

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GIDEÃO TEIXEIRA QUEIROZ

ENSINO DA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO USO DO ORIGAMI.

MANAUS-AM
2019

GIDEÃO TEIXEIRA QUEIROZ

ENSINO DA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO USO DO ORIGAMI.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e, ofertado pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Wagner Marques do Nascimento.

MANAUS-AM
2019

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Queiroz, Gideão Teixeira
Q3e Ensino da Geometria : uma abordagem a partir do uso do Origami
/ Gideão Teixeira Queiroz. 2019
47 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Carlos Wagner Marques do Nascimento
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Matemática. 2. Geometria. 3. Origami. 4. Ensino. I.
Nascimento, Carlos Wagner Marques do II. Universidade Federal
do Amazonas III. Título

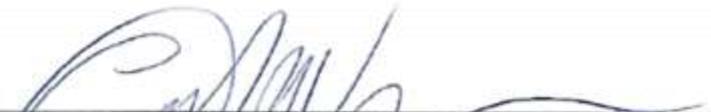
GIDEÃO TEIXEIRA QUEIROZ

ENSINO DA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO USO DO ORIGAMI.

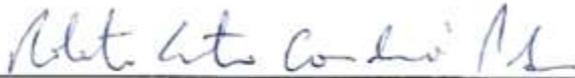
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e, ofertado pelo Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 10 de maio de 2019.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Carlos Wagner Marques do Nascimento
Universidade Federal do Amazonas - Presidente



Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Universidade Federal do Amazonas - Membro



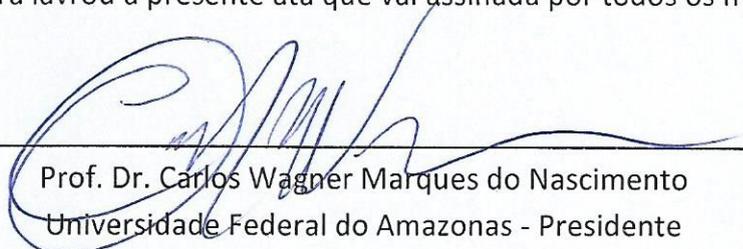
Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Universidade do Estado do Amazonas - Membro Externo

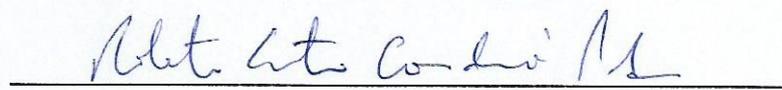


Poder Executivo
Universidade Federal do Amazonas
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática

Ata de Defesa Pública do Trabalho de Conclusão do Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT do aluno **GIDEÃO TEIXEIRA QUEIROZ**, realizada no dia 10 de maio de 2019.

Às 16:00 horas do dia 10 de maio de 2019, no Auditório José Henrique Mesquita no Departamento de Matemática, Setor Norte, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, foi realizada a Defesa Pública do Trabalho de Conclusão do Curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do aluno **Gideão Teixeira Queiroz**, intitulada “**ENSINO DA GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM A PARTIR DO USO DO ORIGAMI**” como parte final de seu trabalho para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. A Banca Examinadora instituída pela Portaria N° 049/2019 – ICE, constituiu-se dos seguintes Professores Doutores: Carlos Wagner Marques do Nascimento (DM/UFAM) – Orientador/Presidente; Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata (UFAM) – Membro; Dr. Alcides de Castro Amorim Neto (UEA) – Membro Externo. Após a apresentação do trabalho pelo aluno, os examinadores fizeram as perguntas concernentes e consideraram o aluno APROVADO. Nada mais havendo a tratar, a reunião foi encerrada, e a Banca Examinadora lavrou a presente ata que vai assinada por todos os membros.


Prof. Dr. Carlos Wagner Marques do Nascimento
Universidade Federal do Amazonas - Presidente


Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata
Universidade Federal do Amazonas - Membro


Prof. Dr. Alcides de Castro Amorim Neto
Universidade do Estado do Amazonas - Membro Externo

AGRADECIMENTOS

A Deus que me presenteou com o dom da vida, maior de todos os presentes. Aos meus pais Jósimo de Oliveira Souza e Ester Moura de Souza que me criaram e em meio a tantas dificuldades conseguiram me ensinar valores que pretendo repassar para os meus filhos além de me incentivarem a sempre priorizar os estudos.

Aos meus irmãos que sempre me ajudaram em particular ao Josinaldo Moura de Souza e Josiney Moura de Souza que juntamente com suas famílias me acolheram em seus lares em Manaus.

A minha esposa Soraia Batista Ribeiro e aos meus filhos, pelo amor, carinho e compreensão que me fortaleceram durante as inúmeras vezes que tive que me ausentar e deixar minha família durante as viagens que fazia de Parintins até Manaus para acompanhar as aulas.

Aos meus colegas do PROFMAT, em especial ao Mike de Souza Moraes, Jair da Silva Matos, Francinaldo da Silva Bezerra e Dario de Souza por toda ajuda e orientação durante o mestrado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Wagner Marques do Nascimento que acreditou na proposta do meu trabalho e me norteou na pesquisa.

Lista de Figuras

1.1	Tsuru, ave sagrada, símbolo do Origami.	9
1.2	Akira Yoshizawa, o mestre do Origami.	10
1.3	Símbolos universais criados por Yoshizawa.	11
1.4	Tsuru, modelo de origami tradicional.	12
1.5	Origami do pássaro voador.	13
1.6	Origami modulares.	13
1.7	Origami com dobradura molhada.	14
1.8	Tesselação.	14
2.1	Dobra de Miura aplicada em mapas e ao lado uma aplicação dessas dobras em um protótipo de painel solar usado no espaço.	15
2.2	A esquerda, Robert J. Lang e a direita o arquétipo do funcionamento do projeto do telescópio Eyeglass.	16
2.3	Stent origami projetado para fins medicinais.	17
2.4	Processo de implantação de um airbag a partir de uma simulação com o uso de design de origami.	18
2.5	Da esquerda para direita: Capela do Hospital de St-Loup, Pompales, Suíça; Centro Tecnológico de Energias Renováveis, Ningbo, China; Pavilhão de Eventos, Cuenca, Espanha.	18
2.6	À esquerda, esboço usando linhas para a forma que ser dobrar, ao meio, o diagrama de vincos necessários para se chegar à base da peça obtido com o programa Tree Maker e à direita o modelo dobrado e finalizado.	19
3.1	Uma dobra em montanha (esquerda) e outra em vale (direita).	24
3.2	A esquerda, o origami do Tsuru e, a direita, seu mapa de dobras de vale e montanha.	24
3.3	Ilustração do Teorema de Kawasaki-Justin: $31^\circ + 41^\circ + 108^\circ = 39^\circ + 58^\circ + 83^\circ$	25
3.4	Ilustração do primeiro Teorema de Haga.	25
3.5	Ilustração do primeiro Teorema de Haga e os triângulos semelhantes formados.	26
3.6	Ilustração do segundo Teorema de Haga.	27
3.7	Ilustração do terceiro Teorema de Haga.	28
3.8	Outra ilustração do terceiro Teorema de Haga.	28
3.9	Ilustração da generalização do Teorema de Haga.	30
4.1	Problema nº 13 Olimpíada Matemática Sem Fronteira 2016 (OMS - 2016).	32
4.2	Problema extraído da Olimpíada Canguru Matemática sem fronteira - 2010.	33
4.3	Problema da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP-2006) - 1ª Fase: Nível 3.	34
4.4	Esquema de solução do problema da OBMEP-2006 - 1ª Fase: Nível 3.	34
4.5	Banco de Questões da OBMEP-2006 - Nível 3	34

4.6	Triângulo obtido através de dobras sucessivas ao longo de suas diagonais. . . .	35
5.1	Três pontos não colineares determinados na folha de papel A4.	36
5.2	Triângulo ABC e a altura relativa ao maior segmento, BC	37
5.3	Dobradura feita no triângulo ABC	37
5.4	Quadrado obtido por dobraduras de uma folha retangular.	38
5.5	Divisão do quadrado em quatro quadrados congruentes.	38
5.6	Dobradura.	38
5.7	Quadrado construído a partir das 4 dobraduras.	39
5.8	Quadrado construído a partir da hipotenusa dos 4 triângulos congruentes. . . .	39
5.9	Teorema de Pitágoras.	39

RESUMO

Nesse trabalho disserta-se sobre a técnica milenar do origami e suas possibilidades de uso na abordagem de resolução de problemas de geometria. Inicialmente faz-se um itinerário histórico mostrando a evolução do origami e sua expansão pelo mundo. Descrevem-se suas características, classificações e algumas de suas aplicações práticas decorrentes de estudos teóricos mais complexos e recentes. Depois se inicia uma discussão da matemática decorrente dos princípios básicos da construção de modelos de origami como os Axiomas de Huzita-Justin ou Huzita-Hatori, Teorema de Maekawa-Justin, Teorema de Kawasaki-Justin e Teorema de Haga. Nesse último dá-se mais ênfase por envolver diversos conceitos geométricos importantes como semelhança de triângulos, teorema de Pitágoras e frações. Finaliza-se mostrando o uso do origami na resolução de alguns problemas geométricos interessantes de Olimpíadas de Matemática.

Palavras-chave: Matemática; Origami; Geometria.

ABSTRACT

In this work, the millenarian technique of origami and its possibilities of use in the problem-solving approach to geometry are discussed. Initially a historical itinerary is made showing the evolution of origami and its expansion around the world. Its characteristics, classifications and some of its practical applications derived from more complex and recent theoretical studies are described. Then begins a discussion of mathematics stemming from the basic principles of building origami models such as Huzita-Justin or Huzita-Hatori Axioms, Maekawa-Justin Theorem, Kawasaki-Justin Theorem, and Haga's Theorem. In this last one more emphasis is given to involve several important geometric concepts as similarity of triangles, the theorem of Pythagoras and fractions. It ends by showing the use of origami in solving some interesting geometric problems of Mathematical Olympiads.

Keywords: Mathematics; Origami; Geometry.

Sumário

Lista de Figuras	5
Introdução	8
1 Introdução ao Mundo do Origami	9
1.1 As origens do Origami	9
1.2 O origami Moderno	10
1.3 Tipos de Origami	11
1.3.1 Origami Tradicional	12
1.3.2 Origami de Ação	12
1.3.3 Origami Modular	13
1.3.4 Origami com Dobradura Molhada	13
1.3.5 Origami Tesselação	14
2 As aplicações do Origami	15
2.1 Dobraduras de Miura-Ori	15
2.2 Origami em Telescópio Espacial	16
2.3 Origami na Medicina	17
2.4 Origami em Airbags de carros	17
2.5 Origami na Arquitetura	18
2.6 Origami e computação	19
2.7 Origami e Educação	19
3 Origami e Geometria	21
3.1 Axiomas de Huzita-Hatori	21
3.2 O teorema de Maekawa-Justin	24
3.3 O teorema de Kawasaki-Justin	24
3.4 O teorema de Haga	25
3.5 Dobrando qualquer fração	30
4 Problemas envolvendo Dobraduras	32
4.1 Problema 1	32
4.2 Problema 2	33
4.3 Problema 3	34
4.4 Problema 4	34
5 Sugestão de Atividades com Dobraduras	36
5.1 Demonstrar a soma dos ângulos internos de um triângulo	36
5.2 Teorema de Pitágoras	37

Considerações Finais	41
Referências Bibliográficas	42

Introdução

Em nosso país, não é novidade que a educação como um todo enfrenta diversas dificuldades. No que concerne especificamente ao contexto do ensino da Matemática, a situação é mais preocupante, visto que o país apresenta indicadores extremamente baixos em avaliações externas como, por exemplo, o Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA). O PISA é um programa organizado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) que conta com a participação de 34 países membros, os quais constituem um programa avaliativo realizado de 3 em 3 anos referente as área de Matemática, Leitura e Ciências, visando coletar amostras de jovens estudantes na faixa etária de 15 anos nos diversos países membros.

O PISA avalia em Matemática as competências usadas pelos estudantes na resolução de problemas que envolvem desde operações básicas até aqueles que envolvem raciocínio e dedução de descobertas. De acordo com a pesquisa feita por Órtigão, Santos e Lima ([12], 2018) que buscaram compreender desempenhos dos estudantes brasileiros no PISA a partir dos relatórios da OCDE, “60% dos estudantes do Brasil têm fraco aproveitamento em Matemática”.

Outro dado alarmante sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática no país é evidenciado pelo Sistema de Avaliação do Ensino Básico (SAEB), o qual através da Prova Brasil e do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) mede, a partir das médias de proficiências em Português e Matemática, o nível de aprendizagem ao fim de cada etapa de ensino. E em 2017 os dados do SAEB indicam que no ensino médio, etapa onde há os piores índices do ensino básico, 71,67% dos alunos tem nível insuficiente de aprendizado. ([7] HONORATO, 2017)

Desse modo, com todos esses indicativos, torna-se urgente e relevante refletir sobre práticas de ensino e todas as variáveis que estão inseridas nesse processo como a estrutura da escola, formação dos professores, sistema de avaliação, currículo e outros. E, além disso, faz-se oportuno incentivar trabalhos de pesquisa sobre o ensino e metodologias que possam ajudar o trabalho do docente em sala de aula. Assim, acredita-se que este trabalho é uma boa possibilidade de abordagem de ensino da Geometria no ensino médio, uma vez que se trata de uma técnica milenar, o origami. Logo, o trabalho visa também mostrar diversas características do mundo das dobraduras em papel que podem colaborar para o entendimento de diversos conceitos geométricos bem como, a partir deles, aguçar mentes de jovens estudantes de segmentos finais do ensino básico no que diz respeito a resolução de problemas de geometria.

Esse trabalho foi organizado em cinco capítulos. No capítulo 1, faz-se uma introdução histórica a respeito do origami, apresentando os elementos característicos das dobras no origami e suas classificações. Posteriormente, no capítulo 2, verifica-se as aplicações em diversas áreas do conhecimento. Em seguida, no capítulo 3, entende-se o uso do origami como ferramenta didática no ensino de diversos conceitos geométricos, bem como sua utilização para a resolução de problemas. Logo após, no capítulo 4, resolve-se alguns problemas de matemática que utilizam o origami cujo pretexto é fazer o aluno usar conceitos matemáticos importantes como o de fração, semelhança, ângulos e o teorema de Pitágoras. Por fim, no capítulo 5, apresentam-se algumas atividades de dobraduras que podem ser executadas em sala de aula.

Capítulo 1

Introdução ao Mundo do Origami

1.1 As origens do Origami

A palavra Origami deriva dos termos “Ori” que quer dizer dobrar e “Kami” que significa papel. Denomina uma antiga arte que, através de dobras em uma folha de papel, é capaz de obter formas espaciais diversas sem que a folha de papel utilizada sofra colagens ou cortes. O nome origami em si é uma palavra recente para designar essa técnica, visto que o dobramento de papel no Japão no período Edo (1603-1868) foi inicialmente chamado de “Orisue”, que quer dizer “dobrando” ou “Origata” que significa “forma dobrada”. Mais tarde tornou-se “Orimono” (coisa dobrada) até que se estabeleceu com o nome de Origami (papel dobrado) por volta do fim do século XVIII e início das primeiras décadas do século XX.

Figura 1.1: Tsuru, ave sagrada, símbolo do Origami.



Fonte: <http://marcosventura.wordpress.com>.

As formas mais antigas do Origami buscavam imitar as formas de animais e objetos presentes na vida do homem como ilustrado na figura 1.1. O livro “Como dobrar mil pássaros” tradução de Hidem Sebanzuru Orikata de autoria de Akisato Rito é um dos registros mais antigos a respeito do Origami e data de 1797, apesar de a técnica ser conhecida a bem mais tempo.

Há um debate a respeito de onde surgiu o Origami. Sabe-se que as dobraduras são parte da cultura chinesa pois pessoas eram enterradas com réplicas de itens dobrados em seus túmulos. Além disso, acredita-se que o papel tenha sido inventado na China por um membro da

corte chinesa em 105 d. C. A partir da criação do papel, por volta do século VI, o origami foi introduzido no Japão através de monges budistas, período onde foram encontrados as primeiras formas de origami dessa época. Entretanto, como o papel na época era artigo de luxo, não era uma técnica de uso comum da população, visto que apenas as classes nobres e rituais religiosos tinham tal prerrogativa. Sendo assim, a técnica do origami detinha um prestígio e só algumas pessoas aprendiam e perpetuavam a cultura das dobraduras.

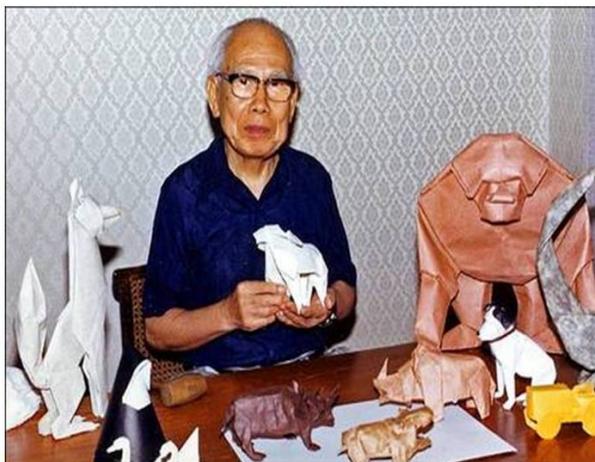
Entretanto, no continente europeu, de forma independente e por influencia dos povos árabes, registros apontam para as primeiras formas de Origami apenas no século XV, período em que o papel já era mais acessível à população. Nesse período, na Espanha e Holanda precisamente, as dobraduras de papel tinham características mais geométricas uma vez que as dobras formavam ângulos de 45 graus, enquanto que o papel dobrado no Japão, em geral, formavam ângulos de 22,5 graus. Então, isso foi fator decisivo para que as dobraduras em papel fossem ensinadas nos jardins de infância na Alemanha tal que fora uma metodologia de iniciar as crianças no estudo da Geometria. E foi dessa maneira que tal sistema metodológico de ensino havia sido adotado pelo Japão no período Meiji (1868-1912), porém foram as dobraduras de origem alemã que predominaram no ensino das escolas naquela época.

Mais tarde, no período Tokugawa (1603-1867), surgiu a dobradura do Tsuru (cegonha), ave sagrada segundo a tradição japonesa, origami mais conhecido no Japão e em outros países que se tornou símbolo desta arte. ([6] HATORI, 2011)

1.2 O origami Moderno

Até o século XX, meados das décadas de 50 e 60, o origami era uma tradição, transmitido de uma geração para outra. Mas, Akira Yoshizawa (1911-2005), considerado um mestre do origami, mudou a maneira como as pessoas praticavam as dobraduras. Sabe-se, então, que desde criança ele aprendeu o origami como hobby, até que teve a oportunidade de ser promovido na fábrica em que trabalhava e, após essa promoção, Akira começou a ensinar geometria aos funcionários juniores utilizando dobraduras tal que a figura 1.2 é uma prova do talento de Yoshizawa.

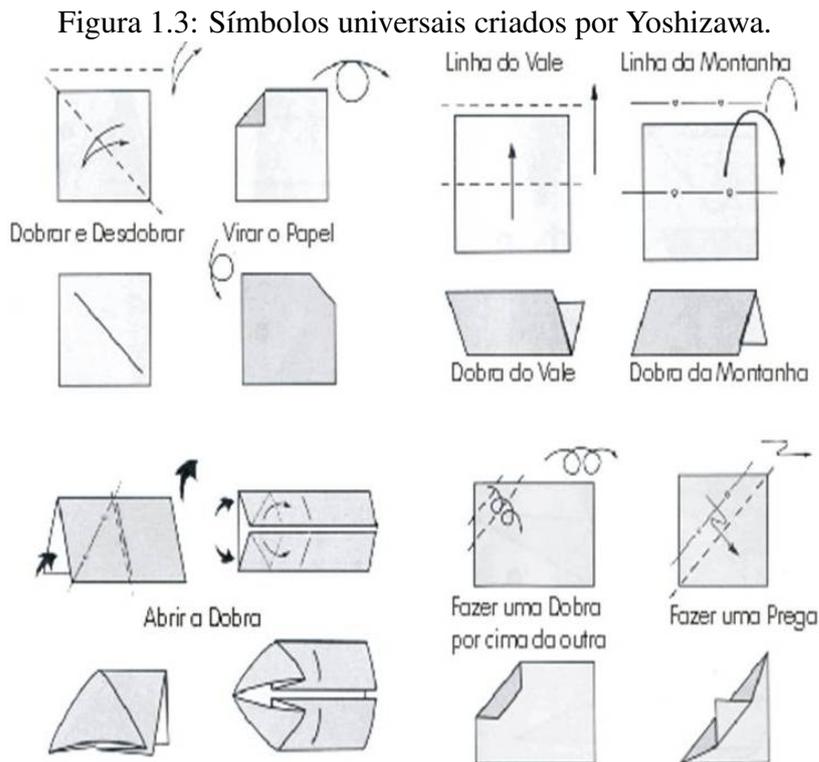
Figura 1.2: Akira Yoshizawa, o mestre do Origami.



Fonte: <http://japaoemfoco.com>.

A partir daí, aos 26 anos, Yoshizawa decide trabalhar integralmente com o Origami, o

qual lhe renderia várias publicações de livros. Um deles, em 1954, intitulado “Nova Arte do Origami” foi um sucesso, pois estabeleceu o sistema de notação que é a base da linguagem para as dobras de origami cuja estrutura consiste num conjunto de símbolos universais formados por linhas, setas e outros signos que permitem que qualquer pessoa consiga compreender os diagramas (figuras ilustrativas com textos e símbolos que mostram o passo-a-passo das dobraduras) e, mesmo que estas pessoas estejam em outro idioma, elas conseguirão replicar os modelos devido a linguagem de figuras ser universal como se pode observar na figura 1.3.



Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com>.

Além de Yoshizawa, houve outro nome que ajudou a divulgar o origami no mundo ocidental, foi Robert Harbin (1908-1978). Em meados da década de 60, ele escreveu vários livros sobre o tema, onde se tornou o primeiro presidente da Sociedade Britânica de Origami. Nesse período, Harbin identificou as bases mais comuns nas dobraduras e deu nome aos movimentos mais recorrentes das dobras.

Assim como Harbin, destacou-se Samuel L Randlett, nascido em 11 de janeiro de 1930, o qual foi também um artista do origami que juntamente com Robert Harbin a partir da década de 60 aprimorou o sistema de símbolos criados por Akira Yoshizawa dando origem ao padrão aceito internacionalmente denominado Sistema Yoshizawa-Randlett. Ele padronizou os símbolos bem como os nomes para as principais bases e dobras utilizadas no origami. ([13] PASSARONI, 2015)

1.3 Tipos de Origami

Desde a sua criação até os dias atuais, o origami se desenvolveu bastante. Surgiram muitos e diferenciados modelos obtidos a partir das mais diversas bases e estilos, onde novas

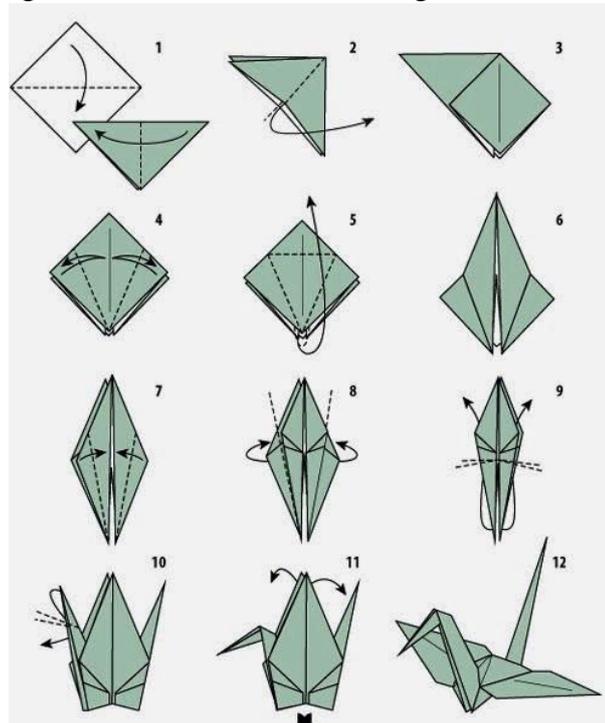
técnicas foram implementadas e, hoje, até o uso do computador tem auxiliado no estudo de algoritmos que permitam encontrar as bases para se chegar numa determinada forma. Dinte desse contexto, enumeramos abaixo algumas das variações existentes de origami.

1.3.1 Origami Tradicional

Os modelos mais tradicionais de origami, como o Tsuru da figura 1.4, são de origem incerta porque não se tem registros que indiquem onde foram dobrados pela primeira vez, logo não se pode responder quando, por quem e o porquê no que diz respeito ao modelo tradicional. Todavia, o que se sabe é que o origami tradicional é aquele obtido a partir de dobraduras em um pedaço de papel quadrado e plano. E durante esse processo, não é permitido rasgar, cortar ou colar. De modo geral, tal modelo é estático e representa alguma forma de objeto ou animal.

Segundo Haysaka e Nishida ([4], 2009), os modelos tradicionais de origami eram frequentemente desenvolvidos a partir de padrões semelhantes de dobragem do papel: base do peixe, base da água, base da pipa, base do pássaro e base do sapo. Essas bases são chamadas de bases clássicas, pois compartilham a mesma simetria e certas propriedades estruturais que foram usadas pelos mestres origamistas até a década de 1960.

Figura 1.4: Tsuru, modelo de origami tradicional.



Fonte: <http://www.coisasdepapel.com.br>.

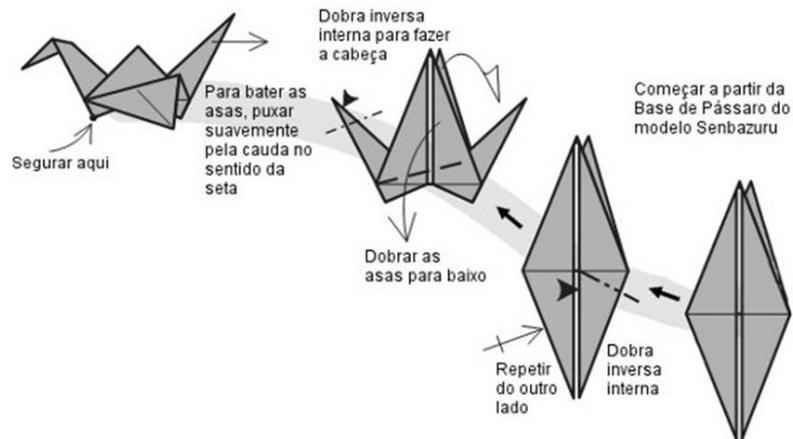
1.3.2 Origami de Ação

O origami não representa apenas figuras imóveis, mas também figuras que se movimentam de maneira engenhosa. Um exemplo disso é o origami de ação, visto que este inclui modelos que voam, que precisam ser inflados para completa-los ou que usam o movimento

das mãos de uma pessoa para manipular determinada região do modelo e assim provocar o movimento ou vibração de determinado membro da dobradura.

De acordo com Hayasaka e Nishida ([4], 2009), a maioria desses modelos surgiu como forma de recreação infantil, como por exemplo: origamis com abas e que provocam sons como de uma explosão (estalinho), aviões com parte móveis, pássaros que vibram as asas quando puxados e outras centenas de modelos como o da figura 1.5.

Figura 1.5: Origami do pássaro voador.



Fonte: <http://www.dobrapapel.com>.

1.3.3 Origami Modular

O origami modular, como se pode observar na figura 1.3, consiste em colocar uma quantidade de peças dobradas idênticas (módulos) para formar um modelo completo. As peças em geral são simples, mas a montagem final pode ser complicada. Como nenhum tipo de cola ou adesivo é usado, os modelos, dependendo do tamanho e da quantidade de módulos utilizados, podem ser instáveis. A montagem, em alguns casos, lembra um quebra-cabeça. Exemplifica esse tipo de origami os kusudamas (bolas decorativas), os block folding (peças com formas obtidas a partir de centenas de módulos triangulares) e os poliedros regulares, como o dodecaedro, exemplo. ([4] HAYASAKA e NISHIDA, 2009)

Figura 1.6: Origami modulares.

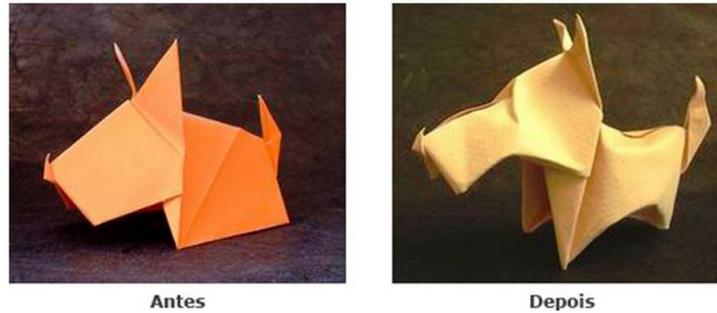


Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com>.

1.3.4 Origami com Dobradura Molhada

A dobradura molhada é uma técnica do origami para produzir modelos com curvas mais finas e arredondadas. Essa técnica foi criada pelo grande mestre japonês Akira Yoshizawa e consiste em umedecer o papel em um origami pronto para que possa ser moldado mais facilmente adquirindo assim formas de aparência muito natural, principalmente quando usados para representar animais (como na figura 1.7) ou formas humanas. ([4] HAYASAKA e NISHIDA, 2009)

Figura 1.7: Origami com dobradura molhada.



Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com>.

1.3.5 Origami Tesselação

O origami de tesselação é uma regularidade ou padrão de figuras que cobre uma superfície plana sem deixar lacunas ou sobrepondo figuras. A origem da palavra “tesselação” deriva do latim “tessela” que significa “pequeno quadrado” que os romanos usavam antigamente para fazer desenhos de azulejos e mosaicos.

Figura 1.8: Tesselação.



Fonte: <http://oficinadoorigami.blogspot.com>.

A partir de uma única folha como na figura 1.8, com inúmeras dobraduras, um padrão repetitivo complexo de formas é obtido, usando um encadeamento de linhas de grades, formados por figuras geométricas planas como o hexágono regular, quadrados e triângulos equiláteros. ([4] HAYASAKA e NISHIDA, 2009)

Capítulo 2

As aplicações do Origami

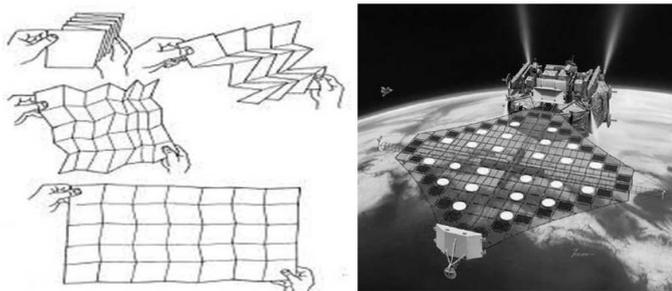
A maioria das pessoas associa o origami apenas como entretenimento infantil tal como dobraduras de animais, brinquedos e diversos objetos, alguns usados como propósito decorativo. Entretanto, a partir do século XX, ele se transformou em uma forma diferente de arte, de escultura. A partir do trabalho do mestre japonês Akira Yoshizawa, o origami mudou e esta mudança tem conexões diretas com a Matemática. Isto é, pessoas aplicaram princípios matemáticos à arte das dobraduras, para assim descobrir as suas leis fundamentais.

Surpreendentemente, o origami e estruturas que foram desenvolvidas em origami, acabaram tendo aplicações na medicina, nos eletrônicos, no espaço, no corpo, na arquitetura, design, nas ciências e outros. Contudo, os primeiros cientistas interessados em origami eram matemáticos que analisavam padrões de modelos dobrados e desenvolviam softwares que permitiam obter novos objetos tridimensionais a partir de folhas planas. E, dessa forma, descobriram que os modelos dobrados guardavam propriedades mecânicas interessantes e isso levou à criação de dispositivos dobrados a partir de folhas planas.

2.1 Dobraduras de Miura-Ori

O Miura-Ori é um rígido padrão de origami que é formado a partir de um arranjo de uma única geometria unitária repetida. Este padrão foi estudado por Koryo Miura, um engenheiro japonês. Ele estudou esse padrão de dobras e percebeu que este poderia ser dobrado em um pacote extremamente compacto que tem uma estrutura muito simples de abertura e fechamento. Nessa técnica, basta segurar dois cantos opostos para dobrar e desdobrar. Tal simplicidade permite que a dobra seja usada em muitas dessas aplicações inspiradas em origami.

Figura 2.1: Dobra de Miura aplicada em mapas e ao lado uma aplicação dessas dobras em um protótipo de painel solar usado no espaço.



Fonte: ([11] MIURA, 2009).

Um exemplo dessas aplicações pode ser visto num projeto de uma matriz solar, o qual foi usado em um satélite japonês lançado em 1995 como se observa na figura 2.1. Isso ocorreu porque os satélites precisam de energia para funcionar e, no espaço, essa energia é obtida a partir de painéis solares. Entretanto, estes demandam um grande peso e volume para serem enviados ao espaço.

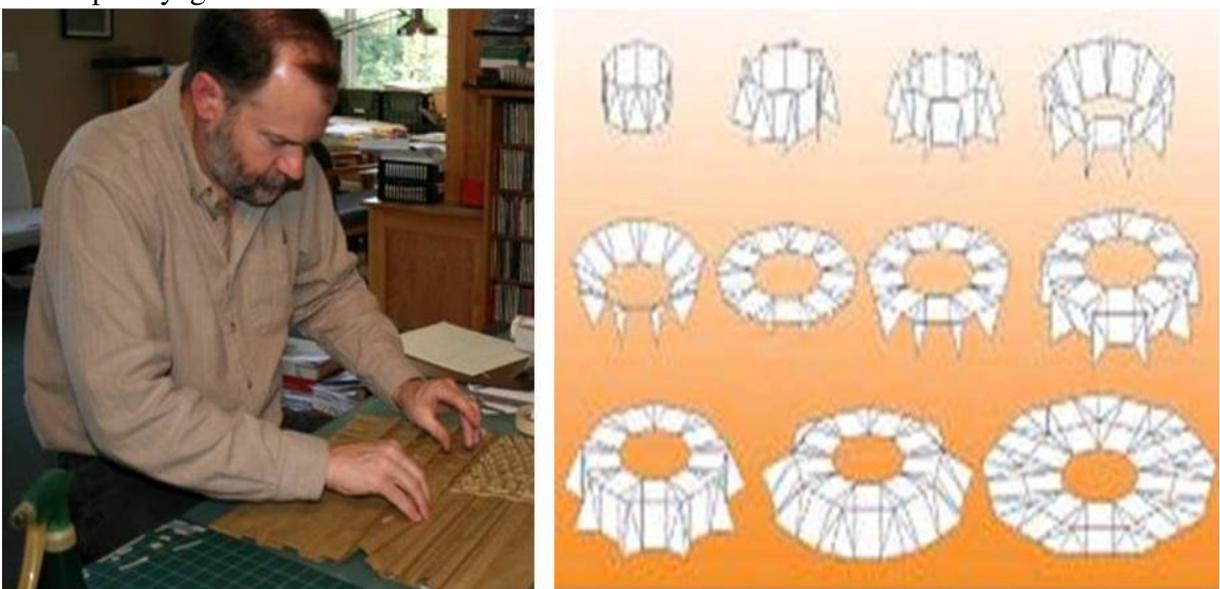
A dobra de Miura foi aplicada em painéis solares e seu transporte e, para o satélite japonês experimental N2, onde foram desdobrados na chegada. Sua grande vantagem é que o dobramento e o desdobramento podem ser executados por robôs, além de garantir que ocupem uma grande área sem no entanto ocupar muito volume. A dobra Miura também foi aplicada em baterias de íons de lítio. E graças ao dobramento, sua capacidade de armazenamento é tipicamente maior que a das baterias tradicionais. ([11] MIURA, 2009)

2.2 Origami em Telescópio Espacial

Para desvendar os mistérios das galáxias e eventos astronômicos que estão muito distantes, torna-se necessário o uso de um grande telescópio espacial. Contudo, telescópios de grande porte não podem ser enviados tão facilmente ao espaço por restrições de tamanhos dos foguetes e ônibus espaciais.

Diante desse contexto, surge o artista profissional e também físico Robert J. Lang que é um dos expoentes na atualidade sobre a pesquisa teórica de aplicabilidade do origami. Ele ajudou os engenheiros do Laboratório Nacional Lawrence Livermore, Califórnia, ao projetar um método, usando os princípios do origami para fazer espelhos dobráveis de um telescópio espacial de modo que ele pudesse ser transportado num ônibus espacial e implantado no espaço. Eles o chamaram de “The Eyeglass” cujo método pode ser visualizado na figura 2.2. O projeto demanda órbita geossíncrona, 40 000 km acima do solo e lentes de 100 metros de diâmetro.

Figura 2.2: A esquerda, Robert J. Lang e a direita o arquétipo do funcionamento do projeto do telescópio Eyeglass.



Fonte: ([14] YAMADA, 2017).

De acordo com Yamada ([14], 2017), em meados de 2002, uma lente telescópica com mais de 3 metros de diâmetro foi construída e, quando dobrada no estilo origami, reduziu seu tamanho para 1,2 metros de diâmetro numa forma cilíndrica. O projeto inicial ainda não foi concluído, mas as pesquisas continuam e a aplicabilidade das dobraduras tem se mostrado cada vez mais profícuas nesse ramo da ciência.

2.3 Origami na Medicina

A figura 2.3 mostra um stent coronário desenvolvido por uma equipe britânico-japonesa na universidade de Oxford. Um stent é um tubo que pode ser colapsado em um tamanho menor.

Figura 2.3: Stent origami projetado para fins medicinais.



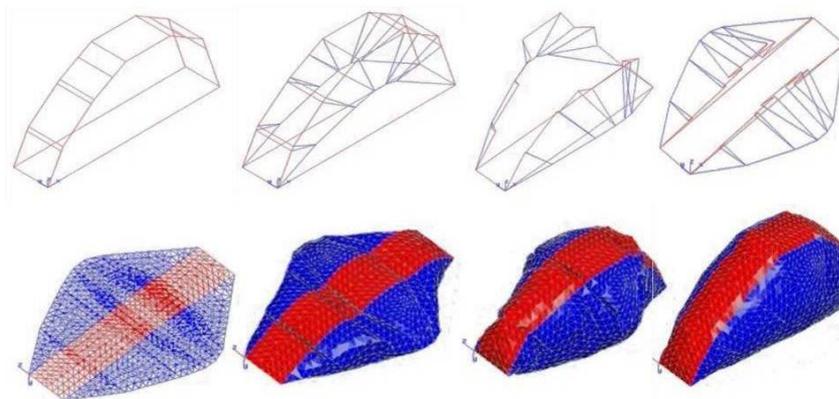
Fonte: ([15] YOU, 2009).

Esse tubo mantém uma artéria bloqueada aberta quando ele chega no final do destino. Como esse instrumento precisa ser bem menor, pois viaja através das veias e vasos sanguíneos, ele é dobrado usando um padrão de origami baseado em um modelo chamado de base bomba d'água e pode reduzir sua largura de 23 a 12 milímetros. ([15] YOU, 2009)

2.4 Origami em Airbags de carros

Em um acidente de alta velocidade, os ocupantes do carro devido a aceleração do veículo podem ser arremessados contra o lado, o painel ou para-brisa. Se o carro possui airbag, no instante em que uma colisão é detectada, a eletrônica a bordo detona uma pequena carga explosiva que infla o airbag, proporcionando amortecimento suficiente para proteger o ocupante do impacto. No entanto, o airbag deve inflar completamente em poucos milissegundos e ser firme para suportar o amortecimento dos impactos, o que necessita de uma engenharia bastante precisa e que envolve simulação de computador. É diante desse contexto que entra o origami, pois basicamente, em simulações computacionais, o airbag é tratado como um corpo rígido (uma folha de papel) que precisa ser dobrado até caber em um pequeno pacote e depois possa ser transformado em um objeto tridimensional.

Figura 2.4: Processo de implantação de um airbag a partir de uma simulação com o uso de design de origami.



Fonte: ([2] CROMVIK, 2009).

Baseado em Cromvik ([2], 2009), assim como na figura 2.4, Robert Lang tem auxiliado uma empresa alemã a projetar um algoritmo baseado em dobraduras que permitirá fazer simulações em computador do dobramento de um airbag. Com isso, a empresa conseguiu a eficiência dos airbags sem ter que submeter a testes reais de colisão, o que para empresa garante economia de recursos e tempo.

2.5 Origami na Arquitetura

Graças aos benefícios funcionais, há enormes possibilidades e novos aspectos estéticos que o origami possibilita, onde muitos arquitetos e designers modernos começam a aplicá-lo com mais frequência em seus projetos recentes.

Figura 2.5: Da esquerda para direita: Capela do Hospital de St-Loup, Pompales, Suíça; Centro Tecnológico de Energias Renováveis, Ningbo, China; Pavilhão de Eventos, Cuenca, Espanha.



Fonte: <http://www.arcoweb.com.br>.

Na arquitetura, por exemplo, o origami geralmente é aplicado de três maneiras: telhados de placas dobradas ou fachadas; estruturas arquitetônicas implantáveis; e arquitetura cinética. A capacidade de flexionar um teto de chapa tal que o mesmo dobre significa que ele pode cobrir áreas maiores e ser mais facilmente adaptado a superfícies curvas. E, neste caso, os padrões de origami oferecem uma variedade de possibilidades para a criação de estruturas implantáveis como fachadas, tendas e telhados. Como exemplo disso, tem-se a figura 2.5.

Dessa maneira, com base em Lima ([10], 2017), a arquitetura de origami oportuniza o uso de materiais mais ecológicos, como painéis de madeira, papelão reciclado e outros com-

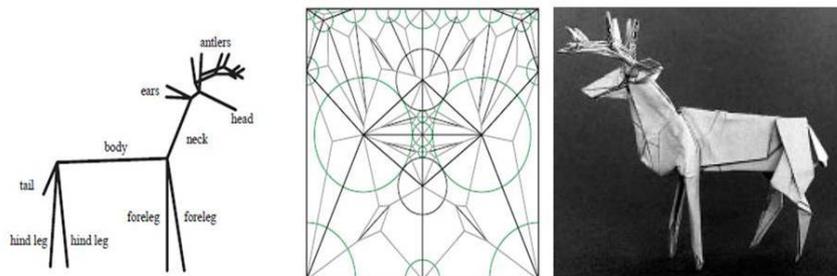
postos com bases vegetais. Logo, esses materiais, que são biodegradáveis, são mais adequados devido à sua leveza e flexibilidade.

2.6 Origami e computação

Ao longo da história do origami, a maioria dos primeiros modelos buscava em muitas situações representar pássaros, insetos, animais, plantas, seres humanos, objetos inanimados e formas abstratas. Dessa forma, o modelo final era obtido a partir de uma combinação de tentativas, erros, intuição e experiência por comparação com modelos anteriores. Porém, nos últimos 50 anos, a complexidade dos modelos em origami aumentou consideravelmente, chegando a modelos com detalhes cada vez mais precisos e sofisticados.

Diante desse contexto, o artista e físico Robert Lang, que há anos tem ganhado notoriedade no estudo da matemática teórica e engenharias aplicáveis às dobraduras, criou um programa de computação chamado Tree Maker que usa um algoritmo capaz de determinar os vincos necessários para se criar a base do modelo de acordo com a quantidade, comprimento e conectividade de abas que serão necessárias para se chegar à forma desejada com o origami a partir de um método chamado gráfico de árvores, como se observa na figura 2.6. ([9] LANG, 2004)

Figura 2.6: À esquerda, esboço usando linhas para a forma que ser dobrar, ao meio, o diagrama de vincos necessários para se chegar à base da peça obtido com o programa Tree Maker e à direita o modelo dobrado e finalizado.



Fonte: ([3] HARDESTY, 2004).

Como consequência, Eric Demaine, agora um professor de engenharia elétrica e ciência da computação do MIT, provou em 1999 que qualquer poliedro pode ser dobrado a partir de uma única folha de papel, e se esse papel é preto no verso e branco na frente, então qualquer padrão “preto/branco” pode ser feito na superfície desse poliedro. E, em 2017, ele e outro pesquisador, Tomohiro Tachi, da Universidade de Tóquio aperfeiçoaram o resultado da pesquisa anterior e fizeram um programa capaz de projetar padrões de vincos para produzir qualquer poliedro, isto é, uma superfície tridimensional composta de faces planas. ([3] HARDESTY, 2004)

2.7 Origami e Educação

Além do que foi citado anteriormente, o origami teve grande influência como elemento educativo nas escolas da Espanha e no Japão. E o pedagogo alemão Friedrich Froebel (1782-1852) foi o precursor da inserção do origami na educação, onde a escola de jardim da infância

(kindergarten), em 1837, tornou-se a primeiras de muitas outras que usariam o origami como ferramenta metodológica. Segundo Hayasaka ([4], 2009), ele dividia sua metodologia usando as dobraduras em 3 estágios:

1. Dobras de verdade: nele a criança deveria aprender os princípios da Geometria Euclidiana dobrando o papel;
2. Dobras da Vida: tinha o objetivo de fazer a criança memorizar as dobraduras tradicionais que representavam a natureza ao redor: animais, objetos, plantas;
3. Dobras da Beleza: por fim estimular o senso artístico e a criatividade enaltecendo a contemplação das dobraduras bem como sua exposição.

No Brasil, o origami chegou através dos colonizadores portugueses e, durante o império, os europeus vinham orientar as crianças mais ricas. Entretanto, foi na época da imigração japonesa, iniciada em 1908, que a cultura do origami se infiltrou de modo mais consistente em nossa terra.

Um tempo depois, nos anos de 1970 e 1971, a professora Yachiyo Koda ministrou aulas de origami na TV Cultura, além de ter realizado cursos e exposições em várias cidades do país por meio da Aliança Cultural Brasil-Japão e com a ajuda do consulado do Japão em São Paulo. ([5] HAYASAKA e NISHIDA, 2009)

Todavia, de modo geral, as técnicas do origami são usadas não apenas para desenvolver habilidades cognitivas e criativas das crianças, mas também para ensinar geometria na educação básica e até mesmo na educação superior e além. Vários trabalhos de pesquisa têm sido feitos na área da educação e confirmam a eficiência do origami como ferramenta educacional, principalmente no ensino da geometria em Matemática.

Capítulo 3

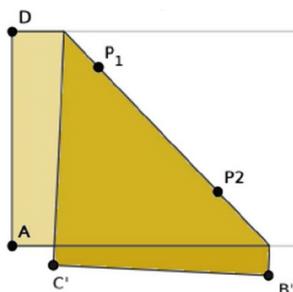
Origami e Geometria

Através da leitura do percurso histórico do origami já traçado nos capítulos anteriores fica evidente que a utilidade do origami enquanto ferramenta educativa principalmente de aspectos geométricos não é nenhuma novidade, pois foi uma prática já realizada em diversas épocas e países, notadamente Espanha, Alemanha, Japão e mais recentemente no Brasil, principalmente a partir da imigração japonesa. Entretanto, só a partir da década de 1970 que estudos mais rigorosos começaram a ser feitos no sentido de explicar que tipos e quantas construções geométricas eram possíveis com as dobraduras.

3.1 Axiomas de Huzita-Hatori

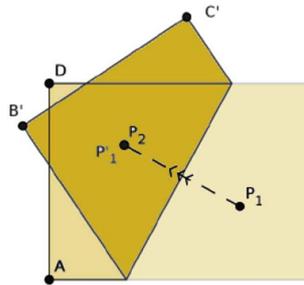
Posteriormente, nos trabalhos da primeira Conferência de Ciência e Matemática do Origami, o matemático francês Jacques Justin publicou um artigo no qual ele enumerou 7 possíveis combinações de alinhamentos em dobraduras em 1989. Em 1991, o matemático japonês Humiaki Huzita descobriu de forma independente as mesmas regras relacionadas aos fundamentos matemáticos da dobra de papel e os processos que podem ser feitos ao dobrar uma folha de papel. Então, esses resultados ficaram conhecidos como Axiomas de Huzita. Mas, em 2002, a matemática japonesa Koshiro Hatori encontrou um novo tipo de alinhamento, o qual não estava compreendido dentre nenhum dos axiomas de Huzita. Assim, surgia naquele momento a dúvida da existência de mais axiomas, porém, Robert Lang, em um estudo posterior, confirmara a completez, construindo dessa forma 7 axiomas conhecidos como Huzita-Hatori ou Huzita-Justin. De acordo com tais resultados, os axiomas assumem que as operações são concluídas em um plano e que todas as dobras são lineares. Sendo assim, os axiomas de Huzita-Hatori, descritos por Lang ([8], 2004), assim como as figuras de Passaroni ([13], 2015), são descritos a seguir:

Axioma 1: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma única dobragem que passa pelos dois pontos.



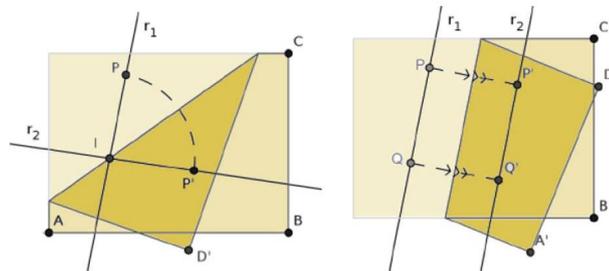
É evidente que este axioma se refere ao primeiro postulado de Euclides cuja definição diz que através de quaisquer dois pontos distintos é possível desenhar (exatamente) uma linha reta.

Axioma 2: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , há uma dobragem que os torna coincidentes.



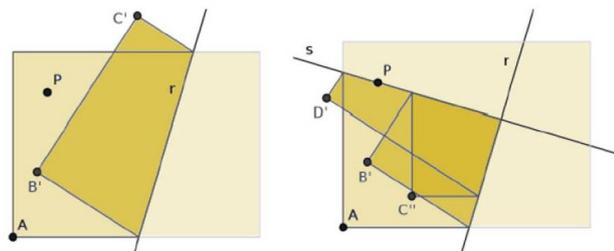
Este axioma equivale a achar a mediatriz de um segmento com extremidades em P_1 e P_2 .

Axioma 3: Dadas duas retas r_1 e r_2 , há uma dobragem que as torna coincidentes.



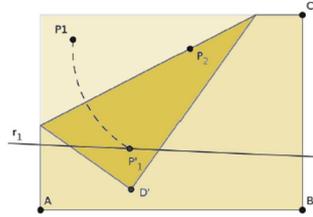
Este axioma nos dá a solução geométrica de encontrar a reta bissetriz dos ângulos formados entre duas retas. Se as retas são paralelas, a bissetriz será uma dobra (reta) paralela às outras duas. Se as retas são concorrentes com o ponto de intersecção de ambas no interior da folha de papel então haverá duas soluções (dobras) possíveis: uma em relação ao maior e a outra em relação ao ângulo menor formado entre as duas retas.

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta l , há uma dobragem perpendicular a l que passa por P .



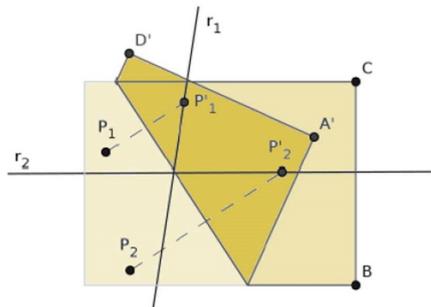
O axioma 4 garante a unicidade e à existência da reta perpendicular que passa por um ponto P em relação a uma reta r qualquer.

Axioma 5: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e uma reta r , se o comprimento de $\overline{P_1P_2}$ for igual ou superior à distância de P_2 à r , há uma dobragem que faz incidir P_1 em r e que passa por P_2 .



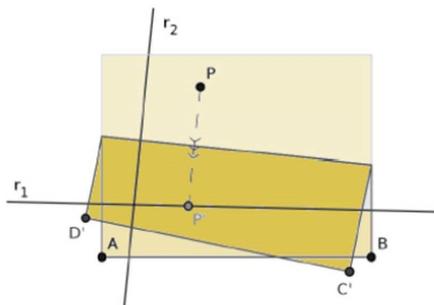
Este axioma revela como encontrar a intersecção da reta r_1 com a circunferência de centro P_2 passando por P_1 . E há no máximo duas dobras possíveis dependendo das posições dos pontos e da reta r_1 .

Axioma 6: Dados dois pontos, P_1 e P_2 , e duas retas r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobragem que faz incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2 .



O axioma 6 equivale a encontrar uma linha simultaneamente tangente a duas parábolas com focos em P_1 e P_2 e com retas diretrizes r_1 e r_2 . É possível notar ainda que a dobra obtida é a mediana de $\overline{P_1P_1'}$ e $\overline{P_2P_2'}$, onde P_1' e P_2' são os pontos obtidos com a sobreposição de P_1 e P_2 em relação às retas r_1 e r_2 , respectivamente.

Axioma 7: Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2 , se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2 .



O axioma 7 pode ser considerado um desdobramento do axioma 4.

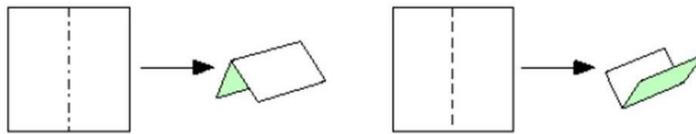
3.2 O teorema de Maekawa-Justin

Uma dobra em uma folha de papel pode ser feito de duas formas diferentes: convexas ou montanhosas ou, em uma forma côncava ou vale. Logo, o uso de notação geral pode ser observada na figura 3.1.

Figura 3.1: Uma dobra em montanha (esquerda) e outra em vale (direita).

— · — · — · — · — · — Para as dobras em Montanha

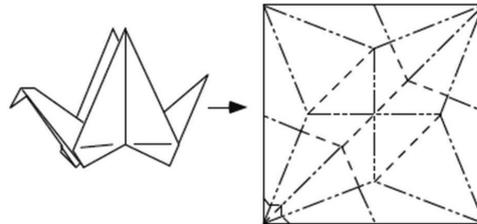
— — — — — Para as dobras em Vale



Fonte: [http:// theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing](http://theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing).

Ao desdobrar um origami, as marcas das dobras ficam evidentes no papel e os dois tipos de dobras, montanha e vale, ficam expostas. Nesse contexto, o físico japonês Jun Maekawa e o matemático francês Jacques Justin, de forma independente na década de 1980, observaram que a diferença entre as quantidades de dobras de cada tipo, em cada vértice interno, é 2, conforme pode ser visto na figura 3.2.

Figura 3.2: A esquerda, o origami do Tsuru e, a direita, seu mapa de dobras de vale e montanha.



Fonte: [http:// theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing](http://theconversation.com/origami-mathematics-in-creasing).

Como conclusão, segundo Cavacami e Furuya ([1], 2009), podemos dizer que um vértice V é um vértice interno plano se corresponde a um vértice do interior do mapa em que as dobras convergem de tal forma que um disco centrado em V e que não contém nenhum outro vértice do mapa admitir uma dobra plana. Para isso, é necessário verificar uma série de condições básicas sem as quais o desdobramento não seria possível.

Teorema 3.1 (Maekawa-Justin). *Seja x o número de dobras em montanha e y o número de dobras em vale que convergem em um vértice interno plano. Verifica-se então que $x - y = \pm 2$.*

Desse teorema resulta que o número total de dobras deve ser par.

3.3 O teorema de Kawasaki-Justin

No caso do teorema de Kawasaki-Justin, a relação ocorre a partir da soma dos ângulos alternados que se formam ao redor de um vértice interno.

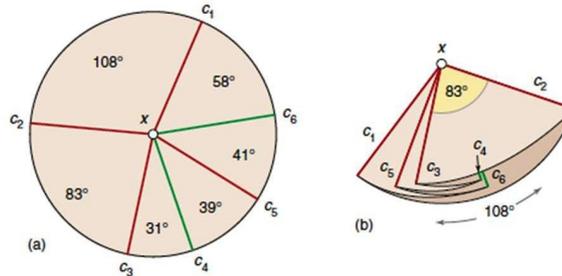
Teorema 3.2 (Kawasaki-Justin). *A soma dos ângulos alternados em um vértice interno de um origami desdobrado é de 180° .*

O teorema de Kawasaki afirma que um dado padrão de vinco pode ser dobrado em um origami plano se todas as sequências de ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}$ ao redor de cada vértice (interior) preencherem a seguinte condição:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = 180^\circ.$$

Condição essa que pode ser compreendida através da visualização da figura 3.3.

Figura 3.3: Ilustração do Teorema de Kawasaki-Justin: $31^\circ + 41^\circ + 108^\circ = 39^\circ + 58^\circ + 83^\circ$.



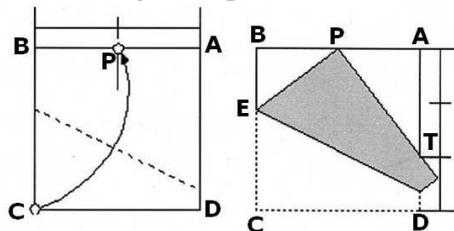
Fonte: OROURKE, J. How to fold it. Cambridge, New York. 2011.

3.4 O teorema de Haga

Para Passaroni ([13], 2015), este teorema foi originalmente enunciado pelo Dr. Koji Fusimi em 1979 com o nome “Teorema de Haga”. Mais tarde, o próprio Kazuo Haga, professor aposentado de biologia do Japão, acrescentou outras duas construções geométricas relacionadas com o primeiro teorema publicado, as quais ele denominou de segundo e terceiro teoremas.

Teorema 3.3. [Primeiro Teorema de Haga] *Seja um quadrado de vértices A, B, C, D e P o ponto médio do segmento AB , se T é a intersecção do lado CD com o lado AD , após a dobra que faz coincidir o vértice C com o ponto P , então a medida de $\overline{DT} = \frac{1}{3}$.*

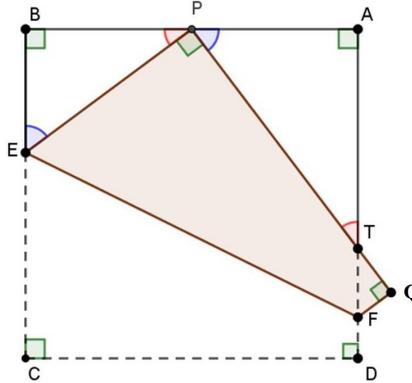
Figura 3.4: Ilustração do primeiro Teorema de Haga.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

Demonstração. Sem perda de generalidade, admitamos que o lado do quadrado ABCD da figura abaixo seja de comprimento igual a 1 unidade de medida. Se P é ponto médio do lado AB, então \overline{BP} e \overline{PA} são congruentes e o comprimento desses segmentos é igual a $\frac{1}{2}$.

Figura 3.5: Ilustração do primeiro Teorema de Haga e os triângulos semelhantes formados.



Ao analisar o triângulo PAT , pode-se afirmar que os ângulos $T\hat{P}A$ e $A\hat{T}P$ são complementares, pois $P\hat{A}T$ é reto. Como $E\hat{P}T$ também é reto, então o ângulo $B\hat{P}E$ é complementar de $T\hat{P}A$ e, $E\hat{B}P$ sendo um ângulo reto novamente, o ângulo $P\hat{E}B$ é complementar de $B\hat{P}E$ a partir do triângulo PBE . Sendo assim, $A\hat{T}P$ é congruo a $B\hat{P}E$ e $T\hat{P}A$ é congruo a $P\hat{E}B$. Além disso, $A\hat{T}P$ é congruo a $F\hat{T}Q$ (ângulos opostos pelo vértice) e, como o triângulo FTQ é reto em Q , segue que o ângulo $Q\hat{F}T$ é complementar de $F\hat{T}Q$, isto é, $Q\hat{F}T$ é congruo a $A\hat{T}P$. Portanto, os triângulos PBE , PAT e FTQ são semelhantes. Agora, seja a medida de $\overline{BE} = a$, então a medida de $\overline{EP} = 1 - a$, pois $med(\overline{BE}) + med(\overline{EP}) = 1$. Como ΔPBE é um triângulo retângulo em B , então, com base no teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$[med(\overline{EP})]^2 = [med(\overline{BE})]^2 + [med(\overline{BP})]^2$$

$$(1 - a)^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies 1 - 2a + a^2 = a^2 + \frac{1}{4} \implies 1 - 2a = \frac{1}{4} \implies 2a = 1 - \frac{1}{4} \implies 2a = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{3}{8}$$

Segue disso que $med(\overline{EP}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. E, como os triângulos PBE e PAT são semelhantes, logo:

$$\frac{med(\overline{AP})}{med(\overline{BE})} = \frac{med(\overline{AT})}{med(\overline{PB})}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \implies \frac{3b}{8} = \frac{1}{4} \implies 12b = 8 \implies b = \frac{2}{3}, \text{ onde } med(\overline{AT}) = b. \text{ Consequentemente,}$$

$$med(\overline{DT}) = \frac{1}{3}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Vale ressaltar que podemos ir um pouco mais adiante na demonstração e encontrar outros resultados. Dessa maneira, considerando o ΔPAT e a aplicação do teorema de Pitágoras neste triângulo, constrói-se o seguinte raciocínio:

$$[med(\overline{PT})]^2 = [med(\overline{AP})]^2 + [med(\overline{AT})]^2$$

$$[\text{med}(\overline{PT})]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \implies [\text{med}(\overline{PT})]^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \implies [\text{med}(\overline{PT})]^2 = \frac{25}{36} \implies$$

$$\text{med}(\overline{PT}) = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}, \text{ onde segue que } \text{med}(\overline{TQ}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}.$$

Em outra situação, como $\triangle FTQ$ e $\triangle PAT$ são semelhantes, disso decorre que:

$$\frac{\text{med}(\overline{TF})}{\text{med}(\overline{PT})} = \frac{\text{med}(\overline{TQ})}{\text{med}(\overline{AT})}$$

$\frac{\text{med}(\overline{TF})}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}} \implies \text{med}(\overline{TF}) = \frac{\frac{36}{5}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{24}$. E usando mais uma vez o teorema de Pitágoras no triângulo FTQ , tem-se:

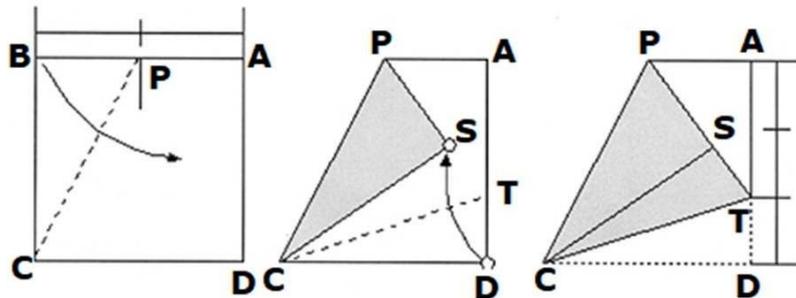
$$[\text{med}(\overline{TF})]^2 = [\text{med}(\overline{TQ})]^2 + [\text{med}(\overline{FQ})]^2$$

$$\left(\frac{5}{24}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + [\text{med}(\overline{FQ})]^2 \implies \frac{25}{576} = \frac{1}{36} + [\text{med}(\overline{FQ})]^2 \implies [\text{med}(\overline{FQ})]^2 = \frac{25}{576} - \frac{1}{36} \implies \text{med}(\overline{FQ}) = \sqrt{\frac{9}{576}} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \text{ e, conseqüentemente, } \text{med}(\overline{FD}) = \frac{1}{8}.$$

Portanto, conclui-se que $\text{med}(\overline{BE}) = \frac{3}{8}$, $\text{med}(\overline{EP}) = \frac{5}{8}$, $\text{med}(\overline{AT}) = \frac{2}{3}$, $\text{med}(\overline{PT}) = \frac{5}{6}$, $\text{med}(\overline{TQ}) = \frac{1}{6}$, $\text{med}(\overline{TF}) = \frac{5}{24}$. \square

Teorema 3.4 (Segundo Teorema de Haga). Dado o quadrado unitário $ABCD$ e P o ponto médio de \overline{AB} , se S é o ponto onde se encontra o vértice B , após a dobra de \overline{CP} , e T é o ponto onde inicia a dobra que faz coincidir D com S , mantendo o vértice C fixo, então, a medida de $\overline{DT} = \frac{1}{3}$.

Figura 3.6: Ilustração do segundo Teorema de Haga.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

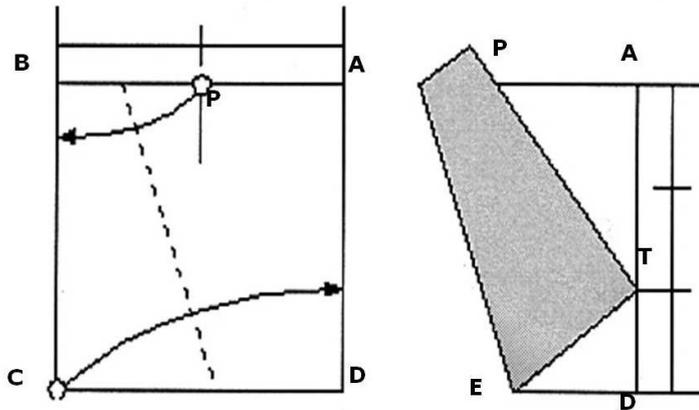
Demonstração. Sem perda de generalidade, admitamos que o lado do quadrado $ABCD$ da figura 3.6 seja de comprimento igual a 1 unidade de medida. Como os pontos P , S e T são colineares. Basta notar que os ângulos $\hat{P}SC$ e $\hat{S}TC$ são retos, pois equivalem aos ângulos internos do quadrado $ABCD$ que foram dobrados ao longo das linhas \overline{CP} e \overline{CT} . Por construção, tem-se que o segmento PS é côngruo ao segmento PB e P é ponto médio de \overline{AB} , então segue que $\text{med}(\overline{PA}) = \text{med}(\overline{PB}) = \text{med}(\overline{PS}) = \frac{1}{2}$. Além disso, $\overline{ST} \equiv \overline{DT}$.

Considere $med(\overline{DT}) = a$, então $med(\overline{AT}) = 1 - a$. Tem-se ainda que $med(\overline{PT}) = med(\overline{PS}) + med(\overline{ST}) = \frac{1}{2} + a$.

Usando o Teorema de Pitágoras no $\triangle PAT$ tem-se que $[med(\overline{PT})]^2 = [med(\overline{PA})]^2 + [med(\overline{AT})]^2 \implies \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - a)^2 \implies \frac{1}{4} + a + a^2 = \frac{1}{4} + 1 - 2a + a^2 \implies 3a = 1 \implies a = \frac{1}{3}$. \square

Teorema 3.5 (Terceiro Teorema de Haga). *Dado o quadrado unitário $ABCD$ e P o ponto médio do segmento AB , consideremos a dobra que leva o ponto P sobre o lado \overline{BC} , ao mesmo tempo que o vértice C é levado sobre o lado \overline{AD} . Se T é o ponto do lado \overline{AD} onde o vértice C se encontra após a dobra, então $\overline{DT} = \frac{1}{3}$.*

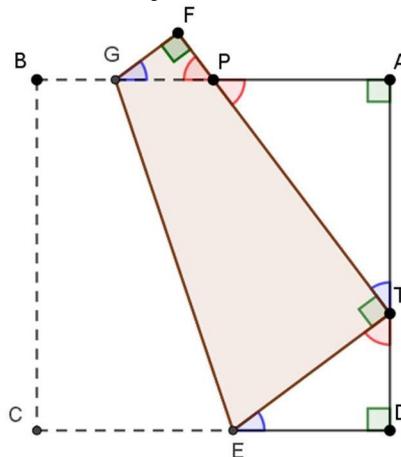
Figura 3.7: Ilustração do terceiro Teorema de Haga.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

Demonstração. Novamente, seja o lado do quadrado $ABCD$ da figura 3.7 seja de comprimento igual a 1 unidade de medida e, para melhor compreensão, considere como parâmetro a figura abaixo.

Figura 3.8: Outra ilustração do terceiro Teorema de Haga.



Sendo P ponto médio do lado \overline{AB} , temos que \overline{BP} e \overline{PA} são congruentes, logo $med(\overline{PA}) = med(\overline{BP}) = \frac{1}{2}$. Por outro lado, os ângulos $\hat{T}PA$ e $\hat{A}TP$ são complementares, pois $P\hat{A}T$ é reto;

como $F\hat{T}E$ também é reto, então o ângulo $E\hat{T}D$ é complementar de $A\hat{T}P$; e se $T\hat{D}E$ é ângulo reto, então o ângulo $D\hat{E}T$ é complementar de $E\hat{T}D$. Logo, $A\hat{T}P \equiv D\hat{E}T$ e $T\hat{P}A \equiv E\hat{T}D$. Além disso, $T\hat{P}A \equiv F\hat{P}G$ (ângulos opostos pelo vértice) e como o triângulo GFP é reto em F segue que o ângulo $P\hat{G}F$ é complementar de $F\hat{P}G$, isto é, $P\hat{G}F \equiv A\hat{T}P$. Portanto, os triângulos GFP , PAT e TDE são semelhantes.

Agora, denominemos as medidas $med(\overline{FP}) = b$, $med(\overline{GP}) = a$ e $med(\overline{AT}) = x$. Como $med(\overline{FG}) + med(\overline{GP}) = \frac{1}{2}$, segue que $med(\overline{FG}) = \frac{1}{2} - a$ e, como $med(\overline{FP}) + med(\overline{PT}) = 1$, logo $med(\overline{PT}) = 1 - b$.

Do teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo GFP tem-se que:

$$\begin{aligned} [med(\overline{GP})]^2 &= [med(\overline{FG})]^2 + [med(\overline{FP})]^2 \\ a^2 &= \left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + b^2 \implies a^2 = \frac{1}{4} - a + a^2 + b^2 \\ a &= \frac{1}{4} + b^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Da semelhança dos triângulos GFP e PAT , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{med(\overline{PT})}{med(\overline{GP})} &= \frac{med(\overline{PA})}{med(\overline{FP})} \\ \frac{1-b}{a} &= \frac{\frac{1}{2}}{b} \implies \frac{1-b}{a} = \frac{1}{2b} \\ a &= 2b - 2b^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilizando o método de comparação entre as equações 3.1 e 3.2, tem-se:

$$\frac{1}{4} + b^2 = 2b - 2b^2 \implies 3b^2 - 2b + \frac{1}{4} = 0 \implies 12b^2 - 8b + 1 = 0$$

cujas raízes são $b_1 = \frac{1}{2}$ e $b_2 = \frac{1}{6}$. Porém, como $med(\overline{FP}) < med(\overline{GP}) < \frac{1}{2}$, logo $b = \frac{1}{6}$ e, conseqüentemente, $a = \frac{5}{18}$.

Dessa forma, $med(\overline{FG}) = \frac{1}{2} - \frac{5}{18} = \frac{2}{9}$ e $med(\overline{PT}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔPAT , encontra-se:

$$\begin{aligned} [med(\overline{PT})]^2 &= [med(\overline{PA})]^2 + [med(\overline{AT})]^2 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 + x^2 \implies x^2 = \frac{25}{36} - \frac{4}{81} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} \implies x = med(\overline{AT}) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

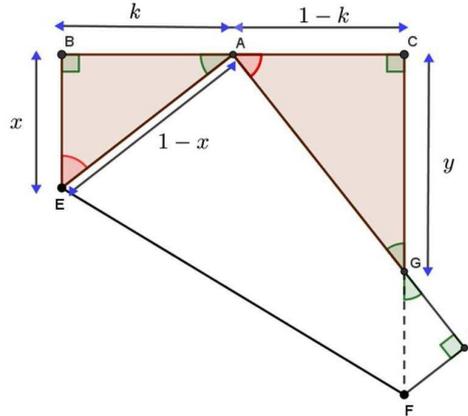
Portanto, $med(\overline{DT}) = \frac{1}{3}$.

□

3.5 Dobrando qualquer fração

Com base na figura 3.9, suponha que, em vez de dobrar o canto inferior esquerdo do papel até algum ponto na metade da borda superior, se dobre o canto inferior esquerdo até um ponto a uma distância k ao longo da borda superior do quadrado unitário $ABCD$.

Figura 3.9: Ilustração da generalização do Teorema de Haga.



Então, $med(\overline{AB}) = k$, $med(\overline{AC}) = 1 - k$, $med(\overline{BE}) = x$, $med(\overline{EA}) = 1 - x$ e $med(\overline{CG}) = y$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo EBA :

$$[med(\overline{AE})]^2 = [med(\overline{EB})]^2 + [med(\overline{BA})]^2$$

$$(1 - x)^2 = x^2 + k^2 \implies 1 - 2x + x^2 = x^2 + k^2 \implies x = \frac{1 - k^2}{2}.$$

E pela semelhança entre os triângulos EBA e ACG :

$$\frac{med(\overline{CG})}{med(\overline{AB})} = \frac{med(\overline{AC})}{med(\overline{BE})}$$

$$\frac{y}{k} = \frac{1 - k}{x} \implies \frac{y}{k} = \frac{1 - k}{\frac{1 - k^2}{2}} \implies \frac{y}{k} = \frac{2 \cdot (1 - k)}{(1 + k) \cdot (1 - k)} \implies y = \frac{2k}{1 + k}.$$

Já se demonstrou no teorema 3.3 (primeiro Teorema de Haga) que se $k = \frac{1}{2}$, então $y = \frac{2}{3}$ e, conseqüentemente, consegue-se dobrar a borda do quadrado em partes iguais.

Dessa forma, se girarmos o papel quadrado e dobrarmos o canto inferior esquerdo até um ponto cujo comprimento em relação à extremidade do quadrado seja $\frac{1}{3}$ do lado, então $k = \frac{1}{3}$, o que significa que

$$y = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \implies y = \frac{1}{2}.$$

Se continuarmos repetindo esse método, podemos dobrar qualquer fração tal que $k = \frac{1}{n}$ com

$$n \in \mathbb{N}. \text{ Então, } y = \frac{2k}{1+k} = \frac{2 \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \implies y = \frac{2}{n+1}. \text{ Logo, repetindo o}$$

método de Haga, podemos construir cada fração de unidade $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Pode-se também usá-lo para criar qualquer múltiplo dessas frações unitárias, e assim dobrar qualquer número racional.

Capítulo 4

Problemas envolvendo Dobraduras

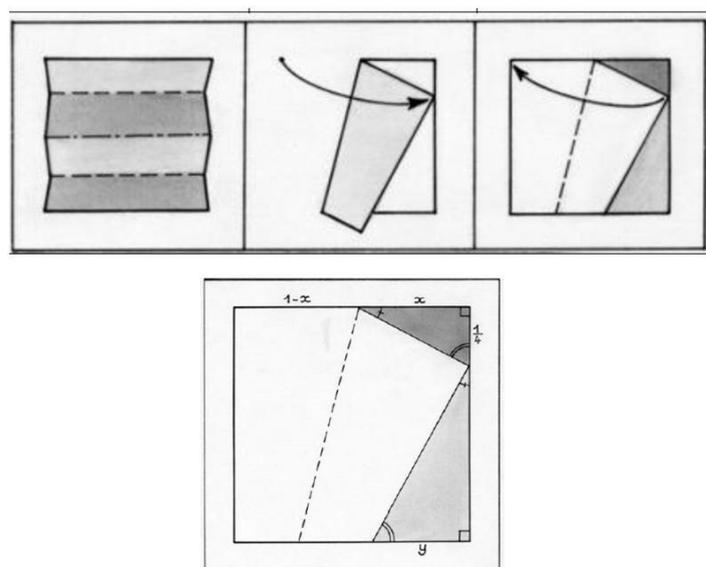
O origami além de proporcionar aplicações interessantes em diversas ciências e um campo de estudo teórico em matemática muito amplo que vai desde geometria até topologia constitui também uma excelente ferramenta didática que pode ser usada no Ensino Básico no estudo da Geometria Plana e Geometria Espacial.

Nesta seção abordaremos alguns problemas interessantes que se utilizam da abordagem do origami para explorar diversos conceitos bastante utilizados, sobretudo na Geometria Plana como relação de semelhança entre triângulos, teorema de Pitágoras e ângulos.

4.1 Problema 1

M. Kazuo Haga, o famoso mestre do Origami, encontrou um engenhoso método para dividir os lados de um pedaço de papel quadrado em partes iguais. Os primeiros passos do seu método para encontrar $\frac{1}{5}$ de um lado estão estabelecidos aqui (veja a ilustração da figura 4.1):

Figura 4.1: Problema n° 13 Olimpíada Matemática Sem Fronteira 2016 (OMS - 2016).



Passo 1: Dobre seu papel quadrado em 4 partes iguais; (Esta é a parte fácil!)

Passo 2: Traga a ponta superior esquerda até $\frac{1}{4}$ do comprimento do lado direito e dobre;

Passo 3: Pinte os dois triângulos e depois desdobre.

Após os passos, corte os dois triângulos coloridos, colocando-os um em cima do outro para mostrar que são triângulos semelhantes. Em seguida, cole-os em sua folha de respostas. Depois, calcule o valores de x e y indicados na figura 4.1. Agora, responda:

Que dobra finalmente mostra $\frac{1}{5}$ do lado do quadrado?

Solução 4.1. Aplicando o teorema de Pitágoras no pequeno triângulo colorido, obtém-se:

$$(1 - x)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \implies 1 - 2x + x^2 = x^2 + \frac{1}{16} \implies 2x = 1 - \frac{1}{16} \implies x = \frac{15}{32}.$$

Sabe-se que os dois triângulos coloridos são semelhantes, então decorre que:

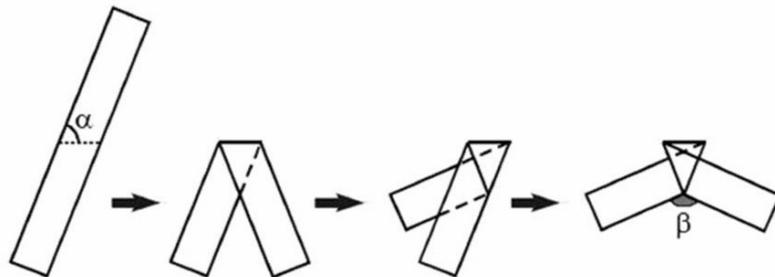
$$\frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{15}{32}} \implies \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{15} \implies y = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} \implies y = \frac{2}{5}$$

Para se obter o $\frac{1}{5}$ do lado da folha, apenas dobre o lado y ao meio.

4.2 Problema 2

Uma tira de papel é dobrada três vezes, como mostrado na figura 4.2. Determine β se nos é dado que $\alpha = 70^\circ$.

Figura 4.2: Problema extraído da Olimpíada Canguru Matemática sem fronteira - 2010.



Fonte: <http://www.cangurudematematicabrasil.com.br>.

- a) 140° b) 130° c) 120° d) 110° e) 100°

Solução 4.2. Uma vez que o ângulo de 70° é dobrado para baixo, o pequeno triângulo no meio da segunda tira da figura é isósceles com ângulos de 70° , 70° e 40° . Dobrando para a esquerda e direita, portanto, produz ângulos de 140° para a esquerda e para a direita, que têm um ângulo de 40° em comum. O ângulo em questão é, portanto, igual a $360^\circ - (140^\circ + 140^\circ - 40^\circ) = 120^\circ$. Logo, a resposta correta é a alternativa c).

4.3 Problema 3

Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado na figura 4.3, formando a figura plana da direita. Qual o valor do ângulo x ?

Figura 4.3: Problema da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP-2006) - 1ª Fase: Nível 3.

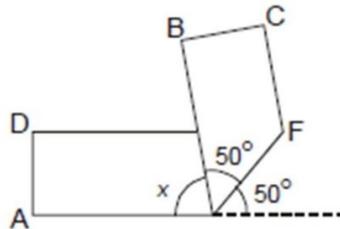


Fonte: <http://www.obmep.org.br>.

- a) 30° b) 50° c) 80° d) 100° e) 130°

Solução 4.3. Observando a figura da fita dobrada percebe-se que $x + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$. Então, $x = 80^\circ$, alternativa c).

Figura 4.4: Esquema de solução do problema da OBMEP-2006 - 1ª Fase: Nível 3.

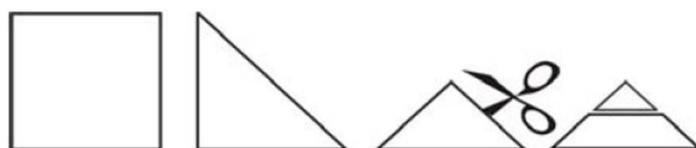


Fonte: <http://www.obmep.org.br>.

4.4 Problema 4

Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais, conforme a ilustração da figura 4.5, obtendo-se um triângulo.

Figura 4.5: Banco de Questões da OBMEP-2006 - Nível 3



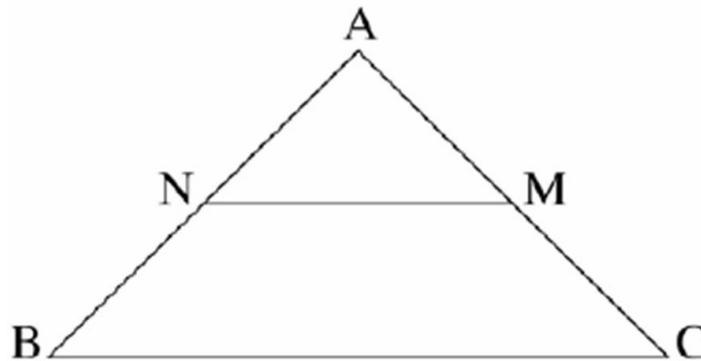
Fonte: <http://www.obmep.org.br>.

Foi feito um corte reto na folha dobrada, paralelo ao lado maior desse triângulo passando pelos pontos médios dos outros lados, e desdobrou-se a folha. A área do buraco na folha corresponde a qual fração da área da folha original?

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{4}$

Solução 4.4. A figura 4.6 mostra o triângulo obtido após dobrar o quadrado ao longo das duas diagonais. Designa-se $med(\overline{BC}) = a$, a medida do lado da folha quadrada inicial. Como o corte é feito pela base média \overline{MN} do triângulo, tem-se que $med(\overline{MN}) = \frac{med(\overline{BC})}{2} = \frac{a}{2}$. Desdobrando-se a folha, vê-se que o buraco é um quadrado de lado \overline{MN} . A área do quadrado original é a^2 e a área do buraco é $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, ou seja, a área cortada corresponde a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado original.

Figura 4.6: Triângulo obtido através de dobras sucessivas ao longo de suas diagonais.



Fonte: <http://www.obmep.org.br>.

Capítulo 5

Sugestão de Atividades com Dobraduras

A fim de deixar uma contribuição efetiva aos professores de matemática, segue nesse capítulo algumas propostas de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula, especialmente com os alunos do ensino fundamental, a respeito de teorias geométricas que podem ser abordadas a partir do manuseio das dobraduras.

5.1 Demonstrar a soma dos ângulos internos de um triângulo

Público alvo: 7º/8º ano do ensino fundamental II;

Objetivo: demonstrar que soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° ;

Pré-requisitos: definição de ângulos e triângulos;

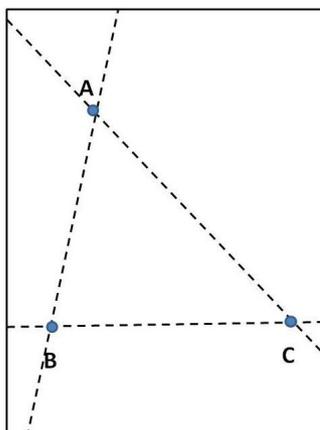
Material: folhas de papel A4 e esquadros;

Tempo previsto: aproximadamente 1 aula de 50 minutos;

Procedimentos:

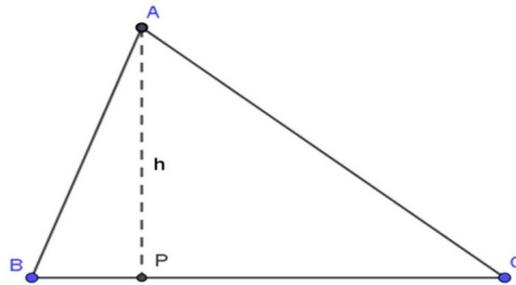
1. Primeiramente, na folha A4, peça para os alunos marcarem 3 pontos não colineares. Em seguida, com o uso de dobraduras, deve ser formado um triângulo como na figura 5.1.

Figura 5.1: Três pontos não colineares determinados na folha de papel A4.



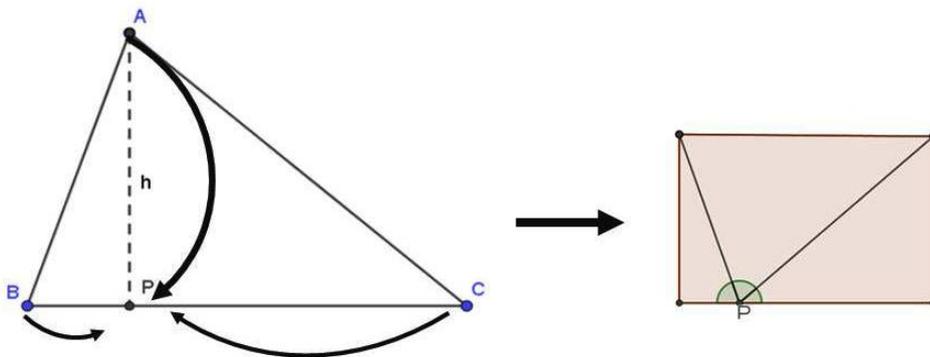
- Depois peça para os alunos recortarem o triângulo ABC formado.
- Logo após, com o auxílio de um esquadro, oriente aos alunos quanto a determinar e traçar a altura do triângulo em relação ao maior de seus ângulos, assim como marcar o ponto P , pé da altura sobre a base referente à altura construída. E tal ação pode ser observada na figura 5.2.

Figura 5.2: Triângulo ABC e a altura relativa ao maior segmento, BC .



- Dando continuidade, diga para dobrarem as pontas do triângulo, de modo que os vértices A , B e C coincidam com o ponto P , assim como na figura 5.3.

Figura 5.3: Dobradura feita no triângulo ABC .



- Para finalizar, entende-se que os alunos irão concluir que os ângulos dos vértices A , B e C formam um ângulo raso e que, portanto a soma dos ângulos internos do triângulo equivale a 180° .

Essa atividade está dentro dos parâmetros supracitados. Além do objetivo principal, outras questões podem ser abordadas durante a execução da atividade junto aos alunos, como: Qual é o tipo de triângulo obtido quanto à medida dos lados (escaleno, isósceles ou equilátero)? Qual é o tipo de triângulo obtido quanto à medida dos ângulos internos (acutângulo, obtusângulo ou retângulo)? Qual é a área do triângulo obtido com as dobraduras e qual sua relação com a área do retângulo obtido com as dobraduras dos três vértices sobre o ponto P ?

5.2 Teorema de Pitágoras

Público alvo: 7°/8° ano do ensino fundamental II;

Objetivo: verificar a validade do Teorema de Pitágoras;

Pré-requisitos: definição de triângulos;

Material: folhas de papel A4 e esquadros;

Tempo previsto: aproximadamente 1 aula de 50 minutos;

Procedimentos:

1. Primeiramente, na folha A4, peça para os alunos obterem um quadrado como na figura 5.4.

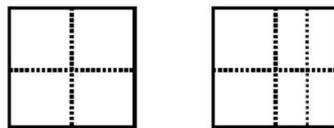
Figura 5.4: Quadrado obtido por dobraduras de uma folha retangular.



Fonte: <http://marcosventura.files.wordpress.com>.

2. Depois oriente os alunos a dividirem o papel quadrado em quatro quadrados congruentes. Mais tarde, instrua os mesmos a dividirem ao meio o lado de um desses quadrados congruentes, assim como na figura 5.5.

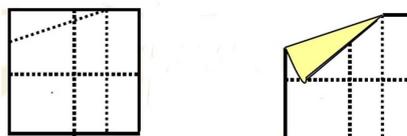
Figura 5.5: Divisão do quadrado em quatro quadrados congruentes.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

3. Logo após, peça para dobrarem um dos vértices do quadrado até a linha central que divide o quadrado maior como na figura 5.6.

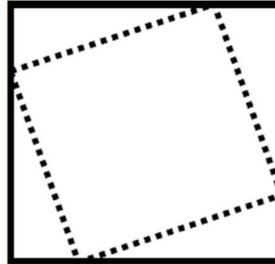
Figura 5.6: Dobradura.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

4. Dando continuidade, repete-se mais 3 vezes a dobradura do passo anterior e desdobra-se. Dessa forma, obtém-se com as dobras dos vértices do quadrado outro quadrado e 4 triângulos retângulos congruentes como na figura 5.7.

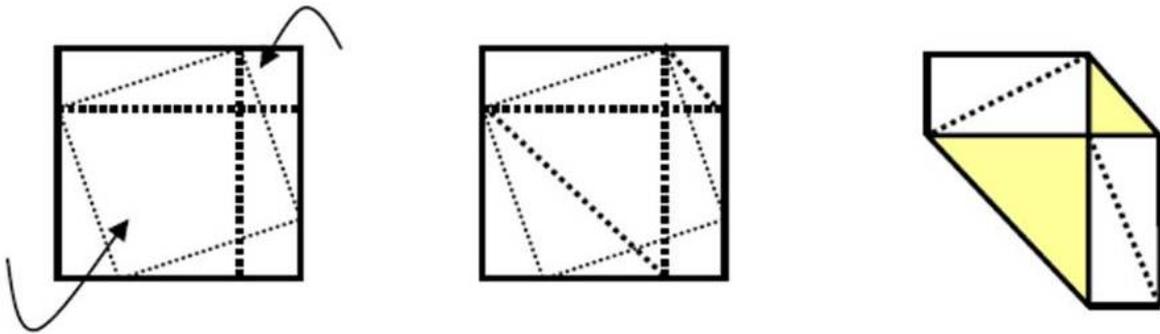
Figura 5.7: Quadrado construído a partir das 4 dobraduras.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

5. Agora, usando os vincos deixados pelos passos anteriores, dobram-se dois vértices pertencentes à uma das diagonais do quadrado original conforme a ilustração da figura 5.8.

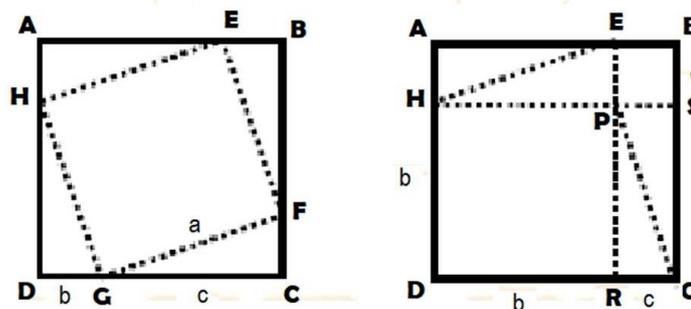
Figura 5.8: Quadrado construído a partir da hipotenusa dos 4 triângulos congruentes.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

6. Para finalizar, peça para os alunos desdobrarem e verificarem através da ilustração da figura 5.9 o Teorema de Pitágoras.

Figura 5.9: Teorema de Pitágoras.



Fonte: <http://www.origami.gr.jp>.

Após toda essa construção, os alunos podem observar e constatar que: os triângulos EAH , HFG , GFC e EFB são congruentes aos $\triangle HEP$, $\triangle CPR$ e $\triangle PCS$; determinando as medidas de $\overline{DG} = b$, $\overline{GC} = c$ e $\overline{GF} = a$, tem-se pelo primeiro quadrado da figura 5.9 que a área do quadrado $ABCD$ pode assumir o valor de $4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right) + a^2$ ou $(b + c)^2$, logo conclui-se que $a^2 = b^2 + c^2$, isto é, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo tem área equivalente à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos desse triângulo.

Com essas dobraduras podem ser trabalhados vários conteúdos e questões como: ângulos complementares, congruência de triângulos, equivalência de áreas.

Considerações Finais

O origami constitui uma técnica milenar que evoluiu ao longo dos séculos passando de por várias conotações, desde o valor simbólico usado em rituais religiosos até a uma arte extremamente sofisticada que ganhou o mundo como forma de entretenimento e arte.

Mais recentemente, foi redescoberto seu valor como ferramenta educacional bem como surgiram estudos mais teóricos que conseguiram vislumbrar aplicações antes inimagináveis às dobraduras, do design arquitetônico até a engenharia complexa de painéis solares e telescópios.

A prática do origami desenvolve não apenas a habilidade manual, mas também a imaginação, análise, especulação, enfim agilidade mental, que desenvolve as faculdades intelectuais para lidar com outros problemas da lógica e da matemática. Desta forma, olhar para as potencialidades do Origami como ferramenta didática para se abordar problemas de Matemática, especificamente os de Geometria, vem ao encontro de uma necessidade urgente de explorar novas metodologias e novas formas de pensar o ensino da Matemática. Ainda mais no atual contexto do ensino no Brasil que acumula indicadores extremamente baixos no que tange à Matemática em avaliações importantes como o PISA e o SAEB.

Assim, este trabalho espera contribuir, ainda que de forma humilde, oferecendo uma possibilidade de abordagem de problemas geométricos à luz das dobraduras do origami de forma a dinamizar o processo do trabalho didático dos professores e despertar cada vez mais nos estudantes o interesse pela resolução de problemas matemáticos e o estudo em geral da Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] CAVACAMI, E.; FURUYA, Y. K. S. *Explorando Geometria com Origami*. São Paulo: Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, 2009.

Disponível em: <www.dm.ufscar.br/yolanda/origami/origami.pdf> . Acesso em 14 de janeiro de 2019.

- [2] CROMVIK, C.; ERICKSSON K. *Airbag Folding Based on Origami Mathematics*. In: LANG, Robert J. *Origami4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Technology*. Natick, EUA: A. K. Peters, 2009.

- [3] HARDESTY, L. *New algorithm generates practical paper-folding patterns to produce any 3-D structure*. Mit News: Massachusetts, Jun, 2017.

Disponível em: <<http://news.mit.edu/2017/algorithm-origami-patterns-any-3-D-structure-0622>>. Acesso em 14 de janeiro de 2019.

- [4] HAYASAKA, E. Y, NISHIDA, S. M. *Origami e suas Variações*. São Paulo: Museu Escola, Universidade Estadual Paulista-UNESP, 2009.

Disponível em: <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/index.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2019.

- [5] HAYASAKA, E. Y, NISHIDA, S. M. *Origami na Educação*. São Paulo: Museu Escola, Universidade Estadual Paulista-UNESP, 2009.

Disponível em: <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/index.htm>. Acesso em 14 de janeiro de 2019

- [6] HATORI, K. *History of origami in the east and the west before interfusion*. In: *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. v. 5, p. 3-11. Massachusetts: A K Peters, 2011.

- [7] HONORATO, P. *SAEB 2017: o que diz a última avaliação de aprendizagem do País*. Todos pela Educação, 30 de agosto, 2018.

Disponível em: <<https://www.todospelaeducacao.org.br/conteudo/saeb-2017-o-que-diz-a-ultima-avaliacao-sobre-a-educacao-do-pais>>. Acesso em 10 de janeiro de 2018.

- [8] LANG, Robert J. *Huzita-Justin Axioms*. Langorigami, 2004.
Disponível em: <www.langorigami.com>. Acesso em 14 de janeiro de 2019.
- [9] LANG, Robert J. *TreeMaker User Manual*. Langorigami, 2004.
Disponível em: <www.langorigami.com>. Acesso em 14 de janeiro de 2019.
- [10] LIMA, M. M. de. *Dobra e redobra: um estudo exploratório da dobradura de papel no auxílio à visualização e à concepção da forma arquitetônica*. Tese de doutorado. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2017.
Disponível em : <<https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/23946>>. Acesso em : 14 de janeiro de 2019.
- [11] MIURA, K. *The science of Miura-ori: a review*. In: LANG, Robert J. *Origami4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*. Natick, EUA: A. K. Peters, 2009.
- [12] ÓRTIGÃO, M. I. R; SANTOS, M. J. C dos; Lima, R. L. *Letramento em Matemática no Pisa: o que sabem e podem fazer os estudantes?* v. 26, n. 2, p. 375-389. Zetetiké, Campinas, SP: maio/agosto de 2018.
- [13] PASSARONI, L. C. de S. *Construções Geométricas por Dobraduras (Origami): aplicações ao ensino básico*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT)-Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2015.
Disponível em : <<http://www.profmatt-sbm.org.br/dissertacoes>>. Acesso em 10 de janeiro de 2019.
- [14] YAMADA, T. R. U, TEIXEIRA, S.A. *Origami Científico e Projetual: inovações com dobraduras*. In: XII International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design. São Paulo: Universidade Paulista, 2017.
- [15] YOU, Z.; KURIBAYASHI K. *Expandable Tubes with Negative Poisson's Ratio and Their Application in Medicine*. In: LANG, Robert J. *Origami4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Technology*. Natick, EUA: A. K. Peters, 2009.