Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA ESTRATÉGIA METODOLÓGICA PARA O ENSINO DO MMC E DO MDC

Vitório Batista Lima da Silva

Salvador - Bahia
Agosto de 2019

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum: Proposta de Sequência Didática Baseada na Resolução de Problemas

Vitório Batista Lima da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes.

Salvador - Bahia

Agosto de 2019

Máximo Divisor Comum e Mínimo Múltiplo Comum: Proposta de Sequência Didática Baseada na Resolução de Problemas

Vitório Batista Lima da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes (orientador)
UFBA

Prof. Dr. Enaldo Silva Vergasta
UFBA

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro
UFBA

Agradecimentos

Agradeço aos meus amigos e familiares.

A todos os colegas deste mestrado que, ainda diante de diversas dificuldades, se uniram para conquistar tão belo sonho.

Aos professores que fizeram parte desta vitória pois de forma competente me ajudaram nessa constante busca do conhecimento pessoal e profissional.

Aos meus queridos alunos, que através de suas dificuldades, bem como anseios, me propiciaram a buscar didáticas mais realistas e eficientes para o nosso aprender constante.

Finalmente, ao meu orientador, professor Marco Antônio, que de forma atenciosa sempre se mostrou disponível a ajudar e colaborar para a consolidação desta dissertação.

"Brincar com a criança não é perder tempo, é ganhá-lo; se é triste ver meninos sem escola, mais triste ainda é vê-los sentados enfileirados, com exercícios estéreis, sem valor para a formação do homem."

Carlos Drummond de Andrade (1902-1987), poeta brasileiro

Resumo

O presente trabalho consiste em apresentar uma proposta que auxilie a prática docente, através do uso da Resolução de Problemas em uma perspectiva metodológica, no que concerne ao ensino do MMC e do MDC no sexto ano da educação básica. A escolha desta estratégia metodológica se dá em virtude da importância de se ensinar MMC e MDC através de caminhos que não utilizem apenas meros dispositivos práticos, ou seja mecânicos, mas atividades que propiciem a utilização de estratégias divertidas e eficientes, sejam elas ensinadas ou criadas pelos alunos.

Abstract

The present work consists of presenting a proposal to assist teaching practice, through the use of Problem Solving in a methodological perspective, with regard to the teaching of LCM (least common multiple) and GCD (greatest common divisor) in the sixth year of basic education. The choice of this methodological strategy is due to the importance of teaching lcm (least common multiple) and GCD (greatest common divisor) through paths that not only use mere practical devices, or mechanical, but activities that encourage the use of fun and efficient strategies, whether they are taught or created by students.

Sumário

Introdução

Os números primos sempre intrigaram os matemáticos. Destes, talvez Gauss e Riemann tenham sido os que mais os enfrentaram. Seus estudos ainda são excelentes ferramentas para aqueles que se debruçam sobre os notáveis problemas matemáticos não demonstrados, ou seja, sem solução. Um exemplo é a famosa Hipótese de Riemann que relaciona a função zeta aos números primos. É bem verdade que sua aplicação vai além da teoria dos números, pois passa pela análise matemática e pela física teórica, por exemplo.

Na Educação básica, precisamente no sexto ano, o aluno deveria ter um encontro mais bonito com os números primos e suas aplicações, contudo o que há na realidade é um encontro nada criativo e nada desafiador ao educando. O que se apresenta ao mesmo é um ensino inadequado e pouco funcional dos conteúdos matemáticos.

Um exemplo disso, que é um problema sério para os professores da educação básica, é o cálculo do maior divisor comum (MDC) e do menor múltiplo comum (MMC). Tal problema ocorre em virtude da deficiência do educando em operações básicas, como a multiplicação e a divisão, bem como pelo conteúdo, sobre o referido tema, ser apresentado de forma insatisfatória nos livros didáticos. Acrescente-se a apresentação de problemas poucos criativos e sem aplicação às situações da vida cotidiana do aluno.

Daí, a proposta em formular uma sequência didática que possibilite, inicialmente, minimizar a deficiência do educando em realizar as operações básicas, principalmente a multiplicação e a divisão, permitindo assegurar a aquisição e consolidação de conteúdos como números primos, divisibilidade, MMC e MDC.

Atualmente, se faz necessária a busca por novas estratégias de ensino da matemática, e a temática da Resolução de Problemas visa criar no discente a alegria de ser capaz de resolver problemas desafiadores, bem como permitir a exploração de novos conceitos e ideias matemáticas pertinentes ao MDC e ao MMC. Além disso, há também a possibilidade do educando se tornar criador de novas estratégias de resolução de um problema, e assim, se libertar da mera condição de espectador do ensino.

A abordagem do ensino do MDC e do MMC através da Resolução de Problemas pode ser um fator impactante no desempenho dos alunos, como também um grande incentivo à participação do mesmo nas diversas olimpíadas científicas, e em especial a

Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

O presente trabalho foi construído inicialmente através de um abordagem histórica, presente no primeiro capítulo, desde o processo de contagem, passando pela matemática da Mesopotâmia e do Antigo Egito, com as descobertas de certos instrumentos que comprovam a prática matemática de tais povos,como pedras e papiros. Ademais, não seria desculpável a ausência de citações a respeito da produção matemática da Grécia Antiga.

Após, no segundo capítulo, é apresentada a construção dos números naturais, axiomaticamente. Estão presentes neste capítulo axiomas e princípios importantes para o entendimento da citada construção, bem como as propriedades das principais operações com números naturais.

No terceiro capítulo são abordados os números inteiros, com ênfase na operação de divisibilidade, para que seja verificada a relação entre o algoritmo da divisão e o máximo divisor comum, como também com o mínimo múltiplo comum. Inicia-se neste capítulo uma breve exposição sobre os números primos.

Diante da abordagem anterior, a respeito dos números primos, no quarto capítulo se explana, de fato, os números primos, com breves citações históricas, bem como alguns relevantes teoremas.

A resolução de problemas, é explicada no quinto capítulo, contudo, também se aborda o ensino de matemática e seus desafios, além do interesse pela resolução de problemas no ensino de matemática.

No sexto capítulo é feita uma explanação da resolução de problemas, mas numa perspectiva metodológica. Pretende-se explicar a relação entre aprendizagem matemática e comunicação.

Por fim, no sétimo capítulo, é apresentada uma proposta de sequência didática para o ensino do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum através da resolução de problemas. A pretensão é aplicar tal sequência em uma classe de sexto ano do ensino fundamental e verificar seu resultado, visando à produção futura de um artigo.

Capítulo 1

Um pouco de história

Neste capítulo, aborda-se historicamente o processo de contagem, bem como se discorre sobre a matemática das civilizações da Mesopotâmia, do antigo Egito e da Grécia antiga.

1.1 Contagem

Quando se cita algo a respeito da história da matemática, geralmente se é conduzido a pensar sobre o processo de contagem. Afinal, este é o questionamento inicial que intuitivamente se é levado a fazer: Por quê os humanos tiveram a necessidade de contar e como se desenvolveu tal habilidade?

É bem verdade que o processo de contagem é anterior à história da matemática, pois se iniciou muito antes da escrita e do que conhecemos hoje por civilização.A evolução humana trouxe para o homem desafios econômicos e sociais, com isso a necessidade de pensar numericamente foi incorporada ao pensamento humano.

Assim, não se pode inferir que o processo de contagem foi algo que nasceu com o homem. Tal processo foi se desenvolvendo com a ampliação de novas habilidades, como a comparação. Tem-se como exemplo clássico o do pastor de ovelhas que comparava a quantidade do seu rebanho com os dedos de sua mão ou de seus pés, ou seja, uma contagem natural. Sabe-se ainda que objetos da natureza também foram usados em processos de contagens naturais como pedregulhos, madeiras e conchas. Todavia, não é tarefa fácil destacar as etapas do desenvolvimento de tal processo em virtude do mesmo ser anterior à própria escrita, surgindo assim muitas dúvidas quanto a esta versão.

Um registro interessante sobre contagens, mas com interpretações diversas entre os especialistas , é o osso de Ishango (Figura 1.1), na África, com data estipulada entre vinte mil e dez mil anos a.C.([20]).

Figura 1.1: Faces frontal e posterior do Osso de Ishango

A grande maioria dos historiadores e cientistas consideram o Osso de Ishango o objeto mais antigo da Matemática. É possível encontrar no mesmo uma aritmética concreta, daí o interesse em estudá-lo com cautela. Datado em época do Paleolítico Superior, o osso foi localizado em um vilarejo no Congo, na divisa com Uganda. No presente, o osso está no Instituto Real Belga de Ciências Naturais, em Bruxelas, capital da Bélgica. Os especialista se dividem quanto à aritmética nele presente, visto que, conforme Roque ([20]), alguns dizem que os cálculos são referentes a um jogo, enquanto outros acreditam ser referente ao calendário da lua. Para estes, que defendem ser a representação de um calendário lunar, citam o fato de que a soma de cada uma das duas últimas colunas 11, 21, 19, 9 e 11, 13, 17, 19 é igual a 60, o que equivale a dois meses lunares, já a primeira coluna dá um total de 48 traços, equivalente a um mês e meio lunar.

1.2 A Mesopotâmia e o antigo Egito

A história consagra, como o berço da civilização, a região localizada entre os importantes rios Tigres e Eufrates. Atualmente, tal região corresponde ao Iraque, e tem por adjacências a Síria, Turquia e o Irã. Nesta área existiam muitos reinos, todavia os historiadores consideram o que foi estabelecido na cidade da Babilônia, o reino de Hamurabi, como o de maior expressividade, principalmente no período áureo, ou seja, de 1800 a.c a 1500 a.c. Daí o motivo de ocorrerem algumas confusões,por exemplo, considerar a Babilônia como a própria Mesopotâmia.

Na Mesopotâmia, a vida urbana de fato surge emblemática, e com ela a metalurgia, bem como a engenharia. Nessa região, pela primeira vez, aparece a economia de larga escala. Contudo, o maior legado dos mesopotâmicos é a escrita cuneiforme, chamada assim por ser composta de símbolos em forma de cunha.

O povo mesopotâmico usava bastante a placa de argila, e em tais placas foram encontradas muito conteúdo matemático. Supõe-se assim, que o interesse pela argila se deu pela sua duração frente à ação do tempo, já que eram bem mais resistentes que os papiros egípcios.

Os mesopotâmicos desenvolveram um amplo conhecimento matemático de cálculos e medidas, especificamente voltadas para a área comercial e também econômica: taxas de juros simples e compostos, divisão de colheitas, impostos e outras mais.

As tabuletas matemáticas encontradas pelos arqueólogos trouxeram muitos problemas matemáticos de caráter algorítmico e algébrico, diferente dos gregos que tinham um caráter mais geométrico.

Eles também possuíam um sistema de numeração sexagesimal e decimal, ou seja, respectivamente base 60 e base 10. Há muitas teorias sobre a escolha da base 60, como a de que este número tem muitos divisores, e isso tornaria mais fácil os cálculos envolvendo a divisão e a multiplicação.

Nos exemplos abaixo, o símbolo ⊤ representa a unidade na base 60, enquanto o símbolo < representa o número 10:

<< ⊤⊤⊤ $23 = 20 + 3$

⊤ << ⊤⊤⊤ $83 = 60 + 23$

<< ⊤⊤ << ⊤⊤⊤ $1343 = 2 \times 10 \times 60 + 2 \times 60 + 23$

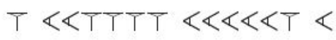
⊤ ⊤⊤ << ⊤⊤⊤ $3743 = 60 \times 60 + 2 \times 60 + 23$

Figura 1.2: Numeração babilônica

Quanto à geometria, os babilônicos tinham conhecimento sobre a área do retângulo, do triângulo retângulo, bem como do trapézio. Os mesmos, segundo Barbosa ([3]), conheciam a circunferência do círculo, estimada em três vezes o seu diâmetro, como também, sua área, que era 1/12 do quadrado de sua circunferência. Tais cálculos levavam a estimar que o número π era igual a 3, mas foram encontradas tabuletas com π igual a 3,125.

Fabulosamente, os babilônicos conseguiram calcular a diagonal de um quadrado. Para tal, estimaram a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado, chegando a um valor para $\sqrt{2}$, conforme Figuras 1.3 e 1.4.

Figura 1.3: Tabuleta $\sqrt{2}$;Babylonian Collection, Yale University



$$1;24.51.10 = 1 + 24 \times 60^{-1} + 51 \times 60^{-2} + 10 \times 60^{-3} = 1,4142129.$$

Figura 1.4: Número abaixo da diagonal

Os egípcios são bastante conhecidos pelas passagens bíblicas, principalmente quando é relatada na Bíblia a passagem da guerra entre o povo hebreu, representado por Moisés, e o faraó. Na verdade, o Egito também tem contribuído muito para o desenvolvimento da matemática. Infelizmente, há pouco registro da atuação matemática egípcia, quando se faz a comparação com outros povos, como os da Mesopotâmia por exemplo.

Acredita-se que a necessidade do uso da matemática pelos egípcios se deu em virtude de problemas que surgiram nas áreas administrativas, como registrar escravos, matéria a ser utilizado na agricultura, e também a formação de novos profissionais, escriturários, na época denominados de escribas.

O ano de 1799, foi muito importante para o mundo da história da matemática ([20]), pois foi nessa época , chamada de campanha de Napoleão, que foi encontrada, através dos processo de escavação iniciados pelos engenheiros franceses , próximo do delta do Nilo, a Pedra de Roseta (Figura 1.5)

Figura 1.5: Pedra de Roseta (Atualmente se encontra no Museu Britânico)

Esse fragmento basáltico possui certas inscrições, algumas delas em hieroglíficos e outras em grego. A inscrição em língua grega possibilitou a decifração da linguagem egípcia. Obviamente, a partir do momento que se consegue estabelecer um processo de decifração de uma linguagem, fica mais fácil compreendê-la, bem como traçar metas para a busca de vestígios históricos-matemáticos.

É notável a habilidade do Antigo Egito quanto à engenharia, basta se vislumbrar com as pirâmides para se ter uma ideia do domínio dos mesmos sobre a arte daquela ciência.

Quanto ao sistema de numeração, os egípcios se valiam de um sistema feito por agrupamento e com base 10. Este sistema data de 3500 a.C., e seu nascimento está ligado à prática. Um bom exemplo de tal prática era a necessidade de se registrar animais e outros bens. os babilônios usavam um sistema parecido, porém, além da base 10, era possível se observar uma base sexagesimal. Não é a toa que são considerados os sistemas mais antigos conhecido pelo homem.

Os papiros tinham a mesma importância que o papel para nós, afinal foi essencial para a produção de registros históricos da civilização egípcia. Ademais, também foram de grande valia para o contexto matemático da época, já que neles foram registrados diversos problemas interessantes. Os dois papiros mais importantes para a história da matemática são o papiro de Rhind (ou Ahmes) (Figura 1.7) e o papiro Golonishev ou de Moscou, datado de 1850 a.C. (Figura 1.6).

Os papiros acima são verdadeiros tesouros matemáticos, pois trazem vários problemas matemáticos interessantes, como o problema 14 do Papiro de Moscou (Figura 1.6), que traz uma maneira de se calcular o volume V do tronco da pirâmide de base quadrada com medidas fornecidas, e que está em pleno acordo com a fórmula que conhecemos atualmente: $V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$. Já o de Rhind possui 85 problemas escritos em língua hierática. Conhece-se também pelo nome de Ahmes, escriba que o escreveu. Trata-se de um trabalho bem mais antigo, visto que data de 1650 a.C., e os problemas intrigantes são os que, para serem resolvidos, se valem da ideia de frações unitárias.

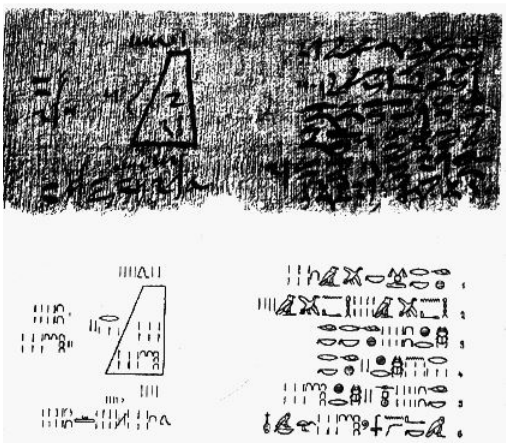


Figura 1.6: Problema 14 do Papiro de Golonishev ou de Moscou

Figura 1.7: Parte do Papiro Rhind que atualmente está depositada no Museu Britânico, Londres.

1.3 A Grécia

A contribuição matemática da civilização grega foi bastante expressiva. Todavia, não podemos esquecer a contribuição egípcia e a mesopotâmica, mas o período helênico foi um divisor importante, pois a partir deste momento a matemática começa a ter uma conformação de ciência organizada e primordialmente abstrata, pouco se valendo das aplicações práticas.

Os gregos reestruturaram a matemática e inseriram elementos que são importantes até a presente data. A herança matemática deixada pela civilização grega é bastante conhecida por nós. Nomes como Pitágoras e Tales de Mileto, matemáticos gregos vanguardistas, estão presentes em diversas composições matemáticas e em níveis distintos, ainda que nada escrito por eles seja conhecido. O que se sabe sobre os mesmos foi passado por gerações e provavelmente são pouco confiáveis em virtude das traduções feitas pelos árabes.

Em Atenas, no primeiro milênio a.C., encontrava-se um sistema de numeração interessante denominado de ático ou acrofônico. Tal nome se dá em face do símbolo que, para cada número, provinha da primeira letra de seu nome. Era um sistema aditivo na base 10 e tinha os seguinte símbolos básicos:

$\mathrm{I} = 1$	iota	$\mathrm{H} = 100$	hekaton
$\Gamma = 5$	penta	$\mathrm{X} = 1000$	khiloi
$\Delta = 10$	deka	$\mathrm{M} = 10000$	murioi

Figura 1.8: Sistema Acrofônico-símbolos básicos

O sistema de numeração ático foi paulatinamente substituído pelo sistema iônico ou alfabético. Neste sistema os números eram representados por letras do alfabeto grego, bem como era de uso geral em Alexandria, por volta do século III a.C., época de ouro em que os Elementos de Euclides, obra-prima da matemática grega, foram escritos, cujo conteúdo de teoria dos números será abordado, mais a frente, neste trabalho.

Há muitos matemáticos gregos que merecem destaque, contudo Tales de Mileto é considerado de maior expressividade, pois além da matemática, atuou em outras áreas científicas com maestria. Mesmo após sua morte, foi citado pelo grande Aristóteles como o primeiro filósofo de tradição grega.

A cidade de Mileto, na época do grande matemático, tinha uma importância comercial considerável, pois estava ligada por diversas rotas mercantis, a outros lugares do Oriente. Tales, , era comerciante, por isso realizou diversas viagens de comércio. Acredita-se que ao visitar o Egito e a Mesopotâmia, teve contato com a matemática desses locais. Ademais, é possível que este contato lhe propiciou uma base de sólida de conhecimentos para atuar como matemático. Deve-se atentar para o fato de que Tales não foi somente matemático, pois também teve atuações na política, bem como astronomia, quando mais velho.

Tales de Mileto era procedente da Escola Ioniana, mas esta vinha perdendo gradativamente sua importância, vindo a ser superada pela Escola Pitagórica, tendo a frente como fundador, Pitágoras (570-495 a.C.). Tal matemático ainda é lendário e alvo de muitas discussões na academia sobre seus trabalhos, já que os registros históricos são de seus seguidores, frequentadores da Escola Pitagórica.

A ideia que permeava os seguidores de Pitágoras era a aritmética, e a centralidade era a de que o Universos se resumiria à aritmética, pois o lema da escola pitagórica era a de que todas as coisas são números. Assim, os números ocupavam um lugar de destaque para Pitágoras, sendo estes a própria essência do Universo. Os números tinham um tratamento místico e eram de fato objetos de devoção.

Os pitagóricos construíram famílias importantes de números, que tinham um caráter especial e com enfoque geométrico. Por exemplo, os números triangulares, quadrados, pentagonais dentre outros. A **Tétraktys** — era o principal símbolo da escola pitagórica — na verdade, correspondia ao número triangular 10, representado na Figura 1.9.

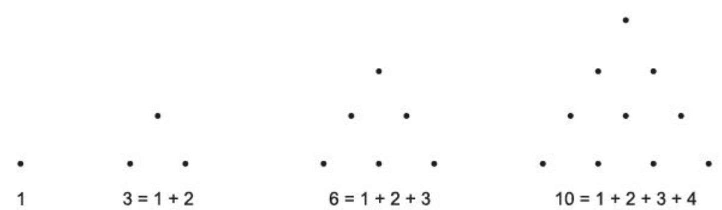


Figura 1.9: Números triangulares.

É sabido que a escola pitagórica dava aos números inteiros uma misticidade tão grande, que estes, para os pitagóricos, eram capaz de descrever o mundo. Porém, essa ideia foi abalada a partir do momento em que as grandezas incomensuráveis foram descobertas, e por ironia do destino, pela própria escola pitagórica. Assim, a matemática é colocada em prova com a sua primeira crise, pois derrubava toda a misticidade construída sobre os inteiros.

O resultado mais notável e importante atribuído a Pitágoras é o teorema que leva seu nome, que afirma o seguinte: sejam as medidas a e b dos catetos e a medida c da hipotenusa de um triângulo retângulo, satisfazem a condição : $a^2 + b^2 = c^2$. Contudo, este resultado já era conhecido pela civilização egípcia e mesopotâmica, e não há relatos históricos capazes de inferir que algum discípulo de Pitágoras, ou o próprio, tenha realizado algum trabalho naqueles locais.

O Templo ocupado por Pitágoras e seus discípulos foi destruído após uma revolta, Tal acontecimento foi o responsável por desorganizar todo o grupo, levando a se espalharem por vários locais do mundo helênico.

Após o fim da Escola pitagórica, surgiu a Escola de Eleia. Esta escola tinha uma ideia totalmente oposta a que foi preconizada pela pitagórica, a de que o mundo era regido por números, dando a eles um caráter místico. Parmênides foi um discípulo da escola de Eleia, um dos mais notáveis eleatas.

Os eleatas foram os responsáveis pela junção das grandezas comensuráveis ao universo matemático, aparecendo assim, a primeira noção de infinito na matemática grega. Este fato foi muito importante para o surgimento, séculos depois, do cálculo diferencial e integral.

Zenon de Eleia foi um célebre seguidor de Parmênides e apresentou pela primeira vez a ideia de demonstrar por redução ao absurdo. A importância de Zenon está na criação de alguns paradoxos, que geraram um certo desconforto entre os filósofos gregos, visto que as noções de infinito e contínuo se opunham diametralmente a ideia de finito e discreto.

Um exemplo de Paradoxo de Zenon é o da **dicotomia**: Antes de percorrer toda a extensão de uma reta, um objeto em movimento deve percorrer a metade desta reta. Na próxima etapa, o objeto deve percorrer a metade da metade da reta. Ao se analisar as etapas sucessivas de modo símile, chega-se à conclusão de que o movimento jamais poderia ser concluído. O movimento é, assim, ilusório. Ao se fazer uso de instrumentos da matemática moderna, percebe-se que tal paradoxo é resilido ao considerar a série, cuja soma é 1:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Não se pode esquecer que estruturação política do mundo helênico, que respirava um ambiente democrático em algumas polis, também foi fator propício para o nascimento de escola filosóficas importantes. A cidade de Atenas, berço da democracia, tinha uma escola de grande relevância, a dos sofistas, que era formada por filósofos que percorriam a cidade com o propósito de vender seus conhecimentos para cidadãos que pretendessem fomentar debates nas assembleias.

Ademais, Atenas também é conhecida por ter sido o recanto de um dos mais importantes filósofos do mundo grego, Platão (427-347 a.C.), que daria uma contribuição estrutural para a matemática. Este mestre colocava a matemática como disciplina indispensável ao conhecimento, bem como lhe dava uma importância especial. Sem sombra de dúvidas, sua escola detinha a qualidade de ser o centro de atividade matemática mais importante para a sua época.

A escola de Platão tinha um enfoque mais geométrico, em oposição a ideia aritmética da escola pitagórica. A partir desta escola é possível compreender a procura da filosofia grega pela verdade intocável e eterna, pois era assim que a matemática deveria se qualificar. Desta forma, o raciocínio dedutivo era condição necessária e suficiente para se chegar a demonstração verdadeira, devendo-se abster da experiência da sensibilidade.

Nessa época surgiram os problemas bem conhecidos pelos matemáticos: Duplicação do cubo, trisseção do ângulo e a quadratura do círculo. Tais problemas só foram atacados e demonstrados suas impossibilidades apenas no século XIX.

Um matemático denominado Eudoxo de Cnidus (408-355 a.C.), que foi aluno da Escola de Platão, é considerado o maior astrônomo da sua era, pois estabeleceu uma teoria de proporções que foi bem explorada no Livro V do grande Euclides. Modernamente, podemos estabelecer as seguintes relações definidas por Eudoxo para grandezas em razão: a/b=c/d, se e somente se, dados quaisquer dois inteiros m e n vale:

- Se $ma < mb$, então $mc < md$
- Se $ma = mb$, então $mc = md$
- Se $ma > mb$, então $mc > md$

O interessante da definição de Eudoxo era o tratamento das proporções através de grandezas incomensuráveis, ou seja, uma bela resposta à crise colocada à tona pela escola de Pitágoras.

Ademais, a contribuição de destaque de Eudoxo foi o método de exaustão usado para cálculo de áreas, volumes e comprimentos de figuras curvilíneas, que pode ser considera como a primeira contribuição para o cálculo diferencial e integral. O postulado de Eudoxo, hoje conhecido como propriedade de Arquimedes, mostrava o talento do método usado pelo notável matemático grego, e traduzia um resultado que era o pilar para o método em questão:

Postulado 1.3.1 (Postulado de Eudoxo). ***Se M é uma grandeza dada, e r é um número com*** $1/2 < r < 1$***, então, dado*** $\varepsilon > 0$***, existe um inteiro*** n_0 ***tal que*** $M(1-r)^n < \varepsilon$ ***para todo*** $n \geq n_0$***.***

A expressão supra já evidencia o início dos estudos dos limites, intuitivamente, já que tal estudo só se daria conclusivamente bem mais tarde.

O filósofo mais importante da escola de Platão, sem sombra de dúvidas, foi Aristóteles (384-322 a.C.), que tinha uma visão antagonista ante a do seu mestre, em relação à matemática, já que não entendia a geometria e os números como elementos independentes, sem qualquer vínculo com a realidade.

O entendimento de Aristóteles era a de que a matemática tinha o poder de abstrair alguns aspectos físicos e estudá-los mediante tais abstrações. Tal visão era importante, no quesito aplicabilidade, visto que permitia que a matemática fosse vista como uma maneira de poder descrever o mundo e suas características mais sensíveis.

Ademais , o filósofo acreditava que o mais importante para o conhecimento era a capacidade de se estabelecer um discurso, bem como poder explicá-lo mediante cetas regras. Estas seriam validadas a partir da lógica formal, uma criação aristotélica. É possível exemplificar a materialização de tais ideias com os *Elementos de Euclides*.

Aristóteles,como também Platão, não produziram teorias matemáticas, é verdade ([20]). Todavia, suas contribuições foram muito importantes para o desenvolvimento da filosofia, e de certa forma, possibilitaram a criação de um campo promissor para o amadurecimento do conhecimento matemático dos séculos vindouros.

Na Grécia clássica, o ápice da produção matemática se deu através dos Elementos de Euclides. Trata-se de um obra que influenciou o desenvolvimento não só da matemática, mas também da ciência. Ao fim do século XIX e começo do XX, foi um dos livros mais editados e lidos em toda a história.

Conhece-se pouco da vida de Euclides. Sabe-se que viveu na cidade de Alexandria, como também trabalhou, como estudioso, no Museu de Alexandria. Ainda que não tenha na história, descobertas matemáticas classificadas em seu nome, era notável sua qualidade em sistematização do conhecimento matemático. Porém, há muita originalidade no seu livro. Os Elementos são uma obra matemática composta de treze livros. Neles são abordados temas matemáticos como geometria, teoria das proporções de Eudoxo, teoria dos números e teoria sobre as grandezas incomensuráveis.

Portanto, a filosofia grega foi muito importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático, desde a formação de grandes matemáticos, à produção de obras de valor inestimável para a matemática, a da época, como a que se apresentava para nascer.

Capítulo 2

Os Números Naturais

Neste capítulo é apresentada a construção dos números naturais de maneira axiomática, bem como as propriedades das principais operações com números naturais.

2.1 Os Naturais

Os números naturais podem ser conceituados como um modelo matemático essencial para a operação de contar objetos. Trata-se de uma bela criação humana, fruto de uma necessidade, a de contar. Segundo Elon Lages Lima ([16]), a contagem é um processo que pressupõe o conhecimento de sequência numérica. Ademais, é sabido que os elementos pertencentes ao conjunto dos números naturais podem ser descritos de maneira ordenada como se segue:

$$\aleph = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Contudo, supondo que esse conceito de números naturais não seja por nós conhecido, faz-se necessário investigar o que há de essencial nesta sequencia numérica $1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots$. Todavia, consideraremos zero como número natural, visando enfatizar as operações matemáticas que serão demonstradas no decorrer deste trabalho.

Giussepe Peano (1858-1932) verificou que era possível elaborar uma teoria dos números naturais tendo como início quatro fatores básicos, atualmente denominados de Axiomas de Peano. Assim, este conjunto $\aleph$, denominado conjunto dos números naturais, tem suas características determinadas pelas seguintes propriedades:

I. Existe uma função S: $\aleph \longrightarrow \aleph$, que associa a cada n $\in \aleph$ um elemento S(n) $\in \aleph$, chamado o sucessor de n;

II. A função S: $\aleph \longrightarrow \aleph$ é injetiva;

III. Existe um único elemento 1 no conjunto N, tal que $1 \neq$ S(n), para todo n $\in \aleph$;

IV. Se um subconjunto X $\subset \aleph$ é tal que $1 \in \aleph$ e S(X) $\subset$ X, então X $\in \aleph$

É a partir desse momento que se pode usar a palavra sucessor, ou seja, o sucessor de zero é o um, o de um é o dois, o de dois é o três, e assim por diante. Isso propiciou a criação de um sistema de numeração que permite fazer a representação do mesmo através de símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, enfim de todos os números naturais. Ademais, não se pode relevar a importância da linguagem , pois esta permite fornecer nomes aos primeiros elementos da sequência, com exceção a números muitos grandes, como também para números menores como "três mil e setecentos e noventa e oito".

O último axioma de Peano, denominado axioma da indução, talvez seja um dos mais importantes, pois a partir dele se pode dizer que todo número natural pode ser obtido a partir de 1 via sucessivas aplicações da operação sucessor. Por outro lado, é possível reformular o axioma da indução da seguinte forma:

Axioma 2.1.1 (Axioma da Indução). ***Um subconjunto*** $X \subset \aleph$ ***chama-se indutivo quando*** $S(X) \subset X$***, ou seja, quando*** $n \in X \Longrightarrow S(n) \in X$***, ou ainda, quando o sucessor de qualquer elemento de X também pertence a X***

Pode-se dizer que os números ímpares $1, 3, 5, \ldots$, representam um conjunto indutivo, pois contém o elemento 1 mas não é igual a $\aleph$.

Através do axioma da indução, pode-se estabelecer um método de demonstração chamado de **Princípio da Indução Finita**:

Princípio 2.1.1. *Se P(n) é uma propriedade que diz respeito aos números naturais n tais que:*

I. P(0) é verdadeira;

II. Se P(n) é verdadeira, então P(n+1) é verdadeira.

Então P(n) é verdadeira para todos números naturais.

Exemplo 2.1.1. *Provar que* $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Tem-se que P(1) é verdadeira, pois a igualdade é válida para n = 1. Suponha agora que, para algum n natural, P(n) seja verdadeira; ou seja, que:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

O que se deseja provar é que P(n+1) é verdadeira. Ao somar 2n+ 1, pois é o próximo número ímpar depois de 2n-1, a ambos os lados da igualdade supra, tem-se uma nova igualdade, que também é verdadeira:

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Desta forma, P(n+ 1) é verdadeira, toda vez que P(n) é verdadeira. Assim, pelo princípio 2.1.1, a fórmula é válida para todo número natural n.

A primeira vez que a demonstração acima, de acordo com Hefez ([9]), foi feita data de 1575 e foi construída por Francesco Maurolycos.

2.2 Adição e Multiplicação

As operações de adição e multiplicação nos naturais são procedidas através de funções que são definidas por recorrência. Com o intuito de definir a adição, pode-se fixar um número arbitrário m e assim, definir a soma de $m + n$ para todo $n \in \aleph$.

Tendo m fixado , a correspondência $n \longrightarrow m+n$ é uma função $f : \aleph \longrightarrow \aleph, f(n) = m + n$, denominada "soma m". Isso corresponderá a seguinte recorrência, de acordo com os dados abaixo:

$(S_1) : m + 1 = S(m)$

$(S_2) : m + S(n) = S(m + n)$.

Logo, m + 1 é, conforme definição, o sucessor de m. E, se conhecermos m + n, pode-se chegar ao valor de m + S(n): Assim, tem-se m + S(n) = S(m + n). Isto nos permite conhecer m + n para todo $n \in \aleph$ (e todo m $\in \aleph$).

A multiplicação de números naturais pode ser definida de forma parecida com a adição: ao se fixar de forma arbitrária um natural m, a multiplicação por m vincula a todo número natural n o produto $n \cdot m$, que será definido através de indução da seguinte forma:

$(P_1) : 1 \cdot m = m$

$(P_2) : (n + 1) \cdot m = n \cdot m + m$

Analisando a definição acima, percebe-se que k é igual a k vezes 1 e n + 1 vezes k é igual a n vezes k mais (uma vez) k . Então, por definição, $2 \cdot k = k+k, 3 \cdot k = k+k+k, \cdots$.

Tanto a adição como a multiplicação satisfazem as seguintes propriedades,para quaisquer números naturais m, n e p:

- Associatividade: $m + (n + p) = (m + n) + p$ e $m \cdot (n \cdot p)$

- Comutatividade: $m + n = n + m$ e $m \cdot n = n \cdot m$
- Lei do Corte: $m + n = m + p \Longrightarrow n = p$ e $m \cdot n = m \cdot p \Longrightarrow n = p$
- Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$

As demonstrações das propriedades acima se faz via método da indução, contudo serão omitidas no presente trabalho. Todavia, tais demonstrações podem se encontradas na literatura e não é o objeto central deste trabalho.

2.3 Ordem

Definida a adição, é possível definir uma relação de ordem no conjuntos dos números naturais. Sejam m e n números naturais quaisquer, se diz que m é menor que n , e se escreve $m < n$, para dar o significado de que existe um natural $k \in \aleph$ tal que $n = m + k$.. Ademais, pode-se afirmar também que se n é maior do que m, e se escreve $n > m$, que pode ser definido de forma parecida a usada para definir $m < n$. Tem-se ainda a notação $m \leq n$ que $m < n$ ou $m = n$. Assim, tem-se que $m < m + k$ para quaisquer $m, k \in \aleph$.

Vamos provar algumas propriedades básicas da relação de ordem:

Teorema 2.3.1 (**Transitividade**). *Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.*

Demonstração *Se $m < n, n < p$, então $n = m + k, p = n + r$, logo $p = (m + k) + r = m + (k + r)$, portanto $m < p$.*

Teorema 2.3.2 (**Comparabilidade**). *Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m quando se tem m=n ou m<n ou m>n ([19]).*

Demonstração *Prova por indução. O número 1 é comparável com qualquer outro natural, já que se sabe que $1 < m$ para todo $m \neq 1$. Suponha agora que o número n seja comparável com todos os números naturais. A partir daí, basta mostrar que (n + 1) também tem essa propriedade. Do mesmo modo, seja $m \in \aleph$ tomado de forma arbitrária. Sabe-se que se tem $m < n$, $m = n$ ou $n < m$. Vamos analisar cada uma das possibilidades:*

Se $m < n$, então $m < n + 1$ por transitividade, pois sabemos que $n < n + 1$.

Se $m = n$, então $m < n + 1$.

Se $n < m$, então $m = n + p$. Assim, há duas possibilidades: ou $p = 1$, ou seja, $m = n + 1$, ou $p > 1$, logo $p = 1 + p'$, e daí $m = (n + 1) + p'$ e finalmente se conclui que $n + 1 < m$.

2.4 Subtração e Divisão

Após o conhecimento sobre adição, multiplicação e ordem no conjunto dos números dos naturais, é possível definir as operações de subtração e divisão no conjunto dos naturais. Assim, vamos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.1. *Sejam a e b números naturais. Então, (1) existe no máximo um número natural c, tal que $a = b + c$, e (2) se $b \neq 0$, existe no máximo um número natural c, tal que $a = b \cdot c$*

Definição 2.4.1 (Subtração). *Se a e b são números naturais, pode-se definir $a - b$ (leia-se a "menos"b) como o único natural c, se ele existir, tal que $a = b + c$.*

O cerne da questão envolvendo a subtração está na própria definição, ao citar "se ele existir", ou seja, para definir a subtração, é necessário que c seja um número natural, por isso se diz que a operação de subtração nos naturais não é fechada, pois seu resultado pode gerar um número $c \notin \aleph$. Assim, parece que para resolver tal celeuma, já tendo sido definida a relação de ordem, basta considerar que $a \leq b$, mas ainda assim pode-se ter o caso $a - a = 0$, e agora o problema está em saber se $0 \in \aleph$.

Fato similar acontece com a divisão, que pode ser definida assim:

Definição 2.4.2 (Divisão). *Se a e b são números naturais, tal que $b \neq 0$ pode-se definir $a \div b$ (leia-se a "dividido por"b) como o único natural c, se ele existir, tal que $a = b \cdot c$.*

Desta forma não se define a divisão no conjunto dos números naturais quando $b = 0$. Segundo o saudoso Elon Lages Lima ([16]), o fato de o zero ser ou não natural, é uma questão que se situa no campo da preferência, já que, por exemplo, ao comparar tal interesse para um tratado de álgebra com um de análise, com certeza a importância do zero ser natural ou não, é diferente para ambos.

Em se tratando de análise, o campo de estudo das sequências tem uma importância maior do que para o algebrista, que estuda principalmente o campo das operações, e com certeza terá o seu trabalho facilitado, pois gera as exceções existentes nas operações de subtração e divisão com números naturais.

Pode-se ainda, definir um novo conjunto que amplia o conjunto dos números naturais com a inclusão do zero, cujo símbolo será 0. Desta forma, subtrações do tipo $a - a$, passarão a ter um resultado, que será 0. Neste caso, o zero passa a ser o único elemento neutro da adição.

A denominação deste conjunto numérico natural ampliado será o conjunto dos inteiros não negativos. Todavia, como não foram definidos os números negativos, usaremos a seguinte notação:

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

2.5 Múltiplos

Sabe-se que os números podem estar relacionados entre si, bem como formarem sequências numéricas com certas particularidades, que geralmente são denominadas de padrões ou regularidades.

Pode-se definir múltiplos da seguinte maneira:

Definição 2.5.1 (Múltiplos de um número natural). *O conjunto de todos os múltiplos de um natural qualquer $a \neq 0$ é o conjunto:*

$$M(a) = \left\{x \in \mathbb{Z}_0^+ | a \div x\right\} = \left\{aq | q \in \mathbb{Z}_0^+\right\}$$

Desta forma, caso se deseje saber se um número natural n é múltiplo de um número natural K, basta fazer a multiplicação dos números naturais, em ordem crescente, com o objetivo de se conseguir obter n como um dos possíveis produtos.

Capítulo 3

Teoria de divisibilidade nos números inteiros

Neste capítulo são abordados os números inteiros, com ênfase na operação de divisibilidade, o algoritmo da divisão, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Há ainda, uma breve exposição sobre os números primos.

3.1 O algoritmo geral de divisão

Lema 3.1.1. *Dados a, b dois números inteiros com $a \geq 0$ e $b > 0$, existem q, r tais que $a = qb + r$ e $0 \leq r < b$.*

Demonstração Seja o conjunto $S = \{a - bx : x \in Z, a - bx \geq 0\}$. Se x $=$ 0, então $a - (bx) = a \geq 0$. Como $a|0$ e $a \in S$, temos que $S \neq 0$. Pelo Princípio da Boa Ordem existe $r = minS$. Como $r \in S$, $r = a - (bq) \geq 0$, para algum $q \in Z$. Temos que mostrar que $r < b$. Se $r \geq b$, teríamos $a - b \cdot (q + 1) = a - b \cdot q - b = (a - (b \cdot q)) - b = r - b \geq 0$. Logo, $a - b \cdot (q + 1) \in S$. Mas $a - b \cdot (q + 1) = r - b < r = minS$, que é um absurdo. assim, $r < b$.

Teorema 3.1.1 (Algoritmo da Divisão de Euclides). *Dados a, b dois números inteiros com $b \neq 0$, existem $q, r \in Z$, únicos, tais que $a = qb + r$ e $0 \leq r < |b|$.*

Demonstração Separemos em casos:

Caso 1: $b > 0$

Quando $a \geq 0$, o Lema 4.2.1 garante que o Teorema ocorre.

Quando $a < 0$, podemos determinar q_1 e r_1 usando o Lema 4.2.1 tais que $|a| = b \cdot q_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$. Se $r_1 = 0$, tem-se que $-|a| = a = b \cdot (-q_1) + 0$. Logo, $q = -q_1$ e $r = 0$ satisfazem as condições do Teorema. Se $r > 0$, temos $-|a| = a = b \cdot (-q_1) - r_1 = b \cdot (-q_1) - b + b - r_1 = b \cdot (-q_1 - 1) + (b - r_1)$. Como $0 < b - r_1 < b$, então $q = -q_1 - 1$ e $r = b - r_1$ satisfazem as condições do Teorema.

Caso 2: $b < 0$

Qualquer que seja a podemos determinar q_1 e r_1 tais que $a = |b| \cdot q_1 + r_1, 0 \leq r_1 < |b|$. Se $b < 0$, então $|b| = -b$. Assim, $a = |b| \cdot q_1 + r_1 = -b \cdot q_1 + r_1 = b \cdot (-q_1) + r_1$. Então $q = -q_1$ e $r = r_1$ satisfazem as condições do Teorema.

Provada a existência de q e r, faz-se necessário provar a unicidade dos mesmos. Tem-se que $qb + r = a = q_1 b + r_1$. Sem perda de generalidade, supomos que $r_1 \leq r$. Desta forma, $(q - q_1) \cdot b = r_1 - r$. Como $|b| \geq r_1$, temos que $0 \leq |q - q_1| < 1$. Entre 0 e 1 não há números inteiros, logo , $|q - q_1| = 0$, o que implica $q = q_1$. Assim, $q \cdot b + r = q_1 \cdot b + r_1$ implica que $r = r_1$

Definição 3.1.1 (Divisão entre inteiros)**.** *Dizemos que um inteiro b é divisível por um inteiro a (também: a divide b ou b é múltiplo de a) se existe $q \in Z$, com $b = aq$.*

Notação: Escrevemos a|b se a divide b e a∤b se isso não ocorre.

Proposição 3.1.1 (Regras)**.** *Para todos os números a,b,c e d $\in Z$ valem:*

a) a|0, 1|b, a|a
b) a|1 $\iff$ a $= \pm 1$; 0|b $\iff$ b $= 0$
c) Se a|b e c|d, então ac|bd.
d)Se a|b e b|c, então a|c.
e) a|b e b|a $\iff$ a $= \pm b$
f) Se a|b e b $\neq 0$, então $|a| \leq |b|$
g) Se a|b e a|c, então a|bx+cy, $\forall x, y \in Z$

Estas propriedades são consequências imediatas da definição. Como exemplo, provaremos o item g:

Se a|b e a|c, então existem q_1 e $q_2 \in Z$ tais que $aq_1 = b$ e $aq_2 = c$. Segue então, que $bx + cy = (aq_1)\, x + (aq_2)\, y = a\,(q_1 x + q_2 y)$, com $q_1 x + q_2 y \in Z$, ou seja a|bx+cy, $\forall x, y \in Z$.

3.2 Máximo divisor comum de dois números

Definição 3.2.1 (MDC). *Sejam a, b $\in Z$ dois números, pelo menos um deles diferente de zero.O máximo divisor comum entre a e b é o número natural*

$$d = mdc(a,\ b)$$

definido pelas duas seguintes propriedades:

a) d|a e d|b (i. e. d é divisor comum de a e b.)

b) Se algum $c \in N$ dividir ambos a e b então temos também c|d.

Teorema 3.2.1. *Sejam a, b $\in Z$ não ambos zero e seja d=mdc(a,b), então existem $x_1, y_1 \in Z$ tais que*

$$ax_1 + by_1 = d$$

Demonstração *Suponhamos primeiro que $a \neq 0$. Fazendo-se y = 0 e x = 1, se a > 0, então x = 1 , e se a < 0 vemos que ax + by = a(± 1) $\cdot$ 0 = |a| > 0. Isso mostra que $S \neq \emptyset$. Se a = 0, então |b| > 0 e uma escolha análoga de x e y mostra, mais uma vez, que $S \neq \emptyset$. Pelo princípio da indução, existe um $d \in S$ minimal. Como $d \in S$ temos d > 0 e existem $x_1, y_1 \in Z$ tais que $d = ax_1 + by_1$.*

Afirmamos que este d é o mdc(a, b):

Dividindo a por d, existe q, r$\in Z$ tais que a = qd + r e $0 \leq r \leq d - 1$.

Então r= a - qd = a - q($ax_1 + by_1$) = a(1 - qx_1) + b(- qy_1). Se fosse r > 0 , poderíamos concluir que r$\in$ S, o que claramente é um absurdo já que r < d e d é o elemento mínimo de S. Logo r = 0 e a = qd o que significa d|a.

Da mesma forma mostra-se que d|b. Logo, d é divisor comum de a e b.

Seja c $\in N$ tal que c|a e c|b. Por 3.1.2, item g), concluímos que c|$ax_1 + by_1$ = d. Logo, d = mdc(a,b)

Uma consequência importante é o fato das combinações lineares inteiras de a e b serem exatamente os múltiplos do mdc(a, b).

3.3 Números relativamente primos

Proposição 3.3.1. *Dois números a, b $\in Z$, não ambos nulos, são relativamente primos, se e somente se existem $x_1, y_1 \in Z$ tais que:*

$$ax_1 + by_1 = 1$$

Uma consequência importante da proposição supra é o seguinte lema:

Lema 3.3.1 (Lema de Euclides). *Sejam a, b, c $\in Z$, tais que a/bc e mdc(a, b) = 1. Então a/c.*

Demonstração: Temos r, x, y $\in Z$, tais que ar = bc e ax + by = 1.

Daí se conclui que c = c · 1 = c(ax + by) = cax + cby = cax + ary = a(cx + ry).

Logo, a|c.

3.4 O algoritmo Euclidiano

Dado dois números a, b $\in Z$, com b$\neq$ 0, consideremos o seguinte processo:

Escrevendo $r_0 = |\text{b}|$. Existem $q_1, r_1 \in Z$, tais que:

$$a = bq_1 + r_1 = 1, \text{ com } 0 \leq r_1 < r_0$$

Se $r_1 = 0$, o processo termina. Caso contrário, ou seja $r_1 \neq 0$, existem $q_2, r_2 \in Z$, tais que:

$$r_0 = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1$$

Se $r_2 = 0$, o processo termina. Caso contrário, ou seja $r_2 \neq 0$, existem $q_3, r_3 \in Z$, tais que:

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < r_2$$

E assim, sucessivamente.

Se o processo já chegou em

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k, \text{ com } 0 \leq r_k < r_{k-1}$$

o próximo passo é:

Se $r_k = 0$, o processo termina. Caso contrário, ou seja $r_k \neq 0$, existem $q_{k+1}, r_{k+1} \in Z$, tais que:

$$r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1}, \text{ com } 0 \leq r_{k+1} < r_k$$

E assim, sucessivamente.

Obtemos então, uma cadeia decrescente de inteiros não - negativos:

$$|b| = r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_k > r_{k+1} > \cdots \geq 0$$

Existe portanto, um determinado n $\in N$, tal que

$$r_n \neq 0, \text{ porém } r_{n+1} = 0.$$

Assim, tal processo termina como

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}, \text{ com } 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \text{ com } 0 < r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

O processo acima descrito denomina-se de algoritmo Euclidiano para dois inteiros, no caso, a e b.

Teorema 3.4.1 (Algoritmo de Euclides). *No algoritmo Euclidiano para dois inteiros a e b temos que*

$$r_n = mdc(a,\ b).$$

Ou seja, o último resto não nulo no algoritmo Euclidiano é o máximo divisor comum de a e b.

Demonstração: Considerando-se a cadeia das equações estabelecidas a partir da última ($r_{n-1} = r_n q_{n+1}$), vemos que r_n divide todos os restos anteriores. Finalmente, r_n divide r_1, $r_0 = |b|$ e a. Isto torna r_n um divisor comum de a e b.Partindo da primeira das equações, com um qualquer divisor comum, que chamamos de c, de a e b, vemos que c divide todos os restos, particularmente $c|r_n$. Isto confirma a afirmação.

3.5 O mínimo múltiplo comum

Definição 3.5.1 (Mínimo Múltiplo Comum). *Sejam $a,\ b \in Z$ dois números, ambos não nulos. O mínimo múltiplo comum entre a e b é o número natural*

$$m = mmc(a,\ b)$$

definido pelas duas propriedades:

I) a/m e b/m (i. e. m é múltiplo comum de a e b.)

II) Se a/c e b/c para algum $c \in N$ então temos também m/c.

Proposição 3.5.1. *Sejam $0 \neq a,\ b \in Z,\ d = mdc(a,\ b)$ e $m = mmc(a,\ b)$. Então vale a relação*

$$md = /ab/$$

Demonstração: Coloquemos m'= $\frac{|ab|}{d}$

Existem r,t $\in Z$ tais que dr = a e dt= b. Temos m'= $\frac{|a|}{d}$|b| =$\pm rb$ e também m'= |a|$\frac{|b|}{d}$= $\pm at$. Isto mostra que m' é múltiplo comum de a e b.

Seja c $\in N$ tal que a|c e b|c. Existem então, u,v $\in Z$ tais que au = c = bv. Pelo teorema 3.2.1 existem $x_1, y_1 \in Z$ com $ax_1 + by_1 = d$. Segue

$$\frac{c}{m'} = \frac{cd}{|ab|} = \frac{c}{|ab|}(ax_1 + by_1) = \frac{cax_1}{|b||a|} + \frac{cby_1}{|a||b|} = \pm\frac{c}{b}\ x_1 \pm \frac{c}{a}y_1 = \pm vx_1 \pm uzy_1$$

Assim, fica demonstrado que $\frac{c}{m'} \in Z$ o que significa m'|c. Logo, m' = m.

Exemplo: mdc($\pm 7519, \pm 8249$) = 73. Assim, mmc($\pm 7519, \pm 8249$) = $\frac{7519 \cdot 8249}{73}$ = 849.647.

Proposição 3.5.2. *Se mdc(a,b)=1 e a/bc, então a/c*

Demonstração.*Como mdc(a,b)=1, existem x, y $\in Z$ tais que ax + by = 1 $\Rightarrow a \cdot cx + (bc)y = c$. Do fato de a dividir cada termo do lado esquerdo, temos que a/c.*

Proposição 3.5.3 (Relação entre MMC e MDC)**.** *Sejam a e b dois números naturais, então*

$$mdc\ (a,b) \cdot mdc(a,b) = a \cdot b$$

Demonstração.*Escreva d=mdc(a,b) e a=a_1d e b=b_1d onde $a_1, b_1 \in Z$ são tais que mdc(a_1, b_1)=1. Temos mmc(a,b)=ad para algum $l \in Z$; além disso, b/mmc(a,b) $\iff b_1d|a_1dl \iff b_1|a_1l$. Como mdc($a_1, b_1$)=1, isto implica que $b_1|l$, conforme proposição 3.5.2. Pela definição de mínimo múltiplo comum, temos que l deve ser o mínimo número divisível por b_1, assim concluímos que l=b_1 e portanto mmc(a,b)=b_1a. Logo mdc(a,b)·mmc(a,b) = $d \cdot b_1a = a \cdot b$.*

Capítulo 4

Números Primos

Neste capítulo são abordados os números primos, citações históricas, bem como alguns teoremas relevantes.

4.1 Os Primos

Os números primos, bem como as suas propriedades, foram estudados, pela primeira vez, pelos antigos matemáticos gregos.

Citando os matemáticos da escola de Pitágoras (500 a 300 A.C.) percebe-se que os mesmos estavam interessados nos números pelas propriedades místicas, algo de muita relevância para a época. Eles entendiam a ideia de primalidade, como também tinham grande interesse nos chamados números perfeitos e amigáveis (um número perfeito, é um número cujo resultado da soma dos seus divisores naturais é ele mesmo; por exemplo o número 6 tem como divisores 1, 2, 3 e 1+2+3=6, 28 tem como divisores 1, 2, 4, 7, 14 e 1+2+4+7+14=28. Um par de números amigáveis, por exemplo 220 e 284, e são tais que, os divisores de um somam-se ao do outro e vice-versa).

A partir dos Elementos de Euclides, que surgiram próximo de 300 A.C., alguns dos muitos dos resultados importantes, conhecidos na atualidade, sobre números primos tinham sido provados. Tem-se como exemplo, o fato de ser provado, por Euclides, no livro IX dos Elementos, o fato de que existem infinitos números primos. Esta é uma das primeiras demonstrações conhecidas que tem como fundamento o método da contradição, com vista à obtenção de um resultado. Euclides fornece um grande presente aos matemáticos atuais com a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética - mostrando que qualquer inteiro pode ser escrito como produto de números primos em essencialmente uma única maneira -.

Outro fato de destaque é que se um número da forma $2^n - 1$ é primo, então o número desta forma também é um número perfeito. Além disso, o grande matemático

Euler (1747) mostrou que todos os números pares perfeitos são desta forma. Deve-se citar ainda, que não é conhecido qualquer número perfeito ímpar.

No ano 200 A.C., o grego Erastóstenes apresentou um algoritmo para calcular números primos, o famoso Crivo de Erastótenes. Assim, é possível saber-se se N é um número primo utilizando divisões triviais para cada número n tal que n^2 seja menor ou igual a N. Levando-se em conta que a multiplicação é uma operação mais fácil de ser realizada do que a divisão, Erastótenes (no século III a.C.) teve a brilhante ideia de organizar estas maravilhosas computações, na forma de um bem conhecido crivo. Tal crivo, serve para determinar todos os números primos, assim como as fatorizações dos números compostos, até um dado número N.

Segue uma ilustração para N=101. Para tanto, devem-se seguir os seguintes passos:

- 1. Escrevem-se todos os números até 101;
- 2. Eliminam-se todos os múltiplos de 2;
- 3. A cada passo seguinte retiram-se todos os números múltiplos do seguinte menor número restante de p, que seja maior do que p;
- 4. É suficiente fazê-lo até $p^2 < 101$.

Verifica-se assim, que todos os múltiplos de 2,3,5,7 menores que $101^{1/2}$ foram eliminados, porém nos restam outros primos na tabela.

Desta forma, os números primos até 101 são, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

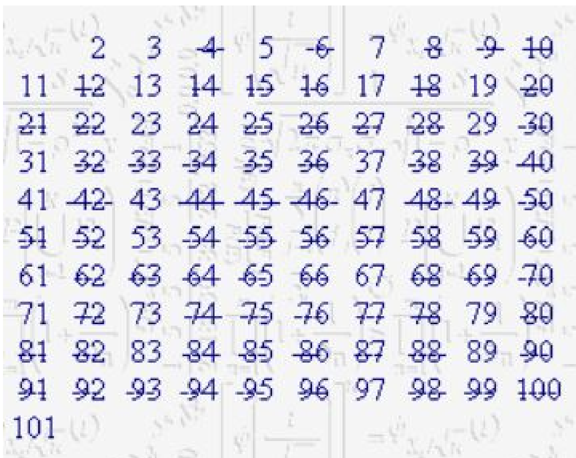


Figura 4.1: Crivo de Erastótenes

Por longo período de tempo, segundo Hefez ([12]), não houve relatos sobre alguma produção referente à história dos números primos. Esse período se denominou Idade Negra.

Um desenvolvimento importante relatado na História dos Números Primos, foi desenvolvido por Fermat no início do século XVII. Fermat provou uma conjectura de Albert Girard, que diz que todo o número primo da forma 4n+1 pode ser escrito de uma maneira única como soma de dois quadrados e, brilhantemente, foi capaz de mostrar ainda que qualquer número pode ser escrito como soma de quatro quadrados.

O Pequeno Teorema de Fermat é a base de muitos resultados importantes da Teoria dos Números, e de métodos desenvolvidos com vista a determinação de números primos, em virtude da utilização destes em larga escala na computação.

Fermat mantinha contato com outros renomados matemáticos do seu tempo, e em particular com o monge Marin Mersenne. Dizem que em uma das suas cartas a Mersenne, conjecturou que os números da forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ (número de Fermat) são sempre primos, mas Euler, 100 anos depois, provou que o resultado falha para n= 5: $F_5 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297$ que é divisível por 641, logo, não é primo.

Os números da forma $2^n - 1$ também atraíram a atenção devido a demonstração de que, caso n não seja um número primo, o resultado obtido seria um número não primo. Números que não são primos são denominados de números compostos. Assim, aqueles números são vulgarmente chamados de Números de Mersenne, M^n , devido ao estudo que este matemático lhe dedicou. Contudo, sabe-se que nem todos os números da forma $2^n - 1$, com n primo, são números primos.

Em relação a Euler, o seu trabalho foi muito importante para a Teoria dos Números em geral e no estudo dos Números Primos, em particular. Ele estendeu o Pequeno Teorema de Fermat e introduziu a função de Euler.

Fato interessante é que os números primos parecem não ter uma ordem especifica de aparecimento. Por exemplo em relação aos 100 primeiros números imediatamente antes de 10.000.000 existem apenas 9 números primos, enquanto nos 100 números que se seguem existem apenas 2 números primos. Contudo, a distribuição de números primos parece ser mais regular. Legendre e Gauss fizeram extensos cálculos sobre a densidade dos números primos. Gauss (que era um prodígio do cálculo) disse a um amigo que sempre que tinha 15 minutos de folga, os ocupava contando os números primos num alcance de 1000 números. No fim da sua vida estimou-se que Gauss tinha contado todos os números primos até 3 milhões ([10]).

Legendre e Gauss chegaram ambos à conclusão de que para um n grande a densidade de números primos perto desse mesmo n é semelhante a 1/log(n). Esta conjectura, de que a densidade de números primos é 1/log(n), é conhecida como o conjectura dos números primos.

Tentativas de provar tão bela conjectura continuaram pelo século XIX com progressos notáveis por Chebyshev e Riemann, grandes matemáticos que foram capazes de relacionar o problema com algo semelhante à chamada Hipótese de Riemann. O Teorema dos Números Primos foi eventualmente provado (usando poderosos métodos da Análise Complexa) por Hadamard e la Vallèe-Poussin em 1896.

Ainda há muitas questões por desvendar (algumas delas que datam de centenas de anos atrás) relacionadas com números primos. Como exemplo, tem-se a Conjectura feita pelo matemático prussiano Christian Goldbach. Este matemático, no ano de 1742, endereçou uma carta a Euler propondo que provasse, entre outros, o fato de que todo número maior do que 5 é a soma de três primos: $6 = 2 + 2 + 2$, $11 = 5 + 3 + 3$.

4.2 Teoremas relevantes sobre os Números Primos

Alguns teoremas sobre números primos apresentam uma beleza inquestionável para os amantes da matemática. Pode-se citar, como exemplo, alguns importantes teoremas a respeito dos números primos.

Dado um inteiro p $>$ 1 , este é denominado de número primo se não possui um divisor d satisfazendo a condição 1 $<$ d $<$ p. Por outro lado, se um inteiro a $>$ 1 não é primo, então ele é denominado de número composto. Tem-se ainda, que um inteiro m é denominado de composto se |m| não é primo.

Denominaremos de P, subconjunto de $\aleph$, de conjunto dos números primos.

4.2.1 O Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema 4.2.1. *Todo inteiro n, maior que 1, pode ser expresso como o produto de número primo.*

Demonstração. *Supondo que o inteiro n é um primo, então ele mesmo é o produto de um único fator primo. Caso contrário, ou seja, se o inteiro n não é primo, existe uma decomposição do tipo:* $n = n_1 n_2$*, com* $1 < n_1 < n$ *e* $1 < n_2 < n$*. Repetindo o argumento para* n_1 *e* n_2*, é possível escrever n como o produto de primos. Assim, como não existe uma sucessão infinita de naturais cada vez menores, após um número finito de operações desse tipo, poderemos escrever n como um produto de números primos.*

4.2.2 Euclides

Teorema 4.2.2 (Euclides)**.** *Existem infinitos números primos.*

Demonstração. *Suponha, por absurdo, que há apenas uma quantidade finita de primos* $p_1, p_2, ..., p_n$*. Considere o número* $X = p_1 p_1 ... p_n + 1$*. Tem-se pelo* *teorema anterior, que esse número deve ser o produto de alguns elementos do conjunto de todos os números primos. Porém, nenhum dos primos p_i divide X.*

4.2.3 O Teorema da decomposição primária.

Teorema 4.2.3. *Para todo número $1 < n \in \aleph$ existem únicos primos distintos $p_1, p_2, \cdots, p_r$ (os quais podemos supor em ordem natural $p_1 < \cdots < p_r$) e únicos números $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \aleph$ de tal maneira que*

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$$

O produto $\prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$ chama-se a decomposição primária de n.

Uma observação importante é que se 1<n $\in \aleph$ escrito na decomposição primária $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$, com $p_1, \cdots, p_r$ primos distintos, $r, a_1, \cdots, a_r \in \aleph$. Um número t $\in \aleph$ é divisor de n se e somente se

$$t = \prod_{k=1}^{r} p_k^{l_k}, \text{ com } 0 \leq l_1 \leq a_1, \cdots, 0 \leq l_r \leq a_r.$$

Demonstração Seja $t = \prod_{k=1}^{r} p_k^{l_k}$, com $0 \leq l_1 \leq a_1, \cdots, 0 \leq l_r \leq a_r$. Temos $t \cdot \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k - l_k} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{l_k} \cdot \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k - l_k} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k} = n$, onde $\prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k - l_k} \in \aleph$, pois $a_k - l_k \geq 0$ logo, t e divisor de n.

tem-se ainda, de forma recíproca, que qualquer divisor t de n tem que ter esta forma, em virtude da unicidade da decomposição primária de t e n.

Proposição 4.2.1 (Fatores do fatorial)**.** *Seja p um número primo. Então a maior potência de p que divide n! é p^α onde*

$$\alpha = [\tfrac{n}{p}] + [\tfrac{n}{p^2}] + [\tfrac{n}{p^3}] + \cdots$$

onde $[\frac{a}{b}]$ representa o quociente da divisão euclidiana de a por b.

Demonstração. *Temos que no produto $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot$, apenas os múltiplos de p contribuem com um fator p. Há $[\frac{n}{p}]$ de tais múltiplos entre 1 e n. Destes os que são múltiplos de p^2 contribuem com um fator p extra e há $[\frac{n}{p^2}]$ de tais fatores. Porém, dentre estes últimos, os que são múltiplos de $[\frac{n}{p^3}]$ contribuem com mais um fator primo e assim, o processo segue adiante,resultando na fórmula acima.*

Capítulo 5

Resolução de Problemas

Neste capítulo, aborda-se o ensino de matemática e seus desafios, além do interesse pela resolução de problemas no ensino de matemática.

5.1 O ensino de Matemática hoje: alguns desafios

Nos últimos anos, vem se acentuando a preocupação em desenvolver no aluno dos ensinos, seja no fundamental ou no médio, as competências necessárias para que o educando seja capaz de exercer a cidadania de forma plena. Tal preocupação vem se concretizando em diferentes propostas de ensino de diversos países e, no caso do Brasil, está bem presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ademais, segundo Smole ([22]), este documento aponta como característica principal para o ensino de matemática:

- 1. Explorar a matemática partindo de problemas encontrados no cotidiano e nas demais áreas do conhecimento;

- 2. Trabalhar com conteúdos variados pela exploração de forma equilibrada e articulada, de números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas pelo tratamento da informação;

- 3. Usar, da melhor forma possível, recursos tecnológicos disponíveis como instrumentos de aprendizagem.

Assim, é muito importante que os conteúdos propostos sejam abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente. Dentre elas, pode-se destacar a Resolução de Problemas.

Para se exercer a cidadania é necessário que as pessoas desenvolvam a sua capacidade de aprender, e isso se dá com maior efetividade através do domínio da leitura, da escrita e do conhecimento matemático, a tal ponto de lhe permitir compreender o mundo à sua volta, e os diversos cenários contidos no mesmo, como o natural, cultural e político. Não se pode deixar de citar ainda, as artes, a tecnologia, os valores que fundamentam a sociedade, para que se possa atuar com criticidade e participação eficaz.

Então, percebe-se que a Matemática traz importantes contribuições, já que tem relações estreitas com as diversas áreas do conhecimento e da atividade humana. Trata-se de um instrumental bastante relevante para as ciências da natureza, como também para as ciências sociais, entre outras. Ela faz parte da vida de todos nós, e é aplicada em diversas situações do dia-a-dia (contagens, pagamentos, consumo, organização de atividades como agricultura, pesca, entre outras).

A matemática é fruto da criação humana , onde estão presentes erros e acertos, imaginação e raciocínio lógico, contra-exemplos, conjecturas e críticas. Sabe-se que a mesma pode ajudar a potencializar diversas capacidades como as de observação, projeção, generalização e outras mais, que são capazes de favorecer o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade.

Assim, temos que uma das finalidades da matemática é seu caráter prático, ou seja, ela permite ao educando a capacidade de resolver problemas do cotidiano do mesmo, ajudando-os a não serem enganados, a exercer, enfim, sua cidadania. Contudo, a aprendizagem da Matemática não deve se reduzir apenas aos problemas da vida prática. Ela deve ser capaz de contribuir para o desenvolvimento do raciocínio, da lógica, da coerência, ultrapassando os aspectos práticos dessa grande área do conhecimento.

Um dos aspectos mais atuais que o ensino da matemática deve contemplar é a decodificação, seleção e organização das informações em linguagens diversas. A cada dia, o educando se vê diante de uma grande massa de informações, algumas contraditórias, outras de pouca relevância, sendo necessário que o mesmo consiga fazer uma triagem seletiva, bem como avaliações de forma constantes.

É bem verdade que a Matemática vem sendo trabalhada em sala de aula de forma bastante equivocada, ou seja pouco eficaz, já que são apresentados apenas resultados, fórmulas e regras que são apresentadas pelos docentes para serem utilizados de forma mecânica em exercícios que seguem apenas um modelo. Desta forma, a Matemática perde a sua potencialidade para estimular o desenvolvimento de capacidades importantes, como a de resolver problemas, acaba também perdendo o seu proveito.

É necessário desmistificar a ideia de que, diante da Matemática, o aluno deve estar numa posição passiva e de mera reprodução de conhecimentos. De acordo com Dante ([8]), é muito importante que o discente seja capaz de desenvolver, a capacidade de resolver problemas, validando estratégias e resultados, como também desenvolver formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, empregando conceitos e procedimentos matemáticos.

5.2 Interesse pela resolução de problemas no ensino da Matemática

O interesse pela resolução de problemas iniciou-se em fins dos anos de 1970. Segundo Shoenfeld ([21]), existem dois fatos significativos que dão testemunho disso.

A importância dada ao tema resolução de problemas tem seu surgimento a partir das falhas dos programas feitos anteriormente para o ensino da matemática. Observa-se que nos planos de estudo da metade do século XX, o cálculo era considerado o elemento mais importante, e assim, foi excluído o raciocínio na elaboração das estratégias. Como não houve êxito algum no rendimento acadêmico para a aprendizagem da matemática, nasce assim um novo movimento conhecido como"Nova matemática", o qual, por motivos diferentes, também fracassou em seus objetivos. Para Shoenfeld ([21]):

> *a impressão geral é a de que a Nova matemática foi muito pior que o ensino que vinha substituir. Os alunos não apenas não conseguiam dominar a matemática abstrata do novo plano de estudos, como tampouco conseguiam dominar as operações básicas. Como resultado surgiu em fins da década de 1960 uma forte rejeição contra a Nova matemática e apareceu o movimento de "volta ao domínio das técnicas básicas".*

Este movimento perdurou ao longo das décadas de 1960 e 1970, enfatizando exercícios e a repetição. O mesmo se concentrou no domínio das operações e algoritmos básicos, supondo estes como "fundamento para estudos posteriores. Em 1980 o National Council of Supervisors of Mathmatics (Conselho Nacional de Supervisores de Matemática) afirmava que "aprender a resolver problemas é o principal objetivo no momento de estudar matemática". Porém, o documento mais influente sobre o tema é o do National Council of Teachers of Mathematics - NCTM ([11]),"Agenda for Action", cuja recomendação mais importante foi de que a solução de problemas seja o objetivo mais relevante do ensino da matemática nas escolas nos anos de 1980.

Nos anos de 1980 a resolução de problemas era apresentada como uma arte que dava lugar a que os estudantes discutissem uma variedade de problemas, incluindo os não-rotineiros.

O avanço do ensino da matemática apoia-se em uma nova aptidão em relação à aprendizagem da resolução de problemas, que implicaria o desenvolvimento individual e social. O "saber matemático é essencialmente saber de método muito mais que saber de conteúdo"(Guzmán, [7]).

O problema de cunho pedagógico, que, por conseguinte, deriva dessa nova contribuição, dirigir-se-á, conforme Blanco Nieto ([4]), ao estabelecimento de condições adequadas que ajudem os alunos a experimentar tais processos e consequentemente, a compreender e a criar as situações que permitam a eles transferi-las a outras de sua própria vivência. Quer dizer, estabelecer condições didáticas convenientes que ajudem o aluno a matematizar situações.

Entrava-se em uma época em que

> *(...) a resolução de problemas tem a ver com a produção de conhecimentos significativos para quele que aprende. O conhecimento que se valoriza pela sua significação não é o conhecimento transmitido, mas o conhecimento produzido por quem está em situação de aprender. Assim, se a resolução de problemas deve ser o lugar da produção do conhecimento, a tarefa de resolver problemas é uma tarefa privilegiada para a aprendizagem. (Blanco Nieto ([4])*

5.3 O conceito de problema na Matemática

A abordagem em sala de aula, no que se refere à questão da resolução problemas, se deu pela primeira vez de modo relevante por Polya, em 1945, mas somente a partir da década de 80,e com a publicação da Agenda para a Ação do NCTM, pode-se inferir que este movimento começou a se tornar forte. Contudo, a noção de problema tem sido algo difícil de se definir.

Kantowski ([14]) cita que um problema é, nada mais nada menos, que uma situação com que um indivíduo se depara, bem como para a realização da qual não tem um procedimento certo ou um algoritmo que seja capaz de conduzi-lo à solução. Refere ainda que o que é problema para uma pessoa poderá ser exercício para outra ou ainda, uma frustração para um terceiro. Por outro lado, as Normas (NCTM, [13]) referem que:

> *"um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel."*

Citando Krulik e Rudnik ([15]), tem-se que problema é uma situação, quantitativa ou outra, com a qual se apresenta a um indivíduo ou grupo, na busca de uma solução, para a qual não se tem prontamente uma resposta. Estes autores, de maneira relevante, distinguem muito bem entre questão (uma situação que apela à capacidade de memorização), exercício (uma situação em que é necessário o treinamento ou o reforço através de algoritmos já aprendidos) e problema (onde é necessário raciocínio e a sintetização do que já foi aprendido).

De certa forma, uma mesma situação poderá representar um exercício para uns e um problema para outros. Ademais, o que poderá ser um problema para um educando numa fase de aprendizagem, poderá passar a um exercício numa fase posterior.

Tem-se o seguinte exemplo: "Descubra quantos múltiplos de 7 existem entre 14 e 63, inclusive." Para um aluno que conhece a multiplicação e a definição de múltiplo de um número, esta situação é um exercício, mas para um aluno do 5º ano do ensino fundamental, que não conhece nem o conceito, esta questão é seguramente um problema.

Em resumo, nas definições de problemas acima citadas pode-se identificar duas características comuns para problema:

a) É uma situação para a qual se pretende uma solução;

b) Não há procedimento que conduza imediatamente à solução.

Desta forma, um bom problema deverá, de forma geral, possuir três características:

- Deve ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática;
- Precisa ser adequado, ou seja, que possa aproveitar o conhecimento que os alunos já têm de modo que, o novo conhecimento e as capacidades de cada aluno, possam ser adaptados e aplicados com o intuito de completar tarefas;
- Precisa partir de algo que faz sentido, bem como o caminho para a solução não esteja completamente visível.

5.4 Como os problemas devem ser resolvidos?

A resolução de problemas é definida pela maioria dos autores da educação matemática como um processo sequencial onde se podem estabelecer diversas fases.

Analisando a definição de Pólya ([18]), é possível verificar que a resolução de problemas inclui quatro etapas:

a) **Compreensão do problema** - Nesta fase se procura compreender o problema até encontrar com garantia a incógnita;

Assim, nesta etapa se deve identificar:

- O que é conhecido (os dados);
- O que é desconhecido (o objetivo);
- As condições apresentadas.

b) **Elaboração de um plano** - obtém-se um plano de fato quando, de um modo geral, sabemos quais os cálculos, roteiros ou estratégias serão utilizados com o propósito a fim de obter a incógnita. O mais importante é a formulação do plano;

c) **Execução do plano** - o plano apenas fornece um roteiro geral. É necessário examinar todos os detalhes; Executa-se o plano que se elaborou até chegar à solução. Caso se chegue a um impasse, volta-se à fase de formulação do plano.

d) **Verificação dos resultados** - Deve-se fazer uma revisão crítica do trabalho realizado, ou seja, que seja capaz de avaliar o resultado em função da situação inicial e do raciocínio.

As quatro etapas citadas anteriormente podem ajudar o educando a organizar o seu processo de resolução de um determinado problema. Durante a aplicação das quatro etapas o aluno deve ser capaz de colocar a si mesmo uma série de questões que têm como objetivo organizar o seu pensamento de uma forma mais sistemática e eficaz.

Capítulo 6

Resolução de problemas numa perspectiva metodológica

Um fato muito importante é a discussão das diversas concepções de resolução de problemas, pois somente assim é possível criar uma visão com criticidade, bem como para entender melhor as escolhas e orientações propostas quando se pretende criar estratégias de resolução de problemas associadas a uma perspectiva metodológica. Branca ([5]), em seu artigo, coloca a Resolução de problemas como meta, processo ou habilidade básica.

Na primeira definição, tem-se que em época anterior ao movimento da Educação Matemática, a resolução de problemas era de fato visto como uma meta. O ensino se estruturava primeiramente preocupado em preparar o terreno para que depois o educando fosse capaz de agir, ou seja, os currículos reforçaram a necessidade do discente em possuir todas as informações, bem como conceitos relacionados às situações colocadas para depois estruturar o processo capaz de originar a resolução. Ademais, a consideração mais importante é que aprender a resolver problemas é a razão pela qual se estuda matemática.

A visão de que a Resolução de Problemas deve ser definida como um processo, que valoriza métodos, procedimentos, como também as estratégias que são usadas pelos alunos na resolução das situações colocadas, teve origem nos trabalhos de Polya ([18]). É neste trabalho que surge a classificação dos tipos de problemas, de estratégias de resolução, bem como esquemas de passos a serem seguidos visando a melhor forma de se resolver problemas. Assim, o ensino tem seu cerne em ensinar a resolver problemas o que, como consequência, acaba resultando em aprender matemática.

Por fim, pensar na Resolução de Problemas como habilidade básica é o mesmo que entendê-la como uma competência mínima para que o indivíduo seja capaz de se inserir no mundo do conhecimento, como também do trabalho. A questão principal é o que deve ser essencial, e que precisa ser ensinado, em relação à Resolução de Problemas. Assim, faz-se necessário levar em consideração o conteúdo específico, os diversos tipos de problemas e os métodos de resolução de problemas para que se alcance a aprendizagem matemática.

Nos anos 90, a Resolução de Problemas já tinha uma outra dimensão, pois era descrita como uma metodologia voltada para o ensino de matemática, ou seja, era representada por um conjunto de estratégias para o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem nesta área do conhecimento. Para Diniz ([22]).

> *Essa concepção de Resolução de Problemas pode ser vista através de indicações de natureza puramente metodológica, como usar um problema detonador ou desafio que possam desencadear o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos, trabalhar com problemas abertos, usar a problematização ou a formulação de problemas em projetos, etc.*

Uma ideia importante é propor a Resolução de Problemas numa Perspectiva Metodológica, contudo a palavra "perspectiva", nesse caso, deve ser utilizada visando um aspecto metodológico. Ademais, isto corresponderia a uma forma de organizar o ensino diante de um posicionamento para de fato perceber o que é ensinar e consequentemente ao que é aprender.

> *Analisar a Resolução de Problemas como uma perspectiva metodológica a serviço do ensino e da aprendizagem de matemática amplia a visão puramente metodológica e derruba a questão da grande dificuldade que alunos e professores enfrentam quando se propõe a Resolução de Problemas nas aulas de matemática. A utilização de recursos da comunicação pode resolver ou fazer com que não existam essas dificuldades.* (DINIZ,[22])

Ao propor a Resolução de Problemas num ponto de vista metodológico é possível se verificar a relação íntima existente entre a aprendizagem de conteúdos matemáticos e o recurso à comunicação, pois o que se tem, neste processo, é o aluno falando, escrevendo ou desenhando,ou seja, agindo sobre um determinado desafio.

Por outro lado, também é possível se verificar as habilidades ou atitudes que são desenvolvidas nos alunos, como também em quais conceitos o mesmo apresenta dificuldades. Assim os recursos da comunicação são valiosos para interferir nas dificuldades encontradas ou para permitir um avanço mais qualitativo do educando, propondo-se assim, outras perguntas ou até mudando-se a forma de abordagem.

Desta forma, ao se pretender trabalhar com tal perspectiva é fundamental que se reflita a sobre os diferentes tipos de problemas que podem ser propostos aos alunos, devendo elencar as suas características e funções no ensino e na aprendizagem da matemática.

Neste trabalho usaremos a classificação de problemas criadas por Dante ([8]): Exercício de reconhecimento, Exercícios de algoritmos, Problemas-padrão, Problemas-processo ou heurísticos, Problemas de aplicação, Problemas de quebra-cabeça e Problemas extravagantes. Todavia a proposta é trabalhar com Problemas-processo ou heurísticos, Problemas de aplicação e Problemas extravagantes.

Os problemas-processo são os que permitem o despertar da curiosidade do aluno, possibilitam o desenvolvimento da criatividade, iniciativa e espírito explorador. E, principalmente, são capazes de favorecer o desenvolvimento de estratégias e procedimentos para resolver situações-problema, o que, em muitos casos, é muito mais importante que encontrar a resposta correta.

Os Problemas de aplicação retratam situações fáticas do dia-a-dia e os mesmos exigem o uso da Matemática para serem resolvidos. Também são denominados de situações-problema. Fato importante é que através de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se problematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, etc. Em geral, são problemas que exigem pesquisa e levantamento de dados.

Os problemas extravagantes são problemas irreais, e por estarem relacionados a situações reais e do dia a dia, despertam o interesse, por exemplo: "Dois casais de polvos tem juntos dez filhos. Os casais e seus filhos resolveram colocar pés-de-pato para nadar. Quantos pares de pés-de-pato precisaram comprar?"

Capítulo 7

Ensinando MDC e MDC via resolução de problemas

Neste capítulo é apresentada uma proposta de sequência didática para o ensino do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum através da resolução de problemas.

7.1 Apresentando concepções

Segundo Paulo Abrantes ([2]), as competências matemáticas que todos devem desenvolver em seu percurso ao longo da educação básica incluem:

- predisposição e aptidão para raciocinar matematicamente, ou seja, para explorar as situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
- gosto e confiança pessoal em desenvolver atividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático, assim como a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica;
- aptidão para comunicar descobertas e ideias matemáticas por meio de linguagem escrita e oral adequadas à situação;
- compreensão de noções como conjectura, teorema e demonstração, assim como capacidade de examinar consequências do uso de diferentes definições;
- predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e capacidade de desenvolver processos de resolução, assim como para analisar erros e ensaiar estratégias alternativas;
- capacidade de decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, conforme o caso, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis e os instrumentos tecnológicos;

- tendência a procurar ver e apreciar a estrutura abstrata presente numa situação, seja ela relativa a problemas da realidade, à natureza, à arte ou a outras áreas do conhecimento, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos.

Diante das competências acima elencadas é relevante que o educador assuma a função de buscar atividades didáticas que possam traduzir tais competências. Assim, é muito relevante que o docente procure formular problemas que sejam bastantes motivadores para os seus alunos, ou seja, problemas capazes de despertar no aluno a curiosidade, acima de tudo.

Nesse sentido, o uso da resolução de problemas tem um papel importante no desenvolvimento das competências matemáticas, e é possível se obter sucesso, pois ao usá-la como estratégia metodológica, já que uma das grandes vantagens da Resolução de Problemas é a possibilidade de se verificar:

- se o aluno demonstra que sabe explicitar o problema com suas palavras;
- se é capaz de enfrentar a resolução do problema, ou seja, de criar modelos que sustentem o seu próprio processo;
- resolver o problema;
- verificar se a solução é adequada.

Tem-se ainda a possibilidade de se criar uma ficha de acompanhamento do desenvolvimento das atividades referentes aos problemas apresentados aos alunos, que pode conter os seguintes itens, além de outros:

- Apresenta gosto em resolver problemas;
- Ao enfrentar desafios, desiste de forma rápida;
- Busca usar estratégias criativas;
- Demonstra autoconfiança;
- Espera ajuda do professor.

Cada item poderá ser mensurado através de indicadores como sim, não e às vezes. Isso auxilia o educador a verificar se está no caminho certo, ou seja, permitindo o desenvolvimento das competências matemáticas, bem como verificar quais alunos que deverão ser olhados com mais cuidados, além de permitir uma reflexão geral sobre o trabalho executado.

7.2 Proposta para o ensino do MDC e do MMC

O presente trabalho visa apresentar uma proposta de auxiliar a prática docente, através do uso da Resolução de Problemas em uma perspectiva metodológica, no que concerne ao ensino do MMC e do MDC no sexto ano da educação básica. A escolha deste conteúdo se deu em virtude da importância de se ensinar MMC e MDC através de caminhos que não utilizem apenas meros dispositivos práticos, ou seja mecânicos, mas atividades que propiciem a utilização de estratégias divertidas e eficientes, sejam elas ensinadas ou criadas pelo aluno.

Nesse sentido é possível se obter os seguintes objetivos:

- Oportunizar ao aluno propor sua própria resolução ao problema gerador;
- Possibilitar aos alunos a aplicação de diferentes estratégias à resolução de problemas a fim de explorar conceitos e ideias matemáticas envolvidas nos conteúdos mmc e mdc, e que possam fazer uso desses conhecimentos em outras situações problemas envolvendo tais conteúdos.

7.2.1 Atividade 1

Dois rolos de arame, um de 220 metros e outro de 440 metros, devem ser cortados em pedaços de mesmo comprimento. De que modo isto pode ser feito se desejamos que cada um destes pedaços tenha o maior comprimento possível?

Discussão: Nesta atividade é possível deixar que os alunos criem ideias sobre a atividade, que poderá ser feita em dupla, fornecendo algumas soluções, pois é muito importante não se chegar a uma solução pronta de imediato, mas interpretar as diferentes soluções apresentadas, como por exemplo:

- É possível se cortar cada um dos rolos em pedaços de 4 metros, obtendo 55 pedaços de um rolo e 110 pedaços do outro;
- Contudo, também é possível obter pedaços bem maiores que o primeiro exemplo, bastando aumentar o tamanho dos pedaços: se cortarmos em pedaços de 55 metros teremos 4 pedaços de um rolo e 8 pedaços do outro.

É interessante que cada grupo faça as devidas anotações no quadro, o que irá fomentar outras respostas, criando um ambiente de discussão capaz de gerar diversos resultados, bem como reforçando o entendimento sobre a operação de divisão.

Nesse contexto o professor pode apresentar os divisores de 220 e de 440, bem como solicitar que a turma elenque-os:

D(220)=$\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}$

D(440) = $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 20, 22, 40, 44, 55, 110, 220, 440\}$

Feito isso, uma das estratégias da resolução do problema visa buscar os divisores comuns que são:

$\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}$

Cabe ao professor mediar as diferentes respostas que podem aparecer na descoberta dos divisores comuns, contudo o que foi solicitado no quesito são pedaços de maior comprimento possível. Assim, para se chegar à solução desejada, faz-se necessário que o aluno interprete a função do maior divisor comum entre os números, no caso em questão é o 220. Obtendo então, 1 pedaço de 220 metros e mais dois, que é o resultado da divisão de 440 por 220, com medida de 220 metros cada.

7.2.2 Atividade 2

Sabe-se que se um número divide outros dois números, então ele também divide a soma destes dois números ou a diferença entre os mesmos. Usando tal propriedade da divisibilidade, encontre o MDC(3264,1234)

Para resolver tal problema o professor pode expor a propriedade para números menores como:

MDC(24,36)= MDC(36-24,24)= MDC(24,12)= 12.

Talvez seja importante fazer referência a Euclides, em relação ao algoritmo desenvolvido pelo mesmo, mas a ser ensinado em outro momento.

Assim, se espera que os alunos produzam as diferenças entre os números cujo MDC se deseja, a fim de reduzirem os mesmos:

MDC(3264,1234) = MDC(1234, 3264 - 1234) = MDC(1234,2030) = MDC(1234, 2030-1234) = MDC(1234,796) = MDC(1234,1234 - 796) = MDC(796,438) = MDC(796,796 - 438) = MDC(358,438) = MDC(438 - 358,438) = MDC(358,80) = MDC(358,358 - 80) = MDC(278,80) = MDC(278 - 80,80) = MDC(198,80) = MDC(198-80,80) = MDC(118,80) = MDC(118-80,80) = MDC(38,80) = MDC(80-38,80) = MDC(42,38) = MDC(42-38,38) = MDC(38,4) = MDC(38-4,4) = MDC(34,4) =MDC(34-4,4) = MDC(30,4) = MDC(30-4,4) = MDC(26,4) = MDC(26-4,4) = MDC(22,4) = MDC(22-4,4) = MDC(18,4) = MDC(18-4,4) = MDC(14,4) = MDC(14-4,4) = MDC(10,4) = MDC(10-4,4) =MDC(6,4) =2

Alguns alunos poderão achar bastante trabalhoso tal processo, contudo a finalidade é poder comparar com outro método a ser ensinado posteriormente, o que reduzirá em muito as contas realizadas.

7.2.3 Atividade 3

O Lema de Euclides cita que o mdc de dois números é o mesmo que o do primeiro e do segundo menos um múltiplo qualquer do primeiro. Vamos calcular mdc(152,352) como exemplo, e depois, use o lema para encontrar o MDC(3264,1234)

Este já é um problema que exigirá mais dos alunos. Trata-se do uso do Lema de Euclides, uma poderosa ferramenta para calcular mdc, além disso a atividade reforçará a aprendizagem sobre divisão, multiplicação e múltiplos de um número.

Inicialmente o professor deverá usar o Lema para calcular o mdc de dois números dados através de uma didática que não seja muito algébrica, visando facilitar o entendimento do método, já que a atividade é dirigida aos alunos do sexto ano:

É válido que o professor calcule o mdc(152,352) como exemplo, ou de outros números quaisquer:

$$352 = 152 \text{ x } 2 + 48$$

Então, mdc(352,152) = mdc(352 - 152 x2 ,152)= mdc(48,152)

Continuemos aplicando o Lema:

$$152 = 48 \text{ x } 3 + 8$$

Então, mdc(152,48) = mdc(152 - 48 x3 ,48)= mdc(48,8)

$$48 = 6 \text{ x } 8 + 0$$

Então, mdc(48,8) = mdc(48 - 6 x8 ,8)= mdc(0,8)= 8

Por fim, temos que **mdc(352,152)** = mdc(48,152)= mdc(48,8) = mdc(0,8)= **8**

Para prosseguir, o professor pode apresentar o seguinte sistema para facilitar o procedimento:

	2	3	6
352	**152**	**48**	**8**
48	8	0	

Figura 7.1: Algoritmo de Euclides

Diante disso, o desafio agora é encontrar o MDC(3264,1234). Pelo lema:

$$3264 = 1234 \text{ x } 2 + 796$$

Então, mdc(3264,1234) = mdc(3264 - 1234 x2 ,1234)= mdc(1234,796)

O professor poderá se valer do sistema apresentado abaixo:

	2	1	1	1	4	2	9	2
3264	1234	796	438	358	80	38	4	2
796	438	358	80	38	4	2	0	

Figura 7.2: Algoritmo de Euclides

Após tal atividade, o professor poderá elencar perguntas ou fomentar uma discussão em sala de aula sobre o tema a fim de verificar as principais dificuldades, como também se algum aluno se valeu de uma estratégia diferente.

7.2.4 Atividade 4

Qual a diferença entre dois números naturais, que têm para produto 2.304, e para o máximo divisor comum o número 12?

Neste exercício não se faz necessário o uso da álgebra, pois se pode solicitar aos alunos que elenquem as possibilidades. Todavia, o docente deverá apresentar a propriedade que relaciona o mínimo múltiplo comum com o máximo divisor comum:

$$MMC(a,b) \cdot MDC(a,b) = a \cdot b$$

Inicialmente se deve mostrar que 2304 é múltiplo de 12, ou seja, 2304 = 192 x 12. Daí se pode sugerir dois números onde o MMC é 192 e o MDC é 12. Isso implica que os números são múltiplos de 12 e divisores de 192. Para isso vamos buscar múltiplos de 12 que estão entre 12 e 192, que são 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, 168, 180 e por fim, 192.

Os divisores de 192 são: 192, 96, 64, 48, 24 e 12, paramos aqui, já que os demais não nos interessam. Então temos as seguintes possibilidades:

$$12 \cdot 192$$
$$24 \cdot 96$$
$$36 \cdot 64$$
$$48 \cdot 48$$

Porém, a única possibilidade que satisfaz o problema é 12 x 192, já que o MDC das demais não é 12.

Assim, temos que os números naturais procurados são 192 e 12, cuja subtração entre os mesmos é 180.

7.2.5 Atividade 5

Tício ganhou um prêmio em dinheiro que é superior a 2.000 reais e inferior a 2.500 reais. Se ele contá-lo de 30 em 30 reais, ou de 40 em 40 reais, ou ainda de 50 em 50 reais, sempre sobrarão 25 reais. Qual o valor do prêmio de Tício

Trata-se de um exercício fácil, mais muito interessante, além de servir como um caso que pode ocorrer na vida real.

A principal ideia é fazer com que o aluno crie uma estratégia voltando-se para a modificação do problema, ou seja, pensar no mesmo mas com a condição de que não houvesse sobra. Assim, o prêmio seria um múltiplo de 30, 40 e 50.

Logo, o valor do prêmio, com o problema modificado, seria o MMC(30,40,50) que é 600.

Inicialmente, o prêmio seria de 2.400 reais, pois este é o múltiplo de 600 entre 2.000 e 2.500. Como ainda existe uma sobra de 25 reais, o valor do prêmio é 2.425 reais.

É importante que o professor busque incentivar o aluno a buscar a modificação do problema, e assim, sem ter a resposta de imediato, verificar o real motivo da existência da sobra.

7.2.6 Atividade 6

Marcela fabrica trufas de chocolates, que são vendidas em embalagens com 5, 8 ou 12 unidades. Ana, uma de suas vendedoras, já possui em estoque 793 trufas, que serão todas vendidas em embalagens do mesmo tipo. Porém, ela ainda não decidiu qual das três embalagens irá utilizar. Nessas condições, a menor quantidade de trufas que Marcela deverá acrescentar ao estoque de Ana, de modo que, independentemente do tipo de embalagens utilizadas, não sobre nenhuma trufa no estoque depois da confecção das embalagens, é igual a quanto?

Nesta atividade, o aluno poderá construir melhor a ideia de múltiplo de um número, que é ensinado antes de MMC.

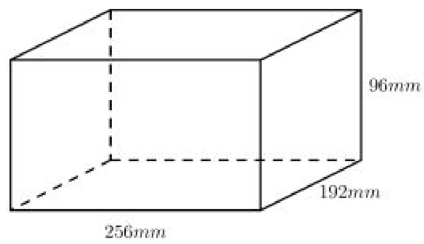
É importante que o aluno estabeleça o fato de que o mínimo múltiplo comum de 5, 8 e 12 é o quê deve ser buscado, e a partir do seu valor, 120, poder chegar à resposta.

Isso significa que é possível distribuir 120 trufas em caixas de 5 unidades, 8 unidades e 12 unidades. Portanto, se faz necessário trabalhar com os múltiplos de 120 (eles caberão nas caixas).

O múltiplo de 120 mais próximo de 793 é 840, que é $120 \cdot 7$. Desta forma precisamos fazer a seguinte operação: 840 - 793 $=$ 47, o resultado da atividade.

7.2.7 Atividade 7

Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo retângulo, como indica a figura abaixo. O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com x milímetros de aresta. Qual o maior valor inteiro de x?



Para resolver a atividade o aluno deve ser instigado geometricamente, obviamente que os conceitos de paralelepípedo e cubo são construídos nas séries anteriores, contudo com pouco rigor matemático, obviamente. Daí ser uma excelente oportunidade para construção geométrica dos mesmos.

A resolução da atividade se dará apenas com o conceito básico de MDC, que pode ser feito da seguinte maneira:

256,	192,	96	2
128,	96,	48	2
64,	48,	24	2
32,	24,	12	2
16,	12,	6	2
8,	6,	3	
			$\boxed{2^5}$

2 é o único fator comum, logo a resposta será $2^5 = 32$

7.2.8 Atividade 8

Seja n!, onde n e natural e maior que 1, igual ao produto de n por todos os naturais menores que n e diferentes de zero. Por exemplo, 5! $= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$**. Determine MDC(10!, 15!) e MMC(10!, 15!).**

Nesta atividade há um elemento novo, o fatorial, porém a própria questão traz o conceito do mesmo. O professor poderá apresentar outros exemplos, caso haja dúvida persistente, ou até mesmo deixar que os alunos construam novos exemplos, passando assim a se familiarizarem com o novo e divertido elemento matemático.

Talvez seja necessário fazer referência ao MMC e MDC de dois números, sendo um deles múltiplo do outro, fato extremamente importante para a resolução da atividade.

Como, na fatoração de 15!, aparecem todos os fatores de 10!, então 15! é múltiplo de 10!. Sendo assim, o MDC(10!, 15!) = 10! e o MMC(10!, 15!) = 15!.

7.2.9 Atividade 9

Um sinal luminoso tem três lâmpadas: uma vermelha, uma azul e uma laranja. A lâmpada azul pisca a cada minuto e meio, a lâmpada vermelha pisca a cada dois minutos e a laranja pisca a cada dois minutos e quinze segundos. Se as 8h elas piscaram juntas, que horas elas voltarão a piscar juntas novamente?

Outra atividade interessante, onde será necessária uma estratégia eficiente para a sus resolução. Aqui, o professor pode aproveitar a atividade para trabalhar transformação de medida de tempo, algo não muito difícil de se relacionar, para as novas gerações.

Será necessário calcular o MMC dos três tempos, em segundos, respectivamente 90, 120 e 135:

$$\begin{array}{ccc|c}
90, & 120, & 135 & 2 \\
45, & 60, & 135 & 2 \\
45, & 30, & 135 & 2 \\
45, & 15, & 135 & 3 \\
15, & 5, & 45 & 3 \\
5, & 5, & 15 & 3 \\
5, & 5, & 5 & 5 \\
1, & 1, & 1 & \\
\hline
 & & & \boxed{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5}
\end{array}$$

Temos então que elas piscarão juntas novamente depois de $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1.080$ segundos, que convertendo para minutos, ou seja, $\frac{1080}{60} = 18$ minutos, ou seja, piscarão juntas novamente às 8 horas e 18 minutos.

7.2.10 Atividade 10

Observe as engrenagens na figura. Quantas voltas a engrenagem com 12 dentes deve dar para que a engrenagem com 9 dentes dê 200 voltas?

Trata-se de uma atividade interessante, mas inicialmente pode ser que os alunos não consigam observar a aplicação do MMC.

O aluno deverá observar que a engrenagem do meio não influencia em nada no sistema, já que o número de dentes que andar a primeira (da esquerda), será exatamente igual ao número de dentes que andará a terceira (da direita). Será necessário então, calcular agora, depois de quantas voltas de cada, após o início do funcionamento do sistema, estas duas engrenagens voltarão a ter sua configuração inicial. Sabe-se que a primeira voltará a sua posição inicial a cada 12 dentes e a terceira a cada 9 dentes, as duas juntas voltarão a sua posição inicial a cada MMC(9, 12) $= 2^2 \cdot 3^2 = 36$ dentes, ou seja, a cada 3 voltas da primeira e 4 voltas da terceira.

Desta forma, se a terceira engrenagem der $200 = 50 \cdot 4$ voltas, então a primeira dará $50 \cdot 3 = 150$ voltas.

Capítulo 8

Considerações finais

O tema resolução de problemas vem ganhando bastante espaço nos últimos anos, no que concerne ao ensino de matemática, contudo ainda há muitos equívocos na sua efetiva aplicação em sala de aula. Muitos professores se valem da resolução de problemas como mera aplicação de conhecimentos matemáticos que foram adquiridos anteriormente pelos alunos, em contrate com a sua real finalidade, ou seja, a construção do conhecimento matemático.

Em sala de aula, o que se tem na realidade quase que frequentemente, o ensino de um conceito matemático, e logo depois se apresenta um problema para que o educando venha a empregar o que lhe foi ensinado. Tal fato gera nos alunos a ideia de que resolver problemas consiste em apenas realizar cálculos, após uma lida de texto, o que, de certa maneira, impede que o mesmo venha a fazer inferências ou deduções com o propósito de chegar a uma solução, visto que o problema a ser resolvido já apresenta um esquema de resolução, distorcendo o real fim da Resolução de Problemas.

Tem-se ainda, que é comum o professor adjetivar alguns alunos como pouco criativos ou criticá-los por não se valerem do raciocínio lógico, quando na verdade, os problemas que são colocados para resolução são incapazes de fomentar no educando a elaboração de estratégias para solucioná-los, ou seja, os impede de se valer da criatividade, bem como da logicidade.

É verdade que não se deve culpar docentes ou discentes, mas sim buscar soluções para reduzir as deficiências que ocorrem no ensino da matemática. A pretensão deste trabalho é auxiliar o professor nas suas intervenções para desenvolver três capacidades simultaneamente - resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática - visando dar uma nova roupagem as aulas de matemática, porém com a finalidade de enriquecer as aulas e a aprendizagem dos alunos.

Nesse contexto, as atividades descritas no presente trabalho, tem a pretensão de ajudar o professor a criar uma prática que se reflita sobre o que se aprende, bem como seja capaz de identificar as fragilidades que surgem na relação de aprendizagem. Ademais, o professor será capaz de gerar um ambiente propício à criatividade, à elaboração de estratégias de resolução e à utilização do raciocínio lógico. Algumas das atividades utilizadas foram retiradas de provas de Olimpíadas de Matemáticas por serem questões que privilegiam a criatividade e a curiosidade, características que podem ser aguçadas ao se trabalhar com Resolução de Problemas.

Diante do exposto, para o ensino do máximo divisor comum (MDC) e do mínimo múltiplo comum (MMC), a resolução de problemas numa perspectiva metodológica pode propiciar o real entendimento de conteúdo matemático de grande importância para as séries posteriores ao sexto ano, como ampliar os conhecimentos sobre divisão, números primos e a construção de algoritmos. Nas séries posteriores, por exemplo, o oitavo ano, o ensino da álgebra se dará de forma mais efetiva, sendo necessário o entendimento do MDC e do MMC em problemas que envolverão polinômios.

Vale ressaltar que há a intenção de aplicar as atividades descritas neste trabalho em uma série de sexto ano, e apresentar os resultados, quantitativamente e qualitativamente, a fim de formular um artigo, o que irá enriquecer o tema em questão.

Portanto, sem pretensão de esgotar tal tema, é esperado que outros projetos sejam produzidos com o propósito de ampliar horizontes didáticos que permitam promover junto aos alunos o entendimento da Matemática. Todavia, que não se resuma em uma simples prática voltada para a busca de resultados, mas que vá ao encontro da formulação de novas didáticas criativas capazes de mostrar a beleza da matemática.

Referências Bibliográficas

[1] ABRANTES, P., SERRAZINA, L.Oliveira, I. (1999). A Matemática no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação.

[2] ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só).... Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática., n. 8, p. 7-10, 35, 1989.

[3] BARBOSA, J. L. Geometria Euclidiana Plana. Coleção Fundamentos da Matemática elementar. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985

[4] BLANCO NIETO, L.J..La resolución de problemas y los professores de matemáticas. Revista Suma. N^o 9, 1991.

[5] BRANCA, N. A. Resolução de Problemas como Meta, processo e habilidade básica. In: A Resolução de problemas na matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997.

[6] COUTINHO, S. C. Números Inteiros e Criptografia RSA. Rio de Janeiro,IMPA. Série de Computação mateática.

[7] DE GUZMAN, M. Enfoque heurístico de la enseñanza matemática. Aspectos didácticos de matemática. ICE, Universidade de Zaragoza, 1985.

[8] DANTE, Luiz Roberto. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 2005

[9] FREIRE, P. Pedagogia da autonomia. São Paulo: Terra e Paz, 1996.

[10] FREIRE, P. Educação e Mudança. Rio de Janeiro: Terra e Paz, 1983.

[11] HEFEZ, A. Elementos de Aritmética. Série Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[12] HEFEZ, A. Iniciação à Aritmética. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.

[13] NCTM (1991). Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar. (Tradução portuguesa do original em inglês de 1989). Lisboa: APM IIE.

[14] KANTOWSKY, M. G.. The use of heuristics in problem solving. University of Florida, 1979.

[15] KRULIK, S. e REYS, R. E. Resolução de Problemas na Matemática Escolar. Trad. Higino H. Domingues. Atual: São Paulo, 1997.

[16] LIMA, ELON LAGES. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias [6a ed.] Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[17] OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS - OBMEP.Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao> Acesso em: 01 Jul.2019.

[18] POLYA, G. (2003). Como resolver problemas (Tradução do original inglês de 1945). Lisboa: Gradiva.

[19] PROGRAMA POLOS OLÍMPICOS DE TREINAMENTO INTENSIVO - POTI. Disponível em :<https://poti.impa.br/apresentação> Acesso em 01 Jun. 2019.

[20] ROQUE T., PITOMBEIRA, J. B. Tópicos de História da Matemática. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012

[21] SHOENFELD,A.. Matematical Problem Solving.New York. Academic Press, 1985.

[22] SMOLE K. S. e DINIZ. M. I. Ler, escrever e resolver problemas. Porto Alegre. Artmed, 2001.