Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Centro de Ciências Exatas e da Terra - CCET
Departamento de Matemática - DMAT

JAQUES DIEGO MEDEIROS DA FONSECA

TEORIA INGÊNUA DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

NATAL
AGOSTO DE 2019

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Fonseca, Jaques Diego Medeiros da.
Teoria ingênua dos conjuntos numéricos / Jaques Diego Medeiros da Fonseca. - 2019.
35f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Natal, 2019.
Orientador: Ronaldo Freire de Lima.

1. Matemática - Dissertação. 2. Conjuntos numéricos - Dissertação. 3. Operações - Dissertação. 4. Cardinalidade - Dissertação. I. Lima, Ronaldo Freire de. II. Título.

RN/UF/CCET CDU 51

Elaborado por Joseneide Ferreira Dantas - CRB-15/324

JAQUES DIEGO MEDEIROS DA FONSECA

TEORIA INGÊNUA
DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Teoria dos Conjuntos.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE - UFRN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima

NATAL
AGOSTO DE 2019

JAQUES DIEGO MEDEIROS DA FONSECA

TEORIA INGÊNUA
DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Teoria dos Conjuntos.

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado e aprovado em / / , pela seguinte Banca Examinadora:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima – Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Jaques Silveiro Lopes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Carlos Alexandre Gomes da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Daniel Teixeira dos Santos
Examinador convidado

Agradecimentos

A Deus, por tudo em minha vida!

A minha mãe, Maria José Medeiros da Fonseca, por tudo que ensinou a fazer e não fazer, estar sempre ao meu lado, ter me incentivado a buscar sempre mais e não desistir nunca, por ter me tornado a pessoa honesta que sempre fui e todo amor que me proporcionou.

Ao meu pai, Antônio Jaques da Fonseca, por tudo que me ensinou, todo amor que me proporcionou, ter me dado todo o tempo necessário para me dedicar aos estudos.

A minha esposa, Renata Costa Pereira, por todo o amor, todo o apoio em tudo que faço, toda a ajuda.

Aos meus filhos, Jaques Davyd A. da Fonseca, Lucy Marcelly D. da Fonseca, Tarso F. Costa Lima e Luna Manuele D. da Fonseca, por todo amor, todo carinho e por momentos e emoções inesquiváveis.

Ao meu orientador, Ronaldo Freire de Lima, pelo que me ensinou durante todo o mestrado e a ajuda imprescindível no desenvolvimento deste trabalho.

A minha família, em geral, por toda a ajuda.

A todos os meus professores do PROFMAT - UFRN e da minha graduação em matemática na UFRN pela força e todo o ensinamento na área de matemática e didática em sala de aula.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

Resumo

O Trabalho em questão tem como objetivo trazer a luz à discussão sobre as convenções nas operações matemáticas realizadas nos conjuntos numéricos, bem como abordar o conceito de cardinalidade de conjuntos utilizando uma linguagem acessível a alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos; Operações; Cardinalidade.

Abstract

This manuscript aims to shed light on the discussion of conventions in mathematical operations performed on numerical sets, as well as addressing the concept of cardinality of sets at a high school level.

Keywords: Numerical Sets; Operations; Cardinality.

Conteúdo

1 Conjuntos **8**

1.1 Conceitos Básicos 8

1.2 Operações entre Conjuntos 9

2 Conjuntos Numéricos **11**

2.1 Números Naturais 11

2.2 Números Inteiros 12

2.3 Números Racionais 14

2.4 Números Reais 19

3 Cardinalidade de Conjuntos **30**

Introdução

Neste trabalho, faremos uma breve discussão acerca dos conjuntos numéricos elementares do ponto de vista estrutural. Para tanto, daremos uma atenção especial às operações definidas nesses conjuntos, bem como aos aspectos relativos à cardinalidade dos mesmos.

Nossa motivação parte da constatação de que os estudantes, de modo geral, veem as operações em conjuntos numéricos com meras convenções, arbitrariamente definidas e sem justificativa alguma. O caso notório é a clássica regra de multiplicação de números inteiros negativos: "menos por menos dá mais".

Nesse contexto, percebemos também uma ausência de discussão dos conceitos relacionados à cardinalidade de conjuntos numéricos. Mais especificamente, ignoram-se certos fatos como a enumerabilidade dos números racionais e a não enumerabilidade dos números irracionais.

Nossa proposta, então, é a de discutir esses importantes aspectos relativos aos conjuntos numéricos em uma linguagem acessível a alunos do ensino médio.

O texto é organizado da seguinte forma. Apresentamos, no capítulo 1, alguns conceitos fundamentais da teoria dos conjuntos. No capítulo 2, introduzimos, juntamente com suas operações, os conjuntos numéricos elementares, quais sejam, o dos naturais ($\mathbb{N}$), o dos inteiros ($\mathbb{Z}$), o dos racionais ($\mathbb{Q}$) e o dos reais ($\mathbb{R}$). No capítulo 3, introduzimos o conceito de cardinalidade e enumerabilidade de conjuntos, estabelecendo, inclusive, a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ e a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$, citadas acima. Concluímos, então, com a apresentação do célebre Teorema de Cantor, segundo o qual, a cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto arbitrário, A, é sempre maior que a cardinalidade do próprio A.

Capítulo 1

Conjuntos

"O conceito matemático de conjunto pode ser usado como fundamento para toda a matemática conhecida."
Paul R. Halmos

Neste capitulo, para futura referência, introduziremos as notações e conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos.

1.1 Conceitos Básicos

Na Matemática existem alguns conceitos ditos primitivos, os quais não admitem uma definição formal. Em Geometria, por exemplo, reta, ponto e plano são conceitos primitivos.

Na teoria dos conjuntos, *conjunto, elemento e pertinência* são conceitos primitivos. Informalmente, um conjunto A é uma coleção qualquer de objetos, ditos elementos de A. Se a é um elemento do conjunto A, diz-se que a pertence a A e escreve-se $a \in A$.

Caso a não seja um elemento de A, dizemos que a não pertence a A e escrevemos $a \notin A$.

Há, pelo menos, duas maneiras de se descrever um conjunto. A primeira, é simplesmente listar os seus elementos. Por exemplo $A = \{a, e, i, o, u\}$.

A segunda é identificar os seus elementos através de uma propriedade que lhes seja comum. Assim, o conjunto A acima pode ser descrito como

$$A = \{x; x \text{ é vogal do alfabeto latino}\}.$$

O conjunto que não possui elementos é dito *vazio* e é denotamos por $\varnothing$.

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais, quando os elementos de A são elementos de B e vice-versa. Nesse caso, escrevemos $A = B$.

Quando todos os elementos de um conjunto A pertencem a um conjunto B, dizemos que A está contido em B, e escrevemos $A \subset B$, ou, equivalentemente, que B contém A, e escrevemos $B \supset A$.

Quando um conjunto A não está contido em um conjunto B, escrevemos $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$.

Verifica-se facilmente que a inclusão tem as seguintes propriedades fundamentais, as quais são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C:

- Reflexividade: $A \subset A$
- Anti-simetria: $A \subset B$ e $B \subset A \Leftrightarrow A = B$
- Transitividade: $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$

1.2 Operações entre Conjuntos

Podemos obter conjuntos a partir de outros, efetuando-se operações entre os mesmos, sobre as quais faremos uma breve discussão.

União e Intersecção

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. A união entre os conjuntos A e B, $A \cup B$, e a intersecção entre A e B, $A \cap B$, são definidas respectivamente por

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\} \text{ e } A \cap B = \{x; x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{a, e, i, u\}$ e $B = \{i, o, u\}$, então

$$A \cup B = \{a, e, i, o, u\} \text{ e } A \cap B = \{i, u\}.$$

A união e a intersecção de conjuntos têm as seguintes propriedades fundamentais, as quais são válidas para quaisquer conjuntos A, B e C:

- $\varnothing \subset A$
- $A \cup \varnothing = A$ e $A \cap \varnothing = \varnothing$
- Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$
- Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ e $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Diferença

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. A diferença entre A e B é, por definição, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, a qual denotamos por $A - B$. Assim,

$$A - B = \{x \in A; x \notin B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, i, o\}$, então $A - B = \{e, o\}$.

No caso particular que $A \subset B$, a diferente $B - A$ é tambem chamada de *complementar de A com relação a B*.

Conjunto das Partes

Dado um conjunto A, o conjunto das partes de A, denotado por $P(A)$, é aquele formado por todos os subconjuntos de A, isto é

$$P(A) = \{X; X \subset A\}.$$

Por exemplo, se $A = \{a, e, i\}$, então

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}.$$

No exemplo acima temos que a quantidade de elementos do conjunto partes de A é igual a $8 = 2^3$. Através da Analise Combinatória, pode-se verificar que este fato é geral, isto é, se um conjunto possuir n elementos, então o conjunto de suas partes possui 2^n elementos.

Este e outros fatos nos levam a considerar o conceito de *cardinalidade* de conjuntos finitos. Mais precisamente, dizemos que um conjunto A que possui n elementos tem *cardinalidade* n, e escrevemos $\#A = n$. Assim, podemos dizer que:

$$\#A = n \Rightarrow \#P(A) = 2^n.$$

Uma vez que, para todo número natural n, a desigualdade $n < 2^n$ é verdadeira, podemos dizer que, para todo conjunto finito A, o conjunto das partes de A tem cardinalidade maior que a de A. Neste trabalho, estenderemos a noção de cardinalidade (comparativa) para conjuntos infinitos, e verificaremos que essa propriedade é verdadeira também nesse caso.

Capítulo 2

Conjuntos Numéricos

"Deus criou os números naturais; tudo o mais é produto da mão do homem."
Leopold Kronecker

Neste capítulo, introduziremos os conjuntos numéricos fundamentais juntamente com suas operações. Nos concentraremos especialmente nas propriedades dessas operações, bem como na sua influência na própria maneira como as operações são definidas.

2.1 Números Naturais

A teoria moderna dos números naturais foi introduzida por Giussepe Peano[i], a qual baseia-se em quatro postulados, presentemente conhecidos como *Axiomas de Peano*. A partir dos mesmos, constrói-se a estrutura formada pelos números naturais e suas operações. Tomaremos essa estrutura, então, como ponto de partida do processo de construção dos outros conjuntos numéricos fundamentais (excetuando-se o dos números complexos).

Dessa forma, consideraremos estabelecido o conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

dos números naturais, juntamente com as suas operações de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, as quais possuem as seguintes propriedades, validas para quaisquer naturais a, b e c:

- Comutatividade: $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$
- Associatividade: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

[i]Peano, G.: *Arithmetices principia, nova methodo exposita (Torino: Bocca) – 1889.*

- Elemento neutro: $a \cdot 1 = a$
- Distributiva da adição com relação à multiplicação: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Define-se ainda em $\mathbb{N}$ a potenciação, que nada mais é que uma multiplicação na qual todos os fatores são iguais. Mais precisamente, dados a, $n \in \mathbb{N}$, a *potência* de *base* a e *expoente* n é o número natural a^n dado por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}}.$$

A potenciação em $\mathbb{N}$ têm as seguintes propriedades, validas para quaisquer a, b e $n \in \mathbb{N}$.

- Produto de potências de mesma base: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Potência de potência: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- Potência de um produto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

2.2 Números Inteiros

Dito de forma simples, o conjunto dos números inteiros é obtido a partir do conjunto dos números naturais, acrescentando-se a esse os números negativos e o zero.

Uma longa história envolve a criação do zero, o qual desempenha a importante função de dígito no sistema numérico decimal e, enquanto número, tem a propriedade fundamental de ser o elemento neutro da adição.

Um número inteiro negativo é representado por $-a$, em que $a \in \mathbb{N}$. Uma ideia natural associada aos números negativos é a de "dívida", ou "débito". Nessa analogia, os números naturais são ditos *positivos*, e aos mesmos associa-se a ideia de "excesso", ou "crédito". Assim, a um débito de 5 reais, por exemplo, é associado o número negativo -5, enquanto a um crédito de 10 reais, associa-se o número positivo 10. Nesse contexto, o zero representa uma ausência de crédito ou débito.

O conjunto dos números inteiros é denotado por $\mathbb{Z}$, isto é,

$$\mathbb{Z} = \{... - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Vale ressaltar que, por definição, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, e também que as relações "menor que" ($<$) e "maior que" ($>$) se estendem de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$. Mais especificamente, valem as *desigualdades*:

- $\cdots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 2 < 3 < 4 \cdots$

- $\cdots\ 4 > 3 > 2 > 1 > 0 > -1 > -2 > -3 > -4 \cdots$.

Dados inteiros a e b, escreve-se $a \leqslant b$ (respec. $a \geqslant b$) para indicar que a é menor que (respec. maior que), ou igual a, b.

Um conceito importante acerca de números inteiros é o de *módulo* ou *valor absoluto*. Consideremos a situação em que uma pessoa, João digamos, empresta 5 reais a Pedro. Nesse caso, dizemos que "Pedro tem com João uma dívida de 5 reais" e não que "Pedro tem com João uma dívida de menos 5 reais". Assim, podemos dizer que 5 é o valor absoluto da dívida de João com Pedro.

Denotamos, então, o valor absoluto ou, equivalentemente, módulo de um número inteiro $a \in \mathbb{Z}$ por $|a|$. Por exemplo, $|-3| = |3| = 3$.

Retornemos à ideia de associar-se números negativos a dívidas (débitos) e números positivos a créditos, como numa conta corrente. É natural pensamos que uma dívida de 3 acrescida de uma dívida de 4 resultará numa dívida de 7, assim, $-3 + (-4) = -7$. Por outro lado, uma dívida de 3 acrescida de um pagamento ou crédito de 2 diminuirá a dívida para 1, isto é, $-3 + 2 = -1$.

Procedendo-se dessa forma, justificamos as regras usuais de adição em $\mathbb{Z}$. Assim, dados números inteiros quaisquer a e b, tem-se:

- Se a e b têm o mesmo sinal, isto é, se são ambos positivos ou ambos negativos, $a + b$ é o inteiro cujo sinal é o sinal comum a a e b, e cujo módulo é igual a $|a| + |b|$.

- Se a e b têm sinais opostos e, por exemplo, $|a| > |b|$, $a + b$ é o inteiro cujo sinal é o sinal de a e cujo módulo é igual a $|a| - |b|$.

- Se a e b têm sinais oposto e $|a| = |b|$, $a + b$ é igual a 0.

Sendo a número inteiro qualquer, temos que

- $a + 0 = a$, isto é, 0 é o *elemento neutro* da adição em $\mathbb{Z}$.

Uma vez definida a adição em $\mathbb{Z}$, a multiplicação de um inteiro qualquer por um inteiro positivo pode ser facilmente definida como uma adição de parcelas iguais.

Mais precisamente, se a e b são números inteiros com $a > 0$ e $b \neq 0$, o *produto* ab é o inteiro cujo sinal é igual ao sinal de b e cujo módulo é igual a $|a||b|$. Se $a = 0$ ou $b = 0$, $ab = 0$.

Resta-nos definir a multiplicação de dois números negativos, isto é, uma multiplicação do tipo $(-2) \cdot (-3)$.

Observemos inicialmente que não há uma situação real que traduza tal operação, pois não há sentido em tomar-se uma adição de menos duas parcelas iguais a -3 ou menos três parcelas iguais a -2. Dessa forma, para definimos essa multiplicação, devemos adotar um ponto de vista teórico, qual seja, o de se considerar a multiplicação em $\mathbb{Z}$ como uma extensão da multiplicação em $\mathbb{N}$.

Assim, devemos definir a multiplicação de dois números negativos de uma maneira tal que essa operação tenha, em $\mathbb{Z}$, as propriedades fundamentais. Isso nos sugere que, ao multiplicarmos dois números inteiros quaisquer, em particular dois inteiros negativos, o produto obtido seja um inteiro com módulo igual ao produto dos módulos dos fatores. Dessa forma, para a multiplicação $(-2) \cdot (-3)$, teríamos dois resultados possíveis, 6 e -6, uma vez que estes são os únicos inteiros que têm módulo igual a $|-2| \cdot |-3| = 2 \cdot 3 = 6$.

Vejamos que, se tivéssemos $(-2) \cdot (-3) = -6$, a propriedade fundamental de distributividade da adição com respeito à multiplicação não seria válida em $\mathbb{Z}$. De fato, nesse caso, teríamos

$$(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) = -6 + (-6) = -12.$$

Por outro lado, $-2 \cdot (3 + (-3)) = -2 \cdot 0 = 0$, o que nos dá

$$-2 \cdot (3 + (-3)) \neq -2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-3).$$

Segue-se que devemos ter $(-2) \cdot (-3) = 6$. Fica, então, justificada a regra seguinte:

- Sejam a e b números inteiros negativos. o *produto* ab é o número inteiro cujo módulo é $|a| \cdot |b|$.

Vimos ainda que, em $\mathbb{Z}$, para cada número positivo corresponde um negativo e vice-versa. Esse fato nos permite introduzir o conceito de *simetria*. Dado um número inteiro $a \in \mathbb{Z}$, o *oposto* ou *simétrico* de a é o inteiro $b \in \mathbb{Z}$, tal que $a + b = 0$. Como a adição é comutativa, se b é o simétrico de a, então a é o simétrico de b. Nesse caso, dizemos que a e b são *simétricos*.

Assim, 1 e -1 são *simétricos*, bem como 3 e -3. Em geral, se $a \in \mathbb{Z}$ é um inteiro positivo, então, o simétrico de a é $-a$. Para que essa regra seja válida, quando a é negativo, convenciona-se, por exemplo, que $-(-1) = (-1) \cdot (-1) = +1 = 1$. Assim podemos dizer que o simétrico de $a \in \mathbb{Z}$ é $-a \in \mathbb{Z}$.

Introduziremos a definição de radiciação em $\mathbb{Z}$. Se a e b são números inteiros, tais que $a \geqslant 0$ e $a^n = b$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a é a *raiz n-ésima* de b, a qual denotamos por $\sqrt[n]{b}$. Note que a radiciação, em geral, não está bem definida para os inteiros negativos. De fato, se $b < 0$ e n é par, não existe um inteiro a tal que $a^n = b$, pois, nesse caso, $a^n \geqslant 0$.

2.3 Números Racionais

Introduziremos agora os números racionais. Para tanto admitiremos conhecidas e estabelecidas as frações de números naturais, bem como suas representações decimais.

O conjunto dos números racionais, $\mathbb{Q}$, é definido como uma extensão do conjunto das frações, da mesma maneira que $\mathbb{Z}$ é concebido como uma extensão de $\mathbb{N}$.

Considera-se, para cada fração (positiva) $\frac{a}{b}$, uma *fração negativa* $-\frac{a}{b}$, e define-se $\mathbb{Q}$ como o conjunto formado pelas frações que são positivas ou negativas, juntamente com 0.

Introduziremos, agora, algumas notações que nos permitirão descrever $\mathbb{Q}$ de uma maneira mais homogênea, bem como estender a esse conjunto os conceitos de igualdade, adição e multiplicação de frações.

Uma vez que uma fração $\frac{a}{b}$ é interpretada como o resultado de se tomar a vezes a medida $\frac{1}{b}$, é natural definirmos

$$\frac{0}{a} = 0, \forall\ a \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, uma fração $\frac{1}{b}$ é tida como a medida de cada um dos segmentos obtidos quando se divide um segmento de comprimento 1 em b partes iguais. Nesse sentido, não se pode estender o conceito de fração de uma maneira tal que se permitam frações de denominador zero, pois estas não definiriam subunidades, o que subverteria esse conceito tal como ele é.

Adotando-se então a convenção

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b},$$

tem-se

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p,q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}.$$

A relação de igualdade do conjunto das frações estende-se naturalmente a $\mathbb{Q}$, isto é, dados $\frac{p}{q}$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, define-se

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn = qm.$$

Por exemplo, $\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4}$ e $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$.

Note que, dado $p \in \mathbb{Z}$, tem-se $p = \frac{p}{1}$, isto é, todo número inteiro é também um número racional. Dessa forma, valem as seguintes relações de inclusão

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q},$$

ou seja, $\mathbb{Q}$ é também uma extensão de $\mathbb{Z}$.

Num contexto de unidades monetárias, como o real, pode-se pensar em frações como subunidades destas. Por exemplo, $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0,5$ representaria meio real ou, equivalentemente, 50 centavos. Sendo assim, como fizemos com os inteiros negativos, podemos associar frações negativas a dívidas para , a partir daí, definir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$.

Dados p, q, m, $n \in \mathbb{Z}$, q, $n \neq 0$, definem-se

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn} \text{ e } \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}\cdot$$

Além disso, a *subtração* em $\mathbb{Q}$ é definida por

$$\frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{m}{n}\right) = \frac{pn - qm}{qn}$$

e a *divisão* por

$$\frac{p/q}{m/n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = \frac{pn}{qm},\ m \neq 0.$$

Note que *a divisão por zero não está definida.*

Determinemos, como exemplo, o valor da expressão $-\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-4}{7} - \frac{2/3}{5/9}\right)$. Pelas definições anteriores, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-4}{7} - \frac{2/3}{5/9}\right) &= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-4}{7} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5}\right) = -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-4}{7} - \frac{6}{5}\right) = \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-4}{7} + \frac{-6}{5}\right) = -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-62}{35}\right) = \frac{62}{175}\cdot \end{aligned}$$

Vale Salientar que, em $\mathbb{Q}$, a adição e a multiplicação têm as propriedades fundamentais da Aritmética, o que pode ser facilmente verificado a partir das definições dadas.

Convém observar ainda que a adição e a subtração de números racionais, assim como a multiplicação e a divisão, são operações invernas uma da outra, conforme as identidades

- $\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{n}\right) - \frac{m}{n} = \left(\frac{p}{q} - \frac{m}{n}\right) + \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $q,n \neq 0$;
- $\frac{p/q}{m/n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p/q \,\cdot\, m/n}{m/n} = \frac{p}{q}$, com $q,m,n \neq 0\cdot$

Esse fato nos permite resolver, em $\mathbb{Q}$, equações do tipo

$$ax + b = 0 \quad a,b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0.$$

Com efeito, para isolamos x no primeiro membro da equação dada, basta subtrairmos b de ambos os seus membros e, em seguida, devirmos por a, isto é,

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow (ax + b) - b = 0 - b \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}\cdot$$

Por exemplo, a equação $2x + 5 = 0$ tem solução $x = \frac{-5}{2}$.

Diz-se que uma operação está *bem definida* num conjunto numérico A, quando, através dela, ao operarmos dois elementos quaisquer de A, o resultado ainda é um elemento de A.

Dessa forma, a adição está bem definida em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, enquanto a subtração está bem definida em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, porém não em $\mathbb{N}$. Com efeito, 2 e 3 são números naturais, entretanto, $2 - 3 \notin \mathbb{N}$.

Conjuntos como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, que têm bem definidas as operações de adição e subtração, juntamente com suas propriedades fundamentais, são chamados de *anéis*.

Note que, em $\mathbb{Q}$, além da adição e da subtração, estão bem definidas as operações de multiplicação e divisão, o que caracteriza esse conjunto com um *corpo*. Tal característica é o que diferencia, em termos estruturais, os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. De fato, embora a adição, a subtração e a multiplicação estejam bem definidas em $\mathbb{Z}$, a divisão não está, pois ao dividirmos dois números inteiros quaisquer, nem sempre obtemos um número inteiro como resultado. Dessa forma, $\mathbb{Z}$ é um anel, mas não é um corpo.

Vejamos agora como se define a *potenciação* de números racionais.

Dados p, $q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, definimos a potência de base $\frac{p}{q}$ e expoente n por

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \underbrace{\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdots \frac{p}{q}}_{n \text{ fatores}} = \frac{p^n}{q^n}.$$

Assim, tem-se

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49} \quad \text{e} \quad \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125}.$$

Observemos agora que, dados, m, $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, vale

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^m}{q^m} \cdot \frac{p^n}{q^n} = \frac{p^{m+n}}{q^{m+n}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{m+n}, \tag{2.1}$$

isto é, a regra para multiplicação de potências racionais de mesma base é idêntica àquela para potência de números naturais.

Nosso objetivo agora é estender a definição de potenciação em $\mathbb{Q}$ para potências de expoente negativo ou nulo, de tal forma que a equação (2.1) permaneça válida.

Tomaremos, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$. Temos que

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+0}.$$

Se quisermos então que seja válida a equação (2.1), devemos ter

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0},$$

o que nos sugere definir

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1.$$

O mesmo raciocínio poderia ser aplicado a qualquer número racional $\frac{p}{q} \neq 0$, o que nos leva à seguinte definição:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{0} = 1, \ \forall \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ p \neq 0.$$

Note que *não há definição para a potência* 0^0.

Vejamos agora que, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$, tem-se

$$1 = \left(\frac{p}{q}\right)^{0} = \left(\frac{p}{q}\right)^{-n+n}.$$

Então, se desejarmos que a equação (2.1) permaneça verdadeira, devemos ter

$$1 = \left(\frac{p}{q}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n},$$

sugerindo a definição

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n}, \ \forall \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ p \neq 0.$$

Dessa maneira, temos

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^{1} = 2 \quad \text{e} \quad \left(\frac{-3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{-3}\right)^{3} = \frac{125}{-27} = -\frac{125}{27}.$$

Vejamos ainda que, se m, $n \in \mathbb{N}$, então,

$$\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{m}\right)^{n} = \left(\frac{p^m}{q^m}\right)^{n} = \frac{p^{mn}}{q^{mn}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{mn},$$

e

$$\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{pa}{qb}\right)^{n} = \left(\frac{(pa)^n}{(qb)^n}\right) = \left(\frac{p^n}{q^n} \cdot \frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^{n} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n}.$$

Por exemplo,

$$\left(\left(\frac{-1}{3}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^6 = \frac{(-1)^6}{3^6} = \frac{1}{729} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Se $\frac{a}{b}$ e $\frac{p}{q}$ são racionais positivos tais que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{p}{q}$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $\frac{a}{b}$ é a *raiz n-ésima* de $\frac{p}{q}$, que é denotada por $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$. Note que, neste caso,

$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}.$$

Vale a mesma definição quando $\frac{a}{b}$ e $\frac{p}{q}$ são racionais negativos e n é ímpar.
Logo,

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}, \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{-\frac{64}{343}} = -\frac{4}{7}.$$

Para finalizarmos esta seção, observemos apenas que a representação decimal de um racional negativo, $-\frac{a}{b}$, $a,b \in \mathbb{N}$, é feita acrescentando-se o sinal “menos” $(-)$ à representação decimal de $\frac{a}{b}$. Por exemplo,

$$-\frac{1}{2} = -0,5 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{3} = -0,333333\cdots.$$

2.4 Números Reais

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é obtido pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, os quais representam medidas que não são realizadas por frações.

Pensava-se, na antiguidade, que qualquer medida podia ser representada por um fração ou, equivalentemente, que dois segmentos de reta quaisquer era sempre *comensuráveis*.

Definição 1. Dois segmentos de reta AB e CD são ditos *comensuráveis* se existe um segmento de reta PQ que cabe uma quantidade inteira de vezes em AB e CD.

Suponhamos, por exemplo, que AB tem comprimento 1 e CD tem comprimento $3/2$. Então, AB e CD são comensuráveis, pois um segmento PQ, de comprimento $1/2$, cabe duas vezes em AB e três vezes em CD.

Suponhamos agora que as medidas de AB e CD sejam respectivamente iguais a $2/3$ e $5/2$. É fácil ver que um segmento PQ de medida $1/6$ cabe quatro vezes em AB e quinze vezes em CD. Logo, AB e CD são comensuráveis.

De modo geral, se AB tem medida a/b e CD tem medida c/d, então AB e CD são comensuráveis, pois um segmento PQ de medida $1/bd$ cabe ad vezes em AB e cb vezes em CD.

Dessa forma, se as medidas de todos os segmentos fossem representadas por frações, dois quaisquer deles seriam sempre comensuráveis. Vejamos, agora, que isso não é verdade.

Para tanto, consideremos um quadrado $ABCD$ cujos lados têm ambos medida igual a 1. Provaremos que a diagonal AC desse quadrado e um qualquer de seus lados não são comensuráveis, isto é, são *incomensuráveis*.

Suponhamos, por absurdo, que AC e BC são comensuráveis. Nesse caso, existe um segmento PQ que cabe um número inteiro de vezes em AC bem como em BC. Denotando-se esses números inteiros por m e n, respectivamente, teremos, pela definição de fração, que o segmento PQ tem medida $1/n$ e AC tem medida m/n.

Podemos supor que a fração m/n está na forma reduzida, pois, caso contrário, poderíamos eliminar os fatores comuns a m e n e obter uma fração reduzida e equivalente a esta.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao Triângulo retângulo ABC, obtemos

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2. \tag{2.2}$$

Essa equação nos diz que m^2 é um múltiplo de 2, isto é, um número par. É fácil verificar que o quadrado de um número ímpar é também um número ímpar. Sendo assim, concluímos que m é par. Logo, existe um inteiro a tal que $m = 2a$. Combinando-se essa igualdade com a equação (2.2), temos

$$(2a^2) = 2n^2 \Rightarrow 4a^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2a^2.$$

Segue-se que n^2, e portando n, é um número par. Dessa forma, m e n são, ambos, pares. Tal fato, porém, contradiz a hipótese de que a fração m/n está na forma reduzida, o que nos leva a concluir que AC e BC são incomensuráveis.

Sabemos que segmentos representados por frações, isto é, números racionais, são sempre comensuráveis. Portanto, *a medida de AC não é um número racional.* Chamando-se essa medida de d, temos que $d^2 = 2$. Por essa razão, denotamos esse número por $\sqrt{2}$.

Números como $\sqrt{2}$, os quais representam medidas que não podem ser realizadas por frações, são chamados de *irracionais*, mais especificamente, *irracionais positivos*. Para cada número irracional positivo, define-se um número irracinal negativo, que é o oposto daquele. Por exemplo, o oposto do número irracional positivo $\sqrt{2}$ é o número irracional negativo $-\sqrt{2}$.

Um outro fato geométrico relacionado aos números irracionais é o de que quando se divide o comprimento de uma circunferência qualquer pelo seu diâmetro, obtém-se sempre o mesmo número, o qual é simbolizado pela letra grega π.

Assim como $\sqrt{2}$, π é um número irracional. No entanto, a demonstração desse fato é bastante difícil. Para se ter uma ideia disso, vale salientar que a irracionalidade de π só foi demonstrada no século XVIII por J. H. Lambert, em contraste com a de $\sqrt{2}$, que, como vimos, foi feita por volta do século IV a.C.

Provaremos, no próximo capítulo, que o conjunto dos números irracionais é infinito. No entanto, podemos nos convencer também da veracidade desse fato através da representação decimal desses números.

Vejamos o caso de $\sqrt{2}$. Uma vez que o quadrado desse número é 2, temos que $1 < \sqrt{2} < 2$. Logo, podemos dizer que $\sqrt{2} = 1 + \alpha$ com $0 < \alpha < 1$. Tomando-se $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\alpha_1}{10} < \alpha$, teremos $1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}$. Logo,

$$\left(1 + \frac{\alpha_1}{10}\right)^2 < 2 \Rightarrow \left(\frac{10 + \alpha_1}{10}\right)^2 < 2 \Rightarrow \frac{(10 + \alpha_1)^2}{100} < 2,$$

o que nos dá

$$(10 + \alpha_1)^2 < 200. \tag{2.3}$$

Uma vez que $(10 + 4)^2 = 14^2 = 196$ e $(10 + 5)^2 = 15^2 = 225$, vê-se que 4 é o maior valor de α_1, para o qual a desigualdade (2.3) é verdadeira. Sendo assim, podemos dizer que 1,4 é o maior número decimal que é menor que $\sqrt{2}$ e que tem uma casa decimal.

Tomemos agora $\alpha_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4}{10} + \frac{\alpha_2}{100} < \alpha.$$

Procedendo de maneira análoga, conclui-se que 1 é o maior valor de α_2, para o qual a desigualdade

$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{\alpha_2}{100}\right)^2 < 2$$

é verdade, isto é, 1,41 é o maior número decimal que é menor que $\sqrt{2}$ e que tem duas casas decimais.

Esse processo pode ser continuado indefinidamente, obtendo-se, a cada etapa, uma aproximação decimal de $\sqrt{2}$ com um número maior de casas decimais. Se assim o fizéssemos, obteríamos nas cinco etapas seguintes as aproximações 1,414; 1,14142; 1,41421; 1,414213 e 1,4142135.

Dessa forma, assim como as frações representadas por dízimas periódicas, $\sqrt{2}$ é o *limite* de uma soma infinita:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \cdots = 1,4142135\cdots. \tag{2.4}$$

A interpretação da equação (2.4) é a seguinte:

(i) começando-se por 1 e adicionando-se sucessivamente $\frac{4}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{4}{10^3}$ etc., nunca se atingirá $\sqrt{2}$, porém, a cada etapa, se estará mais próximo dele;

(ii) a soma das n primeiras parcelas pode ficar tão próxima de $\sqrt{2}$ quando se queira, bastando para tanto que se tome n suficientemente grande.

Como se vê, as propriedade (i) e (ii), que caracterizam $\sqrt{2}$ como limite de uma soma infinita, são as mesmas que caracterizam como tal uma fração representada por uma dízima periódica. Observe, porém que na representação decimal de $\sqrt{2}$ não há um número que se repete ao longo desta, de forma a constituir um período. Com efeito, se fosse esse o caso, obteríamos, a partir dessa representação decimal, uma fração igual à $\sqrt{2}$, contradizendo o fato de que esse número é irracional.

Sendo assim, *a representação decimal de* $\sqrt{2}$ *tem infinitas casas decimais e não constitui uma dízima periódica.* Neste contexto, essa é a propriedade que distingue os números irracionais dos racionais.

Assim, *um número é irracional se, e somente se, sua representação decimal tem infinitas casas decimais e não constitui uma dízima periódica.*

Verifica-se, por exemplo, que a representação decimal de π é

$$\pi = 3,14159\cdots.$$

Com o auxílio de computadores, pode-se obter até milhões de casas decimais de um número irracional como π. Note que, no entanto, em constaste com o comportamento das dízimas periódicas, as casas decimais de um número irracional distribuem-se de maneira aleatória, isto é, o conhecimento de uma delas, por si só, não dá informação alguma sobre o valor da próxima.

É fácil ver que há infinitas maneiras de se obter uma representação decimal infinita, de tal modo que esta não seja uma dízima periódica. Assim temos que *o conjunto dos números irracionais é infinito.*

Definição 2. O *conjunto dos números reais*, denotado por $\mathbb{R}$, é o conjunto formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, isto é,

$$\mathbb{R} = \{x;\ x \text{ é racioanl ou } x \text{ é irracional}\}.$$

Segue-se dessa definição que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Além disso, no universo dos números reais, o conjunto dos números irracionais é o complementar de $\mathbb{Q}$, isto é, é o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

A propriedade fundamental do conjunto $\mathbb{R}$ é que uma medida qualquer é sempre representada por um número real e reciprocamente. Assim, o comprimento de qualquer segmento de reta é igual a um número real positivo.

Mais precisamente, se tomamos uma reta r e representarmos nesta o conjunto $\mathbb{R}$, teremos que, para cada número real corresponderá um *único* ponto de r e vice-versa, isto é, *existe uma correspondência biunívoca entre* $\mathbb{R}$ *e os pontos da reta* r. Nesse caso, r é dita a *reta real*.

Como consequência dessa propriedade, costuma-se, por economia, fazer referência aos números reais como pontos de r e vice-versa. Podemos dizer, por exemplo, "o ponto $\sqrt{2}$", ao invés de "o ponto de r associado à $\sqrt{2}$".

Neste contexto, introduzem-se as *sequências de números reais*. Diz-se então que uma tal sequência *converge* para $x \in \mathbb{R}$, se a correspondente sequência de pontos de r converge para o ponto associado a x. Diz-se também que x é o *limite* da sequência dada.

Por exemplo, π é o limite da sequência

$$3 \qquad 3,1 \qquad 3,14 \qquad 3,1414 \qquad 3,14159 \qquad \cdots.$$

Vale salientar que o conceito de limite de sequência é mais geral, e que lidamos apenas com casos particulares, a saber, sequências crescentes (cada termo é maior que o precedente) e limitadas (existe um número que é maior que todos os termos da sequência). No entanto tomando-se representações decimais, mesmo se consideramos apenas esses casos, não será difícil nos convencermos de que *todo número real é igual ao limite de alguma sequência de números racionais*. No caso de um número irracional $\alpha{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots$, temos que este é limite da sequência

$$\alpha \qquad \alpha{,}\alpha_1 \qquad \alpha{,}\alpha_1\alpha_2 \qquad \alpha{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \qquad \alpha{,}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \qquad \cdots.$$

Do ponto de vista formal, o fato de $\mathbb{R}$ estar em correspondência biunívoca com os pontos de uma reta caracteriza esse conjunto como um *espaço completo*. A definição precisa desse termo envolve conceitos avançados e não a daremos aqui. Convém mencionar, entretanto, que essa característica está relacionada com o fato de que certos tipos de sequências de números racionais, dentre as quais as que mencionamos, sempre têm um limite.

Veja que no universo dos números racionais a sequência

$$1 \qquad 1,4 \qquad 1,41 \qquad 1,4142 \qquad 1,41421 \qquad 1,414213 \qquad \cdots$$

não tem limite, pois, como vimos, ela converge para $\sqrt{2}$, que não é um número racional. Nesse sentido, diz-se que $\mathbb{Q}$ não é um espaço completo, contrariamente ao que se pensava antes da descoberta do primeiro número irracional.

O *módulo*, ou *valor absoluto*, de um número real x, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } \ x \geq 0 \\ -x & \text{se } \ x < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, $|3,47564738283\cdots| = 3,47564738283\cdots$ e $|-\pi| = -(-\pi) = \pi$.

Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0 \qquad \text{e} \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vejamos agora como comparar dois números irracionais a partir de suas representações decimais.

Se eles têm partes inteiras distintas, é fácil ver que o menor deles será o que tiver menor parte inteira. Por exemplo,

$$2,17639685474\cdots < 3,00047648465743\cdots.$$

Consideremos agora os números irracionais, $0,123\cdots$ e $0,124\cdots$. Temos que

$$0,123\cdots = \frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}\cdots < \frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+\cdots = 0,124 < 0,124\cdots.$$

Esse exemplo justifica a seguinte regra.

No caso de as partes inteiras serem iguais, comparamos casa decimal por casa decimal até encontramos duas distintas, sendo menor o irracional que tiver, dentre estas, a casa decimal de menor valor.

Por exemplo, dados $x = \mathbf{3{,}12375}658\cdots$, $y = \mathbf{3{,}12377}959\cdots$ e $z = \mathbf{3{,}1237}96587\cdots$, tem-se $x < y < z$, uma vez que $5 < 7 < 9$.

Já havíamos visto que há infinitos números racionais entre dois números racionais dados. Vemos que o mesmo acontece com números irracionais. De um modo geral, temos que:

> *Dados dois números reais distintos x e y, existem, entre eles, infinitos números racionais, bem como infinitos números irracionais.*

Por esta razão, os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são ditos *densos* em $\mathbb{R}$. Mais precisamente, um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito *denso* em $\mathbb{R}$, se os elementos de A estão espalhados por toda a reta, isto é, se entre dois elementos quaisquer de $\mathbb{R}$, não importando quão próximos eles estejam, existirem infinitos elementos de A. Note que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são densos em $\mathbb{R}$.

Vejamos agora como estender as operações já definidas em $\mathbb{Q}$ para o conjunto $\mathbb{R}$. Para isso, resta-nos definir tais operações entre números irracionais entre si, bem como entre racionais e irracionais.

No que se segue, definiremos alguns resultados de operações em $\mathbb{R}$ como limites de certas somas infinitas. Convém observar, entretanto, que estamos supondo tacitamente a existência desses limites, isto é, a convergência das sequências correspondentes, o que pode ser provado rigorosamente.

Observemos ainda que, assim como em $\mathbb{Q}$, as operações de adição, multiplicação e divisão de números reais positivos podem ser feitas geometricamente, o que sugere a existência dos limites mencionados.

Tomemos, uma vez mais, o irracional $\sqrt{2}$. Uma vez que sua parte inteira é 1, é razoável definirmos, por exemplo,

$$1 + \sqrt{2} = 1 + 1,414213\cdots = 2,414213\cdots,$$

isto é, para adicionar-se a um número irracional um número inteiro, basta adicionar-se este à parte inteira daquele, deixando-se inalteradas as casas decimais. Assim,

$$-3+\pi = -3+3,14159\cdots = 0,14159\cdots \quad \text{e} \quad 5+(-9,365209\cdots) = -4,365209\cdots.$$

Como regra geral, para adicionar-se um irracional a um número real qualquer, deve-se usar o conceito de limite. Por exemplo, para adicionarem-se π e $\sqrt{2}$, tomam-se inicialmente suas representações como somas infinitas de frações decimais

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \cdots$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots$$

.

Define-se então $\sqrt{2} + \pi$ como o limite da soma infinita

$$(1+3)+\left(\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^2}\right)+\left(\frac{4}{10^3}+\frac{1}{10^3}\right)\left(\frac{2}{10^4}+\frac{5}{10^4}\right)+\left(\frac{1}{10^5}+\frac{9}{10^5}\right)+\cdots$$

que, por sua vez, é dada por

$$4 + \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{10}{10^5} + \cdots = 4 + \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \cdots,$$

isto é,

$$\sqrt{2} + \pi = 4,5558\cdots.$$

Procede-se igualmente quando efetuamos a adição de um irracional a um racional. Por exemplo,

$$\pi + \frac{1}{2} = 3,14159\cdots + 0,5 = \left(3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots\right) + \frac{5}{10}\cdot$$

Logo,

$$\pi + \frac{1}{2} = 3 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots = 3,64159\cdots.$$

Dados x, $y \in \mathbb{R}$ define-se a *subtração* $x - y$ por

$$x - y = x + (-y).$$

De maneira análoga, define-se a *multiplicação* de dois números reais quaisquer, isto é, como limite de somas infinitas, obtidas a partir de suas representações decimais. No caso dos produtos que envolvem números negativos, observam-se as mesmas regras de produto de sinais, isto é, o produto de dois números reais de sinais contrários é negativo, enquanto o produto de reais de mesmo sinal é positivo. Convenciona-se ainda que $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Assim definidas, verifica-se que *a adição e a multiplicação de números reais têm as propriedades fundamentais da Aritmética.*

Vejamos agora como se define a divisão em $\mathbb{R}$.

Dado um número real $y \neq 0$, prova-se que existe $z \in \mathbb{R}$, tal que $yz = 1$. Diz-se então que $z = 1/y$.

Definição 3. Se x, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, a *divisão* de x por y é denotada por x/y e definida por

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}\cdot$$

Note que, se x, $y \in \mathbb{Q}$, essa definição coincide com a que foi dada anteriormente.

No caso em que x ou y é irracional, procede-se como na adição e na multiplicação, ou seja, tomam-se as representações decimais de x e y e, após algumas operações, obtém-se o resultado como limite de uma soma finita (se este for um número racional que não é uma dízima periódica) ou infinita (se este for um número irracional ou dízima periódica).

Em geral, evitam-se os cálculos com números irracionais, deixando-os apenas indicados, como

$$\pi - 3\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{3},\ \frac{2}{\pi},\ \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ \text{ etc.}$$

O importante é sabermos que essas operações estão bem definidas, isto é, que têm como resultado um número real.

Na prática, opera-se com números irracionais através de aproximações destes. Por exemplo, se considerarmos $\pi \approx 3,141$ [lê-se, "pi é aproximadamente igual a 3,141"] e $\sqrt{2} \approx 1,414$, teremos

$$\pi - \sqrt{2} \approx 3,141 - 1,414 = 1,727.$$

Uma vez que, em $\mathbb{R}$, estão bem definidas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, e considerando a relação de ordem, temos que esse conjunto é um corpo ordenado. Logo, podemos dizer que

$\mathbb{R}$ *é um corpo ordenado completo.*

Essa é a propriedade fundamental de $\mathbb{R}$, e que o distingue dos demais conjuntos numéricos. Lembrando-se de que $\mathbb{Q}$, apesar de ser um corpo ordenado, não é completo.

Dados, $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, as *potências* x^n e x^{-n} são definidas como em $\mathbb{Q}$, isto é,

- $x^n = x \cdot x \cdot x \cdot x ... x \cdot x$ (n fatores);
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$;
- $x^0 = 1$, $x \neq 0$.

Como anteriormente, dessas definições segue-se que, dados p, $q \in \mathbb{Z}$ e x, $y \in \mathbb{R}$, tem-se

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}. \tag{2.5}$$

Além disso,

- $(x \cdot y)^p = x^p \cdot y^p$;
- $(x^p)^q = x^{pq}$.

Relembremos agora que, por definição, $\sqrt{2}$ é o número real x tal que $x^2 = 2$.

De um modo geral, prova-se que, se $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, então, existe um *único* número real positivo x tal que

$$x^n = a, \tag{2.6}$$

o qual simbolizamos por $\sqrt[n]{a}$, lê-se *raiz n-ésima* de a.

Por exemplo, o número real $x = \sqrt{3}$ é tal que $x^2 = 3$, enquanto $y = \sqrt[7]{\pi}$ satisfaz $y^7 = \pi$.

Prova-se ainda que a equação (2.6) admite uma única solução, se n é ímpar e a é negativo ou nulo. Igualmente, essa solução é representada por $\sqrt[n]{a}$. Assim, $\sqrt[3]{-5}$ é o número real x tal que $x^3 = -5$.

Note que, como em $\mathbb{Q}$, uma potência de expoente par sempre resulta num número real não-negativo. Dessa forma, *a equação (2.6) não admite solução, se n é par e a é negativo.*

Vale observar também que, adotando-se um procedimento análogo àquele da demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$, prova-se que, *se $a \in \mathbb{N}$, então $\sqrt[n]{a}$ é um número inteiro ou irracional.*

Propriedade 1. Sejam a, b números reais não negativos e m, n $n \in \mathbb{N}$. Então,

i) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

ii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Demonstração. Sejam $x = \sqrt[n]{a}$ e $y = \sqrt[n]{b}$. Temos, então, que $x^n = a$ e $y^n = b$. Multiplicando-se essas igualdades membro a membro, obtemos $(xy)^n = ab$. Logo, por definição, $xy = \sqrt[n]{ab}$ o que prova (i).

A fim de provarmos (ii), façamos $z = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$, isto é, $z^m = \sqrt[n]{a}$. Essa igualdade, porém, nos diz que $(z^m)^n = a$, o que implica $z^{mn} = a$. Segue-se, por definição, que $z = \sqrt[mn]{a}$, o que prova (ii). □

Vejamos, finalmente, como definir a potência $a^{p/q}$ com $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ e $p/q \in \mathbb{Q}$, de tal forma que a equação (2.5) permaneça válida para expoente racionais.

Consideremos inicialmente $a^{1/q}$, $q > 0$. Devemos ter

$$\underbrace{a^{1/q} \cdot a^{1/q} \cdot \ldots \cdot a^{1/q}}_{q \text{ vezes}} = a^{\overbrace{1/q + 1/q + \cdots + 1/q}^{q \text{ vezes}}} = a^{q/q} = a^1 = a.$$

Fazendo-se $x = a^{1/q}$, essa igualdade nos diz que $x^q = a$, o que nos sugere a definição

$$a^{1/q} = \sqrt[q]{a}.$$

Agora, se $p > 0$, temos

$$(\sqrt[q]{a})^p = \underbrace{a^{1/q} \cdot a^{1/q} \cdot \ldots \cdot a^{1/q}}_{p \text{ vezes}} = a^{\overbrace{1/q + 1/q + \cdots + 1/q}^{p \text{ vezes}}} = a^{p/q}.$$

Definimos, então,

$$a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Por fim, se $p < 0$ e $a > 0$, definimos

$$a^{p/q} = \frac{1}{a^{-p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}.$$

Por exemplo,

$$3^{1/2} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \pi^{-2/3} = \frac{1}{\pi^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{\pi})^2}.$$

Uma aplicação à geometria. Vimos, anteriormente, que $\sqrt{2}$ é um número irracional. De modo análogo, pode-se verificar que $\sqrt{3}$ é também irracional. Vejamos, então, no teorema e corolário que se seguem, que uma interessante propriedade dos triângulos equiláteros no plano decorre desse fato.

Teorema 1. *Seja ABC um triângulo em $\mathbb{R}^2$ com todos os vértices em $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 as medidas de seus lados. Então, a área de ABC é um número racional e, para cada $i = 1, 2, 3$, ℓ_i^2 é um número inteiro.*

Demonstração. Uma vez que os vértices de ABC estão em $\mathbb{Z}^2$, podemos inscrevê-lo num retângulo com lados paralelos aos eixos coordenados, conforme indicado na Figura 2.1. Assim, cada lado ℓ_i é a hipotenusa de um triângulo retângulo Δ_i cujos comprimentos dos catetos são inteiros. Daí, e do Teorema de Pitágoras, tem-se que ℓ_i^2 é inteiro para todo $i = 1, 2, 3$.

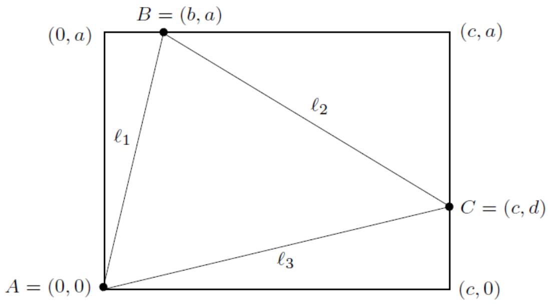

Figura 2.1: a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$.

Temos, também, que as áreas dos triângulos Δ_i são números racionais, bem como que a área do retângulo circunscrito a ABC é um número inteiro. Logo, a área de ABC, sendo a diferença entre as áreas do retângulo e a soma das áreas dos triângulos Δ_i, é um número racional. Isso conclui nossa demonstração. $\square$

Corolário 1. *Não existe um triângulo equilátero em $\mathbb{R}^2$ com todos os vértices em $\mathbb{Z}^2$.*

Demonstração. De fato, se um tal triângulo existisse, o quadrado de seu lado, ℓ^2, seria inteiro e sua área, $\ell^2\sqrt{3}/4$, seria racional, pelo Teorema 1. Isso, porém, contradiria o fato de que $\sqrt{3}$ é irracional. $\square$

Capítulo 3

Cardinalidade de Conjuntos

"A noção de infinito, de que é preciso se fazer um mistério
em Matemática, resume-se no seguinte princípio:
Depois de cada número inteiro existe sempre um outro."
J. Tannery

Neste capítulo, introduziremos os conceitos de cardinalidade e enumerabilidade de conjuntos. Em seguida, estabeleceremos a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$, bem como a não enumerabilidade de $\mathbb{R}$. Concluiremos, então, com a demonstração do Teorema de Cantor.

Relembremos, inicialmente, o conceito de função.

Definição 4. Dados conjuntos A e B, uma *função* f de A em B, denotada por

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \to & y = f(x), \end{array}$$

é uma correspondência que a cada elemento x, de A, associa um *único* y de B. Nesse caso, os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de *domínio* e *contra-domínio* da função f.

Na definição de função, como se pode observar, não se impõem condições aos elementos do contra-domínio B, isto é, alguns desses podem ou não se corresponder com elementos de A, sugerindo a seguinte definição.

Definição 5. Numa função $f : A \to B$, o conjunto formado pelos elementos do contra-domínio B que correspondem a elementos do domínio A é chamado de *conjunto-imagem* de f, o qual denotamos por $Im(f)$. Se $y \in B$ é tal $y = f(x)$ para algum $x \in A$, dizemos que y é a *imagem* de x (por f). Em símbolos:

$$Im(f) = \{y \in B;\ y = f(x),\ x \in A\}.$$

A igualdade $y = f(x)$ que define uma função $f : A \to B$, chamada de *lei de correspondência* ou *expressão* de f, nem sempre é dada por uma expressão algébrica, mesmo que A e B sejam conjuntos numéricos.

Por exemplo, dado o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, a função

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \cup \{0\} \\ & n & \to & f(n), \end{array}$$

tal que $f(n)$ é igual à quantidade de números primos (positivos) menores que n, está bem definida, isto é, para cada natural n, existe um único número correspondente $f(n)$ em $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Vimos que o conjunto-imagem de uma função pode ou não ser igual ao seu contra-domínio. Igualmente, podemos observar que dois elementos distintos do domínio de uma função podem ter imagens iguais.

Essas considerações nos levam a concluir que, nem sempre, uma função estabelece uma correspondência biunívoca entre o seu domínio e o contra-domínio.

Veremos agora que quando essa correspondência acontece pode-se inverter a função, realizando então uma operação que, num certo sentido, é semelhante à inversão de números reais.

Definição 6. Uma função $f : A \to B$ é dita *sobrejetiva*, se $Im(f) = B$, isto é, se para todo $y_0 \in B$ existe x_0 em A tal que $f(x_0) = y_0$. Se $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$, f é dita *injetiva*. Uma função que é sobrejetiva e injetiva é dita *bijetiva*.

Observemos agora que, uma função bijetiva $f : A \to B$ estabelece uma correspondência biunívoca entre seu domínio A e seu contra-domínio B. Nesse caso, para cada y de B existe um único x de A que lhe é correspondente, definindo assim uma função de B em A, a qual denominamos *inversa* de f, e denotamos por f^{-1}. Dizemos, então, que f é uma função *invertível*.

Note que se f não for sobrejetiva, a condição imposta pela palavra "cada" será violada, enquanto, se não for injetiva, a condição violada será a imposta pela palavra "única". Segue-se que:

Uma função é invertível se, e somente se, é bijetiva.

Definição 7. Diz-se que dois conjuntos A e B têm *mesma cardinalidade*, quando existe uma função bijetiva $f : A \to B$. Nesse caso, escreve-se $\#A = \#B$. A é dito *finito*, se, para algum $n \in \mathbb{N}$, $\#A = \#\{1, \ldots, n\}$. Caso contrário, A é dito *infinito*. A é dito *enumerável*, se $\#A = \#\mathbb{N}$.

Observemos que se $A \subset \mathbb{N}$ não é finito ou vazio, então é enumerável. De fato, temos que $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$, em que n_1 é o menor elemento de A, n_2 é o menor elemento de $A - \{n_1\}$, e assim por diante. O mesmo argumento se aplica a qualquer conjunto X enumerável, isto é, se $A \subset X$ é infinito, então A é enumerável.

Teorema 2. *$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são conjuntos enumeráveis.*

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} (n-1)/2, & n \text{ ímpar.} \\ -n/2, & n \text{ par.} \end{cases}$$

Claramente, f é uma bijeção, cuja inversa, $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, é dada por:

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} -2m, & m < 0. \\ 2m+1, & m \geq 0. \end{cases}$$

Logo, $\#\mathbb{Z} = \#\mathbb{N}$, donde $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Dessas considerações, segue-se também que $\#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$. Porém, pela unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos, temos que a função $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dada por $g(m,n) = 2^n.3^m$, é injetiva. Logo,

$$\#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#g(\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

isto é, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tem a mesma cardinalidade que um subconjunto de $\mathbb{N}$. Desta forma, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, já que é infinito. Logo, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é enumerável. Agora, basta observarmos que $\mathbb{Q}$ tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde se infere que $\mathbb{Q}$ é enumerável. □

Teorema 3. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Demonstração. Para demonstrarmos que $\mathbb{R}$ não é enumerável, basta mostrarmos que $[0,1]$ não é enumerável.

Suponhamos, por absurdo, que o intervalo $[0,1]$ seja enumerável. Como esse conjunto contém o conjunto infinito $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, vemos que $[0,1]$ é também infinito.

Seja $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\}$ uma enumeração de $[0,1]$. Podemos escrever cada x_j na forma decimal infinita fazendo-se, por exemplo, $0,5 = 0,49999\cdots$. Assim,

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & 0, a_{11}a_{12}a_{13}\cdots \\ x_2 & = & 0, a_{21}a_{22}a_{23}\cdots \\ \vdots & & \vdots \\ x_i & = & 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

($a_{i1},\ a_{i2},\ a_{i3},\ \cdots \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ 9\}$ são os algarismos da representação decimal de x_i)

Vamos agora definir o número $b = 0, b_1b_2b_3\cdots$ da seguinte maneira:

$$b_1 = 0, \text{ se } a_{11} \neq 0 \text{ e } b_1 = 1, \text{ se } a_{11} = 0;$$

$$b_2 = 0, \text{ se } a_{22} \neq 0 \text{ e } b_2 = 1, \text{ se } a_{22} = 0$$

e assim por diante. Ou seja, $b_n = 0$, se $a_{nn} \neq 0$ e $b_n = 1$, se $a_{nn} = 0$, para cada n.

Vejamos agora que o número b é diferente de x_1, pois, por construção, sua primeira casa decimal é diferente da primeira casa decimal de x_1 ($b_1 \neq a_{11}$).

O número b também é diferente de x_2, pois $b_2 \neq a_{22}, \cdots$. Para cada n, o número b é diferente de x_n, pois $b_n \neq a_{nn}$.

Mas isso contradiz o fato de $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ ser uma enumeração de $[0,1]$, já que encontramos um número $b \in [0,1]$ que não estava nessa lista. Portanto o intervalo $[0,1]$, e por consequência $\mathbb{R}$, não são enumeráveis. $\square$

Dados conjuntos A e B, dizemos que a cardinalidade de A é *menor que* a de B, e escrevemos $\#A < \#B$, quando existe uma função injetiva $f : A \to B$, e não existe uma função bijetiva de A em B.

Teorema 4. *Sejam X_1, X_2, $\cdots$, X_n conjuntos enumeráveis. A união $X = U_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

Demonstração. Primeiramente vamos observar que, como $X_1 \subset U$, U é infinito.

Os elementos de cada X_1 podem ser colocados em uma lista infinita, já que X_n é enumerável. Assim, vamos considerar a matriz

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

em que a primeira linha é formada por todos os elementos do conjunto X_1, a segunda linha, pelos elementos de X_2, e assim por diante.

Os elementos da matriz são os elementos do conjunto U. Para mostrar que U é um conjunto enumerável, teríamos que escrever os elementos de U em uma lista sem repetições. Como não sabemos quais termos se repetem na matriz, vamos colocar os elementos da matriz em uma sequência (que pode ter repetições),

$$s : x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, \cdots$$

observe que a sequência s tem uma regra de formação (semelhante ao que realizamos nos racionais): primeiramente começamos com o termo x_{11}, depois os termos cuja soma dos índices é 3, a saber, x_{21} e x_{12}, depois termos cuja soma dos índices é 4: x_{31}, x_{22} e x_{13} e assim por diante.

Como conseguimos escrever todos os elementos da matriz em forma de uma sequência, existe uma função de $\mathbb{N}$ no conjunto U, que associa os números 1, 2, 3,

$\cdots$, respectivamente a x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{31}, x_{22}, x_{13}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, $\cdots$. Como a primeira linha da matriz já é um conjunto enumerável, logo infinito, os termos da sequência s formam um conjunto enumerável.

Assim, U é um subconjunto infinito do conjunto enumerável formado pelos termos da sequência s. Pelo teorema 3, U é enumerável. $\square$

Teorema 5. *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

Demonstração. Para demonstramos que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é enumerável, relembremos que, pela Definição 2, o conjunto dos números reais é formado pela união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto dos números irracionais seja enumerável. Como o conjunto dos números racionais é enumerável, como demonstrado no Teorema 2, a união do conjunto dos números irracionais com o conjuntos dos números racionais é enumerável, como demonstrado pelo teorema 5. Logo o conjunto dos números reais é enumerável.

Mas isso contradiz o fato do conjunto dos números reais não ser enumerável, como demonstrado no Teorema 3. Portanto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não é enumerável. $\square$

Teorema de Cantor. *Seja A um conjunto arbitrário. Então, $\#A < \#P(A)$.*

Demonstração. Consideremos a função que associa a cada $a \in A$ o conjunto $\{a\} \in P(A)$. Claramente, tal função é injetiva.

Tomemos agora uma função arbitrária $f : A \to P(A)$ e verifiquemos que f não pode ser bijetiva. Para tanto, considere o conjunto $X = \{a \in A; a \notin f(a)\}$. Afirmamos que $X \notin \operatorname{Im}(f)$, donde f não é sobrejetiva. De fato, suponha, por absurdo, que exista $a \in A$, tal que $f(a) = X$. Se $a \in X$, então, por definição, $a \notin f(a)$, o que significa que $a \notin X$. Se $a \notin X$, tem-se que $a \notin f(a)$, o que implica que $a \in X$. Assim, ambas as hipóteses, $a \in X$ e $a \notin X$, levam a uma contradição. Logo, f não é sobrejetiva e, em particular, não é bijetiva. $\square$

Segue-se, então, do Teorema de Cantor, o fato notável de que existem infinitas ordens de infinito.

Bibliografia

[1] HALMOS, Paul R. ***Teoria Ingênua dos Conjuntos*** . 1nd Ed., Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

[2] LIMA, Elon L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. ***A Matemática do Ensino Médio*** . vol.1.9nd Ed., Rio de Janeiro: Editora SBM, 1997.

[3] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert ***O que é Matemática?*** . 1nd Ed., Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

[4] ANDRADE, Rubens Leão de; LIMA, Ronaldo Freire de ***Pré-Calculo*** . 2nd Ed., Natal: EDUFRN, 2012.

[5] LIMA, Elon L. ***Números e Funções Reais*** . 1nd Ed., Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

[6] LIMA, Elon L. ***Análise Real– Volume 1*** . 11nd Ed., Coleção "Matemática Universitária": Editora do IMPA, 2012.

[7] LIMA, Elon L. ***Curso de Análise – Volume 1*** . 14nd Ed., Coleção "Projeto Euclides": Editora do IMPA, 2013.

[8] HEFEZ, A. ***Programa de Iniciação Científica da OBMEP: Iniciação à Aritmética*** . Editora do IMPA, 2009.

[9] HEFEZ, A. ***Elementos de Aritmética*** . Coleção "Textos Universitários": Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[10] DOMINGOS, Hygino H. ***Fundamentos de Aritmética*** . São Paulo: Atual Editora Ltda, 1998.

[11] FOMIN, D., ITENBERG, L., GENKIN, S. ***Círculos Matemáticos: A Experiência Russa*** . 1nd Ed., Editora do IMPA, 2010.