figura, podem estar associadas a diferentes objetos matemáticos, como uma circunferência, um ponto, um segmento de reta. Desta maneira, o principal cuidado deve ser o de não cometer o equívoco de definir objetos matemáticos a partir das suas representações.

Podemos destacar que frequentemente, no Ensino Básico, o professor, enquanto sujeito de mediação da construção do conhecimento, acaba que por limitar os conceitos dos objetos matemáticos à maneira (ou às maneiras) que se utiliza para efetuar suas *representações*. Isto acarreta deficiências na aprendizagem da

---

[2] Raymond Duval, filosofo, psicólogo e didático, desenvolveu estudos em psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França. Atualmente é professor emérito da Université du Litoral Cote d'Opale em Dunquerque, França.

Matemática, uma vez que os objetos em questão não têm sua real definição compreendida e tornam inutilizáveis dentro da própria Matemática ou em outros campos do conhecimento, o que pode provocar uma defasagem e comprometimento de todo o processo de construção do conhecimento.

O mesmo ocorre na apresentação dos conceitos matemáticos a partir de exemplos e/ou casos específicos de aplicação. Ao longo do tempo, a abordagem dos professores de Matemática na solução de equações e resolução de sistemas de equações, é restrita às relações entre os coeficientes e em fórmulas, ao invés de ensinar procedimentos na construção didática dos conceitos envolvidos. Um exemplo disso é sobre a resolução da equação de segundo grau que geralmente os alunos se referem à fórmula de Bhaskara (fórmula do discriminante) para a sua solução mesmo sem o entendimento da mesma. Em Hellmeister (1999, p. 54) que “o hábito de dar o nome dessa fórmula de resolução da equação de segundo grau se estabeleceu no Brasil por volta 1960”. Isso ocorre somente no Brasil, uma vez que não se encontra o nome Bhaskara como autor em outras partes do mundo. Porém, problemas envolvendo equações do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Esses textos possuíam uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos), que ensinava como proceder para determinar as raízes. Além disso, até o fim do século 16, não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de François Viete, matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Logo, embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara, não é correto atribuir a ele a conhecida formula de resolução da equação do segundo grau.

Apesar de ressaltarmos que não se deve apresentar a definição de um objeto matemático através da sua *Representação Semiótica*, os diversos tipos de *Representações Semióticas* são imprescindíveis para construção do conhecimento, uma vez que, como relatamos anteriormente, os objetos matemáticos dependem desses representantes para tornarem acessíveis e, assim, possibilitarem o processo de investigação. Ou seja, para desenvolver a atividade de ensino-aprendizagem, torna-se necessário utilizar registros de *Representações Semióticas* que segundo Duval (1993, p. 39), se define como “... produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento”.

De acordo com o autor, diversas maneiras de *Representações Semióticas* são necessárias no processo de ensino aprendizagem de Matemática, como um gráfico, uma figura geométrica, um enunciado na linguagem natural, que são representações que utilizam *sistemas semióticos* diferentes.

Assim, podemos destacar que o estudo sobre *Sistemas de Equações Algébricas Lineares* com duas *equações* e duas *incógnitas* ou com três *equações* e três *incógnitas* ocorre a partir de diferentes maneiras de *Representações Semióticas*. Inicialmente, temos o *sistema de equações algébricas* (de diferentes classificações). Geralmente, na sequência, ocorre a *conversão* (TRRS) de *equações* em *funções* para assim associar aos gráficos plotados no *plano cartesiano* de dimensões necessárias. Também é metodologicamente viável a utilização de exemplos de contextos em que é possível abstrair a aplicação de *sistemas de equações algébricas*, onde a *Representação Semiótica* em questão é a linguagem natural, enfatizaremos a respeito posteriormente.

As *Representações Semióticas* são necessárias por possibilitarem acesso aos objetos matemáticos, todavia, suas vantagens didáticas vão além de simplesmente proporcionar a comunicação, são da mesma maneira "essenciais à atividade cognitiva do pensamento" (DUVAL, 1993, p. 39). O autor destaca que as *Representações Semióticas* são fundamentais no desenvolvimento de *representações mentais*[3], na efetivação de diversas funções cognitivas e também na construção do conhecimento, assim, contribui para aprendizagem significativa dos conceitos (JEAN PIAGET 1896-1980).

Ainda de acordo com Duval (1993), um mesmo objeto pode ter diferentes maneiras de *Representações Semióticas* e isto depende basicamente da possibilidade dessas representações atenderem a uma variedade de *sistemas semióticos* diferentes, o que impulsiona a busca de um *sistema* independente da linguagem natural à medida que as ciências se desenvolvem e, reciprocamente, o desenvolvimento de *sistemas* específicos favorece em diversos sentidos a expansão e evolução das ciências.

Mesmo que a construção de conceitos não deve se limitar à *Representação Semiótica* que fornece o acesso ao objeto, vale ressaltar que deve-se atentar para

[3] "As *representações mentais* recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado" (DUVAL, 1993, p. 39).

que não ocorra um equívoco e desconsiderar, assim, a importância das *Representações Semióticas* de um mesmo objeto. Visto que as dificuldades no processo de aprendizagem da Matemática e de desenvolvimento do pensamento matemático ocorrem pelo fato de não ser possível existir apreensão conceitual de um objeto sem a utilização ou construção de uma *Representação Semiótica*. Segundo Duval (1993), esta relação paradoxal aparenta ser confusa mesmo e torna frequente no ensino, já que frequentemente se considera as representações mentais como mais importantes do que as *Representações Semióticas*.

Na atividade matemática é fundamental que se adote diversos tipos de representações de um mesmo objeto, como linguagem algébrica, gráficos, funções, equações, linguagem natural, entre outras, e que seja possível adotar um tipo de registro no lugar de outro. A diversidade de *Representações Semióticas,* além de contribuir para que não haja confusão entre o objeto e suas representações, favorece para que se reconheça o objeto em diferentes representações possíveis, e, segundo Duval (1993), é neste momento que realmente a representação proporciona o acesso ao objeto.

Ainda de acordo com a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* proposta por Durval (1993; 2013), no decorrer do processo de estudo dos objetos matemáticos, são necessárias três transformações fundamentais dos registros de representações: *a formação*, *os tratamentos* e *as conversões*.

1.2 Formação

A ***formação*** se refere à seleção inicial dos objetos e dados do conteúdo que se quer representar, sem ignorar as regras específicas de apresentação, como exemplo, as regras gramaticais para a linguagem textual. A coerência com estas regras pode garantir, inicialmente, os pré-requisitos de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo momento, possibilitar a utilização da representação para tratamentos.

1.3 Tratamento

O ***tratamento*** de uma representação consiste em efetuar a transformação desta representação e permanecer no mesmo registro do objeto matemático. Duval (2013) destaca que o cálculo é uma espécie de tratamento específica das expressões simbólicas, como o cálculo algébrico, cálculo numérico, etc. O processo que garante a obtenção de equações algébricas lineares equivalentes e sistemas de equações algébricas lineares também equivalentes advém de cálculos algébricos e numéricos, que se configuram como operações matemáticas e se tratam de uma espécie de tratamento do objeto.

1.4 Conversão

A ***conversão*** ocorre ao mudar a maneira de registro da representação de um mesmo objeto matemático, em que se conserva parcial ou totalmente o objeto inicial, o conteúdo. Um exemplo é o objeto matemático *função*, a partir da conversão, pode-se representar a *equação* ou o *gráfico.*

Para ilustrar a relação entre o tratamento e a conversão apresentaremos um exemplo relativo à representação do número 0,2, quais sejam, na forma decimal, na expressão fracionária (fração irredutível) bem como na notação científica com potência de 10 (dez) a saber: $0{,}2;\ \frac{1}{5};\ 2.10^{-1}$. São representações diferentes de um mesmo número, ou seja, do mesmo objeto. Mas para efetuar a soma destes objetos em cada uma de suas representações, requer **tratamentos** (operações) diferentes. Observemos que $0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4;\ \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5};\ 2.10^{-1} + 2.10^{-1} = 4.10^{-1}$. Para cada representação, existe um tipo de cálculo numérico diferente, ou seja, o aluno efetua diferentes tratamentos de um mesmo objeto sem precisar modificar a maneira de representação. Entretanto, as dificuldades que muitos alunos apresentam ainda na última etapa do Ensino Básico, no Ensino Médio, é justamente sobre como realizar operações com os números (ou outro objeto matemático) em cada uma de suas representações, mas, na maioria das vezes, não sabem estabelecer a *conversão* de uma representação para outra representação do mesmo número e daí não sabem que se trata do mesmo número.

Dessa maneira, a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (*TRRS*) proposta por Raymond Duval é extremamente importante para organização e entendimento do processo de ensino aprendizagem da Matemática com abordagens cognitivas de construção e sistematização do conhecimento.

1.5 Sistemas de Equações Algébricas Lineares

São as investigações e os questionamentos sobre as coisas do “como” e do “porquê” que instigam a humanidade desde o princípio do mundo, que tornam o ser humano um ser racional, que busca entender, adaptar e mudar o espaço à sua volta. Em Matemática não é diferente, tem caráter abstrato, lida com números e funções ou relações e é governada por leis e normas universais que justificam as propriedades desses objetos matemáticos. Uma destas leis é o Princípio Universal das Ciências, destacado no presente trabalho, com aplicação durante a realização dos *tratamentos* com os objetos matemáticos, como *equações lineares* e *sistemas de equações lineares*.

Geralmente, os livros didáticos apresentam equações lineares com $\boldsymbol{n}$ incógnitas em sua representação algébrica. No entanto, buscaremos no presente trabalho estabelecer a correlação entre as representações algébrica e geométrica de um mesmo sistema de equações com duas e três incógnitas, objetos de estudos nas turmas do 7º ano do Ensino Fundamental II e 2º ano do Ensino Médio.

1.5.1 Equações Lineares

Uma *equação linear* nas incógnitas $\boldsymbol{x}$, $\mathbf{y}$ e $\boldsymbol{z}$ é uma equação da forma

$$\boldsymbol{ax + by + cz = d} \tag{2.1}$$

onde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$ são constantes com pelo menos um dos símbolos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ou $\boldsymbol{c}$ diferente de 0 (zero). As constantes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são os **coeficientes** e $\boldsymbol{d}$ é o termo independente.

Entretanto, esta é uma *Representação Algébrica* de *equação linear* com apenas 3 (três) *incógnitas*, não teríamos letras suficientes para representar situações gerais e expressar o conceito algébrico da equação. Assim, usaremos o seguinte tratamento/representação algébrica para equação linear com $\boldsymbol{n}$ incógnitas:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b} \tag{2.2}$$

onde

- $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$, ..., $\boldsymbol{a_n}$ são os coeficientes reais, com pelo menos um dos $\boldsymbol{a_n}$ diferente de 0 (zero) e $\boldsymbol{b}$ é o termo independente;

- $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ e $\boldsymbol{x_n}$ são incógnitas.

Outro fator que compromete a eficiência do processo de ensino aprendizagem sobre equação linear, seja no cálculo do *conjunto solução*, *representação algébrica* da expressão, expressões equivalentes, dentre outros, é a *representação simbólica* de "mesmas equações", ou "equações equivalentes" com símbolos diferentes. Considere, por exemplo, a seguinte equação linear na incógnita $\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{5x - 4 = 2(x + 3)}, \tag{2.3}$$

durante o processo de resolução da equação, se o docente efetuar a mudança da escrita dos símbolos, como:

$$5\mathrm{X} - 4 = 2\mathrm{X} + 6 \tag{2.4}$$

$$\Leftrightarrow 5\mathrm{X} - 2\mathrm{X} = 6 + 4 \tag{2.5}$$

$$\Leftrightarrow 3\mathrm{X} = 10 \tag{2.6}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{X} = \frac{10}{3}, \tag{2.7}$$

não existe uma sequência didática, uma vez que a equação **(2.3)** não é equivalente à equação **(2.4)** e, consequentemente, a equação **(2.3)** não é equivalente às equações **(2.5)**, **(2.6)** e **(2.7),** o que acarreta que a solução não refere à equação inicial.

Observe que este tipo de situação retoma justamente o primeiro aspecto da *Teoria dos Registros de Representação Semiótica*, a ***formação***, a qual destaca a necessidade de garantir a mesma representação simbólica do(s) objeto(s) matemático(s) para assim ser possível realizar o ***tratamento***, ou seja, efetuar operações de equivalência.

A mudança na grafia dos símbolos durante operações com a equação algébrica pode aparentar ser para o aluno uma "regra" operacional ou fazer com que não perceba que as operações em questão têm como objetivo a resolução da expressão inicial, uma vez que não tem o mesmo símbolo.

1.5.1.1 O Geogebra: Mudança de Registro de Representação

Uma mudança de registro da representação que iremos utilizar com frequência no processo de investigação e ensino-aprendizagem sobre equações algébricas lineares (com até 3 incógnitas) será a Representação Geométrica, o que se associará com a terceira transformação fundamental dos registros de representações, a ***conversão***. Adotaremos o software Geogebra[4] para representação de gráficos com até três dimensões.

> O GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e **multiplataforma** para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios na Europa e EUA.
> GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo. (Instituto GeoGebra - UESB, 2014).

O uso da tecnologia como ferramenta metodológica é um recurso que pode contribuir para a compreensão e apreensão de conceitos matemáticos de maneira eficaz, proporciona novos tipos de tratamentos próprios e conversão, como na apreensão da linguagem computacional e desenvolvimento de plataformas.

A busca por recursos tecnológicos como ferramentas que auxiliam no processo didático e metodológico tende a ser uma maneira de atrair os discentes a participarem do processo de ensino-aprendizagem e instigar a investigação, uma vez que atualmente a própria tecnologia, muitas vezes, pode interferir negativamente para o desenvolvimento da Educação Básica caso não haja uma conscientização e orientação sobre o conhecimento técnico e científico, ou seja, que não ocorra apenas a utilização de aplicativos, aparelhos eletrônicos etc., sem questionamentos.

Assim, considere uma equação linear à duas incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (para os casos que forem duas incógnitas usaremos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, para relacionar com o *plano cartesiano* apresentado pelo software Geogebra):

$$\boldsymbol{a_1 x + a_2 y = b} \tag{2.8}$$

[4] Software disponível para download em: https://www.geogebra.org/

Podemos enfatizar que a equação algébrica linear (assim como outras equações) se associa aos conjuntos de pontos, ou seja, dois tipos de representações: a algébrica e a geométrica, sendo que um dos objetivos da Geometria Analítica é justamente estabelecer esta relação entre a Geometria e a Álgebra, isto corrobora com as palavras de Jorge Delgado, Katia Frensel e Lhaylla Crissaf (SBM-2017, p. 56) que complementam ao relatar que "essa relação é pouco explorada nos ensinos Fundamental e Médio, ficando o estudo da Geometria Analítica limitado à fórmulas e nomenclaturas".

Assim, antes de efetuar a representação geométrica de uma equação do tipo **(2.8),** apresentaremos um outro tipo de conversão: a utilização de *produto interno* para caracterizar algebricamente uma reta normal (perpendicular) a uma direção dada e, desta maneira, demonstrar a equação linear (cartesiana) a partir da representação vetorial.

Considere o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ não nulo e normal a uma reta $\boldsymbol{r}$. Seja o ponto $\mathbf{A} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ pertencente à reta $\boldsymbol{r}$**.** Assim,

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{r} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \perp \vec{\boldsymbol{v}} \tag{2.9}$$

$$\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}\, , \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = \mathbf{0} \tag{2.10}$$

$$\Leftrightarrow \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}\, , \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0})\, , (\boldsymbol{a_1}\, , \boldsymbol{a_2}) \rangle = \mathbf{0} \tag{2.11}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{a_2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) = \mathbf{0} \tag{2.12}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} = \boldsymbol{a_1 x_0} + \boldsymbol{a_2 y_0} \tag{2.13}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} = \boldsymbol{b}, \tag{2.14}$$

onde, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a x_0} + \boldsymbol{b y_0}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a_1}\, , \boldsymbol{a_2})$.

Desta maneira, a equação algébrica linear (algumas vezes chamada de equação cartesiana) da reta é:

$$\boldsymbol{r} :\ \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} = \boldsymbol{b}, \tag{2.15}$$

daí, temos a definição de que: "um vetor $\vec{v} \neq \mathbf{0}$ é normal a uma reta $\boldsymbol{r}$ se $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$, quaisquer que sejam os pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{r}$" (DELGADO, FRENSEL e CRISSAF, SBM-2017, p. 56).

Esta definição é fundamental para assegurar a conversão da *Representação Algébrica* da *equação* para *Representação Geométrica*, pois ao se trabalhar com alunos a construção de gráficos no *plano cartesiano*, apenas alguns pontos são marcados, entretanto, a definição anterior assegura que todo e qualquer segmento de reta que se forma com dois pontos que pertencem à *Representação Geométrica* (*Gráfica*) da curva é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$, em que $\boldsymbol{a_1}$ e $\boldsymbol{a_2}$ são os coeficientes das incógnitas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, respectivamente. (É importante também para a definição de espaço vetorial).

Temos, desta maneira:

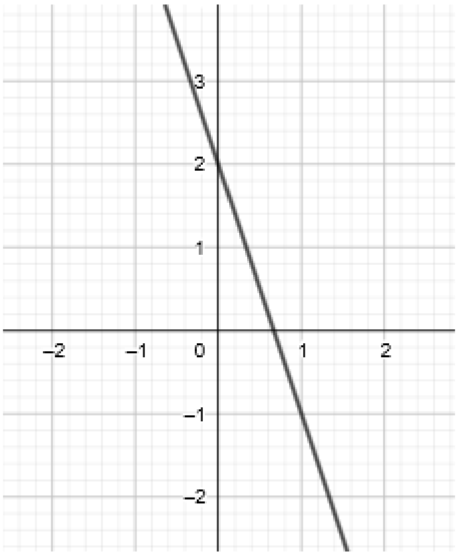
Quadro 1 - *Representação Algébrica* da equação algébrica linear

$\boldsymbol{a_1 x + a_2 y = b}$
Objeto matemático: Equações lineares; **Sistema Semiótico:** Simbólico; **Representação:** Algébrica.

Fonte: O autor (2019)

Além da *Representação Algébrica*, existem outros tipos de *representações* deste objeto matemático, como exemplo, a *Representação Geométrica*, a qual registramos no quadro a seguir.

Quadro 2 - *Representação Geométrica* da equação algébrica linear- duas incógnitas



$$\boldsymbol{3x + y = 2}$$

Tratamento: $\boldsymbol{a_1 = 3}$; $\boldsymbol{a_2 = 1}$; $\boldsymbol{b = 2}$;

Objeto matemático: Equações lineares;

Sistema Semiótico: Figural;

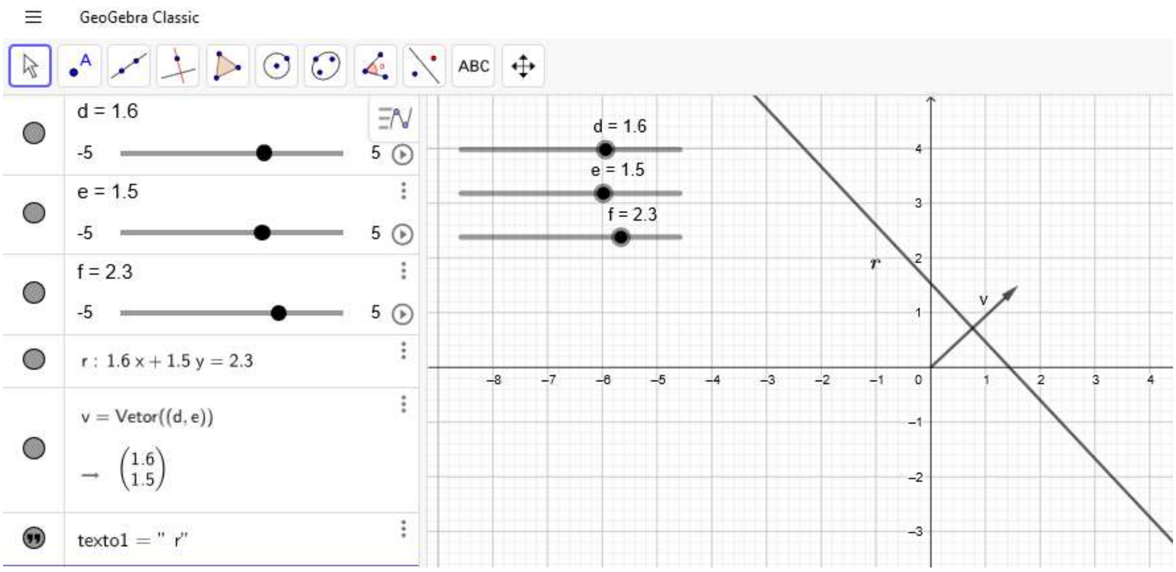
Representação: Geométrica - Software Geogebra.

Fonte: O autor (2019)

Durante o processo de ensino-aprendizagem, é necessário que ocorra a utilização de diversos tipos de representações de um mesmo objeto matemático para assim propiciar a construção do conhecimento. Segundo Duval (2003), na verdade, é condição necessária a mobilização de diferentes representações para que aconteça a construção de conhecimento, uma vez que esta é uma das habilidades pertinentes ao conhecimento matemático.

A utilização do Geogebra como ferramenta metodológica propicia a visão e interação com a R*epresentação Geométrica Virtual* (RGV) dos objetos matemáticos que compõem a formação da *representação algébrica* da equação linear a partir do vetor. Equivalência das equações: **2.8 ⇔ 2.13.**

Quadro 3 - *Representação Geométrica* da caracterização de uma *equação algébrica linear* a partir de uma direção dada



$$r:\ a_1 x + a_2 y = b\ ;\ \vec{v} = (a_1\,, a_2).$$

Tratamento: Considere: $a_1 = d = [-5\,, 5]$; $a_2 = e = [-5\,, 5]$; $b = f = [-5, 5]$

Objeto matemático: Equações lineares e equações vetoriais;

Sistema Semiótico: Figural;

Representação: Geométrica - Software Geogebra.

Fonte: O autor (2019)

Observe que a partir dos valores que se definem no ***controle deslizante***[5] do software Geogebra, é possível verificar a relação entre a representação geométrica do vetor $\vec{v}$ e da equação r nos intervalos que se registrar. Assim, possibilita a relação dinâmica entre objetos matemáticos e diversos tipos de representações, uma vez que ocorre o ***tratamento*** ao substituir automaticamente as incógnitas e os coeficientes por alguns valores, ao mesmo tempo que ocorre a ***conversão***, ou seja, a mudança da Representação Algébrica para Representação Geométrica.

Durante este processo, ocorre também outra *conversão* no momento em que se isola uma das *incógnitas* da *equação*, de maneira que começa a existir uma relação de dependência entre os símbolos e, assim, pode-se entender a expressão como uma *função algébrica*. Este torna um momento fundamental para destacar a diferença entre

[5] Ferramenta do Software Geogebra que permite variar os valores dos símbolos em intervalos e padrões que se desejar definir.

incógnita e *variável*, conhecimento fundamental para desenvolvimento do conhecimento matemático de cada aluno, além de ser uma das habilidades que os PCNs destacam no campo da Álgebra.

A partir do software Geogebra e com a variação dos valores dos coeficientes da equação algébrica linear do **quadro 3**, é possível verificar qual a representação geométrica quando $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{0}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{0}\,,\boldsymbol{0})$, ou seja, apenas o vetor nulo no *plano cartesiano*.

Ao se trabalhar a Matemática de maneira integrada com vários tipos de representações e, consequentemente, com outras áreas do conhecimento, como a Álgebra, Aritmética e Geometria, favorece a construção do conhecimento de maneira significativa e com uma ampla bagagem de informações para apreensão dos conceitos matemáticos e algébricos (Brasil, 1998).

1.5.2 Sistemas de Equações Lineares com duas Equações e duas Incógnitas

Desde tempos remotos, diversos problemas e situações do cotidiano e da própria área do conhecimento são modelados a partir de *representações matemáticas*. Pode se destacar na própria Matemática a aplicação enfática de conceitos algébricos que possibilitaram e possibilitam o desenvolvimento e linearização do conhecimento, assim como atualmente ocorre também em diversos setores da tecnologia, no campo financeiro, entre outros.

Como exemplo da investigação a respeito da formação de conceitos e propriedades sobre sistemas de equações lineares, temos que sua aplicação já acontecia desde meados de 1800 a.C. pelos Babilônios, como afirmam Hefez e Fernandez (SBM-2016), que destacam também a respeito do processo de resolução que se utilizavam naquela época, o qual titulamos hoje como "... método de eliminação gaussiana[6]" (SBM-2016, p. 56). Segundo os autores, eram sistemas de equações do tipo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{36} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{2} \end{cases}. \qquad \textbf{(i)}$$

E a partir de *operações de equivalências*, obtém-se o *conjunto solução*

[6] "Em homenagem a Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777 – 1855), considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos". (Hefez e Fernandez, 2016, p. 7).

$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{19}, \mathbf{17})\}$, observe:
considere,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{36} & \text{eq.}(1) \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{2} & \text{eq.}(2) \end{cases}$$

em que eq.(1) e eq.(2) referem, respectivamente, à primeira e à segunda equações do sistema **(i)**. Assim, ao somar a segunda equação à primeira, obtemos o *sistema equivalente*[7]:

$$\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{38} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{2} \end{cases},$$

desta forma, o objetivo é efetuar *operações de equivalências* até se encontrar de maneira trivial a solução.

$$\begin{cases} \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \mathbf{38} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{2} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{19} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{2} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{19} \\ \mathbf{19} - \boldsymbol{y} = \mathbf{2} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{19} \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{17}. \end{cases}$$

Observe que estas operações de equivalências exemplificam a segunda relação fundamental da TRRS, o *tratamento*, pois geram a transformação da representação de cada sistema de equações sem mudar o registro, pois são operações que realizamos com os mesmos objetos matemáticos, expressões algébricas.

Iremos generalizar o processo de obtenção de *sistemas equivalentes* para a resolução de *sistemas de equações algébricas lineares* com $\boldsymbol{m}$ *equações* e $\boldsymbol{n}$ *incógnitas*,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1} + \boldsymbol{a_{12}x_2} + \cdots + \boldsymbol{a_{1n}x_n} = \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1} + \boldsymbol{a_{22}x_2} + \cdots + \boldsymbol{a_{2n}x_n} = \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1} + \boldsymbol{a_{m2}x_2} + \cdots + \boldsymbol{a_{mn}x_n} = \boldsymbol{b_m} \end{cases}, \qquad \textbf{(ii)}$$

onde os $\boldsymbol{a_{ij}}$'s e os $\boldsymbol{b_i}$'s, com $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{m}$ e $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}$, são números reais dados ou, mais geralmente, elementos de um corpo $\boldsymbol{K}$ dado (HEFEZ, FERNANDEZ, 2016).

[7] Designaremos dois ou mais sistemas como *sistemas equivalentes* se for possível efetuar uma quantidade finita de operações de equivalência com um sistema até obter o(s) outro(s).

Enfatizaremos sobre os *Sistemas de Equações Algébricas Lineares* com duas *equações* e duas *incógnitas* e também com três *equações* e três *incógnitas*, conteúdos que compõem a grade curricular do Ensino Básico.

O Princípio Universal das Ciências assegura que:

1. Em uma igualdade, mais especificamente uma equação algébrica, podemos somar (ou subtrair), multiplicar (ou dividir) mesmos objetos matemáticos em ambos os membros que esta igualdade se mantém.

A versão deste princípio que se utiliza com frequência em Matemática é a *relação de equivalência*, a qual citamos e utilizamos anteriormente para a resolução do sistema de equações (i).

Em Matemática, a *relação de equivalência* é uma relação que apresenta três propriedades fundamentais: Reflexividade, Simetria e Transitividade. Considerando os objetos ***a***, ***b*** e ***c***, temos:

- reflexividade: ***a = a***;
- simetria: se ***a = b***, então ***b = a***;
- transitividade: se ***a = b*** e ***b = c*** então ***a = c***.

Por exemplo, pela *relação de equivalência*, temos pela reflexividade que 2 = 2; pela simetria 2 = 1 + 1 = $\frac{8}{4}$ e pela transitividade 2 = 1 + 1 e 2 = $\frac{8}{4}$ então 1 + 1 = $\frac{8}{4}$. De fato 2 é igual a 2, porém as demais possibilidades são **equivalentes** a 2 e **não iguais** a 2.

Essa relação é fundamental em Matemática e a usaremos no ensino de *frações equivalentes* no Ensino Básico (Ensino Fundamental II), o raciocínio é o mesmo para resolução de *equações algébricas lineares* e, consequentemente, para a obtenção de *sistemas equivalentes* e resolução de *sistemas de equações algébricas lineares*, observe que do sistema **(i)** temos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=36} & \text{eq.}\,(1) \\ \boldsymbol{x-y=2} & \text{eq.}\,(2)' \end{cases}$$

ao somar a equação (2) à equação (1), utilizamos o princípio de que a objetos iguais, podemos somar objetos iguais, pois os objetos permanecem iguais, equivalentes, assim, geramos um *sistema equivalente*. Logo após, a sequência de sistemas equivalentes se justifica com as seguintes propriedades,

$$\begin{cases} x+y=36 \\ x-y=2 \end{cases} \overset{1}{\approx} \begin{cases} 2x=38 \\ x-y=2 \end{cases} \overset{2}{\approx} \begin{cases} x=19 \\ x-y=2 \end{cases} \overset{3}{\approx} \begin{cases} x=19 \\ 19-y=2 \end{cases} \overset{4}{\approx} \begin{cases} x=19 \\ y=17 \end{cases},$$

na *equivalência* **2,** consideramos que a ambos os membros da igualdade podemos dividir por objetos iguais (ou operar com o inverso multiplicativo), na *equivalência* **3** usamos implicitamente a *transitividade*, pois:

- se $\boldsymbol{x=19}$ e $\boldsymbol{x=y+2}$, então $\boldsymbol{19=y+2}$**,** que é equivalente a $\boldsymbol{19-y=2}$.

Já na *equivalência* **4,** consideramos novamente que se à ambos os membros da *equação* somar objetos iguais e multiplicar por objetos iguais gera uma *equação* equivalente. Desta maneira, se obtém *conjunto solução* de maneira processual, construtiva e significativa, uma vez que se entende todas as etapas, operações e transformações necessárias, de maneira "autônoma" e não mecânica como muitas vezes ocorre no Ensino Básico.

Ao resolver (calcular o *conjunto solução*) *sistemas de equações algébricas lineares* através de operações matemáticas que geram *sistemas equivalentes* e registrar (conhecer) a(s) propriedade(s) que compõe(m) a *relação de equivalência* em cada caso, o aluno participa de maneira ativa no processo de construção do conhecimento, já que entende o "porquê" e o "como" cada etapa aconteceu, de maneira lógica e com objetivos a atingir, no caso, a resolução do *sistema*. Além do exposto, estas operações fazem parte do *tratamento* (segunda transformação fundamental da *TRRS)* dos objetos matemáticos, no caso, as *equações lineares algébricas* e *sistemas de equações lineares algébricas*, uma vez que as equivalências resultam de *transformações dos registros* dos objetos matemáticos em questão.

Um outro objetivo deste tipo de processo de ensino-aprendizagem é que o trabalho didático sobre sistemas de equações lineares ocorra de maneira que o estudante compreenda e justifique (algebricamente) as operações matemáticas em cada equivalência das *equações* e, consequentemente, dos *sistemas de equações*, de maneira a recorrer a conceitos básicos como do *inverso aditivo* e *inverso multiplicativo*.

Assim, a resolução do *Sistema de Equações Lineares* pode ser feita a partir de uma sequência de *transformações elementares* em que as propriedades fundamentais da *relação de equivalência* se expressam das seguintes transformações:

1) Trocar a posição relativa de duas equações do sistema;
2) Trocar uma equação pela soma membro a membro da própria equação com um múltiplo de outra;
3) Trocar uma equação dada por um de seus múltiplos (consideremos que o múltiplo de uma equação se obtém ao multiplicar todos os membros de uma equação dada por um número rela diferente de zero).

Observe que iremos utilizar a seguinte *Representação Algébrica* para o *Sistema de Equações Algébricas Lineares* com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2} \end{cases}, \qquad \textbf{(iii)}$$

em que $\boldsymbol{a_{11}}$ e $\boldsymbol{a_{12}}$ são os coeficientes reais das incógnitas $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ da primeira equação, de maneira que estes coeficientes não são ambos nulos, uma vez que pela definição que apresentamos anteriormente o vetor $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{12}})$ é não nulo. De maneira semelhante, $\boldsymbol{a_{21}}$ e $\boldsymbol{a_{22}}$ são os coeficientes reais das incógnitas $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$ da segunda equação, com o vetor não nulo $\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{a_{21}}, \boldsymbol{a_{22}})$. E, $\boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{b_2} \in \mathbb{R}$.

Os estudos sobre *Sistemas de Equações Algébricas Lineares* iniciam frequentemente durante o 7º ano do Ensino Fundamental II e se efetua uma das possíveis transformações do tipo de *representação* do objeto matemático, se representa o sistema a partir do *Registro Semiótico Figural* com a Representação Geométrica a partir do plano, especificamente, o *plano cartesiano* e, desta maneira, ao invés de representar as incógnitas por $\boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{x_2}$, como no sistema **(iii)**, é comum o próprio livro didático adotar $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, o que pode variar em cada situação.

Observe a análise dessas representações de acordo com o sistema **(i)** que apresentamos anteriormente:

Quadro 4 - Representação algébrica do Sistema de Equações Algébricas Lineares

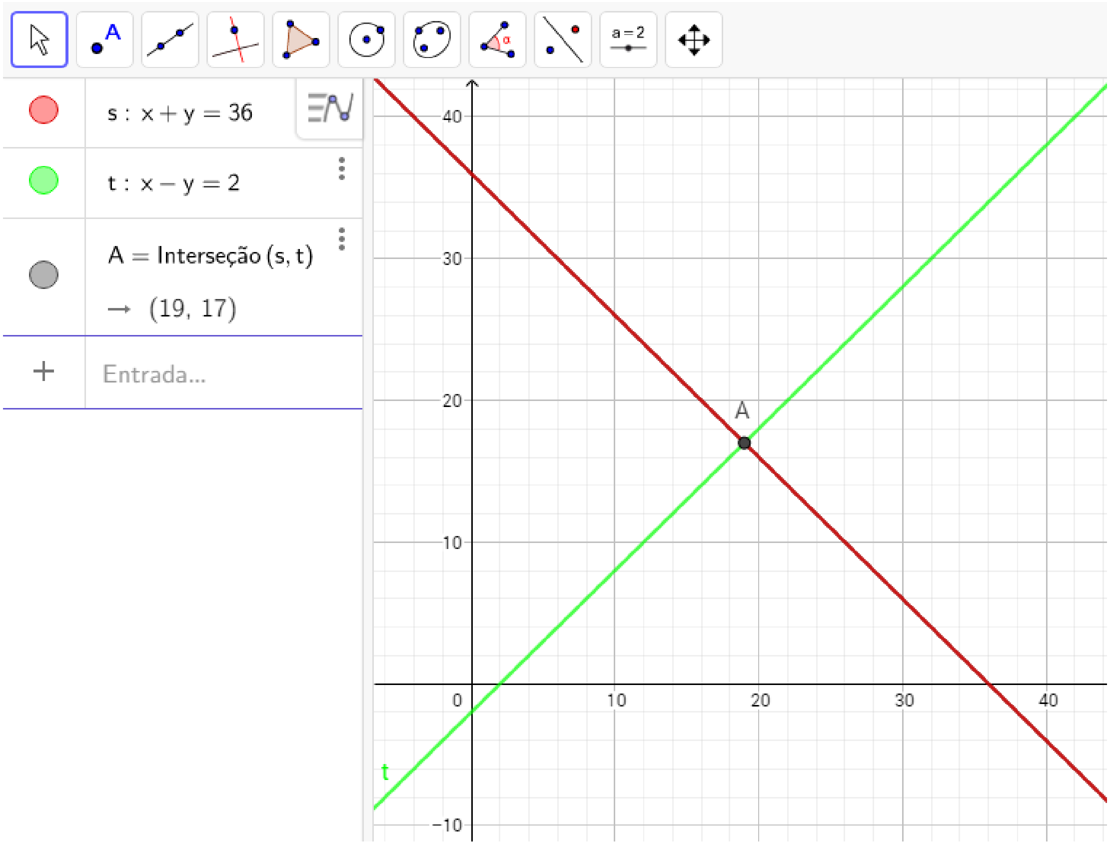
(i): $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 36} \\ \boldsymbol{x - y = 2} \end{cases}$
Objeto matemático: Sistemas Lineares;
Sistema Semiótico: Simbólico;
Representação: Algébrica.

Fonte: O autor (2019)

A representação algébrica é a primeira que geralmente se adota e, paralelamente a isso, é comum também adotar representações textuais a partir de exemplos sobre um contexto em que ocorre a aplicação do conteúdo, o que deve ser feito a partir de sequências didáticas que garantam com êxito a construção dos conceitos matemáticos e algébricos, uma vez que são conteúdos que têm sua linearização independentemente dos exemplos de aplicação em um contexto. Além disso, a *conversão*, ou seja, mudança de registro de representação, requer o domínio dos conceitos sobre os objetos matemáticos em questão, o que pode dificultar a mudança do sistema semiótico e, reciprocamente, o desenvolvimento do conhecimento sobre estes conceitos.

Uma das mudanças do *registro semiótico* que se utiliza comumente no estudo de sistemas lineares é a *conversão* entre a Representação Algébrica e a Representação Geométrica, veja no quadro a seguir esta conversão para o sistema **(i)**.

Quadro 5 - Representação Geométrica do Sistema de Equações Algébricas Lineares



$$\text{s}: x + y = 36$$

$$\text{t}: x - y = 2$$

Objeto matemático: Sistemas de Equações lineares;

Sistema Semiótico: Figural;

Representação: Geométrica – Software Geogebra.

Fonte: O autor (2019)

A maneira como se trabalha essas duas *Representações Semióticas*, algébrica e geométrica, irá contribuir para a continuação dos estudos sobre sistemas lineares (2x2), sobretudo, sobre a classificação do mesmo quanto ao *conjunto solução*, principalmente durante o 2º ano do Ensino Médio. Vejamos o estudo algébrico quanto a classificação.

1.5.2.1 Classificação dos Sistemas Lineares (2x2): Análise Algébrica e Análise Geométrica

Os *Sistemas de Equações Lineares* se classificam de acordo com o *conjunto solução* da seguinte maneira:

(a) *Possível e determinado*: Admite uma única solução;

(b) *Possível e indeterminado*: Admite mais de uma solução;

(c) *Impossível*: Não admite solução;

Faremos a análise algébrica de cada um destes casos e, posteriormente, a partir da *conversão* do *registro semiótico,* analisaremos a Representação Geométrica. Considere o sistema **(iii)**:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1} & eq.(1) \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2} & eq.(2) \end{cases}$$

ao multiplicar a $eq.(1)$ por $\boldsymbol{a_{21}}$ e a $eq.(2)$ por $\boldsymbol{-a_{11}}$, obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1} & eq.(1) \\ \boldsymbol{-a_{11}a_{21}x_1 - a_{11}a_{22}x_2 = -a_{11}b_2} & eq.(2) \end{cases} \qquad \textbf{(iv)}$$

ao substituir a $eq.(2)$ do último sistema pela soma termo a termo da $eq.(1)$ com a $eq.(2)$, obtemos um novo sistema equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1} & eq.(1) \\ \boldsymbol{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2} & eq.(2) \end{cases}. \qquad \textbf{(v)}$$

Analisaremos três casos:

CASO 1:

Da segunda equação do sistema **(v)** temos que,

se

$$\boldsymbol{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \neq 0},$$

então

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}}$$

observe que, para

$$\boldsymbol{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \neq 0}$$

$$\boldsymbol{a_{12}a_{21} \neq a_{11}a_{22}}$$

$$\boldsymbol{\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}}$$

isso mostra que os vetores $(\boldsymbol{a_{11}, a_{12}})$ e $(\boldsymbol{a_{21}, a_{22}})$ não são múltiplos, assim as equações que compõem o sistema são *linearmente independentes* e, desta maneira,

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1} & eq.(1) \\ \boldsymbol{x_2 = \dfrac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}} & eq.(2). \end{cases} \qquad \textbf{(vi)}$$

Ao substituir a segunda equação na primeira e efetuar operações de equivalência, obtém- se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \dfrac{a_{12}b_2 - a_{22}b_1}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}} \\ \boldsymbol{x_2 = \dfrac{a_{21}b_1 - a_{11}b_2}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}}. \end{cases} \qquad \textbf{(vii)}$$

Desta maneira se expressa a solução, assim, o sistema é *possível e determinado*.

CASO 2:

Da segunda equação do sistema **(v)** temos que,

se

$$\boldsymbol{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0} \text{ e } \boldsymbol{a_{21}b_1 - a_{11}b_2 = 0}$$

então

$$(\boldsymbol{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}})\boldsymbol{x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}$$

pois

$$\boldsymbol{0.x_2 = 0 \Longrightarrow 0 = 0}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}.$$

Assim, da primeira equação do sistema **(iii)** temos que:

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2}\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}.$$

Isso implica que $\boldsymbol{x_1}$ representa todo e qualquer *número real* conforme $\boldsymbol{x_2}$. Assim, a partir do sistema **(v),** construímos e expressamos algebricamente o *conjunto solução* como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1} \\ \boldsymbol{(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = a_{21}b_1 - a_{11}b_2} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1} \\ \boldsymbol{0x_2 = 0} \end{cases} \qquad \textbf{(viii)}$$

$$\sim \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = a_{21}b_1} \\ \boldsymbol{x_2 = t} \end{cases}, \forall\, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(ix)}$$

$$\sim \begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2} \\ \boldsymbol{x_2 = t} \end{cases}, \forall\, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(x)}$$

$$\sim \begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}} \\ \boldsymbol{x_2 = t} \end{cases}, \forall\, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}. \qquad \textbf{(xi)}$$

Logo,

$$\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{\frac{b_1 - a_{12}t}{a_{11}}}\,, \boldsymbol{t}\right\}.$$

Assim, neste caso (**CASO 2**), o sistema se verifica implicitamente para todo e qualquer *número real* $\boldsymbol{t}$, ou seja, admite infinitas soluções, o que classifica este tipo de *sistema de equações algébricas* como *possível e indeterminado*.

É válido destacar que durante o processo de resolução do *sistema de equações,* deve-se instigar o aluno a perceber que a partir do *tratamento* (TRRS) que se realiza com o *sistema* inicial, as expressões podem começar a apresentar relação de dependência entre as incógnitas, como na primeira equação do sistema **(xi)**. Essa instigação pode ser feita a partir da formação algébrica de cada expressão, procedimento didático que colabora para a diferenciação algébrica e conceitual entre *incógnita* e *variável*, o que muitas vezes é um dos principais obstáculos à construção do conhecimento matemático sobre *equações matemáticas* e *funções matemáticas.*

CASO 3:

Da segunda equação do sistema **(v),** temos que, se

$$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0 \text{ e } a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \neq 0$$

então

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = 0x_2 = 0,$$

e

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 \neq a_{21}b_1 - a_{11}b_2\,, \quad \forall\, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Logo, neste caso (**CASO 3),** não existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que o sistema inicial se verifique, ou seja, o sistema não admite *conjunto solução real*. Este tipo de sistema se classifica como *sistema impossível* e o *conjunto solução* é *vazio*,

$$S = \{\,\} \text{ ou } S = \emptyset.$$

O processo de ensino-aprendizagem sobre *Sistemas de Equações Algébricas Lineares* com duas *equações* e duas *incógnitas* inicia no Ensino Básico durante o 7º ano do Ensino Fundamental II e se amplia de maneira específica durante o 2º ano do Ensino Médio (o que não limita a sua aplicação e exploração em outros períodos do Ensino Básico). Desta maneira, o que destacamos com ênfase neste trabalho é que além de se preocupar para que ocorra a justificação algébrica de todos os processos de resolução e/ou equivalências dos *sistemas,* deve-se atentar também para que o registro simbólico das expressões mantenha a grafia inicial de cada exemplo ou situação. Quando necessário efetuar a mudança da grafia de representação, *registro de representação* (*tratamento* - TRRS), deve ocorrer de forma didaticamente plausível, para que o aluno consiga entender e acompanhar todos os processos operatórios que se façam necessários.

Observe no processo de resolução do exemplo a seguir um tipo de mudança do registro dos *sistemas algébricos* que contribui para obstruir a sequência didática, considere a situação problema disponível na Revista do Professor de Matemática (RPM-81)[8]:

Uma barraca vende cachorro-quente com uma salsicha a R$ 15,00 e cachorro-quente com duas salsichas, a R$ 18,00. Ao final de um determinado dia, o vendedor conseguiu receber R$ 810,00 com a venda de cachorros-quentes e contou que foram vendidos 46 pães. Determine o número de salsichas que foram consumidas.

Resolução:

Considere a *incógnita* $\boldsymbol{x}$ como o número de cachorros-quentes com uma salsicha; e a *incógnita* $\boldsymbol{y}$ como o número de cachorros-quentes com duas salsichas. Assim, teremos o seguinte *Sistema de Equações Algébricas Lineares* com duas *equações* e duas *incógnitas* (a revista RPM apresentou três possíveis métodos de resolução, este é um deles):

$$\begin{cases} \boldsymbol{15x + 18y = 810} \\ \boldsymbol{x + y = 46} \end{cases}, \qquad \textbf{(xii)}$$

observe que a primeira *equação* do sistema refere ao valor total referente à venda dos cachorros-quentes (receita) e a segunda *equação* refere ao somatório de pães (quantidade de cachorros-quentes) que se vendeu. É importante destacar que, neste primeiro momento, após leitura e interpretação do problema, ocorreu a *conversão* (TRRS) do registro semiótico do objeto, uma vez que tínhamos um problema matemático expresso na linguagem textual e o escrevemos na linguagem matemática (algébrica).

Suponhamos que no decorrer da resolução, o professor registre o sistema **(xii)** e na sequência escreva o seguinte sistema **(xiii)**, sem preocupar em justificar as “equivalências” e com símbolo(s) diferente(s),

$$\begin{cases} 15\mathrm{X} + 18\mathrm{Y} = 810 \\ \mathrm{X} = 46 - \mathrm{Y} \end{cases}. \qquad \textbf{(xiii)}$$

Geralmente, isto ocorre com frequência durante o processo de ensino-aprendizagem e é um dos fatores que contribue para o desenvolvimento da

[8] RAPHAEL ALCAIRES DE CARVALHO. O cachorro-quente e três soluções. Revista do Professor de Matemática, nº 81 - Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

aprendizagem mecânica e surgimento de dificuldades sobre resolução de *sistemas de equações*, além de comprometer a construção dos conceitos. Além disso, frequentemente se resolve os *sistemas de equações* e/ou cada *equação* com vocábulos como: “passa negativo para o outro lado”, “passa dividindo”, etc. Observe que

$$\begin{cases} 15X + 18Y = 810 \\ X = 46 - Y \end{cases} \sim \begin{cases} 15(46 - Y) + 18Y = 810 \\ X = 46 - Y \end{cases} \sim \begin{cases} 3y = 120 \\ X = 46 - Y \end{cases} \sim \begin{cases} y = \dfrac{120}{3} \\ X = 46 - Y \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} Y = 40 \\ X = 46 - 40 \end{cases} \sim \begin{cases} Y = 40 \\ X = 6 \end{cases}.$$

Entretanto, os símbolos que temos neste último sistema, não são os mesmos do sistema **(xii)** referente à situação problema, o que pode gerar dúvidas a todo o processo de operações. Vale destacar que este é um dos primeiros contatos dos alunos com a Álgebra e com linguagem algébrica, o qual ocorre no 7º ano do Ensino Fundamental II. Situações como a que apresentamos anteriormente geram desconforto e insegurança aos alunos e pode interferir de maneira insatisfatória durante todo o Ensino Básico.

Após a análise algébrica da classificação dos S*istema de Equações algébricas lineares* (2x2), efetuaremos a análise geométrica, pois consideramos que este tipo de metodologia contribui para a apreensão dos conceitos.

Analisaremos cada um dos casos que apresentamos nesta seção. Considere novamente o sistema **(iii)**:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1} & eq.(1) \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2} & eq.(2), \end{cases}$$

no **caso (1),** consideramos que os vetores $(\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{12}})$ e $(\boldsymbol{a_{21}}, \boldsymbol{a_{22}})$ normais à *equação (1)* e à *equação (2)*, respectivamente, não são múltiplos entre si, isto garante que o *sistema* admita uma única *solução*. Assim, como as retas referentes às *equações* deste *sistema de equações* não são perpendiculares a uma mesma *direção* (aos mesmos vetores), podemos entender que estas retas também não terão a mesma direção, portanto, no plano elas se intersectaram em um único *ponto*, o *ponto* de par ordenado referente à *solução* do *sistema*.

Considere o sistema:

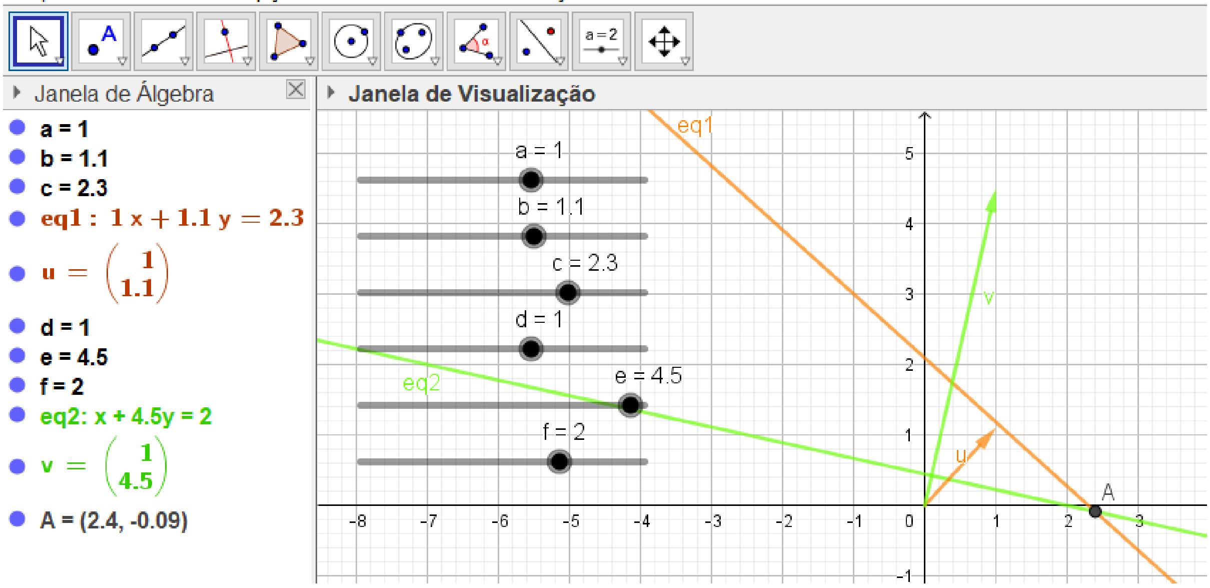
$$\begin{cases} \mathbf{ax + by = c} \\ \mathbf{dx + ey = f} \end{cases} \qquad \textbf{(xiv)}$$

no software Geogebra, definimos valores para os *coeficientes* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{e}$, de maneira que:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{d}} \neq \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{e}}$$

como o exemplo da imagem a seguir:

Figura 2 - Sistema de Equações Lineares: Possível e Determinado



Fonte: O autor (2019)

Na imagem, temos a *Representação Figural* (*Geométrica*) do seguinte *Sistema de Equações Algébricas Lineares*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 1,1y = 2,3} \\ \boldsymbol{x + 4,5y = 2,} \end{cases} \qquad \textbf{(xv)}$$

que é *possível e determinado*, e o *conjunto solução* deste sistema é composto pelas coordenadas do *ponto* $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2.4}, -\mathbf{0.09})$.

No **caso (2)**, consideramos que as *constantes* do *sistema* **(iii)** são tais que:

$$\boldsymbol{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0} \text{ e } \boldsymbol{a_{21}b_1 - a_{11}b_2 = 0}$$

logo existe $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ de maneira que

$$\boldsymbol{a_{21}} = \boldsymbol{\lambda a_{11}},\ \boldsymbol{a_{22}} = \boldsymbol{\lambda a_{12}} \text{ e } \boldsymbol{b_2} = \boldsymbol{\lambda b_1},$$

se o *ponto* $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pertence à reta $(\boldsymbol{r_1})$ referente à *equação* 1 do sistema, ou seja,

$$\boldsymbol{a_{11}x} + \boldsymbol{a_{12}y} = \boldsymbol{b_1},$$

então

$$\boldsymbol{a_{11}x} + \boldsymbol{a_{12}y} = \boldsymbol{b_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda a_{11}x} + \boldsymbol{\lambda a_{12}y} = \boldsymbol{\lambda b_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_{21}x} + \boldsymbol{a_{22}y} = \boldsymbol{b_2},$$

ou seja, o ponto $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ também pertence à reta $\boldsymbol{r_2}$ referente à *equação* 2 do sistema, o que mostra que estas retas, $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$, são *coincidentes*. Neste caso, os *vetores normais* são tais que:

$$(\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{12}}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{a_{21}}, \boldsymbol{a_{22}}),$$

ou seja, são múltiplos.

Considere novamente o sistema **(xiv)**:

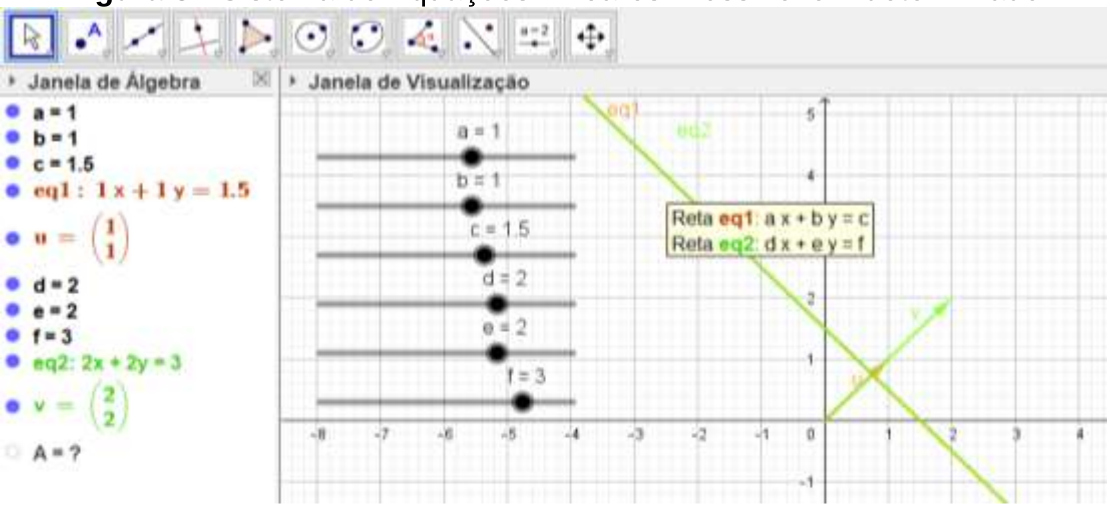
$$\begin{cases} \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{ey} = \boldsymbol{f} \end{cases}$$

no software Geogebra, definimos valores para as *constantes* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{f}$ de maneira que:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\lambda a}, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{\lambda b} \text{ e } \boldsymbol{f} = \boldsymbol{\lambda c}$$

com $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, como no exemplo da imagem a seguir:

Figura 3 - Sistema de Equações Lineares: Possível e Indeterminado



Fonte: O autor (2019)

A imagem refere ao *Sistema Semiótico Figural* (*Geométrico*) e é uma *conversão (TRRS)* do *sistema de representação* do seguinte exemplo de *Sistema de Equações Algébricas Lineares*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 1,5} \\ \boldsymbol{2x + 2y = 3,} \end{cases} \qquad \textbf{(xvi)}$$

que se classifica como *possível e indeterminado*. Observe que neste exemplo $\boldsymbol{\lambda = 2}$.

No **caso (3),** consideramos que as *constantes* do *sistema* **(iii)** são tais que:

$$\boldsymbol{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0} \text{ e } \boldsymbol{a_{21}b_1 - a_{11}b_2 \neq 0}$$

logo existe $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ de maneira que

$$\boldsymbol{a_{21} = \lambda a_{11}}, \boldsymbol{a_{22} = \lambda a_{12}} \text{ e } \boldsymbol{b_2 \neq \lambda b_1},$$

desta maneira, neste caso, se o *ponto* $\boldsymbol{P = (x, y)}$ pertence à reta $(\boldsymbol{r_1})$ referente à *equação* 1 do sistema, ou seja,

$$\boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1},$$

então

$$\boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1 \Leftrightarrow \lambda a_{11}x + \lambda a_{12}y = \lambda b_1 \Leftrightarrow a_{21}x + a_{22}y \neq b_2}.$$

Mostramos assim, que se o ponto $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pertence à *reta* $\boldsymbol{r_1}$ referente à *equação* 1 do *sistema*, então este ponto $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ não pertence à *reta* $\boldsymbol{r_2}$ referente à *equação* 2 do *sistema*, o que mostra que estas retas, $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$, não tem nenhum ponto em comum, são paralelas distintas. Neste caso, os *vetores normais* também são tais que:

$$(\boldsymbol{a_{11}}, \boldsymbol{a_{12}}) = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{a_{21}}, \boldsymbol{a_{22}}).$$

Pode-se considerar mais uma vez o sistema **(xiv)**:

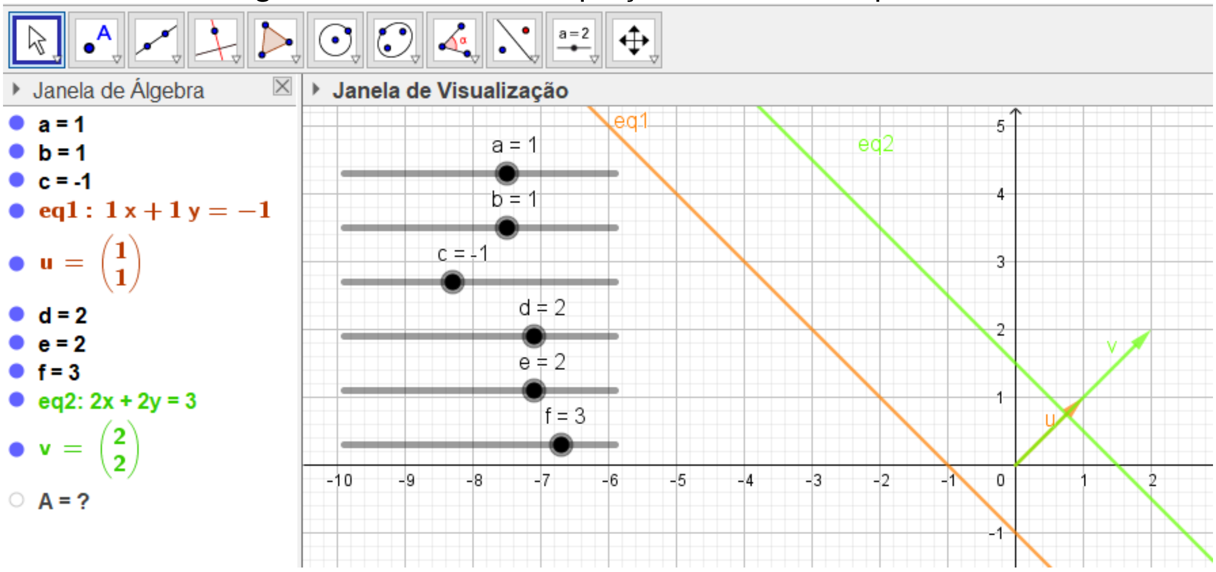
$$\begin{cases} \mathbf{ax + by = c} \\ \mathbf{dx + ey = f} \end{cases}$$

no software Geogebra, definimos valores para as *constantes* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\mathbf{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ e $\mathbf{f}$ de maneira que:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\lambda a}, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{\lambda b} \text{ e } \boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{\lambda c}$$

com $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, como no exemplo da imagem a seguir:

Figura 4 - Sistema de Equações Lineares: Impossível



Fonte: O autor (2019)

A figura **(4)** refere ao seguinte *sistema de equações*:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=-1} \\ \boldsymbol{2x+2y=3,} \end{cases} \qquad \textbf{(xvii)}$$

sistema impossível, observe que são duas retas paralelas. Temos mais uma vez dois tipos de *sistemas semióticos* diferentes para a representação de um mesmo objeto matemático.

1.5.3 Sistemas Lineares com três Equações e três Incógnitas

As discussões a respeito dos *Sistemas de Equações Algébricas Lineares* têm como um dos objetivos a análise do processo de ensino-aprendizagem de conceitos algébricos e matemáticos no Ensino Básico. Para isso, a referência principal será a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) com destaque para a *Representação Algébrica* e para a *Representação Geométrica,* além da análise específica de alguns processos de resolução dos *sistemas lineares (3x3)*.

Uma *equação linear* com três *incógnitas* é da forma:

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + \ a_3x_3 \ = \ b} \qquad \textbf{(2.16)}$$

onde $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ são constantes com pelo menos um dos símbolos $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ ou $\boldsymbol{a_3}$ diferente de 0 (zero). As constantes $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ e $\boldsymbol{a_3}$ são os **coeficientes** e $\boldsymbol{b}$ é o termo independente.

Neste caso, iremos trabalhar com a *Representação Geométrica* a partir do *sistema de coordenadas* no *espaço cartesiano* (três dimensões), uma vez que adotaremos os vetores de uma base de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$. Observe que o *conjunto* $\propto = \{\boldsymbol{i, j, k}\}$ com os *vetores independentes*:

$$\boldsymbol{i} = (\boldsymbol{1,0,0}); \ \boldsymbol{j} = (\boldsymbol{0,1,0}) \text{ e } \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{0,0,1}),$$

gera $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$, uma vez que qualquer *vetor* $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a_1, a_2, a_3})$ em $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ pode ser escrito como $\boldsymbol{v = a_1i + a_2j + a_3k}$. Assim, $\propto$ com a ordenação que se apresenta nos elementos do conjunto é a base de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$, também recebe o título de ***Base Canônica de*** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$ (HOWARD, RORRES, 2001).

Mostraremos a seguir que um *plano* no *espaço* se associa à *equação cartesiana* do tipo **(2.16)**, o que possibilita uma *conversão do Sistema de Representação Semiótica (TRRS)*, a de *Sistema Simbólico* para *Sistema Figural* e vice-versa. Segundo Duval (2013), esse processo de mobilização de ao menos dois Registros de Representação pode tornar a apreensão dos conceitos e objetos matemáticos mais significativa para o educando.

Para realizar a demonstração, adotaremos a noção de *produto interno*. Considere o *plano* $\boldsymbol{\pi}$ que passa pelo *ponto* $\boldsymbol{A}$ e é *normal* a *vetor* $\vec{\boldsymbol{u}}$. Então:

$$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \perp \vec{\boldsymbol{u}} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle = \boldsymbol{0} \ .$$

Ao escrevermos esta última condição em termos das coordenadas dos elementos que adotamos[9], $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$, $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ e $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, em relação ao sistema de eixos ortogonais (*espaço cartesiano* - $\mathbb{R}^{\boldsymbol{3}}$), obtemos:

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}, \vec{\boldsymbol{u}} \rangle = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}), (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) \rangle = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(2.17)}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{a_2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{a_3}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0} \qquad \textbf{(2.18)}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} + \boldsymbol{a_3 z} = \boldsymbol{a_1 x_0} + \boldsymbol{a_2 y_0} + \boldsymbol{a_3 z_0} \ . \qquad \textbf{(2.19)}$$

Logo, $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{\pi}$ se, e somente se, suas coordenadas satisfazem à *equação cartesiana* de $\boldsymbol{\pi}$:

$$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} + \boldsymbol{a_3 z} = \boldsymbol{b} \ , \qquad \textbf{(2.20)}$$

onde $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) \perp \boldsymbol{\pi}$ e se obtém $\boldsymbol{b}$ a partir da informação de que $\boldsymbol{\pi}$ contém $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a_1 x_0} + \boldsymbol{a_2 y_0} + \boldsymbol{a_3 z_0} \ .$$

Efetuamos, no decorrer deste trabalho, a *Representação Gráfica* do *Sistema Linear* com *duas equações e duas incógnitas* com o auxílio do software Geogebra, no entanto, este processo de *conversão* também deve ocorrer em sala de aula a partir

[9] Para a *equação linear com três incógnitas* usaremos os símbolos $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ para relacionar com o *plano cartesiano* apresentado pelo software Geogebra. Entretanto, é possível mudar a legenda de cada eixo numérico no software.

do conhecimento e construção manual (lápis, pincel, etc.) do *plano cartesiano* ($\mathbb{R}^2$). O uso do software surge como ferramenta dinâmica e maneira de possibilitar a inserção da tecnologia enquanto recurso metodológico, além disso, o Geogebra permite a visualização de maneira mais ampla de alguns objetos matemáticos (e de outras ciências), o que propicia, sobretudo, a investigação.

O processo de ensino-aprendizagem sobre *Sistemas Lineares* com três *equações* e três *incógnitas* é previsto para ocorrer durante o 2º ano do Ensino Médio e, geralmente, se adotam dois tipos de *Registros de Representação Algébricos*: o *Registro Simbólico* e o *Registro da Língua Materna* (consiste em situações que são expressas na língua portuguesa). Neste momento, o *Registro Geométrico* tem o mínimo de exploração em sala de aula, alguns livros didáticos até apresentam, mas o docente se limita à instigar a respeito desse tipo de Registro Semiótico, e um dos fatores que contribuem pra isso pode ser o fato do *espaço cartesiano* (*espaço tridimensional* - $\mathbb{R}^3$) gerar dificuldades de exploração com sua “apresentação” a partir do desenho no quadro branco ou em outra superfície. Este fator evidencia e justifica a importância de recursos metodológicos como o software Geogebra.

O quadro (**6**) apresenta o *registro* que se adota durante o Ensino Médio para expressar uma *equação linear* a três *incógnitas*, já o quadro (**7**) apresenta um outro tipo de *representação* a partir da *conversão* do *Sistema de Representação* para um exemplo de equação.

Quadro 6 - *Representação Algébrica* da *equação algébrica linear* com três *incógnitas*

$$\boldsymbol{a_1x + a_2y + a_3z = b}$$

Objeto matemático: Sistema de Equações lineares;

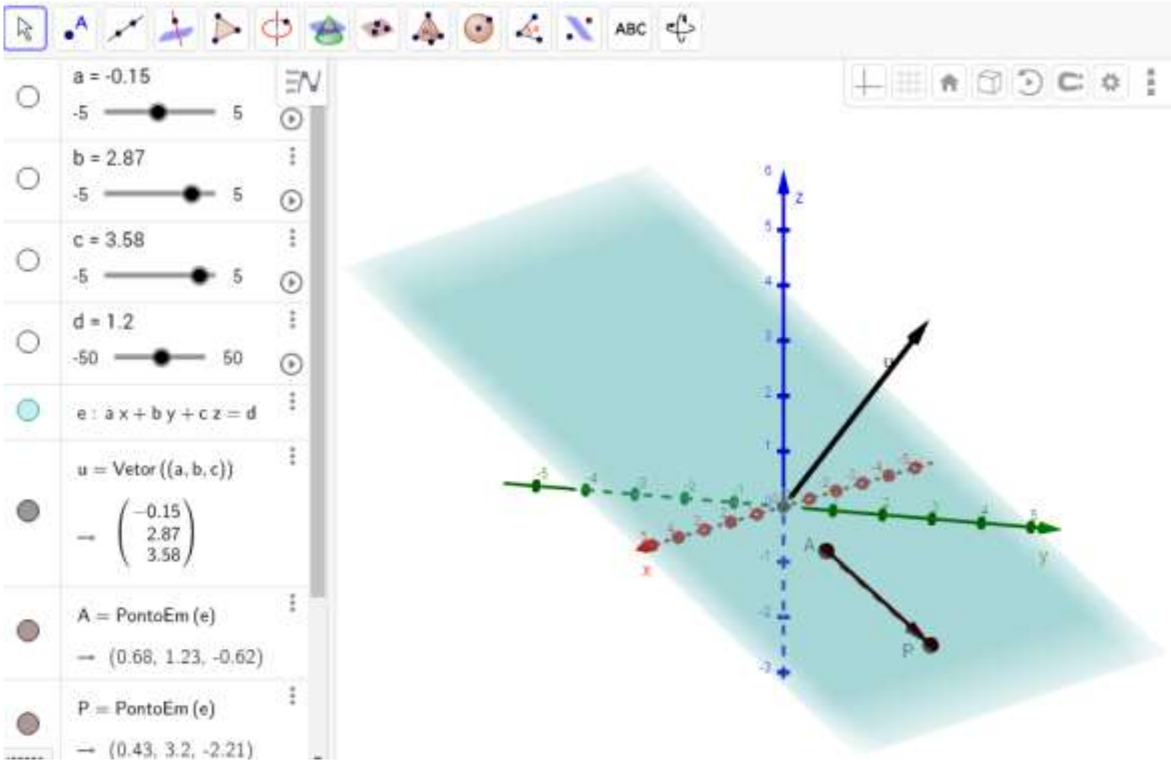
Sistema Semiótico: Simbólico;

Representação: Algébrica.

Fonte: O autor (2019)

O quadro (**7**) ilustra geometricamente um exemplo de *equação linear* a três *incógnitas*, assim como o *vetor* normal.

Quadro 7 - *Representação Geométrica da equação algébrica linear - três incógnitas*



$$-0,15x + 2,87y + 3,58z = 1,2$$

Objeto matemático: Equações Lineares; Equações Vetoriais;

Sistema Semiótico: Figural;

Representação: Geométrica - Software Geogebra.

Fonte: O autor (2019)

Antes de discutir sobre algumas *conversões* do *Sistema Semiótico* relativo a *Sistemas Lineares* (3x3), iremos enfatizar a respeito dos *tratamentos* que se efetuam no processo de resolução destes *sistemas de equações*. Elon Lages Lima (IMPA – RJ) destaca, em um artigo na Revista do Professor de Matemática (RPM 23 - 1993), três métodos de resolução: ESCALONAMENTO, RESOLUÇÃO MATRICIAL e REGRA DE CRAMER.

Observe a seguinte R*epresentação Algébrica* do *Sistema Linear* (3x3):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad \textbf{(xviii)}$$

onde $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ e $\boldsymbol{x_3}$ são as incógnitas e os símbolos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ com subscritos são constantes reais (os $\boldsymbol{a}$'s com subscritos em uma mesma equação não são todos nulos). O subscrito duplo é um recurso útil por facilitar a localização do coeficiente no *sistema*, além de facilitar a associação com a *Representação Matricial*.

Para o sistema **(xviii)**, temos a seguinte **matriz aumentada**:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix}$$

O cálculo do *conjunto solução* de *sistemas* do tipo **(xviii)** ocorrerá a partir do *escalonamento*, processo que envolve principalmente *operações elementares* que geram *sistemas equivalentes*, como já enfatizamos para o caso de *sistemas* (2x2). Howard e Rorres (2001) preconizam que as *operações elementares* podem ocorrer nas *equações* do *sistema* ou nas *linhas* da *matriz aumentada* (geram, respectivamente, *sistemas equivalentes* ou *matrizes equivalentes* por linhas).

Consideramos que o aluno precisa conhecer mais de um processo de resolução de *sistemas lineares* (3x3), que tenha autoridade para decidir em cada caso qual melhor "caminho", processo, seguir para resolução de um problema como destacam os PCNs (BRASIL, 1997). Mas, neste trabalho, iremos trabalhar especificamente com o processo de *sistemas equivalentes* em que o aluno participa efetivamente de todas etapas, implicações, método que também contribui para a apreensão e aprendizagem dos conceitos e objetos matemáticos.

Durante o Ensino Médio, tradicionalmente se utiliza mais a Regra de Cramer, como destaca Elon (RPM 23 – 1993), entretanto, ao realizar a análise do *custo operacional*[10] de cada um dos três métodos, o autor destaca e conclui que:
(considere que a operação de *adição* tenha custo insignificante)

- *Método do Escalonamento*: Ao todo, são necessárias 28 operações de *multiplicação* ou *divisão* para cálculo do *conjunto solução* do *sistema linear* (3x3).
- *Resolução Matricial*: Este processo requer o cálculo da inversa da *matriz* $\boldsymbol{A}$, caso exista. No total, são necessárias 39 operações para obter o *conjunto solução*.

---

[10] Faz referência principalmente ao tempo gasto por computadores para efetuar operações a partir de métodos iterativos. O autor Exemplifica que em um computador que resolve um sistema 15x15 por escalonamento em 2,5 milésimos segundos, ao utilizar a Regra de Cramer, levaria 1 ano, 1 mês e 16 dias. O que mostra que o Regra de Cramer é inadequada para *sistemas* de grande porte. (Elon – RPM 23 – 1993).

- *Regra de Cramer*: Envolve o cálculo do determinante da *matriz dos coeficientes* e, ao todo, as multiplicações e divisões têm custo total igual a 39.

Além disso, caso o determinante da *matriz dos coeficientes* seja igual a 0 (zero) não é possível utilizar os dois últimos métodos, o *sistema* se classifica como *possível e indeterminado* ou *impossível*. Entretanto, infelizmente vários livros didáticos utilizam a *Regra de Cramer* nos casos em que $det\left[\boldsymbol{a_{ij}}\right] = 0$, "justificam" que, se

$$det\left[\boldsymbol{a_{ij}}\right] = det[\boldsymbol{b_i}\,, \boldsymbol{a_{i2}}\,, \boldsymbol{a_{i3}}] = det[\boldsymbol{a_{i1}}\,, \boldsymbol{b_i}\,, \boldsymbol{a_{i3}}] = det[\boldsymbol{a_{i1}}\,, \boldsymbol{a_{i2}}\,, \boldsymbol{b_i}] = \ 0\ ,$$

com $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}$, então, a *Regra de Cramer* (mal aplicada) fornece $\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}}$, $\boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}}$ e $\boldsymbol{x_3} = \frac{0}{0}$, o *sistema* é *indeterminado*. Isto é falso. Se os *vetores* $(\boldsymbol{a_{11}}\,, \boldsymbol{a_{21}}\,, \boldsymbol{a_{31}})$, $(\boldsymbol{a_{12}}\,, \boldsymbol{a_{22}}\,, \boldsymbol{a_{32}})$ e $(\boldsymbol{a_{13}}\,, \boldsymbol{a_{23}}\,, \boldsymbol{a_{33}})$ forem múltiplos, formam um conjunto linearmente dependente, assim, se o vetor $(\boldsymbol{b_1}\,, \boldsymbol{b_2}\,, \boldsymbol{b_3})$ não for múltiplo dos três anteriores, os *determinantes* são nulos, no entanto, o *sistema* é *impossível*.

Assim, o processo de ensino-aprendizagem deve ocorrer de maneira que se propicie a construção correta dos conceitos, de maneira que o aprendiz adquira a autonomia para investigação. Os métodos de *Resolução Matricial* e *Regra de Cramer* têm suas vantagens e devem ocorrer a exploração, assim como com o avanço da tecnologia também existem diversos outros métodos iterativos (de otimização) que resolvem *sistemas lineares e sistemas não lineares.*

O exemplo de *Sistema Linear* a seguir está expresso no *Registro da Língua Materna, após leitura e interpretação* ocorrerá a *conversão* para o *Registro Simbólico* e, através de *operações elementares*, analisaremos o conjunto solução. Na sequência, ocorrerá mais uma mudança do R*egistro Semiótico*, a análise do *sistema algébrico* a partir do *Registro Geométrico*.

O curso de Matemática no semestre passado teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Jorge, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 4 na terceira, obteve no final um total de 47 pontos. Fernando acertou 3, 6 e 6, totalizando 54 pontos. Por sua vez, Marcos acertou 2, 7 e 5 questões, atingindo a soma de 50 pontos no final. Já Renato fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Renato?

Considere:

$\boldsymbol{x}$: peso da primeira prova; $\boldsymbol{y}$:peso da segunda prova; $\boldsymbol{z}$: peso da terceira prova. As pontuações de Jorge, Fernando e Marcos possibilitam o registro das três equações.

$$\begin{cases} \mathbf{6x+5y+4z=47} \\ \mathbf{3x+6y+6z=54} \\ \mathbf{2x+7y+5z=50} \end{cases}, \qquad \textbf{(xix)}$$

o objetivo é encontrar os valores de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ para calcular o total de pontos de Renato, expresso algebricamente como: $\mathbf{5x+8y+3z}$.

Na coluna da direita, iremos resolver o *sistema* **(xix)** através de *operações elementares* nas equações do sistema e, na coluna da esquerda, o resolveremos através de *operaçõe*s nas *linhas* da *matriz aumentada*.

$$\begin{cases} \mathbf{6x+5y+4z=47} \\ \mathbf{3x+6y+6z=54} \\ \mathbf{2x+7y+5z=50} \end{cases}$$

Troque a 1ª e 2ª equações de posição entre si para obter

$$\sim\begin{cases} \mathbf{3x+6y+6z=54} \\ \mathbf{6x+5y+4z=47} \\ \mathbf{2x+7y+5z=50} \end{cases}$$

Multiplique a 1ª equação por $\left(\frac{1}{3}\right)$ para obter

$$\sim\begin{cases} \mathbf{x+2y+2z=18} \\ \mathbf{6x+5y+4z=47} \\ \mathbf{2x+7y+5z=50} \end{cases}$$

Some $(-\mathbf{6})$ vezes a 1ª equação à 2ª e $(-\mathbf{2})$ vezes a 1ª equação à 3ª para obter

$$\sim\begin{cases} \mathbf{x+2y+2z=\ 18} \\ \mathbf{-7y-8z=-61} \\ \mathbf{3y+\ z=\ 14} \end{cases}$$

Multiplique a 2ª equação por $\left(-\frac{1}{7}\right)$ para obter

$$\sim\begin{cases} \mathbf{x+2y+2z=18} \\ \mathbf{y+\frac{8}{7}z=\frac{61}{7}} \\ \mathbf{3y+\ z=14} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{47} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{54} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{50} \end{bmatrix}$$

Troque a 1ª e 2ª linhas de posição entre si para obter

$$\sim\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{54} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{47} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{50} \end{bmatrix}$$

Multiplique a 1ª linha por $\left(\frac{1}{3}\right)$ para obter

$$\sim\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{18} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{47} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{50} \end{bmatrix}$$

Some $(-\mathbf{6})$ vezes a 1ª linha à 2ª e $(-\mathbf{2})$ vezes a 1ª linha à 3ª para obter

$$\sim\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{18} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-8} & \mathbf{-61} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{14} \end{bmatrix}$$

Multiplique a 2ª linha por $\left(-\frac{1}{7}\right)$ para obter

$$\sim\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{18} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{\frac{8}{7}} & \mathbf{\frac{61}{7}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{14} \end{bmatrix}$$

Some (-3) vezes a 2ª equação à 3ª para obter

$$\sim\begin{cases} x+2y+2z = & 18 \\ y+\frac{8}{7}z = & \frac{61}{7} \\ -\frac{17}{7}z = & -\frac{85}{7} \end{cases}$$

Some (-3) vezes a 2ª linha à 3ª para obter

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{61}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{7} & -\frac{85}{7} \end{bmatrix}$$

Multiplique a 3ª equação por $\left(-\frac{7}{17}\right)$ para obter

$$\sim\begin{cases} x+2y+2z = 18 \\ y+\frac{8}{7}z = \frac{61}{7} \\ z = 5 \end{cases}$$

Multiplique a 3ª linha por $\left(-\frac{7}{17}\right)$ para obter

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{61}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Some (-2) vezes a 2ª equação à 1ª para obter

$$\sim\begin{cases} x \quad -\frac{2}{7}z = \frac{4}{7} \\ y+\frac{8}{7}z = \frac{61}{7} \\ z = 5 \end{cases}$$

Some (-2) vezes a 2ª linha à 1ª para obter

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{61}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Some $\left(\frac{2}{7}\right)$ vezes a 3ª equação à 1ª e $\left(-\frac{8}{7}\right)$ vezes a 3ª equação à 2ª para obter

$$\sim\begin{cases} x \quad = 2 \\ y \quad = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Some $\left(\frac{2}{7}\right)$ vezes a 3ª linha à 1ª e $\left(-\frac{8}{7}\right)$ vezes a 3ª linha à 2ª para obter

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

É possível visualizar agora a *solução* do *sistema* **(xix)**, $x = 2$, $y = 3$ e $z = 5$.

$$S = \{2, 3, 5\}$$

Assim, o total de pontos de Renato é: $5(2) + 8(3) + 3(5) = 49$.

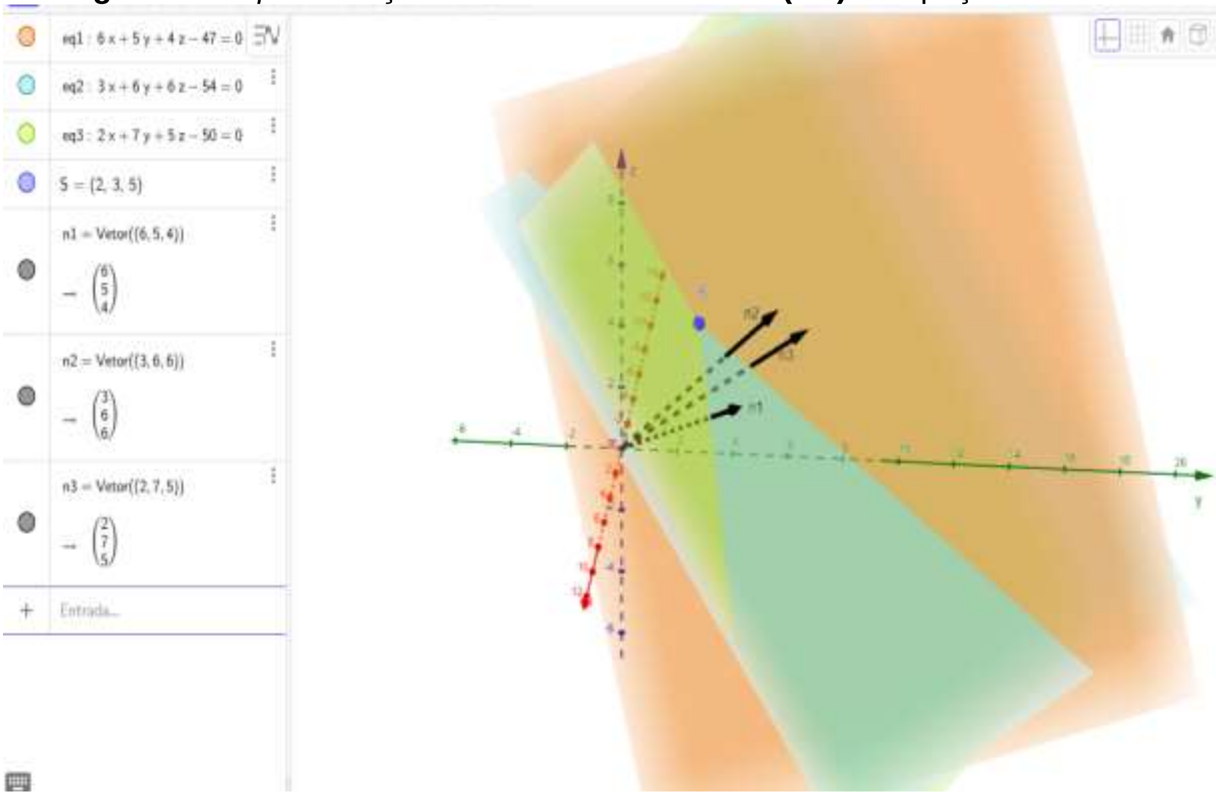
É interessante instigar o aluno a criar outras situações em que seja possível aplicar *sistemas lineares* (3x3).

Considere o sistema **(xix)**, $\forall\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$. A *Representação Gráfica* (*Geométrica*) de cada *equação* desse sistema é um plano,

$$\begin{cases} 6x+5y+4z = 47 \\ 3x+6y+6z = 54 \\ 2x+7y+5z = 50 \end{cases}$$

Representação Simbólica	*Representação Geométrica*
$\boldsymbol{6x + 5y + 4z - 47 = 0}$	Plano com vetor normal $\boldsymbol{n_1} = (\boldsymbol{6}, \boldsymbol{5}, \boldsymbol{4})$
$\boldsymbol{3x + 6y + 6z - 54 = 0}$	Plano com vetor normal $\boldsymbol{n_1} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{6}, \boldsymbol{6})$
$\boldsymbol{2x + 7y + 5z - 50 = 0}$	Plano com vetor normal $\boldsymbol{n_1} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{7}, \boldsymbol{5})$

Figura 5 - *Representação Geométrica* do *sistema* **(xix)** – Espaço Cartesiano



Fonte: O autor (2019)

A partir da *Representação Geométrica* (*Virtual* - RGV) através do software Geogebra, o aluno pode girar a janela de visualização do *espaço cartesiano* e verificar as posições relativas dos planos referentes ao *sistema* e verificar que a solução refere justamente ao *ponto cartesiano* de intersecção dos três *planos*. Além disso, o Geogebra tem uma “janela” (*Cálculo Simbólico-CAS)* que efetua a resolução *algébrica* do *sistema linear* (3x3), iremos discutir a respeito durante as *oficinas de aplicação* deste trabalho.

1.5.3.1 Classificação dos Sistemas Lineares (3x3): Análise Algébrica e Análise Geométrica

Se o sistema linear admitir pelo menos uma *solução*, considera-se que ele é *consistente*, neste caso poderá ser *determinado* (apenas uma *solução*) ou *indeterminado* (mais de uma *solução*). Se o sistema não admitir nenhuma solução ele é *inconsistente*, que também se nomeia como *impossível*.

Considere o sistema **(xviii)**:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2} \\ \boldsymbol{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3} \end{cases}$$

Observe que a partir da análise *algébrica*, existem 8 (oito) possibilidades de relação dos *vetores linha* $\overrightarrow{\boldsymbol{n_i}} = (\boldsymbol{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}})$ com os termos independentes $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3}$, das *equações* do *sistema* **(xviii)**, (DELGADO, FRENSEL e CRISSAF, SBM-2017):

(A1): existem $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}} = \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\boldsymbol{b_2 = \gamma b_1}$ e $\boldsymbol{b_3 = \mu b_1}$;

(A2): existem $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}} = \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ e $\boldsymbol{b_2 = \gamma b_1}$, mas $\boldsymbol{b_3 \neq \mu b_1}$;

(A3): existem $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}} = \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, mas $\boldsymbol{b_2 \neq \gamma b_1}$ e $\boldsymbol{b_3 \neq \mu b_1}$ e $\boldsymbol{b_3 \neq \frac{\mu}{\gamma} b_2}$;

(A4): existe $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ e $\boldsymbol{b_2 = \gamma b_1}$, mas $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}}$ não são múltiplos;

(A5): existe $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$,mas $\boldsymbol{b_2 \neq \gamma b_1}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}}$ não são múltiplos;

(A6): nenhum dos vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}}$ é múltiplo do outro, mas existem $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} + \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$ e $\boldsymbol{b_3 = \gamma b_1 + \mu b_2}$;

(A7): Os vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}}$ são dois a dois não colineares, mas existem $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}} = \boldsymbol{\gamma}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}} + \boldsymbol{\mu}\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$ e $\boldsymbol{b_3 \neq \gamma b_1 + \mu b_2}$;

(A8): Os vetores $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{n_3}}$ são *linearmente independentes* (LI).

Das 8 (oito) possibilidades, 4 (quatro): **A2**, **A3**, **A5** e **A7** referem aos *sistemas lineares* (3x3) *inconsistentes* (*impossíveis*), as outras 4 (quatro) referem aos *sistemas lineares* (3x3) *consistentes* (*possíveis*), desses que admitem pelo menos uma *solução*, somente o caso **A8** é *possível e determinado*, em que os três *vetores linha* são LI.

Vale destacar que a *Regra de Cramer* se aplica a uma das oito possibilidades vistas, a **A8**, já que o determinante da *matriz dos coeficientes* é diferente de zero (0). O método do escalonamento (*sistemas equivalentes*) se aplica em todos os casos, com interpretações específicas.

Os métodos: escalonamento, *Resolução Matricial* e *Regra de Cramer* são diferentes processos de resolução do *sistema linear*, são *tratamentos* distintos para o mesmo objeto matemático que se encontra em um mesmo *Sistema Semiótico*

(Algébrico) e com o *Registro Simbólico* e/ou *Registro Matricial*. Iremos realizar a *conversão* (TRRS) do *Sistema Semiótico Simbólico* de *sistemas lineares* (3x3) para o *Sistema Semiótico Figural*, para assim analisar as relações entre as *equações* do *sistema* a partir do *Registro Geométrico* (*Planos*).

Verificamos que cada equação do tipo (**2.20)** tem como *Representação* Geométrica no *espaço* cartesiano o *plano* ($\boldsymbol{\pi}$), assim as equações do sistema **(xviii)** se referem (pela *Representação Geométrica*) aos *planos*:

$$\boldsymbol{\pi_k}: \boldsymbol{a_{k1}x + a_{k2}y + a_{k3}z = b_k} \,,$$

normais aos *vetores*

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n_k}} = (\boldsymbol{a_{k1}} \,, \boldsymbol{a_{k2}} \,, \boldsymbol{a_{k3}}) \,,$$

com $\boldsymbol{k = 1, 2, 3}$, $\boldsymbol{x = x_1}$, $\boldsymbol{y = x_2}$ e $\boldsymbol{z = x_3}$.

Os símbolos $\boldsymbol{x, y}$ e $\boldsymbol{z}$ referem aos sistema de eixos ortogonais (*espaço cartesiano* - $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$), no entanto, cada eixo pode aparecer com um outro símbolo para sua legenda, onde que se relaciona a algum outro contexto, por exemplo.

A análise geométrica do sistema **(xviii)** indica que existem 8 (oito) maneiras diferentes para a posição relativa entre os *planos* $\boldsymbol{\pi_1}$, $\boldsymbol{\pi_2}$ e $\boldsymbol{\pi_3}$, didaticamente essa interpretação pode se associar à classificação do *sistema*, (DELGADO, FRENSEL e CRISSAF, SBM-2017):

(G1): os três planos coincidem:

$$\boldsymbol{\pi_1} \equiv \boldsymbol{\pi_2} \equiv \boldsymbol{\pi_3} \;;$$

(G2): dois dos planos coincidem e o terceiro é paralelo a eles:

$$\boldsymbol{\pi_1} \equiv \boldsymbol{\pi_2} \text{ e } \boldsymbol{\pi_3} \cap \boldsymbol{\pi_1} = \emptyset \;;$$

(G3): os planos são paralelos distintos dois a dois:

$$\boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_2} = \emptyset \,, \boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \emptyset \text{ e } \boldsymbol{\pi_2} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \emptyset \;;$$

(G4): dois dos planos coincidem e o terceiro os intersecta ao longo de uma reta $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{\pi_1} \equiv \boldsymbol{\pi_2} \text{ e } \boldsymbol{\pi_3} \cap \boldsymbol{\pi_1} = \boldsymbol{l} \;;$$

(G5): dois dos planos são paralelos e o terceiro os intersecta conforme retas paralelas $\boldsymbol{l_1}$ e $\boldsymbol{l_2}$:

$$\boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_2} = \emptyset \,, \boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \boldsymbol{l_1} \text{ e } \boldsymbol{\pi_2} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \boldsymbol{l_2} \;;$$

(G6): os três planos são distintos e intersectam-se ao longo de uma reta $\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{\pi_1} \not\equiv \boldsymbol{\pi_2} \,, \boldsymbol{\pi_1} \not\equiv \boldsymbol{\pi_3} \,, \boldsymbol{\pi_2} \not\equiv \boldsymbol{\pi_3} \text{ e } \boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_2} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \boldsymbol{l} \;;$$

(G7): os três planos intersectam-se, dois a dois, segundo retas paralelas entre si:

$$\boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_2} = \boldsymbol{l_1}\ ,\ \boldsymbol{\pi_2} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \boldsymbol{l_2} \text{ e } \boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \boldsymbol{l_3} \text{ e } \boldsymbol{l_1} \parallel \boldsymbol{l_2} \parallel \boldsymbol{l_3}\ ;$$

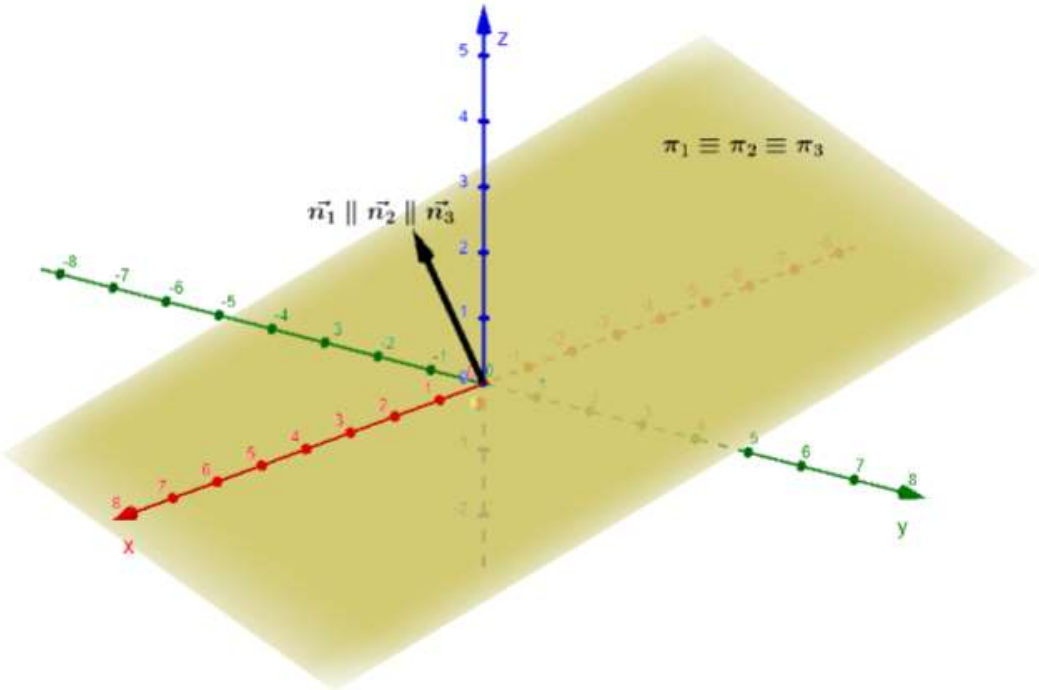
(G8): os três planos têm um único ponto em comum:

$$\boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_2} \cap \boldsymbol{\pi_3} = \{\boldsymbol{P}\}\ .$$

Semelhantemente à análise algébrica, as 4 (quatro) possibilidades: **A2**, **A3**, **A5** e **A7** referem aos *sistemas lineares* (3x3) *inconsistentes* (*impossíveis*), as outras 4 (quatro) referem aos *sistemas lineares* (3x3) *consistentes* (*possíveis*), desses que admitem pelo menos uma *solução*, somente o caso **A8** é *possível e determinado*, em que os três *vetores linha* são LI.

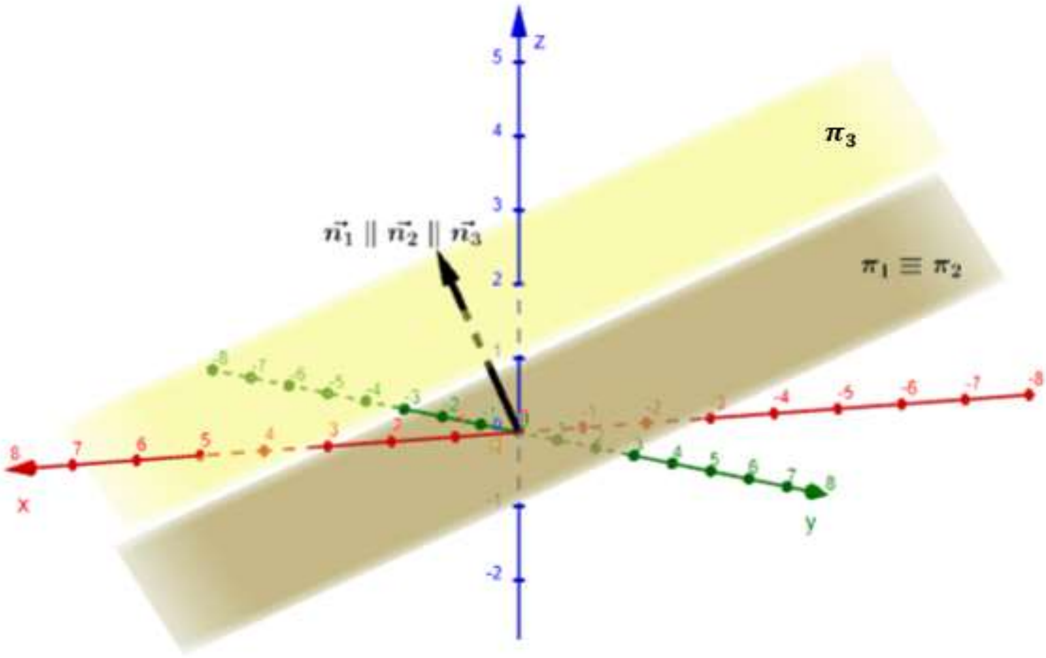
Observe a seguir a *Representação Geométrica* (*Virtual*) de cada um desses casos para exemplos de *sistemas lineares* (3x3) plotados no *espaço cartesiano* ($\mathbb{R}^3$) a partir do software Geogebra.

Figura 6 - (G1): $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3$



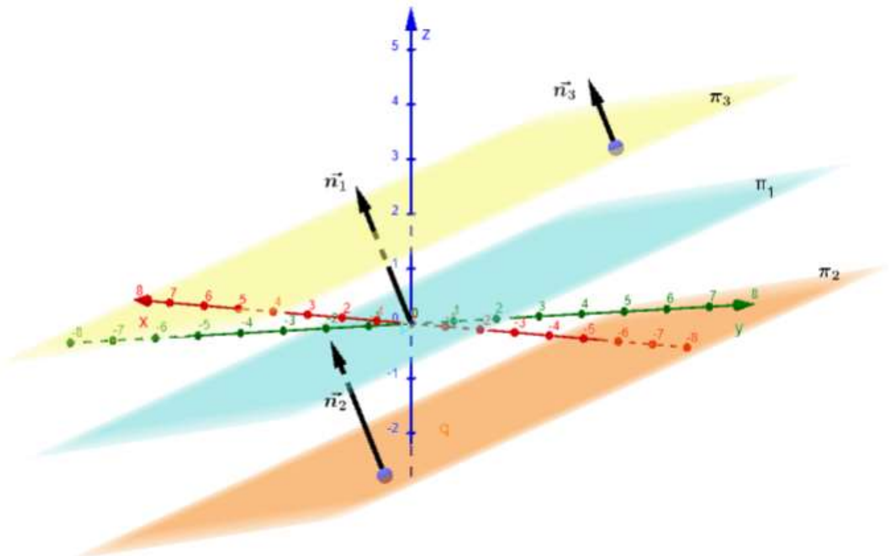
Fonte: O autor (2019)

Figura 7 - (G2): $\pi_1 \equiv \pi_2$ e $\pi_3 \cap \pi_1 = \emptyset$



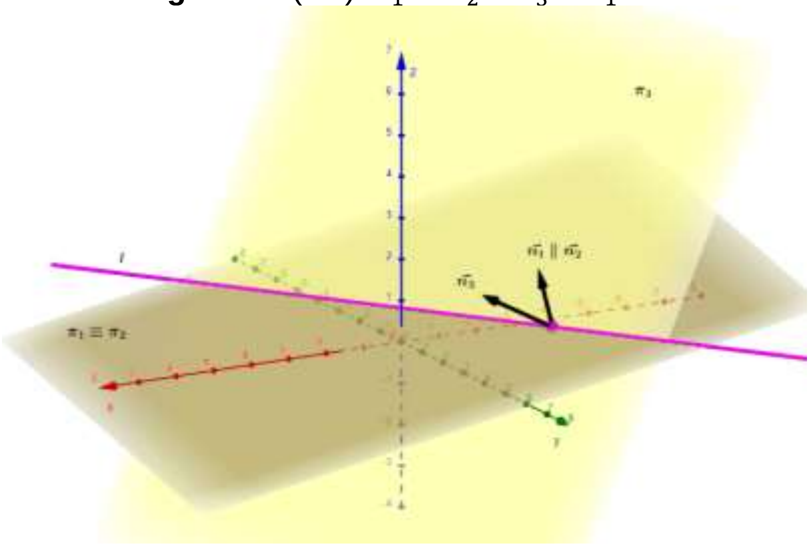
Fonte: O autor (2019)

Figura 8 - (G3): $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, $\pi_1 \cap \pi_3 = \emptyset$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$



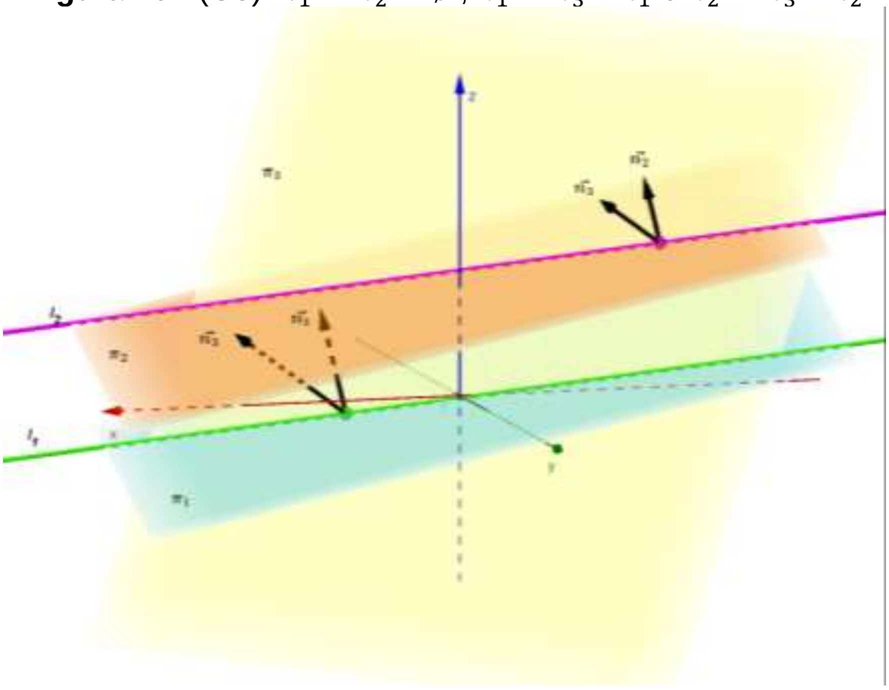
Fonte: O autor (2019)

Figura 9 - (G4): $\pi_1 \equiv \pi_2$ e $\pi_3 \cap \pi_1 = l$



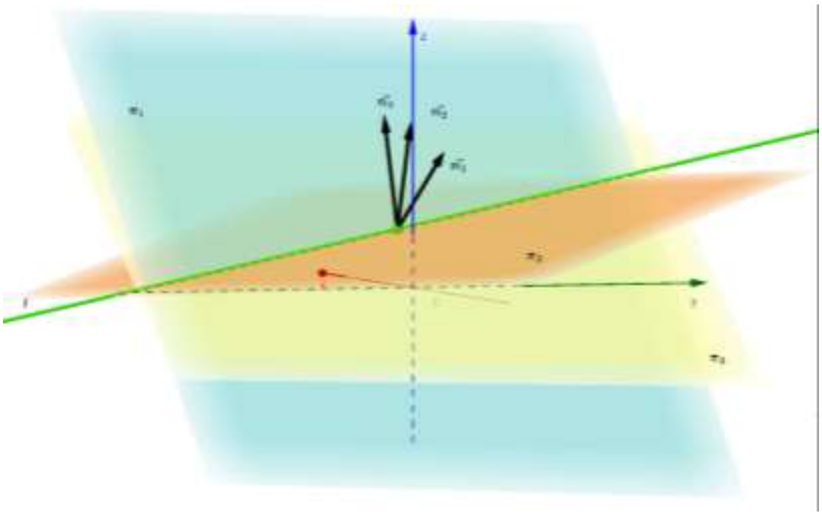
Fonte: O autor (2019)

Figura 10 - (G5): $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, $\pi_1 \cap \pi_3 = l_1$ e $\pi_2 \cap \pi_3 = l_2$



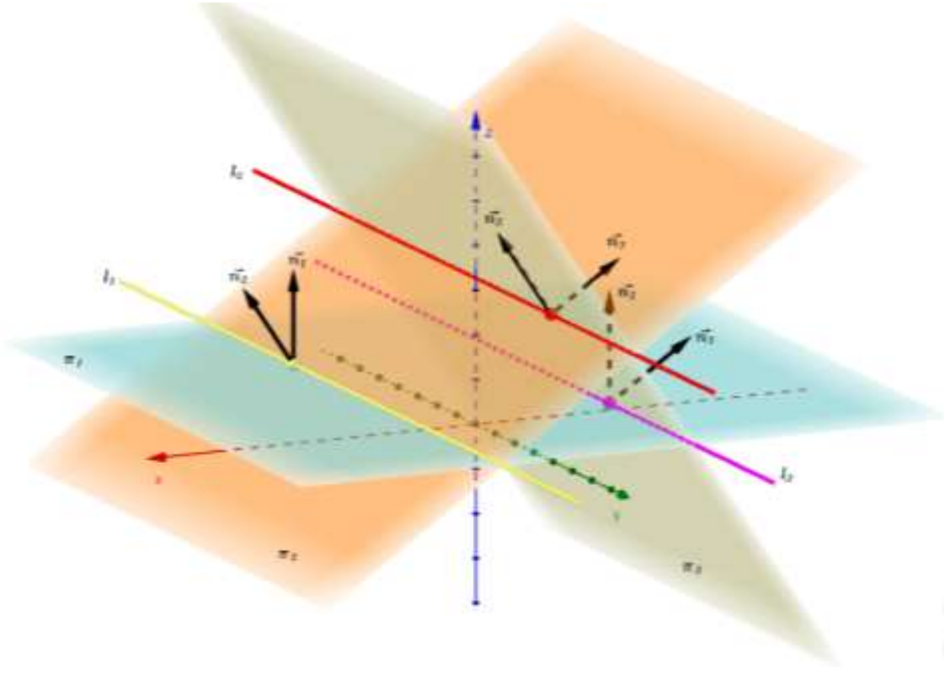
Fonte: O autor (2019)

Figura 11 - (G6): $\pi_1 \not\equiv \pi_2$, $\pi_1 \not\equiv \pi_3$, $\pi_2 \not\equiv \pi_3$ e $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = l$



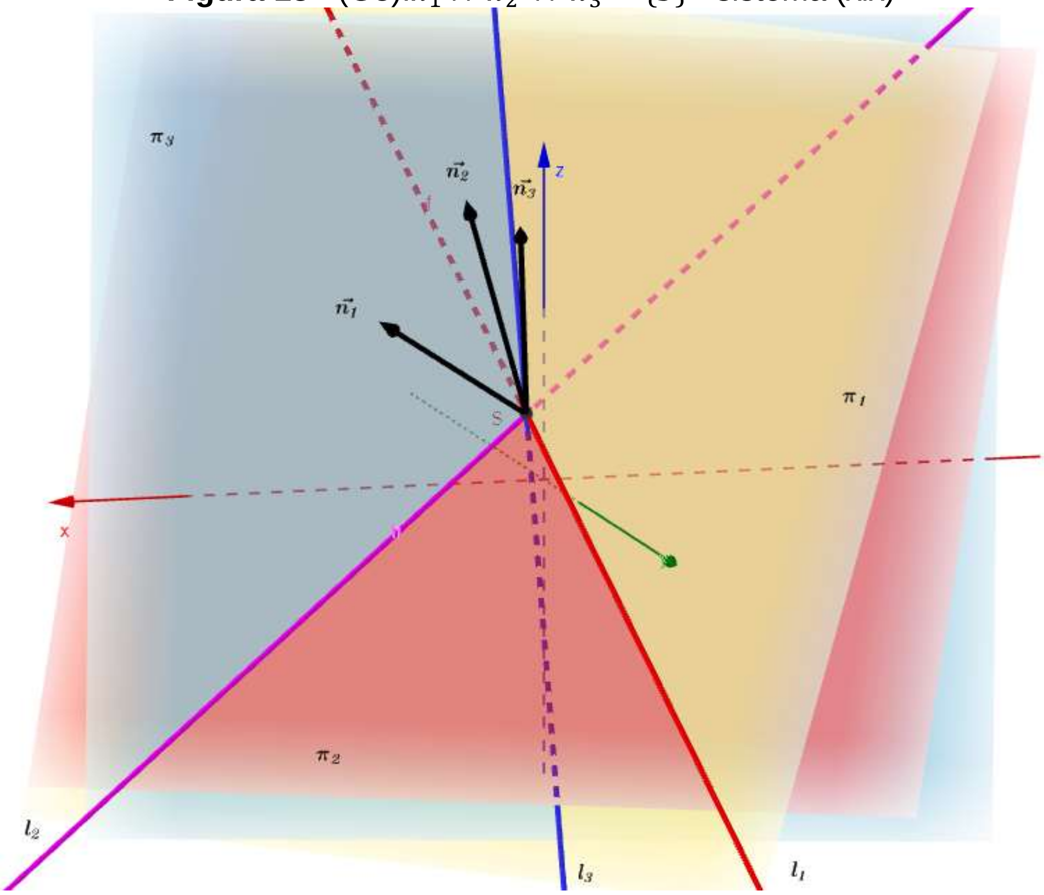
Fonte: O autor (2019)

Figura 12 - (G7): $\pi_1 \cap \pi_2 = l_1$, $\pi_2 \cap \pi_3 = l_2$ e $\pi_1 \cap \pi_3 = l_3$ e $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$



Fonte: O autor (2019)

Figura 13 - (G8):$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \{S\}$ - sistema (xix)



Fonte: O autor (2019)

A *Representação Gráfica* contribui para que o aluno compreenda a partir de um outro sistema de representação (além do algébrico) o conceito de *sistema linear consistente* e *sistema linear inconsistente*. Reciprocamente, o conhecimento e a conversão dos *sistemas de representação* dos objetos matemáticos proporcionam a aprendizagem significativa dos conteúdos, uma vez que o processo de *conversão* não se resume simplesmente às regras de correspondência, mas se objetiva com a apreensão global e qualitativa (DUVAL, 2013).

É fundamental que o processo de mediação da construção do conhecimento ocorra de maneira que não se confunda os conceitos dos objetos matemáticos com as suas respectivas representações, fato que acontece principalmente com o ensino mecânico de “fórmulas” que devem simplesmente “aplicar” e/ou substituir alguns valores numéricos.

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA

Segundo Gamboa (2013), metodologia envolve uma série de estratégias e métodos organizados com finalidades específicas, principalmente, para a superação de desafios: "Fontes, instrumentos, materiais, técnicas de sistematização e organização de dados, informações e resultados, estratégias, procedimentos e hipóteses de trabalho" (GAMBOA, 2013, p. 141).

2.1 Abordagem da Pesquisa

O método é o conjunto de ações sistemáticas e planejadas que permite alcançar objetivos e detectar erros, assim como a superação dos obstáculos que provocam tais erros (LAKATOS e MARCONI, 2011). Esse fator contribui para a relação dialética entre o sujeito e o objeto, sobretudo, ao considerar os objetos como um processo, garantindo a possibilidade de transformação e permitindo a relação de prática-teoria-prática[11].

Desta maneira, a pesquisa se caracteriza como pesquisa de intervenção, com abordagens qualitativa e quantitativa. Segundo (ROCHA, 2003, p. 71), as pesquisas de intervenção têm, como alvo, a "rede de poder e o jogo de interesses que se fazem presentes no campo da investigação, colocando em análise os efeitos das práticas no cotidiano institucional, desconstruindo territórios e facultando a criação de novas práticas". Assim, a mesma pesquisa permite considerar que o sujeito e o objeto fazem parte de um mesmo processo, o que propicia a relação dialética entre ambos, com a reciprocidade e a transformação coletiva.

A pesquisa de intervenção provoca a mudança das maneiras cristalizadas do processo de ensino-aprendizagem, o que permite considerar diferentes contextos e diferentes épocas, enfatizando a relação prática-teoria-prática e possibilitando a construção do conhecimento significativo. Assim sendo, a contínua análise crítica do seu próprio trabalho pedagógico possibilita ao docente interferir, de maneira ativa, no processo de mediação da construção do conhecimento e, além disso, instiga a promoção de mudanças que garantem a qualidade da aprendizagem.

---

[11] PIMENTA, S. G. **O Estágio na Formação de Professores: Unidade Teoria e Prática?** – 11. Ed. – São Paulo: Cortez,2012.

Para Pimenta (2012, p. 78), a teoria não pode ser considerada como "um conjunto de regras, normas e conhecimentos sistematizados aplicáveis a qualquer contexto", mas deve ser organizada e planejada de acordo com as particularidades, de modo a interferir no processo educacional, com a garantia da apropriação dos conceitos, desenvolvimento e assimilação do conhecimento.

Com a finalidade de contribuir para a garantia da qualidade da aprendizagem e aprimorar o trabalho docente, as atividades foram planejadas e organizadas para ocorrerem com contínua avaliação crítica e reflexiva, considerando a correta formação de conceitos e utilizando recursos metodológicos que contribuem para propiciar a construção do conhecimento significativo.

A pesquisa é de cunho qualitativo, uma vez que permite a discussão e análise de casos específicos, sem aplicação de regras específicas que generalizam e ocultam particularidades, e considerando sempre a relação de formação do sujeito e objetos envolvidos. Lakatos e Marconi (2011, p. 269) afirmam que a metodologia qualitativa "preocupa-se em analisar e interpretar aspectos mais profundos, descrevendo a complexidade do comportamento humano. Fornece análise mais detalhada sobre as investigações, hábitos, atitudes, tendências de comportamento etc.". Por isso, o conhecimento é compreendido como produção e não como apropriação mecânica de uma realidade que se apresenta.

A natureza qualitativa da pesquisa, que requer a relação dialética entre o sujeito e os objetos, não a extingue de "estruturação, de embasamento teórico geral e um planejamento cuidadoso que o investigador necessita para não se perder no contexto geral, que lhe serve de apoio" (LAKATOS e MARCONI, 2011, p. 272). O estudo de teorias relacionadas ao processo de ensino aprendizagem possibilita a organização de metodologias coerentes com a aprendizagem e com o contexto, permitindo o conhecimento significativo e o desenvolvimento da investigação.

A pesquisa se define também como quantitativa, já que buscou analisar, detalhadamente, os dados obtidos com a realização de levantamentos estatísticos e comparações de resultados, como: o percentual de erros/acertos em cada questão da atividade final, a comparação do percentual de erros/acertos das questões para Ensinos Fundamental/Médio, a contribuição do software Geogebra para o processo de ensino-aprendizagem e outros.

O processo de apresentação dos resultados ocorreu a partir da classificação das respostas em três classes: satisfatória, não satisfatória e não soube. Para analisar e apresentar quantitativamente as respostas do tipo não satisfatória, foram organizadas, quando possível, em duas categorias: incorretas ou com significado limitado.

É importante destacar que, apesar das diferenças no conceito, na coleta de dados e em outros aspectos da pesquisa qualitativa e quantitativa, os seus métodos não se distanciam, ao contrário, se complementam. Segundo Richardson et al. (1990, p. 70) apud (LAKATOS e MARCONI, 2011, p. 269), o método quantitativo “caracteriza-se pelo emprego da quantificação, tanto nas modalidades de coleta de informações, quanto no tratamento delas por meio de técnicas estatísticas”. A análise estatística dos dados (sujeitos, objetos, etc.) visa uma melhor compreensão das informações obtidas durante o processo de construção e reconstrução (processo de ida e volta) das atividades envolvidas.

O desenvolvimento e a investigação das atividades desta pesquisa de intervenção ocorreram através de oficinas com alunos do Ensino Básico: Ensino Fundamental II e Ensino Médio. A análise, *a posteriori*, ocorreu de maneira qualitativa e quantitativa, a partir dos registros do processo de desenvolvimento da oficina.

2.2 Dos Ambientes de Pesquisa e Sujeitos Envolvidos

A pesquisa ocorreu em duas etapas do Ensino Básico: 8º ano do Ensino Fundamental II e 2º ano do Ensino Médio. A escolha dessas duas etapas se justifica por serem momentos em que ocorre o ensino sobre *sistemas lineares*. O educandário Colégio Municipal Luís Eduardo Magalhães, situado na cidade de Urandi, Bahia, foi escolhido para a realização da oficina em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental II, já que é um colégio de fácil acesso e, segundo pesquisa informal com os professores, os alunos apresentam dificuldades quanto à linguagem algébrica e quanto às operações algébricas estudadas, além de terem uma visão da Matemática como algo “impossível” de aprender, um “bicho de sete cabeças”.

O estudo sobre *sistemas lineares* (com duas *incógnitas*) é previsto na grade curricular do 7º ano do Ensino fundamental II, entretanto, na escola escolhida, esse estudo se inicia durante o 8º ano, por necessidade de mais tempo para formação conceitual e coerência com as sequências didáticas.

O educandário selecionado para a realização da pesquisa, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, foi o Colégio Estadual Petronílio da Silva Prado, situado na cidade de Pindaí, Bahia, também de fácil acesso e, segundo relato informal dos professores, as dificuldades são semelhantes à escola do Ensino Fundamental II. Embora se trate do Ensino Médio, em que os alunos deveriam apresentar maior bagagem de conhecimento e maior domínio das operações matemáticas, o relato de dificuldades com a Matemática e operações com símbolos algébricos se repetiu. Alguns professores relataram, informalmente, que a turma escolhida apresenta maior índice de dificuldades em Matemática e Física, não apresentando interesse e motivação pelos estudos.

As oficinas realizadas com cada uma das turmas (8º ano – Ensino Fundamental e 2º ano – Ensino Médio) tiveram o mesmo planejamento, com o objetivo de, justamente, manter a mesma sequência didática para o estudo e a investigação sobre *Sistemas Lineares* (com duas *incógnitas*), pois é estudado durante as duas etapas do Ensino Básico. Desta maneira, na sequência didática referente ao 2º ano do Ensino Médio, tornou-se necessário acrescentar o estudo sobre *Sistemas Lineares* (com três *incógnitas*).

2.3 Procedimento e Instrumentos de Pesquisa

A pesquisa ocorreu a partir da explicação e discussão sobre sistemas lineares (com duas incógnitas e com três incógnitas), enfatizando o processo de resolução através de operações de equivalência das equações que compõem o sistema e justificando, assim, a geração de sistemas equivalentes. O método sequencial de desenvolvimento das atividades contribuiu para a exploração metódica de diferentes tipos de *Representações Semióticas* de sistemas lineares.

O desenvolvimento das atividades ocorreu com a orientação de uma sequência didática (com fundamentação nas teorias da Didática da Matemática apresentadas no presente trabalho), a qual possibilitou a realização dos trabalhos de maneira sistemática e metódica, propiciando a construção do conhecimento de forma sequencial e favorecendo a aprendizagem e apropriação dos conceitos. A sequência didática possibilita a explicação de um conteúdo etapa por etapa, com o tempo necessário para a formação gradativa dos conceitos, em que o grau de dificuldade avança em consonância com a bagagem de conhecimento formada, exigindo e possibilitando a investigação.

A atividade docente baseada em sequências didáticas possibilita a “reorganização intelectual de modo que o novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores, sendo esse o momento em que os obstáculos se manifestam” (PAIS, 2002, p.46). Assim, esses obstáculos didáticos favorecem para a formação de novos conceitos e desenvolvimento do conhecimento, de maneira que não exista incoerência com conceitos construídos anteriormente.

A *situação didática* permite que o professor promova condições e objetos que favoreçam a construção de conceitos e a aplicabilidade do conhecimento em diferentes ciências e contextos, tornando o conteúdo mais significativo e amplo para o aluno. Segundo Brousseau (2008), durante a *situação didática*, essa bagagem de conhecimento propicia o desenvolvimento do aprendiz, pois favorece a apropriação de novos conceitos.

Ainda de acordo com Brousseau (2008, p. 19-20),

> Denominamos situação o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. Algumas dessas situações requerem a aquisição “anterior” de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial.

A *situação didática* utilizada pelo professor pode estimular o instinto científico dos alunos, contribuir para a formação de sujeitos críticos e questionadores e motivar a busca de novos conhecimentos, em que os alunos entendam e participem efetivamente do processo.

As atividades relativas ao desenvolvimento da pesquisa se iniciaram com a dinâmica de sondagem **batalha naval** (vide Apêndice C – Duas aulas de 50 minutos em cada turma), a qual exigiu, principalmente, a marcação de pontos com coordenadas inteiras no *plano cartesiano*. Além de propiciar a aula dinâmica e interativa, foi um momento oportuno para descrever sobre os eixos ortogonais, o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas, frequentemente chamados, de maneira equivocada, “eixo *x*” e “eixo *y*”.

Em um segundo momento (aula de intervenção - quatro aulas em cada turma) ocorreu a explicação e discussão sobre *sistemas lineares* com duas *equações* e duas *incógnitas*, com explicação e apresentação da *Representação Algébrica*. Nesse período, foi efetuada a resolução de exemplos de sistemas (2x2), com apresentação das operações de equivalências utilizadas e consequente explicação do processo de resolução, sem utilizar procedimentos mecânicos e “truques” que costumam “facilitar” o processo de ensino de alguns professores (exemplos: “passa para o outro lado negativo”, “passa para o outro lado dividindo”, etc.).

Foram discutidos alguns exemplos registrados no quadro e, posteriormente, questões de uma lista de exercícios (vide Apêndice F; questões: 1, 2, 3, 4), com o objetivo de realizar a *conversão* dos *Registros de Representação Algébricos*: *Registro da Língua Materna* e *Registro Simbólico*. Como exemplo disso, tivemos a situação problema “O cachorro-quente e três soluções”, da Revista do Professor de Matemática (RPM 81 – SBM 2013).

Em um terceiro momento (aula de intervenção - três aulas em cada turma), ocorreu a classificação e análise do conjunto solução do *sistema linear com duas equações e duas incógnitas* (SPD, SPI e SI), a partir da resolução algébrica de exemplos específicos (para o caso do SPD, foi utilizado o *sistema* referente à situação do cachorro quente como exemplo). Na sequência, ocorreu a *Representação Geométrica* (manual), no *plano cartesiano*, das *funções algébricas* associadas aos sistemas lineares com duas variáveis, a partir da *conversão* do *sistema semiótico*. E realizou-se a construção (manual – lápis e papel) de gráficos com variáveis discretas (números inteiros) e contínuas (números reais) de cada uma das expressões algébricas.

Foi possível verificar sequências de pontos nos gráficos construídos no conjunto dos números inteiros e configuração de retas paralelas, coincidentes e concorrentes no conjunto dos números reais. Em seguida, cada uma das configurações das retas foi associada à classificação do *sistema* referente. Posteriormente, recorremos aos recursos tecnológicos para a *Representação Geométrica Virtual*, uma vez que eles possibilitam a linearidade dos gráficos e inovam o processo tradicional de ensino aprendizagem.

Ao entender que o recurso tecnológico possibilita ampliar o processo de construção do conhecimento, decidimos apresentar, durante a pesquisa (oficina), uma maneira extraordinária de *Representação Semiótica*, a *Representação Geométrica Virtual* (RGV) com o uso do software Geogebra. No entanto, não foi possível que os alunos do 8º ano utilizassem o software em sala de aula, pois o educandário Colégio Municipal Luís Eduardo Magalhães não tinha computadores disponíveis para uso com a turma. Assim, os gráficos virtuais foram apresentados com a utilização de um notebook e um aparelho projetor (uma aula), por meio dos quais foi possível analisar e discutir com os sujeitos envolvidos. Além disso, foi informada a referência de hipermídia (*link*) para efetuar o download do software.

Durante a mesma etapa de realização da oficina, com a turma do 2º ano do Ensino Médio (Colégio Estadual Petronílio da Silva Prado – 3 aulas), os alunos utilizaram o software em sala de aula, construindo, inicialmente, gráficos de *funções afins* e gráficos de *funções quadráticas*, o que possibilitou a exploração de algumas ferramentas do aplicativo. Logo após, efetuaram a Representação Gráfica Virtual das *funções algébricas* associadas aos *sistemas lineares*, destacando cada caso de classificação dos referentes sistemas. Os alunos foram instigados a efetuar *tratamentos* virtuais com as funções, variando o coeficiente $\boldsymbol{a}$ e mantendo fixo o $\boldsymbol{b}$; variando o coeficiente $\boldsymbol{b}$ e mantendo fixo o $\boldsymbol{a}$; e analisando, simultaneamente, a *Representação Geométrica Virtual* da família das funções do tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$.

Durante a quarta etapa, ocorreram atividades diferentes com as turmas do 8º ano (Ensino Fundamental II) e 2º ano (Ensino Médio). Na turma do 8º ano, foi realizado um teste diagnóstico (vide Apêndice G - Questões: 1-7) composto de questões investigativas, que exigiram *conversão* do *registro de representação*, resolução algébrica (justificada) de *sistemas* e averiguação da formação de conceitos. Posteriormente, foi realizado um teste de sondagem com os alunos e com o professor regente (vide Apêndice H e apêndice J, respectivamente) para averiguar sobre a realização das oficinas e sobre o uso do software Geogebra (a quarta etapa ocorreu durante 5 aulas).

Na turma do 2º ano (Ensino Médio), ocorreu a continuação dos estudos, realizou-se a *Representação Algébrica* (*Registro Simbólico*) dos *sistemas lineares com três equações e três incógnitas*, e discutiu-se sobre o processo de resolução desses sistemas a partir de operações de equivalência (reflexividade, simetria e transitividade). Foi explicada a escolha desse procedimento de resolução, realçando, principalmente, sobre a justificativa *algébrica* de todo processo de equivalência que se realiza com o *sistema linear*. Exemplos foram respondidos coletivamente com os alunos e, em seguida, eles responderam uma lista de exercícios (Praticando – Apêndice F: Questões: 5 e 6), os quais promoveram diálogos e discussões em duplas. Posteriormente, ocorreu a classificação dos *sistemas lineares* (*3x3*), com resolução de exemplos específicos para cada um dos casos: SPD, SPI e SI.

A sequência didática, com *tratamento* e *conversão* dos objetos, favorece significativamente o processo de formação dos conceitos e, consequentemente, a aprendizagem significativa da Matemática. Assim, nesta fase da oficina (quarta etapa – 2º ano Ensino Médio), realizamos a conversão do Registro Semiótico, destacando o *Registro da Língua Materna*, o *Registro Simbólico* e o *Registro Geométrico*. Para realizar a *Representação Geométrica* do *Sistema Linear* (*3x3*), foi indispensável o uso do software Geogebra, explorando o *espaço cartesiano* (três dimensões - $\mathbb{R}^3$), gerando surpresa e instigando os questionamentos dos alunos. Eles visualizaram a *Representação* de *planos* referentes às equações de cada *sistema* e, assim, possibilitou a visualização tridimensional da configuração dos *planos* em cada caso de classificação do *sistema*.

Após o estudo sobre *sistemas lineares* (*3x3*) na turma do 2º ano, foi realizada a aplicação do teste diagnóstico (durante 4 aulas), organizado com as questões do teste executado na turma do Fundamental II e acrescido por mais questões sobre sistemas (3x3) (Apêndice G). Em ambas as turmas o teste diagnóstico foi aplicado em sequência, sem intervenção para análise individual das questões. O objetivo foi analisar a *conversão* do *registro de representação*, a resolução algébrica (justificada) de *sistemas* e a averiguação da formação de conceitos. Posteriormente, realizou-se um teste de sondagem com os alunos e com os professores (vide Apêndice I e Apêndice J, respectivamente), sobre a realização das oficinas e o uso do software Geogebra (a quarta etapa ocorreu durante 5 aulas).

2.4 O Teste Diagnóstico

Nesta seção, serão apresentadas as questões do teste aplicado, assim como a solução esperada, em consonância com os estudos realizados, envolvendo, principalmente, *operações de equivalência* (*operações elementares* - HOWARD e RORRES, 2001), *Representações Semióticas* e mudança do *Registro de Representação*, apresentados no decorrer do presente trabalho e tendo como referência Duval (1937-). Em relação aos processos de resolução dos *Sistemas Lineares,* também será utilizado, como referência bibliográfica, o autor Elon (RPM 23 – 1993), já referenciado anteriormente neste trabalho.

2.4.1 Questão 1 – Conversão do Sistema Semiótico e Tratamento

1) (Adaptação: DANTE, 2015) Letícia e Rodrigo viram, em uma loja, os preços de uma bola e de um jogo, e fizeram estas afirmações:

Letícia: A bola e o jogo juntos custam RS 18,00.

Rodrigo: O jogo custa o dobro da bola.

Considere a incógnita x como o preço da bola e a incógnita y como preço do jogo, ambos em reais. **Determine o que se pede justificando sua resposta:**

a) A equação correspondente à afirmação de Letícia.

---

b) A equação correspondente à afirmação de Rodrigo.

---

c) Qual par ordenado é a solução do problema?

(8, 10) (7, 11) (10, 8) (6, 12) .

Nesta questão 1, pretende-se verificar a interpretação da situação problema e a *conversão* do Registro de Representação Algébrico: *Registro da Língua Materna* para *Registro Simbólico*. Segundo Duval (1993), a *conversão* proporciona a relação de objetos com sistemas semióticos diferentes, exigindo, para isso, principalmente o domínio dos conceitos (matemáticos, algébricos, etc.) envolvidos.

Por isso, para realizar a conversão, torna-se necessário o conhecimento do *Registro Simbólico* de uma *equação linear com uma incógnita* (letras: *a* e b):

letra a) $x + y = 18,00$. ; *letra b)* $y = 2x$.

(Existem outras representações equivalentes).

Na *letra (c)*, o objetivo é efetuar o *tratamento* com os objetos encontrados nas letras anteriores, substituindo as incógnitas por cada um dos pares ordenados. Assim: x = 6 e y = 12; 6 + 12 = 18,00 e 12 = 2(6). A questão exige o conhecimento sobre a representação da quantia de dinheiro para justificação e entendimento das duas “casas decimais”.

2.4.2 Questão 2 – Conversão do Sistema Semiótico e Resolução do Sistema Linear com duas Equações e duas Incógnitas

2) (Adaptação: RPM – 50) Num cercado, há cavalos e galinhas; contam-se 35 cabeças e 110 patas. Quantos animais de cada espécie tem o cercado citado? **Determine a solução do** sistema linear **justificando sua resposta.** (Obs: Todos os cavalos possuem 4 patas e todas as galinhas possuem 2 patas).

Nesta questão 2, o objetivo também é efetuar a *conversão* do *Registro de Representação Algébrico*: *Registro da Língua Materna* para *Registro Simbólico*, exigindo interpretação do enunciado, designação de duas *incógnitas* e conhecimento da *Representação Simbólica* do *sistema linear com duas incógnitas*. Além disso, a questão exige a justificativa do procedimento de resolução adotado, com a finalidade de o aluno demonstrar o entendimento dos procedimentos realizados. Uma das soluções esperadas é:

$\boldsymbol{x}$: quantidade de cavalos; $\boldsymbol{y}$: quantidade de galinhas; (considere $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{N}$). Assim,

$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=35} \\ \boldsymbol{4x+2y=110} \end{cases}$, a primeira equação refere-se ao total de animais, e a segunda ao total de patas.

A partir de *operações de equivalência* (não serão apresentados todos os procedimentos aqui), obtém-se:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=35} \\ \boldsymbol{4x+2y=110} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x=20} \\ \boldsymbol{y=15} \end{cases}$$

dessa maneira, existem 20 cavalos e 15 galinhas.

2.4.3 Questão 3 – Conversão do Sistema Semiótico e Tratamento.

3) Utilize as operações de equivalência para resolver os sistemas abaixo e determine quantas soluções tem cada um deles. **Justifique sua resposta!**   a) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=10} \\ \boldsymbol{x-y=2} \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

c) $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

O objetivo desta questão é que o aluno resolva *sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas*, justificando o processo realizado, e verifique, em cada caso, a quantidade de solução, com a finalidade de instigar a associação dos *sistemas lineares* a cada caso de classificação.

a)

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y=10 \\ x=2+y \end{cases} \overset{2}{\widetilde{\sim}} \begin{cases} 2+y+y=10 \\ x=2+y \end{cases} \sim \begin{cases} 2+2y=10 \\ x=2+y \end{cases} \sim \begin{cases} 2y=10-2 \\ x=2+y \end{cases} \sim \begin{cases} 2y=8 \\ x=2+y \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y=\dfrac{8}{2} \\ x=2+y \end{cases} \sim \begin{cases} y=4 \\ x=2+y \end{cases} \overset{8}{\widetilde{\sim}} \begin{cases} y=4 \\ x=2+4 \end{cases} \sim \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases},$$

na equivalência (2), a 2ª equação foi substituída na 1ª equação; na equivalência (8) a 1ª equação foi substituída na 2ª equação.

A solução do sistema é trivialmente encontrada, $S=\{6\,,4\}$. Assim, admite-se uma única solução.

b)

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases} \sim [\dots] \sim \begin{cases} y=3-x \\ 6=6 \end{cases}$$

O sistema admite infinitas soluções.

c)

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=5 \end{cases} \sim [\dots] \sim \begin{cases} y=4-x \\ 8\neq 5 \end{cases}$$

O sistema não admite solução no conjunto dos *reais*.

2.4.4 Questão 4 – Apropriação de Conceito.

4) Descreva com suas palavras o que você entende por **incógnita**.

Esta questão tem o objetivo de analisar o entendimento do aluno sobre um símbolo utilizado na linguagem algébrica, a *incógnita*. Pode ser definida como *Representação Algébrica Simbólica* de um "número" que pertence a um determinado *conjunto numérico*. O conceito de *incógnita* é fundamental para a *Representação Algébrica* das *Equações*.

A principal intenção é que os alunos saibam diferenciar *incógnita* e *variável*, que são, respectivamente, características da *equação* e *função*.

2.4.5 Questão 5 – Apropriação de Conceito

5) Descreva com suas palavras o que você entende por **variável**.

Semelhante à questão anterior, o principal objetivo desta 5 é que o aluno consiga entender *variável* como um símbolo da linguagem algébrica, o qual representa mais de um "número", sendo um objeto que compõe a *representação algébrica simbólica* das *funções algébricas*.

2.4.6 Questão 6 – Classificação do Sistema Linear (2x2) e Conversão do Sistema de Representação.

6) Utilizando a tabela atribua valores para o símbolo x e encontre o respectivo valor numérico de y, ou vice-versa, atribua para y e encontre x. Marque os pares ordenados $(x\,, y)$ de cada sistema em cada um dos planos cartesianos referentes às alternativas. Represente graficamente cada *sistema de equações* da questão anterior considerando os seguintes conjuntos:

A) Números inteiros
B) Números reais

a)

x	$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

x	$x - y = 2 \Rightarrow -y = 2 - x \Rightarrow y = x - 2$

⋮

Cada gráfico representa que tipo de figura com números inteiros e com números reais? ______________________________; ______________________________

As retas possuem ponto(s) em comum?______________________________

Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?_________

Qual a classificação deste sistema? ______________________________

b)

x	$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

x	$2x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = 6 - 2x \Rightarrow y = \dfrac{6 - 2x}{2}$

⋮

As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ____________________________________

c)

x	$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

x	$2x + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 2x \Rightarrow y = \dfrac{5 - 2x}{2}$

⋮

As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ____________________________________

Esta questão exige a realização de *tratamentos* com os objetos (*funções*) e a exploração do conceito de variável em ambos os conjuntos numéricos. Na sequência, a habilidade de *conversão* do *Sistema Semiótico Algébrico* para o *Sistema Semiótico Figural* requer a habilidade de marcação de pontos referentes aos pares ordenados, além da interpretação final dos gráficos plotados e da utilização de cada um dos conjuntos numéricos. O objetivo é explorar a *conversão semiótica* enquanto sequência didática de ampliação de diferentes tipos de *Representações Semióticas*, destacando a exploração e *Representação* de um mesmo objeto em Matemática, Álgebra e Geometria, com a finalidade de formação conceitual, principalmente, sobre *sistemas lineares* e classificação dos *sistemas*.

As diferentes maneiras de *Representações* favorecem a aprendizagem significativa. Segundo Duval (1993; 2003), esse tipo de sequência didática é fundamental para que nenhum tipo de *Representação* seja considerado como *conceito* do objeto, ou seja, a finalidade da *Representação Semiótica* é possibilitar acesso aos objetos em diferentes áreas, permitindo explorar a relevância do conceito.

Os *sistemas* da questão 6 são os mesmos da questão 3 e classificam-se como:

a) Sistema Possível e Determinado;

b) Sistema Possível e Indeterminado;

c) Sistema Impossível.

2.4.7 Questão 7 – Resolução Justificada do Sistema Linear (3x3) - Operações de Equivalência

7) (Adaptação: ANTON; RORRES, 2001) Resolva o *sistema de equações lineares* utilizando *operações de equivalência* nas *equações* do *sistema*. **Justifique.** $$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 2z = 9} \\ \boldsymbol{2x + 4y - 3z = 1} \\ \boldsymbol{3x + 6y - 5z = 0} \end{cases}$$

Na questão proposta, o objetivo é realizar a resolução do sistema linear através de operações de equivalência, processo que permite a participação constante e ativa do aluno e possibilita entendimento e aprendizagem significativa dos objetos e do(s) conteúdo(s) abordado(s). Como já foi discutido no presente trabalho sobre a conveniência do processo de escalonamento (operações de equivalência) com relação a outros métodos, *Resolução Matricial* e R*egra de Cramer*, que "dependem" do tipo de classificação do *sistema*, impossibilitam a participação em todo o processo de resolução e apresentam maior *custo operacional* (fator extremamente importante com relação à linguagem de programação e desenvolvimento tecnológico) (LIMA - RPM 23 – 1993).

Pretende-se que o *conjunto solução* do *sistema* dessa questão seja calculado a partir de *operações elementares,* semelhantemente ao *sistema* **(xix)** apresentado na seção **(1.4.3)** do presente trabalho.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + 2z = 9} \\ \boldsymbol{2x + 4y - 3z = 1} \\ \boldsymbol{3x + 6y - 5z = 0} \end{cases} \sim [\dots] \sim \begin{cases} \boldsymbol{x} & & & \boldsymbol{= 1} \\ & \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{= 2} \\ & & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{= 3} \end{cases} ,$$

desta maneira, a solução $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{y = 2}$, $\boldsymbol{z = 3}$ pode ser visualizada.

$$\boldsymbol{S = \{1, 2, 3\}}.$$

2.4.8 Questão 8 – Resolução Justificada do Sistema Linear (3x3) – Operações de Equivalência

8) (Adaptação: IMPA – PAPMEM 2013) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 7y + 3z = 7 \end{cases}$$

Mostre, através de operações de equivalência, que o sistema é *possível e indeterminado* e dê duas *soluções* do sistema. (Observe que estas soluções podem representar *pontos* do $\mathbb{R}^3$). **Justifique.**

Nesta questão 8, espera-se que o aluno resolva o *sistema* com *operações elementares* aplicadas nas equações, obtendo *sistemas equivalentes*. Assim, o *escalonamento* (processo de equivalência) poderá ser utilizado como método de demonstração sobre a classificação do referido *sistema* (SPI) e, posteriormente, irá gerar a *representação algébrica simbólica* da solução. Em seguida, o aluno deverá realizar ***tratamentos*** com a solução para obter duas soluções aritméticas.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 3} \\ \boldsymbol{x + 3y - z = 1} \\ \boldsymbol{3x + 7y + 3z = 7} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 3} \\ \boldsymbol{y - 3z = -2} \\ \boldsymbol{y - 3z = -2} \end{cases} \sim \begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 3} \\ \boldsymbol{y - 3z = -2} \\ \boldsymbol{0 = 0} \end{cases},$$

assim, o sistema é indeterminado.

Com $\boldsymbol{z = 0}$ obtemos $\boldsymbol{y = -2}$ e $\boldsymbol{x = 7}$;

Com $\boldsymbol{z = 1}$ obtemos $\boldsymbol{y = 1}$ e $\boldsymbol{x = -1}$.

Desta maneira, duas soluções são representadas pelos *ternos ordenados*: $(\boldsymbol{7, -2, 0})$ e $(\boldsymbol{-1, 1, 1})$, que têm dois *pontos* no *espaço cartesiano* ($\mathbb{R}^3$) como *Representação Geométrica*.

CAPÍTULO 3: APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O presente capítulo trata da apresentação e discussão dos resultados coletados a partir da pesquisa realizada, na seguinte ordem: diagnóstico sobre a utilização do software Geogebra em sala de aula (*Representação Geométrica Virtual*); análise das resoluções das questões presentes na atividade final (teste) e comparação de resultados das duas etapas do Ensino Básico (8º ano - Ensino Fundamental II e 2º ano - Ensino Médio); análise dos questionários de sondagem (realizados com os alunos) sobre uso de recursos tecnológicos (software Geogebra) para *Representação Geométrica Virtual*; apresentação dos resultados obtidos no questionário de sondagem realizado com os professores a respeito da utilização de *sequências didáticas*, envolvendo *conversão* do *Registro de Representação* e utilização do software Geogebra.

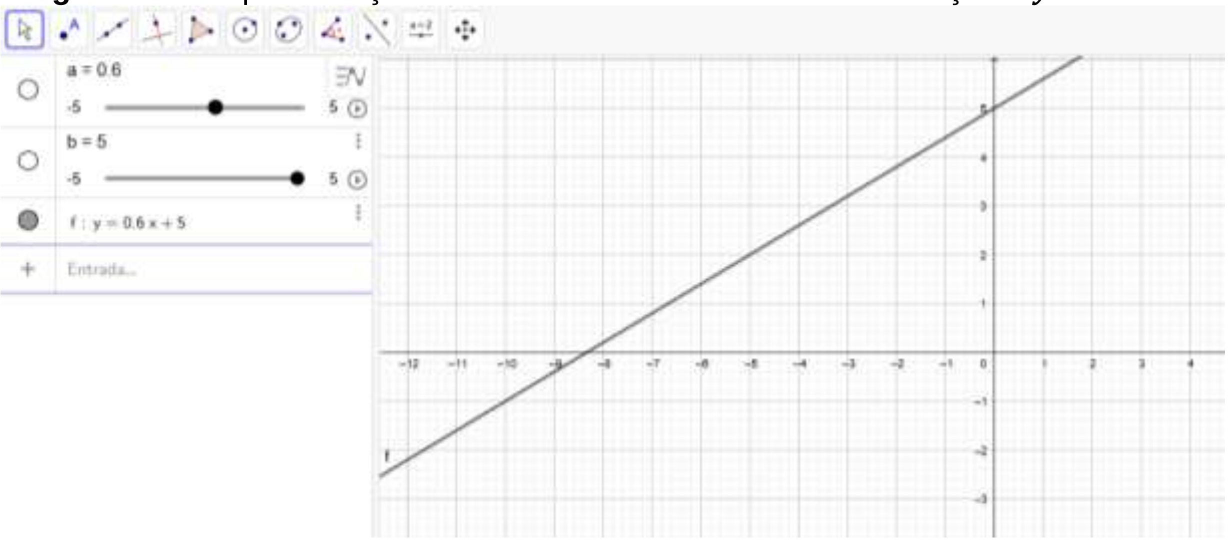
3.1 Utilização Didática do Geogebra

A realização da oficina obedeceu, criteriosamente, à sequência didática (Apêndices: D, E) planejada, com explicação e esclarecimento de dúvidas sobre a formação algébrica das *equações lineares*, a resolução algébrica dessas equações, os *sistemas de equações lineares* (formação e resolução), entre outros conceitos envolvidos. Foi possível perceber as dificuldades dos alunos ao tratarem das expressões algébricas, principalmente ao realizarem operações (adição e multiplicação e suas respectivas inversas) de maneira associada às “regras mecânicas” e sem justificativa, o que provocou erros durante a resolução de *equações* e de *sistemas de equações*.

Durante a etapa de *Representação Geométrica* (*Virtual*) dos *sistemas lineares* (*2x2*), foi utilizado o software Geogebra como ferramenta, provocando entusiasmo, participação e interação dos alunos (nenhum dos discentes já havia utilizado o software). Inicialmente, os alunos construíram gráficos de diferentes funções lineares, discutiram sobre a *conversão* da *Representação* Algébrica para *a Representação Geométrica* e efetuaram a comparação das diferentes curvas plotadas.

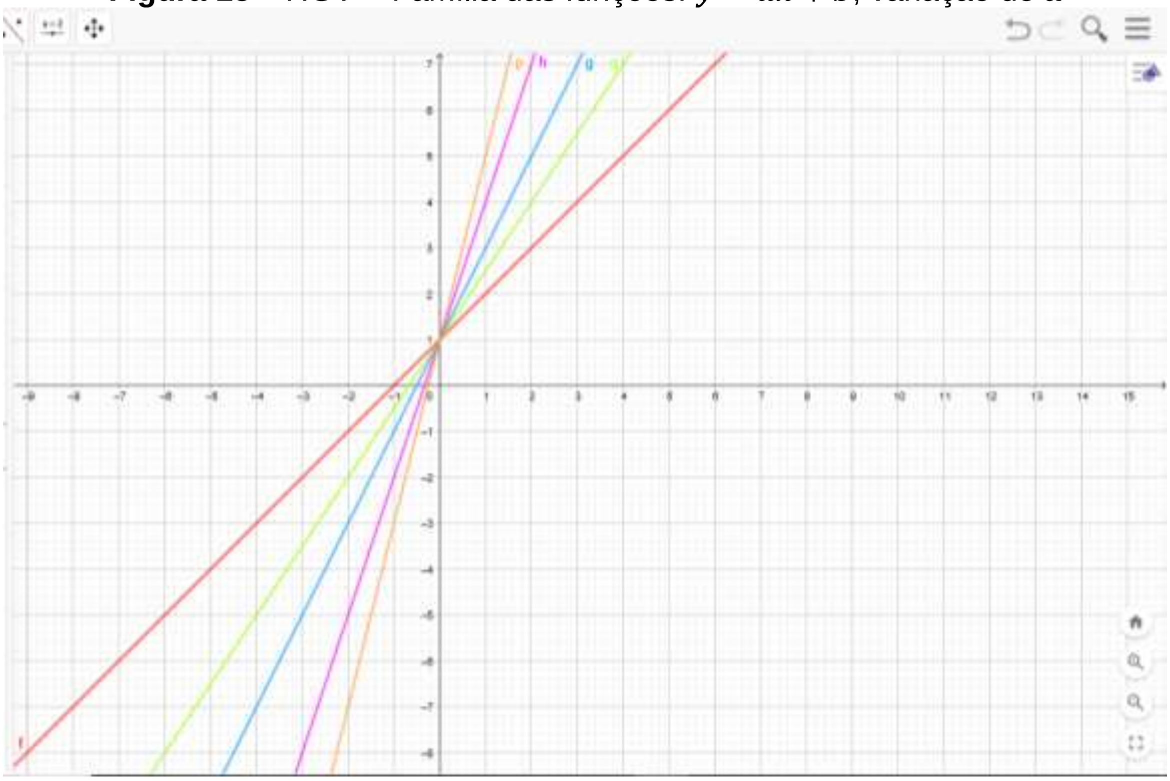
Após o conhecimento de algumas ferramentas do Geogebra, os alunos foram orientados a representar, geometricamente, a *família das funções* do tipo $\boldsymbol{y = ax + b}$, momento de muitas descobertas e concretização de conceitos aprendidos durante as aulas. A figura (14) exemplifica esse tipo de representação, podendo “variar” os coeficientes ***a*** e ***b*** em intervalo(s) numérico(s) e verificar, momentaneamente, os respectivos gráficos. A figura (15) ilustra variação do coeficiente ***a***, com ***b*** fixo.

Figura 14 – Representação Geométrica Virtual – Família das funções: $\boldsymbol{y = ax + b}$



Fonte: O autor (2019)

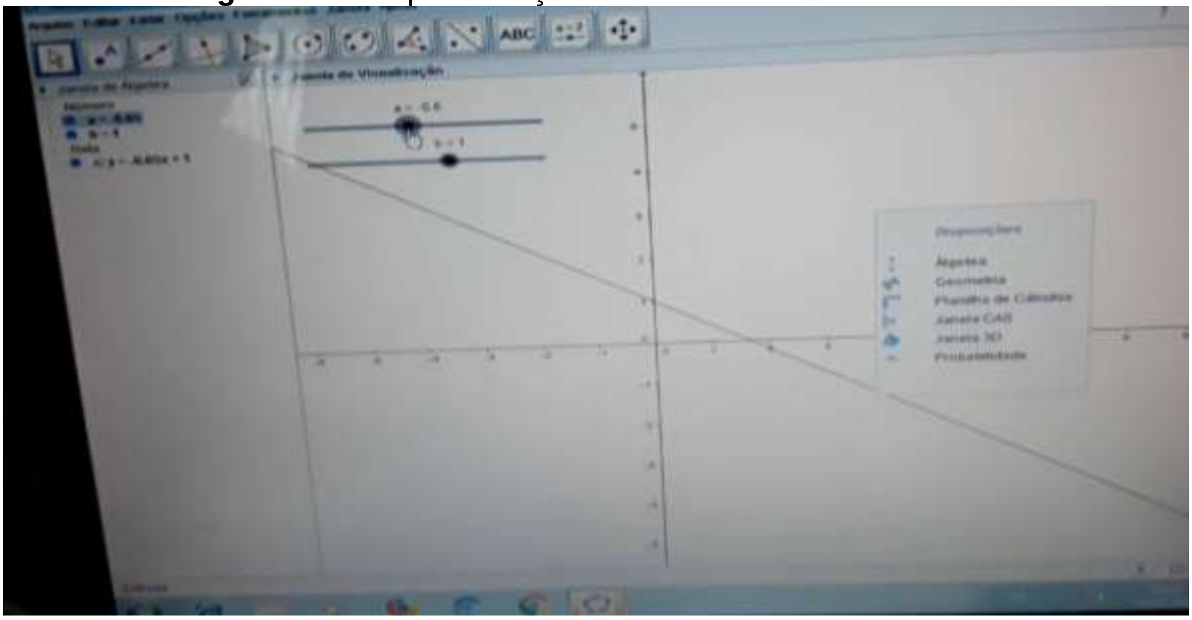
Figura 15 – *RGV* – Família das funções: $\boldsymbol{y = ax + b}$, variação de $\boldsymbol{a}$



Fonte: O autor (2019)

A imagem a seguir refere-se a um dos trabalhos desenvolvidos pelo aluno (A) durante a oficina.

Figura 16 – Representação Geométrica Virtual – Aluno A



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos verificaram a representação gráfica ao variar o coeficiente ***a***, com valores negativos, nulo e valores positivos, percebendo, de maneira interativa e geométrica, a definição do *coeficiente angular*, objeto estudado no Ensino Básico. De maneira semelhante, ao fixar o valor de ***a*** e variar o valor de ***b***, foi possível analisar, geometricamente, o *coeficiente linear*. A *Representação Simbólica* de cada função aparecia no software Geogebra, na "janela de Álgebra", exemplificando a *conversão do sistema semiótico de representação* (*Algébrica-Geométrica*), como pode ser visto na figura 16.

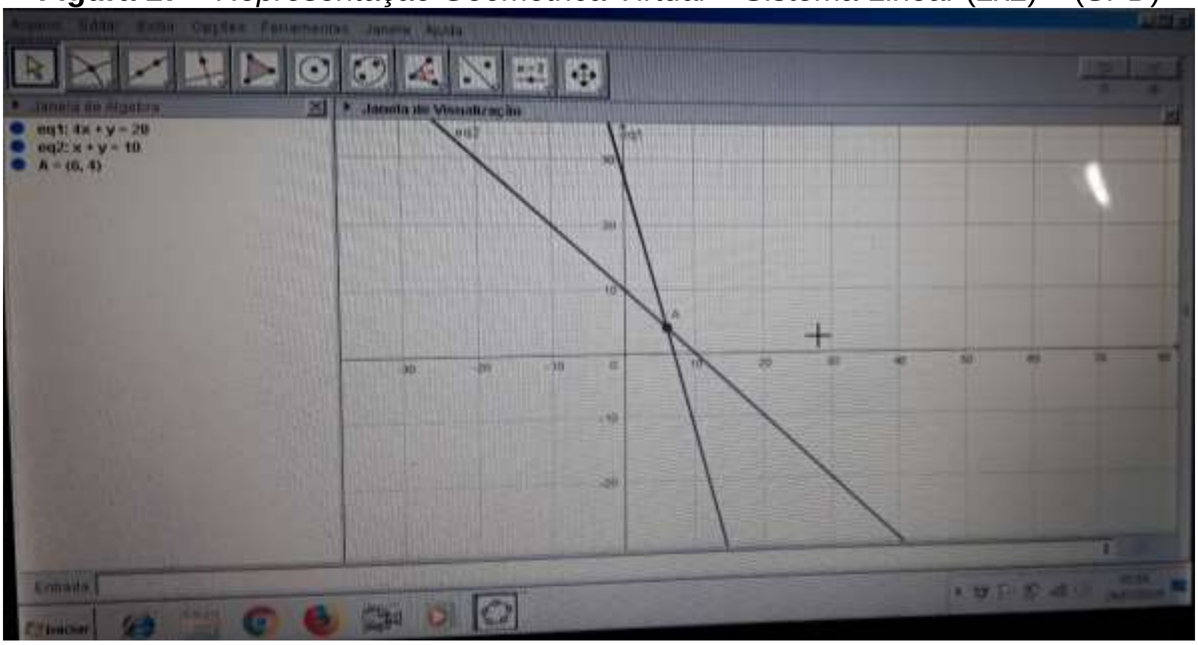
No decorrer das oficinas, foram utilizados diferentes tipos de *Representações*, contribuindo para a aprendizagem da Matemática, da Geometria e para a introdução aos estudos da Álgebra. Segundo Duval (2003), a apreensão dos conceitos e a aprendizagem da Matemática ocorrem com a mobilização de, pelo menos, dois tipos de *Registros de Representação* (*RR*) dos objetos matemáticos, assim, além do *Registro Simbólico* dos *sistemas lineares*, ocorreram *conversões* do *Registro da Língua Materna* e do *Registro Geométrico*. O *Registro Geométrico Virtual* (*RGV*) dos *sistemas lineares* ocorreu como *Registro de Representação* inovador, atual e dinâmico, favorecendo o processo de ensino-aprendizagem paralelamente aos avanços tecnológicos.

Após realizarem a *Representação Geométrica* manual dos *sistemas lineares* (*2x2*), os alunos do 2º ano do Ensino Médio efetuaram a *Representação Geométrica Virtual*, analisando e interpretando, de maneira dinâmica e *iterativa*, o *conjunto solução* e a classificação destes conjuntos. Além da agilidade e diversão, o procedimento virtual possibilitou exatidão na construção dos gráficos, diversificou as metodologias e superou métodos cansativos e repetitivos. Assim, tentou superar dificuldades da construção manual de gráficos, uma vez que muitos alunos apresentaram deficiência durante a correspondência entre a *Representação Algébrica* e a *Representação Geométrica* de pontos no plano cartesiano.

É conveniente o professor utilizar diferentes métodos para a superação dos obstáculos e refletir sobre o processo de construção do conhecimento. Desta maneira, a presente pesquisa de intervenção promoveu a nova relação entre teoria e prática, sujeito e objeto, em que, segundo Pimenta (2002, p.22), "(...) o ensino é tomado como ponto de partida e de chegada da pesquisa", ou seja, o ensino reflexivo.

A figura (17) refere-se à *Representação Geométrica Virtual* realizada por um aluno, com *funções* associadas a um *sistema linear possível e determinado* (inicialmente, os alunos realizaram a resolução algébrica do referido sistema, notando a sua classificação).

Figura 17 – *Representação Geométrica Virtual* – Sistema Linear (2x2) – (SPD)



Fonte: Dados da pesquisa

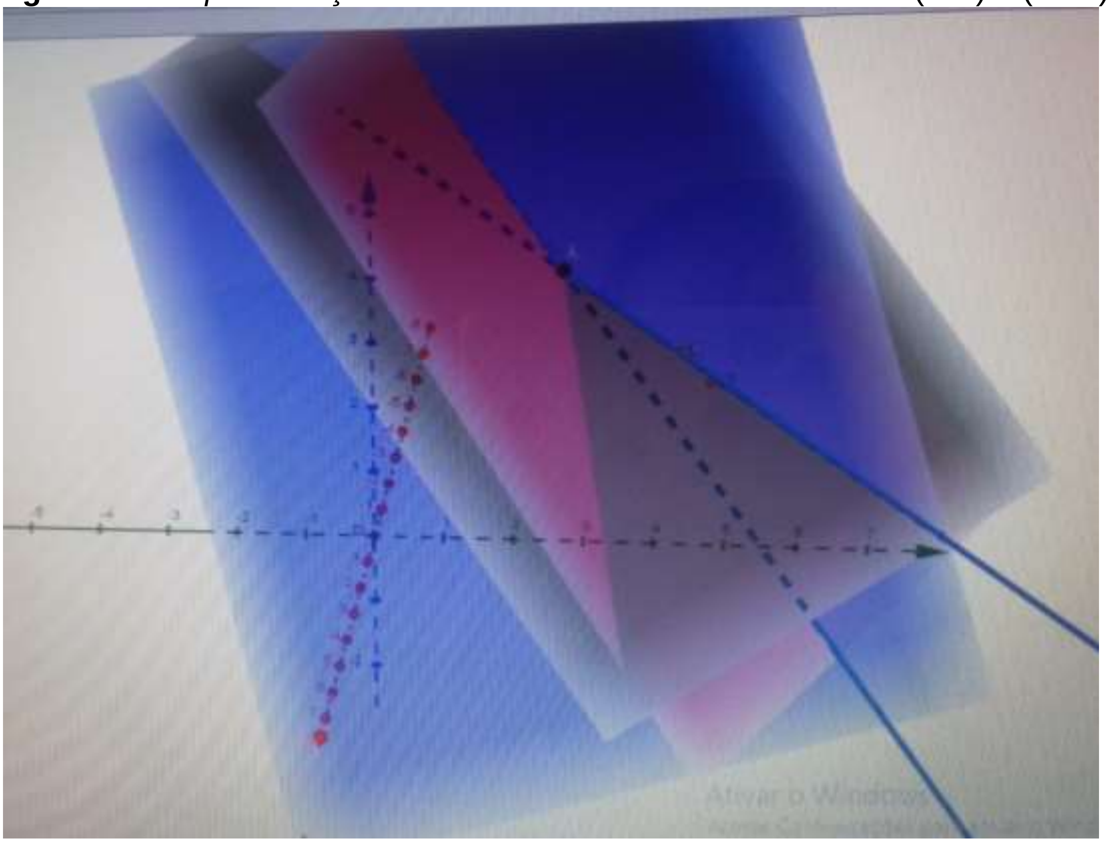
Foi possível notar que o recurso virtual favoreceu o ensino aprendizagem sobre *sistemas lineares*. Durante a oficina, houve os seguintes comentários dos alunos: “o sistema é impossível, as retas não se tocam (intersectam)”; “que ótimo, é possível marcar o ponto que as retas se tocam (intersectam), justamente a solução do sistema”; “neste caso, as retas são coincidentes”; entre outras afirmações que revelaram o entusiasmo em utilizar o software.

No decorrer da sequência didática do ensino-aprendizagem sobre *sistemas lineares* (*3x3*), o software Geogebra foi indispensável para realizar a *conversão* do *Registro Simbólico* para o *Registro Geométrico* (*Virtual*), que possuem *Sistemas Semióticos* diferentes. Explorou-se, principalmente, a ferramenta “Janela 3D” para utilização do *espaço cartesiano* (*espaço tridimensional* - $\mathbb{R}^3$), com *Representação Geométrica* das funções associadas às expressões do *sistema linear com três equações e três incógnitas*.

Os alunos ficaram impressionados com a visualização dos *planos* no *espaço cartesiano*, foi possível perceber a utilização das ferramentas do Geogebra, como: alteração da cor dos gráficos, utilização da ferramenta “Girar Janela de Visualização 3D” para mudança da maneira de visualização dos *planos*, marcação das intersecções dos planos através da opção “Interseção de Duas Superfícies”, entre outras. Na sequência, foi analisada a *Representação Geométrica* (*Virtual*) de exemplos de *sistemas* (*3x3*) para cada caso de classificação (SPD, SPI, SI).

Após a resolução de um exemplo de *sistema linear com três incógnitas* (*possível e determinado*), os alunos efetuaram a *representação geométrica* das funções associadas às expressões deste *sistema*. A figura (18) é um exemplo efetuado por um dos alunos.

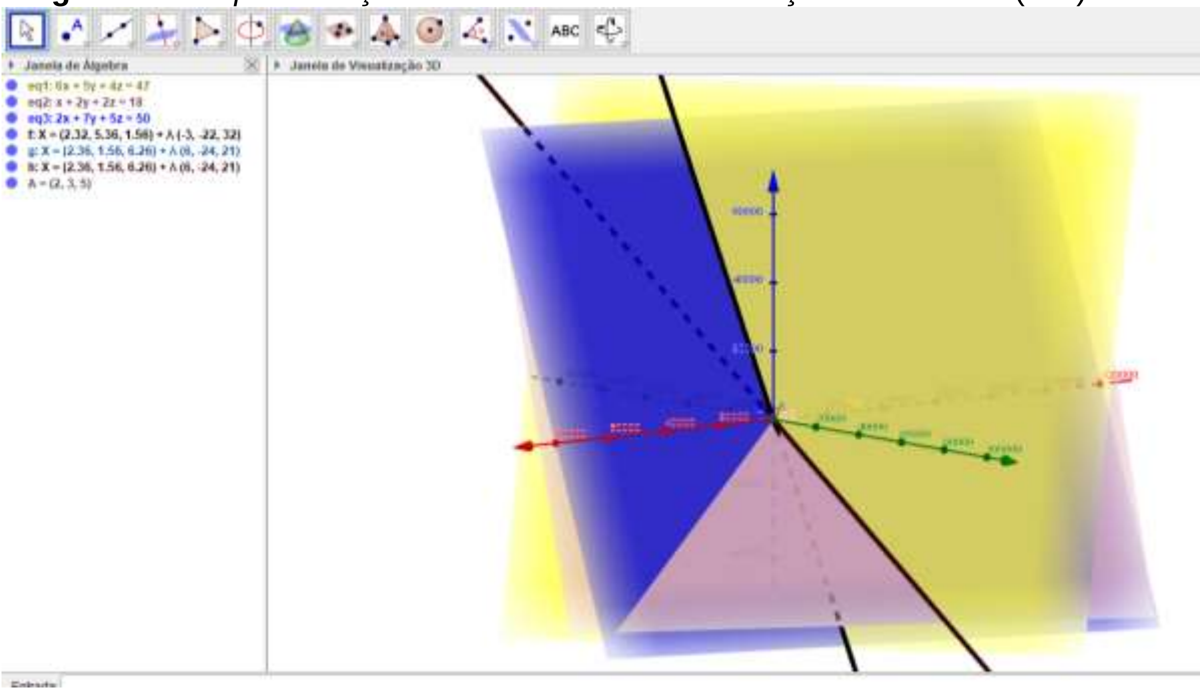
Figura 18 - *Representação Geométrica Virtual – Sistema Linear* (3x3) – (SPD)



Fonte: Dados da pesquisa

Na imagem, é possível perceber a *representação geométrica* das intersecções de dois pares dos *planos*, duas *retas*. Com isso, os alunos analisaram que o *ponto* de intersecção das duas *retas* é a *representação geométrica* da *solução* do *sistema*. A imagem seguinte (figura 19) é uma captura de tela de um dos arquivos recebidos dos alunos, através dela pode-se analisar as intersecções dos planos e as *representações algébrica e geométrica* da *solução*.

Figura 19 - *Representação Geométrica Virtual* – *Solução* do *Sistema* (3x3) - SPD

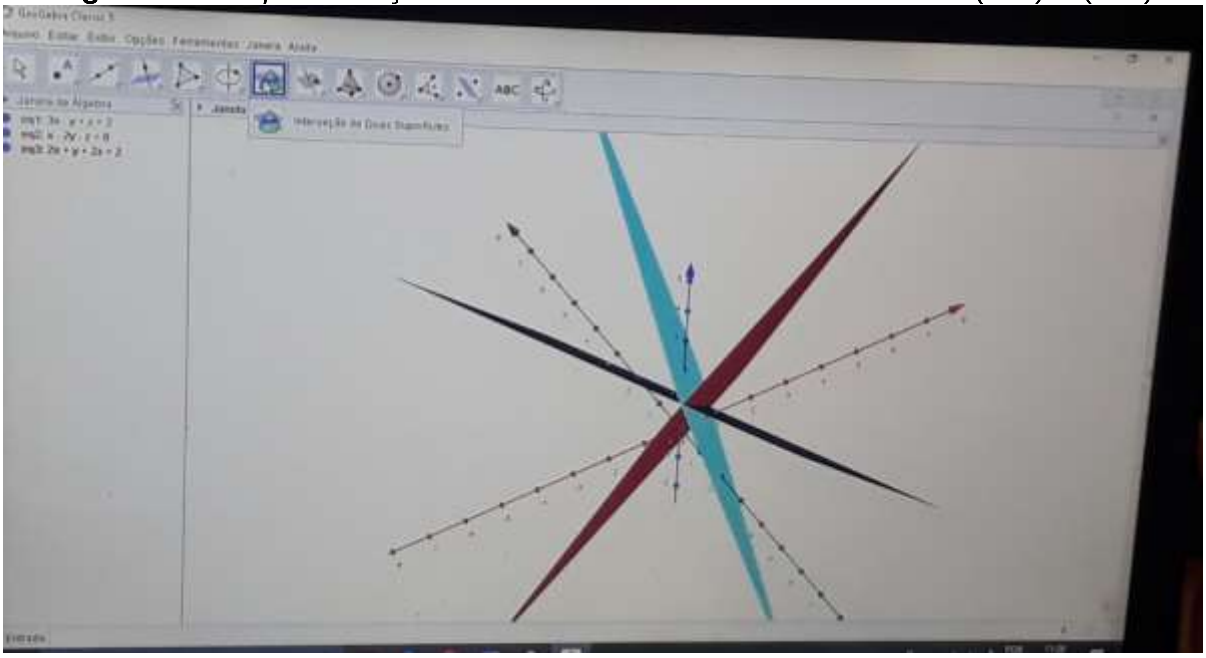


Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso, os alunos comentaram sobre a interseção de dois planos, destacando: “são infinitos pontos”. Essa situação favoreceu o entendimento da *representação geométrica* de um *sistema com duas equações e três incógnitas*. Além disso, o processo de construção e análise dos gráficos foi fundamental para a formalização do conhecimento geométrico a respeito dos sistemas (3x3) com apenas uma solução. Segundo Duval (2003, p.20), do ponto de vista cognitivo, é necessário “reconhecer o mesmo objeto em diferentes *Representações Semióticas* que podem ser feitas a partir dele”, isso contribui para que o objeto não seja confundido com a *Representação Semiótica* utilizada para representá-lo e, assim, permite a apreensão do conceito.

De maneira semelhante, após a resolução algébrica do *sistema linear* (*3x3*) *possível e indeterminado*, os alunos foram questionados a respeito da configuração dos *planos* referentes à *representação geométrica* (*gráfica*), com o intuito de apresentarem a justificativa geométrica do *conjunto solução*. A imagem (20) refere-se à *representação geométrica virtual* (*RGV*) realizada por um aluno, na qual se pode perceber que a visualização da interseção dos planos fica evidente, principalmente com a utilização interativa do software, realizando movimentos de *rotação* dos *eixos cartesianos*.

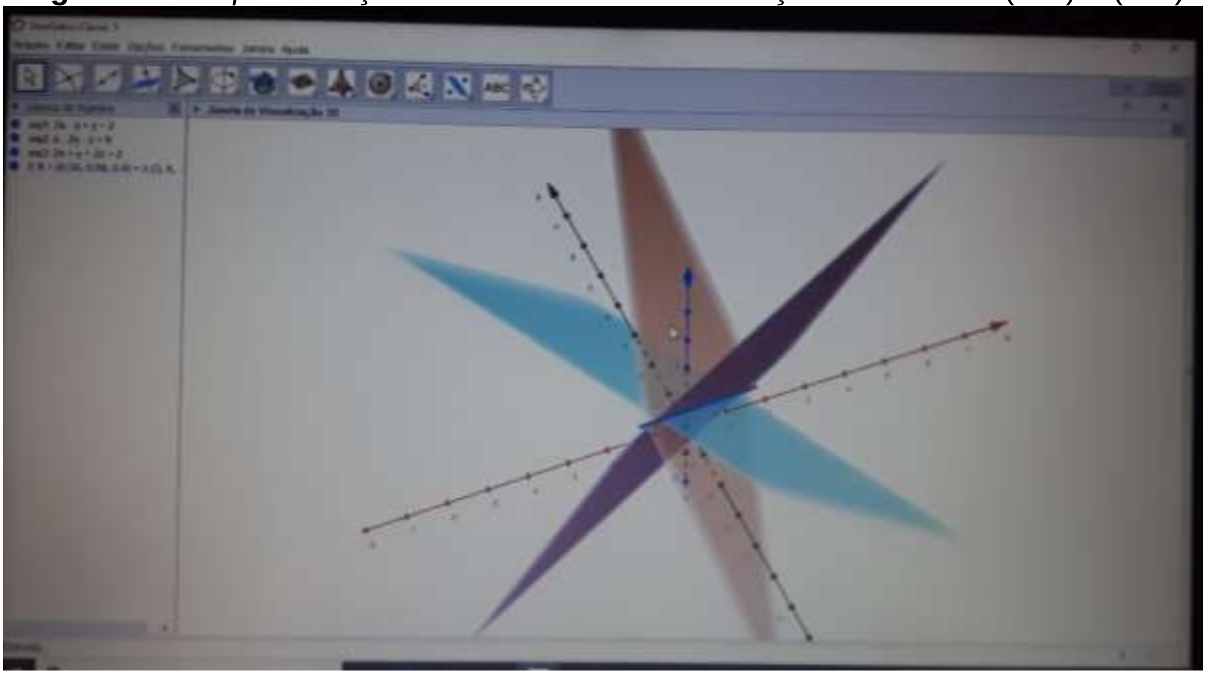
Figura 20 - *Representação Geométrica Virtual – Sistema Linear* (3x3) – (SPI)



Fonte: Dados da pesquisa

Na imagem (21), percebe-se que outro aluno realizou a marcação da interseção dos planos, processo simples através do aplicativo disponível no Geogebra. Dessa maneira, encontrou a representação gráfica da reta, assim como a *representação algébrica vetorial* da *função* (referente à *reta*), que apareceu, automaticamente, na “Janela de Álgebra”.

Figura 21 - *Representação Geométrica Virtual –Solução* do *Sistema* (3x3) – (SPI)

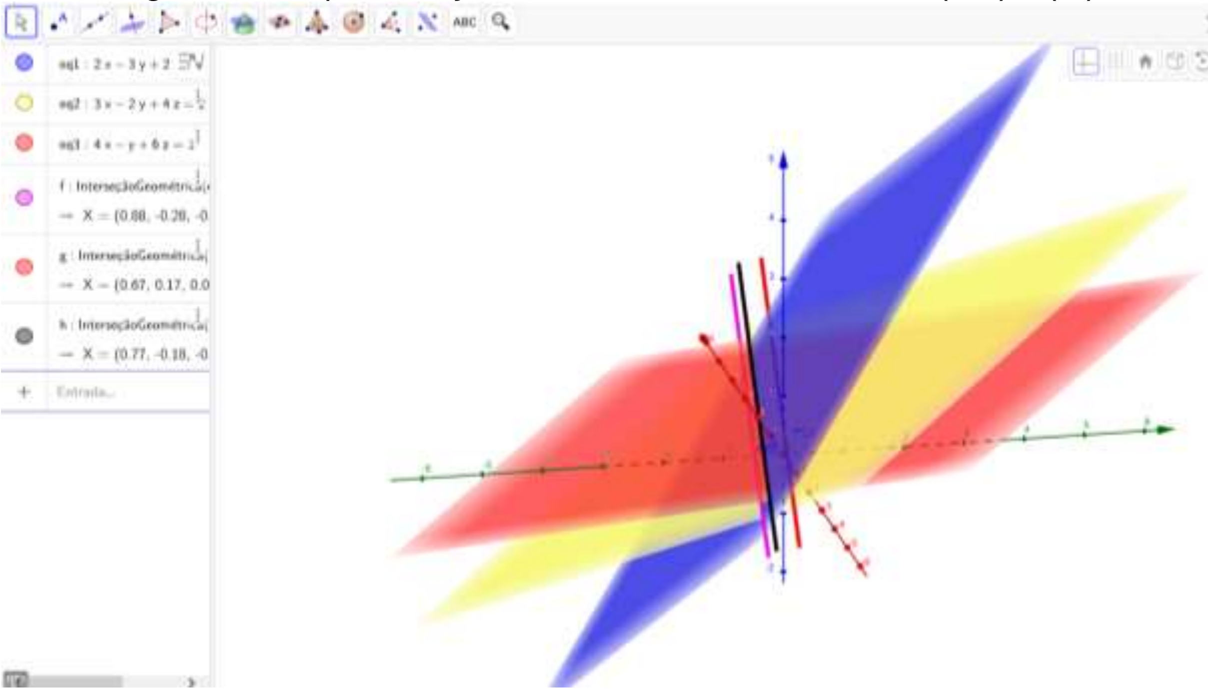


Fonte: Dados da pesquisa

Durante as aulas, ocorreu a construção *gráfica virtual* de diferentes exemplos. Em alguns casos, para melhor visualização e/ou interpretação geométrica do *conjunto solução*, tornaram-se necessárias: a *rotação* dos *eixos*, a mudança na coloração dos *planos*, a marcação da interseção, entre outras medidas que deixaram os alunos com maior autonomia e interesse na participação das aulas.

Após realizarem *operações de equivalência* com um exemplo de *sistema linear* e perceberem que se tratava de um *sistema impossível*, os alunos realizaram a *conversão* do *Sistema Semiótico de Representação*, efetuando a *representação geométrica virtual*. A figura (22), obtida a partir da captura de tela, refere-se à representação realizada.

Figura 22 - *Representação Geométrica Virtual – Sistema* (3x3) – (SI)

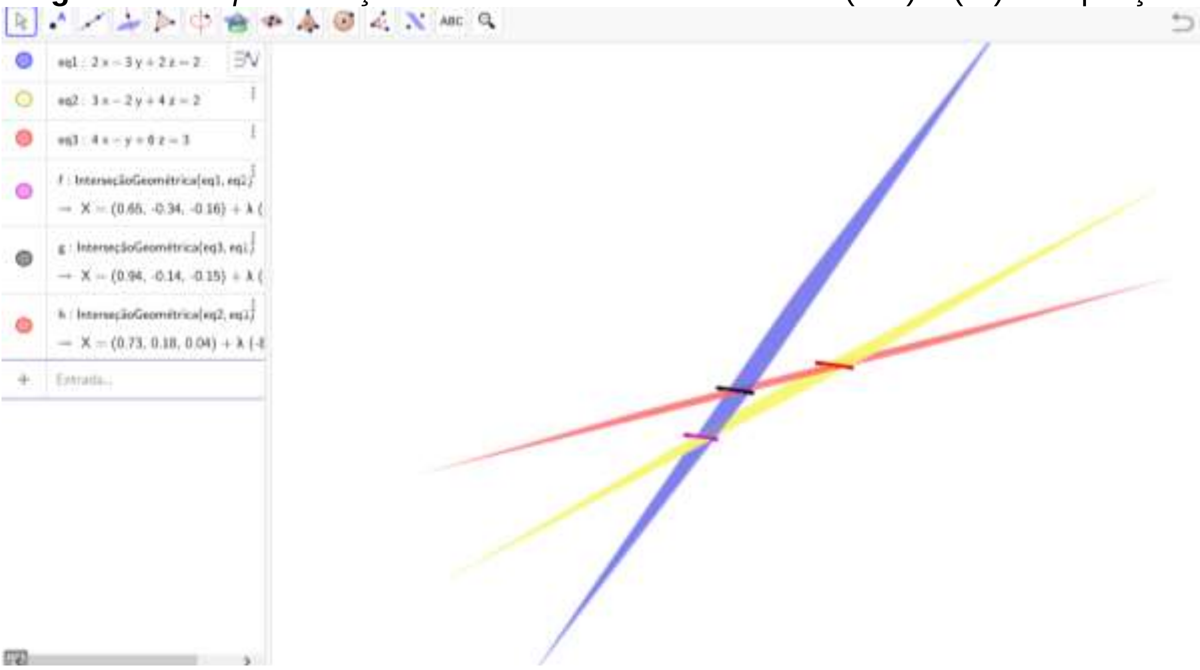


Fonte: Dados da pesquisa

Ao plotar os gráficos e utilizar a opção "Interseção de Duas Superfícies", os discentes perceberam que os planos se intersectam dois a dois, segundo três *retas paralelas*. Por isso, apresentaram a justificativa geométrica de que não é possível os *três planos* possuírem a mesma interseção, associando ao fato do referido *sistema* possuir *conjunto solução vazio*.

Os alunos utilizaram o recurso "Ampliar", aprimorando a visualização da configuração dos *planos*, como pode ser visto na figura (23), equivalente à figura (22).

Figura 23 - *Representação Geométrica Virtual* – *Sistema* (3x3) – (SI) - Ampliação



Fonte: Dados da pesquisa

Na próxima seção apresentaremos a análise de algumas resoluções das questões presentes no teste final realizado com o 8º ano e com o 2º ano do Ensino Médio após o estudo sobre *sistemas lineares* em seus diferentes tipos de *Registros de Representação Algébricos* adotados (*Registro Simbólico*, *Registro da Língua Materna* e *Registro Geométrico* - manual e virtual).

3.2 Análise do Teste Final

Através das oficinas e do teste realizado, foi possível comparar os resultados obtidos com a turma do 8º ano (Ensino Fundamental II) e com a turma do 2º ano (Ensino Médio), verificando as dificuldades encontradas no momento de introdução aos estudos sobre Sistemas Lineares (Introdução à Álgebra - 8º ano) no Ensino Básico e em uma etapa posterior dos estudos sobre *Sistemas* (2º ano E.M.).

Antes de expor a análise dos dados obtidos com a atividade final (teste final), realizada em cada turma, é necessário descrever as estratégias utilizadas na classificação das respostas de cada questão do referido teste. Em um momento inicial, as respostas foram classificadas de acordo com as seguintes classes: *satisfatórias*, *não satisfatórias* e *não soube*. Essa classificação está expressa na tabela (1). O objetivo foi realizar, estatisticamente, a análise e a comparação dos resultados em diferentes fases do Ensino Básico, já que, teoricamente, os alunos do Ensino Médio apresentam maior bagagem de conhecimento quando comparados àqueles do Ensino Fundamental II. No entanto, Moreira (2004, p. 142) adverte: “é claro que uma classificação desse tipo está inevitavelmente impregnada das concepções do investigador”, dessa maneira, é preciso que a classificação seja feita com as devidas cautelas.

Para evidenciar o tipo de classificação adotado na pesquisa, é oportuno ressaltar que a designação de uma resposta como “*não satisfatória”* ocorreu quando o aluno apresentou erro conceitual dos objetos envolvidos ou cometeu erros ao realizar *tratamentos*, principalmente com as *operações de equivalência*, *operações* fundamentais para resolução algébrica justificada de um sistema linear. Também foi analisada a *conversão do sistema semiótico de representação* dos objetos.

Na tabela a seguir, pode-se verificar a proporção da classificação das respostas de cada questão presente na atividade final, realizada com a turma do 8º ano do Ensino Fundamental II (24 alunos) e com a turma do 2º ano do Ensino médio (29 alunos). As respostas classificadas como “não soube” referem-se às questões deixadas sem tentativa de solução ou às respostas do tipo evasiva (“não sei”, tentativa de cópia do colega, etc.).

Tabela 1 – Classificação geral das respostas por etapa do Ensino Básico

Etapa do Ensino Básico	8º ano – Ensino Fundamental II	2º ano – Ensino Médio
Satisfatórias	36,0%	61%
Não Satisfatórias	23,0%	30%
Não Soube	41,0%	9%

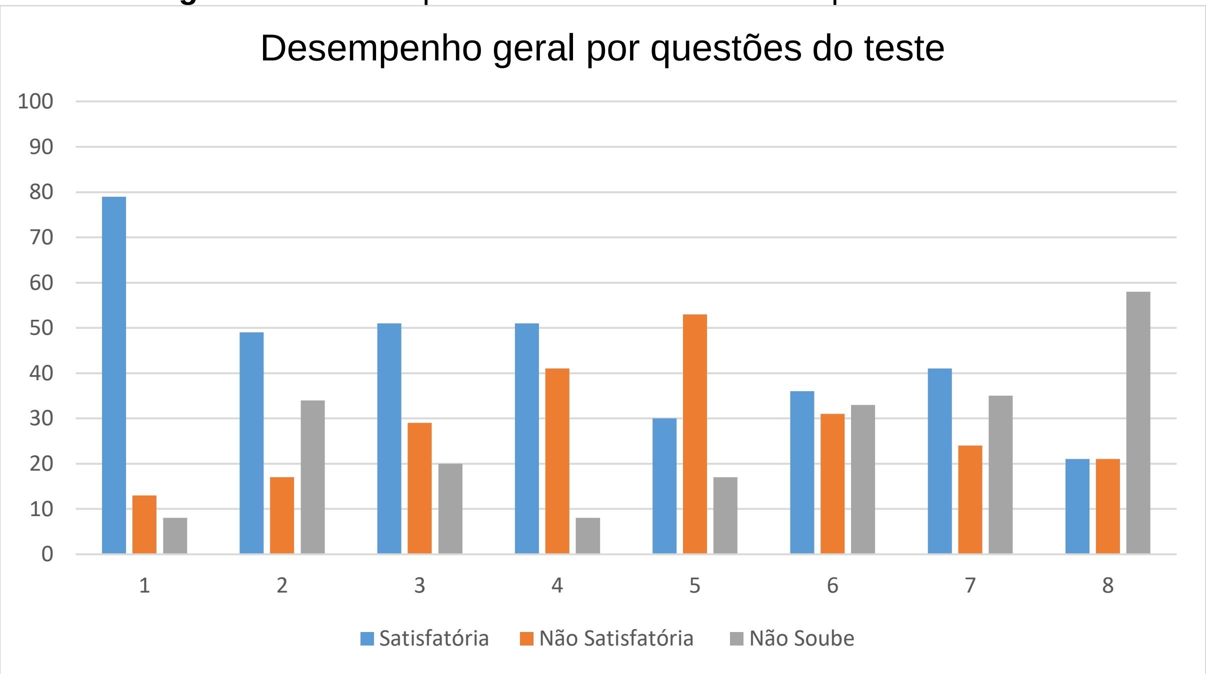
Fonte: Dados da pesquisa

Percebe-se que, no Ensino Fundamental II, há maior porcentagem de alunos que não tentaram responder as questões, alguns por não saberem qual método utilizar para resolver o questionamento, e outros simplesmente não demonstraram interesse ou preocupação em participar dessa fase da pesquisa. Quanto ao Ensino Médio, apesar de os resultados aparentarem um avanço, torna-se necessária a análise individual de cada questão, uma vez que existem dificuldades conceituais a serem destacadas, além do elevado índice de desmotivação. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), os alunos devem saber esquematizar (mesmo que mentalmente) e comparar caminhos para resolução de problemas, assim como efetuar a demonstração e provas de teoremas, provocando o surgimento de novos questionamentos e desenvolvimento da aprendizagem.

Os sujeitos da pesquisa apresentaram várias dificuldades com a Matemática “básica”, fator que compromete o desenvolvimento da aprendizagem e da formação de conceitos. Dessa maneira, pode-se destacar que a deficiência da aprendizagem da Matemática se relaciona, principalmente, com a incoerência das sequências didáticas adotadas, como já destacamos no presente trabalho. Tais fatos ratificam as pesquisas de Pais (2002) e Brousseau (2008), referenciadas no Capítulo 2: é necessário que o novo conhecimento entre em harmonia com o antigo, gerando obstáculos didáticos, assim, devem existir sequências didáticas e, mais amplamente, situações didáticas. Tais fatores também se justificam com os trabalhos de Duval (1937-), referência fundamental desta pesquisa, destacando o uso de sequências didáticas para se efetuar as transformações fundamentais (TRRS – 1993; 2013): *formação*, *tratamentos* e *conversões*.

A análise estatística geral dos estudantes em cada questão do teste indica maior desempenho com as primeiras questões (figura 24), as quais envolveram *sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas* (conceitos, *Representações Semióticas, tratamentos*).

Figura 24 - Desempenho da amostra em cada questão do teste



Fonte: Dados da pesquisa

O gráfico da figura (24) revela que as questões 7 e 8 tiveram maior índice dos que não souberam, ambas envolveram a resolução justificada de *sistemas lineares (3x3)* e foram aplicadas, exclusivamente, para a turma do Ensino Médio. A questão 5, com elevado índice de respostas não satisfatórias, envolveu a definição de **variável**. E a questão 6, com aparente equilíbrio das classificações, retratou a conversão do *Sistema Semiótico*, construção de gráficos das *funções* associadas a *sistemas* (2x2), com variáveis discretas (números inteiros) e contínuas (números reais).

Considerando os fatos mencionados, iremos realizar a análise detalhada de cada questão do teste, destacando erros e acertos que ocorreram durante o processo de resolução.

3.2.1 Questão 1 – Conversão do Sistema Semiótico e Tratamento

1) (Adaptação: DANTE, 2015) Letícia e Rodrigo viram, em uma loja, os preços de uma bola e de um jogo, e fizeram estas afirmações:

Letícia: A bola e o jogo juntos custam RS 18,00.

Rodrigo: O jogo custa o dobro da bola.

Considere a incógnita x como o preço da bola e a incógnita y como preço do jogo, ambos em reais. **Determine o que se pede justificando sua resposta:**

a) A equação correspondente à afirmação de Letícia.

____

b) A equação correspondente à afirmação de Rodrigo.

____

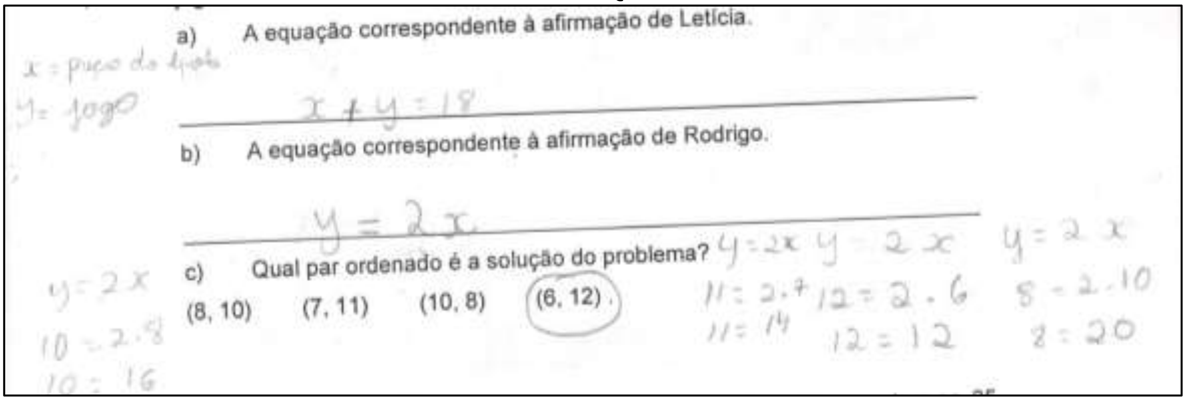
c) Qual par ordenado é a solução do problema?

(8, 10) (7, 11) (10, 8) (6, 12) .

Das respostas obtidas no item (a), 6 dos 53 participantes não apresentaram uma resposta satisfatória. Dos 6 alunos, 5 são do 8º ano, alguns deixaram sem responder e outros interpretaram o enunciado de maneira equivocada, com a tentativa de representar as afirmações de Letícia e Rodrigo em uma única expressão algébrica. Nesta primeira questão, o item (b) foi o que obteve um maior número de erros, principalmente dos alunos do 8º ano, que apresentaram dificuldades em expressar, algebricamente, a relação entre x e y. Entretanto, o número de acertos no item (c) foi maior do que no anterior, os alunos realizaram tratamentos com as alternativas e encontraram o par ordenado que satisfaz o conjunto de informações do enunciado.

A resposta a seguir, classificada como **satisfatória**, foi realizada por um aluno do 8º ano:

Recorte da Questão 1


x = preço do ...
y = jogo
a) A equação correspondente à afirmação de Letícia.
$x + y = 18$
b) A equação correspondente à afirmação de Rodrigo.
$y = 2x$
c) Qual par ordenado é a solução do problema?
(8, 10) (7, 11) (10, 8) (6, 12)
$y = 2x$ / $10 = 2 \cdot 8$ / $10 = 16$
$y = 2x$ / $11 = 2 \cdot 7$ / $11 = 14$
$y = 2x$ / $12 = 2 \cdot 6$ / $12 = 12$
$y = 2x$ / $8 = 2 \cdot 10$ / $8 = 20$

Fonte: Resolução do aluno

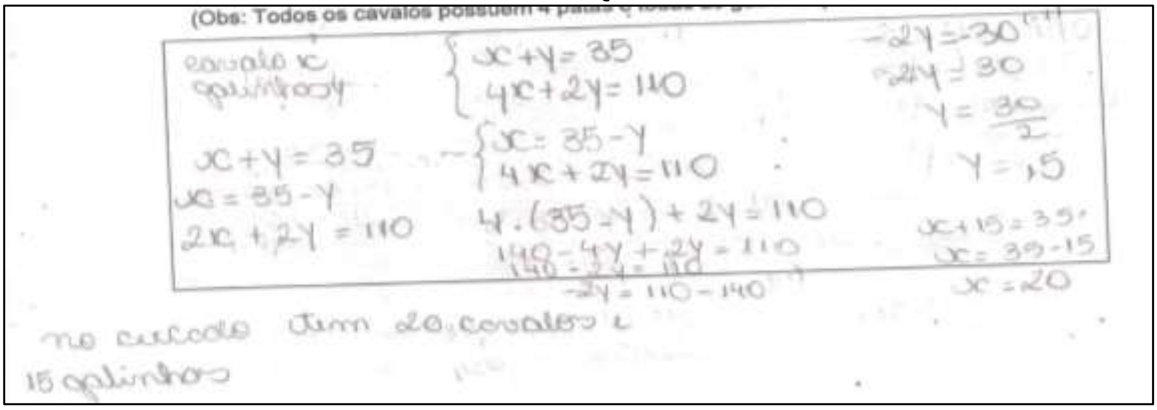
É possível notar a correta *Representação Simbólica* nos itens (a) e (b), e os *tratamentos* realizados no item (c).

3.2.2 Questão 2 – Conversão do Sistema Semiótico e Resolução do Sistema Linear com duas Equações e duas Incógnitas

2) (Adaptação: RPM – 50) Num cercado, há cavalos e galinhas; contam-se 35 cabeças e 110 patas. Quantos animais de cada espécie tem o cercado citado? **Determine a solução do** sistema linear **justificando sua resposta.** (Obs: Todos os cavalos possuem 4 patas e todas as galinhas possuem 2 patas).

Nessa questão, aproximadamente 74% dos alunos do Ensino Médio conseguiram desenvolver uma resolução satisfatória. Inicialmente, realizaram a *conversão* do *Registro de Representação Algébrico* (*Registro da Língua Materna* para *Registro Simbólico*), gerando o *sistema linear* e, posteriormente, efetuaram *operações de equivalência* para obter o *conjunto solução*:

Recorte da Questão 2



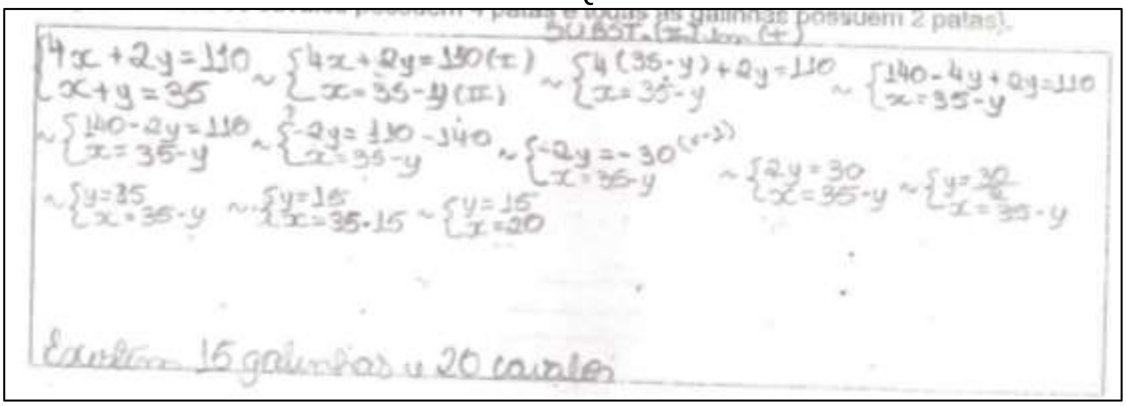
Fonte: Resolução do aluno

E em relação aos 24 alunos do 8º ano, 18 deixaram sem resolução. A *conversão* exigida pela questão requer um novo tipo de habilidade desses alunos e provocou o surgimento de obstáculos didáticos. No entanto, a falta de interesse da superação desses obstáculos pode estar associada ao fato de a atividade não ter um valor quantitativo, uma vez que muitos alunos questionaram sobre a ausência da nota e utilizaram isso para justificar o seu desinteresse em participar das atividades.

Além disso, o início do estudo sobre *sistemas lineares* pode apresentar dificuldades relacionadas aos conceitos que ainda estão em processo de formação cognitiva, à ampliação dos *conjuntos numéricos* envolvidos e, principalmente, à introdução de novos símbolos da linguagem algébrica. Essa informação pode ser evidenciada ao comparar os resultados das duas turmas na resolução de uma mesma questão, com maior índice de acertos no 2º ano do Ensino Médio (isto pode estar associado também à maturidade dos alunos).

A imagem a seguir refere-se ao processo de resolução (*sistemas equivalentes*) realizado por um dos alunos do 8º ano.

Recorte da Questão 2



Fonte: Resolução do aluno

Percebe-se que o aluno efetuou a construção de *sistemas equivalentes* até que o *conjunto solução* pudesse ser trivialmente visualizado.

3.2.3 Questão 3 – Conversão do Sistema Semiótico e Tratamento

3) Utilize as operações de equivalência para resolver os sistemas abaixo e determine quantas soluções tem cada um deles. **Justifique sua resposta!**

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

A quantidade de soluções satisfatórias nos três itens (a, b, c) apresentou pequena taxa de variação em cada uma das turmas, visto que os *tratamentos* realizados durante o processo de resolução foram os mesmos. Entretanto, ao comparar os resultados obtidos nas duas turmas (tabela 2), pode-se perceber que o 8º ano obteve maiores percentuais de questões sem resolução (não soube).

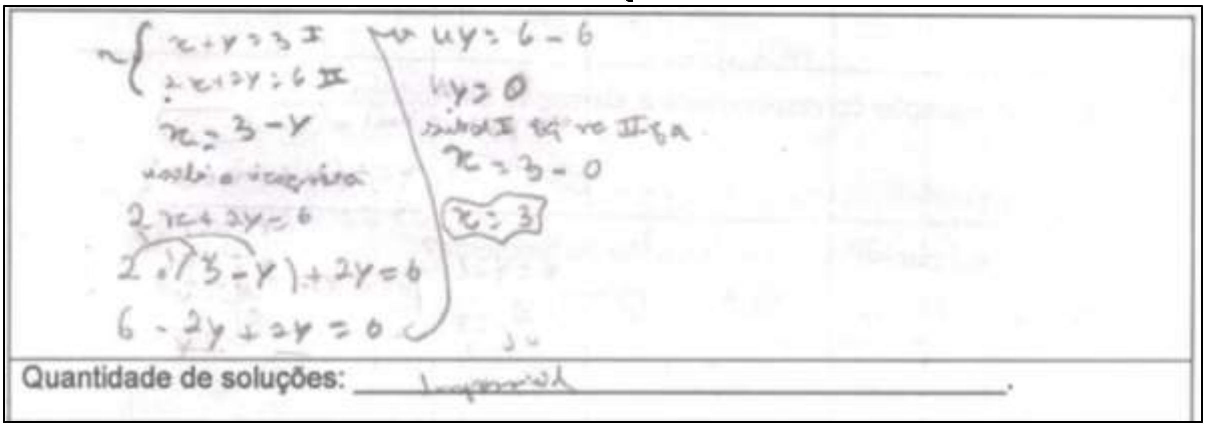
Tabela 2 - Classificação das respostas dadas à questão 3

Etapa do Ensino Básico	**8º ano – Ensino Fundamental II**			**2º ano – Ensino Médio**		
Itens	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(a)**	**(b)**	**(c)**
Satisfatórias	*33,0%*	*42,0%*	*25,0%*	76,0%	62,0%	59,0%
Não Satisfatórias	25,0%	21,0%	33,0%	21,0%	35,0%	38,0%
Não Soube	42,0%	37,0%	42,0%	3,0%	3,0%	3,0%

Fonte: Dados da pesquisa

A imagem a seguir refere à resposta realizada por um aluno do 8º ano, considerada **não satisfatória**:

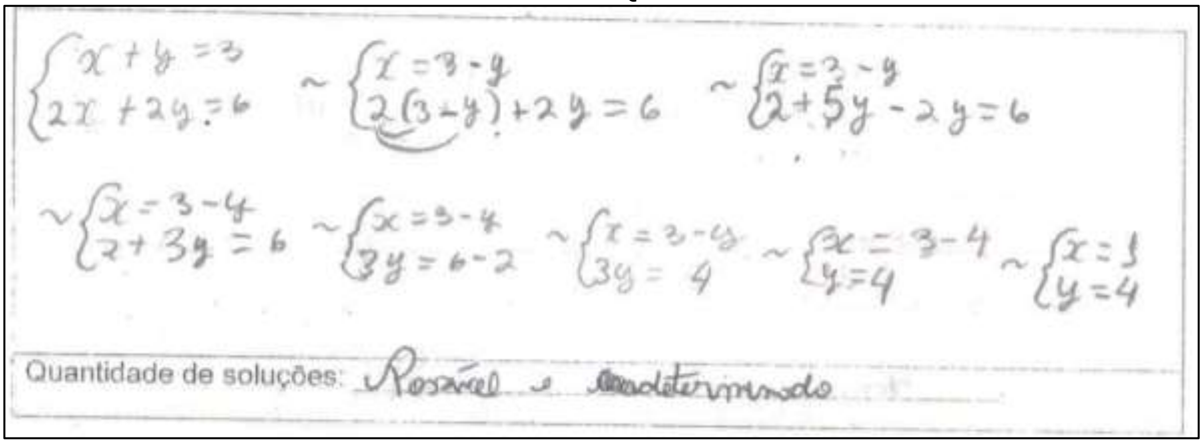
Recorte da Questão 3



Fonte: Resolução do aluno

Na próxima imagem, percebe-se que o aluno do 2º ano (Ensino Médio) cometeu erros semelhantes ao aluno do 8º ano, ao realizar *tratamentos*:

Recorte da Questão 3

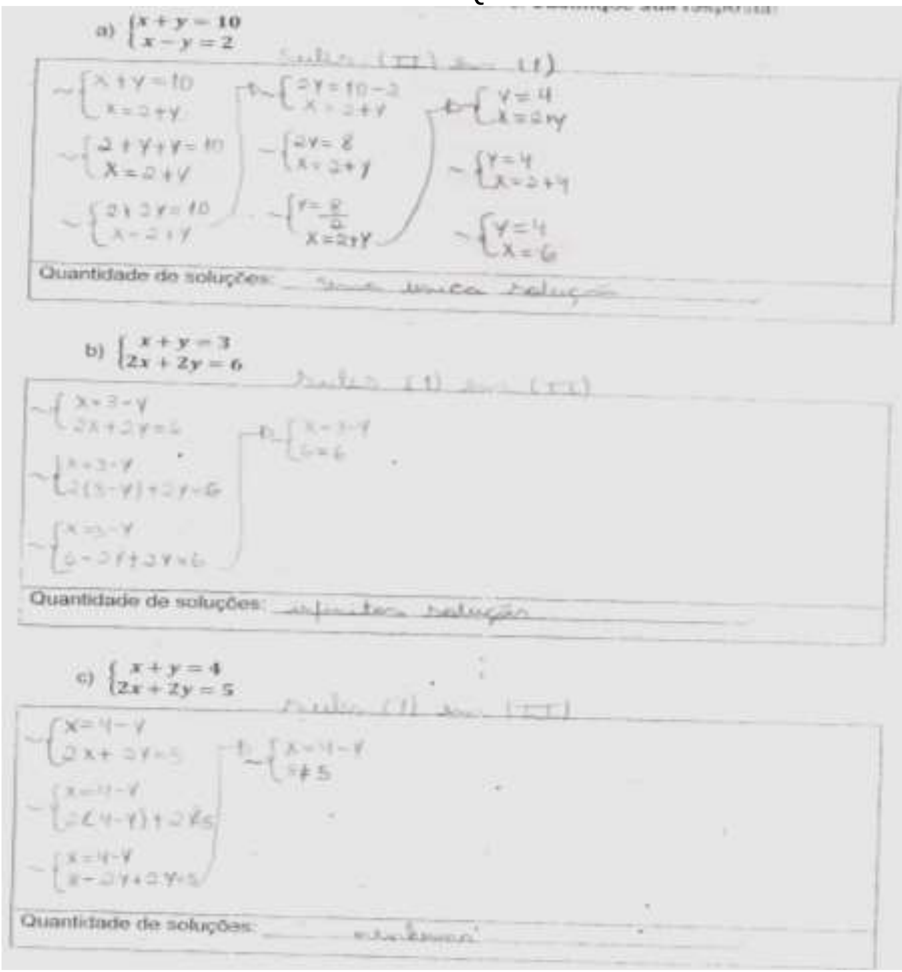


Fonte: Resolução do aluno

As dificuldades apresentadas pelos alunos se relacionam também com o processo tardio de introdução da Álgebra no Ensino Básico, como já foi discutido na **Introdução** deste trabalho. Conforme Teles (2004), o ensino tardio da Álgebra está relacionado com o surgimento de dificuldades conceituais no processo de construção do conhecimento matemático. Durante a análise da questão (3), foi possível verificar que o erro apresentado pelo aluno do Ensino Fundamental II continuou a ocorrer no Ensino Médio, mesmo em menor quantidade (Imagens: Recorte da Questão 3).

Os alunos que não apresentaram esse tipo de dificuldade conseguiram desenvolver todos os itens da referida questão, como pode ser visto na imagem a seguir.

Recorte da Questão 3



a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Quantidade de soluções: uma única solução

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Quantidade de soluções: infinitas solução

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$

Quantidade de soluções:

Fonte: Resolução do aluno

As dificuldades encontradas pelos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem da Matemática relacionam-se diretamente com obstáculos que não foram superados em etapas anteriores, que dificultaram ou não permitiram a apreensão de conceitos e interferem na sequência didática de ensino.

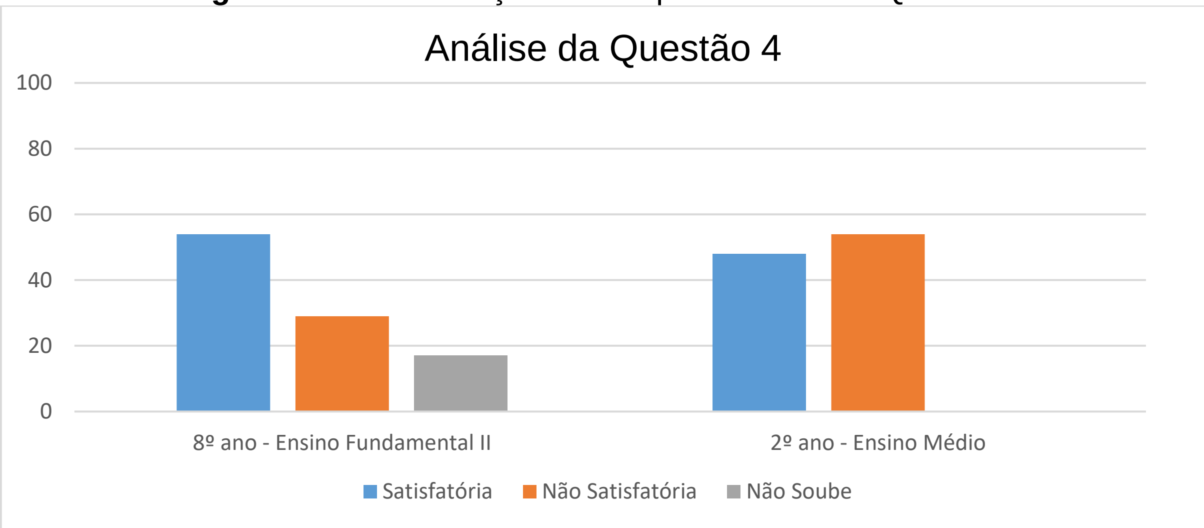
3.2.4 Questão 4 – Apropriação de Conceito

4) Descreva com suas palavras o que você entende por **incógnita**.

O objetivo desta questão 4 foi analisar o conhecimento dos alunos sobre o significado conceitual dos símbolos utilizados nas *representações algébricas* das *equações* e dos *sistemas de equações*. Segundo Duval (2013), a autonomia nos gestos próprios da atividade matemática é condição necessária para a apreensão dos conceitos. Por isso, a intenção foi analisar o desenvolvimento da aprendizagem dos conceitos no decorrer da sequência didática, envolvendo a *conversão* dos *sistemas* semióticos de *equação* e *função*, que ocorre durante o procedimento de *conversão* da *representação simbólica* para a *representação geométrica* dos *sistemas lineares*.

Essa questão obteve maior proporção das respostas satisfatórias na turma do Ensino Fundamental II, ao mesmo tempo em que, na turma do Ensino Médio, não ocorreu nenhum caso sem solução, como pode ser analisado na figura a seguir:

Figura 25 - Classificação das respostas dadas à Questão 4



Fonte: Dados da pesquisa

Na turma do 2º ano, o maior índice de respostas não satisfatórias refere-se, principalmente, a casos em que a definição de incógnita foi associada diretamente a "**x**" e "**y**", como:

Resposta do aluno D: "*Incógnita é representado por letras como x e y"*.

Resposta do aluno E: "*Números substituídos por x e y".*

Em algumas respostas, foi possível perceber uma associação da definição de *incógnita* à definição de *variável*, referindo-se a termos como: "letras que variam", "símbolos que têm valores variáveis". Isso pode ter ocorrido porque o estudo de funções é realizado com maior ênfase durante o Ensino Médio, e as metodologias adotadas por muitos professores contribuem para o surgimento de lacunas conceituais, como associar incógnita e/ou variável a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

As respostas transcritas a seguir são de alunos do 8º ano, apesar de algumas deficiências no vocabulário (o que pode ser associado à imaturidade científica), é possível notar que existe entendimento do que é *incógnita*:

Resposta do aluno F: "*É um número desconhecido que é representado por uma letra*";

Resposta do aluno G: *"Incógnita é um valor desconhecido que é representado por letras"*.

É possível notar que incógnita é associada a um valor numérico fixo em ambas as soluções.

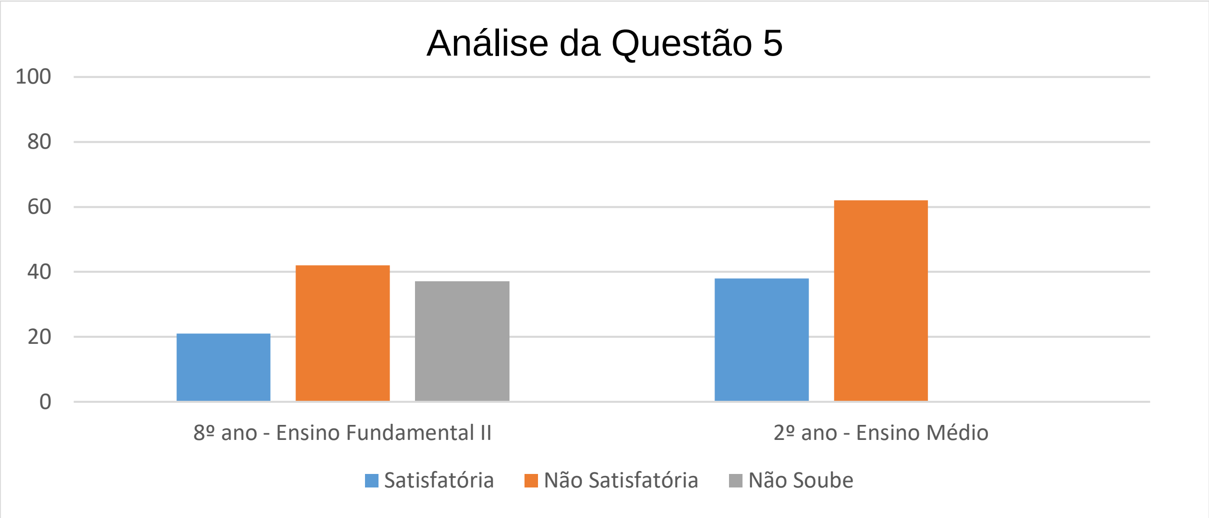
3.2.5 Questão 5 – Apropriação de Conceito

5) Descreva com suas palavras o que você entende por **variável**.

O objetivo dessa questão foi verificar se os alunos entendiam a *variável* como símbolo algébrico utilizado para representar qualquer um dos elementos numéricos de um *conjunto*. O conceito de variável pode ser explorado a partir de diferentes tipos de *representações* do *sistema linear*, como na *Representação Simbólica* das funções associadas às expressões do sistema e na *Representação Geométrica* das referidas funções. Desta maneira, a sequência didática de *conversão* do *sistema semiótico* pode favorecer de maneira significativa a apreensão do conceito de variável.

A proporção da classificação das respostas apresentadas à questão (5) está expressa na figura a seguir.

Figura 26 - Classificação das respostas dadas à Questão 5



Fonte: Dados da pesquisa

Os alunos do 8º ano apresentaram maior proporção da classificação **não soube**, e o principal motivo está associado ao fato de estarem começando a realizar tratamentos, *conversões* e outras ações matemáticas que podem possibilitar a apreensão desse conceito. A sequência didática envolvendo o processo de *conversão semiótica*, com diferentes *representações* do mesmo objeto, é a principal responsável pela correta aprendizagem dos conceitos. Algumas respostas dos alunos do 8º ano, classificadas como **satisfatória**, foram:

Resposta do aluno H: *"Uma letra que não pode ter valor fixo, ou seja, pode ter vários valores"*;
Resposta do aluno I: *"É quando possui vários números para a letra"*.

As respostas **satisfatórias** da turma do 2º ano foram todas semelhantes à seguinte: "*letra (símbolo) que varia o valor*". As respostas **não satisfatórias** referiam, principalmente, à associação da definição de *variável* à definição de *incógnita*, como também já foi apresentado durante a análise da questão 4.

A *situação didática* do processo de ensino-aprendizagem sobre *sistemas lineares* e sobre outros conteúdos, com a exploração dos objetos a partir de diferentes *representações,* possibilita a apreensão dos conceitos de incógnita, variável e outros elementos envolvidos, assim como instiga a investigação a respeito de objetos que não são diretamente acessíveis.

3.2.6 Questão 6 – Classificação do Sistema Linear (2x2) e Conversão do Sistema de Representação.

6) Utilizando a tabela atribua valores para o símbolo x e encontre o respectivo valor numérico de y, ou vice-versa, atribua para y e encontre x. Marque os pares ordenados (x, y) de cada sistema em cada um dos planos cartesianos referentes às alternativas. Represente graficamente cada *sistema de equações* da questão anterior considerando os seguintes conjuntos:

A) Números inteiros

B) Números reais

a)

x	$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

x	$x - y = 2 \Rightarrow -y = 2 - x \Rightarrow y = x - 2$

⋮

Cada gráfico representa que tipo de figura com números inteiros e com números reais? ______________________________; ________________________________

As retas possuem ponto(s) em comum?___________________________________

Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?_________

Qual a classificação deste sistema? ______________________________________

b)

x	$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

x	$2x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = 6 - 2x \Rightarrow y = \dfrac{6 - 2x}{2}$

⋮

As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ___________________________________

c)

x	$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

x	$2x + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 2x \Rightarrow y = \frac{5 - 2x}{2}$

⋮

As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

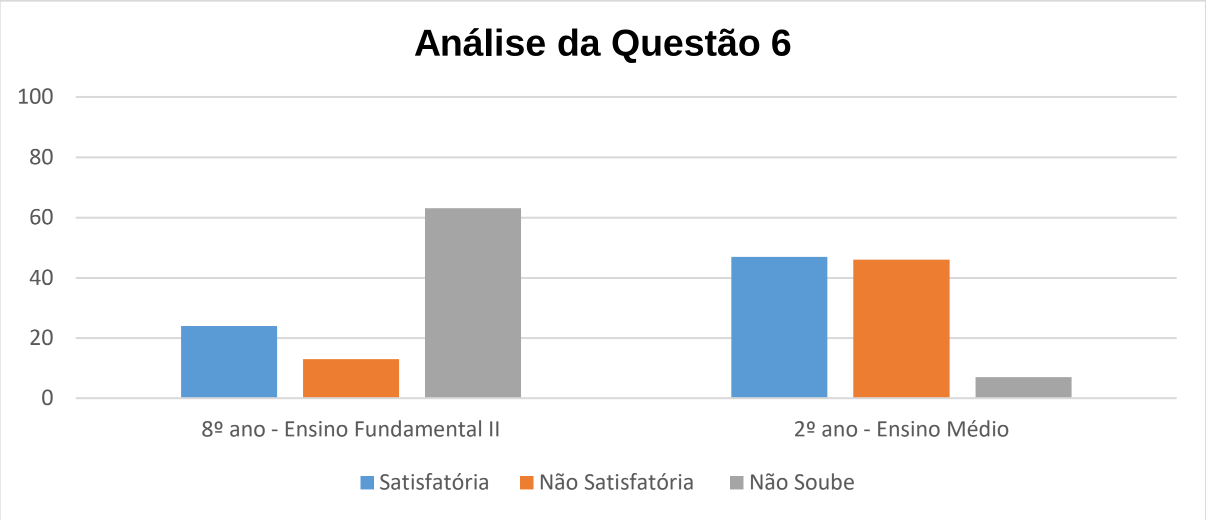
Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ___________________________________

O objetivo desta questão 6 foi analisar a *conversão* da *representação* das expressões do *sistema*. A tabela presente em cada alternativa realça as *operações de equivalência* aplicadas nas expressões, onde o objeto *equação* é equivalentemente expresso como *função* e, assim, a incógnita é convertida para variável, respectivamente.

A proporção da classificação das respostas pode ser analisada na figura (27), 63% dos alunos do 8º ano não responderam a referida questão, 13% cometeram erros ao realizar os *tratamentos* com as expressões ou marcaram incorretamente os *pontos cartesianos* referentes aos pares ordenados. Na turma do 2º ano (Ensino Médio), apenas 7% dos alunos não efetuaram a resolução e 46% também cometeram erros ao realizar as operações ou marcaram incorretamente os *pontos cartesianos* referentes aos pares ordenados.

Figura 27 - Classificação das respostas dadas à Questão 6

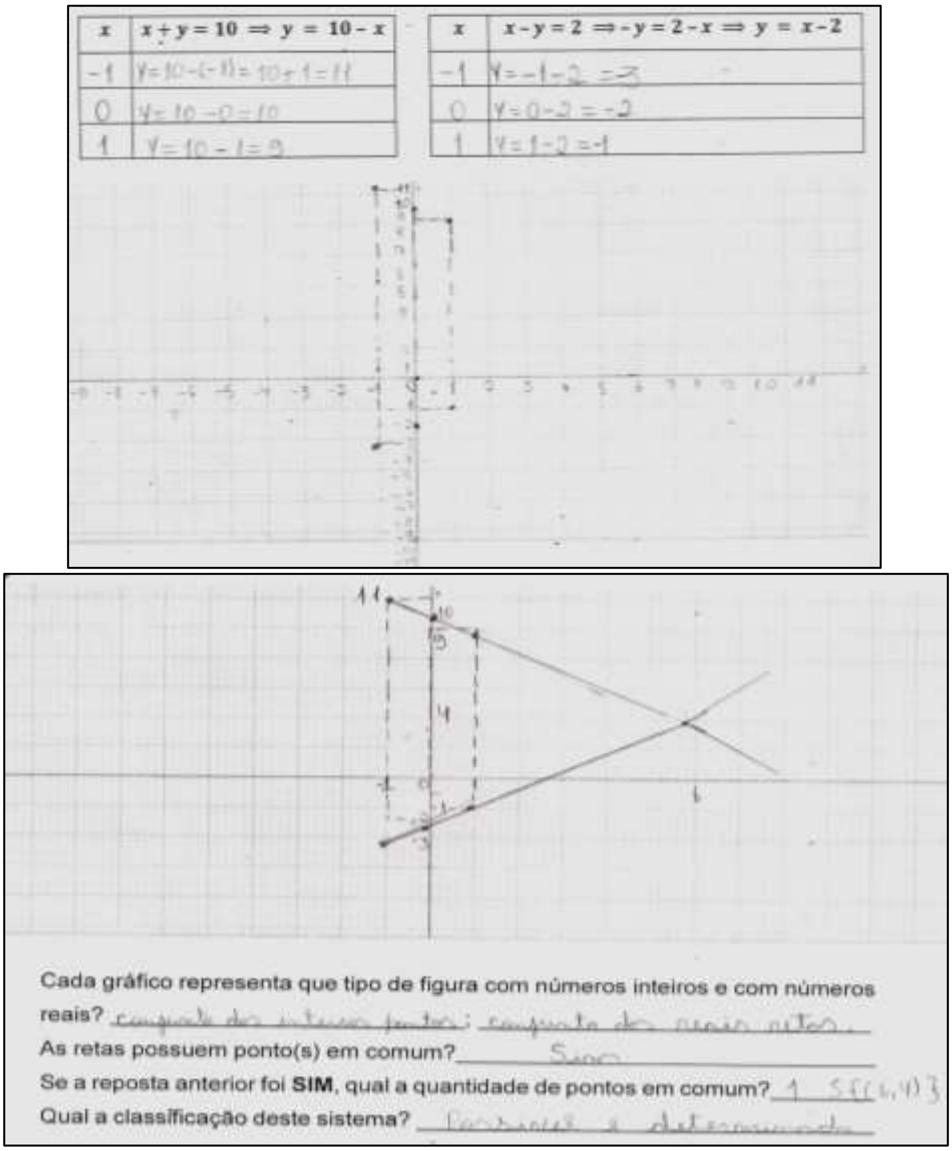


Fonte: Dados da pesquisa

O número de alunos do 8º ano que não apresentaram solução para a questão 6 está associado à falta de habilidade em realizar esse tipo de *representação*, uma vez que esse momento da oficina concretizou como obstáculo didático, principalmente, ao apresentar novas informações. De acordo com o questionário de sondagem (Apêndice H) realizado com a turma, a única atividade realizada pelos alunos sobre o plano cartesiano foi a marcação de pontos com coordenadas inteiras, e eles foram enfáticos em dizer que nunca haviam utilizado nenhum software em sala de aula. Dessa maneira, vale considerar que, para ocorrer estabilização das novas informações e construção do conhecimento, torna-se necessária a realização contínua das *situações didáticas*.

As figuras a seguir (Recorte 6 – a) referem-se a duas soluções (item a) consideradas **satisfatórias**, turma do 8º ano (Ensino Fundamental II) e 2º ano (Ensino Médio), respetivamente.

Recorte da Questão 6 (a)



x	$x+y=10 \Rightarrow y=10-x$
-1	Y=10-(-1)=10+1=11
0	Y=10-0=10
1	Y=10-1=9

x	$x-y=2 \Rightarrow -y=2-x \Rightarrow y=x-2$
-1	Y=-1-2=-3
0	Y=0-2=-2
1	Y=1-2=-1

Cada gráfico representa que tipo de figura com números inteiros e com números reais? conjunto dos inteiros pontos; conjunto dos reais retos.

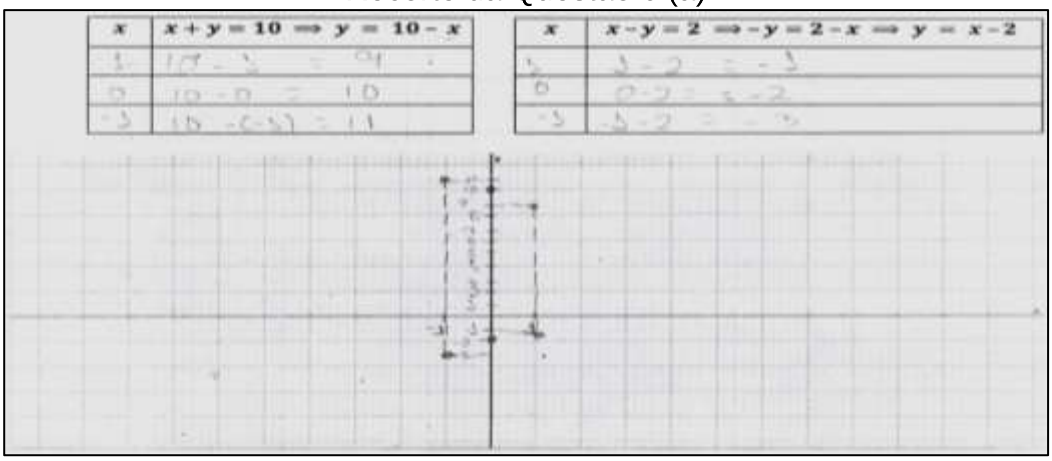
As retas possuem ponto(s) em comum? Sim

Se a reposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum? 1 S{(6,4)}

Qual a classificação deste sistema? Possível e determinado

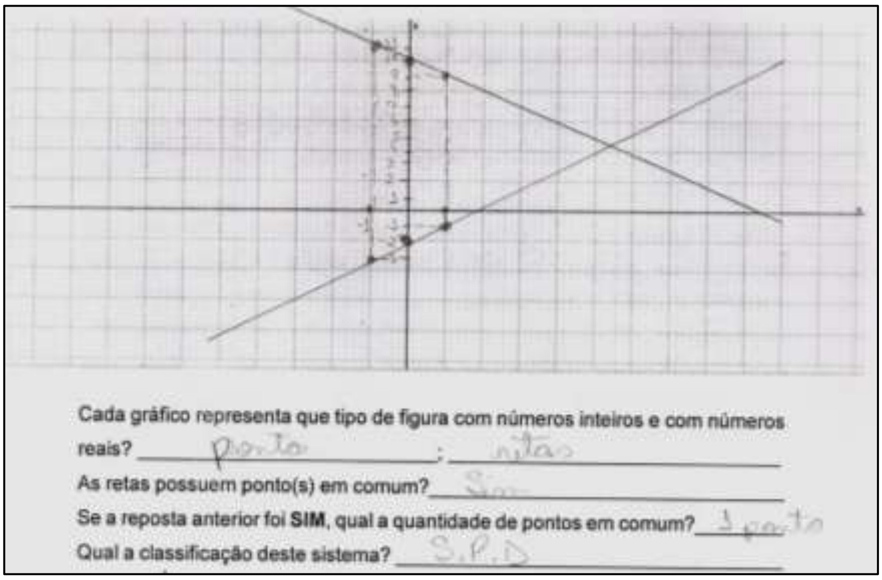
Fonte: Resolução do aluno

Recorte da Questão 6 (a)



x	$x+y=10 \Rightarrow y=10-x$
1	10 - 1 = 9
0	10 - 0 = 10
-1	10 -(-1) = 11

x	$x-y=2 \Rightarrow -y=2-x \Rightarrow y=x-2$
1	1 - 2 = -1
0	0-2 = -2
-1	-1-2 = -3



Fonte: Resolução do aluno

Durante a construção dos gráficos referentes às *funções* associadas às *equações* do *sistema linear*, ocorreu a *conversão* do *sistema semiótico* (*simbólico – figural*) e, segundo Duval (2013), é nesse processo que se dá a apropriação de conceitos e a construção significativa do conhecimento, uma vez que a aprendizagem conceitual do objeto não está associada à sua representação. Esse tipo de *situação didática* possibilita a autonomia dos educandos, instigando diferentes aplicações do conhecimento científico e a formação do sujeito crítico.

3.2.7 Questão 7 – Resolução Justificada do Sistema Linear (3x3) - Operações de Equivalência

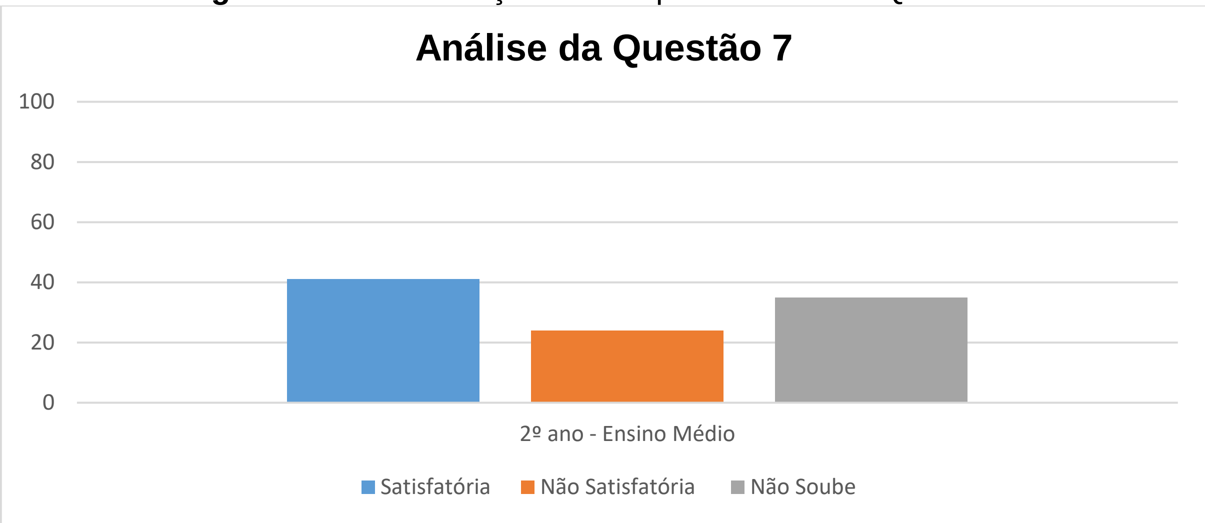
7) (Adaptação: ANTON; RORRES, 2001) Resolva o *sistema de equações lineares* utilizando *operações de equivalência* nas *equações* do *sistema*. **Justifique.**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

A aplicação desta questão 7 ocorreu somente na turma do 2º ano (Ensino Médio). O objetivo foi analisar a autonomia e o domínio dos tratamentos realizados no processo de resolução do *sistema linear* (*3x3*), a partir da utilização de *operações de equivalência*.

Ao analisar as soluções apresentadas, foi notável o êxito dos alunos que participaram das atividades desenvolvidas durante a oficina. Esses alunos realizaram a produção de sistemas equivalentes até que a *solução* do *sistema* pudesse ser trivialmente visualizada. Alguns cometeram erros de operação durante o processo, o que inviabilizou a produção do *conjunto solução* e de uma resposta satisfatória. A figura (28) apresenta a proporção da classificação das respostas dadas a essa questão, em um total de 29 alunos.

Figura 28 - Classificação das respostas dadas à Questão 7

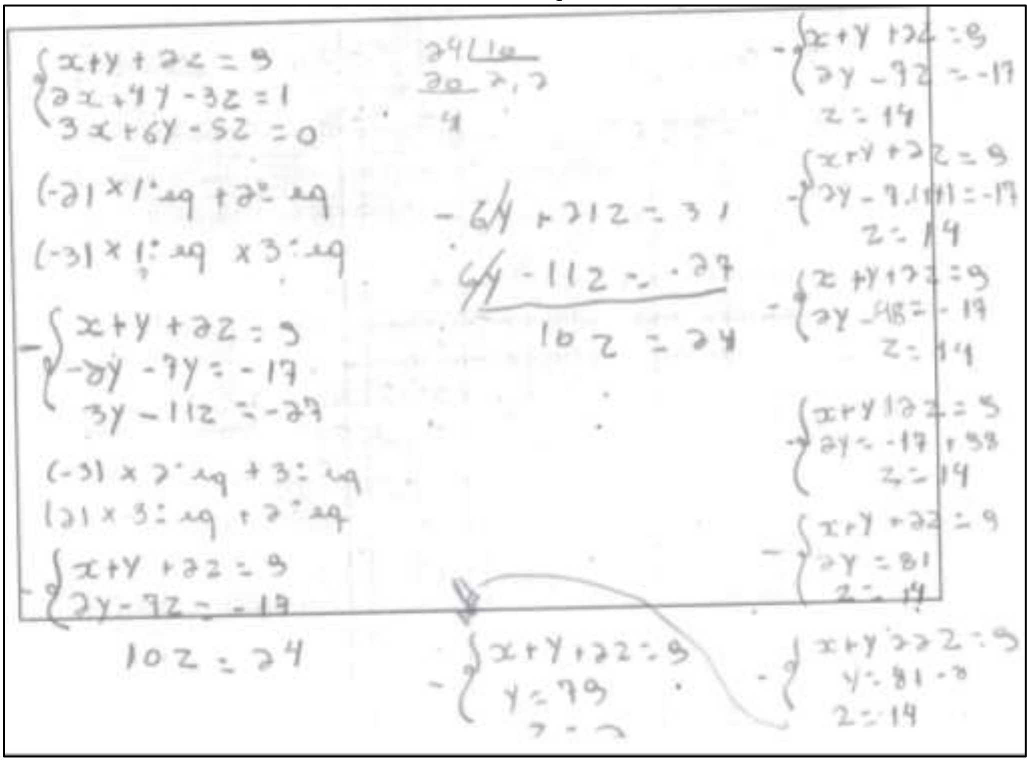


Fonte: Dados da pesquisa

A proporção de casos classificados como **não soube** pode se associar, mesmo que em parte, à quantidade de alunos que não participaram das aulas, não demonstraram interesse em realizar as atividades e, consequentemente, comprometeram o desenvolvimento da sua aprendizagem.

Um exemplo de resposta classificada como **não satisfatória**, foi:

Recorte da Questão 7



Fonte: Resolução do aluno

Na primeira "equivalência", ao multiplicar a *1ª equação* por (*-2*) e somar com a *2ª equação*, o aluno cometeu erro de operação e escreveu a equação:

$\boldsymbol{-2y - 7y = -17}$,

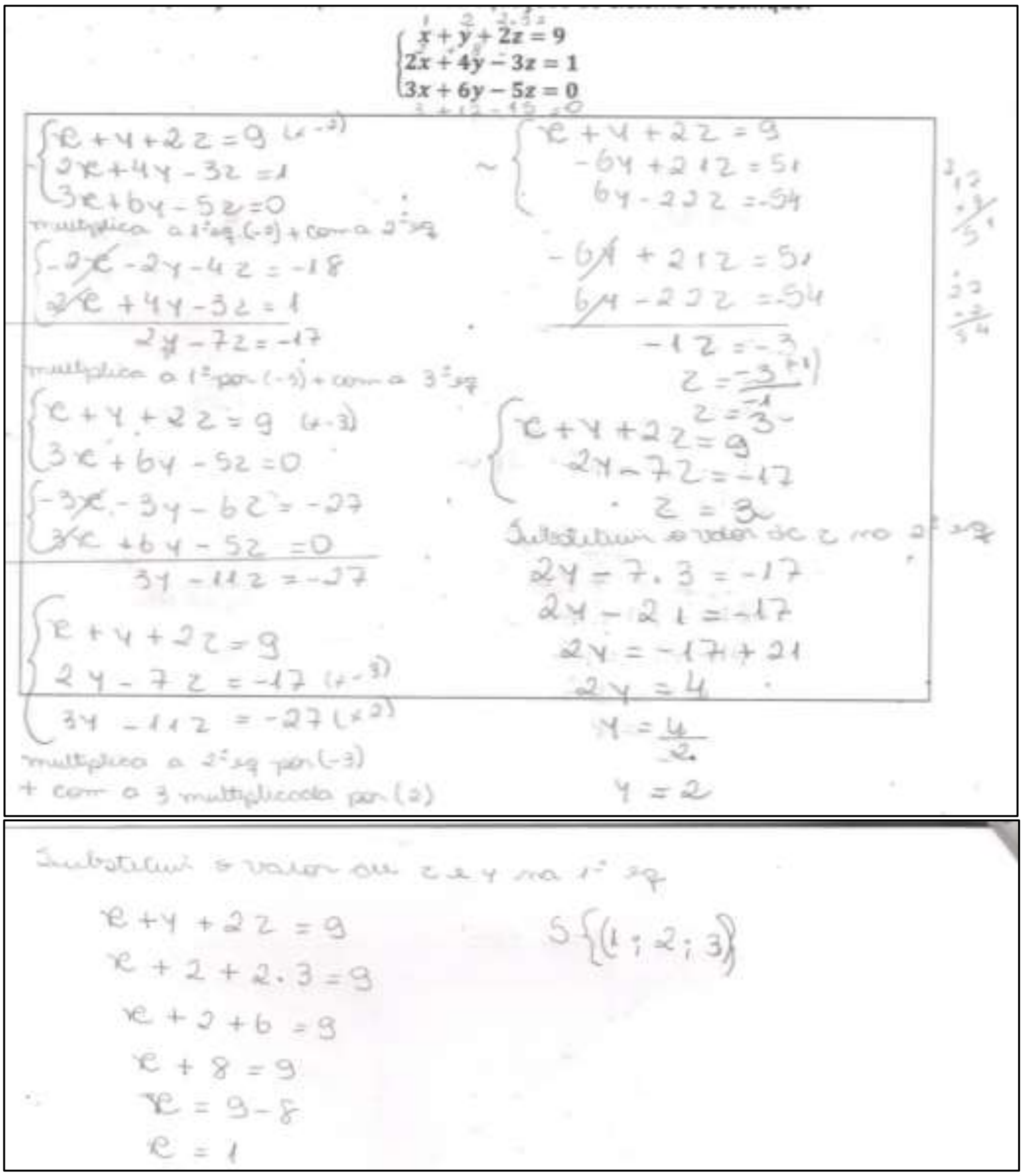
seria:

$\boldsymbol{2y - 7z = -17}$,

na sequência, o aluno escreveu $\boldsymbol{z}$ no lugar de $\boldsymbol{y}$ (corrigindo o erro de troca dos símbolos), mas continuou a apresentar erros nas operações, encontrando uma solução incorreta. As outras respostas **não satisfatórias** tiveram erros semelhantes a esse.

A resposta do aluno (J) foi considerada satisfatória, o aluno realizou todo o processo de resolução de maneira justificada:

Recorte da Questão 7



Fonte: Resolução do aluno

Nesses procedimentos de resolução o aluno participou de todas as etapas e passagens, construindo sequências de *sistemas equivalentes* e encontrando a solução. Os procedimentos mecânicos de resolução do *sistema linear* (exemplos: *Resolução Matricial* e R*egra de Cramer*) não possibilitam a participação do estudante e não contribuem para uma justificativa dos *tratamentos* envolvidos.

3.2.8 Questão 8 – Resolução Justificada do Sistema Linear (3x3) – Operações de Equivalência

8) (Adaptação: IMPA – PAPMEM 2013) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 7y + 3z = 7 \end{cases}$$

Mostre, através de operações de equivalência, que o sistema é *possível e indeterminado* e dê duas *soluções* do sistema. (Observe que estas soluções podem representar *pontos* do $\mathbb{R}^3$). **Justifique.**

Nessa questão, os alunos deveriam resolver o *sistema* a partir da realização de *operações elementares,* como método de demonstração da classificação (SPI). Apesar de ser semelhante à questão (7), o número de pessoas que não responderam foi maior do que no caso anterior, como se pode observar na tabela (3). O fato de solicitar a demonstração "mostre" pode ter contribuído para alguns alunos não tentarem a resolução, negando a sua própria capacidade.

Tabela 3 - *Classificação das respostas dadas à questão 8*

Etapa do Ensino Básico	2º ano – Ensino Médio
Satisfatórias	21,0%
Não Satisfatórias	21,0%
Não Soube	58,0%

Fonte: Dados da pesquisa

Questões como essa são fundamentais durante o processo de ensino-aprendizagem, pois colaboram para o aluno ter consciência dos *tratamentos* realizados durante a resolução, bem como para participar da construção de demonstrações e provas, obtendo a autonomia necessária para esse tipo de trabalho (Duval, 2013). Após a realização da demonstração, o aprendiz irá realizar o *tratamento* com os símbolos, encontrando *ternos ordenados* pertencentes ao *conjunto solução*.

O cálculo da *solução* pode ser analisado nos procedimentos realizados pelo aluno (K) e pelo aluno (L), apresentados a seguir:

Recorte da Questão 8

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + 3y - z = 1 \\ 3x + 7y + 3z = 7 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y - 3z = -2 \\ -2y + 6z = 4 \end{cases}$$

1ª Eq (-1) + 2ª Eq

$$\begin{array}{r} -\cancel{x} - 2y - 2z = -3 \\ \cancel{x} + 3y - z = 1 \\ \hline y - 3z = -2 \end{array}$$

2ª Eq (2) + 3ª Eq

$$\begin{array}{r} \cancel{2y} - \cancel{6z} = -4 \\ -\cancel{2y} + \cancel{6z} = 4 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

2ª Eq (-3) + 3ª Eq

$$\begin{array}{r} -3\cancel{x} - 9y + 3z = -3 \\ 3\cancel{x} + 7y + 3z = 7 \\ \hline -2y + 6z = 4 \end{array}$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y - 3z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$z = 1$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y - 3z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$y - 3z = -2$

$y - 3 \cdot 1 = -2$

$y = -2 + 3$

$\boxed{y = 1}$

$x + 2y + 2z = 3$

$x + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$

$x + 2 + 2 = 3$

$x = 3 - 2 - 2$

$\boxed{x = -1}$

$S = \{(-1, 1, 1)\}$

$z = 2$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ y - 3z = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$y - 3z = -2$

$y - 3 \cdot 2 = -2$

$y = -2 + 6$

$\boxed{y = 4}$

$x + 2y + 2z = 3$

$x + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 3$

$x + 8 + 4 = 3$

$x = 3 - 8 - 4$

$\boxed{x = -9}$

$S = \{(-9, 4, 2)\}$

Coordenadas dos *pontos* do $\mathbb{R}^3$: $(-1, 1, 1)$; $(-9, 4, 2)$.

Fonte: Resolução do aluno

3.3 Análise dos Questionários de Sondagem

3.3.1 Questionários Realizados com os Alunos

Após realização da oficina, ocorreu a aplicação de questionários de sondagem nas duas turmas (Apêndice H: 8º ano – Ensino Fundamental; Apêndice I: 2º ano – Ensino Médio), com o objetivo de analisar a utilização das Tecnologias Digitais (TD) como recurso metodológico do processo de ensino-aprendizagem, especificamente, o software Geogebra.

O questionário realizado com a turma do Ensino Fundamental II (24 alunos) possibilitou certificar que todos os alunos daquela turma já haviam realizado atividades envolvendo o *plano* cartesiano. No entanto, os estudos se referiam somente à *representação geométrica* de *pares ordenados* com coordenadas inteiras e, além disso, todos os alunos afirmaram "***não***" ao questionamento: "***utilizou ou utiliza algum software com os professores na escola? Se sim, quais?***". Portanto, o Geogebra foi uma ferramenta inovadora na sala, a despeito de a escola não possuir recursos suficientes para que os alunos explorassem as ferramentas e R*epresentações Virtuais*.

Na turma do Ensino Médio (2º ano – 29 alunos), aproximadamente 72% dos estudantes (21 alunos) afirmaram que já haviam utilizado o software Winplot em sala de aula (ano de 2018), efetuando a *representação gráfica* de *funções exponenciais* e *funções logarítmicas* (*plano cartesiano*). Ao serem questionados sobre a utilização do software Geogebra para *Representação Geométrica Virtual* das *funções* associadas às expressões do *sistema linear* (*2x2*), os alunos afirmaram, de maneira veemente, a importância da metodologia dinâmica e a precisão da representação dos gráficos, como se pode observar nos exemplos a seguir:

Exemplo 1: "*Em minha opinião, o uso de recursos virtuais como parte do processo de ensino é algo ótimo! Pois, com o uso de softwares como esse é possível aprender de forma dinâmica e descontraída. Além do fato de que com o software pode-se obter resultados com exatidão";*

Exemplo 2: *"A experiência o uso do software foi muito gratificante e cheio de aprendizado. Sim* (considero interessante)*, pois não conseguiríamos ter a mesma* *precisão se fosse feito no caderno e o software proporcionou isso, uma imagem nítida, com todos os pontos e retas"*.

Além disso, todos responderam que nunca haviam trabalhado com a *Representação Geométrica* no *espaço cartesiano* (*tridimensional* - $\mathbb{R}^3$). Os comentários a respeito da utilização do Geogebra para *Representação Virtual* das *funções* associadas às expressões do *sistema* (*3x3*) foram semelhantes aos seguintes exemplos expressos por alguns alunos (questão 5):

Exemplo 3: *"O sistema linear 3x3 foi uma grande descoberta, foi incrível, a princípio não conseguir ver todos os pontos, mas com o movimento de translação e rotação conseguir ver 'todos' os pontos e retas, e também ver uma imagem diferente"*;
Exemplo 4: *"É algo que facilita 'na' aprendizagem e, nos ajuda bastante a compreender o conteúdo citado"*;
Exemplo 5: *"*[...] *é mais prático e mais rápido"*.

No último item do questionário (questão 6): **"Considera que o software Geogebra (enquanto recurso para *representação geométrica – virtual*) favorece a construção do conhecimento sobre *sistemas lineares*? Por quê?"**, todos responderam **sim**, e algumas justificativas foram:

Exemplo 6: *"Com o software eu percebi com mais nitidez a intersecção de retas e 'dá' uma visão mais clara e ampla dos pontos, eixos e retas"*;
Exemplo 7: *"Pois o uso do software, além de ser 'bem' mais interativo, também facilita a aprendizagem pelo fato de que a representação virtual é 'bem' mais exata do que um desenho no quadro"*;
Exemplo 8: *"Favorece bastante a esclarecer algumas dúvidas* [...]*"*;

Outros alunos comentaram sobre a mudança do processo tradicional de ensino:

Exemplo 9: *"Aprender algo 'novo' de forma 'nova', com a utilização do computador em sala de aula nos mostrou uma 'nova visão' diferente em relação aos sistemas lineares* [...]*"*;
Exemplo 10: *"Pois nos ajuda a conhecer um pouco sobre informática"*.

Com isso, nota-se a importância do uso do Geogebra na sala de aula, enquanto recurso tecnológico para facilitar e inovar o ensino, sempre em acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs – Brasil, 1998), os quais destacam que: é necessário que os alunos sejam conduzidos na compreensão da importância do uso e aplicação da tecnologia e que sejam instigados a acompanhar a sua permanente evolução.

3.3.2 Questionário Realizado com os Professores

A pesquisa de intervenção provoca questionamentos no processo de ensino-aprendizagem dos ambientes envolvidos. Segundo Gamboa (2013), deve existir uma dialética entre sujeito e objeto, com procedimentos que delimitam um percurso de ida e volta, ou seja, iniciando pelo ponto de partida e configurando as etapas e os objetos de maneira a retornar a esse mesmo ponto. Tais aspectos ratificam as pesquisas de Pimenta (2002) sobre um ensino de processo contínuo e reflexivo entre teoria e pratica.

Dessa maneira, foi realizado o questionário de sondagem com os professores (um professor da escola do Ensino Fundamental II e quatro professores da escola do Ensino Médio), com a intenção de averiguar a respeito dos impactos provocados pela pesquisa, principalmente sobre o uso do software Geogebra, como recurso metodológico virtual. (Questionário – Apêndice J).

Dos 5 professores, somente um não possui Licenciatura em Matemática (é licenciado em Física), no entanto, esse grupo de docentes trabalha com as disciplinas: Matemática, Física e Geometria. Ao responderem a questão (3) do questionário (***"comente a respeito do uso da tecnologia como ferramenta metodológica"***), todos foram enfáticos em considerar importante a sequência didática envolvendo recursos tecnológicos, todavia, alguns ressalvaram sobre a indisponibilidade dos recursos na escola pública. Os exemplos a seguir referem-se às respostas de dois professores:

Professor A: *"O uso da tecnologia é uma ferramenta indispensável no processo de ensino aprendizagem, através dela os alunos se tornam mais dinâmicos e consequentemente desperta o interesse"*;
Professor B: *"O uso da tecnologia como ferramenta metodológica faz-se necessário, pois a tecnologia faz parte do contexto atual* [...]*";*

Professor C: *“Em meio a sociedade que vivemos não tem como escapar da tecnologia, por isso é muito importante a ter como aliada. No entanto, a nossa realidade é bem diferente, as escolas públicas não dão o devido suporte, pois não têm computadores, e quando têm, não apresentam a devida manutenção”*.

Percebe-se que os professores envolvidos consideram importante o uso da tecnologia, por favorecer a organização das *situações didáticas* e propiciar o conhecimento significativo a partir da relação entre atualidades e contexto escolar. Também relataram conhecer o software Geogebra e destacaram ser importante o seu uso durante o ensino aprendizagem sobre sistemas lineares, como expresso na resposta a seguir:

Professor C: *“É interessante o uso do Geogebra, por se tratar de um software de geometria dinâmica, que possibilita ir além do quadro e do papel. Principalmente, no caso dos sistemas lineares de 3 incógnitas”*.

Apesar de não relatarem conhecimento sobre o processo de *conversão* dos *sistemas semióticos*, os professores consideraram importante o recurso virtual como artifício de *Representação Geométrica*. Assim, é importante garantir a realização da docência a partir da aplicação de *sequências didáticas* coerentes com os aspectos cognitivos de construção do conhecimento (TRRS – Duval, 1993).

A última pergunta do questionário (Apêndice J) foi sobre a intenção de utilizar o software Geogebra como recurso metodológico no processo de ensino-aprendizagem. Os 5 professores responderam que pretendem utilizar o Geogebra e dois acrescentaram os seguintes comentários:

Professor C: *“Nunca utilizei o Geogebra em sala de aula, principalmente pela falta de suporte das escolas que trabalho, como também pela minha formação, pois apenas participei de um curso na época de faculdade. No entanto, pretendo sim utilizar, por meio de um aplicativo no celular, o que facilita o acesso pelos alunos”*;
Professor D: *“Em alguns casos de funções físicas pretendo utilizar o programa para melhor exibição da representação daquela função”*.

Segundo Brousseau (2008), o processo de mediação da construção do conhecimento, realizado pelo professor (por exemplo), envolve a criação de um dispositivo que irá controlar e/ou permitir esse processo. Ainda de acordo com o autor, o dispositivo abrange os objetos (recursos, representações, etc.) e as “regras de interação” com o mesmo, assim, a mediação do conhecimento só produzirá real efeito de ensino se ocorrer o funcionamento e o desenvolvimento desse dispositivo. Esta relação entre o aparelho e as regras de funcionamento pode ser associada às *situações didáticas*, nas quais o professor utiliza recursos (semióticos e físicos) que possibilitam o acesso aos conteúdos, assim como estabelecem as *sequências didáticas* de contato e exploração do conhecimento científico. Isso ratifica a discussão do presente trabalho em relação à importância e à necessidade da *conversão* das *Representações Semióticas* no processo de ensino-aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, de acordo com o referencial teórico, desenvolveu-se a análise do ensino integrado de Matemática, Aritmética, Álgebra e Geometria, com ênfase no processo de *Conversão Semiótica* enquanto meio imprescindível para a apreensão de conceitos, assim como para a assimilação dos conceitos correlatos em diferentes áreas do conhecimento.

O objetivo da pesquisa consistiu em verificar a receptividade dos alunos em relação aos métodos e recursos metodológicos diferenciados e o processo de ensino-aprendizagem de maneira participativa. Assim, possibilitou a superação de procedimentos unicamente mecânicos, estimulando a formação autônoma científica significativa, com a superação de obstáculos. Além disso, enfatizou a relação conhecimento científico e conhecimento técnico, considerando a escola como espaço de apresentação e exploração dos avanços tecnológicos e destacando que o período de “advento dos computadores veio abrir caminho para novas técnicas” (LIMA - RPM 23, 1993, p. 4).

Empenhou-se na construção da sequência didática para o ensino-aprendizagem sobre *Sistemas Lineares* (*2x2* e *3x3*) no Ensino Básico, sobretudo, no 8º ano do Ensino Fundamental II e no 2º ano do Ensino Médio. Dentre as teorias da Didática da Matemática, fundamentou-se, principalmente, na *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* (*TRRS*), do filósofo, psicólogo e didático francês Raymond Duval (1937-) e nos obstáculos epistemológicos, de Gaston Bachelard (1884-1962). Assim, se comprometeu em elucidar a questão matriz deste trabalho: **Quais as contribuições e possibilidades do ensino interdisciplinar para apreensão de conceitos sobre *Sistemas Lineares* (*2x2* e *3x3*) e introdução à Álgebra no Ensino Básico?**

Para tanto, realizou-se, inicialmente, a análise do processo de ensino-aprendizagem da Matemática e destacou-se o processo de escolha do livro didático pelas escolas, visto que isso reflete constantemente nas metodologias adotadas por muitos professores. O foco foi discutir sobre aspectos relativos ao processo de ensino, como a exposição de tópicos referentes à História da Matemática, a contextualização e a correta apresentação dos conceitos.

A realização deste trabalho possibilitou mudanças na prática escolar dos professores envolvidos (professor/pesquisador e professores colaboradores da pesquisa), com destaque para a necessidade de apresentação da Álgebra com fundamentos durante o processo de linearização do conhecimento, principalmente para a formação de conceitos em áreas correlatas, como Matemática, Física, Geometria, entre outras. Essa discussão contribuiu para perceber a incoerência da justificativa de que a Álgebra tem tardio ensino durante o Ensino Básico pelo fato da dependência da linguagem algébrica. Semelhantemente, ocorre o ensino mecânico de "fórmulas" durante o processo de educação matemática, reduzindo a Álgebra, simplesmente, à aplicação em outras áreas e, consequentemente, inviabilizando o desenvolvimento do pensamento algébrico.

As dificuldades apresentadas durante a introdução à Álgebra no Ensino Básico são consequências do modelo mecânico de ensino, baseado apenas na aplicação dessa Ciência às outras, o que corrobora com as pesquisas de Castro (2003, p. 6), ao destacar: "A mecanização de procedimentos na educação algébrica gera a sensação de que não existem dificuldades em seu aprendizado, o que determina problemas maiores nos últimos ciclos da escola básica". Assim, após realização do presente trabalho, os professores envolvidos começaram a desenvolver suas práticas escolares de maneira que um dos principais objetivos seja o desenvolvimento da autonomia do aluno no processo de construção do conhecimento. Justificando, também, o processo de resolução do *Sistema Linear* a partir da utilização das *operações elementares*, com participação e autonomia do aprendiz na geração de *sistemas equivalentes*.

As investigações e discussões sobre *Semiótica* permitiram mudanças didáticas significativas relacionadas à possibilidade de acesso aos objetos matemáticos e, principalmente, sobre processos essenciais à atividade cognitiva do pensamento. Além disso, foi possível perceber e considerar a importância da organização das sequências didáticas diante da superação dos obstáculos epistemológicos, de maneira que a construção do conhecimento ocorra a partir de um processo coerente e harmônico, principalmente em relação à conhecimentos construídos anteriormente.

O processo de *conversão* do *Sistema de Representação* possibilita a apreensão dos conceitos e, reciprocamente, a capacidade de mudança do *registro* indica a aprendizagem da Matemática, especificamente, o entendimento à introdução algébrica (DUVAL, 2013). Desta maneira, compreendeu-se que a articulação da

Álgebra com a Matemática, a Física e outras áreas, com fundamentos em teorias da Didática da Matemática, como a TRRS, possibilita o desenvolvimento do pensamento generalizável e abstrato, formando sujeitos críticos e instigando o pensamento científico.

A *Representação Geométrica* das *funções* associadas aos *Sistemas Lineares* (*2x2*) foi realizada a partir da *conversão* do *Sistema Semiótico Simbólico* para o *Sistema Semiótico Figural*, possibilitou articulação com a Geometria e superou o fato de que a simples exposição elementar sobre S*istemas Lineares* deixe de lado seu significado geométrico (LIMA, 1993). Nota-se que a construção dos gráficos no *Plano Cartesiano*, realizada manualmente, não apresenta a real precisão, por isso, a sequência didática planejada compreendeu o uso da exploração da *Representação Geométrica Virtual*, um tipo de *representação* inovadora, produzida com o recurso didático, o software Geogebra. Além disso, a utilização da *Representação Virtual* possibilitou realizar a *conversão Semiótica* (*Simbólica – Figural*) do *Sistema Linear* (*3x3*).

Os professores que participaram das atividades referentes ao presente trabalho puderam analisar que a utilização de recursos tecnológicos na prática docente atrai a participação dos alunos e possibilita a aprendizagem significativa, permitindo novas maneiras de comunicação e de representação e ampliando o conhecimento. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (BRASIL, 1998, p.20), existe a “necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação”.

Ainda sobre o uso da tecnologia como recurso metodológico, os PCNs (BRASIL, 1998, p.44) também destacam que “pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente, na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a diferentes ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros”. O uso do Geogebra como ferramenta metodológica da sequência didática empregada possibilitou um ensino aprendizagem interativo e dinâmico, com o emprego da *Representação Geométrica Virtual* (RGV) de *sistemas lineares* e a introdução ao uso da linguagem de programação (linguagem *java* - Geogebra). Isso tornou o ambiente de estudo diferenciado e atrativo, considerando os avanços tecnológicos da atualidade.

Além disso, o uso das Tecnologias Digitais (TD), através de *sequências didáticas*, amplia o campo de construção do conhecimento, permitindo a integração dos alunos ao mundo digital, possibilitando o acesso a recursos tecnológicos em contextos e realidades diferentes. Portanto, foi fundamental o processo de reconhecimento da classificação dos *sistemas* através da *Representação Virtual*, ampliando os questionamentos, hipóteses e testes, ratificando a apreensão dos conceitos e contribuindo para a formação do conhecimento científico, além de expandir o procedimento didático dos professores envolvidos, enriquecendo o processo de mediação da construção do conhecimento.

A construção virtual dos gráficos favorece o uso de outros tipos de linguagens e possibilita instigar a curiosidade sobre novos métodos de resolução da *equação* e do *sistema de equações*, principalmente os *métodos iterativos*, os quais ganharam acentuado desenvolvimento e aplicação neste período de avanços tecnológicos. Segundo Duval,

> De um ponto de vista cognitivo, os softwares trazem três grandes inovações. A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar "mentalmente" ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! É esta tripla inovação do ponto de vista cognitivo que gera o interesse e os benefícios pedagógicos dos ambientes informatizados no ensino de matemática. Do ponto de vista da formação, eles são absolutamente indispensáveis. (DUVAL, 2013, p.32)[12].

Portanto, reafirma-se que o estudo dos objetos matemáticos, a partir de tratamentos virtuais, proporciona novas possibilidades de exploração, além de ser fundamental para provocar a atração e motivação do aluno.

As atividades realizadas com as duas turmas (Ensino Fundamental II e Ensino Médio) contribuíram para discutir o tema da pesquisa e alertou para as mudanças e adaptações que devem existir no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, haja vista, as várias dificuldades operacionais apresentadas pelos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio com a Matemática Básica. Ademais, as atividades comprovaram a necessidade de utilização de sequências didáticas, envolvendo

[12] Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, 2015.

métodos inovadores e atuais, com o intuito de fomentar a participação do aluno e o desenvolvimento do instinto pesquisador.

Vale ressaltar que, conforme o questionário aplicado aos professores, eles ficaram entusiasmados com a utilização do software Geogebra enquanto recurso no processo educacional, no entanto, a principal barreira em relação ao uso deste recurso (e mesmo de outros) é a falta de suporte material das escolas, uma vez que não possuem computadores. Alguns professores comentaram sobre a possibilidade de utilização do software através do aplicativo de celular, que é mais acessível pelos alunos.

Por fim, é preciso lembrar também da importância do professor de Matemática empenhar esforços para a continuidade de sua formação em diferentes níveis: especialização, mestrado, curso de aperfeiçoamento presencial ou de educação à distância. A formação continuada do professor auxilia-o no processo de planejamento pedagógico e fornece conhecimento sobre teorias, referenciais pedagógicos e metodologias para a construção correta de sequências didáticas, que propiciam e favorecem a aprendizagem dos conceitos matemáticos e a construção do conhecimento.

O presente trabalho tem um caráter eminentemente interdisciplinar e, por assim o ser definido, possibilita desdobramentos que envolvem outras áreas do conhecimento, além da Matemática, como na área da Aritmética, da Álgebra, da Geometria e da Física. Além disso, é possível realizar investigações que possibilitem e compactuem com o avanço da tecnologia, sobretudo na expansão de métodos iterativos (de otimização), que resolvem *sistemas lineares e sistemas não lineares*. Estes desdobramentos, entre outros, permitem a continuidade dos estudos a nível de doutorado, com investigações e expansão do(s) tema(s), além da exposição em minicursos, oficinas e, principalmente, publicações em eventos científicos.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**. Rio de janeiro: Contraponto, v. 1938, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. . Brasília: MEC / SEF, 1998. 148p.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CARVALHO, R. A. . **O Cachorro-quente e Três Soluções**. Revista do Professor de Matemática , v. 81, p. 10-11, 2013.

CASTRO, Mônica Rabelo de. Educação Algébrica e Resolução de Problemas. **Boletim: Educação algébrica e resolução de problemas. TV Escola: Salto para o futuro**, São Paulo, 2003.

DA ROCHA, Marisa Lopes; DE AGUIAR, Katia Faria. Pesquisa-Intervenção e a Produção de Novas Análises. **Psicologia: ciência e profissão**, v. 23, n. 4, p. 64-73, 2003.

DE FREITAS, José Luiz Magalhães; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, 2015.

DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica** / Jorge Delgado, Katia Frensel, Lhaylla Crissaf.- Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DUVAL, Raymond. Les Problèmes dans l'acquisition des Connaissances Mathématiques: Apprendre Comment les Poser pour Devenir Capable de les Résoudre? Problem Solving in Learning Mathematics: Learn how to Construct Problems First in Order to Became Able to Solve Them?. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 1-45, 2013.

______ . Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

______ . Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP, v. 5, p. 37-65. 1993.

______ ; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

______ . **Sémiosis et Noésis**. 1993. (Préprint do livro publicado com o título "Sémiosis et pensée humaine". Bern: Peter Lang, 1995).

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pró-posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FREIRE, Paulo. Pedagogia do Oprimido. Rio de Janeiro: **Paz e Terra**, 2005, 42.ª edição.

GAMBOA, Silvio Sánchez. **Projetos de Pesquisa, Fundamento Lógicos:** a Dialética Entre Perguntas e Respostas. Chapecó/SC: Argos, 2013.

GUIMARÃES, Henrique Manuel *et al*. **A Aprendizagem das Equações do 1. º Grau a uma Incógnita:** Uma Análise dos Erros e Dificuldades de Alunos do 7. º ano de Escolaridade. 2012. Tese de Doutorado.

HEFEZ, Abramo. **Introdução à Álgebra Linear** / Abramo Hefez; Cecília de Souza Fernandez. -- Rio de Janeiro: SBM, 2016.

HELLMEISTER, Ana Catarina P. **A Fórmula é de Bhaskara?** Revista do Professor de Matemática, n. 39, pág. 54, Sociedade Brasileira de Matemática: São Paulo, 1999.

Instituto GeoGebra - **UESB**, 2014. Link: **<**http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page_id=7**>.** Acesso em: 31/05/2019.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. Metodologia científica. São Paulo: Atlas, 2011.

LIMA, Elon Lages. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. **Revista do Professor de Matemática**, v. 23, p. 8-18, 1993.

______ . **Coordenadas no Espaço**-SBM. Rio de Janeiro, 1993.

MARKARIAN, Roberto. A Matemática na Escola - Alguns problemas e suas causas, Rio de Janeiro, Sociedade de Brasileira de Matemática: **Revista do Professor de Matemática**, n. 38, 1998, p.24-32.

MOREIRA, P. C. **O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica**. Tese (Doutorado em Educação). Belo Horizonte: Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: Uma Análise da Influência Francesa / Luiz Carlos Pais. – 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PIMENTA, S. G. **O Estágio na Formação de Professores**: Unidade Teoria e Prática? – 11. Ed. – São Paulo: Cortez, 2012.

______ . Professor Reflexivo: construindo uma crítica. In: PIMENTA, S. G.; GHEDIN, E. (Orgs). **Professor Reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito.** São Paulo: Cortez, 2002.

PONTE, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

PONTES, Mércia de Oliveira *et al*. **A Teoria dos Registros de Representação Semiótica no Contexto do Ensino de Matemática para Alunos com Surdez.** EdUECE- Livro 2 – 01470. Didática e Prática de Ensino na relação com a Formação de Professores. 2014.

Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio – PAPMEM. **Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA** – Janeiro 2013.

RAMOS, Maria Aparecida Roseane**. Encontros e desencontros na aprendizagem de vetores em Física e Matemática**, Anais I Semana de Física, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 2005, p.72-76.

______ . **Étude Didactique à Propos des Concepts de Physique Ensegnés em Première S em Rapport Avec la Notion de Vecteur**. Mémoire de DEA de Didactique des Disciplines Scientifiques ; Laboratoire Leibniz : Université Joseph Fourier, France, 1999.

TELES, RA de M. A Aritmética e a álgebra na matemática escolar. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, ano, v. 11, p. 8-15, 2004.

VAILATI, J. de S.; PACHECO, E. R. Usando a História da Matemática no ensino da Álgebra. **Curitiba: Secretaria de Estado da Educação**, 2011.

ZAMBON, Luciana Bagolin; TERRAZZAN, Eduardo A. Estudo sobre o processo de escolha de livros didáticos organizado em escolas de educação básica. **Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul**, v. 9, p. 1-12, 2012.

APÊNDICES

Apêndice A – Solicitação de autorização para pesquisa acadêmico-científica

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA PESQUISA ACADÊMICO-CIENTÍFICA

SOLICITAÇÃO 1:

Através do presente instrumento, solicitamos do(a) Diretor(a) do **Colégio Municipal Luìs Eduardo Magalhães – Urandi - Bahia**, autorização para realização da pesquisa integrante do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do mestrando **Romário Freire Santos,** orientado pela **Prof.ª DR.ª MARIA APARECIDA ROSEANE RAMOS,** tendo como título: **SEMIÓTICA E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO BÁSICO.**

A coleta de dados será feita através da realização de oficinas com alunos do **8º ano do Ensino Básico**, conforme modelo anexo.

A presente atividade é requisito para a conclusão do curso de **Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)**, da **Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB (Vitória da Conquista)**. As informações aqui prestadas não serão divulgadas sem a autorização final da Instituição campo de pesquisa.

Urandi, ______ de ____________ de ________.

____

Mestrando

____

Assinatura e carimbo do(a) diretor(a)

SOLICITAÇÃO 2:

Através do presente instrumento, solicitamos do(a) Diretor(a) do **Colégio Estadual Petronilio da Silva Prado - Pindaí – Bahia**, autorização para realização da pesquisa integrante do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do mestrando **Romário Freire Santos,** orientado pela **Prof.ª DR.ª MARIA APARECIDA ROSEANE RAMOS,** tendo como título: **SEMIÓTICA E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE SISTEMAS LINEARES NO ENSINO BÁSICO.**

A coleta de dados será feita através da realização de oficinas com alunos do **2º ano do Ensino Médio**, conforme modelo anexo.

A presente atividade é requisito para a conclusão do curso de **Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)**, da **Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB (Vitória da Conquista)**. As informações aqui prestadas não serão divulgadas sem a autorização final da Instituição campo de pesquisa.

Pindaí, ______ de ____________ de ________.

____

Mestrando

____

Assinatura e carimbo do(a) diretor(a)

Apêndice B –Termo de Consentimento

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO DE CRIANÇA OU ADOLESCENTE EM EVENTOS

Caro aluno, você está sendo convidado (a) a participar espontaneamente da pesquisa: "**Semiótica e Relação de Equivalência entre Sistemas Lineares no Ensino Básico**", que refere à pesquisa sobre semiótica e o processo de ensino /aprendizagem sobre Matemática, com ênfase na Teoria do Registro de Representações Semióticas (filósofo e psicólogo francês Raymond Duval -1937).
Um dos objetivos é propiciar de maneira sequencialmente correta a relação entre a Álgebra, Aritmética e Geometria.

A sua contribuição será de grande importância para a elaboração deste trabalho de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB.
Você será esclarecido (a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. Sua identidade será tratada com padrões profissionais de sigilo. A participação no estudo não acarretará custos para você e não será disponível nenhuma compensação financeira adicional.
Declaro que concordo em participar desse estudo e autorizo utilizar os dados coletados em sala de aula durante as oficinas aplicadas, como sequências didáticas e relatórios.

Urandi, ____ de Julho 2019.

____
Assinatura do participante

____
Assinatura dos pais/responsável

Apêndice C - Batalha Naval

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)

BATALHA NAVAL

Objetivos

Aprender a marcar pontos no Plano Cartesiano

Organização do jogo

1. Cada grupo distribui suas embarcações pelo tabuleiro, marcando os pares ordenados (coordenadas inteiras) em que estarão ancoradas as suas embarcações da seguinte forma: um porta-aviões (um par ordenado); dois encouraçados (um par ordenado cada um); três cruzadores (um par ordenado cada um); quatro submarinos (um par ordenado cada um).

2. Não é permitido que duas (2) embarcações se sobreponham.

3. Deve ser distribuída pelo menos uma embarcação em cada quadrante.

4. A função do juiz é observar se os jogadores estão marcando corretamente os pontos nos dois tabuleiros (no tabuleiro do seu jogo e no tabuleiro de controle dos tiros dados no tabuleiro do adversário).

Regras do jogo

- Cada jogador não deve revelar ao seu oponente a localização de suas embarcações.
- Os jogadores decidem quem começa a atirar.
- Cada jogador, na sua vez de jogar, tentará atingir uma embarcação do seu oponente. Para isso, indicará ao seu oponente um ponto (tiro) no plano cartesiano dando as coordenadas x e y desse ponto. Lembrando que as coordenadas x, y são pares ordenados (x, y) em que o primeiro número deve ser lido no eixo das abcissas e o segundo no eixo das ordenadas.
- O oponente marca o ponto correspondente no seu tabuleiro e avisa se o jogador acertou uma embarcação, ou se acertou a água. Caso tenha acertado uma embarcação, o oponente deverá informar qual delas foi atingida (afundada).
- Para que um jogador tenha o controle dos pontos que indicou ao seu oponente, deverá marcar cada um dos pontos indicados no plano correspondente ao do oponente no seu tabuleiro.
- Se o jogador acertar um alvo, tem direito a nova jogada e assim sucessivamente até acertar a água ou até que tenha afundado todas as embarcações.
- Se o jogador acertar a água, passa a vez para o seu oponente. Também passará a vez para o seu oponente ou perderá uma jogada o jogador que marcar um ponto

de forma incorreta, em qualquer um dos tabuleiros. Esse erro deve ser indicado pelo juiz.

- O jogo termina quando um dos grupos afundar todas as embarcações do seu oponente.

Método adotado pela Secretaria da Educação do Paraná:

http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1320

Apêndice D – Sequência Didática – 8º ano – Ensino Fundamental II

Colégio Municipal Luís Eduardo Magalhães – Urandi - BA
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Orientadora: Prof.ª DR.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Mestrando: Romário Freire Santos

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

As atividades ocorrerão em uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental II em escola pública do município de Urandi – Bahia.

PLANEJAMENTO DE OFICINA – 8º ano

- ✓ Introdução ao Plano Cartesiano utilizando a Dinâmica – Batalha Naval;
- ✓ Introdução ao estudo da Álgebra na compreensão das noções de *sistema de equação linear com duas incógnitas* a partir da *Representação Algébrica*, na determinação da sua solução de cada sistema;
- ✓ *Conversão* do *registro semiótico: Registro da Língua Materna* e o *Registro Simbólico,* a partir de exemplos de aplicações em situações problemas;
- ✓ Resolução do *sistema linear com duas equações e duas incógnitas* a partir de operações de equivalência (sistemas equivalentes), exemplo de sistema obtido através da *conversão* do *registro de representação* da situação referente ao *cachorro quente* (RPM);
- ✓ Classificação e análise do conjunto solução do *sistema linear com duas equações e duas incógnitas* (SPD, SPI, SI) a partir da resolução algébrica de exemplos específicos (para o caso de SPD será utilizado o sistema referente à situação do *cachorro quente*), com a *Representação Geométrica* (*Gráfica*) para cada um dos três casos, considerando as *incógnitas* para quaisquer *números reais*;
- ✓ *Representação Geométrica* no plano cartesiano das funções algébricas com base em sistemas de equações com duas variáveis a partir da *conversão* do *sistema semiótico* de construção de gráficos com variáveis discretas (NÚMEROS INTEIROS) e contínuas (NÚMEROS REAIS) de cada uma das expressões algébricas na identificação da configuração de retas paralelas, coincidentes e

concorrentes no conjunto dos números reais e sequência de pontos no conjunto números inteiros.

- ✓ *Representação Geométrica* (*Virtual* - Geogebra) das funções algébricas associadas aos *sistemas* com duas variáveis em cada caso de classificação, considerando as *variáveis reais*;
- ✓ Resolução individual de exercícios sobre *sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas* envolvendo a mudança do *Registro de Representação* (*Registro Simbólico*, *Registro da Língua Materna* e *Representação Geométrica*), com foco principalmente na compreensão das operações equivalência envolvidas.
- ✓ Considerações finais sobre o trabalho, comparação dos desempenhos das turmas dos níveis fundamental e médio (sistemas com duas equações e incógnitas) bem como no Ensino Médio (sistemas com três equações e incógnitas).

Apêndice E – Sequência Didática – 2º ano – Ensino Médio

Colégio Estadual Petronilio da Silva Prado - Pindaí - BA
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Mestrando: Romário Freire Santos

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

As atividades ocorrerão em uma turma do 2º ano do Ensino Médio em escola pública do município de Pindaí – Bahia.

PLANEJAMENTO DE OFICINA – 2º ano Ensino Médio

- ✓ Introdução ao Plano Cartesiano utilizando a Dinâmica – Batalha Naval;
- ✓ Introdução ao estudo da Álgebra na compreensão das noções de sistema de *equação linear com duas incógnitas* a partir da *Representação Algébrica*, na determinação da sua solução de cada sistema;
- ✓ *Conversão* do *registro semiótico: Registro da Língua Materna* e o *Registro Simbólico,* a partir de exemplos de aplicações em situações problemas;
- ✓ Resolução do *sistema linear com duas equações e duas incógnitas* a partir de operações de equivalência (sistemas equivalentes), exemplo de sistema obtido através da *conversão* do *registro de representação* da situação referente ao *cachorro quente* (RPM);
- ✓ Classificação e análise do conjunto solução do *sistema linear com duas equações e duas incógnitas* (SPD, SPI, SI) a partir da resolução algébrica de exemplos específicos (para o caso de SPD será utilizado o sistema referente à situação do *cachorro quente*), com a *Representação Geométrica* (*Gráfica*) para cada um dos três casos, considerando as *incógnitas* para quaisquer *números reais*;
- ✓ *Representação Geométrica* no plano cartesiano das funções algébricas com base em sistemas de equações com duas variáveis a partir da *conversão* do *sistema semiótico* de construção de gráficos com variáveis discretas (NÚMEROS INTEIROS) e contínuas (NÚMEROS REAIS) de cada uma das expressões algébricas na identificação da configuração de retas paralelas, coincidentes e

concorrentes no conjunto dos números reais e sequência de pontos no conjunto números inteiros.

- ✓ *Representação Geométrica* (*Virtual* - Geogebra) das funções algébricas associadas aos *sistemas* com duas variáveis em cada caso de classificação, considerando as *variáveis reais*;
- ✓ Introdução ao estudo da Álgebra na compreensão das noções de *sistema de equação linear com três incógnitas* a partir da *Representação Algébrica*, na determinação da sua solução de cada sistema;
- ✓ *Conversão* do *registro semiótico: Registro da Língua Materna* e o *Registro Simbólico,* a partir de exemplos de aplicações em situações problemas;
- ✓ Resolução do *sistema linear com três equações e três incógnitas* a partir de operações de equivalência (sistemas equivalentes), exemplo de sistema obtido através da *conversão* do *registro de representação* da situação referente ao *"curso de Matemática"* (RPM);
- ✓ Classificação e análise do conjunto solução do *sistema linear com três equações e três incógnitas* (SPD, SPI, SI) a partir da resolução algébrica de exemplos específicos (para o caso de SPD será utilizado o sistema referente à situação do *"curso de Matemática"*), com *Representação Geométrica* (*Virtual* - Geogebra) para cada um dos três casos, considerando as *variáveis reais*;
- ✓ Resolução individual de exercícios sobre *sistemas lineares com três equações e três incógnitas* envolvendo a mudança do *Registro de Representação* (*Registro Simbólico*, *Registro da Língua Materna* e *Representação Geométrica*), com foco principalmente na compreensão das operações equivalência envolvidas;
- ✓ *Representação Geométrica* (*Virtual* - Geogebra) no espaço cartesiano das equações dos planos com base em sistemas de equações com três variáveis a partir da *conversão* do *sistema semiótico* de construção de gráficos com variáveis contínuas (NÚMEROS REAIS) de cada uma das expressões algébricas na identificação da configuração de três *planos* no conjunto dos números reais;
- ✓ Considerações finais sobre o trabalho, comparação dos desempenhos das turmas dos níveis fundamental e médio (sistemas com duas equações e incógnitas) bem como no Ensino Médio (sistemas com três equações e incógnitas).

Apêndice F – Atividades - 8º ano (E.F. 1-4); 2º ano (Ensino Médio)

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Mestrando: Romário Freire Santos

EXEMPLOS

1) (DANTE, 2015) O Estádio Olímpico João Havelange, popularmente conhecido como Engenhão, está localizado na cidade do Rio de Janeiro (RJ). Seu campo de futebol tem um perímetro de 346 m.Considerando ***x*** a medida do comprimento e ***y*** a medida da largura do campo, em metros, podemos representar o perímetro matematicamente:

2) Descubra quais são os dois números em que o dobro do maior somado com o triplo do menor resulta 16, e o maior deles somado com quíntuplo do menor resulta: **(Justifique sua resposta).**

3) Cláudio usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para fazer um pagamento de R$ 140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 notas? **Justifique sua resposta.**

4) (RPM - 81) Uma barraca vende cachorro-quente com uma salsicha a R$ 15,00 e cachorro-quente com duas salsichas, a R$ 18,00. Ao final de um determinado dia, o vendedor conseguiu receber R$ 810,00 com a venda de cachorros-quentes e contou que foram vendidos 46 pães. Determine o número de salsichas que foram consumidas.

5) (RPM 23 – Adaptado) O curso de Matemática no semestre passado teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Jorge, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 4 na terceira, obteve no final um total de 47 pontos. Fernando acertou 3, 6 e 6, totalizando 54 pontos. Por sua vez, Marcos acertou 2, 7 e 5 questões, atingindo a soma de 50 pontos no final. Já Renato fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Renato? **Justifique sua resposta.**

6) (FUVEST - Adaptado) Um caminhão transporta maçãs, peras e laranjas, num total de 10 000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, peras e laranjas tem, respectivamente, 50 maçãs, 60 peras e 100 laranjas e custa, respectivamente, 20,40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3.300 reais, calcule quantas maçãs, peras e laranjas estão sendo transportadas. **Justifique sua resposta.**

Apêndice G – Teste Final (Questões: 1-6 , 8º ano; 1-8 , 2º ano - Ensino Médio)

Colégio Estadual Petronilio da Silva Prado
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Mestrando: Romário Freire Santos
Orientadora: Prof.ª DR.ª Maria Aparecida Roseane Ramos

Aluno: ____

ATIVIDADE FINAL

1) **(Adaptação: DANTE, 2015)** Letícia e Rodrigo viram, em uma loja, os preços de uma bola e de um jogo, e fizeram estas afirmações:

Letícia: A bola e o jogo juntos custam RS 18,00.

Rodrigo: O jogo custa o dobro da bola.

Considere a incógnita x como o preço da bola e a incógnita y como preço do jogo, ambos em reais. **Determine o que se pede justificando sua resposta:**

a) A equação correspondente à afirmação de Letícia.

____

b) A equação correspondente à afirmação de Rodrigo.

____

c) Qual par ordenado é a solução do problema?

(8, 10) (7, 11) (10, 8) (6, 12) .

2) **(Adaptação: RPM – 50)** Num cercado, há cavalos e galinhas; contam-se 35 cabeças e 110 patas. Quantos animais de cada espécie tem o cercado citado? **Determine a solução do** sistema linear **justificando sua resposta.**

(Obs: Todos os cavalos possuem 4 patas e todas as galinhas possuem 2 patas).

3) Utilize as operações de equivalência para resolver os sistemas abaixo e determine quantas soluções tem cada um deles. **Justifique sua resposta!**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=10} \\ \boldsymbol{x-y=2} \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

b) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=3} \\ \boldsymbol{2x+2y=6} \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

c) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=4} \\ \boldsymbol{2x+2y=5} \end{cases}$

Quantidade de soluções: ____.

4) Descreva com suas palavras o que você entende por **incógnita**.

____

____

5) Descreva com suas palavras o que você entende por **variável**.

____

____

6) Utilizando a tabela atribua valores para o símbolo $\boldsymbol{x}$ e encontre o respectivo valor numérico de $\boldsymbol{y}$, ou vice-versa, atribua para $\boldsymbol{y}$ e encontre $\boldsymbol{x}$. Marque os pares ordenados $(\boldsymbol{x}\,,\boldsymbol{y})$ de cada sistema em cada um dos planos cartesianos referentes às alternativas. Represente graficamente cada *sistema de equações* da questão anterior considerando os seguintes conjuntos:

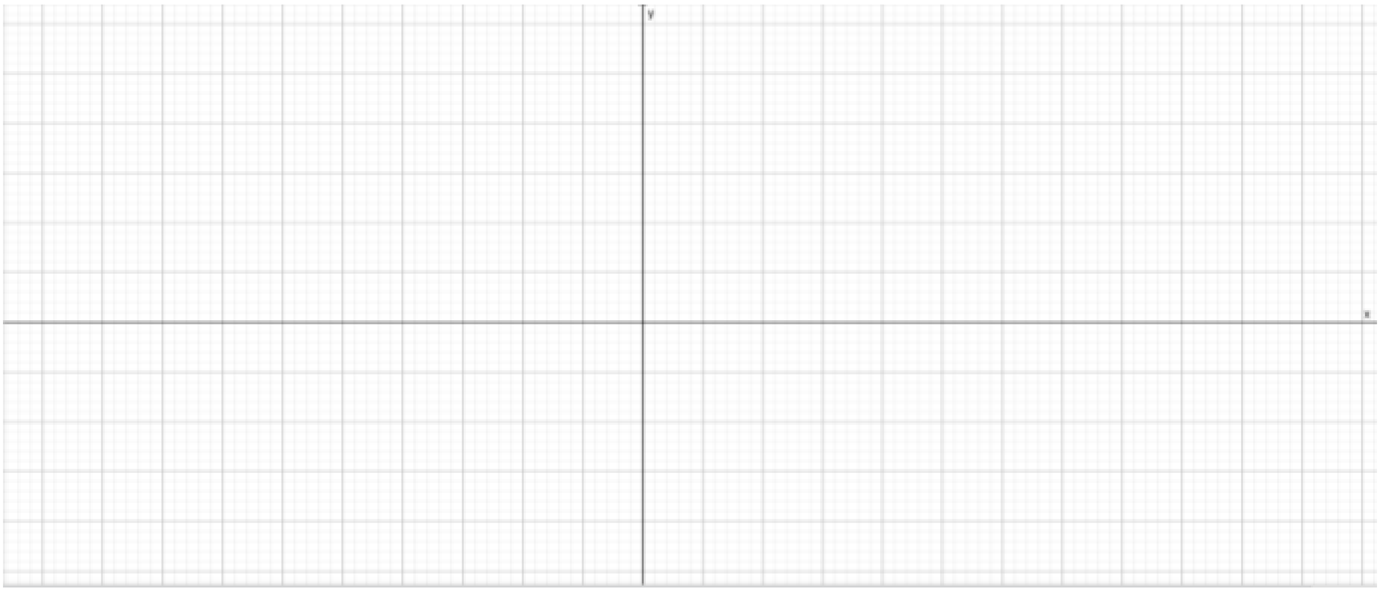
A) Números inteiros

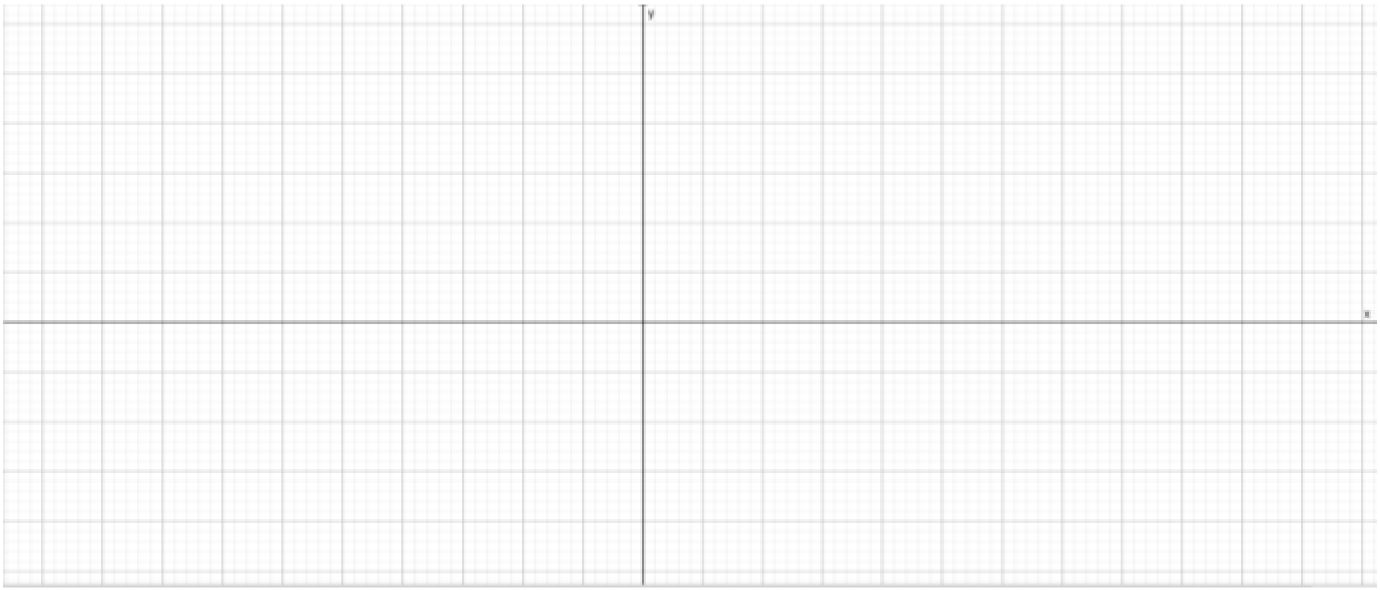
B) Números reais

a)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x+y=10 \Longrightarrow y = 10 - x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x-y=2 \Longrightarrow -y=2-x \Longrightarrow y = x-2}$





Cada gráfico representa que tipo de figura com números inteiros e com números reais? ___________________________; ______________________________

As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

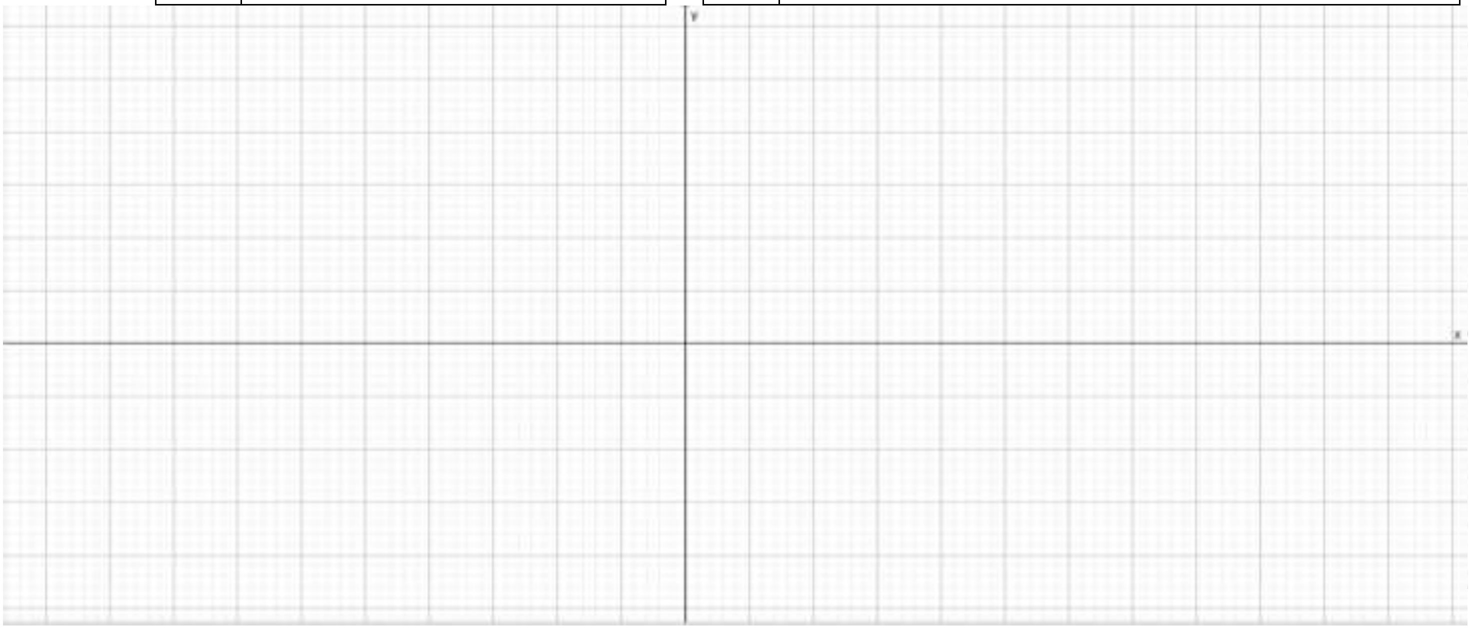
Se a resposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ___________________________________

b)

x	$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$

x	$2x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = 6 - 2x \Rightarrow y = \dfrac{6 - 2x}{2}$



As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

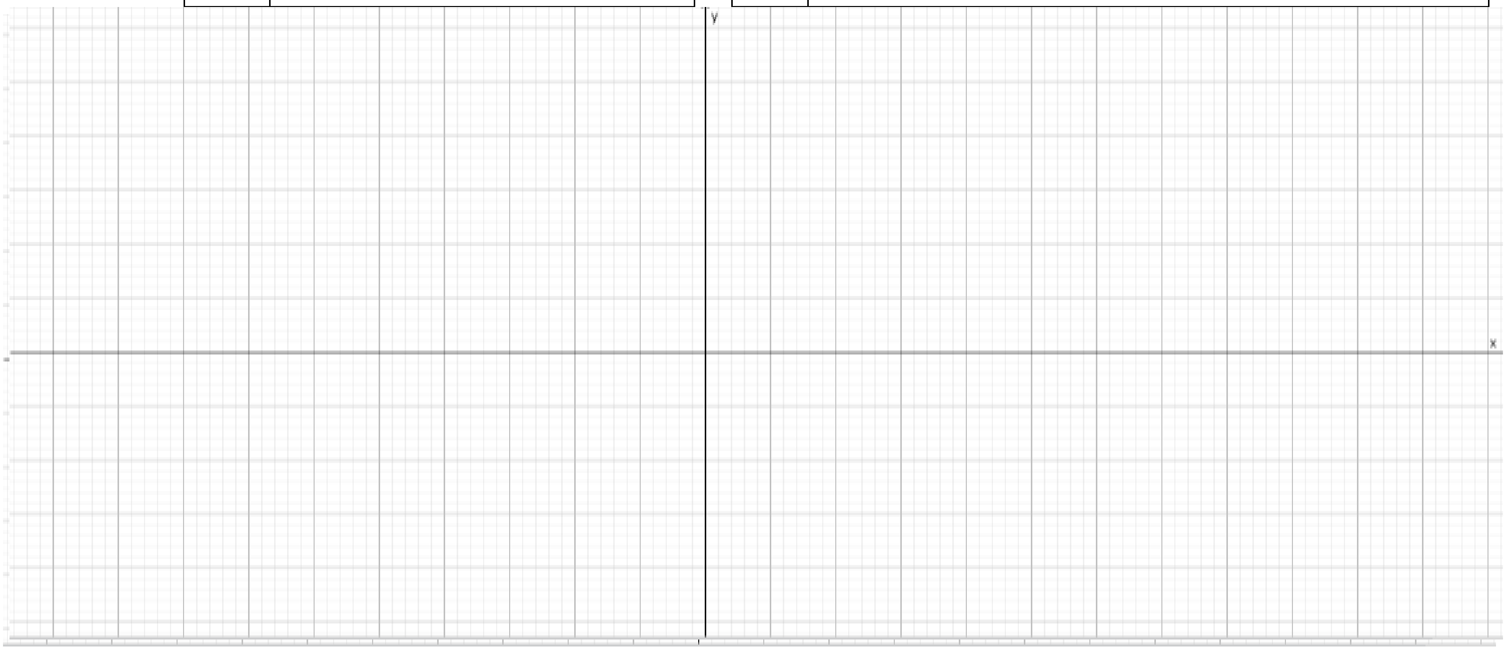
Se a resposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ___________________________________

c)

x	$x + y = 4 \Rightarrow\ y = 4 - x$

x	$2x + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 2x\ \Rightarrow y\ = \dfrac{5 -\ 2x}{2}$



As retas possuem ponto(s) em comum?________________________________

Se a resposta anterior foi **SIM**, qual a quantidade de pontos em comum?________

Qual a classificação deste sistema? ___________________________________

7) **(Adaptação: ANTON; RORRES, 2001)** Resolva o *sistema de equações lineares* utilizando *operações de equivalência* nas *equações* do *sistema*. **Justifique.**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Classificação do *sistema*:____.

8) (Adaptação: IMPA – PAPMEM 2013) Considere o sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 3} \\ \boldsymbol{x + 3y - z = 1} \\ \boldsymbol{3x + 7y + 3z = 7} \end{cases}$$

Mostre, através de operações de equivalência, que o sistema é *possível e indeterminado* e dê duas *soluções* do sistema. (Observe que estas soluções podem representar *pontos* do $\mathbb{R}^3$). **Justifique.**

Coordenadas dos *pontos* do $\mathbb{R}^3$: ___________________;_______________________.

Apêndice H – Questionário de Sondagem – 8º ano

Colégio Municipal Luís Eduardo Magalhães – Urandi - BA
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Orientadora: Prof.ª DR.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Mestrando: Romário Freire Santos

ALUNO: ____ 8º ano

QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

1) Já havia realizado alguma atividade com o *plano cartesiano*?

2) Já representou algum gráfico no plano cartesiano antes da oficina que realizamos? Se sim, qual(is)?

3) Utilizou ou utiliza algum software com os professores na escola? Qual(is)?

4) Qual a sua opinião a respeito do uso do software Geogebra para *representação gráfica* no processo de ensino aprendizagem?

Apêndice I – Questionário de Sondagem – 2º ano Ensino Médio

Colégio Estadual Petronilio da Silva Prado – Pindaí
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Orientadora: Prof.ª DR.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Mestrando: Romário Freire Santos

ALUNO: ____ 3º ano - Ensino Médio

QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

1) Utilizou ou utiliza algum software com os professores na escola? Qual(is)?

2) Já havia realizado alguma atividade com o *plano cartesiano* (duas dimensões) utilizando recurso virtual? Se sim, qual(is) recurso(s)?

3) Qual a sua opinião a respeito do uso do software Geogebra para *representação gráfica* no processo de ensino aprendizagem? Considera interessante o uso do software para se ter exatidão e precisão na *representação geométrica* (*virtual*) de *funções* associadas aos **sistemas lineares (2x2)**?

4) Já havia representado gráficos no *sistema cartesiano tridimensional* ($\mathbb{R}^3$)? Qual(is)?

5) Comente sobre a utilização do software Geogebra para *representação geométrica* (*virtual*) de funções associadas aos **sistemas lineares (3x3)**. O que acha da visualização e da interação (translação, rotação, ...) com a *representação geométrica* (*virtual*) desses ***sistemas***? Comente.

6) Considera que o software Geogebra (enquanto recurso para *representação geométrica* – *virtual*) favorece a construção do conhecimento sobre **sistemas lineares**? Por quê?

Apêndice J – Questionário de Sondagem – Professores

Colégio Estadual Petronilio da Silva Prado – Pindaí
Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT (SBM; IMPA)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Orientadora: Prof.ª DR.ª Maria Aparecida Roseane Ramos
Mestrando: Romário Freire Santos

PROFESSOR: ____

QUESTIONÁRIO DE SONDAGEM

1) Qual sua formação? Trabalha com a disciplina de Matemática?

2) Qual sua opinião a respeito da *conversão* do *registro de representação* (*algébrica/contextual/geométrica*) durante o processo de ensino/aprendizagem de Matemática?

3) Comente a respeito do uso da tecnologia enquanto ferramenta metodológica.

4) Conhece o software Geogebra? Se sim, qual sua opinião a respeito do uso deste software para *Representação Geométrica* (*Virtual*) de *funções* associadas às *equações lineares* (com duas e com três *incógnitas*) dos *sistemas lineares*?

5) Pretende utilizar o software Geogebra como ferramenta metodológica durante o processo de ensino/aprendizagem de algum conteúdo?