Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Recorrências Lineares Aplicadas ao Ensino da Matemática na Educação Básica

Raimundo Pio Mendes Vieira Júnior

Teresina - 2013

Raimundo Pio Mendes Vieira Júnior

Dissertação de Mestrado:

Recorrências Lineares Aplicadas ao Ensino da Matemática na Educação Básica

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira
Co-Orientador:
Prof. Msc. João Benício de Melo Neto

Teresina - 2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Serviço de Processamento Técnico da Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Comunitária Jornalista Carlos Castello Branco

V657r Vieira Júnior, Raimundo Pio Mendes.
Recorrências lineares aplicadas ao ensino da matemática na educação básica / Raimundo Pio Mendes Vieira Júnior. – 2013.
26 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Piauí, Centro de Ciência da Natureza, 2013.
"Orientador: Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira".
"Co-Orientador: Prof. Msc. João Benício de Melo Neto".

1. Álgebra Cominada. 2. Matemática - Estudo e Ensino. 3. Combinações. 4. Permutações. I. Título.

CDD 512.1

Dedico este trabalho à minha mãe Maria do Clero Neiva Leal Vieira e minha amada esposa Maria José Sousa.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa pela compreensão nos momentos em que estive ausente das atividades rotineiras e pelo apoio incondicional durante todo o curso.

Agradeço à minha mãe e familiares, pelo incentivo e apoio em todas as situações.

Agradeço aos meus professores que me forneceram os caminhos do conhecimento.

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Dr. Gilvan Lima de Oliveira e Prof. Msc. João Benício de Melo Neto, profissionais admiráveis e sem os quais este trabalho não seria uma realidade. Obrigado pela atenção, desprendimento e paciência com que sempre me atenderam.

Agradeço aos meus colegas de trabalho, pela compreensão e incentivo durante todo o período.

Agradeço aos meus colegas de turma, pelos longos dias de estudo que vivenciamos juntos.

Agradeço (a CAPES, ao CNPq, a FAPEPI) pelo apoio financeiro.

"Álgebra é generosa; ela geralmente nos dá mais do que lhe pedimos.".

D'Alembert.

Resumo

O presente estudo sobre Recorrência Aplicada ao Ensino Médio, busca produzir um texto que possa fornecer ferramentas para utilização na educação básica,bem como, estimular o leitor aprofundar-se e prosseguir com o estudo do tema. As recorrências lineares de primeira e segunda ordens, e método geral de resolução de recorrência linear homogênea foram trabalhados visando uma fundamentação teórica, para facilitar a aplicação em problemas da educação básica como combinátoria, probabilidade e progressões.

Abordamos também problemas clássicos, com objetivos de situar historicamente o processo de evolução dessa teoria, contextualizando e demonstrando as motivações que levaram ao estudo de recorrência, pois é um tema que aparece com muita frequência durante o desenvolvimento histórico da matemática. Concluímos que a recorrência é um tema fundamental para consolidação de algumas habilidades como construir significados para os números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, de maneira sistematizada, facilitando assim o processo de ensino-aprendizagem de análise combinatória, probabilidade, binômio de Newton e progressões, assuntos da grade curricular da educação básica.

Abstract

This study Recurrence Applied to High School, seeks to produce a text that can provide tools for use in basic education, as well as stimulate the reader deepen and continue the study of the subject. Recurrences linear first and second order, and general method for solving linear homogeneous recurrence were developed toward a theoretical foundation to facilitate application to problems of basic education as combinatorics, probability and progressions.

We also approach the classic problems with goals to situate historically the process of evolution of this theory, contextualizing and demonstrating the motivations that led to the study of recurrence, it is a theme that appears quite frequently during the historical development of mathematics. We conclude that recurrence is a fundamental issue for some consolidate skills as construct meaning for the natural numbers, integers, rational, real and complex, in a systematic manner, thus facilitating the process of teaching and learning combinatorics, probability, binomial Newton and progressions, Affairs of the curriculum of basic education.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como campo de discussão recorrências que está presente em conteúdos matemáticos da educação básica, como generalizações de sequências, progressões, problemas de funções, entre outros. Por isso, o mesmo vem sendo abordado no ensino médio, inclusive aparecendo em alguns livros didáticos, sendo assim uma ferramenta importante no processo de ensino-aprendizagem da matemática, além de estabelecer o primeiro contato com a noção de infinito, ajudando assim a consolidar a competência de "Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos".

O principal foco desse trabalho está no compromisso de fornecer ferramentas para que possa ser trabalhado alguns conteúdos da grade curricular da Educação Básica, apoiado na teoria de recorrência, facilitando assim a aprendizagem, pois essa teoria ajuda nos três estágios do ensino da matemática defendida por Lucchesi (1991) que são: Observação de situações problemas, já existentes e a serem solucionadas; Experimentação com elementos da matemática, onde deve aparecer o aspecto de causa efeito; Formalização de aspecto lógico-dedutivo da matemática, este é o mais delicado, pois o aluno vai entrar em contato com o método dedutivo e as demonstrações. Para demonstrar uma proposição, ele vai de uma afirmação que supõe ser verdadeira (a hipótese), e através de uma sequência lógica de novas afirmações, chegar ao que se quer demonstrar (a tese).

No capítulo 1, buscamos uma fundamentação teórica através de definições, propriedades e exemplos de forma sucinta sobre a teoria, destacando as recorrências lineares de primeira e segunda ordens, bem como um método geral de resolução de recorrências lineares homogêneas. Em alguns momentos essa teoria será desenvolvida sobre tópicos da Álgreba Linear, principalmente nas sequências determinadas pelas recorrências, ajudando assim a generalização de alguns resultados.

No capítulo 2, destacamos três exemplos clássicos da aplicação da teoria de recorrência. O método de Hierão para extrair raízes quadradas, um dos primeiros registros na história da matemática da utilização de noções de recorrência. A Torre de Hanói, um jogo inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883, onde o número mínimo de movimentos necessários para conseguir atingir o objetivo do jogo, é determinado por uma recorrência linear de primeira ordem. Também um problema do livro Liber Abacci, Os Coelhos de Fibonacci, envolvendo a sequência Fibonacci uma das sequências mais conhecidas na matemática, onde sua solução é determinada por uma recorrência linear de segunda ordem.

No capítulo 3, mostramos alguns contéudos do ensino médio, Combinátoria, Probabilidade, Binômio de Newton, Progressões aritméticas e geoméricas que podem ter a aprendizagem facilitada com a utilização da teoria de recorrência. Alguns estudiosos, como Guzmán (1992) defendem a utilização de alguns contéudos da Matemática Discreta na educação básica por considerar conteúdos suficientemente elementares, podendo assim figurar em um programa de matemática da educação básica, o que ocorre em alguns países.

Portanto, esse trabalho tem como objetivo principal auxiliar no processo de construção da aprendizagem dos conteúdos abordados no capítulo 3, de maneira contextualizada, significativa, proporcionando a interdisciplinaridade.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

Daremos início a este trabalho explorando algumas definições básicas sobre sequências, recorrências lineares de primeira e segunda ordem, objetivando um embasamento teórico para posteriormente, fazer aplicações em resoluções de problemas matemáticos da educação básica.

1.1 Sequências

Uma sequência de números reais pode ser entendida como uma lista infinita e ordenada de números reais, ou seja, existirão o primeiro termo, o segundo termo, o terceiro termo e assim sucessivamente. Uma sequência é uma função definida no conjunto dos números naturais, que cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $x_n \in \mathbb{R}$.

Usaremos a notação x_n para o n-ésimo termo da sequência X. Em particular a sequência que é fornecida o primeiro termo (ou são fornecidos os primeiros termos) e os termos seguintes são dados em função dos termos anteriores, são ditas sequências definidas por Recorrência.
Alguns exemplos de sequências e operações definidas por recorrências:

i) A sequência definida por: $x_0 = 3$ e $x_{n+1} = 3x_n + 1$, para n $\in$ IN. Então, temos a sequência $X = \{3, 10, 31, 94, \dots\}$

ii) A famosa sequência de Fibonacci que tem a seguinte relação de Recorrência: $x_0 = 1, x_1 = 1$ e $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, para n $\in$ IN. Logo a sequência Fibonacci é $X = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \ldots\}$

iii) A operação exponenciação x^n com x $\in$ IR e n $\in$ IN, pode ser definida por recorrências, observe:

$x_0 = x$ e $x_{n+1} = x_n.x$, para x $\in$ IR e n $\in$ IN.

iv) A definição da multiplicação de dois números naturais m.n por recorrência:

$n = 1 \to m.1 = m$

$m.n = m(n-1) + m$, para m,n $\in$ IN.

v) O fatorial de um número natural n $\in$ IN é definido pela recorrência:

$0! = x_0 = 1$

$(n+1)! = x_{n+1} = (n+1).x_n$

vi) Segundo Markuchevitch (1985), uma sequência periódica é recorrente. Podemos exemplificar com a dízima periódica $\frac{263}{495} = 0,5313131\ldots.$ que representa uma recorrência onde: $x_0 = 5$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$,.... Portanto $x_{n+2} = x_n$ para todo $n \geqslant 1$.

Uma recorrência da forma: $x_{n+p} = C_1 x_{n+p-1} + \ldots + C_p x_n + f(n)$, para todo $n \geqslant p$, C_i é uma função em n com i $\in \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ e $C_p \neq 0$, corresponde a uma recorrência linear de ordem p. Quando $f(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea.

1.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Quando $p = 1$, a equação $x_{n+p} = C_1 x_{n+p-1} + \ldots + C_p x_n + f(n)$, tem a forma, $x_{n+1} = C_1 x_n + f(n)$, e é denominada recorrência linear de primeira ordem. A sua resolução será dividida em dois casos:

Primeiro as recorrências lineares de primeira ordem homogêneas ($f(n) = 0$), cuja forma é $x_{n+1} = C_n x_n$. Podemos resolver esse tipo de recorrência da seguinte maneira:

$x_1 = C_0.x_0$

$x_2 = C_1.x_1$

$x_3 = C_2.x_2$

$x_4 = C_3.x_3$

....

$x_n = C_{n-1}.x_{n-1}$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos $x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} C_i\right).x_0$.

Exemplo: A solução da Recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n, x_0 = 2$, é $x_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1}(i+1)\right].x_0$. Como sabemos que $\prod_{i=0}^{n-1}(i+1) = 1.2.3 \ldots n = n!$. Portanto, $x_n = 2n!$.

Um caso particular $x_{n+1} = Cx_n$, para C constante, a solução é $x_n = \left[\prod_{i=0}^{n-1} C\right].x_0$, como $\prod_{i=0}^{n-1} C = C.C \ldots C = C^n$. Logo, $x_n = C^n x_0$.

Agora vamos analisar as recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas ($f(n) \neq 0$), o tipo mais simples dessas recorrências é $x_{n+1} = x_n + f(n)$. Podemos obter a solução da seguinte forma:

$x_1 = x_0 + f(0)$

$x_2 = x_1 + f(1)$

$x_3 = x_2 + f(2)$

$x_4 = x_3 + f(3)$

....

$x_n = x_{n-1} + f(n-1)$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, obtemos $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$

Exemplo: Para resolver a recorrência $x_{n+1} = x_n + n$ e $x_0 = 2$, basta observar:

$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} k$. Como $\sum_{n=0}^{n-1} k = 0+1+2+\ldots+n-1 = \frac{(0+n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, então $x_n = 2 + \frac{n(n-1)}{2}$.

A solução da equação $x_{n+1} = x_n + C$ para C constante é $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} C$. Como $\sum_{k=0}^{n-1} C = C + C + \ldots + C = n.C$, segue que $x_n = x_0 + n.C$.

Para analisarmos os casos mais complexos de recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas, usaremos o seguinte teorema:

Teorema 1: Toda recorrência linear de primeira ordem não homogênea pode ser transformada em uma recorrência do tipo $y_{n+1} = y_n + f(n)$.

Demonstração: Seja $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, com $h(n) \neq 0$, sendo a_n uma solução não nula de $x_{n+1} = g(n).x_n$, então $a_{n+1} = g(n).a_n$ e substituindo $x_n = a_n y_n$ na recorrência, obtemos:

$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \Rightarrow a_{n+1}y_{n+1} = a_n g(n) y_n + h(n)$

$\Rightarrow g(n).a_n y_{n+1} = a_n g(n) y_n + h(n)$, dividido por $g(n).a_n$, temos:

$y_{n+1} = y_n + h(n).[a_n g(n)]^{-1}$, fazendo $h(n).[a_n g(n)]^{-1} = f(n)$, segue:

$y_{n+1} = y_n + f(n)$ cuja a solução corresponde $y_n = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$. Portanto a solução da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ é $x_n = a_n \left(y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \right)$ com $y_0 = \frac{x_0}{a_0}$.

Exemplo: Para resolvermos a recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 2^n$ e $x_0 = 1$, observa-se que $a_n = 2^n$ é uma solução da recorrência $x_{n+1} = 2x_n$. Agora substituindo $x_n = 2^n y_n$ na recorrência, obtemos $2^{n+1} y_{n+1} = 2.2^n y_n + 2^n$, que dividido por 2^{n+1} resulta em $y_{n+1} = y_n + 2^{-1}$ cuja solução é $y_n = y_0 + \frac{n}{2}$. Note que $\frac{x_0}{a_0} = 1$, logo $x_n = 2^n + n2^{n-1}$.

Uma recorrência linear de primeira ordem não homogêna com coeficientes constantes tem a seguinte forma: $x_{n+1} = ax_n + b$. Usaremos o Teorema 1 para determinar sua solução.

Uma solução de $x_{n+1} = ax_n$ é $x_n = a^n$. Substituindo $x_n = a^n y_n$ na recorrência obtemos $a^{n+1}y_{n+1} = a.a^n y_n + b$, que dividido por a^{n+1} resulta em $y_{n+1} = y_n + \dfrac{b}{a^{n+1}}$, cuja solução é $y_n = y_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{a^{k+1}}$, ou seja, $y_n = y_0 + \dfrac{b(1-a^n)}{a^n(1-a)}$ e $x_0 = y_0$. Portanto, $x_n = a^n x_0 + \dfrac{b(1-a^n)}{(1-a)}$.

Esta recorrência $x_{n+1} = ax_n + b$, também pode ser analisada em um ponto de vista de um operador linear, A:$\mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$, no espaço $\mathbb{R}^\infty$, cujos elementos são as sequências $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$, onde o operador A associa a cada sequência x a nova sequência $y = Ax$, com $y_n = x_{n+1} - ax_n$.

Temos o conjunto V = $\{x \in \mathbb{R}^\infty; Ax = b\}$, formado pelas soluções do sistema linear $Ax = b$, e N(A) é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$. Fixamos $c \in V$, isto é, $Ac = b$ e afirmamos que $V = c + N(A)$, com $d \in N(A) \Rightarrow A(c+d) = Ac + ad = b + 0 = b \Rightarrow c + d \in V$. Logo $c + N(A) \subset V$. Reciprocamente,

$x \in V \Rightarrow x = c + (c + d) = c + d$.

$\Rightarrow b = Ax = A(c + d) = Ac + Ad = b + Ad$

$\Rightarrow b = b + Ad$

$\Rightarrow Ad = 0$

$\Rightarrow x = c + d \in c + N(A)$. Então $V \subset c + N(A)$.

Portanto, a solução da equação $Ax = b$ é a soma de uma solução para um determinado valor de b (usaremos $Ax = 0$) com a solução particular da equação $Ax = b$.

a) A solução $Ax = 0$, é a mesma da recorrência do tipo $x_{n+1} = ax_n$ que é $x_n = a^n x_0$.

b) Sendo **c** uma solução particular temos:

$c = ac + b$, logo $c = b(1-a)^{-1}$, como $c \neq 1$ e sendo p o primeiro termo, temos:

$x_n = a^n p + (1-a)^{-1}b$. Note que $x_0 = p + (1-a)^{-1}b \Rightarrow p = x_0 - (1-a)^{-1}b$

$\Rightarrow x_n = a^n[x_0 - (1-a)^{-1}b] + (1-a)^{-1}b$ substituindo segue:

$x_n = a^n x_0 - a^n(1-a)^{-1}b + (1-a)^{-1}b$

$x_n = a^n x_0 - \dfrac{a^n b}{(1-a)} + \dfrac{b}{(1-a)}$

$x_n = a^n x_0 + \dfrac{b(1-a^n)}{(1-a)}$

1.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Daremos ênfase às recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, que tem a forma: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f(n)$, com $b \neq 0$. Inicialmente analisaremos as recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes homogêneas, ou seja, recorrências do tipo: $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$.

De acordo com Lima (2001), essa equação pode ser representada pelo sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ x_{n+2} = -bx_n - ay_n \end{cases}$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$ é a matriz correspondente ao sistema. Então o polinômio característico é dado por $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, onde I é a matriz identidade. Portanto, $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$.

Os teoremas a seguir, tem como objetivo determinar as soluções das recorrências lineares de ordem 2 com coeficientes constantes.

Teorema 1: Sendo r uma raiz da equação característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ então a sequência $R = \{1, r, r^2, \ldots, r^n, \ldots\}$ é solução da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$.

Demonstração: Sendo $r \neq 0$ e substituindo $x_n = r^n$ na recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, obtemos: $r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = r^n(r^2 + ar + b) = r^n.0 = 0$, ou seja, $x_n = r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$

Para determinar o espaço das soluções, definimos S como conjunto das sequências numéricas que satisfazem a recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ e consideramos $x_n = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y_n = (y_1, y_2, \ldots)$ em S e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$x_n + y_n = (-ax_{n-1} - bx_{n-2}) + (-ay_{n-1} - by_{n-2})$

$x_n + y_n = -a(x_{n-1} + y_{n-1}) - b(x_{n-2} + y_{n-2})$
e $\alpha x_n = \alpha(-a x_{n-1} - b x_{n-2}) = -a(\alpha x_{n-1}) - b(\alpha x_{n-2})$

Para todo $n \neq 2$ o que vem provar que S é sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$.

Teorema 2: Sejam x_n a solução da recorrência $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$ e r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, raízes reais da equação caracteristica. Então, $\beta = \{\{r_1^n\}, \{r_2^n\}\}$ é uma base de S e neste caso, existem $c, d \in \mathbb{R}$, tais que $x_n = c r_1^n + d r_2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: As sequências $R = \{1, r_1, r_1^2, \ldots, r_1^n, \ldots\}$ e $S = \{1, r_2, r_2^2, \ldots, r_2^n, \ldots\}$ são soluções da equação $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$, como $r_1 \neq r_2$, os vetores inicias $(1, r_1)$ e $(1, r_2)$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$, logo R e S são linearmente independentes em $\mathbb{R}^\infty$. Então toda solução desta equação se exprime, de modo único, como combinação linear. Assim a solução geral da recorrência $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$ é portanto,

$$x_n = c r_1^n + d r_2^n$$

Logo, $\beta = \{\{r_1^n\}, \{r_2^n\}\}$ é uma base de S.

Exemplo: Seja a seguinte recorrência: $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n$, onde $x_0 = x_1 = 1$. O polinômio característico dessa equação será: $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Pelo Teorema 2, temos que$\{(2^n), (4^n)\}$ é uma base para as soluções da recorrência. logo existem c, d tais que: $x_n = c r_1^n + d r_2^n$. Então:
$x_0 = 1 \Rightarrow c(2)^0 + d(4)^0 = 1 \Rightarrow c + d = 1$
$x_1 = 1 \Rightarrow c(2)^1 + d(4)^1 = 1 \Rightarrow 2c + 4d = 1$
Resolvendo este sistema, obtemos $c = \dfrac{3}{2}$ e $d = \dfrac{-1}{2}$. Assim a solução geral da equação é $x_n = \dfrac{3}{2}(2^n) - \dfrac{1}{2}(4^n)$.

Teorema 3: Sejam x_n a solução da recorrência $x_{n+2} + a x_{n+1} + b x_n = 0$ e $r \neq 0$ a raiz real dupla da equação característica, isto é, $2r + a = 0$. Então, $\beta = \{\{r^n\}, \{n.r^n\}\}$ é uma base de S e, neste caso, existem $c, d \in \mathbb{R}$, tais que $x_n = c r^n + d n r^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Temos que $R = \{1, r, r^2, \ldots, r^n, \ldots\}$ é solução da recorrência $x_{n+2} +$

$ax_{n+1} + bx_n = 0$ e veja que a sequência $S = \{0, r, 2r^2, \ldots, nr^n, \ldots\}$, ou seja, $x_n = nr^n$ também é solução da recorrência, pois:

$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = (n+2)r^{n+2} + a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = r^n[n(r^2 + ar + b) + r(2r + a)] = r^n[n.0 + r.0 = 0$. Observe que os vetores $(1, r)$ e $(0, r)$ são linearmente independentes, logo a solução geral da recorrência tem o formato:

$x_n = cr^n + dnr^n = 0$, assim, $\beta = \{\{r^n\}, \{nr^n\}\}$ é uma base de S.

Exemplo: Seja a seguinte recorrência: $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$, onde $x_0 = x_1 = 1$. O polinômio característico dessa equação será: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, cuja a raiz é $r = 3$. Pelo Teorema 3, temos que $\{(3^n), n(3^n)\}$ é uma base para as soluções da recorrência. Logo existem c, d tais que: $x_n = cr^n + dnr^n$. Então:

$x_0 = 1 \Rightarrow c(3)^0 + d.0(3)^0 = 1 \Rightarrow c = 1$

$x_1 = 1 \Rightarrow c(3)^1 + d.1.(3)^1 = 1 \Rightarrow 3c + 3d = 1 \Rightarrow d = \dfrac{-2}{3}$

Resolvendo este sistema, obtemos $c = 1$ e $d = \dfrac{-2}{3}$. Assim a solução geral da equação é $x_n = 1.(3^n) - \dfrac{2}{3}n(3^n) = 3^n - \dfrac{2}{3}n(3^n)$.

Teorema 4: Sejam x_n a solução da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$ e $r = \alpha \pm \beta i = \rho[cos(\theta) + isen(\theta)]$ ($\beta \neq 0$ e $i = \sqrt{-1}$) raízes complexas da equação característica. Então, $\beta = \{\rho cos(n\theta), \rho sen(n\theta)\}$ é uma base de S e neste caso, existem $c, d \in \mathbb{R}$, tais que $x_n = \rho^n[c.cos(n\theta) + i.d.sen(n\theta)]$.

Demonstração: Sendo $Z = \rho[cos(\theta) + i.sen(\theta)]$, pelo Teorema 1 temos que $R = \{1, z, z^2, \ldots, z^n, \ldots\}$ é solução $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$, logo $\rho^n cos(n\theta)$, $\rho^n sen(n\theta)$, e as sequências $R = \{1, \rho cos(\theta), \rho^2 cos(2\theta), \ldots, \rho^n cos(n\theta), \ldots\}$ e

$S = \{0, \rho sen(\theta), \rho^2 sen(2\theta), \ldots, \rho^n sen(n\theta), \ldots\}$ são também solução da recorrência.

. Note que $(1, \rho cos\theta)$ e $(0, \rho sen\theta)$ são vetores linearmente independentes, logo a solução geral da recorrência tem a forma:

$x_n = \rho^n[c.cos(n\theta) + i.d.sen(n\theta)]$. Assim, $\beta = \{\rho cos(n\theta), \rho sen(n\theta)\}$ é uma base de S.

Exemplo: Seja a seguinte recorrência: $x_{n+2} = -9x_n$, onde $x_0 = x_1 = 1$. O polinômio característico dessa recorrência será: $\lambda^2 + 9 = 0$, cujas raízes: $z_1 = 3i = 3[\cos(\frac{\pi}{2}) + i.\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})]$ e $z_2 = -3i = 3[\cos(\frac{3\pi}{2}) + i.\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2})]$. Pelo Teorema 4, temos que $\{3\cos(n\frac{\pi}{2}), 3\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2}\}$ é uma base para as soluções da recorrência. Logo existem c, d tais que: $x_n = 3^n[c.\cos(n\frac{\pi}{2}) + i.d.\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})$. Então:

$x_0 = 1 \Rightarrow 3^0[c.\cos 0 + d.\operatorname{sen} 0] = 1 \Rightarrow c = 1$

$x_1 = 1 \Rightarrow 3^1[c.\cos\frac{\pi}{2} + d.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}] = 1 \Rightarrow d = \dfrac{1}{3}$

. Assim a solução geral da equação é $x_n = 3^n[\cos(n\frac{\pi}{2}) + i.\dfrac{1}{3}.\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{2})]$.

Agora analisaremos as recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas, ou seja, $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f(n)$.

Teorema 5: Seja a_n uma solução da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f(n)$, substituindo $x_n = a_n + y_n$ na recorrência obtemos $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$.

Demonstração: substituindo $x_n = a_n + y_n$ na recorrência obtemos: $(a_{n+2} + a.a_{n+1} + ba_n) + (y_{n+2} + a.y_{n+1} + by_n) = f(n)$. Como a_n é solução da recorrência $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = f(n)$, temos $a_{n+2} + a.a_{n+1} + ba_n = f(n)$. Logo $a_{n+2} + a.a_{n+1} + ba_n = 0$ e $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$.

Para Lima et al. (2006), esses tipos de recorrências tem solução formada por duas parcelas, uma solução qualquer da não-homogênea e a solução da homogênea. A solução da homogênea foi trabalhada anteriormente, e por tentativa encontraremos a solução da não-homogênea.

Exemplos: Resolvendo a recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3.4^n$, obtemos:
A equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$, então a solução da homogênea $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, é $y_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Agora para determinar a solução particular S_n, da recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3.4^n$, devemos substituir S_n em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ para encontrarmos $1 + 3.4^n$.

Supomos que S_n seja $S_n = An + B + C.4^n$. Substituindo na recorrência: $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + 3.4^n$, temos:

$A(n+2) + B + C.4^{n+2} - 5[A(n+1) + B + C.4^{n+1}] + 6(An + B + C.4^n) = 1 + 3.4^n$

$An + 2A + B + 16.C.4^n - 5An - 5A - 5B - 20.C.4^n + 6An + 6B + 6.C.4^n = 1 + 3.4^n$

$2An - 3A + 2B + 2.C.4^n = 1 + 3.4^n$.

Logo: $2An = 0 \Rightarrow A = 0$, $-3A + 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$ e $2C = 3 \Rightarrow C = \frac{3}{2}$.

$S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}.4^n$

Portanto, a solução da recorrência é a soma y_n com S_n: $X_n = y_n + S_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{3}.4^n$.

1.4 Solução para Recorrências Lineares Homogêneas

Dada a recorrência: $a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n = 0$, $n \geqslant 0$ em que $a_0, \ldots, a_p$ são constantes, e os valores de x_i são conhecidos para $i = 0, \ldots, p-1$. Supondo que a recorrência admite uma solução do tipo $x_n = \lambda^n$, em que $\lambda \neq 0$ é um parâmetro inteiro. Temos o seguinte polinômio característico: $a_p \lambda^p + a_{p-1} \lambda^{p-1} + \ldots + a_0 \lambda^0$.

O polinômio característico tem as raízes complexas $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ com multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, respectivamente. Segundo Moreira (2007), as raízes da recorrência $a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n = 0$ são exatamente as sequências (x_n) da forma $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \ldots + Q_r(n)\lambda_r^n$, onde $Q_1, \ldots, Q_r$ são polinômios com grau $(Q_i) < \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Por exemplo, se λ_i é uma raiz simples então Q_i é constante.

Sendo $P(x) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \ldots + a_0$ um polinômio, podemos afimar que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz Rec(P(x)), ou seja, a recorrência cujo polinômio caracteristico é P(x) se $a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe as seguintes afirmações:

a) Se as sequências (X_n) e (Y_n) satisfazem Rec(P(x)) e $c \in \mathbb{C}$ então $(Z_n) = X_n + cY_n$ satisfaz a Rec(P(x)).

Se as sequências (X_n) e (Y_n) satisfazem Rec(P(x)) temos, $a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n = 0$ e $a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \ldots + a_0 y_n = 0$. Note que $(Z_n) = X_n + cY_n = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n + c(a_p y_{n+p} + a_{p-1} y_{n+p-1} + \ldots + a_0 y_n) = 0 \Rightarrow a_p(x_{n+p} + c y_{n+p}) + a_{p-1}(x_{n+p-1} + c y_{n+p-1}) + \ldots + a_0(x_n + c y_n) = 0$. Assim $(Z_n) =$

$X_n + cY_n$ satisfaz a Rec(P(x)).

b) Se $Q(X) = b_r X^r + b_{r-1}X^{r-1} + \ldots + b_0$ e (X_n) satisfaz Rec(P(x)) então, (X_n) satisfaz Rec(P(X)Q(X)).

Pois, Se (X_n) satisfaz Rec(P(x))então, $a_p x_{n+p} + a_{p-1}x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n = 0$.

Como $P(X).Q(X) = (a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0)(b_r X^r + b_{r-1}X^{r-1} + \ldots + b_0)$,

este polinômio gera a recorrência

$(a_p x_{n+p} + a_{p-1}x_{n+p-1} + \ldots + a_0 x_n)(b_r x_{n+r} + b_{r-1}x_{n+r-1} + \ldots + b_0 x_n) = 0.(b_r x_{n+r} + b_{r-1}x_{n+r-1} + \ldots + b_0 x_n) = 0$. Concluímos que (X_n) satisfaz Rec(P(X)Q(x)).

c) (X_n) satisfaz Rec(P(x)) se e só se $(Y_n) = \frac{X_n}{\lambda^n}$ satisfaz Rec(P(λX)). Para concluir este fato, basta substituir $X_{n+j} = \lambda^{n+j}Y_{n+j}$ em $\sum_{j=0}^{p} a_j X_{n+j} = 0$.

d) Se $S_n = \sum_{p=0}^{n} x_p$ então (x_n) satisfaz Rec(P(x)) se e só se (S_n) satisfaz Rec((x-1)P(x)).

Para provar é necessário apenas substituir $x_{n+j+1} = S_{n+j+1} - S_{n+j}$ em $\sum_{j=0}^{n} a_j x_{n+j+1} = 0$.

Agora, provaremos por indução que $Y_n = Q(n)$ satisfaz a $\mathrm{Rec}((x-1)^m)$, de fato:

(i) Para m = 1, temos que $Y_n = Q(n)$, com $Q(n) = C$ constante, satisfaz a Rec(x-1), pois $Y_{n+1} - Y_n = 0 \Rightarrow Q(n+1) - Q(n) = 0 \Rightarrow C - C = 0$.

(ii) Por hipótese de indução: $Y_n = Q(n)$ satisfaz a $\mathrm{Rec}((x-1)^{m-1})$. Então usando o item (d) $S_n = \sum_{i=1}^{n} Q(i)$ satisfaz a $\mathrm{Rec}((x-1)(x-1)^{m-1})$, ou seja, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Q(i)$ satisfaz a $\mathrm{Rec}((x-1)^m)$. Note que, pelo item (c) podemos afimar que $\sum_{i=1}^{n} Q(i)\lambda^n$ satisfaz a $\mathrm{Rec}((x-\lambda)^m)$.

Observe que $(x-\lambda)^m = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}.(x-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(x-\lambda_r)^{\alpha_r} = P(x)$ pelo o item (b), $x_n = \sum_{i=1}^{r} Q_i(n)\lambda_i^n$, com o grau $Q_i < \alpha_i$ para $1 \leqslant i \leqslant r$, satisfaz Rec(P(x)).

Contudo, a solução geral da recorrência linear homogênea com coeficientes constantes é $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \ldots + Q_r(n)\lambda_r^n$.

Capítulo 2

Problemas Clássicos

2.1 O método de Hierão para Extrair raízes quadradas

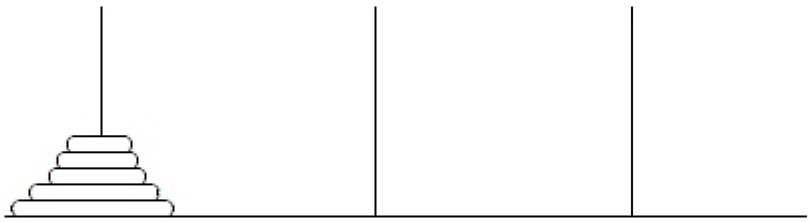
Segundo Hodgson (2008), Hierão apresenta no início do livro I da sua obra Métricas um problema que utiliza a fórmula para o cálculo de área de um triângulo cujos três lados são conhecidos (a, b e c), $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. No qual $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ é o semi-perímetro do triângulo. Neste problema, Hierão aplica sua fórmula ao triângulo cujos lados medem, respectivamente, a = 7, b = 8 e c = 9. Neste caso, é necessário calcular $\sqrt{12.5.4.3} = \sqrt{720}$. Então ele afirma como 720 não é um quadrado perfeito, e sugere a extração da raiz quadrada de 720, da seguinte maneira: Como o primeiro número quadrado perfeito maior que 720 é 729, cuja raiz é 27, divida 720 por 27, e o resultado é $26+\dfrac{2}{3}$, adicione 27 e obtemos $53+\dfrac{2}{3}$, tome a metade, que é igual a $26+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$ multiplicado por ele mesmo dá $720 + \dfrac{1}{36}$; de modo que a diferença (dos quadrados) é $\dfrac{1}{36}$. Para tornar esta diferença menor do que $\dfrac{1}{36}$, colocaremos $720 + \dfrac{1}{36}$ achado há pouco no lugar de 729 e, repetimos o processo, acharemos que a diferença (sobre os quadrados) é muito menor do que $\dfrac{1}{36}$.

Hierão trabalha a ideia de repetir o cálculo, a partir do valor obtido anteriormente, afim de aproximar a raiz quadrada procurada tanto quanto quisermos. Temos assim um dos mais antigos exemplos de um algoritmo de recorrência. Obtemos, pela interação do processo de Hierão, uma sucessão infinita, $\{a_n\}$ de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tal que $\lim_{x\to\infty} a_n = \sqrt{k}$. Nesta sucessão, cada termo está relacionado com o anterior por $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right)$.

Temos portanto uma sucessão definida por recorrência, um método poderoso para definir sucessões (ou, equivalentemente, funções f: IN$\rightarrow$ IR).

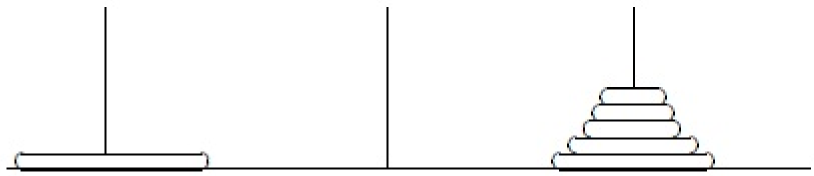
2.2 A Torre de Hanói

É um jogo bastante conhecido que pode ser encontrado em lojas de brinquedos de madeira ou ainda facilmente fabricado. O jogo é composto por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde estão fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor.

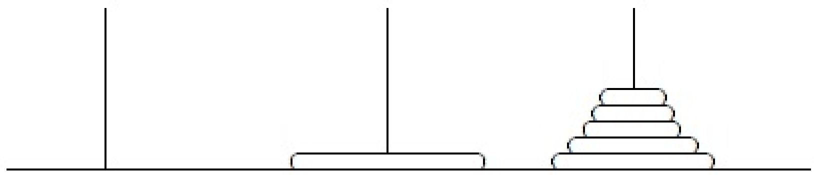


O objetivo do jogo consiste em transferir a pilha de discos para uma outra haste, deslocando um disco de cada vez, de modo que, a cada passo, nenhum disco esteja sobre um outro de diâmetro menor. Alguns questionamentos surgem naturalmente como: O jogo tem solução para cada n $\in$ IN? Em caso afirmativo, qual é o número mínimo J_n de movimentos para resolver o problema com n discos?

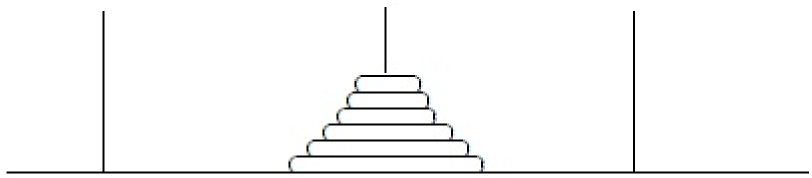
Para responder a primeira pergunta usamos indução: Lógico que P(1) é verdade, pois para um disco basta um movimento ($J_1 = 1$). Suponha que P(n) seja verdadeiro, para algum n; ou seja, que o jogo com n discos tem solução. Vamos provar que o jogo com n + 1 discos também tem solução. Para isso, por hipótese o problema para os n discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livres possui solução J_n.



Agora, transfira o disco que restou na pilha original (o maior dos discos) para a haste vazia:



Feito isto, resolva novamente o problema para os n discos que estão juntos, transferindo-os para a haste que contém o maior dos discos: Isso mostra que o problema com n + 1 discos também possui solução, e, portanto, por Indução Matemática, que P(n) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.



Para resolver a segunda questão basta observarmos que para resolver o problema para $n + 1$ discos com o menor número de passos, temos, necessariamente, que passar duas vezes pela solução mínima do problema com n discos. Logo $J_{n+1} = 2J_n + 1$.

Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, note que uma solução não nula de $J_{n+1} = 2J_n$ é $J_n = 2^{n-1}$, fazendo $J_n = 2^{n-1}x_n$ obtemos $2^n x_{n+1} = 2^n x_n + 1$, ou seja, $x_{n+1} = x_n + 2^{-n}$, logo:

$x_2 = x_1 + 2^{-1}$

$x_3 = x_2 + 2^{-2}$

....

$x_{n-1} = x_{n-2} + 2^{-n+2}$

$x_n = x_{n-1} + 2^{-n+1}$

Adicionando as igualdades acima, obtemos $x_n = x_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots + 2^{-n+2} + 2^{-n+1}$

Como $2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\ldots+2^{-n+2}+2^{-n+1}$ é uma progressão geométrica de razão 2^{-1} ,temos:

$x_n = x_1 + \dfrac{2^{-1}.[(2^{-1})^{n-1}-1]}{2^{-1}-1}$.

$x_n = x_1 - 2^{1-n} + 1$.

Mas $J_n = 2^{n-1}x_n$ e $J_1 = 1$, segue que $x_1 = 1$ e $x_n = 2 - 2^{1-n}$. Portanto, $J_n = 2^{n-1}(2-2^{1-n}) = 2^n - 1$.

Então a fórmula do número mínimo J_n de movimentos para resolver o problema com n discos é: $J_n = 2^n - 1$ para $n \in$ IN.

2.3 Os Coelhos de Fibonacci

Segundo Lopes (2006), um problema clássico do matemático italiano Leonardo de Pisa, cujo enunciado é "Quando casais de coelhos podem ser produzidos a partir de um único casal durante um ano se: a) cada casa originar um novo casal em cada mês, o qual se torna fértil a partir do segundo mês; e b) não ocorrerem mortes?". Apresenta a seguinte solução:

mês	Número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Portanto, o número de casais de coelhos num determinado mês é igual ao número total de casais dos dois meses anteriores. Se denotarmos o número de coelhos existentes no enésimo mês por x_{n-1}, temos, então, que $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$; $x_0 = x_1 = 1$, ou seja, uma recorrência linear de ordem 2 homogênea, que determina uma sequência de números naturais, chamada de sequência de Fibonacci, cujos elementos, chamados de números de Fibonacci, possuem propriedades aritméticas notáveis, que ainda hoje são objetos de investigação.

Uma recorrência do tipo $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ só permite determinar o elemento x_{n+2} se conhecermos os elementos anteriores x_{n+1} e x_n, que, para serem calculados, necessitam do conhecimento dos dois elementos anteriores, e assim por diante. Fica, portanto, univocamente definida a sequência quando são dados x_0 e x_1. A sequência de Fibonacci corresponde à recorrência, onde $x_0 = x_1 = 1$.

Para obtermos a fórmula fechada para o termo geral da sequência, é necessário observarmos que a equação característica é $r^2 = r+1$ e as suas raízes são dadas por $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Então,
$X_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Para determinar C_1 e C_2, basta usar $x_0 = x_1 = 1$, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

temos que $c_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $c_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Logo, $X_n = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Isto é, $X_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

Então a fórmula do termo geral da sequência de Fibonacci é:
$X_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Aplicações de Recorrência no Ensino Médio

3.1 Combinatória

Na maioria dos materias didáticos do Ensino Médio é comum a presença do problema clássico de combinatória que busca determinar a quantidade de blocos distintos que podem ser formados utilizando as letras a, b e c, onde a quantidade de letras de um bloco é denominado comprimento. Por exemplo, a quantidade de blocos de comprimento 3, é: (aaa), (aab), (aba), (baa), (aac), (aca), (caa), (abb), (bab), (bba), (acc), (cac), (cca), (abc), (acb), (bac), (bca), (cab), (cba), (bbb), (bbc), (bcb), (cbb), (bcc), (cbc), (ccb) e (ccc), ou seja, 27 blocos. Poderíamos ter utilizado o princípio fundamental da contagem, $3.3.3 = 27$.

Agora, vamos calcular quantos blocos de comprimento 3, podemos formar, tal que a letra **a** não ocupe posições adjacentes: (aba), (aca), (abb), (bab), (bba), (acc), (cac), (cca), (abc), (acb), (bac), (bca), (cab), (cba), (bbb), (bbc), (bcb), (cbb), (bcc), (cbc), (ccb) e (ccc), ou seja, 22 blocos. Poderíamos ter utilizado o princípio fundamental da contagem, $3.3.3 = 27$ retirando , (aaa) 1 possibilidade, (aay) com $y \in \{b, c\}$ 2 possibilidades, (yaa) com $y \in \{b, c\}$ 2 possibilidades, um total de 5 possibilidades, então temos $27 - 5 = 22$.

Usaremos a notação f(n) para uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, onde f(n) representa o número de blocos de comprimento 3 que posso formar com as letras a,b,c tal que a letra a não ocupe posições adjacentes. Note que:

f(1) = 3, pois os blocos de comprimento 1 são (a), (b), (c).

f(2) = 8, pois os blocos de comprimento 2 são (ab), (ac), (ba), (b,c), (b,b), (c,a), (c,b), (c,c).

Para generalizar, analisaremos os problemas dos blocos de comprimento n da seguinte forma, a última posição de cada bloco pode ser ocupada de duas maneiras, veja:

(i) Se a última posição for ocupada pela letra a, temos que a penúltima posição não pode ser ocupada pela letra a, logo podemos usar b e c, duas possibilidades. Para a ocupação das posições restantes $(n-2)$, é a mesma situação de determinarmos o número de blocos de comprimento $n-2$, ou seja, $f(n-2)$. Então o número de blocos com a letra a na última posição é $2f(n-2)$.

(ii) Se a última posição for ocupada pela letra b ou c, temos 2 possibilidades. Para a ocupação das posições restantes $(n-1)$, é a mesma situação de determinarmos o número de blocos de comprimento $n-1$, ou seja, $f(n-1)$. Logo o número de blocos com a letra b ou c na última posição é $2f(n-1)$.

Portanto, o número de blocos de comprimento n que podemos formar com as letras a,b,c tal que a letra a não ocupe posições adjacentes é $f(n) = 2f(n-1) + 2f(n-2)$, uma recorrência linear de segunda ordem do tipo $x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0$ onde $x_1 = 1+\sqrt{3}$ e $x_2 = 1-\sqrt{3}$. Resolvendo a recorrência obtemos $x_n = \left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$.

Podemos usar a fórmula da solução geral para resolver o seguinte problema: Quantos blocos de comprimento 4 posso formar com as letras a,b,c tal que a letra a não ocupe posições adjacentes é:
$x_n = \left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^4 + \left(\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^4$.

$x_n = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)(28+16\sqrt{3}) + \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)(28-16\sqrt{3}).$
$x_n = \left(\frac{180+104\sqrt{3}}{6}\right) + \left(\frac{180-104\sqrt{3}}{6}\right).$
$x_n = \frac{360}{6}$. Assim, temos 60 blocos.

3.2 Probabilidade

Um problema bastante explorado nos livros do ensino médio são lançamentos consecutivos de uma moeda honesta (experimentos independentes). Adotaremos a seguinte notação: k quando o resultado do lançamento for cara e c para coroa. Verificamos que os possíveis resultados deste experimento podem ser representados por blocos formados pelas letras k e c de comprimento n. Um total de blocos de n lançamentos é 2^n, agora vamos considerar que em n lançamentos não possa ficar duas caras consecutivas, ou seja, determinar o número de blocos onde as letras k não fiquem adjacentes, basta analisar as possibilidades para a última posição de cada bloco, que pode ser ocupada de duas maneiras, veja:

Usaremos a notação f(n) para uma função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, onde f(n) representa o número de blocos de comprimento n que posso formar com as letras c,k tal que a letra k não ocupe posições adjacentes.

(i) Se a última posição for ocupada pela letra k, temos que a penúltima posição não pode ser ocupada pela letra k, logo podemos usar apenas c, uma possibilidade. Para a ocupação das posições restantes $(n-2)$, é a mesma situação de determinarmos o número de blocos de comprimento $n-2$, ou seja, $f(n-2)$. Então o número de blocos com a letra k na última posição é $f(n-2)$.

(ii) Se a última posição for ocupada pela letra c. Para a ocupação das posições restantes $(n-1)$, é a mesma situação de determinarmos o número de blocos de comprimento $n-1$, ou seja, $f(n-1)$. Logo o número de blocos com a letra c na última posição é $f(n-1)$. Portanto, o número de blocos onde as letras k não fiquem adjacentes é $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Agora dividindo $f(n)$ por 2^n obtemos $\frac{f(n)}{2^n} =$

$\frac{f(n-1)}{2^n} + \frac{f(n-2)}{2^n}$, como a probabilidade de que em n lançamentos não tenhamos duas caras consecutivas é dado por $P(n) = \frac{f(n)}{2^n}$, segue que $P(n-1) = \frac{f(n-1)}{2^{n-1}}$ e $P(n-2) = \frac{f(n-2)}{2^{n-2}}$, Concluimos que $P(n) = \frac{1}{2}P(n-1) + \frac{1}{4}P(n-2)$, uma recorrência linear de segunda ordem do tipo: $4x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$, com $P(2) = \frac{3}{4}$ e $P(3) = \frac{5}{8}$ cuja solução é $x_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$.

Usando a fórmula da solução geral, podemos resolver o seguinte problema: probabilidade de que em 4 lançamentos não tenhamos duas caras consecutivas é:

$x_4 = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^4 + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^4$

$x_4 = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{56+24\sqrt{5}}{256}\right) + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{56-24\sqrt{5}}{256}\right)$

$x_4 = \left(\frac{640+288\sqrt{5}}{2560}\right) + \left(\frac{640-288\sqrt{5}}{2560}\right)$

$x_4 = \frac{1280}{2560}$

$x_4 = \frac{1}{2}$.

3.3 Progressões Aritméticas

Podemos definir uma Progressão Aritmética (P.A) como sendo uma sequência de números (a_n) tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} somado a uma constante r chamada de razão. Portanto, é dado o primeiro termo a_0 e define-se $a_n = a_{n-1} + r$; se $n \geqslant 1$, ou seja, recorrência linear de primeira ordem. Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, observe que:

$a_1 = a_0 + r$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

....

$a_{n-1} = a_{n-2} + r$

$a_n = a_{n-1} + r$

Adicionando membro a membro as igualdades acima, obtemos $a_n = a_0 + n.r$

Então a fórmula do termo geral de um progressão aritmética é: $a_n = a_0 + n.r$ para todo n $\in$ IN.

Podemos também representar uma Progressão Aritmética através de um outra recorrência, basta observar que $a_{n+2} = a_{n+1} + r$ e $a_{n+1} = a_n + r$, eliminando o valor de r nas igualdades obtemos $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, logo $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, ou seja, uma recorrência linear de ordem 2. Note que a equação característica da recorrência $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ é $r^2 - 2r + 1 = 0$, onde 1 é raiz dupla, então a solução da recorrência é $x_n = C.1^n + dn1^n$, logo $x_0 = c$ e $x_1 = c + d$, segue $d = x_1 - x_0 = r$. Portanto, $x_n = x_0 + n.r$.

3.4 Progressões Geométricas

Uma Progressão Geométrica (P.G) é uma sequência de números (a_n) tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} multiplicado por uma constante q chamada de razão.
Portanto, é dado o primeiro termo a_0 e define-se $a_n = a_{n-1}.q$; se $n \geqslant 1$, uma recorrência de primeira ordem. Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem n da sequência, observe que:

$a_1 = a_0.q$

$a_2 = a_1.q$

$a_3 = a_2.q$

....

$a_{n-1} = a_{n-2}.q$

$a_n = a_{n-1}.q$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos $a_n = a_0.q^n$

Então a fórmula do termo geral de um progressão geométrica é: $a_n = (a_0).q^n$ para todo n $\in$ IN, uma recorrência linear de primeira ordem.

3.5 Binômio de Newton

Considere o binômio $(a+b)^n$, onde n é um número natural, tal que seu desenvolvimento tem a seguinte fórmula:
$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n}b^n$.

Sabemos que, se $\binom{n}{p+1} = k\binom{n}{p}$, então $k = \dfrac{n-p}{p+1}$. Para achar uma fórmula fechada para o termo de ordem k+1 do desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$ onde $0 \leqslant k \leqslant n$, observe que:

$$T_1 = a^n$$
$$T_2 = T_1.\frac{(n-0)}{(0+1)}.\frac{b}{a} = T_1.\frac{n.b}{a}$$
$$T_3 = T_2.\frac{(n-1)}{(1+1)}.\frac{b}{a} = T_2.\frac{(n-1).b}{2a}$$
$$T_4 = T_3.\frac{(n-2)}{(2+1)}.\frac{b}{a} = T_3.\frac{(n-2).b}{3a}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_{k+1} = T_k.\frac{(n-k+1)}{(k-1+1)}.\frac{b}{a} = T_k.\frac{(n-k+1).b}{ka}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades acima, obtemos

$$T_{k+1} = a^n.\frac{nb}{a}.\frac{(n-1)b}{2a}.\frac{(n-2)b}{3a}\ldots\frac{(n-k+1)b}{ka}$$
$$T_{k+1} = \frac{a^n.b^k}{a^k}.\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$$
$$T_{k+1} = a^{n-k}.b^k.\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Como $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$, temos que:

$T_{k+1} = a^{n-k}.b^k.\binom{n}{k}$ Então a fórmula do termo geral do desenvolvimento de um binômio $(a+b)^n$ é:

$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k$ para todo n,k $\in$ IN e $0 \leqslant$ k $\leqslant$ n.

Capítulo 4

Considerações Finais

Este trabalho contempla um estudo inicial de Recorrências Lineares, abordando aspectos teóricos e aplicações em situações-problema da educação básica. Apresentando uma linguagem acessível e objetiva àqueles que estão tendo o primeiro contato com o tema.

Este estudo permite a utilização de novas ferramentas, a fim de auxiliar no processo ensino-aprendizagem dos seguintes conteúdos de Matemática da Educação Básica: Combinatória, Probabilidade, Progressões e Binômio de Newton, conteúdos no qual é observado um desinteresse por parte de alguns alunos, justificado pelo elevado grau de dificuldade na resolução de problemas, fenômeno vivenciado em sala de aula. Dessa forma, Recorrência poderá ajudar a solucionar tal dificuldade, pois esse conteúdo torna-se atraente devido a possibilidade de unificar soluções através de uma solução geral, além de motivá-los a aplicar essa teoria em outras áreas da Matemática, como: Geometria, Funções, entre outras.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, E. L. et al. - *A Matemática do Ensino Médio*. 2 vol. SBM, 2006.

[2] Lima, E. L. - *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária - IMPA, 2001.

[3] Markuchevitch, A. - *Sequências Recorrentes.* Iniciação na Matemática, Editora Mir Moscou 1985.

[4] Callioli, A.C., Domingues, H.H. - *Algebra Linear e Aplicações.* Editora Atual, 1990.

[5] Feller, W.- *An Introduction to Probability and its Applications.* 2 vol. J.Wiley.

[6] Graham, R.L., Knuth.D.E. - *Matemática Concreta.* LTC Ed. 1995.

[7] Lucchesi,D.C. - *Metodologia do Ensino da Matemática.*Cortez. São Paulo, 1995.

[8] Guzmán, M. - *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática* Bulleti de la Societat Catalana de Matemàtiques - núm 7, 7-33. Barcelona, 1992.

[9] Moreira, C.G. - *Sequências Recorrentes.* Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina - nº 4, pp 55-69. 2007.

[10] Hodgson, B. - *Uma Breve História da Quinta Operações.* Departamento de Matemática e Estatística - Universidade de Laval, Québec, 2008.

[11] Lopes, A.K.T. et al. - *Matemática.* SEED-PR. 2006.