UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

UM PROBLEMA CONTEXTUALIZADO: ANÁLISE DA SÉRIE HARMÔNICA

Marcelo Moura Melo

MANAUS
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Marcelo Moura Melo

UM PROBLEMA CONTEXTUALIZADO: ANÁLISE DA SÉRIE HARMÔNICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira

MANAUS
2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Melo, Marcelo Moura
M528u Um problema contextualizado: análise da série harmônica / Marcelo Moura Melo. 2019
36 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Nilomar Vieira de Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Série Harmônica. 2. Soma de Inversos de Naturais. 3. Divergência de Série. 4. Zeta de Riemann. 5. Aplicações de Séries. I. Oliveira, Nilomar Vieira de II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

MARCELO MOURA MELO

UM PROBLEMA CONTEXTUALIZADO:
ANÁLISE DA SÉRIE HARMÔNICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovado em 30 de setembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Presidente

Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Membro interno

Profa. Dra. Nadime Mustafa Moraes
Membro externo

AGRADECIMENTOS

Obviamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira, pela paciência e sabedoria com que me guiou nesta trajetória. Também aos meus colegas de sala do PROFMAT pelo ambiente saudável e familiar construídos.

Gostaria de deixar registrado o meu reconhecimento à minha família, pois sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio. Em especial a minha amada esposa Jane Fontes Guedes e minhas lindas filhas Rute Guedes Melo e Sara Guedes Melo. Aos meus pais, *in memoriam*, sem eles nada aqui faria sentido.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta Dissertação e conclusão deste trabalho.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família,
pelos momentos de ausência.

A imaginação é mais importante que o
conhecimento.
(Albert Einstein)

Sê humilde para evitar o orgulho, mas
voar alto para alcançar a sabedoria.
(Santo Agostinho)

RESUMO

Este trabalho traz uma questão contextualizada utilizada em livros de cálculo e física, revistas de matemáticas, edições técnicas, também encontrada em exames de acesso a universidades brasileiras e instituições exteriores. A matemática será apresentada não só como uma disciplina de análise pura, mas como uma ferramenta de apoio interdisciplinar. Este problema clássico de física provocou uma grande repercussão na comunidade dos mais profícuos e iluminados matemáticos. Este contexto histórico é atualmente empregado como exercício de uma disciplina didática na construção do aprendizado e do saber. O objetivo da contextualização é ajudar na fixação dos conceitos básicos, muitas vezes omissos ou negligenciados em sala de aula. Também visa consolidar uma base de apoio para educadores, uma vez que foi realizada uma pesquisa nas mais diversas literaturas disponíveis.

Palavras-chave: Série Harmônica, Soma dos inversos dos números naturais, Séries divergentes.

ABSTRACT

This workbrings a contextualized question used in calculus and physics books, math magazines, technical issues, also found in exams to Access Brazilian universities and external institutions. Mathematics will be presented not only as a pure analytical discipline, but as na interdisciplinary support tool. This classic problem of physics provoked a great repercussion in the community of the most prolific and enlightened mathematicians. This historical context is currently used as na exercise of didactic discipline in the construction of learning and knowledge. The purpose of contextualization isto help in setting the basic concepts of term overlooked or neglected in the classroom. It also aims to consolidate a base of support for educators, since a research was carried out in the most diverse literature available.

Keywords: Harmonic Series, Sum of the inverses of natural numbers, Divergent series.

LISTAS DE SIGLAS UTILIZADAS

UFAM – Universidade Federal do Amazonas

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

PROFMAT - Pós-graduação stricto sensu para aprimoramento da formação profissional de professores de matemática da educação básica.

MEC – Ministério da Educação e Cultura

ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

RPM – Revista do professor de Matemática

SiSU – Sistema de Seleção Unificada

ICM – Congresso Internacional de Matemáticos

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A motivação, consequentemente objetivo deste trabalho foi interligar, conectar diversas áreas do conhecimento, ideias e conceitos por exemplo, que são esquecidos ou desprezados nos ensinos básico ou fundamental ou médio.

O MEC, através do ENEM, implementou na década de 90 questões contextualizadas visando melhor avaliar as habilidades dos alunos egressos do ensino médio. Também já se registravam essas práticas entre outras instituições, adotavam questões contextualizadas em seus vestibulares, principalmente na segunda fase, com questões discursivas ou abertas. Por força da federalização e redução de custos, a adesão das universidades públicas na adoção do ENEM, como admissão em suas faculdades, foi indiscutivelmente fator preponderante nessa consolidação. Ainda merece destaque o papel do SiSU, o qual reduziu a maratona de exames submetidos aos alunos secundaristas e demais interessados, a oportunidade de visualização nacional de suas preferências e vocações, auxiliando a melhor alocação de recursos humanos.

Neste trabalho é apresentado e analisado um problema utilizado na admissão em instituções brasileiras e internacionais, bem como livros texto adotados na formação acadêmica destas instituções. Este problema foi utilizado mais recentemente no vestibular do ITA 2009 e, em 1974, foi utilizado na admissão na Universidade Estatal Lomonossov de Moscou. Nos livros de Cálculo pesquisados é encontrado direta ou indiretamente na análise de séries infinitas. Foi adaptado para retratar diretamente uma questão resolvida por Leonardo Euler. Esta resolução despertou o desenvolvimento de estudos minuciosos da Teoria dos Números, promoveu uma revisão conceitual sobre limites e infinito. Portanto a contextualização trouxe uma conexão histórica e seus desdobramentos em diversas áreas do conhecimento.

No próximo capítulo iniciamos com o enunciado da questão e em seguida apresentaremos duas resoluções do problema. A interpretação desta resolução desencadeia a análise minuciosa feita por Leonardo Euler sobre série harmônica. Mostramos ainda neste capítulo três demonstrações que a série harmônica não era convergente e assim concluímos o capítulo com a solução completa do problema. O resultado surpreendeu a comunidade de matemáticos da época e despertou interesse no aprimoramento deste assunto.

No capítulo seguinte apresentamos o desenvolvimento da análise da série harmônica por Leonardo Euler, o qual aprofundou estudos de logaritmos e apresentou uma expressão convergente envolvendo a série harmônica, obtendo um número conhecido por constante de Euler-Mascheroni e, através da criação da função Zeta, estabeleceu uma conexão entre os números primos, demonstrando de forma elegante, o que já sido provado por Euclides que o números primos são infinitos. Apresentamos um inserto, para utilização em sala de aula, sobre uma expressão para o cálculo de uma tabela de logaritmo, bastante simples e prática. Ainda neste capítulo exibimos um tratamento realizado por Bernardo Riemann, o qual estendeu o domínio da função Zeta para o conjunto dos complexos, criou uma função analítica para valores da parte real inferiores a uma unidade. Formalizamos o enunciado de um problema aberto sugerido por Riemann, ainda hoje provoca arrepios. Também neste capítulo mostramos a conexão do teorema de Gauss sobre o padrão dos números primos.

No próximo capítulo iniciamos com utilização de expressões incidentais obtidas na análise da série harmônica, inicialmente enfocamos um problema de demonstração engenhosa é resolvido de maneira extremamente simples. Também uma bela demonstração para relação entre as médias obtida por Pólya. Em seguida apresentamos algumas aplicações e implicações da expressão demonstrada por Euler. Primeiramente, de maneira lúdica, empregamos o resultado de Euler para auxiliar na resolução do problema do álbum de figurinhas. Nesta ocasião aproveitamos para mostrar o comportamento do crescimento extremamente lento da série harmônica. No segundo exemplo mostramos a resolução de um problema de engenharia, assim informando uma aplicação prática da expressão de Euler. Informamos de maneira rápida, *en passant*, a relação entre a função Exponencial-integral com a expressão de Euler e a função logaritmo-integral.

Em seguida iniciamos um capítulo de apêndices com um problema clássico resolvido por Euler, o problema da Basileia, apresentamos uma resolução alternativa envolvendo expressões obtidas neste trabalho, surpreendentemente no domínio dos complexos. Também apresentamos o comportamento da convergência das séries hipergeométrica. Novamente uma prova sobre infinidade dos números primos, bem como a soma dos seus inversos dos primos é divergente. Finalizamos o capítulo com uma informação histórica de mais uma tentativa da demonstração da hipótese de Riemann.

Finalmente concluímos com um apanhado geral deste trabalho e as perspectivas auspiciosas para entendimento de conceitos inquietantes sobre limites e infinitos.

2. O PROBLEMA

2.1 O Enunciado da Questão[1]:

Até que ponto podemos estender uma pilha de livros idênticos (de massa m e tamanho L) sem que a pilha vire, conforme figura 1?

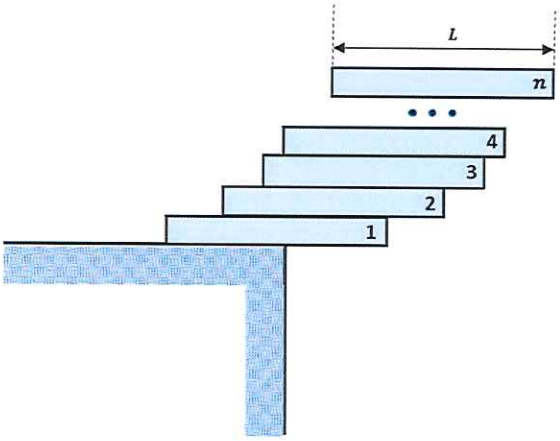


Figura 1: Pilha de livros

Esta questão, um tanto simples no enunciado, revelou-se um problema complexo. Após o tratamento físico envolvido apresentou uma série que inquietou matemáticos e proporcionou o desenvolvimento de um capítulo primoroso do cálculo sobre limites e o conceito de extrema delicadeza de infinito. Ajudou a postular um problema até hoje sem solução: a hipótese de Riemann. Num capítulo recente da história o britânico Michael Atiyah[2], de 89 anos, afirmou que havia resolvido a hipótese de Riemann, um problema matemático de 160 anos. Ele apresentou a solução durante o Fórum Laureate de Heidelberg, na Alemanha, numa segunda-feira (24/09/2018). Se as respostas fossem confirmadas, ele iria receber US$ 1 milhão como premiação do feito. A resposta de Atiyah foi verificada por outros matemáticos e só seria publicada em um periódico científico se totalmente aceita. Caso fosse comprovada, ele poderia reivindicar o prêmio em dinheiro do Clay Mathematics Institute of Cambridge (CMI) – o problema de Riemann é um dos sete "Prêmios do Milênio" não solucionados do CMI, que valem US$ 1 milhão cada um. Porém não foi confirmada sua prova.

2.2 A Resolução do Problema:

Primeiramente considere dois elementos, o de massa m(n-1), formados por (n-1) livros, representado na figura 2 em amarelo e apenas um livro de massa m em azul. Adotando como referência a borda do último livro superior. Então a ordenada do centro de massa (CM) do conjunto será obtida como média ponderada entre as massas e suas respectivas ordenadas:

---

[1]Apresentado aqui uma adaptação das questões publicadas em diversos livros e revistas. [1][2][4][5]

[2] Michael **Atiyah**, medalha Fields de 1966 e Prêmio Abel de 2004. Participou do ICM 2018 no Brasil. Faleceu em 11 de janeiro de 2019.

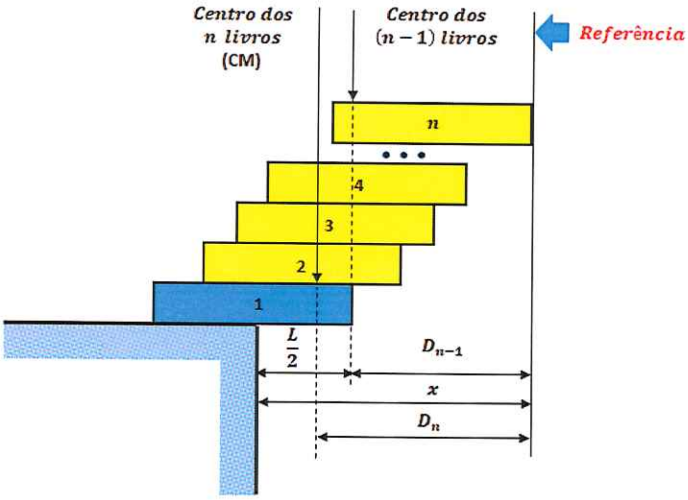


Figura 2: Livros Discretizados.

$$x = D_{n-1} + \frac{L}{2};$$

$P_1 d_1 = P_2 d_2 \Rightarrow m_1 g(x_{CM} - x_1) = m_2 g(x_2 - x_{CM})$; Figura 3.

$\therefore x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$; $(\mathbf{1})$ média ponderada com as massas

Aplicando na figura 2:

$$D_n = \frac{D_{n-1}(n-1) + x.1}{(n-1)+1} \Rightarrow D_n = \frac{D_{n-1}(n-1) + D_{n-1} + \frac{L}{2}}{n}$$

$$\therefore \boldsymbol{D_n = D_{n-1} + \frac{L}{2n}};\ (2)$$

Esta solução é mais simpática aos matemáticos.

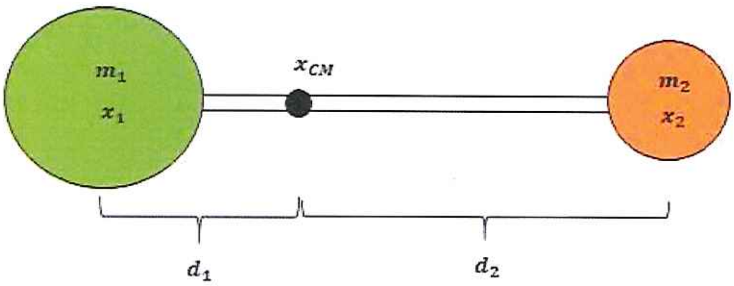


Figura 3. Centro de Massa

Segunda resolução utilizando o conceito físico de equilíbrio dos corpos rígidos. Se um sistema está em equilíbrio, o somatório dos momentos em qualquer ponto do sistema é nulo. Neste caso tomou-se como referência o canto da perna da mesa.

Utilizando o momento no ponto **O** no canto da mesa, conforme Figura 4.

$$\sum M_o = 0$$

$$(n-1)P.d_n - P.\left(\frac{L}{2} - d_n\right) = 0 \Rightarrow d_n = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{2n}};\ (\mathbf{3})$$

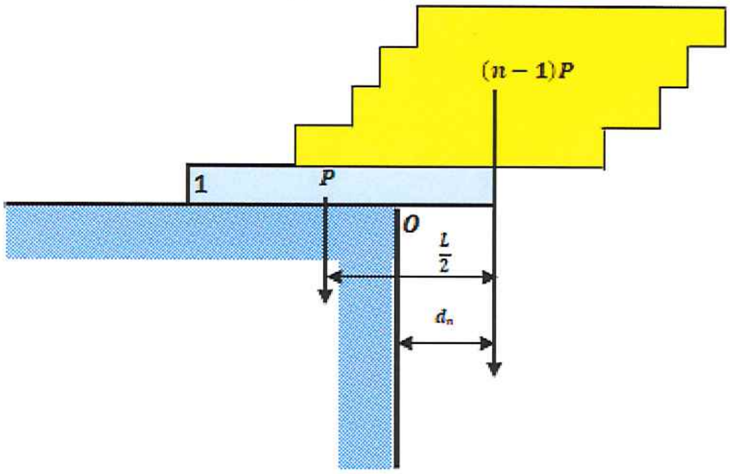


Figura 4: Livros Discretizados

Utilizando a primeira recorrência:

$$D_n = D_{n-1} + \frac{L}{2n} = D_{n-2} + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2n}$$

$$D_n = \frac{L}{2.1} + \frac{L}{2.2} + \frac{L}{2.3} + \cdots + \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2n} = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Aqui começa toda a análise matemática da questão, era preciso saber se este somatório era convergente ou divergente quando n cresce indefinidamente. Já se sabia que muitas séries infinitas com termos decrescentes tenderiam convergir. Um caso emblemático foi a quadratura da parábola por Arquimedes[3].

2.3 A Solução do Problema

2.3.1 A prova de Euler [2]

Seja $\lim_{n\to\infty} S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{n} = H_n = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\ ; (\mathbf{4})$

$S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ a soma dos inversos dos números ímpares

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$ a soma dos inversos dos números pares

$(a) S_1 > S_2$

$(b)\ S = S_1 + S_2$

mas $S_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2}S$

(b) contradiz (a) conclui-se que S diverge.

Desta forma conclui-se que permite empilhar infinitos livros sem tombamento.[4]

---

[3]Arquimedes (287 a.C. – 212 a.C.) provou que a área compreendida pela parábola e uma secante é 4/3 da área do triângulo tomando como base a secante e o vértice no encontro da tangente à parábola paralela a secante.

[4]Considerando-se a Terra plana

2.3.2 A prova de Nicole Oresme [10]

Ele observou que:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

....

Assim por diante, logo:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

e, como a soma de um número infinito de parcelas iguais a ½ cresce indefinidamente, a série diverge.

2.3.3 A prova de Pietro Mengoli [10]

Esta prova baseia-se na desigualdade abaixo:

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}$$

A prova é simples:

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{3n^2-1}{n(n^2-1)}>\frac{3n^2-3}{n(n^2-1)}=\frac{3}{n}$$

Assim,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\cdots>$$
$$1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+\cdots=1+\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Repetindo-se indefinidamente essa operação, teremos uma soma da série harmônica maior do que a soma de um número ilimitado de parcelas iguais a 1, portanto ela diverge.

3. DESENVOLVIMENTO

3.1 A ANÁLISE DE EULER

Antes de entrarmos no desenvolvimento desta profunda análise da série harmônica não podemos esquecer de homenagear a contribuição de um gênio da Matemática, **Leonhard Paul Euler** (1707-1783), aqui nas palavras de Gilberto Garbi.[5]

[5]Gilberto G. **Garbi** é engenheiro formado no ITA e, desde 1969, executivo de empresas de telecomunicação. É o autor do *O Romance das equações algébricas*, prêmio **Jabuti** em 1998.

> [...] incomparável ***Leonhard Euler***, indiscutivelmente o matemático que mais produziu em todos os tempos. Euler era dotado de uma capacidade sem similar de criar novas teorias e de ver coisas originais mesmo em teorias matemáticas e de ver coisas originais mesmo em campos que já pareciam ter sido esgotadas por estudos de outros que o precederam. Dizia-se de Euler que ele calculava com a facilidade com que os outros respiravam e que não havia campo da Matemática que ele tocara sem deixá-lo enriquecido. A vida de Euler constitui um dos mais belos capítulos da história da Matemática não apenas por seus grandes feitos, mas, também, árduas condições que enfrentou na vida, inclusive o fato de haver perdido uma das vistas com apenas 27 anos e ter permanecido totalmente cego por 17 anos, até falecer. Por incrível que possa parecer, mesmo cego Euler produziu verdadeiras obras-primas, realizando mentalmente complexos cálculos e ditando-os a um de seus 13 filhos, que servia de secretário. Euler costumava descobrir teoremas simplesmente praticando com números os mais variados exercícios e brincadeiras para, em seguida, observar o que acontecia com os resultados. Valendo-se da sua intimidade com a Aritmética, pesquisou a série harmônica e nela descobriu fatos admiráveis, por exemplo que a soma de n termos daquela série tem uma relação muito próxima com o logaritmo natura de n, à medida que n cresce. Isso não deve ter sido muito difícil, pois basta preparar uma tabela contendo as somas de n termos da série e procurar aquilo que se costuma chamar de um padrão de comportamento. Como Euler conhecia de cor tabelas logarítmicas, trigonométricas e muitas outras, não deixaria de perceber que os logaritmos naturais estavam ligados à questão. A prova disso, entretanto, não era simples e para chegar a ela Euler realizou um trabalho brilhante. Vale a pena conhecê-lo, como exemplo de sua capacidade de intuir caminhos que ninguém além dele conseguia enxergar.

Primeiramente recordaremos algumas expressões geradoras de alguns polinômios:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$
$$S(x) = 1 + x(1 + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)$$
$$S(x) = 1 + xS(x) \Rightarrow S(x)(1 - x) = 1$$
$$\therefore\ S(x) = \frac{1}{(1-x)}\ quando\ |x| < 1$$
$$\frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{x})} = \mathbf{1} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^5 + \boldsymbol{x}^6 \ldots^{6};\ (\mathbf{5})$$

O grande matemático suíço Leonardo Euler chegou, algumas vezes, a conclusões equivocadas [6]. Por exemplo deduziu que se $x = -1$:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

[6]Obtidos também com a série de Colin **Maclaurin** em 1720

O matemático Ramanujan[7] também trouxe expressões chocantes referentes ao raciocínio sobre o infinito, por exemplo:

$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - \cdots$
$S_1 = \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - \cdots$
$2S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots; \Rightarrow S_1 = \frac{1}{4}$
$S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \cdots$
$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - \cdots$
$S_2 - S_1 = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + \cdots$
$S_2 - S_1 = 4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \cdots)$
$S_2 - S_1 = 4S_2; \Rightarrow S_2 = -\frac{1}{12}; (?)$

Mas ainda:

$S_2 = 1 + (2 + 3 + 4) + (5 + 6 + 7) + (8 + 9 + 10) + \cdots$
$S_2 = 1 + 9 + 18 + 27 + 36 + 45 + 54 + 63 + 72 + \cdots$
$S_2 = 1 + 9(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + \cdots)$
$S_2 = 1 + 9S_2 \Rightarrow S_2 = -\frac{1}{8}; (?)$

Despertou a curiosidade dos cientistas iluministas iluminados e a perplexidade na comunidade dos matemáticos era grande. Desde o paradoxo de Zenão[8] a inquietude para tratar esta questão era crescente, reuniram-se as mais brilhantes mentes. Finalmente uma proposta formal foi elaborada por Bolzano-Weierstrass[9] pois um ponto pacífico nesta polêmica. Primeiramente carece de algumas definições para enunciar este Teorema.

Uma sequência $\{a_n\}$ é crescente se $a_n < a_{n+1}$ para $\forall n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $a_1 < a_2 < \cdots a_{n-1} < a_n$. A sequência é decrescente se $a_n > a_{n+1}$ para todo n natural. As sequências $\{a_n\}$ são monótonas se elas forem crescentes ou decrescentes. Diz-se que uma sequência $\{a_n\}$ é limitada se existirem dois valores A e B tal que $A < a_n < B, \forall n \in \mathbb{N}$. TEOREMA: toda sequência monótona (crescente ou decrescente) limitada converge.

Demonstração: Seja $\{a_n\}$ uma sequência decrescente limitada. Como $\{a_n\}$ é limitada existirão vários números A_j para os quais $a_n > A_j$, $\forall n \in \mathbb{N}$; seja L o menor valor de A_j. Podemos dizer que para cada $\epsilon > 0$, existe um índice k tal que $a_k > L - \epsilon$, pois que, se $a_n \geq L - \epsilon \; \forall n$, então o maior dos números A_j seria $L - \epsilon$ e não L. Assim sendo, podemos escrever que, para cada $\epsilon > 0$, existe k

[7]Srinivasa **Ramanujan** matemático indiano (1887 – 1920)
[8] **Zenão** de Eleia filósofo pré-socrático, inconsistência de conceitos de movimento
[9] Bernard **Bolzano** matemático tcheco (1741-1848)
[9] Karl **Weierstrass** matemático alemão (1815-1897)

tal que: $L - \epsilon < L \leq a_n < L + \epsilon\ (*)$. Considerando que supusemos $\{a_n\}$ decrescente, temos $\forall\, n > j \Rightarrow a_n \leq A_j$ e, portanto, a desigualdade $(*)$ ficará:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \text{ ou } |a_n - L| < \epsilon \blacksquare$$

O que nos diz que L é o limite da sequência, ou seja, concluímos que a sequência é convergente. A demonstração para sequência monótona crescente é análoga.

Retomando a análise de Leonardo Euler. Ele utilizou a expressão (5) acima na sua análise. Observando o gráfico 1 da função$f(x) = \frac{1}{x}$:

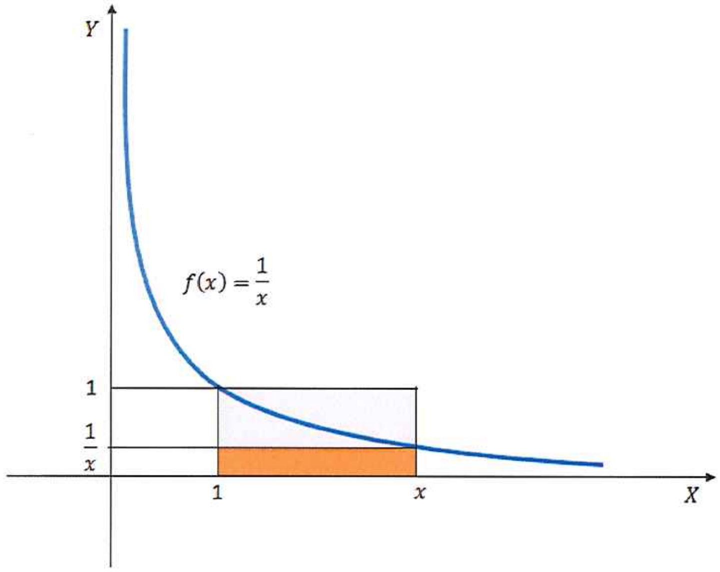


Gráfico 1: Função positiva da Hipérbole Equilátera

A área abaixo do gráfico1 função no intervalo $[1, x]$ é definida como logaritmo natural $\boldsymbol{ln(x)}$, portando:

$$[\acute{a}rea\ do\ ret\hat{a}ngulo\ laranja]\frac{(x-1)}{x} < ln(x) < (x-1)[\acute{a}rea\ laranja\ mais\ cinza]$$

Fazendo $y = (x - 1)$ fica: $\frac{y}{y+1} < ln(y + 1) < y$;

subsituindo $y = \frac{1}{t}$;

$\frac{1}{1+t} < \boldsymbol{ln}\left(\frac{1+t}{t}\right) < \frac{1}{t}$; multiplicando por (-1) fica;

$-\frac{1}{t} < -ln\left(\frac{1+t}{t}\right) < -\frac{1}{1+t}$; portanto;

$$\boldsymbol{0 < \frac{1}{t} - ln\left(\frac{1+t}{t}\right) < \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}}\ ;\ \boldsymbol{(6)}$$

Fazendo $t = 1, 2, 3, 4, \dots, (n-1)$, sendo $(n > 1)$

$$0 < 1 - ln(2) < 1 - \frac{1}{2} \qquad t = 1$$

$$0 < \frac{1}{2} - ln(3) + ln(2) < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \qquad t = 2$$

$$0 < \frac{1}{3} - ln(4) + ln(3) < \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \qquad t = 3$$

....

$$0 < \frac{1}{n-1} - ln(n) + ln(n-1) < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}; \quad t = n-1$$

Somando todas as desigualdades, temos:

$$\frac{1}{n} < H_{n-1} + \frac{1}{n} - ln(n) < 1 \Rightarrow 0 < H_n - ln(n) < 1, \qquad (n > 1)$$

Seja a sequência$\{a_n\}$, onde $a_n = H_n - ln(n)$. Então sabemos $0 < a_n < 1$

Vamos mostrar agora que $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots a_n > a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n - a_{n+1} = H_n - ln(n) - H_{n+1} + ln(n+1) = ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0$$

Ou seja, $\boldsymbol{a_n > a_{n+1}}$.

concluímos que a sequência $\{a_n\}$ é monótona decrescente e limitada.[10]

Então o limite $\lim_{n\to\infty}[H_n - ln(n)]$ existe. Assim: $\boldsymbol{\gamma = \lim_{n\to\infty}[H_n - ln(n)]}$; **(7)**

Esta constante γ é chamada de constante de **Euler-Mascheroni**. Até hoje não se sabe se é ou não racional, seu valor aproximado é:

$$\gamma \approx \mathbf{0,5772156649015328606065120900824024310421}$$

Abaixo mostra à aproximação do somatório da série harmônica comparado com a expressão de Euler:

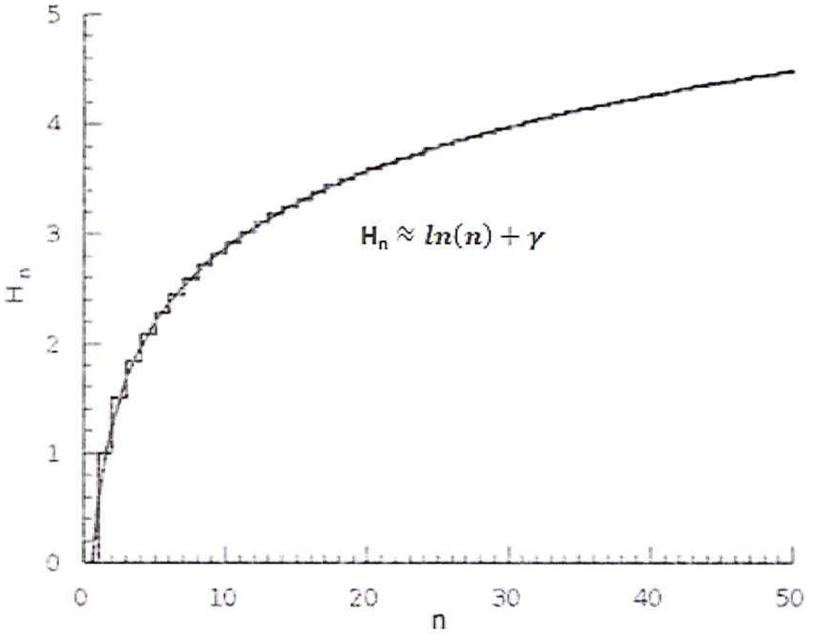


Gráfico 2: Comparação da série Harmônica com a aproximação de Euler

Esta descoberta de Euler permite, entre outras coisas, estimar com boa aproximação o valor da soma da série harmônica sem cálculos muito trabalhosos. Em seus estudos sobre a série harmônica, Euler definiu a função

[10]Critério de convergência de Cauchy (Augustin Louis **Cauchy** matemático francês)

Zeta através somatório da série dos inversos das potências dos números naturais:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} \ldots$$ [11]

para $x > 1$ converge e para $0 < x \leq 1$ diverge.

Pesquisando a função Zeta, Euler conseguiu relacionar campos aparentemente isolados da Matemática e provar que a divergência da série harmônica implica a existência de infinitos números primos.

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots \textit{ os denominadores múltiplos de } 2$$

$$\zeta(x)\left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{3^x}\zeta(x)\left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \cdots \textit{ os denominadores múltiplos de } 3$$

$$\zeta(x)\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\left(1 - \frac{1}{3^x}\right) = 1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \cdots$$

Nessa reiterada operação, relativamente similar ao crivo de Erastóstenes[12], eliminaremos as potências com os números primos. Admitindo que p seja o último primo, finalmente fica:

$$\zeta(x)\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{5^x}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p^x}\right) = 1$$

$$\zeta(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{5^x}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)}$$

Mas para $x = 1$

$$\zeta(1) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

Porém como visto antes $\boldsymbol{\zeta(1)}$ é divergente! contradiz a hipótese$\Rightarrow p \to \infty$

logo,

$$\zeta(1) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)\ldots}$$

[11] Também conhecida como séries hipergeométricas
[12] **Eratóstenes** de Cirene matemático grego (276 aC – 194 aC)

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \prod_{p}(1 - p^{-1})^{-1}$; (8), onde p são os números primos

Tudo parecia transcorrer harmoniosamente bem resolvido, quando Riemann[13], não satisfeito, resolveu investigar a função Zeta. Estendeu o domínio dessa belíssima função para o conjunto dos números complexos. Então Riemann definiu a função Zeta no plano Argand-Gauss, formado por dois eixos perpendiculares, um real e outro comparte complexa (imaginária), Figura 4.

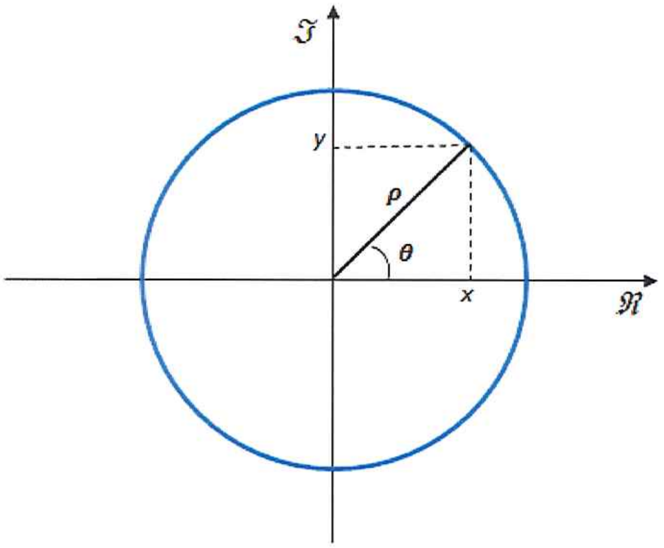


Figura 4: Representação do Plano Argand-Gauss

Seja o complexo $z = x + iy$ da figura 4; onde $i = \sqrt{-1}$.

$|z| := \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $seu\ módulo;\ cos(\theta) = \frac{x}{\rho}\ e\ sen(\theta) = \frac{y}{\rho}$

Substituindo fica $z = \rho[\cos(\theta) + isen(\theta)]$; na forma polar.

tomando-se $\rho = 1$; um complexo com módulo unitário.

Fica: $z = \cos(\theta) + isen(\theta) \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = -sen(\theta) + icos(\theta) = iz$

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_0^\theta id\theta \ \Rightarrow ln(z) = i\theta \therefore z = e^{i\theta} \rightarrow \boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)}$$

Para $\theta = \pi_{rad}$ teremos $\boldsymbol{e^{\pi i} = -1}$, ou ainda, $\boldsymbol{e^{\pi i} + 1 = 0}$; $\boldsymbol{(9)}$

Esta última expressão relaciona os cincos principais números da matemática.[14]

Também $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$; pois $i^i = e^{iln(i)}$; sabendo-se que $\boldsymbol{i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}i}}$

[13]Bernhard **Riemann** matemático alemão (1826 – 1866)

[14] Expressão atribuída a Leonhard Euler

$i^i = e^{i\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)} \Rightarrow i^i = e^{\frac{\pi}{2}i^2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ um resultado surpreendente, a potência de dois números complexos pode resultar num número real!

De outra forma $\sqrt[i]{i} = i^{\frac{1}{i}} = i^{-i} = e^{\frac{\pi}{2}}$, ou seja, a radiciação de dois complexos também poder um número real!

Continuando com estudos da função Zeta, Riemann conseguiu uma função analítica para a função Zeta em $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

$$\zeta(s)\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s};\ ou\ \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{e^u-1}du & \Re(s) > 1 \\ \frac{1}{1-s}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx; & 0 \le \Re(s) < 1 \\ 2^s\pi^{s-1}sen\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s); & \Re(s) < 0 \end{cases}$$

Na primeira região, com $\Re(s) > 1$, não existem raízes;

Na terceira região, com $\Re(s) < 0$, as raízes são com $s = \{-2, -4, -6, \dots\}$;

Pois o $sen\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0 \Rightarrow s = -2n \mid n \in \mathbb{N}^*$; estas raízes são ditas triviais.

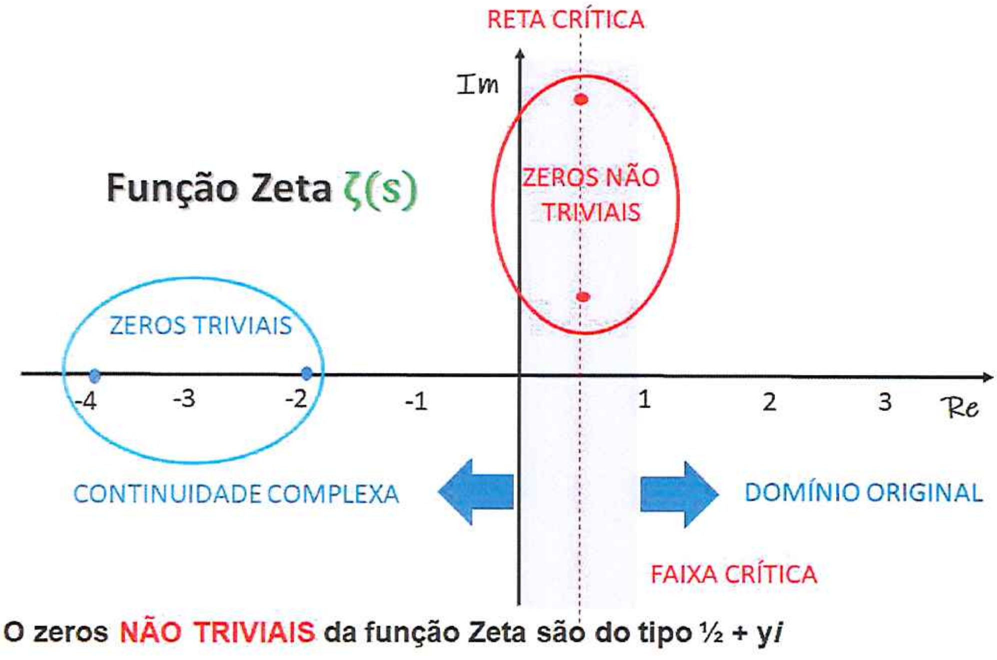


Figura 5: Representação da Função Zeta de Riemann

Finalmente enunciada a hipótese de Riemann:

Os zeros não triviais da função Zeta, situados na segunda faixa (faixa crítica), são da forma $\frac{1}{2} + yi$, ou seja, todos os zeros não triviais da função Zeta têm parte real meio (½), na faixa $0 \leq \Re(s) < 1$. Esta questão está entre os problemas abertos divulgados por Hilbert[15] no início do século 20 (Congresso Internacional de Matemático em Paris 1900). Existe um prêmio de um milhão de dólares para quem o resolver. Também é importante destacar que o estudo da função Zeta aperfeiçoou o Teorema do Números Primos (TNP) de Gauss[16]:

Seja $\pi(x)$ a quantidade de números de primos menores que x.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\pi(N)}{\frac{N}{ln(N)}} = 1 \text{ por Gauss;}$$

Seja: $Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$; conhecida como função logarítmica-integral.

Temos $\pi(x) \approx Li(x)$ por Tchebychef[17] como melhor aproximação, conforme apresenta gráfico 3.

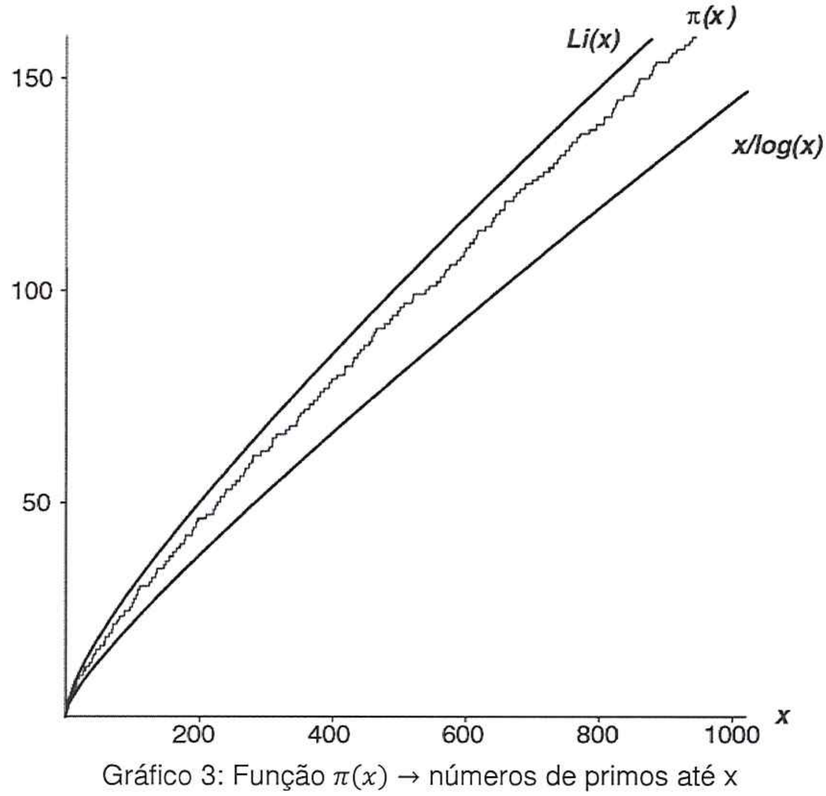


Gráfico 3: Função $\pi(x) \rightarrow$ números de primos até x

4. APLICAÇÕES

[15]David **Hilbert** matemático alemão (1865 – 1943)
[16]Carl Friedrich **Gauss** matemático alemão (1777 – 1855)
[17] Pafnuti **Tchebychef** matemático Russo (1821 – 1894)

4.1 Tabela de Logaritmos naturais

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \ldots$$

A integração desta expressão fornece identidades muito úteis.

$$\int \frac{dx}{(1-x)} = \int_1^x (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 \ldots)\, dt$$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \text{(i)}$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \text{(ii)}$$

$$fazendo\ x = 1 \therefore ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Série Harmônica alternada converge!!!

$$\therefore ln\left[\frac{(1+x)}{(1-x)}\right] = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4} + \cdots\right) \text{(ii)} - \text{(i)}$$ [18]

Ainda,

$$\frac{1}{2} ln\left[\frac{(1+x)}{(1-x)}\right] = tanh^{-1}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x^{2n+1}}}{\boldsymbol{2n+1}}\ ; \boldsymbol{(10)}$$

Com esta expressão é construída facilmente uma tabela de logaritmos, pois converge muito rapidamente. Facilmente implementado um algoritmo para determinação de um logaritmo natural de um número inteiro positivo. Esta expressão é utilizada nas calculadoras científicas.

Basta fazermos a mudança de variável:

$$y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+1}\ ;\ com\, y > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$Por\ exemplo\ y = 2 \therefore x = \frac{1}{3};\ assim:$$

$$ln(2) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots\right]$$

$$ln(4) = 2\,ln(2) \therefore ln(4) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^5}{5} + \cdots\right] = \left[\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \cdots\right]$$

4.2 Utilizando a desigualdade da Análise de Euler

[18]Obtida primeiramente por James **Gregory** em 1668 [6]

Registaremos algumas aplicações da desigualdade vista na análise da função logaritmo natural.

$$\boldsymbol{ln(x) < (x-1) \Rightarrow x < e^{x-1}}$$

Fazendo $x = \frac{y}{e}$;

$$\frac{y}{e} < e^{\left(\frac{y}{e}-1\right)} \Rightarrow \frac{y}{e} < \frac{e^{\frac{y}{e}}}{e} \therefore \boldsymbol{y^e < e^y}$$

Assim, $\boldsymbol{e^\pi > \pi^e}$, uma prova simples e elegante. Na literatura normalmente se utiliza a função: $f(x) = x^{x^{-1}}$, seu máximo em $x = e$ $(2{,}71828182846\ldots)$. Assim $\left(e^{e^{-1}}\right)^{\pi e} > \left(\pi^{\pi^{-1}}\right)^{\pi e}$.

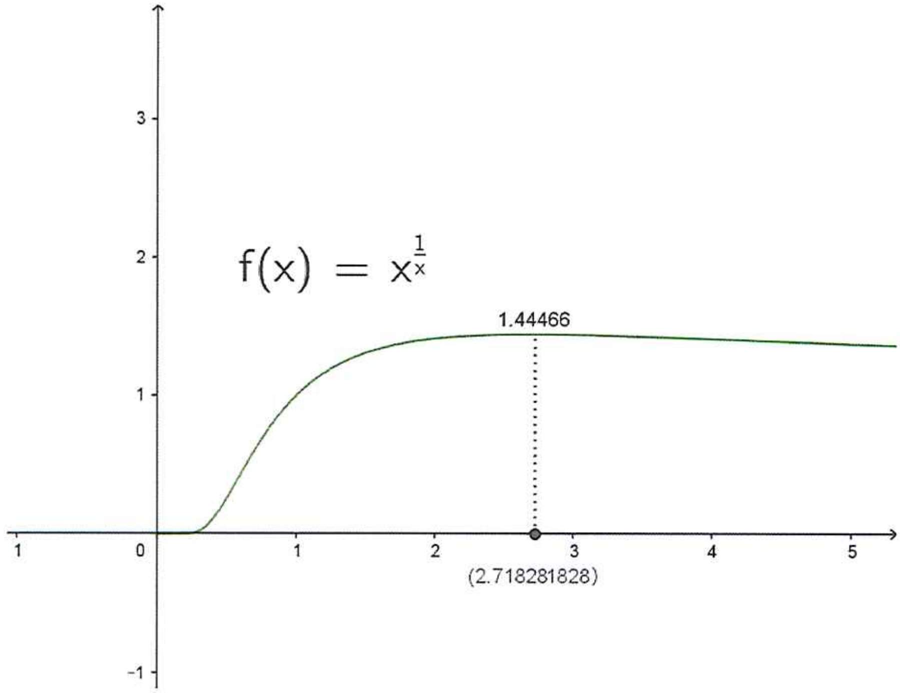


Gráfico 4: Função de auxiliar

Demonstração imaginada por Pólya[19] para a desigualdade A≥G, isto é, média aritmética maior ou igual a média geométrica

Seja o conjunto P $= \{a_i\} \mid a_i \in \mathbb{R}_+^*$ $temos\ A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\, ; G = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}}$.

$$e^{\left(\frac{a_1}{A}\right)-1} \geq \frac{a_1}{A} \qquad i = 1$$

$$e^{\left(\frac{a_2}{A}\right)-1} \geq \frac{a_2}{A} \qquad i = 2$$

....

$$e^{\left(\frac{a_n}{A}\right)-1} \geq \frac{a_n}{A} \qquad i = n$$

É claro que a igualdade vale se, e somente se, $\frac{a_i}{A} - 1 = 0$, ou seja,

[19]George **Pólya** matemático húngaro (1888-1985)

$a_i = A \ \forall i = 1,2, \dots, n.$

Multiplicando todas as desigualdades, temos:

$$e^{\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{A}\right)-n} \geq \frac{a_1 . a_2 \dots a_n}{A^n} ;$$

Mas, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nA$ logo,

$1 \geq \frac{G^n}{A^n}$ou $A \geq G.$

Também:

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}.\frac{1}{a_2}.\frac{1}{a_3}.\frac{1}{a_4}\dots\frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n}};$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n} \geq \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)} \Rightarrow G \geq H$$

$A = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n}{n}$; Média Aritmética.

$G = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 . a_4 \dots a_n}$; Média Geométrica.

$H = \frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)}$; Média Harmônica.

Assim: $A \geq G \geq H$ ■

A seguir outra questão que ilustra a utilidade da função de Euler como aproximação da série Harmônica.

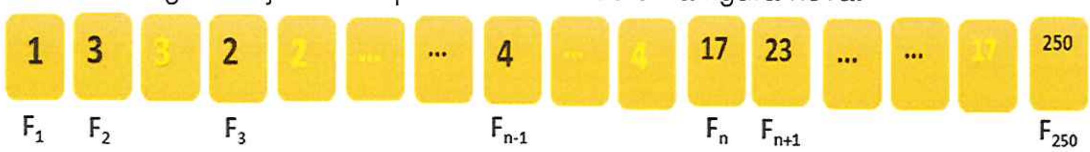
4.3 Álbum de figurinhas

Figura 5: Cartaz publicitário

Imagine que você decide colecionar figuras da Copa América 2019, são 250 figuras em um álbum completo. Imaginemos que essas figuras sejam vendidas em pacotes fechados individuais, uma figura por pacote, e que o suprimento de pacotes seja praticamente infinito e totalmente embaralhados, de modo que haja chances aleatórias iguais de qualquer figura estar em qualquer pacote selecionado.

Pergunta: Qual é o número esperado de pacotes que você precisa comprar para completar o álbum?[20]

O esperado é que a primeira figura que tiramos tem que ser distinta, é a primeira figura da nossa coleção e não há como duplicar. Há uma boa chance de a segunda figura que sortearmos também ser única, teríamos que ter o azar de comprar uma segunda figura repetida, especialmente quando há 249 figuras distintas, similarmente, ao retirarmos uma terceira figura e uma quarta figura. No entanto, à medida que nossa coleção é preenchida, aumentamos nossas chances de repetição e há um ponto de inflexão no qual é mais provável que uma nova figura seja uma repetida em vez de uma figura nova.



No diagrama acima, a primeira ocorrência de cada figura distinta é mostrada em preto. Também vamos definir uma distância Fn, que é o número de figuras entre a ocorrência n e n-1.

A primeira figura que viramos tem de ser único, por isso só nos leva uma figura $F_1 = 1$;

Para chegar à segunda figura única, quantas figuras, em média, isso nos levará? Bem, existem 250 figuras na coleção, e apenas uma que não queremos, então qualquer uma das figuras (250-1) = 249 serve. O número esperado de figuras sorteadas é, portanto, $F_2 = 250 / (250-1) = 250/249$;

Para a distância média entre a segunda e a terceira figuras, o número esperado de figuras é $F_3 = 250 / (250-2) = 250/248$;

Genericamente, se houver N figuras no conjunto total, no nosso caso N = 250, então $F_k = N / (N- [k-1])$;

O número total esperado de figuras a serem sorteadas para obter um conjunto completo é a soma de todas as lacunas individuais que são necessárias entre cada nova primeira ocorrência distinta de uma figura, como visto acima.

$$E_x = \sum_{k=1}^{N} F_k$$

A fórmula para o número esperado de figuras a serem sorteadas é o inverso da proporção de figuras não vistas deixadas sobre o número total de figuras. Quando estamos tentando tirar a k-ésima figura no álbum, sabemos que ainda existem N possíveis escolhas de figuras que podemos obter, mas somente (N-[k-1]) serão figuras que não vimos ainda. Assim:

[20]Neste problema **não** consideramos a troca de figuras repetidas

$$E_x = \sum_{k=1}^{N} \frac{N}{[N-(k-1)]} \therefore E_x = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k};$$

$$E_x = 250\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{250}\right)$$

$$E_x = 250\,x\,6{,}1007 = 1.525\,figuras$$

$$E_x \approx 250\,x[\ln(250)+0{,}57722] = 250\,x\,(5{,}5215+0{,}57722) = 1.525\,figuras$$

Também é fácil verificar como a série harmônica cresce muito lentamente. Imagine quantos termos seriam necessários para que a soma atinja o valor de 20. Utilizando a aproximação de Euler $H_n \approx ln(n) + \gamma$:

$n = e^{(20-0{,}57722)} \approx 2{,}724x10^8$, um número astronômico!

Outra aplicação da expressão de Euler é na resolução da integral:

$Ei(x) = \int_x^\infty \frac{e^t}{t} dt$;conhecida como função exponencial-integral.

Em seu desenvolvimento se utiliza a expressão:[21]

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\ ;\mathbf{(11)}$$

Resultará em:

$$Ei(x) = \gamma + ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.n!}\ ;(12);$$

Esta função, semelhantemente a função erro de Gauss, é tabelada nos livros técnicos.

4.3 Um Problema de Engenharia de Petróleo

A função $Ei(x)$ também é utilizada em engenharia de reservatório na indústria de petróleo para resolver um problema de fluxo transiente em meio permoporoso:

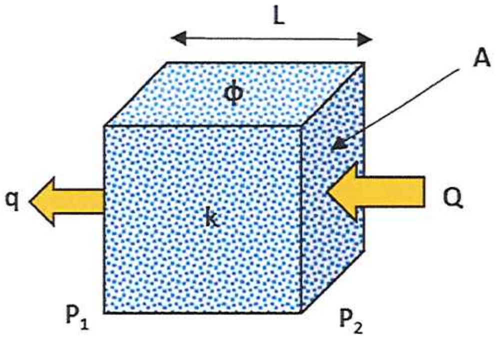


Figura 6: Representação de uma rocha

---

[21]Obtida através da série de **Taylor**

Imagine a situação: o fluxo de um fluido através de uma rocha com as seguintes características:

Q, q – vazão em m^3/d;

$(P_2 - P_1)$ – diferença de pressão em kPa (quilo Pascal);

k – permeabilidade em mD (mili Darcy);

Φ –porosidade em porcentagem do volume total (%);

μ– viscosidade do fluido em cP (centi Poisse);

ρ – densidade do fluido em kg/m^3;

L – comprimento do reservatório em m;

A – área exposta ao fluxo em m^2;

Considere inicialmente o reservatório vazio, para simplificar admite-se a rocha e o fluido praticamente incompressíveis. O fluxo será regido por duas leis físicas, lei de Darcy[22] e lei da difusividade de Fick[23].

Resultará na equação diferencial:

$$X\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial p}{\partial X}\right) + \frac{\partial p}{\partial X} = -X\frac{\partial p}{\partial X};\ \text{fazendo}Y = \frac{\partial p}{\partial X};$$

Portanto: $X\frac{\partial Y}{\partial X} + Y = -XY\ (11)$;

Finalmente:$P - P_i = C\int_X^{\infty}\frac{e^{-X}}{X}dX = C[Ei(X)]$; C é uma constante.

Outras identidades:

$$Li(x) = Ei(lnx) = ln(ln\,x) + \sum_n^{\infty}\frac{[ln(x)]^n}{n.n!};$$

$$\int_0^1 ln(lnx^{-1})\,dx = \int_0^{\infty} e^{-x}ln(x)dx = -\gamma$$

5. CONCLUSÃO

Nessa dissertação, apesar de alguns assuntos terem sido tratados com superficialidade, o problema em foco mostra um leque de implicações importantes desenvolvidas como, por exemplo, citamos um equívoco do honrado Leonardo Euler sem desmerecer suas habilidades geniais e mostrar o quanto é sutil a noção de infinito. A noção de infinito abordada no cinema, por exemplo, em ***o Homem que viu o infinito*** retratada na vida do matemático indiano Ramanujan[24], traz como efeito não muito lógico este conceito, manifestado pelo

[22]Henry Philisbert Gaspard **Darcy** engenheiro francês (1803 – 1858)
[23]Adolf Eugen **Fick** médico alemão (1829 – 1901)
[24]Srinivasa **Ramanujan** matemático indiano (1887 – 1920)

protagonista por revelações divinas. Também são apresentadas aplicações de alguns resultados analisados para mostrar a ligação da matemática na resolução de problemas práticos ou específicos.

Finalmente enfocamos uma questão aberta proposta por Riemann, fato que revolucionou o estudo da distribuição dos números primos, enriquecendo mais ainda a Teoria dos Números. Outra contribuição desse trabalho para o Ensino Médio foi tornar acessível um assunto complexo e repleto de nuances conceituais. Em particular, destacamos o assunto da tabela de logaritmos como ponto atrativo para ser desenvolvido em sala de aula e também o exemplo do álbum de figurinha como aplicação mais atual e curiosa para ser abordado no Ensino Fundamental.

6. APÊNDICES

6.1 Cálculo de $\zeta(2)$[25]

Resolvendo a integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{ln(2\cos x)\,dx}$;

Mas $e^{ix} = \cos(x) + isen(x) \Rightarrow \cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; substituindo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left[e^{ix}\left(1+e^{-2x}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[ln\,e^{ix} + ln\left(1+e^{-2ix}\right)\right]dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[ix + ln\left(1+e^{-2ix}\right)\right]dx = \frac{ix^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+e^{-2ix}\right)dx$$

$$\frac{i\pi^2}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+e^{-2ix}\right)dx;$$

Lembrando $ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \cdots$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\left(1+e^{-2ix}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-2ix} - \frac{e^{-2(2ix)}}{2} + \frac{e^{-3(2ix)}}{3} - \frac{e^{-4(2ix)}}{4} + \cdots\right)dx$$

$$= \left[\frac{e^{(-2ix)}}{(-2i)} - \frac{e^{2(-2ix)}}{2(-2.2i)} + \frac{e^{3(-2ix)}}{3(-3.2i)} - \frac{e^{-4(2ix)}}{4(-4.2i)} + \cdots\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{-2i}\left[e^{-2ix} - \frac{e^{2(-2ix)}}{2^2} + \frac{e^{3(-2ix)}}{3^2} - \frac{e^{4(-2ix)}}{4^2} + \cdots\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Nota: $e^{-n\pi i} = \begin{cases} -1 \text{ se n for par} \\ 1 \text{ se n for ímpar} \end{cases}$

$$= \frac{1}{-2i}\left[\left(-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right)\right]$$

[25]Problema da Basileia (Basel problem), aqui uma resolução alternativa.

$$= \frac{1}{-2i}\left[2\left(-1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}-\cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{i}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right) = -i\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{ln(2\cos x)\,dx} = \left[\frac{\pi^2}{8}-\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right)\right]i$$

$$\boldsymbol{Im}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(2\cos x)\,dx\right] = 0 \Rightarrow 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{8}}$$

Calculando $\zeta(2) = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$[26]

$$\zeta(2) = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots$$

$$= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\cdots\right)$$

$$\zeta(2) = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{4}\zeta(2)$$

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots;\ \therefore\ \zeta(2) = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{6}}$$

6.2 Comportamento da Função Zeta

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right) = 1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5^x}+\frac{1}{6^x}+\frac{1}{7^x}\ldots$$

Prova que para $x > 1$ converge e para $0 < x \leq 1$ diverge.

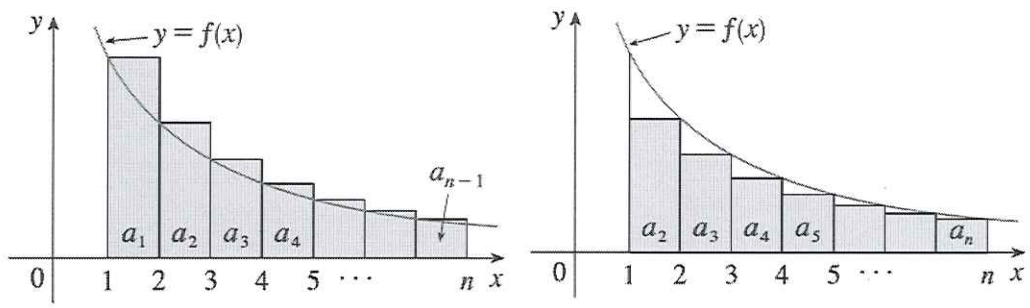


Figura 7: Representação de função contínua e monótona

Teorema da Integral:[27]

---

[26] Leonardo **Euler** deduziu utilizando polinômios, aplicou o teorema de **Bolzano** e as relações de **Girard**.

[27] Cauchy et alii: aplicável em funções contínuas e monótonas

$$\int_2^n f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)dx$$

Assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) \geq \int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-s}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^{s-1}} - 1\right);$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) \geq \frac{1}{1-s}; & com\, s > 1 \Rightarrow s-1 > 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) \to \infty; & com\, s < 1 \Rightarrow s-1 < 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) \to \infty; com\ s = 1\ (série\ harmônica) \end{cases}$$

6.3 A Prova dos Infinitos Números Primos

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}\right) = \prod_p (1-p^{-1})^{-1}$; onde p é primo

Aplicando logaritmo em ambos lados:

$$ln[\zeta(s)] = -\sum_{p}^{\infty} \boldsymbol{ln(1-p^{-1})}$$

$$\text{Nota: } ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$ln[\zeta(s)] = -\sum_{p=2}^{\infty} \boldsymbol{ln(1-p^{-1})} = \sum_{p=2}^{\infty}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{4p^4} + \frac{1}{5p^5} + \cdots\right)$$

$$ln[\zeta(s)] = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = P_1 + \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2}P_2 + \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \cdots\right) = \frac{1}{3}P_3 + \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots\right) = \frac{1}{4}P_4 + \\ \cdots \\ \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \cdots\right) = \frac{1}{n}P_n \\ \cdots \end{cases}$$

$$ln[\zeta(s)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P_n;$$

$n > 1 \Rightarrow P_n$ é convergente, pois $\zeta(s)$ converge para $s > 1$.

$$P_s < \zeta(s)$$

mas $P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots$ **é divergente!**

6.4 Uma pérola da fórmula de Euler no cálculo de $\boldsymbol{ln(1+i)}$

Seja o complexo $z = 1 + i$;

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; sen(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (1+i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$ln(1+i) = ln\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right) = \frac{1}{2}ln(2) + \frac{\pi}{4}i$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$ln(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \frac{i^5}{5} - \frac{i^6}{6} + \frac{i^7}{7} - \cdots$$

$$ln(1+i) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)i$$

Portanto:

$$ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$ [28]

Numa só expressão obtidos dois resultados inusitados.

7. ANEXOS

7.1 Breve revisão de logaritmos

Inicialmente seja a função exponencial $f(x) = a^x \mid x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$; é uma função injetiva. Calculando agora sua derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Se: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1 \Rightarrow f(x) = f'(x) = a^x$

$$a = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{1}{\Delta x}\right)^{\Delta x} \approx \mathbf{2,71828182845904523536028 7}$$

O número $\boldsymbol{a}$ foi denominado por **e** (número de Euler) em homenagem a Leonardo Euler (**e** = 2,71828182845904523536028 7...) um número irracional!

Suponha a função logaritmo natural $f(x) = ln(x) = y$ a função inversa de $f(x)$ será $f^{-1}(x) = e^x$. Uma identidade imediata: se $y = ln(x) \Rightarrow x = e^y \therefore \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e^{ln(x)}}$.

$$f(x) = ln(x), x \in \mathbb{R}_+$$

---

[28] Resultado atribuído ao matemático alemão Gottfried Wilhelm **Leibniz**

$$e^{f(x)} = x \Rightarrow e^{f(x)} f'(x) = 1 \therefore f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Também pode ser obtido calculando sua derivada, pela definição:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x + \Delta x) - ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = ln\left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]$$

$$ln\left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\Delta x}\right)^{\frac{\Delta x}{x}}\right] = \frac{1}{x} ln\left[\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{1}{\Delta x}\right)^{\Delta x}\right] = \frac{1}{x} l\,n(e) = \frac{1}{x}$$

Portanto do Teorema Fundamental do Cálculo: $\int \frac{dx}{x} = \boldsymbol{ln(x) + C}$

Logaritmo natural é área abaixo da função $f(x) = \frac{1}{x}$ com o eixo das abscissas

De forma genérica: $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = log_a x$;

$$\log_a A = x \Rightarrow a^x = A;\ \log_a B = y \Rightarrow a^y = B;$$

$$\log_a AB = z \Rightarrow a^z = AB = a^x a^y = a^{x+y}$$

$$z = x + y \ \therefore\ \boldsymbol{\log_a AB = \log_a A + \log_a B}\,; \text{(I)}$$

$$\log_a A = \log_a \left[\left(\frac{A}{B}\right) B\right] = \log_a \left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B\,;$$

Assim $\quad \boldsymbol{\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B}\,; \text{(II)}$

$$\log_a \left(\overbrace{A.A.A.A.A \ldots A}^{n}\right) = \overbrace{\log_a A + \log_a A + \cdots + \log_a A}^{n};$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\log_a (A^n) = n\log_a A}\,; (III)$$

$$\log_a A = x \Rightarrow A = a^x \therefore \boldsymbol{A = a^{\log_a A}}; (IV)$$

7.2 Convergência das séries hipergeométricas (super-harmônicas)

Agora exibiremos um estudo pelos irmãos Bernoulli[29][6]. Basicamente utilizaram a demonstração de Nicola Oresme e fizeram um tratamento simples, porém mais genérico e formal, também mais acessível aos alunos de nível médio.

Seja $H_p = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}, n \in \mathbb{N}^*$;

Teorema: A série diverge para $p \leq 1$ e converge se $p > 1$.

Prova:

1) Se $\mathrm{p} = 1$ a série se torna a série harmônica, portanto diverge.
2) Se $\mathrm{p} < 1$ teremos $n^p \leq n$ e, portanto, $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ e será maior que a divergente série harmônica. Por exemplo:

   se $\mathrm{p} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

---

[29] Irmãos Jean e Jaques Bernoulli matemáticos suíços

se $p = -2 \rightarrow \frac{1}{1^{-2}} + \frac{1}{2^{-2}} + \frac{1}{3^{-2}} + \cdots = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots$ obviamente diverge

3) Se $p > 1$ vamos escrever a série do seguinte modo,
$\frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{10^p} + \frac{1}{11^p} + \frac{1}{12^p} + \frac{1}{13^p} + \frac{1}{14^p} + \frac{1}{15^p}\right) + \left(\frac{1}{16^p} + \cdots + \frac{1}{31^p}\right) + \cdots < \frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \frac{16}{16^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^{(n-1)p}}$ uma **PG** de razão $q = \frac{1}{2^{p-1}}$, portanto um número positivo menor que um, $(0 < q < 1)$ a **PG** é convergente. Desta forma a primeira é inferior e também será convergente.

7.3 Demonstração da expressão da função Zeta de Riemann para primeira faixa.

Partiremos da função Gama[30]:

$$\Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\,, fazendo\ t = nu, n \in \mathbb{N}^*, portanto\ dt = ndu$$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{cases}$$

substituindo os valores.

$$\Gamma(\mathrm{x}) = \int_0^\infty (nu)^{x-1}e^{-nu}ndu = \int_0^\infty n^{x-1}u^{x-1}e^{-nu}ndu = n^x\int_0^\infty u^{x-1}e^{-nu}du$$

$$\Gamma(\mathrm{x})\frac{1}{n^x} = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-nu}du \Rightarrow \sum_1^\infty\left(\Gamma(\mathrm{x})\frac{1}{n^x}\right) = \sum_1^\infty\left(\int_0^\infty u^{x-1}e^{-nu}du\right)$$

$$\Gamma(\mathrm{x})\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n^x}\right) = \int_0^\infty u^{x-1}\sum_1^\infty(e^{-u})^n\,du\,; mas\ \sum_1^\infty(e^{-u})\ \text{é}\ uma\ PG$$

$$\sum_1^\infty(e^{-u}) = \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} = \frac{1}{e^u-1}\,;\ \sum_1^\infty\left(\frac{1}{n^x}\right) = \zeta(x), substituindo.$$

$$\Gamma(\mathrm{x})\zeta(x) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^u-1}du\ \blacksquare$$

Por exemplo para $x = 2$;

$$\Gamma(2)\zeta(2) = \int_0^\infty \frac{u^{2-1}}{e^u-1}du;\ \Gamma(2) = (2-1)! = 1;\ \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\int_0^\infty \frac{u}{e^u-1}du = \frac{\pi^2}{6}\ ; \text{confiram!}$$

[30] Função Gama é a extensão da definição de fatorial em $\mathbb{C}$

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6023:** informação e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro, 2002. (modelo de referência com autoria coletiva)

[2] ATON, H.; BIVENS, I.; DAVIS S. **CÁLCULO 2:** 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Pág.622,673.

[3] CARROCINO, C.H.G. **QUESTÕES CONTEXTUALIZADOS EM PROVAS DE MATEMÁTICA:** Dissertação (Mestrado PROFMAT) – IMPA, 2014.

[4] DERBYSHIRE, J. **OBSESSÃO PIRMA:** 1.ed. Rio de Janeiro: Record, 2012.

[5] EDWARDS, H.M. **RIEMANN'S ZETA FUNCTION:** Dover ed. New York: Academic Press, Inc.; 1974.

[6] JANOS, MICHEL, **MATEMÁTICA E NATUREZA: 1 ed. São Paulo:** Editora Livraria da Física, 2009, pág. 118-119.

[7] LIMA, ELON. L.; **LOGARITMOS:** 6. ed. Rio de Janeiro; SBM, 2016. Pág.56.

[8] LOPES, L.; **MANUAL DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS:** 6. ed. Rio de Janeiro; Interciência, 1998. Pág.120.

[9] LOPES, L.; **MANUAL DE PROGRESSÕES:** 6. ed. Rio de Janeiro; Interciência, 1998. Pág.35.

[10] RPM.42, 2000 **A SURPREENDENTE SÉRIE HARMÔNICA:** por Gilberto G. Garbi, pág. 32-39.

[11] RPM.50, 2002 **UMA PEQUENA PÉROLA DE EULER:** por Gilberto G. Garbi, pág. 16-19.

[12] RPM.65, 2007 **PROBLEMAS:** Questão 273, pág. 54-55.

[13] RPM.67, 2008 **PROBLEMAS:** Resolução da Questão 273, pág. 51-52.

[14] ROGAWSKI, J.; ADAMS, C. **CÁLCULO 2:** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018. Pág.541

[15] ROSA, J. R.; CARVALHO, R.S.; XAVIER, J.A..D; **ENGENHARIA DE RESERVATÓRORIOS DE PETRÓLEO:** 1. ed. Rio de Janeiro; Interciência, reimpressão 2017. Pág.755.

[16] SANTOS FILHO, M.F.C.J. **EULER E PROBLEMA DA BASILÉIA:** Dissertação (Mestrado PROFMAT) – UFPB, 2014.

[17] SARAEVA, I.M., BUKHOVTSEV B.B., KRIVTCHENKOV V.D., YA MIAKISHEV G.; **PROBLEMAS SELECIONADOS DE FÍSICA ELEMENTAR:** 2. ed. Moscou: MIR, 1985.

[18] STEWART, J. **CÁLCULO 2:** 6. ed. São Paulo: CENGAGE, 2012. Pág.668.

[19] TIPPLER, P.A.; MOSCA, G.; **FÍSICA PARA CIENTISTAS E ENGENHEIROS:** 6. ed. Porto Alegre: Gen | LTC, 2016. Pág.429.