Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

**Priscilla Costa Peixoto**

# A Arte de Combinar

## Uma proposta metodológica para o Ensino Médio baseada na Resolução de Problemas

João Pessoa, PB
2019

**Priscilla Costa Peixoto**

# A Arte de Combinar

## Uma proposta metodológica para o Ensino Médio baseada na Resolução de Problemas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
**Orientador:** Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra.

João Pessoa, PB
2019

**Catalogação na publicação**
**Seção de Catalogação e Classificação**

P379a Peixoto, Priscilla Costa.
A Arte de Combinar: Uma proposta metodológica para o Ensino Médio baseada na Resolução de Problemas / Priscilla Costa Peixoto. - João Pessoa, 2019.
100 f. : il.

Orientação: Flank David Morais Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1. Ensino Médio. 2. Metodologias Ativas. 3. Aprendizagem Baseada em Problemas. 4. ABProb. 5. ABP. 6. Análise Combinatória. I. Bezerra, Flank David Morais. II. Título.

UFPB/BC

**Priscilla Costa Peixoto**

# A Arte de Combinar

## Uma proposta metodológica para o Ensino Médio baseada na Resolução de Problemas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
**Orientador:** Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra.

Área de Concentração:
Aprovada por:

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra (UFPB)

Miriam Silva Pereira

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira (UFPB)

Profa. Dra. Silvia Sastre-Gómez (UFPE)

João Pessoa, PB
2019

*Dedico este trabalho aos meus pais, aos meus avós, ao meu namorado e a todos aqueles que incentivaram os meus sonhos e apoiaram as minhas escolhas. Fora suas motivações que me impulsionaram nessa caminhada*.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, pela energia, pela saúde... Pela oportunidade de viver! Sem ele, eu não estaria aqui.

À minha avó, Glória, que me acolheu como uma filha, por todo seu amor, carinho e dedicação. Por todo estudo e condições que me proporcionou. Por ter estado ao meu lado em todos os momentos, acreditando na minha capacidade, me incentivando a sonhar mais alto e comemorando comigo cada pequena vitória.

Aos meus pais, Larissa e Carlos, por todo ensinamento, motivação, sacrifício e renúncia. Por acompanharem meus passos e torcerem pela minha vitória, mesmo de longe. Suas atitudes me impulsionaram e me deram força para chegar onde estou, e, inclusive, ir muito além.

Aos meus irmãos, Carlos e Gualberto, por me apoiarem e me entenderem mesmo nos momentos de mais mau humor. Por trazer felicidade e alegria para os momentos mais difíceis.

Ao meu namorado, Walney, pelo amor, pelo carinho, pelo incentivo e, principalmente, pelo companheirismo. Por ter estado ao meu lado nos bons e maus momentos e por ter me compreendido e apoiado nas diferentes etapas dessa caminhada, inclusive por ter participado ativamente em boa parte dela, mesmo distante de sua zona de conforto.

Aos meus demais familiares, de sangue ou consideração, avós, tios e primos, que se fizeram presente, física ou emocionalmente.

Aos professores do PROFMAT da UFPB, que contribuíram, de alguma forma, com a minha formação acadêmica, sempre pacientes, compreensivos e prestativos. Em especial, ao professor Dr. Flank Bezerra, que se fez presente e aceitou me orientar nesse momento tão marcante da minha vida acadêmica. Também às professoras Dra. Miriam da Silva Pereira e Dra. Silvia Sastre-Gómez que aceitaram participar da minha banca examinadora.

Aos meus professores da educação básica, que me ajudaram a chegar onde estou. Em especial, à memória de Francinaldo, que me inspirou como pessoa e como profissional, pelo carinho e pelo exemplo.

Aos meus colegas do Trambico B, turma com a qual concluí meu Ensino Médio e na qual construí laços e vivi momentos que levarei por toda a minha vida. Em especial à Juliana Moreira, que sempre se fez presente, pelo seu carinho, companheirismo, compreensão e por sempre me encorajar a seguir os meus sonhos.

Aos meus colegas de graduação, em especial, Pâmalla, Felipe, Mariana, Renata, Carla, Cássio, Danielle e Magaive, que me ajudaram a estudar, a me estabilizar e a não desistir.

Aos meus colegas do mestrado, que se tornaram uma segunda família, sempre se apoiando, incentivando e tornando leve uma caminhada que muitas vezes estava tão pesada. Em especial, Angelo, LG e JB, que sacrificaram tantos finais de semana, na busca por um objetivo maior e comum.

E, por fim, à EEEFM João José da Costa, à EEEFM Tenente Lucena e aos Colégios IE, ISO e Via Medicina, pela oportunidade de mostrar e aprimorar meus conhecimentos. Em especial à Liana e Honório que me deram a oportunidade e confiaram na minha competência, me fazendo acreditar na minha capacidade. Além, também, de todos os alunos que contribuem e os que já contribuíram para a minha formação profissional e psicológica.

# Resumo

Apresentaremos neste trabalho uma proposta metodológica para o ensino da Análise Combinatória, baseada na Aprendizagem Baseada em Problemas (ABProb), na procura por um método mais eficiente para a sua aprendizagem. Para este fim, iniciaremos com uma breve retrospectiva histórica do Ensino Médio e sua padronização no Brasil, com a apresentação de algumas das expectativas de sua nova proposta e de algumas metodologias ativas, com foco em seus ideais. Daremos ênfase a ABProb, motivados pelas recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, da Base Nacional Comum Curricular e do atual modelo de exame para acesso ao Ensino Superior de nível nacional, Exame Nacional do Ensino Médio, que, de certo modo, influencia o processo de ensino e aprendizagem do Ensino Médio. Além disso, com o objetivo de preparar o leitor para um melhor entendimento da nossa proposta, apresentaremos um pouco da Análise Combinatória estudada no Ensino Médio, escolhida por ser um conteúdo de fácil contextualização e problematização, além do baixo índice de desempenho apresentado pelos alunos em relação à ela.

**Palavras-Chave:** Ensino Médio; Metodologias Ativas; Aprendizagem Baseada em Problemas; ABProb; ABP; Análise Combinatória.

# Abstract

In this paper we will present a methodological proposal for the teaching of Combinatorial Analysis, based on Problem Based Learning (ABProb), in search of a more efficient method for its learning.  To this end, we will start with a brief historical background of high school and its standardization in Brazil, presenting some of the expectations of its new proposal and some active methodologies, focusing on its ideals.  We will emphasize ABProb, motivated by the recommendations of the National Curriculum Parameters, the Common National Curriculum Base and the current exam model for access to higher education at the national level, National High School Examination, which, in a way, influences the high school teaching and learning process. In addition, in order to prepare the reader for a better understanding of our proposal, we will present a little of the Combinatorial Analysis studied in High School, chosen for being an easily contextualized and problematized content, besides the low performance index presented by the students in relation to it.

**Key-words:** High school; Active Methodologies; Problem Based Learning; ABProb; PBL; Combinatorial Analysis.

# Lista de Abreviaturas e Siglas

| | |
|---|---|
| **ABProb** | Aprendizagem Baseada em Problemas |
| **ABProj** | Aprendizagem Baseada em Projetos |
| **BNCC** | Base Nacional Curricular Comum |
| **Enem** | Exame Nacional do Ensino Médio |
| **FGV** | Fundação Getúlio Vargas |
| **IDEB** | Índice de Desenvolvimento da Educação Básica |
| **INEP** | Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira |
| **LDB** | Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional |
| **MEC** | Ministério da Educação e Cultura |
| **PCN** | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| **PFC** | Princípio Fundamental da Contagem |
| **PNE** | Plano Nacional da Educação |
| **TBL** | Team Based Learning |

# Lista de Figuras

# Lista de Quadros

# Lista de Tabelas

# Sumário

# Introdução

Uma aprendizagem significativa, uma mente capaz de atrelar os conteúdos vistos em sala de aula com a problematização cotidiana enfrentada em seu dia-a-dia, seja no meio profissional, pessoal ou acadêmico, é o que se espera dos estudantes do atual Ensino Médio. Mas eles estão sendo preparados para isto? Em caso positivo, como isto vêm acontecendo? E o que tem sido, de fato, significativo para eles? Perguntas como estas têm gerado cada vez mais estudos e ganhado cada vez mais espaço nos contextos educacionais, enfatizando a necessidade e a priorização de metodologias mais ativas no processo de ensino-aprendizagem.

De fato, a sociedade tem passado por muitas mudanças, em todos os aspectos e com o ensino não é diferente. Em meio a facilidade de acesso a informação, os jovens vêm fontes de conhecimento por todos os lados, o que corrobora para que o velho e monótono método tradicional seja cada vez menos atrativo. As pessoas não estão mais acostumadas a métodos engessados e clássicos de aprendizagem. O dinamismo se mostra presente em praticamente tudo o que o indivíduo realiza e não deveria ser diferente nas instituições de ensino. Assim, movimentos como a Cultura Maker ("Vai lá e faz"), o método PLB (Problem Based Learning, em português, Aprendizagem Baseada em Problemas), a Sala de Aula Invertida e outras metodologias ativas, isto é, que trazem o estudante como protagonista de sua aprendizagem, têm sido foco dos profissionais da educação atual que buscam uma aprendizagem menos mecânica e mais significativa.

O ensino por meio da resolução de problemas tem sido uma estratégia cada vez mais utilizada nas salas de aula, de todos os níveis de educação, pois, além da promoção de um conhecimento específico, impulsiona o desenvolvimento de competências e habilidades, que contribuem para uma aprendizagem integrada, interdisciplinar e, mais facilmente, contextualizada. A respeito do instrumento desta abordagem, Pólya nos diz:

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus meios, experimenta o sentimento da autoconfiança e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda vida, a sua marca na mente e no caráter.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998),

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicacão e de argumentação.

Tendo em vista que o aprendizado com ponto de partida comum e cotidiano para os alunos traz grande contribuição para a aprendizagem significativa, facilitando a interdisciplinaridade e aproximando a escola do mundo real, este trabalho tem por objetivo geral uma proposta metodológica, para o ensino de Análise Combinatória, baseada em problemas. Para isto, apresentaremos a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABProb) como um método de aprendizagem capaz de motivar os alunos e, a partir disso, desenvolver um raciocínio combinatório. Esta metodologia tem conquistado cada vez mais espaço na literatura brasileira, sendo, inclusive, tema de muitas dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) recentes, como são exemplos: Couto (2019), Relly (2019), Ribeiro (2019) e Santos (2019).

Aproveitamos o momento para ressaltar, caro leitor, que apesar de Análise Combinatória, Permutação, Arranjo, e outros termos chave para este trabalho não serem nomes próprios, os apresentaremos com inicial maiúscula para que sejam, assim, enfatizados no decorrer do texto.

Para atingirmos o objetivo mencionado, começaremos contando um pouco sobre a história do Ensino Médio no Brasil, enfatizando feitos relevantes para constituição do que se é consagrado nos dias atuais. Apontaremos desde as primeiras tentativas de padronização do ensino a nível nacional até as mudanças sugeridas para a atual proposta de Ensino Médio, conhecida por “Novo Ensino Médio”.

Como a abordagem será feita em relação a um conteúdo especifico da Matemática, pretendemos falar um pouco sobre a Matemática Discreta e a importância da Análise Combinatória dentro dela, além de sua retrospectiva e como tem sido abordada no Ensino Médio, enfatizando o atual exame de acesso ao Ensino Superior de nível nacional, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

No primeiro capítulo faremos uma breve retrospectiva do Ensino Médio no Brasil, trazendo as principais legislações que nortearam a educação desde a época da proclamação da República, passando pelas reformas educacionais do começo do século XX, pela era Vargas e por fim após a redemocratização (pós Constituição de 1988) até os dias atuais, buscando observar as principais mudanças ocorridas, a fim de destacar sua evolução, tanto na forma de tratar o estudante como nas abordagens dos conteúdos. Destacadas as mudanças e evoluções, também abordaremos aspectos gerais sobre as metodologias ativas de aprendizagem, dando uma atenção especial a ABProb, tendo em vista o objetivo deste trabalho.

O capítulo dois cuidará da Matemática Discreta, a luz da sua história e uma busca por sua definição. De igual forma serão abordados tais aspectos a respeito da Análise Combinatória, englobando, com relação a esta última, as principais definições matemáticas abordadas no Ensino Médio. Serão explanados conceitos e exemplos sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), Permutações (simples, com repetições e circular), Arranjos (simples e com repetição) e Combinação (simples e com repetição).

Em correlação com o capítulo dois, o capítulo três consistirá em uma análise das questões envolvendo Análise Combinatória no Enem, a fim de verificarmos como ela tem sido abordada nesse nível da educação. Faremos uma breve analise de cada questão que envolveu a temática desde o ano de 2009 até 2018, abordando aspectos como o nível de dificuldade, o índice de acertos e o que o aluno deveria precisava ter em sua bagagem de conhecimento para resolve-la, apresentando uma sugestão de solução.

O quarto e último capítulo trará uma proposta de ensino para a Análise Combinatória no Ensino Médio, baseada em resoluções de problemas. Para isto, levantaremos algumas sugestões de problemas envolvendo os principais conceitos da temática com prováveis soluções por parte dos alunos. As soluções apresentadas foram baseadas no teste diagnóstico que realizamos com alunos da 1ª série do Ensino Médio e que também fora apresentado neste capítulo.

# Capítulo 1

## O Ensino Médio: levantando a problemática

A divisão do sistema educacional brasileiro como é atualmente conhecido é, de certa forma, recente, contando com pouco mais de duas décadas. Ao se traçar um breve histórico a respeito da educação no Brasil, é fácil perceber que por muito tempo ela foi voltada para a elite. Um marco importante ocorreu com a vinda da família real portuguesa, em 1808, pois é a partir desse momento que passa a existir a preocupação do Estado com a formação daqueles que aqui viviam e que iriam ajudar o governo português na administração do território nacional.

> Posteriormente à independência do Brasil, já no período regencial, mais especificamente no ano de 1834, foi criado um Ato Adicional que dava às províncias o direito de regular sobre instrução pública e estabelecimentos próprios a promovê-las. Com isso, surgiram os liceus que tinham como intenção munir os seus discentes dos conhecimentos básicos para a admissão no ensino superior. (SANTOS, 2010, p.3)

O Estado da Paraíba, na época província, foi um dos primeiros a ter um Liceu, como ainda se é bem destacado por Santos ao lembrar que “os primeiros estabelecimentos públicos de ensino foram o Ateneu, em 1835 no Rio Grande do Norte, e os Liceus da Bahia e o da Paraíba, ambos em 1836” (SANTOS, 2010, p.4). Embora nos anos que se seguiram tenham ocorrido diversos feitos históricos a respeito do sistema educacional, focaremos de forma sintética em alguns fatos mais relevantes para o embasamento deste trabalho.

A primeira Constituição de 1891 não se preocupou com a educação. No decorrer do seu texto, pouco se encontra sobre o tema, quase nada. Até 1925 foram realizadas 5 reformas no sistema educacional, sendo elas conhecidas por Benjamim Constat (1890), Epitácio Pessoa (1901), Rivadávia Correia (1911), Carlos Maximiliano (1915) e João Luís Alves (1925), em homenagem aos Ministros da Educação atuantes da época e que as comandaram. O que elas têm em comum é o foco da escola secundarista (como era chamado o ensino médio) voltado para o vestibular e posterior ingresso no ensino superior, como é possível perceber de texto extraído da reforma Carlos Maximiliano: “Ministra aos estudantes sólida instrução fundamental, habilitados a prestar, em qualquer academia, rigoroso exame vestibular.”. (Centro de Pesquisa e Documentação de História Contemporânea do Brasil – FGV, p.6).

Como explica Rodrigo Azevedo, jornalista independente, em matéria especial para o jornal Gazeta do Povo, “foi só após o governo varguista[1] que a educação apareceu na Constituição como ‘um direito de todos’. No fim da década de 1940, as escolas secundárias têm forte expansão e, aos poucos, vão perdendo seu caráter elitista, embora o acesso ainda não fosse de todos.".

É com a reforma chamada de Gustavo Capanema (Ministro da Educação e Saúde da época), em 1942, instrumentalizada através da Lei Orgânica do Ensino Secundário (Decreto-Lei nº 4.244), que “nasce” a estrutura de ensino médio utilizada até hoje. Diferente do objetivo das reformas anteriores, essa não estava preocupada somente em preparar o aluno para o exame de ingresso no ensino superior, mas também na moldagem de sua personalidade. E apesar de trazer uma estrutura mínima sobre o ensino primário e secundário, ela não foi explicita sobre o que o aluno devia apresentar após passar por esses ciclos de aprendizagem, como é possível ver no próprio documento da reforma.

> No curso ginasial, a matemática e as ciências naturais serão estudadas de modo elementar. Seria antipedagógico sobrecarregar os alunos, nessa primeira fase dos estudos secundários, com estudos científicos aprofundados. Posteriormente, no curso clássico e no curso científico, far-se-á das ciências estudo mais acurado. Terá o estudo da matemática, da física, da química e da biologia, no curso científico, maior desenvolvimento e profundidade do que no curso clássico. Não deverá, porém, esse estudo ser tão abundante e minucioso no curso científico que possa tornar-se inconveniente demasia, nem de tal modo reduzido no curso clássico, que não baste à formação de uma cultura científica adequada aos fins do ensino secundário. (Brasil, 1942)

Esta lei foi substituída após 19 anos, no ano de 1961, com o implemento da primeira Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB), quando o Estado finalmente traz disciplinas obrigatórias a todos os cursos de ensino do país.

## 1.1. A busca por uma padronização do Ensino Médio

Como mencionado anteriormente, a reforma Capanema vigorou por 19 anos (1942-1961), até que a primeira LDB foi aprovada e entrou em vigor. Entre suas novidades, estão a

[1] Expressão utilizada para o governo de Getúlio Vargas (1930-1945).

obrigatoriedade de algumas disciplinas a serem lecionadas nos estabelecimentos educacionais em atividade nesse período, o que mostrava objetivar um padrão nacional, conforme podemos observar a seguir.

> Art. 35. Em cada ciclo haverá disciplinas e práticas educativas, obrigatórias e optativas. § 1º Ao Conselho Federal de Educação compete indicar, para todos os sistemas de ensino médio, até cinco disciplinas obrigatórias, cabendo aos conselhos estaduais de educação completar o seu número e relacionar as de caráter optativo que podem ser adotadas pelos estabelecimentos de ensino. (Brasil, 1961)

A segunda versão da LDB, editada em 1971, adotou uma divisão mais próxima da contemporânea, com a criação das expressões primeiro e segundo graus. O primeiro, como a própria legislação definia, era destinado à formação da criança e do pré-adolescente e o segundo "à formação integral do adolescente" (Brasil, 1971). Repetindo a legislação anterior, a LDB dispõe em seu texto que disciplinas obrigatórias continuaram a existir:

> Art. 4º Os currículos do ensino de 1º e 2º graus terão um núcleo comum, obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada para atender, conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades locais, aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos alunos. (Brasil, 1971)

A ideia de uniformização através de uma base curricular nacional ganha força com a Constituição de 1988, notadamente em seu artigo 210.

> Art. 210. Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. (Brasil, 1988)

É a primeira vez que uma Constituição prevê uma base curricular comum. E com a terceira versão da LDB, em 1996, chega-se as denominações utilizadas atualmente: Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Além da nova nomenclatura, com o objetivo de regulamentar tal previsão, a LDB de 1996, em seu artigo 26 trouxe diretrizes a respeito da base curricular nacional, como por exemplo, em seu parágrafo 1° de que os currículos da educação básica "devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil. " (Brasil, 1996)

Ocorre que, apesar da regulamentação de uma base curricular nacional mais especifica e com um enfoque mais abrangente do que a trazida pelas legislações anteriores, esta ainda se dava de forma genérica, sem uma forma de instrumentalização real. Para preencher essa lacuna até então existente, no ano 2000 foram lançados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio, auxiliando a previsão da LDB sobre a base curricular nacional. Mas apenas em 2015 é lançada a primeira versão da Base Curricular Nacional, isto é, somente depois de 27 anos após a promulgação da Constituição é que foi divulgada pelo Estado Brasileiro a primeira Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

A BNCC de 2015 apresenta com mais especificidade o que se espera de um aluno do Ensino Médio sobre as diversas matérias que compõem a grade curricular, entre elas a Matemática, e já esmiúça conteúdos e objetivos específicos para cada nível de ensino (1º, 2º e 3º ano). É possível observar a seguir, nos objetivos de aprendizagem do componente curricular Matemática no 2º ano em relação à Números e Operações, indícios da Análise Combinatória.

Figura 1: Objetivos de Aprendizagem do 2º ano na BNCC 2015.

MTMT2MOA013 Resolver e elaborar problemas de combinatória, envolvendo estratégias básicas de contagem.



Fonte: BNCC (2015)

No ano seguinte, 2016, é lançada pelo Ministério da Educação (MEC) a segunda edição da BNCC. Nessa nova edição os objetivos de aprendizagem de Matemática são organizados em cinco unidades e apresentados por unidade de conhecimento. Na unidade curricular II de Números e Operações da área de Matemática, observamos uma pequena evolução em relação aos objetivos sobre a Análise Combinatória.

Figura 2: Objetivos de Aprendizagem de Números e Funções na BNCC 2016.

(EM12MT08)
Resolver e elaborar problemas de contagem de possibilidades pelo princípio multiplicativo, incluindo aplicações da unidade probabilidade e estatística.

Fonte: BNCC (2016)

Na terceira e atual edição da BNCC, lançada no final de 2018, a divisão não é mais realizada por matéria, nem por unidades de cada área, mas sim por áreas de conhecimento e suas competências específicas. Essas áreas são: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais

Aplicadas. Além disso, os objetivos são agora tratados como Habilidades. Com relação a área de Matemática e mantendo a observação anterior em relação à Análise Combinatória, podemos perceber que, embora pequena, sua evolução continua, como é observado a seguir nas habilidades da Competência Específica 3 de Matemática e suas Tecnologias.

Figura 3: Habilidades da Competência Específica 3 de Matemática na BNCC 2018.

**(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

**(EM13MAT311)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

Fonte: BNCC (2018)

É valido ressaltar que, embora os objetivos/habilidades apresentados de cada BNCC se mostrem parecidos, os documentos oficiais na área da educação ao longo da história mudaram sua perspectiva e suas formas de abordagem em relação ao ensino e a aprendizagem, muitas vezes na tentativa de aproximar o conteúdo ministrado nas salas de aulas da sua vivencia real. Isto fez com que os planejamentos escolares e planos de aula fossem mudados gradativamente, não apenas pelas mudanças propostas pelas bases curriculares, mas também pela moldagem de um exame de nível nacional de ingresso no Ensino Superior.

## 1.2. O novo Ensino Médio

Com o objetivo de reformular o Ensino Médio no Brasil, uma alteração na LDB de 1996 foi feita no ano de 2017. Estudos mostrados pelo *site* do MEC, baseados no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) de 2017, mostraram que o ensino, de forma geral, se apresenta estagnado. Não há evolução significativa no que diz respeito ao número de alunos que frequentam a escola, o que se pretende melhorar, e é preciso aumentar o nível de aprendizagem daqueles que já frequentam.

Embora o Plano Nacional de Educação (PNE) de 2014 já estabelecesse metas com o objetivo de mudar este cenário, como é o caso da meta 3 que pretendia “Universalizar, até 2016, o atendimento escolar para toda a população de 15 (quinze) a 17 (dezessete) anos e elevar, até o final do período de vigência deste PNE, a taxa líquida de matrículas no ensino médio para 85% (oitenta e cinco por cento)” (Brasil, 2014, p.55).

Em concordância com os estudos, mais recentes, mencionados, diversos gráficos apresentados no plano mostram que o percentual de alunos que frequenta o Ensino Médio está estabilizado. Baseado em fatos como este, o Governo Federal propôs, através da Medida Provisória 746/2016, posteriormente aprovada pelo Congresso Nacional, uma reforma no Ensino Médio, que deve ser aderida por todas as instituições de ensino no país até 2022. Além disso, tais estudos também possibilitaram identificar que o modelo de ensino utilizado atualmente também contribui para o déficit de aprendizagem e a evasão escolar. Segundo material explicativo do próprio MEC "a escola de hoje é pouco interessante para o jovem" (Brasil, 2019).

Seguindo a linha de pensamento já externada pelas normas que regem a educação, a exemplo dos PCNs, PNE, BNCC, essa reforma pretende aproximar os ensinamentos da escola com o mundo "real". Não só preparar o aluno para suas experiências universitárias e/ou profissionais, mas também para sua vivência em sociedade. Porém, ao se falar em novo Ensino Médio um questionamento vem à tona: o que muda? Segundo o MEC, as mudanças centrais são as seguintes:

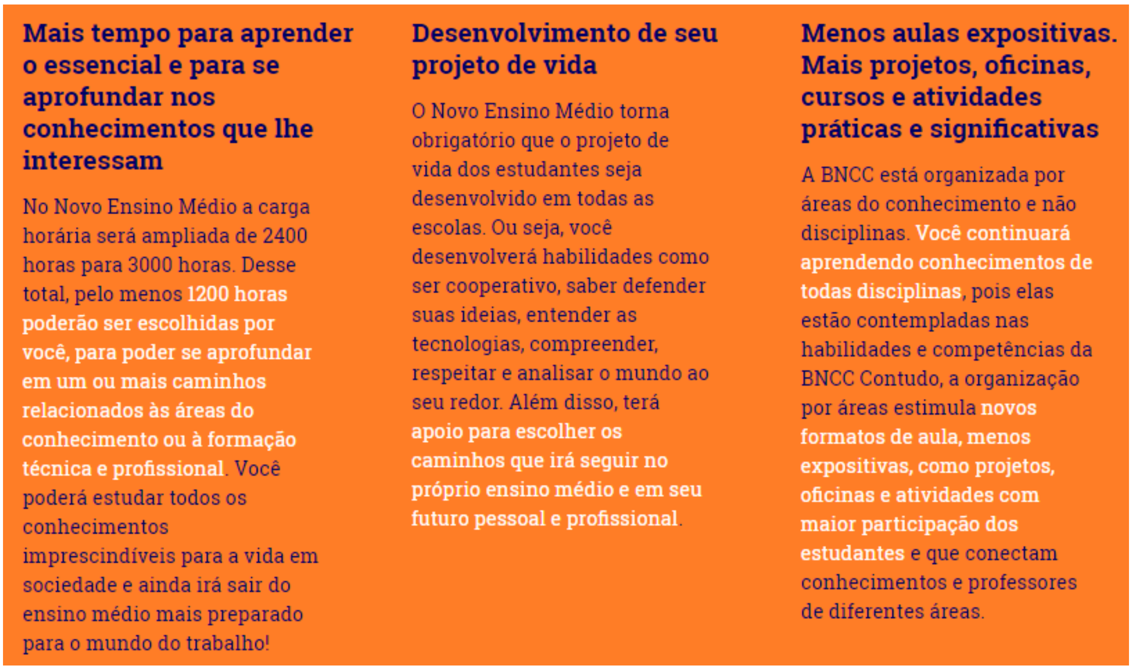
Figura 4: O que muda no novo Ensino Médio?

| Direitos iguais de aprendizagem para todos | Estudantes poderão escolher em quais conhecimentos irão se aprofundar | Mais horas de estudo |
|---|---|---|
| Todos os estudantes têm o direito de aprender o que é essencial para seguir seu caminho depois da escola, não importa onde estão estudando. **É isso que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) garante: aprendizagens comuns e obrigatórias, conectadas à competências que preparam os jovens para a vida.** A BNCC será a base para os currículos, a formação de professores e o Enem. | Além das aprendizagens comuns e obrigatórias, definidas pela Base Nacional Comum Curricular, **os estudantes poderão escolher se aprofundar naquilo que mais relaciona com seus interesses e talentos.** São os itinerários formativos, relacionados às áreas do conhecimento (Matemática, Linguagens, Ciências Humanas e Ciências da Natureza) e com a formação técnica e profissional. | Professores e estudantes **passarão mais tempo desenvolvendo as aprendizagens necessárias.** No Novo Ensino Médio, a carga horária de todas as escolas é ampliada de 2400 para 3000 horas. Além disso, o governo federal investirá até R$ 1,5 bilhão para atender cerca de 500 mil novas matrículas em escolas de tempo integral - nas quais os estudantes passam pelo menos 7 horas por dia. |

Fonte: MEC (2019)

Importante notar o destaque dado a BNCC. De fato, nesta nova proposta de Ensino Médio, a flexibilidade estará com grande presença, todavia, a BNCC deve ser levada em consideração, com conteúdos mínimos obrigatórios a serem lecionados em todos país. Sim, a flexibilidade, uma importante mudança e que pretende atrair mais os alunos é a flexibilização de matérias, ou seja, os alunos poderão escolher as matérias que possuem mais interesse ou aptidão e passar mais tempo se dedicando a elas. A lógica é simples, se o aluno passar a estudar o que mais gosta, terá mais vontade de permanecer na escola e se dedicará mais a seus estudos. As mudanças para os estudantes, trazidas e resumidas pelo próprio MEC, podem ser observadas na imagem a seguir.

Figura 5: Mudanças no Ensino Médio para os Estudantes




Fonte: MEC (2019)

Nas mudanças em relação aos professores e gestão, teremos a ampliação da carga horário mínima de 2400 horas para 3000 horas, o que possivelmente acarretará em mudanças nas estruturas físicas, a fim de as adequar para as necessidades dos estudantes que passarão mais tempo nas escolas. Os professores só precisarão trabalhar com todos os estudantes o essencial (previsto na BNCC), deixando o aprofundamento apenas para aqueles que tenham interesse em saber mais, o que provavelmente acarretará em mais rendimento e menos desistências por parte dos estudantes. Além disso, as escolas terão a possibilidade de fazer parcerias com outras escolas ou instituições, com o objetivo de diversificar o ensino. Em suma, a ideia é que escolas ou instituições próximas ofereçam itinerários diferentes, para que os estudantes tenham mais opções e busquem o que se adequa mais ao seu interesse e à sua realidade local.

Como mencionado anteriormente, e com um merecido destaque, temos o termo "provavelmente", pois as ideias metodologias quando relacionadas, em geral, ao ensino brasileiro, se mostram um pouco incompatíveis com a realidade de boa parte de seu público alvo. De fato, ao dar a opção de escolha ao estudante, alguns questionamentos vêm à tona, como: “O estudante, na faixa etária do Ensino Médio, já sabe o quer para sua vida profissional?”, “Ele já é capaz de fazer as melhores escolhas para o universo ao qual está inserido?”, “O meio ao qual está inserido não influenciará numa escolha errônea em relação a suas habilidades e competências?”, entre outros.

Para propostas mais condizentes com a realidade de boa parte do país, fatores sociais precisam ser levados em consideração, uma vez que estudantes com menos instrumentos a disposição e menos meios financeiros, se agarrarão a oportunidades mais tímidas, as quais visualize como possíveis e compatíveis a sua realidade. Isso poderá acentuar as desigualdades sociais e agravar a discrepância existente entre os cursos no Ensino Superior: alguns cursos são mais bem vistos e frequentados pela elite, sendo, em maioria, dominados por esta, como é o caso da Medicina, do Direito e de algumas Engenharias, enquanto os demais são deixados de lado e considerados para classes sociais inferiores.

Voltando a proposta do novo Ensino Médio, é valido ressaltar o trecho já destacado na Figura 5 “novos formatos de aula, menos expositivas, como projetos, oficinas e atividades com maior participação dos estudantes”. Nele, podemos verificar que se pretende fugir dos modelos tradicionais de aula, engessados, para novas metodologias empregadas pelos professores com o propósito de atrair o interesse dos alunos para a sala de aula e para os estudos. São as metodologias ativas de aprendizagem, uma das motivações para este trabalho.

## 1.3. Metodologias Ativas de Aprendizagem

Ao falar em aprendizagem ou escolas, logo se vem à cabeça um professor escrevendo ou explicando em um quadro e alunos copiando e/ou prestando atenção. Isto porque tradicionalmente ficou consagrado o método expositivo ou instrucional de aprendizagem, isto é, aquele em que os alunos são vistos como caixas em que o professor tenta depositar conteúdos. É aquela mesma e velha metodologia em que o professor expõe o conteúdo e o aluno é avaliado através de provas ou trabalhos. Os conteúdos são transmitidos da mesma forma a todos os alunos, sem levar em consideração que pessoas diferentes tendem a aprender de formas diferentes. Além disso, é um método passivo, uma vez que o aluno não possui autonomia sobre sua aprendizagem, ele apenas recebe o que o professor lhe transmite, sendo este a figura central deste cenário.

Em contraposição a este método surgem os métodos ativos, que visam a participação do aluno na aprendizagem de forma efetiva, isto é, o aluno é a figura central. Esta metodologia pode ser empregada para despertar o interesse e foco dos estudantes em relação aos estudos e, embora exista a séculos, têm ganhado força nos últimos anos devido ao avanço da tecnologia e o fácil acesso a informação, agora mais do que nunca, pois se encaixa perfeitamente na nova proposta de Ensino Médio.

Em meio ao ponto de vista abordado neste trabalho, gostaríamos de destacar o psiquiatra americano William Glasser (1925 – 2013) que publicou, em 1998, um livro chamado a Teoria da Escolha, fruto de seu estudo sobre comportamento e motivação humana. Nesta obra, ele expressa que os seres humanos contêm uma motivação interna, ainda que mínima, para a aprendizagem. A partir deste ponto de vista, ele nos diz que todos os indivíduos querem e gostam de aprender, contudo, para que esta vontade se torne evidente e o objetivo de aprendizagem seja alcançado, é necessária uma motivação externa (da instituição de ensino, do método de ensino, da aplicação e utilidade do que lhe é ensinado). Aplicando seus estudos para a educação e baseado em suas pesquisas, elaborou a seguinte pirâmide sobre o nível de aprendizagem de uma pessoa.

Figura 6: Pirâmide de Glasser


Fonte: Ceesd (2019)

Temos que o nível de aprendizagem de uma pessoa, de fato, está ligado com o método de ensino utilizado neste processo e é possível identificar, baseado na pirâmide de Glasser, que as pessoas, de forma geral, aprendem bem mais quando são ativas neste processo. E isto deve ser levado em conta pelas escolas, quanto mais o estudante for ativo no processo de aprendizagem, mais será capaz de absorver o conteúdo ministrado. Por esta, e outras razões, os métodos ativos de ensino vêm ganhando maior atenção e espaço nas escolas do país. O perfil do aluno mudou e é preciso que o perfil do professor e das metodologias, em geral, também mudem.

Giordano e Silva citando Khoeler, doutora em psicologia escolar e do desenvolvimento humano, “classificam como aprendizagem ativa aquela que exige participação intensa e dinâmica dos alunos na escrita, discussão, problematização, síntese, análise, avaliação, colaboração, abandonando a postura passiva típica das aulas tradicionais” (Giordano; Silva, p. 79, 2017). São metodologias que demandam e estimulam a participação efetiva do aluno, fornecendo contextualização e socialização do conhecimento, através de recursos como atividades em grupos e liberdade de escolhas.

Dentre as diversas metodologias ativas, selecionaremos algumas, para apresentar superficialmente. A saber, já possuímos um bom acervo na literatura brasileira sobre a temática, como o livro “Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora: Uma Abordagem Teórico-Prática” de Lilian Bacich e José Moran, importantes educadores ativistas do país, onde mais informações a respeito das metodologias podem ser encontradas.

Começaremos abordando a “Sala de Aula Invertida”, do inglês *Flipped Classroom*. Este método consiste em inverter o modelo de ensino, afim de aumentar a produtividade, a participação e o engajamento dos alunos e otimizar o tempo de aula e conhecimento do professor, que deixa de ser um expositor e passa a ser um tutor. Nele, os alunos estudariam anteriormente, por meio de seus materiais ou pesquisas, as matérias disponibilizadas pelo professor. A sala de aula na escola serviria apenas para debates, dúvidas e atividades práticas sobre o conteúdo estudado por eles. Em resumo, a inversão vem do fato de que a aula é “dada” em casa e a lição é feita em sala de aula.

Um outro método a ser citado é o da “Aprendizagem Baseada em Projetos” (ABProj), do inglês *Project Based Learning*. Essa metodologia pretende desenvolver o conhecimento dos alunos através de projetos, feito a partir de uma necessidade, indagação, desafio ou problema proposto. O objetivo deste método é provocar a aprendizagem por meio da curiosidade e criticidade dos alunos, que realizarão pesquisas, levantarão hipóteses e buscarão recursos para realização do projeto. O professor, nesse caso, atuaria de forma marginal, isto é, dizendo aos alunos o que acertaram ou erraram naquela situação.

Também temos o “Estudo de Casos” que pretende que os alunos, a partir de casos reais, aprendam o conteúdo e sejam capazes de resolver problemas parecidos caso estejam em situações semelhantes no decorrer de suas vidas. Este método oferece aos estudantes a oportunidade de direcionar sua aprendizagem, a partir de sua capacidade de resolver problemas, explorando seus conhecimentos em situações um tanto quanto complexas.

A "Aprendizagem entre Pares ou Times" (TBL), do inglês *Team Based Learning* é uma metodologia que pode ser implantada nos dois métodos anteriores. Ela consiste, como o próprio nome revela, em formar grupos de alunos para que a aprendizagem seja feita em conjunto e possa haver troca de ideia/conhecimento. Umas de suas grandes vantagens, relacionada com a pirâmide de Glasser (Figura 6), é o debate e o ensinamento trocado entre pessoas, que estão entre as práticas que geram mais aprendizagem.

Temos, então, a "Aprendizagem Baseada em Problemas" (ABProb) do inglês *Problem Based Learning*, também conhecida por "Aprendizagem Baseada na Resolução de Problemas" (ABRP). Este tipo de aprendizagem possui enfoque maior na resolução de situações-problema teóricas. Não confunda com a ABProj. Embora elas tenham vários pontos em comum, enquanto na ABProj os alunos têm a liberdade de escolha no tema de seu projeto, que geralmente foge aos pressupostos da disciplina, na ABProb os temas e problemas geralmente são escolhidos pelo professor e seus objetivos e conteúdos não tendem a fugir da disciplina ou curso ministrado por este. Além disso, na ABProj as soluções levam demasiado tempo para serem atingidas, enquanto na ABProb as soluções aos problemas são mais imediativas.

Outros métodos de ensino também têm ganhado força, como: metodologia STEAM, acrônimo em inglês para as disciplinas: *Science, Technology, Engineering, Arts e Mathematics*, cujo objetivo é a formação integrada, interdisciplinar, também baseada em projetos; Cultura *Maker*, da filosofia "*Do It Yourself"* (Faça Você Mesmo), cuja proposta é de que as pessoas tornem reais suas próprias ideias e que, com uma pequena adaptação, pode tornar a escola um ambiente mais atrativo e produtivo; *Design Thinking,* que utiliza a forma de pensar dos *designers* para solucionar problemas de forma criativa e inovadora; Ensino Híbrido, que tem tido mais espaço nas salas de aula brasileiras por utilizar meios tecnológicos em sua proposta de mesclar os ensinos on-line e off-line; entre outros.

Lembrando que a motivação, e característica predominante destes métodos, é despertar maior interesse e interação nos alunos para uma melhor formação acadêmica e cidadã. Quando o aluno é o ponto central e está intimamente ligado ao processo de aprendizagem, este tende a ser tornar mais satisfatório, interessante e eficiente. Também é válido lembrar que a tecnologia pode ser uma aliada fundamental para estimular os estudantes em relação aos estudos e suas interações, desenvolvendo a convivência social, que o mal uso dela pode ocasionar. Os prós e contras de cada uma das metodologias não foram abordados com ênfase pois o intuito não é estuda-las, como um todo, mas sim fazer menção a seus ideais e propostas. Além disso, os métodos não precisam ser vistos de forma isolada. São propostas, que podem ser mescladas e reformuladas, na busca por uma metodologia mais eficiente e autossuficiente, mediante a realidade de cada professor.

## 1.4. Aprendizagem Baseada em Problemas (ABProb)

A priorização deste método na abordagem sugerida por este trabalho segue do fato de que a resolução de problemas é uma ferramenta fundamental, e até inevitável em conteúdos como Análise Combinatória, na aprendizagem matemática. Embora a ABProb, assim como os demais métodos citados, tenha ganhado força nos últimos anos, este tipo de metodologia de ensino não é novo. Conforme Barbosa e Moura:

> A ideia de trabalhar com problemas como meio para ensinar e aprender é bem antiga. É conhecida a história do filósofo Confúcio (500 a.C.), que só ajudava a seus seguidores na resposta a algum problema ou questão depois que eles tivessem feito algum esforço próprio na busca da solução. (Barbosa; Moura, 2013, p. 57)

Podem ser citados vários educadores que contribuíram para desenvolvimento desta metodologia ao longo do tempo, mas o nome do filósofo e pedagogo americano Jonh Dewey é um dos mais importantes.

> A Pedagogia Ativa ou Pedagogia da Ação, de Dewey, propõe que a aprendizagem deve partir de problemas ou situações que propiciam dúvidas ou descontentamento intelectual, pois os problemas surgem das experiências reais que são problematizadas e estimulam a cognição para mobilizar práticas de investigação e resolução criativa dos problemas (Souza; Dourado citando Cambi, 2015, p.185).

O método ABProb foi aplicado de forma significativa pela primeira vez em 1969, na Universidade de McMaster, no Canadá, especificamente no curso de Medicina. Após a obtenção de resultados satisfatórios, ele passou a ser aplicado em universidades dos EUA e da Europa. Mas o que é o método ABProb? Como aplica-lo? Barbosa e Moura complementam sua fala anterior entrando numa conceituação desta metodologia:

> Esse método de ensino fundamenta-se no uso contextualizado de uma situação problema para o aprendizado autodirigido. Enquanto que nos métodos convencionais o objetivo é a transmissão do conhecimento centrada no professor, em conteúdos disciplinares, na ABProb, o aprendizado passa a ser centrado no aluno, que deixa de ser um receptor passivo da informação para ser agente ativo por seu aprendizado. Nesse contexto, o professor atua como orientador ou facilitador nos grupos de trabalho

> ou estudo, nos quais a interação entre professor-aluno é muito mais intensa do que em aulas puramente expositivas. (Barbosa; Moura, p. 58, 2013)

Em concordância e em resumo, Souza e Dourado citando Lambros[2] trazem o conceito de ABProb como "é um método de ensino que se baseia na utilização de problemas como ponto inicial para adquirir novos conhecimentos" (Souza; Dourado, p. 184, 2015). É a aprendizagem por meio da busca, da curiosidade, da capacidade de lidar com situações-problema, julgando e comparando possíveis soluções, na intenção de encontrar a melhor, mais rápida e eficiente.

Na ABProb, como nas demais metodologias ativas, o aluno é o centro da aprendizagem. Entretanto, para que este método atinja seus objetivos, é preciso que o professor seja capacitado. O docente não se limitará a preparar aulas e passar conteúdos, é preciso ir além. De fato, até o planejamento da aula deve ser alterado, pois não se deve planejar o que vai ser ensinado, mas sim o que se pretende que seja aprendido. O professor deve, ainda segundo Barbosa e Moura, "mediar discussões; atuar para manter grupos de alunos focados em um problema ou questão específica; motivar alunos a se envolverem com a busca de solução; estimular o uso da função de pensar, observar, raciocinar e entender" (Barbosa; Moura, 2013, p. 60).

Nesta concepção é importante ter clara a definição sobre o que é problema, sobretudo o que é um problema matemático. A definição de problema pode ser simples, mas diferente, dependendo do ponto de vista de cada um, como nos lembra Dante que "um problema para um indivíduo imerso em determinado contexto, com determinados conhecimentos, experiências e expectativas, não o é para outro" (Dante, 2011, p. 9).

Começando pelo termo "problema", podemos defini-lo como algo que requer uma solução, um obstáculo a ser superado. Este é um conceito habitual, mas ainda válido para o campo educacional. No entanto, ao entrar neste campo, devemos ter cuidado com a confusão, bem frequente, entre os termos problema e exercício.

Como o próprio nome já diz, um exercício serve para exercitar, isto é, colocar em prática algo que já lhe fora apresentado anteriormente. É uma aplicação do conhecimento, uma espécie de adestramento de alguma habilidade, por meio da aplicação de um método que já lhe fora ensinado ou que lhe é conhecido. Em contrapartida, um problema envolve um processo mais criativo, uma contextualização, uma aplicação mais próxima da realidade do estudante. São

[2] Diretora do Centro de Excelência para Pesquisa, Ensino e Aprendizagem da Escola de Medicina da Wake Forest University. É consultora de escolas de ensino fundamental e médio e especialista na criação e implementação de programas de aprendizagem baseados em problemas.

desafios, questões que aguçam a busca pelo conhecimento na tentativa de lhe encontrar uma solução. E nesta tentativa, o estudante se encontra em um processo de invenção, de criação, de desenvolvimento de algo novo, pelo menos para ele naquele momento.

Ainda complementa Dante, citando Lester que “agora já podemos dar uma definição de problema que é consensual entre os educadores matemáticos: ‘problema é uma situação que um indivíduo ou grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução’ ” (Dante, 2011, p. 9). Já o PCN define um problema matemático como “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la” (Brasil, 1997, p. 33). E no que diz respeito a Matemática, ainda reforça:

> A situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, idéias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; (...) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (Brasil, 1998, p. 47)

Como já mencionado, a ABProb difere dos métodos tradicionais, a exemplo do método expositivo, por ir além da repetição e memorização. Ela busca que o aluno seja capaz de aplicar o conteúdo ministrado em um contexto prático, fazendo com que o estudante fique mais motivado, uma vez que passa a enxergar com mais facilidade o proposito daquele conteúdo em sua vida profissional ou pessoal. A partir do que aprendeu em sala de aula ele poderá resolver problemas cotidianos que lhe surjam. Dante ainda reforça que “um dos principais objetivos do ensino de matemática é fazer o aluno pensar produtivamente e, para isso, nada melhor que apresentar situações-problema que o envolvam, o desafiem e o motivem a querer resolvê-las” (Dante, 2011, p. 12).

Além disso, a aplicação da ABProb também pode colaborar com a interação social dentro da sala de aula. O professor, ao aplicar este método, poderá estabelecer debates entre as soluções cabíveis para determinado problema, poderá desenvolver a habilidade de argumentação, de trabalho em grupo, de análise de pensamentos, entre outras. Habilidades, estas, que interferem diretamente na formação do profissional-cidadão. Colaborando na justificativa pela escolha da ABProb para o ensino da Matemática, em relação aos problemas, Pólya (1995), nos diz:

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo. (PÓLYA, 1995)

Nessa metodologia, o professor assume outros papeis além de mero expositor de conteúdo, ele passa a ser visto como um guia, um colaborador mais eficiente no processo de aprendizagem. “Nessa relação, o professor posiciona-se como um mediador, um guia que estimula os alunos a descobrir, a interpretar e a aprender” (Souza; Dourado, 2015, p. 190). Mas como proceder com este método? O que é necessário? Como a aprendizagem se desenvolve?

Adaptando-se a sugestão de Polya (1995) para a resolução de problemas descrita em quatro fases, e de acordo com Leite e Afonso (2001, p. 256) e Leite e Esteves (2005, p. 1756), em concordância com as ideias dos demais autores citados e estudados neste trabalho, a ABProb é composta por quatro etapas básicas, a saber: a *seleção do contexto*, a *formulação do problema*, a *resolução do problema* e a *síntese e avaliação do processo*.

A primeira, *seleção do contexto*, fica a cargo do professor. Geralmente, baseado nos conteúdos inerentes a sua disciplina, o professor seleciona um contexto a ser trabalhado com os estudantes. O interessante é levantar um contexto real da vida dos alunos e que seja capaz de gerar múltiplas possibilidades de problemas e questões que gerem interesse e curiosidades destes. Este contexto pode ser apresentado por ele ou através de imagens, vídeos ou gravações. Também é de grande importância que o professor selecione recursos a disponibilizar para os estudantes em sua busca por resoluções dos problemas futuros, a fim de assegurar que a informação mínima necessária para este processo estará acessível aos alunos. É de sugestão nossa ao professor de Matemática, uma leitura do livro “A Arte de Resolver Problemas” de Polya, para uma melhor preparação e entendimento das etapas abordadas neste método.

A segunda, e uma das mais relevantes no processo de aprendizagem, é a *formulação do problema* por parte dos alunos, através do contexto apresentado pelo professor, que agora passa a ter o papel apenas de orientar e esclarecer algumas dúvidas dos alunos. Mais do que a formulação, esta é a etapa onde se deve ocorrer a compreensão do problema. Ainda segundo Polya (1995) “É uma tolice responder a uma pergunta que não se tenha sido compreendida”. É neste momento que os alunos levantam questionamentos sobre o que sabem ou não sabem ou gostariam de saber a respeito do contexto e iniciam discussões em grupo, para o desenvolvimento da investigação para a resolução do problema.

A terceira etapa diz respeito a *resolução do problema* e nela, mais uma vez, o professor cumpre papel de orientador, cabendo aos alunos a competência de resolver, ou pelo menos tentar, os problemas formulados e selecionados. É nesta etapa que ocorre o processo maior de investigação dos alunos, por meio dos recursos disponibilizados pelo professor e que foram selecionados na primeira etapa. É o estabelecimento de um plano. Eles se apropriam das informações por meio de analises críticas, pesquisas de internet, discussões em grupo sobre as informações coletadas e levantam possíveis soluções.

Na quarta, e última etapa, o professor e os alunos trabalharão em conjunto para verificação da validade das soluções encontradas para os problemas propostos. O objetivo é explanar os passos necessários para a resolução do problema, a fim de verificar os conhecimentos prévios e adquiridos ao longo do processo. É um passo geralmente ausente no processo de aprendizagem, o que prejudica a importância do que se foi aprendido e pode dificultar sua associação com outros problemas.

Sobre a importância do problema num método de aprendizagem, principalmente Matemática, Dante nos diz:

> A oportunidade de usar os conceitos e procedimentos matemáticos no dia a dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à matéria, evitando questionamentos como ‘Para que serve isso?’ ou ‘Onde vou usar isso na minha vida?’ Não basta, por exemplo, saber executar mecanicamente os algoritmos das quatro operações ou as passagens na resolução de uma equação. É preciso saber como e quando usá-las convenientemente na resolução de situações-problema. (Dante, 2011, p. 13)

É importante lembrar que nesta metodologia, não é recomendável que seja utilizado o método tradicional de avaliação (prova), onde alunos repetem conhecimentos que foram expostos, de forma mecânica e memorizada. Recomenda-se que a avaliação seja feita através de um processo contínuo, utilizando outras formas de verificação a respeito da compreensão e da aplicação da temática abordada. O docente poderá avaliar seu aluno de forma qualitativa, por meio de suas interações e participações em meio ao processo de aprendizagem, ou até mesmo por meios orais, através da elaboração de trabalhos científicos, por meio de apresentações teatrais ou cinematográficas, entre outros. Também pode ser incorporada uma auto avaliação ou avaliação dos pares/grupos neste processo.

Mas embora as vantagens sejam indiscutíveis, elas não são garantias. Podemos supor o que será mais atrativo, interessante e estimulante para os alunos no processo de aprendizagem, e imaginar os passos que possivelmente serão dados por eles, mas nada será certo e universal. Além disso, para um professor ou turmas acostumadas a um método tradicional, deve-se ter uma transição lenta e cuidadosa. A respeito da temática e de uma possível transição, Dante ainda ressalta que:

> Ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio e incentivo do professor. [...] Os alunos devem ser encorajados a fazer perguntas ao professor e entre eles mesmos, quando estão trabalhando em pequenos grupos. Assim, eles vão esclarecendo os pontos fundamentais e destacando as informações importantes do problema, ou seja, vão compreendendo melhor o que o problema pede e que dados e condições possuem para resolvê-lo. (Dante, 2011, p. 22)

Para um panorama geral de comparativo entre o método tradicional mais utilizado nas salas de aula brasileiras e a ABProb, nele trazida como ABP, e como forma de resumir a metodologia apresentada, podemos observar o quadro disposto na figura abaixo, elaborado por Ribeiro (2019, p. 33).

Figura 7: Características dos métodos tradicionais e da ABP (ABProb)

| Parâmetro | Métodos Tradicionais | ABP |
|---|---|---|
| Aluno | Sujeito receptor e passivo | Sujeito ativo |
| Professor | Transmissor de conhecimento | Mediador e orientador cognitivo |
| Ambiente | Competitivo e excludente | Cooperativo e colaborativo |
| Disposição física | Alunos organizados em fileiras | Alunos organizados em equipe |
| Aprendizagem | Pela memorização, reprodução de informações, mecânica | Pelo raciocínio, descobertas, compreensiva |
| Problema | Apresentado após a teoria e uma série de exemplos | Apresentado como desafio inicial que motiva, desenvolve a criticidade e amplia conteúdos |
| Desenvolvimento do conhecimento | Processo prevalentemente individual, informativo, reprodutivo, transmitido pelo professor, apoiado pelo livro didático | Processo prevalentemente em grupo, de descobertas, investigativo, mediado pelo professor, apoiado pelas TIC's |
| Aulas | Expositivas, centradas no professor | Dialogadas, centrada no aluno |
| Metodologia | Transmissiva, conteúdos prontos, fixação de conteúdo pela repetição, promove a passividade do aluno pelo protagonismo docente | Ativa, conhecimento acumulado a serviço da construção do próprio e de novos conhecimentos, protagonismo do sujeito aprendente |
| Avaliação | Somativa, uniforme, privilegia o produto e a devolução de conteúdo específico transmitido pelo professor, que é o avaliador | Formativa, processual, privilegia a tomada de consciência por parte dos sujeitos aprendentes (autoavaliação individual e grupal) |
| Resultado | Formação de um aluno que reproduz informações, com dificuldade diante de situações novas, individualista, portanto com dificuldade de socialização e de atuar em grupo | Formação de um aluno criativo e capaz de resolver problemas, crítico e autônomo, interativo e participante, capaz de trabalhar em grupo |

Fonte: Ribeiro (2019)

Ocorre que a ABProb, assim como outras metodologias ativas, enfrenta dificuldades em alguns aspectos. O primeiro deles, como mencionado anteriormente, é a mudança. Ao transformar sua forma metodológica, uma instituição sofrerá com uma nova forma de aprendizagem, pois é natural do ser humano que a mudança lhe cause estranheza. Além das possíveis dificuldades na mudança do planejamento por parte dos professores, no início também será difícil para os alunos, principalmente para aqueles que já estão acostumados com os métodos mais tradicionais.

Mas a principal barreira a ser superada é o tempo. É preciso tempo para que os alunos se adaptem a essa nova forma de abordagem e também é preciso tempo de aula para que esse método seja bem aplicado. Diferentemente do que ocorre com o método tradicional, o tempo empregado para absorção de conteúdo é maior na ABProb. Isto porque o conteúdo é “construído” e não repassado.

Acreditamos que a ABProb seja uma metodologia mais eficiente para a aprendizagem Matemática e que seja a melhor escolha, em relação a outras metodologias, para as instituições de ensino. Pois, em comparação com as demais metodologias ativas, demanda menos investimento, pois as aulas podem ocorrer em seus espaços tradicionais e com os recursos já disponíveis, além do fato de que contará com mais adaptações (por parte dos professores e alunos) do que mudanças propriamente ditas.

# Capítulo 2

## A Análise Combinatória: como resolver os problemas?

Como é de conhecimento geral, a Matemática abrange diversos ramos com variados conteúdos. Dentre estes ramos, podemos destacar a Matemática Discreta, também conhecida como Matemática Finita ou Combinatória. A palavra Discreta, nesta situação, remete ao termo “distinta”, “diferente” e não ao seu sentido habitual. De acordo com Souza (2010),

> A Matemática Discreta pode ser contrastada com a noção clássica da Matemática Contínua, que é a matemática subjacente à maioria dos problemas de Álgebra e do Cálculo. Esses dois tópicos tipicamente usam números reais ou complexos como um domínio para suas funções. A Matemática Discreta, por contraste, é necessária para a investigação de cenários onde as funções são definidas sobre conjuntos de números discretos ou finitos tais como os inteiros positivos. (SOUZA, 2010, p. 48)

Enquanto o termo Contínuo significa sem interrupção, sem mudança brusca, o termo Discreto se refere a feitos de partes distintas. Em outras palavras, trata de objetos separados e desconectados (geometricamente) entre si. Mas ainda não há uma definição universalmente aceita para o termo “Matemática Discreta” e, mesmo conhecida por Matemática Finita, seu conjunto de objetos de estudo pode ser finito ou infinito, dentro dos conjuntos enumeráveis (Naturais, Inteiros ou Racionais). Uma vez que seu objetivo principal não é medir quantidades, mas sim realizar contagens, o termo “Matemática Finita” não se torna contraditório.

Embora ainda seja um termo pouco usado até o nível médio de educação, a Matemática Discreta ganhou força na segunda metade do século XX, sendo parte, devido a influência e o desenvolvimento de elementos computacionais. De fato, como o armazenamento nos computadores é feito e manipulado de forma discreta, o avanço da tecnologia impulsionou, concomitantemente, com seu crescimento e sua independência. Em concordância, Dossey (1991) nos diz,

> A Matemática Discreta cresceu muito da resposta das ciências matemáticas para a necessidade de uma melhor compreensão das bases combinatórias da matemática usada no desenvolvimento de algoritmos computacionais eficientes, a criação de novas abordagens para problemas de pesquisa operacionais, e os estudo das heurísticas subjacentes às abordagens de tais problemas. A existência da Matemática

> Discreta como uma área separada de estudo teve seu início nos anos 60. E, no início da década de 70, muitos textos influentes apareceram no nível superior da graduação. (Citado por SOUZA, 2010, p.47)

Ele apresenta a Matemática Discreta como a Matemática para o nosso tempo. De fato, é uma Matemática repleta de desenvolvimentos e problemas que podem ser apresentados à estudantes com poucos conhecimentos matemáticos. Isto faz com que ela contribua com o entusiasmo e traga a vitalidade da Matemática para as salas de aula de nível médio.

É válido ressaltar que o termo algoritmo, utilizado por ele na citação anterior e muito utilizado na maioria dos estudos computacionais, é definido como um conjunto de instruções precisas para executar uma computação. No entanto, ao falar de algoritmos numa tentativa de definir a Matemática Discreta não estamos pondo em ênfase as técnicas algorítmicas em si, mas sim a sua utilização para resolução de problemas e desenvolvimento de teorias.

Mas como esta Matemática se enquadra no Ensino Médio? Respondendo a esta pergunta, Dossey (1991) ainda nos diz:

> A Matemática Discreta permite aos estudantes explorarem situações-problema únicas que não são diretamente abordáveis através da escrita de uma equação ou da aplicação de uma fórmula comum. Pede-se aos estudantes que frequentemente visualizem a situação através do desenvolvimento de um modelo ou de qualquer outra forma de representação. A teoria não requer aprender um grande número de definições e teoremas, mas realmente requer uma mente afiada e inquisitiva (perspicaz e curiosa). (Citado por MENINO, 2013, p.50)

Temos, então, o ponto principal da Matemática Discreta: a resolução de problemas. E, no que diz respeito à esta área, os problemas se classificam em três amplas categorias, nomeadas de acordo com seus respectivos objetivos: problemas de existência, cujo objetivo é verificar se um dado problema admite ou não solução; problemas de contagem, que aborda problemas cujas soluções são conhecidas e que tem por objetivo verificar quantas são as possíveis soluções, isto é, fazer a contagem do número de soluções; e problemas de otimização, cujo objetivo é encontrar a melhor solução para um dado problema em particular, isto é, otimizar o processo.

De acordo com essa divisão de problemas e com a ementa de sua disciplina no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), a Matemática Discreta engloba os seguintes conteúdos: Números Naturais, Método da Indução, Progressões, Recorrências, Matemática Financeira, Análise Combinatória, Probabilidade, Médias e Princípio das Gavetas. No entanto, embora possam aparecer como um possível aprofundamento de algum problema ou justificativa de alguma proposta, conteúdos como o Método da Indução, Recorrências e Princípio das Gavetas, não possuem espaço significativo no Ensino Médio. Além disso, alguns desses conteúdos se apresentam, como um todo, desconectados entre si nas propostas da BNCC. A saber, os Números Naturais e os princípios de Análise Combinatória são categorizados em “Números e Operações” enquanto que a Probabilidade e as Médias aparecem como “Probabilidade e Estatística”.

Destes conteúdos, enfatizaremos a Análise Combinatória, escolhida por ser um conteúdo de fácil contextualização e problematização, por exigir, a princípio, apenas o domínio das operações básicas, por ser considerado um conteúdo com grau de dificuldade médio/alto pelos alunos e por termos, em particular, uma afeição e admiração maior, motivações que, quando possíveis, serão justificadas na seção seguinte. É também nesta seção que apresentaremos a forma como este conteúdo é abordado no Ensino Médio, visando um melhor entendimento para a proposta de seu ensino baseada na resolução de problemas do Capítulo 3 deste trabalho.

## 2.1. Retrospectiva sobre Análise Combinatória

Como mencionado anteriormente, a Análise Combinatória faz parte do campo da Matemática conhecido como Matemática Discreta. Sua teoria se encaixa nos problemas de contagem, tendo como princípio básico a assimilação de grandes problemas a problemas menores, mais fáceis de se analisar. Em conformidade, Pessoa e Borba (2010) citando Merayo, importante matemático espanhol, definem a Análise Combinatória como: “técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto” (Pessoa; Borba, p. 2, 2010).

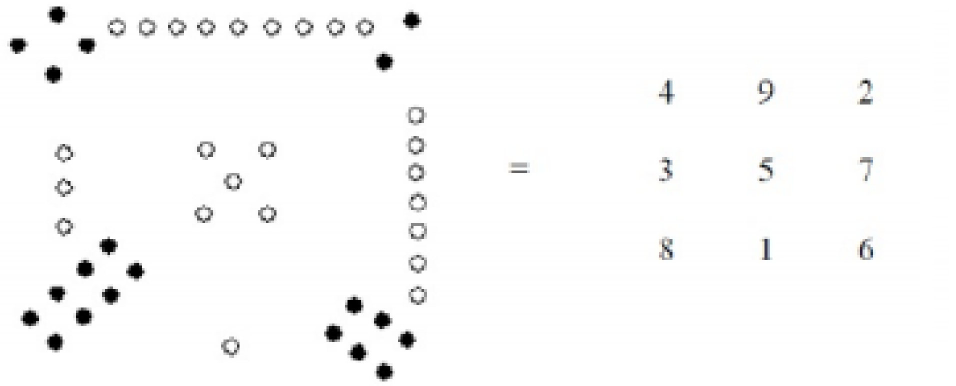
Assim como a Matemática Discreta, a Análise Combinatória também não tem uma definição universal e, embora mantenha-se sua proposta e ideal, varia de acordo com a necessidade e formalidade matemática de cada autor. No entanto, a definição proposta por Pessoa e Borba se encaixa no objetivo e proposta desse trabalho e tem uma linguagem acessível e compatível ao público do Ensino Médio, nosso foco principal. Lembrando que, como ressalta Morgado et al (2006), isto não se restringe apenas a problemas de combinações, arranjos e permutações, mas também a princípios como o da inclusão-exclusão e das gavetas, a funções geradoras, entre outros. E, por este motivo, ele nos diz que, de maneira mais geral, “a Análise

Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas” (MORGADO et al, 2006, p. 1).

Ainda como a Matemática Discreta, os primeiros indícios da Análise Combinatória são um pouco remotos e pouco se sabe da sua história como um todo. O que se sabe ao certo é que o processo de contagem se iniciou na antiguidade devido a necessidade do homem de controlar seus “pertences”, alimentos e animais, e é a evolução desse processo que contribui para um desenvolvimento combinatório. Segundo Morgado et al (2006, p. 2), o desenvolvimento $(1+x)^n$ está entre os primeiros problemas associados, de fato, a Análise Combinatória. O caso em que $n=2$, já pode ser encontrado em *Os Elementos* de Euclides, 300 anos a.C.. Os demais casos estão ligados ao triângulo de Pascal, já era conhecido em torno de 1300 por Shih-Chieh (importante matemático chinês) e antes disso pelos hindus e árabes. Sabe-se ainda que Bhaskara (1114-1185), matemático hindu conhecido pela famosa “fórmula de Bhaskara”, já sabia calcular o número de permutações, combinações e arranjo de $n$ objetos.

No entanto, segundo Wieleitner citado por Oliveira (2015, p. 19), o problema mais antigo relacionado a Análise Combinatória, é a disposição Loshu, que serviu de inspiração para os, popularmente conhecidos, Quadrados Mágicos. Eles consistem no arranjo dos números: $1, 2, 3, \dots, n^2$ em um quadrado $n \times n$, de tal forma que a soma dos elementos de cada linha, coluna ou diagonal, seja sempre a mesma. O primeiro Quadrado Mágico conhecido foi elaborado por volta de 2000 a.C. na China, obtido pela disposição Loshu, disposição inspirada em uma tartaruga (que posteriormente viria a ser considerada “celestial”) que trazia em seu casco uma forma quadrada e que sugeria algarismos de 1 a 9 que ao somados na vertical, horizontal ou diagonal, resultava sempre no número 15, o que se foi considerado “mágico”. Podemos observar abaixo a disposição Loshu e o quadrado mágico inspirado por ela.

Figura 8: Disposição Loshu e Quadrado Mágico.




Fonte: Oliveira (2015)

É um Quadrado Mágico de ordem 3, mas ao longo da história é possível encontrar instruções para construção de quadrados de outras ordens. De fato, eles ganharam espaço e chamaram a atenção dos matemáticos não apenas pelas suas propriedades "místicas" e misteriosas, mas pelas combinações numéricas necessárias para a construção de tal objeto. Embora outros problemas e curiosidades envolvendo raciocínio combinatório tenham aparecido ao longo da história, é mais fácil encontramos que a Análise Combinatória teve sua origem nos jogos de azar, isto ocorre porque boa parte de seu desenvolvimento na história se deu pela necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades.

De fato, muitos matemáticos continuaram seus estudos sobre combinatória no desenvolvimento da teoria das probabilidades. Podemos mencionar: Gerolamo Cardano (1501-1576), que além de matemático era um apreciador assumido dos jogos de apostas, fazendo com que dedicasse boa parte de seus estudos ao desenvolvimento técnicas de contagem e combinatória que contribuíssem com seus estudos sobre probabilidade; Galileu Galilei (1564-1642) também analisou problemas sobre jogos de azar, levantando questionamentos e curiosidades, como por exemplo o porquê da soma dez aparecer tão frequentemente quando se jogam três dados distintos; Pierre Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662) deram partida na teoria das probabilidades, eles realizaram diversos cálculos combinatórios em meio a suas investigações e resoluções de problemas probabilísticos; segundo Souza (2010, p. 73) outros conhecidos matemáticos que também colaboraram com a evolução da Análise Combinatória em meio ao desenvolvimento da teoria das probabilidades foram: Gottfried Wilhellm Leibniz (1646-1716), Jacques Bernoulli (1654-1705) , Abraham de Moivre (1667-1754), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Lagrange (1736-1813), Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Henri Poincaré (1854-1912), dentre outros.

Baseados nesta breve retrospectiva histórica é possível perceber que a Análise Combinatória teve boa parte de sua evolução vinculada a outras teorias. Isto fez com que aos poucos ela fosse considerada como uma coadjuvante no processo de ensino-aprendizagem. Sob esta perspectiva, Pessoa e Borba (2010) ressaltam sua importância nos dias de hoje, o que serve de justificativa e motivação aos alunos que estudam e professores que ministram tal conteúdo.

> A utilidade da Análise Combinatória vai além da Matemática Teórica e dos trabalhos em sala de aula. (...) ao longo do tempo a Análise Combinatória sofreu intenso desenvolvimento e hoje seus métodos são aplicados em diversas áreas como no cálculo das probabilidades, em problemas de transporte, de confecção de horários, de elaboração de planos de produção, de programação linear, de estatística, de teoria da informação, de biologia molecular, de economia, de lógica, etc. (PESSOA; BORBA, 2010, p. 2)

Assim, embora a Análise Combinatória tenha sua origem vinculada a problemas de jogos de azar, esta não é sua ocupação exclusiva. Ela aparece em diversas áreas e é constantemente utilizada para contagem de possibilidades de eventos cotidianos, o que torna seu conteúdo de fácil contextualização e problematização, alvo interessante para a ABProb, pois, uma vez que a matéria está intimamente ligada com situações do cotidiano, se torna mais fácil a criação de situações-problema envolvendo a temática e, consequentemente, despertando maior motivação nos alunos em estuda-la. Mas há necessidade de intervenção na metodologia de ensino de um conteúdo tão cotidiano e aparentemente simples?

E um estudo realizado por Oliveira e Santana (2013), com alunos da 2ª série do Ensino Médio, num total de 42 estudantes com faixa etária dos 16 aos 19 anos, envolvendo 5 situações-problema sobre Análise Combinatória, os resultados foram negativamente surpreendentes. Esses resultados foram analisados de duas formas: pela quantidade de acertos e erros no geral, que constam no que as autoras chamam de “Figura 1” e a quantidade de acertos e erros por situação proposta, que elas denotaram por “Tabela 1” e podem ser observados na figura a seguir. É válido ressaltar que todas as situações-problema foram baseadas no Princípio Fundamental da Contagem, a saber o Princípio Multiplicativo, e elas podem ser encontradas no Anexo A. Segundo suas considerações e conforme é possível observar na figura abaixo, o percentual de acertos foi menor que 30%, o que nos dá indícios de que o conteúdo foi pouco trabalhado ou ainda não trabalhado pelos alunos. De qualquer modo, foi um resultado inesperado às autoras por se tratar de situações-problema envolvendo apenas operações básicas.

Figura 9: Resultados obtidos por Oliveira e Santana (2013).

Figura 1- Desempenho geral dos estudantes nas situações-problema

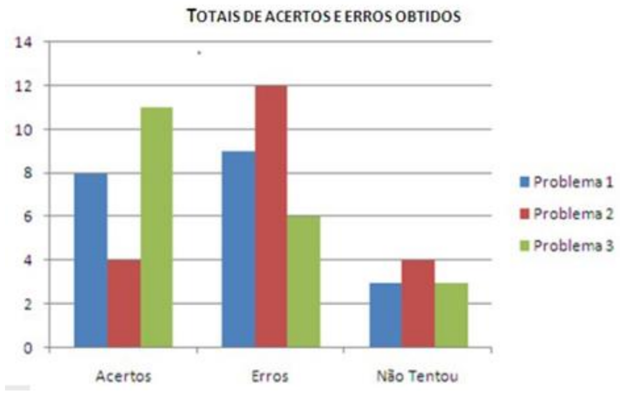

Tabela 1- Desempenho dos estudantes em cada situação-problema

| **Situação** | S1 | S2 | S3 | S4 | S5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Percentual de acerto (%)** | 38,1 | 23,8 | 54,8 | 9,5 | 19,0 |

Fonte: Oliveira e Santana (2013)

Em conformidade, estudo realizado por Oliveira e Lins (2016), também com a aplicação de situações-problema que podem ser encontradas no Anexo B, obteve o resultado a seguir.

Figura 10: Resultados obtidos por Oliveira e Lins (2016).

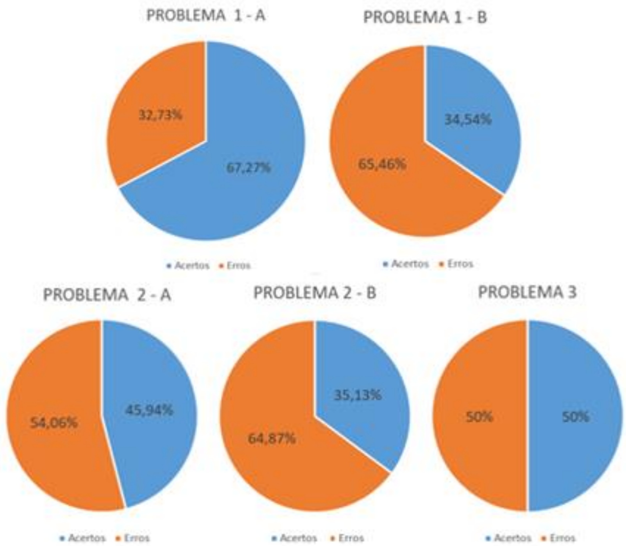



Fonte: Oliveira e Lins (2016)

O estudo agora foi realizado com 20 alunos da 3ª série do Ensino Médio, e lhes fora apresentado uma figura que facilitava a resolução do primeiro problema e que poderia ser utilizada nos demais problemas. Mesmo assim, o índice de acertos foi 35% e, quando analisadas separadamente as situações, pode subir para 55%, estando ainda bem abaixo do esperado.

Baseados em nossas vivências em sala de aula, já esperávamos um rendimento baixo em relação à Análise Combinatória. Mas com o intuito de formalizar esse sentimento, também realizamos alguns testes diagnósticos com turmas diferentes. Em azul, temos o percentual de acertos e em laranja, o de erros.

Figura 11: Resultados obtidos em nosso teste diagnóstico.




Fonte: Elaboração própria.

Os problemas, disponíveis em nosso teste diagnóstico (seção 4.1), foram propostas de modo a conduzir o raciocínio combinatório entre os estudantes, o que foi conseguido com uma pequena parcela destes. Foram propostos a 6 turmas distintas de 1ª Série do Ensino Médio. O objetivo é que eles ainda não tivessem trabalhado Análise Combinatória, para verificar a capacidade de resolver problemas e as habilidades trazidas por estes. A primeira questão envolvia dois questionamentos, o primeiro (A) era simples e fácil de se escrever todos os casos, tanto que a maioria dos estudantes acertou, enquanto o segundo (B) aumentava o número de casos, aumentando também sua dificuldade e o índice de erros. O mesmo ocorre com a segunda questão. Embora os problemas pareçam distintos, todos envolvem o mesmo raciocínio e tratam do Princípio Fundamental da Contagem.

Mesmo os percentuais variando entre as pesquisas apresentadas, todas mostram uma dificuldade de interpretação e resolução dos problemas por parte dos estudantes. Embora os problemas envolvessem Análise Combinatória, levantam propostas que envolvem única e exclusivamente as operações básicas de Adição e Multiplicação e cuja problematização já é trazida por alguns professores do Ensino Fundamental na resolução de problemas no Campo Multiplicativo.

É fato, então, que o ensino-aprendizagem a respeito da Análise Combinatória, assim como outros conteúdos que não entrarão em questão, tem deixado a desejar em algum aspecto. E é uma das principais motivações para uma proposta de ensino e responde à questão levantada anteriormente sobre a necessidade de intervenção na metodologia de ensino da Análise Combinatória.

Estudos de Barbel Inhelder e Jean Piaget, psicólogos suíços conhecidos por seus estudos sobre como crianças adquirem conhecimento e sua evolução ao longo da idade, podem levar a conclusão que o desenvolvimento do raciocínio combinatório está associado unicamente ao desenvolvimento do pensamento lógico. Em contrapartida, Pessoa e Borba (2010) acreditam na mescla de aspectos biológicos com aspectos externos: “acredita-se na importância da escola no processo de aprendizagem formal de conceitos, porém, também não se pode deixar de defender aspectos relacionados ao desenvolvimento extraescolar, à maturidade e ao próprio desenvolvimento cognitivo” (Pessoa; Borba, 2010, p. 7).

Para uma melhor compreensão e aprendizagem da Análise Combinatória muito vem se falando a respeito do desenvolvimento do raciocínio combinatório nos alunos. Mas o que significa raciocínio combinatório? Santana e Oliveira (2015) respondem:

> Como o raciocínio pode ser concebido como um modo de se fazer encadeamento de juízos ou pensamentos, ao nos referirmos ao raciocínio combinatório estamos nos circunscrevendo ao encadeamento de pensamentos que nos possibilitam analisar estruturas e relações discretas relacionadas a conjuntos finitos. (SANTANA; OLIVEIRA, 2015, p. 6)

O que acontece, na maioria das vezes, é que na metodologia tradicional expositiva, o professor passa para seus alunos as fórmulas necessárias para as resoluções de problemas e as exercita, sem antes desenvolver o raciocínio necessário e que se reduz a tal solução. Muitas vezes a aplicação direta da formula não é o caminho que vai levar a resolução do problema e isso acaba desmotivando os alunos, que foram adestrados e treinados, de maneira engessada e sistemática, para uma simples aplicação.

Este tema da matemática, em especial, é capaz de despertar no jovem a habilidade de pensar e criticar situações que lhes forem apresentadas. Não se limita apenas ao estudo da "matemática pura", mas também da "matemática aplicada", da capacidade de raciocinar. Para que exista o raciocínio combinatório é preciso que o estudante compreenda como se chegou a solução de determinado contexto sem a necessidade de aplicação de uma fórmula, partindo apenas dos conhecimentos trazidos por ele, para que, em conjunto com o professor, e os demais presentes em seu espaço de ensino-aprendizagem, solucione o problema. Homa e Groenwald (2013) citando Mauro Munsignati, professor doutor da Unicamp, ainda enfatizam:

> No estudo desse assunto o principal é o raciocínio, pois saber apenas fórmulas de Arranjo e Combinação, entre outras, não é suficiente. A grande vantagem desse conteúdo é estimular a capacidade de abstração do estudante para resolver problemas, sendo possível desenvolver atividades contextualizadas sócio culturalmente, aproximando-o da realidade, permitindo vivenciar situações próximas, que lhe possibilitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nessa realidade. (HOMA; GROENWALD, 2013, p. 66)

Também é válido ressaltar, a fator de curiosidade, que a dificuldade no estudo da Análise Combinatória não se dá somente pelos discentes, mas também pelos docentes. Muitos professores evitam até lecionar os conteúdos. Segundo Valquez e Hopner (2004),

> Esse tema parece não ser bem visto tanto por docentes como discentes de um modo geral, parece sim, uma quantidade enorme de fórmulas com muitas definições que os alunos utilizam mecanicamente, muitas vezes até, não resolvendo simples problemas de contagem. Faltam exemplos concretos, conhecimento e aplicações em sala de aula. A introdução destes conceitos, mesmo que de forma básica, utilizando o princípio fundamental da contagem pode ser o início da desmistificação de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a se explorar problemas mais complexos. (VALQUEZ; HOPNER, 2004, p. 6)

De acordo com Oliveira (2015), a Análise Combinatória é difícil tanto no Ensino Médio como no Superior e, até por uma falta de preparação adequada, muitos professores evitam a todo custo lecionar o conteúdo. Quando o fazem, é com insegurança ou desmotivação, o que acaba também sendo transmitido para o aluno e dificulta ainda mais a aprendizagem significativa por parte destes. Oliveira (2015) ainda ressalta:

> Em uma matéria recente da revista Cálculo (Setembro de 2013) sobre os tópicos de Matemática que não gostam de ensinar, professores experientes montaram uma espécie de ranking onde a Análise Combinatória ficava com a medalha de prata, abaixo do binômio de Newton e acima dos polinômios. (OLIVEIRA, 2015, p. 27)

Ainda arremata Silva (2013) sobre a importância do domínio desse assunto por parte do professor:

> Se o mediador do ensino da Matemática, o professor, for capaz de oferecer um ensino da Matemática de forma dinâmica, atrativa e criativa, inclusive voltado para estudos futuros de seus aprendentes, tem em mãos uma arma valiosa para desenvolver no educando o pensamento crítico, a confiança em seu potencial mental via raciocínios lógicos e o hábito de utilizar as suas competências adquiridas com autonomia, senso investigativo e sobretudo criativo (SILVIA, 2013, p. 10)

Baseado nos autores mencionados e nas perspectivas apresentadas temos que não há um culpado ou um único motivo, mas sim um conjunto de fatores que corroboram para o déficit na aprendizagem em Análise Combinatória. Para seguir com a proposta metodológica deste trabalho, precisamos entender o que se espera, em relação a Análise Combinatória, dos alunos do Ensino Médio e de que forma eles serão abordados sobre esta temática.

## 2.2. A Análise Combinatória abordada no Ensino Médio

Neste momento, apresentaremos um breve resumo sobre as temáticas abordadas no Ensino Médio com respeito a Análise Combinatória, da forma como são abordadas e, inclusive, sugeridas pelos materiais didáticos do Ensino Médio. Para tanto, tomamos como base os livros: "Matemática: Contexto e Aplicações 2" de Luiz Roberto Dante, editora Ática, 2016; Coleção Mundus Volume 3 do 2º Ano do Sistema GGE de Ensino, 2019; Volume 4 do Livro Integrado da 2ª Série do Sistema Ari de Sá (SAS), 2019; "A Matemática do Ensino Médio Volume 2" de Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, SBM, 2006.

- **Princípio Fundamental da Contagem**

O **Princípio Fundamental da Contagem** (PFC) nos diz que se um evento é formado por duas ou mais etapas independentes, então o número de possibilidades deste evento é dado pelo produto entre o número de possibilidades de cada etapa. Em outras palavras, se há x modos de se fazer uma escolha $E_1$ e, feita a escolha $E_1$, há y modos de se fazer a escolha $E_2$, então há x.y modos de se fazer as escolhas $E_1$ e $E_2$ sucessivamente, o que também é conhecido como Princípio Multiplicativo da Contagem. No entanto, se a escolha $E_1$ exclui a possibilidade da escolha $E_2$, e vice-versa, há x + y modos de se fazer a escolha $E_1$ ou a escolha $E_2$, o que chamamos de Princípio Aditivo da Contagem.

A dica dada aos estudantes é sobre a interpretação do problema. Se é necessário fazer uma escolha $E_1$ **e** uma escolha $E_2$, estaremos lidando com o Princípio Multiplicativo. No entanto, se é necessário fazer uma escolha $E_1$ **ou** uma escolha $E_2$, estaremos lidando com o Princípio Aditivo.

**Exemplo 1:** Mencionando sempre ter poucas roupas, Priscilla decidiu verificar todas as combinações possíveis de *look* (camisa + calça) que ela poderia compor com os itens que levou em sua viagem. Se ela havia levado 3 calças e 4 camisas, quantos *looks* diferentes ela poderia compor?

**Solução.** Para compor um *look* deve-se escolher uma camisa ($E_1$) e uma calça ($E_2$). Como há 3 calças, cada uma das camisas poderá compor 3 *looks* diferentes. Portanto, teremos 3 . 4 = 12 *looks*, em conformidade com o Princípio Multiplicativo.

**Exemplo 2:** Deseja-se ir da cidade A para a cidade C. Sabe-se que este percurso pode ser feito de forma direta pela rodovia 1 ou passando pela cidade B. Além disso, há 2 estradas que ligam a cidade A à cidade B e 3 estradas que ligam a cidade B à cidade C. De quantos modos podemos ir da cidade A para a cidade C, sem passar mais de uma vez na mesma cidade?

**Solução.** Sabemos que há duas opções, a princípio, ir de A até C pela rodovia 1 ou ir de A até C passando por B. Levando em conta a segunda opção, precisaremos ir de A até B e de B até C. Para o primeiro percurso, temos 2 opções e para cada uma destas temos, no segundo percurso, 3 opções, o que nos fornece 2 . 3 = 6 opções. Mas também poderíamos ir diretamente de A para C, portanto, temos mais uma opção, totalizando 6 + 1 = 7 opções, em conformidade com os Princípios Aditivo e Multiplicativo.

- **Permutações**

Permutar significa trocar, mudar de posição. Assim, dados $n$ objetos distintos definimos como permutação de $n$ (ou **Permutação Simples** de n) o número de modos de se alocar os $n$ objetos em $n$ locais, de tal modo que cada locação se distinguia da outra somente pela posição de seus objetos. Denotaremos o número de permutações dos $n$ objetos por $P_n$ e ocorrerá do seguinte modo: para a primeira posição teremos $n$ opções, para a segunda $n-1$ pois já utilizamos um na primeira posição, e assim sucessivamente, até a última posição que só terá uma possibilidade. Logo, $P_n = n\,.\,(n-1).\,(n-2) \ldots 1 = n!$, número conhecido como fatorial de $n$ (por convenção, temos que $0! = 1$).

**Exemplo 1:** Mariana precisa estudar Matemática, Física, Química e Biologia para o simulado de sua escola. Ela tem dificuldades e, por este motivo, pretende estudar uma única matéria por vez, passando para a próxima somente quando finalizar todo conteúdo da matéria da vez. De quantos modos ela pode organizar sua sequência de estudo?

**Solução.** Mariana sabe que precisa estudar 4 matérias. Como ela precisa apenas ordenar as matérias, ela precisará verificar as permutações possíveis das 4. Portanto, teremos $P_4 = 4! = 4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = 24$.

Em alguns casos, no entanto, a permutação dos objetos não gerará uma sequência distinta. A exemplo da palavra CASA. Se trocarmos o primeiro A com o segundo A não geraremos uma palavra nova, isto porque a letra A se encontra repetida na palavra. A estes casos, chamaremos de **Permutação com Repetição**. Note que se não houvesse repetição, conseguiríamos formar $4! = 24$ palavras, mas como a permuta entre as letras repetidas não gera algo novo, e o número de permutações entre as letras repetidas é 2!, significa que cada palavra será repetida 2! vezes. Como só queremos contar o número de vezes que a palavra aparece de modo distinto, precisamos retirar essas repetições. Portanto, o número de permutações distintas das letras da palavra CASA (o que se é conhecido como anagrama) é dado por: $\frac{4!}{2!} = 4\,.\,3 = 12$.

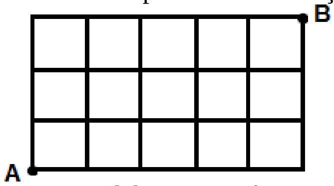
De modo genérico, o número de repetições de $n$ objetos dos quais existem $r_1$ elementos iguais a $x_1$, $r_2$ elementos iguais a $x_2$, ... , até $r_n$ elementos iguais a $x_n$, com $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = n$ é denotado por $P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ e é dado por: $P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_n} = \frac{n!}{r_1!\,.\;r_2!\;\ldots.\;r_n!}$.

**Exemplo 2:** Uma senha de internet é constituída de cinco letras e três algarismos, em que a ordem é levada em consideração. Eis uma senha possível: aa7b77ba. Quantas senhas diferentes podemos formar com três letras “a”, duas letras “b” e três algarismos iguais a 7?

**Solução.** Podemos observar que a senha teve ter 7 caracteres, além disso, há repetição de caracteres, sendo 3 “a”, 2 “b” e 3 “7”. Assim, teremos que o número de senhas possíveis será dado por $P_7^{3,2,3} = \frac{7!}{3!\,.\,2!\,.\,3!} = \frac{7\,.\,\cancel{6}\,.\,5\,.\,4\,.\,\cancel{3!}}{\cancel{3\,.\,2}\,.\,1\,.\,2\,.\,1\,.\,\cancel{3!}} = 70.$

**Exemplo 3:** Na figura a seguir, as linhas verticais e horizontais representam ruas e os quadrados representam quarteirões. Determine a quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando o ponto A ao ponto B.

Figura 12: Exemplo 3 de Permutação.

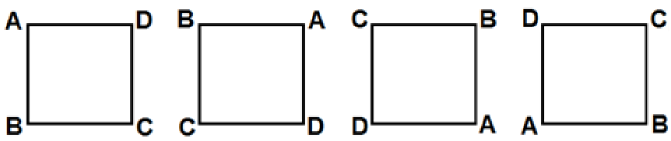



Fonte: Elaboração própria.

**Solução.** Para ir do ponto A ao ponto B pelo menor trajeto possível, significa que só poderemos “andar” para cima e para a direita. Analisando as possibilidades temo que, independente do caminho, precisaremos ir três vezes para cima (↑) e cinco vezes para a direita (→), como por exemplo ↑→→→↑↑→→ ou →↑↑↑→→→→. Deste modo, o número de trajetos distintos é dado pela permutação das 8 setas, com suas respectivas repetições: $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!\,.\,5!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,\cancel{5!}}{3\,.\,2\,.\,1\,.\,\cancel{5!}} = 42.$

Um outro tipo de permutação ocorre, também, quando dispomos dos elementos em forma de “círculo”, com este termo não tomaremos referência apenas a forma geométrica, mas a todas as disposições que insiram este formato (“início” e “fim” sob mesmo ponto). Pensemos na seguinte situação, quatro crianças (A, B, C e D) estão sentadas em uma mesa quadrada, para jogar baralho. Como o objetivo é jogar, leva-se em consideração as pessoas que estão sentadas de seus lados (por questão de estratégia), sendo assim, uma permutação só será considerada diferente da outra se a disposição das crianças, entre si, for alterada. Isto é, se pelo menos uma delas estiver sentada ao lado de pessoas diferentes. Observemos algumas possíveis disposições.

Figura 13: Abordando Permutação Circular.




Fonte: Elaboração própria.

É fato que, embora todas as crianças tenham trocado de lugar, a disposição entre as crianças é a mesma. Donde podemos analisar que, como há 4 lugares, há 4 modos de iniciarmos a mesma sequência. Assim, o número de maneiras de permutarmos estas crianças não será dado apenas pelo 4!, mas sim por $\frac{4!}{4}$ = 3!, uma vez que cada sequência é repetida 4 vezes. É um exemplo clássico de **Permutação Circular**.

De modo geral, denotaremos Permutação Circular de $n$ por $PC_n$ e ela será dada por $PC_n$ = $\frac{n!}{n}$ = $(n-1)!$.

- **Arranjo**

Um arranjo é um agrupamento de elementos em que os elementos se diferenciam pela ordem. Chamaremos de **Arranjo Simples** todos os arranjos cujos elementos não podem ser repetidos. Em outras palavras, seja um conjunto $X = \{1, 2, \dots , n\}$, chama-se de Arranjo Simples dos $n$ elementos de $X$, agrupados $p$ a $p$ e denota-se por $A_n^p$ ou $A_{n,p}$, todo subconjunto ordenado de $X$ com $p$ elementos distintos, $0 < p \leq n$ com $n, p \in \mathbb{N}$.

Se há $n$ objetos para ranquearmos $p$, para a primeira posição teremos $n$ opções, para a segunda $n-1$, para a terceira $n-2$, e assim sucessivamente até a $p$-ésima posição, que teremos $n-(p-1) = n-p+1$. O que nos fornece que $A_{n,p} = n\,.\,(n-1)\,.(n-2) \dots (n-p+1)$ = $\frac{n!}{(n-p)!}$. É uma aplicação direta do PFC.

**Exemplo 1:** Dispondo dos algarismos de 1 a 9, quantos números distintos de 4 algarismos distintos podemos compor?

**Solução.** Como um número se difere do outro até por sua posição, queremos escolher 4 dos 9 algarismos disponíveis e dispô-los de forma ordenada. Assim, temos o Arranjo Simples de 9, agrupados 4 a 4, $A_{9,4}$ = $\frac{9!}{(9-4)!}$ = $\frac{9!}{5!}$ = $9\,.\,8\,.\,7\,.\,6 = 3024$. Se levássemos em consideração apenas o PFC, teríamos que para a 1ª posição há 9 opções, para a 2ª há 8, para a 3ª há 7 e para a 4ª há 6, o que nos daria de forma direta $9\,.\,8\,.\,7\,.\,6 = 3024$.

Além dos Arranjos Simples, também há arranjos em que podemos repetir os elementos. De fato, se tivermos $n$ elementos para dispormos em $p$ lugares e pudermos repetir, em cada lugar, os elementos da opção anterior, teremos $n$ opções para o primeiro lugar, $n$ opções para o segundo, e assim sucessivamente, até o $p$-ésimo lugar, o que resulta em $n\,.\,n \dots n = n^p$. Nestes casos, estaremos trabalhando com **Arranjos com Repetição**, cuja denotação será $AR_{n,p} = n^p$ e também é uma aplicação direta do PFC.

**Exemplo 2:** Em uma sala de aula há 40 alunos. Ao final do ano, são dados três prêmios: o troféu destaque (dado ao aluno com as melhores notas), o troféu frequência (dado ao aluno com o menor número de faltas) e o troféu participação (dado ao aluno mais participativo das aulas). Luana, aluna da sala, deseja prever suas chances de ganhar algum troféu, para isso escreve em seu caderno todas as disposições possíveis dos prêmios. Se até aquele momento todos os alunos estavam com as mesmas chances de ganhar qualquer um dos troféus, quantas disposições Luana escreveu?

**Solução.** Como não há restrição sobre quantos troféus cada aluno pode receber, todos concorrem a todas as categorias premiadas. Disposta a diferenciação entre os troféus, há diferença entre as ordenações propostas por Luana. Para o troféu destaque temos 40 opções, assim como para o frequência e participação. Donde temos $AR_{40,3} = 40^3 = 40 \,.\, 40 \,.\, 40 = 64000$ disposições possíveis para as premiações. Mais uma vez é válida a aplicação direta do PFC.

- **Combinação**

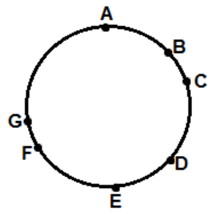
Chamaremos de **Combinação Simples** ou, simplesmente, **Combinação**, os agrupamentos formados com os elementos de um conjunto se estes agrupamentos se diferenciarem entre si apenas pela sua natureza e não pela ordem de seus elementos. Isto é, são agrupamentos em que a ordem de seus elementos não interfere no processo de contagem. Para entender melhor, pensemos na seguinte situação: em uma escola há 5 professores de Matemática: A, B, C, D e E. De quantos modos podemos eleger 2 professores para a comissão final das avaliações?

Levando em consideração que é uma comissão, a ordem da escolha não influencia o resultado final, isto é, a comissão formada por A e B é a mesma que a formada por B e A. Se a ordem fosse levada em consideração, teríamos $A_{5,2}$, mas como a permutação entre os elementos escolhidos não gera uma nova disposição, precisamos retirá-las, obtendo: $\frac{A_{5,2}}{2!} = \frac{5!}{2!\,.\,(5-2)!} = \frac{5\,.\,4\,.\,\cancel{3!}}{2\,.\,1\,.\,\cancel{3!}} = 5\,.\,4 = 20.$

Portanto, a combinação de $n$ objetos agrupados $p$ a $p$, que denotaremos por $C_n^p$ ou $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$ será dada por: $C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!\,.\,(n-p)!}$ .

**Exemplo 1:** São dados 7 pontos distintos sobre uma circunferência, a saber: A, B, C, D, E, F e G. Conforme a figura a seguir. Com vértices nesses pontos, quantos triângulos diferentes podemos formar?

Figura 14: Exemplo 1 de Combinação.



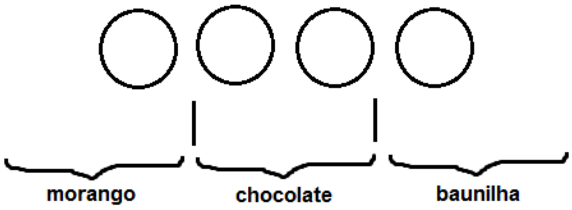

Fonte: Elaboração própria.

**Solução.** Note que o triângulo ABE é o mesmo que AEB. Isto é, a permutação dos vértices não gera um novo triângulo. Deste modo, o número de triângulos distintos é dado por: $C_{7,3} = \frac{7!}{3!\,.\,4!}$ $= \frac{7\,.\,\cancel{6}\,.\,5\,.\,\cancel{4!}}{\cancel{3\,.\,2}\,.\,1\,.\,\cancel{4!}} = 35.$

Em algumas situações, no entanto, a escolha dos elementos para o agrupamento pode ser feita repetindo-se eles. Neste caso, teremos uma **Combinação com Repetição** e precisaremos de um pouco mais de cautela. Pensemos na seguinte situação: você pretende comprar um sorvete de quatro bolas em uma sorveteria que dispõe de 3 sabores: chocolate, morango e baunilha. De quantos modos diferentes você pode fazer esta compra?

É fato que você pode repetir os sabores do sorvete e a ordem em que escolhe as bolas não afeta a combinação final, isto é, 2 bolas de chocolate e 2 de morango, é o mesmo que 2 de morango e 2 de chocolate, portanto, temos uma Combinação com Repetição. O segredo está em não distribuir os sabores pelas bolas, mas sim as bolas pelos sabores. Observe o esquema exposto na figura a seguir.

Figura 15: Combinação com Repetição.




Fonte: Elaboração própria.

De acordo com o esquema acima, a estratégia consiste em separar as quatro bolas em três espaços, isto é, inserir duas divisões entre as bolas. Observe que a forma como dispomos as bolas e essas divisões (barras) definirá quantas bolas escolheremos de cada sabor. Assim, recaímos a um processo mais simples: Permutação com Repetição, uma vez que possuímos 4 bolas e 2 barras para permutar. Assim, o número de modos diferentes de se compor o sorvete será dado por $P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\,.\,2!} = C_{6,4} = C_{(4+3-1,4)}$.

De forma geral, a Combinação com Repetição de $n$ objetos agrupados $p$ a $p$ será dada por $C_{(n+p-1),n} = \binom{n+p-1}{n} = \frac{(n+p-1)!}{n!\,.\,(p-1)!}$.

**Exemplo 2:** Determine o número de soluções inteiras não negativas da equação $x + y + z = 6$.

**Solução.** Como cada valor pode receber mais de uma unidade e a ordem que dividimos as unidades não influencia na combinação final, temos uma Combinação com Repetição. Além disso, como o problema pede soluções inteiras, dispomos de 6 unidades para dividir entre $x$, $y$ e $z$. Ou seja, dispomos de 6 "bolas" para dividir por esses 3 espaços (necessitando de duas divisões). Portanto o número pedido é dado por: $C_{(6+3-1),6} = C_{8,6} = \frac{8!}{6!\,.\,2!} = \frac{8\,.\,7\,.\,\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,.\,2\,.\,1} = 21.$

# Capítulo 3

## O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem)

Com o objetivo de verificar o nível da educação básica no país e a partir de seus resultados balizar as políticas voltadas a educação, nasce, em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), criado pelo MEC, no governo de Fernando Henrique Cardoso. Segundo Peixoto (2016), foi a primeira iniciativa de avaliação do ensino a nível nacional.

Mas é somente no ano de 2009, no governo de Luiz Inácio Lula da Silva, que a prova sofre uma reformulação tanto no que diz respeito a seus objetivos, quanto na própria estrutura. Ela passa a contar com 180 questões divididas em 4 grandes áreas do conhecimento: Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que engloba Química, Física e Biologia; Ciências Humanas e suas Tecnologias, que engloba Geografia, História, Filosofia e Sociologia; Linguagens, Códigos e suas e Tecnologias, que engloba desde as Línguas Portuguesa e Estrangeira, até Artes e Tecnologias da Informação; e Matemática e suas Tecnologias.

O objetivo da reformulação foi de unificar o concurso Vestibular das universidades federais brasileiras, isto é, criar um exame de acesso ao Ensino Superior de nível nacional. Outra mudança significativa na prova foi o método de avaliação aplicado, que não visa apenas a verificação do aprendizado dos conteúdos, mas também das competências e habilidades vistas como consequências deste aprendizado, através da interpretação de gráficos, textos, mapas e informações em diversas linguagens, além de problemas práticos e reais, com ideias bem estruturadas, respeitando valores humanos e considerando a diversidade sociocultural do país.

A partir de então as universidades de todo país entraram em um processo de transição, disponibilizando um percentual, que aumentaria gradativamente, de suas vagas ao Enem. As escolas e cursinhos também reformularam suas propostas diante o fato de que o Enem apresenta uma problematização contextualizada dos conteúdos. É muito mais do que a aplicação de fórmulas e conceitos, é a verificação das habilidades e competências adquiridas pelos estudantes do Ensino Médio ou para o Ensino Médio.

Embora haja outros exames de nível nacional, como o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja), optamos por dar destaque ao Enem, uma vez que este tem influencia um pouco mais evidente no Ensino Médio. De fato, a forma como este exame aborda e testa as competências e habilidades dos estudantes, se assemelha a proposta deste trabalho, inclusive foi uma das motivações para tal escolha.

Tendo em vista este fato, analisaremos as questões do Enem a partir de 2009, ano em que adquiriu as características que possui atualmente, que envolvem a Análise Combinatória, com o objetivo de verificar como se aborda a temática e o que se espera dos alunos do Ensino médio em relação a mesma. As apresentaremos com uma sugestão de solução, o grau de dificuldade que lhe foi atribuído pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e o percentual de acertos da questão, segundo estatísticas do exame.

No ano de 2018 apenas uma questão, do total de 45 da área de Matemática envolveu a Análise Combinatória. Conforme a seguir.

**(Enem 2018)** O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em design e tecnologia [Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado)]. Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante. Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é:

a) $A_{10}^{4}$ b) $C_{10}^{4}$ c) $C_4^2 \,.\, C_6^2 \,.\, 2 \,.\, 2$ d) $A_4^2 \,.\, A_6^2 \,.\, 2 \,.\, 2$ e) $C_4^2 \,.\, C_6^2$

**Resposta: [C]**

**Solução.** Em relação aos carros que ficarão na entrada, existem 4 maneiras de escolher o compacto e 6 modos de escolher a caminhonete. Já para o estande da região central, tem-se 3 escolhas para o compacto e 5 para a caminhonete. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que o número de possibilidades para compor os estandes é igual a $4 \,.\, 6 \,.\, 3 \,.\, 5 = 4 \,.\, 3 \,.\, 6 \,.\, 5 = C_{4,2} \,.\, 2 \,.\, C_{6,2} \,.\, 2$.

**Considerações.** A questão foi considerada com grau de dificuldade baixo. Engloba o PFC, mas exige dos candidatos ao exame o conhecimento das notações de arranjo e combinação. Mesmo sendo considerada fácil, segundo as estatísticas do exame, o índice de acertos dessa questão foi 26%.

No ano de 2017 a Análise Combinatória ganhou um pouco mais de espaço no Enem, não apenas quando comparada com 2018, mas em relação a todas as aplicações. Foi o ano em que apareceu o maior número de questões de Análise Combinatória, contando com um total quatro questões, que serão apresentadas a seguir.

**(Enem 2017)** Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando videogame. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Figura 16: Questão Enem 2017 (1).

| Quantidade de jogadores | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de partidas | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |

Fonte: Enem (2017)

Se a quantidade de jogadores for 8 quantas partidas serão realizadas?

a) 64 b) 56 c) 49 d) 36 e) 28

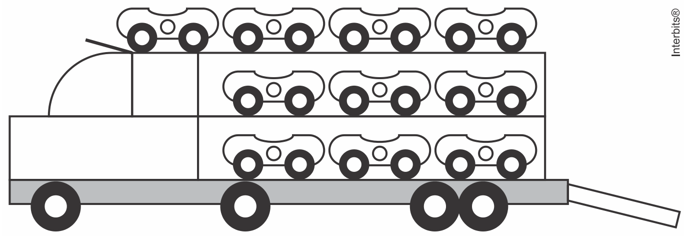
**Resposta: [E]**

**Solução.** O número de partidas pode ser calculado pelo número de combinações de jogadores, 2 a 2. Assim, temos: $C_{8,2} = \frac{8!}{2!\,.\,6!} = \frac{8\,.\,7\,.\,\cancel{6!}}{2\,.\,1\,.\,\cancel{6!}} = 28$ partidas.

**Considerações.** A questão foi considerada com grau de dificuldade médio, exige conhecimento a respeito de Combinação, mas pode ser resolvida com uma aplicação do PFC, bem interpretado. Teve índice de acertos de 50%.

**(Enem 2017)** Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.

Figura 17: Questão Enem 2017 (2).




Fonte: Enem (2017)

No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$ b) $C_{9,3}$ c) $C_{10,4}$ d)$6^4$ e)$4^6$

**Resposta: [B]**

**Solução.** Sabendo-se que cada caminhão cegonha possui 10 carros e que é preciso ao menos um carrinho de cada cor, então restam 6 carrinhos nos quais as cores podem ser permutadas. Sendo $a, b, c$ e $d$ a quantidade de carrinhos brancos, laranjas, amarelos e verdes, respectivamente, além dos 4 já pintados (um de cada cor), tem-se: $a + b + c + d = 6$, isto é, um caso de Combinação com Repetição, donde a quantidade de soluções inteiras não negativas dessa equação é dada por: $C_{(6+4-1),6} = C_{9,6} = C_{9,3}$.

**Considerações.** Considerada uma questão com grau de dificuldade elevado, apenas 11% dos candidatos acertaram. Ela abordou a Combinação com Repetição, conteúdo muitas vezes deixado de lado pelos professores no processo de ensino-aprendizagem no Ensino Médio.

**(Enem 2017)** Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que L e D representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Figura 18: Questão Enem 2017 (3).

| Opção | Formato |
|---|---|
| I | LDDDDD |
| II | DDDDDD |
| III | LLDDDD |
| IV | DDDDD |
| V | LLLDD |

Fonte: Enem (2017)

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções. A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adéqua às condições da empresa é

a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

**Resposta: [E]**

**Solução.** Calculando as opções, temos os resultados a seguir. I: $26\,.\,10^5 = 2.600.000$, II: $10^6 = 1.000.000$; III: $26^2.\,10^4 = 6.760.000$; IV: $10^5 = 100.000$; e V: $23^3.\,10^2 = 1.757.600$. Sendo o número esperado de clientes igual a 1 milhão, o formato que resulta num número de senhas distintas possíveis superior a 1 milhão mas não superior a 2 milhões é o formato dado na opção V.

**Considerações.** Considerada com grau de dificuldade elevado, ela teve um índice de 25% de acertos e utilizou Arranjo com Repetição, ou aplicação direta do PFC.

**(Enem 2017)** O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Figura 19: Questão Enem 2017 (4).

Fonte: Enem (2017)

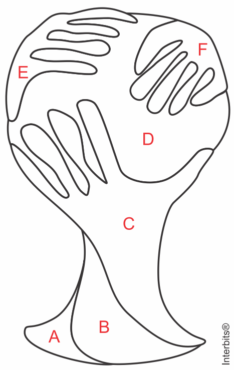
De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 e) 972

**Resposta: [E]**

**Solução.** Considerando as regiões a serem pintadas na figura abaixo, que as cores podem se repetir e que não há obrigatoriedade de se usar as 4 cores, pode-se perceber, partindo da região com mais fronteiras a outras regiões, que a região $D$ pode ser pintada de 4 cores e as demais de 3 modos cada, resultando em: $D\,.\,E\,.\,F\,.\,C\,.\,B\,.\,A = 4\,.\,3\,.\,3\,.\,3\,.\,3\,.\,3 = 972$.

Figura 20: Resolução questão Enem 2017.




Fonte: SuperProWeb (2019)

**Considerações.** Considerada uma questão com grau de dificuldade elevado, apenas 6% dos candidatos acertaram, menor índice de acertos das questões envolvendo Análise Combinatória nos exames em questão. Baseado nos depoimentos de alguns estudantes, o fato de se considerar a figura em 3D e não a forma plana apresentada, acabou gerando uma maior dificuldade na mesma. De fato, esperava-se um desempenho melhor dos estudantes, uma vez que a questão envolveu apenas o PFC.

No ano de 2016, que verificaremos a seguir, foram abordadas duas questões de Análise Combinatória.

**(Enem 2016)** O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos. Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2!\,.8!} - \frac{4!}{2!\,.2!}$ b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$ c) $\frac{10!}{2!\,.8!} - 2$ d) $\frac{6!}{4!} + 4\,.\,4$ e) $\frac{6!}{4!} + 6\,.\,4$

**Resposta: [A]**

**Solução.** Desde que o número de maneiras de escolher dois tenistas quaisquer é $C_{10,2}$ e o número de modos de escolher dois tenistas canhotos é $C_{4,2}$ tem-se que o resultado é dado por $C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{2!\,.8!} - \frac{4!}{2!\,.2!}$ .

**Considerações.** A questão foi considerada com nível de dificuldade médio, teve índice de acertos de 19% e abordou conceitos de Combinação.

**(Enem 2016)** Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha [disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012]. O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

a) $10^2.\,26^2$ b) $10^2.\,52^2$ c) $10^2.\,52^2.\,\frac{4!}{2!}.$ d) $10^2.\,26^2.\,\frac{4!}{2!\,.2!}.$ e) $10^2.\,52^2.\,\frac{4!}{2!\,.2!}.$

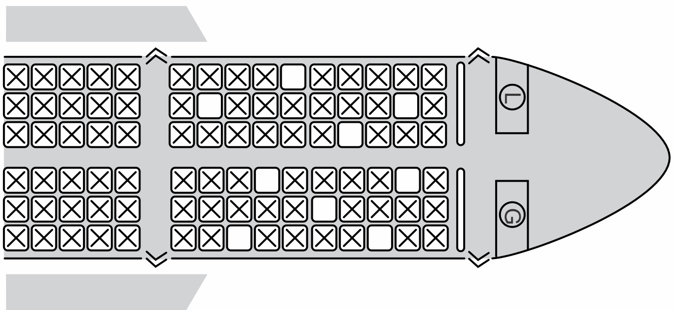
**Resposta: [E]**

**Solução.** Existem $10\,.\,10 = 10^2$ maneiras de escolher os dois algarismos e $52\,.\,52 = 52^2$ maneiras de escolher as letras, uma vez que cada letra pode aparecer maiúscula ou minúscula. Definidos os caracteres da senha, podemos permuta-los, levando em consideração possíveis repetições, de $P_4^{2,2}$ modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $10^2.\,52^2.\,\frac{4!}{2!\,.2!}.$

**Considerações.** A questão engloba PFC e Permutação com Repetição, seu grau de dificuldade foi considerado médio e o índice de acertos foi de 14%. Em 2015 também houve apenas duas questões envolvendo a temática, conforme podemos observar a seguir.

**(Enem 2015)** Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.

Figura 21: Questão Enem 2015 (1).




Fonte: Enem (2015)

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\frac{9!}{2!}$ b) $\frac{9!}{7!\,.\,2!}$ c) $7!$ d) $\frac{5!}{2!}\,.\,4!$ e) $\frac{5!}{4!}\cdot\frac{4!}{3!}$

**Resposta: [A]**

**Solução.** O resultado pedido corresponde ao número de arranjos simples, uma vez que as posições das poltronas sugerem uma ordem, de 9 objetos tomados 7 a 7 isto é, $A_{9,7} = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$.

**Considerações.** A questão aborda Arranjo Simples, mas pode ser resolvida apenas com PFC. Foi considerada uma questão com grau de dificuldade baixo e, mesmo assim, apenas 21% dos candidatos a acertaram.

**(Enem 2015)** Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas $6, 7, 8, 9$ ou $10$. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Figura 22: Questão Enem 2015 (2).

| Quesitos | 1. Fantasia e Alegoria | | 2. Evolução e Conjunto | | 3. Enredo e Harmonia | | 4. Bateria | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Jurado | A | B | A | B | A | B | A | B | |
| Escola I | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 8 | | 55 |
| Escola II | 9 | 8 | 10 | 9 | 10 | 10 | 10 | | 66 |
| Escola III | 8 | 8 | 7 | 8 | 6 | 7 | 6 | | 50 |
| Escola IV | 9 | 10 | 10 | 10 | 9 | 10 | 10 | | 68 |
| Escola V | 8 | 7 | 9 | 8 | 6 | 8 | 8 | | 54 |

Fonte: Enem (2015)

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21 b) 90 c) 750 d) 1.250 e) 3.125

**Resposta: [C]**

**Solução.** Observando a diferença entre a pontuação total da Escola II e a demais escolas, tem-se que a Escola II será campeã quaisquer que sejam as notas das Escolas I, III e V. Logo, em relação a essas escolas, há 5 notas favoráveis para cada uma. Por outro lado, como a Escola II vence a Escola IV em caso de empate, e tendo a Escola IV uma vantagem de dois pontos em relação à Escola II, a última será campeã nos seguintes casos: 6 para a Escola IV e $8, 9$ ou 10 para a Escola II; 7 para a Escola IV e 9 ou 10 para a Escola II; 8 para a Escola IV e 10 para a Escola II. Em consequência, a resposta é $3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 + 2 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 + 1 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 750$.

**Considerações.** A questão abordou PFC (envolvendo Princípio Aditivo e Multiplicativo), foi considerada média e teve índice de acertos 19%. O ano de 2014, a seguir, apresentou uma única questão envolvendo Análise Combinatória.

**(Enem 2014)** Um cliente de uma vídeo-locadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a vídeo-locadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido. De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20\,.\,8! + (3!)^2$ b) $8!\,.\,5!\,.\,3!$ c) $\frac{8!\,.\,5!\,.\,3!}{2^8}$ d) $\frac{8!\,.\,5!\,.\,3!}{2^2}$ e) $\frac{16!}{2^8}$

**Resposta: [B]**

**Solução.** Considere 16 posições consecutivas de uma fila, em que as posições de ordem ímpar serão ocupadas pelos 8 filmes de ação, as 5 primeiras posições de ordem par serão ocupadas pelos filmes de comédia, e as 3 últimas posições de ordem par serão ocupadas pelos filmes de drama. Daí, os filmes de ação podem ser dispostos de $P_8 = 8!$ modos, os de comédia de $P_5 = 5!$ maneiras e os de drama de $P_3 = 3!$ possibilidades. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue-se que o resultado é $8!\,.\,5!\,.\,3!$.

**Considerações.** Foi considerada com grau de dificuldade médio e teve um índice de 19% de acertos. Abordou Permutação Simples e PFC. No ano de 2013, a seguir, tivemos 3 questões abordando Análise Combinatória.

**(Enem 2013)** Considere o seguinte jogo de apostas: Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Figura 23: Questão Enem 2013 (1).

| Quantidade de números escolhidos em uma cartela | Preço da cartela (R$) |
|---|---|
| 6 | 2,00 |
| 7 | 12,00 |
| 8 | 40,00 |
| 9 | 125,00 |
| 10 | 250,00 |

Fonte: Enem (2013)

Cinco apostadores, cada um com R$500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

- Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

- Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

- Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;
- Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;
- Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são:

a) Caio e Eduardo. c) Bruno e Caio. e) Douglas e Eduardo.
b) Arthur e Eduardo. d) Arthur e Bruno.

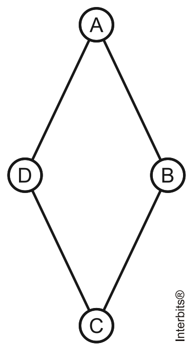
**Resposta: [A]**

**Solução.** Supondo que duas cartelas de um mesmo jogador não possuem 6 dezenas iguais e verificando quantas são senas possíveis de cada um deles, obtemos que Arthur, Bruno, Caio, Douglas e Eduardo possuem, respectivamente, as seguintes possibilidades de serem premiados: $250$; $41 \,.\, C_{7,6} + 4 = 291$; $12 \,.\, C_{8,6} + 10 = 346$; $4 \,.\, C_{9,6} = 336$ e $2 \,.\, C_{10,6} = 420$. Portanto, como o número de casos possíveis para o resultado do sorteio é o mesmo para todos, podemos concluir que Caio e Eduardo são os que têm as maiores probabilidades de serem premiados.

**Considerações.** Foi considerada com grau de dificuldade médio, aborda Combinação Simples e teve um índice de acertos de 12%. Acreditamos que o termo "Probabilidade", nesta questão, tenha sido um distrator para os candidatos.

**(Enem 2013)** Um artesão de joias tem a sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Figura 24: Questão Enem 2013 (2).




Fonte: Enem (2013)

Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

**Resposta: [B]**

**Solução.** Há 3 escolhas para a cor da pedra que ficará no vértice A. Além disso, podem ocorrer dois casos em relação às pedras que ficarão nos vértices B e D: (i) as cores das pedras em B e D são iguais; (ii) as cores das pedras em B e D são distintas. Portanto, as configurações possíveis são: $(A, B, C, D) = (3, 1, 2, 1)$ e $(A, B, C, D) = (3, 2, 1, 1)$, o que corresponde a $3\,.\,1\,.\,2\,.\,1 + 3\,.\,2\,.\,1.\,1 = 6 + 6 = 12$ joias distintas.

**Considerações.** A questão foi considerada com grau de dificuldade médio. Abordou PFC, mas exigiu um raciocínio combinatório a respeito dos casos e teve índice de acertos de 34%.

**(Enem 2013)** Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de $0$ a $9$, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das $26$ letras do alfabeto, além dos algarismos de $0$ a $9$. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\frac{62^6}{10^6}$ b) $\frac{62!}{10!}$ c) $\frac{62!\,.\,4!}{10!\,.\,56!}$ d) $62! - 10!$ e) $62^6 - 10^6$

**Resposta: [A]**

**Solução.** Sabendo que cada letra maiúscula difere da sua correspondente minúscula, há $2\,.\,26 + 10 = 62$ possibilidades para cada dígito da senha. Logo, pelo PFC, segue-se que existem $62^6$ senhas possíveis de seis dígitos. Analogamente, no sistema antigo existiam $10^6$ senhas possíveis de seis dígitos. Em consequência, a razão pedida é $\frac{62^6}{10^6}$.

**Considerações.** A questão foi considerada com grau de dificuldade médio e apresentou índice de acertos de 26%. Abordou o PFC. A seguir, apresentaremos as questões de 2012. Neste ano, a temática fora utilizada em duas questões.

**(Enem 2012)** O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras [folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado) ]. De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) $14$ b) $18$ c) $20$ d) $21$ e) $23$

**Resposta: [C]**

**Solução.** Temos: cores primárias: $3$ (vermelho, amarelo e azul) e cores secundárias: $C_{3,2} = \frac{3!}{2!}$ = $3$. Além disso, cada uma dessas cores terá três tonalidades (normal, clara e escura), o que nos fornece: $(3 + 3) . 3 = 18$. Como o preto e o branco são mais duas cores, totalizamos $18 + 2 = 20$ cores.

**Considerações.** A questão apresentou grau de dificuldade médio e teve índice de acertos de 18%. Ela abordou conceito de Combinação e utilizou o PFC. No entanto, em meio ao fato de serem poucas combinações, os candidatos poderiam ter respondido por árvore de possibilidades, tabela, esquemas... O que provavelmente não ocorreu, pelo baixo índice de acertos.

**(Enem 2012)** O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) $20$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) $119$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) $260$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) $270$ alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

**Resposta: [A]**

**Solução.** Pelo PFC, existem $5 \,.\, 6 \,.\, 9 = 270$ respostas possíveis. Portanto, o diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há $270 - 260 = 10$ alunos a mais do que o número de respostas possíveis.

**Considerações.** A questão foi considerada com grau de dificuldade baixo, abordou, como a própria resolução acima já diz, o PFC. E, mesmo assim, o índice de acertos foi de 32%. No ano a seguir, 2011, apenas uma questão envolveu a temática.

**(Enem 2011)** O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com $120$ candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com $5$ algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número $75.913$ é:

a) $24$. b) $31$. c) $32$. d) $88$. e) $89$.

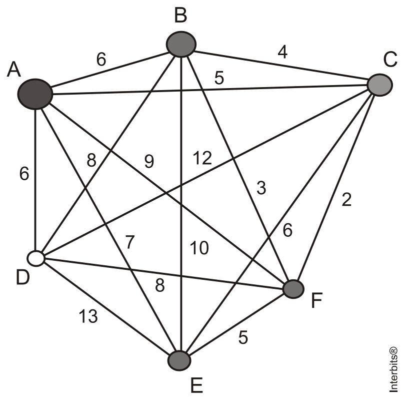
**Resposta: [E]**

**Solução.** Partiremos como se estivéssemos escrevendo os números um a um. Começando com $1$, podemos formar $4! = 24$ números. Analogamente com $3$ e $5$. Como o número desejado começa com $7$, abriremos um pouco mais essa casa, assim, começando com $71$ podemos formar $3! = 6$ números. Analogamente com $73$. Como o número desejado começa com $75$, abriremos um pouco mais essa casa, assim, começando com $751$, podemos formar $2! = 2$ números. Analogamente com $753$ e finalmente chegamos ao $75.913$. Logo, $24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89$ (octogésima nona posição).

**Considerações.** Foi considerada com grau de dificuldade médio, teve índice de acertos 16%. Abordou o PFC mas com uma proposta e interpretação um pouco diferente dos modelos vistos anteriormente. A seguir, veremos a única questão envolvendo a temática do ano de 2010.

**(Enem 2010)** João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.

Figura 25: Questão Enem 2010.




Fonte: Enem (2010)

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

a) 60 min. b) 90 min. c) 120 min. d) 180 min. e) 360 min.

**Resposta: [B]**

**Solução.** Tendo em vista que suas possibilidades devem começar e terminar com a cidade A, só é possível permutar as demais 5 cidades, o que nos fornece $5! = 120$ sequências possíveis para se visita-las. Desconsiderando as simétricas, termos $60$ sequências para visitar, logo o tempo necessário será de $1{,}5.60 = 90$ minutos.

**Considerações.** A questão foi considerada com grau de dificuldade médio e apresentou índice de acertos de 28%. Ela abordou o PFC. A seguir, veremos as questões que abordaram Análise Combinatória na primeira aplicação do Enem como um exame de acesso ao Ensino Superior, em 2009. Foram duas questões, conforme a seguir.

**(Enem 2009)** A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de $2009$, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto $\{01, 02, 03, \ldots, 59, 60\}$, custava R$ 1,50 (disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009). Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor. c) 4 vezes menor. e) 14 vezes menor.
b) $2\frac{1}{2}$ vezes menor. d) 9 vezes menor.

**Resposta: [C]**

**Solução.** O número de possibilidades de 84 apostas de seis dezenas diferentes é dado por $84 \,.\, C_{6,5} = 84 \,.\, 6 = 504$. Por outro lado, o número de possibilidades de se obter a quina com uma única aposta de 9 dezenas. $C_{9,5} = \frac{9!}{5!\,.\,4!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1} = 126$, que é a quarta parte de $504$, portanto a alternativa correta é a letra c.

**Considerações.** Foi considerada uma questão com grau de dificuldade elevado e teve índice de acertos de 32%, o que é um pouco contraditório, pois questões com graus de dificuldades tidos como menores apresentaram índices menores. Ela abordou o conceito de Combinação Simples com PFC.

**(Enem 2009)** Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

d) duas combinações.
e) dois arranjos.

**Resposta: [A]**

**Solução.** Para o grupo A, a ordem dos elementos não importa o que nos leva a pensar numa combinação. Mas no jogo de abertura existe o time que jogará em sua casa, então temos um arranjo. Donde a alternativa A é a correta.

**Considerações.** Esta questão foi considerada com grau de dificuldade baixo, por algum motivo desconhecido, seu índice de acertos não estava disponível. Ela aborda os conceitos básicos de Combinação e Arranjo Simples.

Como podemos observar, uma grande parte dos candidatos não apresentou raciocínio combinatório razoável em relação ao que se é esperado. Seja por falta de oportunidade em sala de aula, por falta de contextualização ou interesse ao conteúdo, ou até mesmo por um déficit de aprendizagem, temos que uma intervenção no ensino da Análise Combinatória precisa acontecer. E diante da realidade do Ensino Médio e visando o exame que tanto rege o dia-a-dia da maioria desses estudantes, porque não trabalhar numa proposta que se assemelhe a forma abordada no Enem? Uma abordagem dos conteúdos por meio da problematização e contextualização cotidiana e próxima da vivência real dos estudantes. O processo de ensino-aprendizagem ocorrendo em meio a resolução de problemas... Essa é a proposta da ABProb. E é o que utilizaremos como proposta metodológica para o ensino da Análise Combinatória.

# Capítulo 4

## Uma Proposta Metodológica Baseada em Problemas

Fundamentados nos estudos realizados nos capítulos anteriores, elaboramos uma proposta metodológica para o processo ensino-aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio. Como já dito e justificado anteriormente, esta proposta se baseia no método disposto pela ABProb, que consiste, como seu próprio nome já diz, em uma aprendizagem baseada em problemas. Para tanto, iniciaremos apresentando alguns resultados obtidos através de um teste diagnóstico que realizamos com algumas turmas.

Enfatizamos o teste diagnóstico como um passo imprescindível para a elaboração ou seleção dos problemas que serão propostos. Uma vez que, como também já mencionado, na preparação de aula para métodos ativos os professores devem planejar o que se pretende que seja aprendido, e não o que se deve ser ensinado, precisamos entender e conhecer as competências e habilidades trazidas pelos alunos, para que os problemas propostos venham a aprimorar e contribuir com o desenvolvimento dos conhecimentos prévios, e não poda-los numa tentativa frustrante de resolver um problema.

Na aplicação do teste diagnóstico não intervimos, nem recomendamos a intervenção, na interpretação e compreensão dos problemas, pois o objetivo desta etapa é verificar, como dito anteriormente, a bagagem trazidas pelos alunos. No entanto, ao se apresentar situações-problema na intenção de promover aprendizagem, deve-se lembrar que é comum que na curiosidade e ansiedade de encontrar uma solução, os discentes não se atentem aos detalhes dos problemas. Por este motivo, a nossa orientação é de que o professor siga sempre ativo e atentamente em meio ao processo. Se notar uma falta de atenção ou descuido com alguém detalhe, o mesmo deve intervir, até mesmo ler e reler a questão com eles, se, e quantas vezes julgar necessário, na intenção de garantir a fluidez da metodologia proposta na busca por possíveis soluções por parte dos estudantes.

Tendo em vista os conhecimentos prévios dos estudantes e as previstas formas de resoluções, o passo seguinte consiste em selecionar o conteúdo a ser aprendido e fraciona-lo entre situações-problema que induzam de forma suave e cautelosa o seu desenvolvimento. A ideia é que se comece com situações simples, no caso da Análise Combinatória começaremos com combinações que possam ser listadas ou moldadas sem grandes dificuldades, aumentando gradativamente o seu número de combinações na moldagem de uma sistematização do processo. É um passo importante e deve-se levar em consideração as diferentes formas de raciocínio e aprendizagem, para que se haja garantias antes de um próximo passo na matéria.

Para a aplicação dos problemas em sala de aula, nossa orientação é de que os alunos formem pequenos grupos, tamanho a depender da disposição de espaço e da quantidade de estudantes na turma, para discutir estratégias que sirvam como ponto de partida para solucionar as situações-problema propostas. O objetivo, e motivação a respeito desta metodologia, é bem destacado por Almeida (2010) na seguinte passagem:

> Mais do que ensinar a um aluno como resolver problemas, oferecendo-lhe habilidades e técnicas, é necessário garantir o espaço de discussões para que possa aprender consigo mesmo e com os outros. Estabelecer analogias e diferenças entre suas soluções e as dos colegas, aprender com os erros, expressar-se de forma organizada, a fim de defender suas ideias perante os outros, são algumas das contribuições que este espaço pode gerar. (ALMEIDA, 2010, p. 31)

O estudo em grupo além de tornar o processo mais dinâmico e menos monótono, corrobora com o desenvolvimento de um censo crítico no aluno, que aprenderá a compartilhar experiências, ouvindo, julgando, comparando e defendendo suas ideias de solução perante as de seus colegas.

Ao longo desta proposta, apresentaremos diversas estratégias trazidas pelos próprios discentes para os problemas envolvendo poucos agrupamentos ou uma quantidade relativamente pequena de possibilidades. Para os demais problemas, faremos comparativos com os casos menores já apresentados a fim de generalizar e formalizar possíveis métodos de resolução.

## 4.1. Teste Diagnóstico Realizado

O referente teste foi realizado com seis turmas da 1ª Série do Ensino Médio, de duas escolas distintas, cada turma com cerca de quarenta alunos, que foram separados em grupos de três ou quatro estudantes. Para o referido teste, aplicamos três questões baseadas no PFC, com o intuito de observar as propostas de solução que seriam apresentadas. Os problemas 1 e 2, que compartilharam dos mesmos princípios, apresentam dois quesitos: no primeiro, mais simples, todos os casos podem ser listados sem dificuldades e no segundo há um pouco mais de possibilidades, a fim de verificar e induzir o raciocínio dedutivo dos estudantes. Embora as soluções tenham sido propostas pelos próprios alunos, em alguns grupos que não viam margem para soluções palpáveis levantamos questões e exemplos para motivar e servir de inspiração para as propostas apresentadas.

Os índices de acertos apresentados na Figura 11 do Capítulo 2 deste trabalho foram calculados a partir do número de soluções apresentadas, e não do número de estudantes ou grupos.

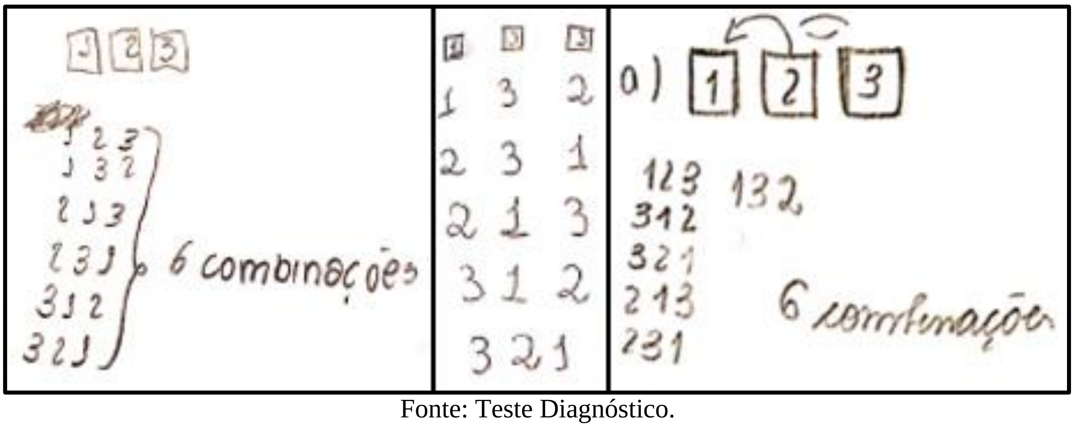
**PROBLEMA 1 –** Um jogo de “paciência”, com cartas, consiste em reordenações no intuito de criar diferentes números naturais. Um pouco nervoso, João decide joga-lo um pouco. Ele dispõe de algumas cartas com algarismos escritos.

a) Se ele possui três cartas, uma com o número 1, uma com o número 2 e uma com o número 3, quantos números poderá formar?

b) E se tivesse quatro cartas numeradas de 1 a 4?

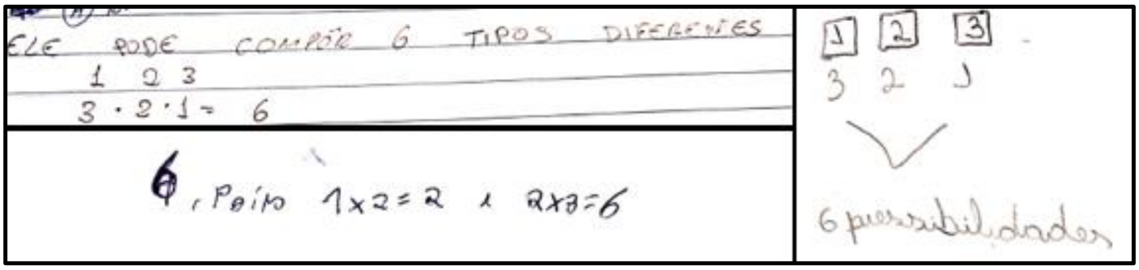
Para este problema, nos foram apresentadas um total de 55 soluções. Analisando, a princípio, o item a), temos um total de 37 acertos, o que representa um índice de 67,27%. Entre os alunos que acertaram, as soluções apresentadas foram obtidas somente através da listagem dos casos, o que foi feito pela maioria, ou pela própria percepção do PFC, como pode ser observado a seguir, nas imagens de algumas das soluções apresentadas.

Figura 26: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 1A (1).




Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 27: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 1A (2).

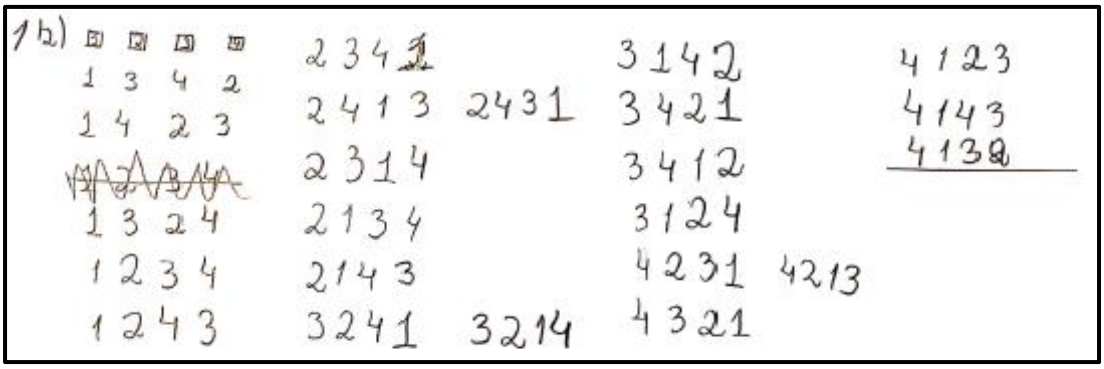



Fonte: Teste Diagnóstico.

Em relação aos estudantes que não acertaram, neste, assim como em outros problemas, não temos soluções a apresentar, uma vez que estes apenas estipularam valores, sem explicações, contas ou métodos. É valido ressaltar que, no início do teste, enfatizamos aos estudantes que eles não seriam avaliados pelos acertos, mas sim pelas tentativas, que o que estávamos buscando eram métodos de resolução e não as soluções em si. O aviso foi dado com o objetivo de deixá-los mais à vontade na busca por soluções e evitar resultados como os mencionados. Imaginamos que a ausência de uma tentativa pode ter ocorrido por falta de tempo, visto que alguns grupos priorizaram começar por outros problemas e não recebemos nenhum teste totalmente em branco.

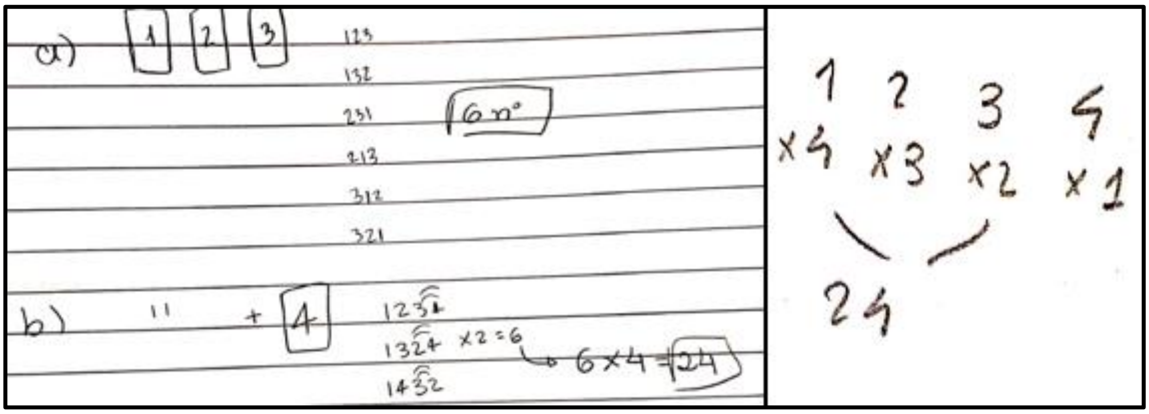
No que diz respeito ao item b), obtemos um total de 19 acertos, o que representa um índice de 34,64%. Nos empolgamos ao ver que, embora tenham sentido dificuldade ao imaginar que o processo de listagem seria um pouco mais longo, a maioria conseguiu perceber que o problema propunha uma generalização de uma quantidade maior de casos. Enquanto alguns se arriscavam a listar os casos, que de certo modo ainda eram poucos, outros grupos discutiam em busca de uma solução mais direta. Acreditamos que com um pouco mais de tempo o índice de acertos seria maior. As soluções ainda se dividiram apenas entre listagens e multiplicações, mas, desta vez, a maioria dos acertos se deram por meio da percepção do PFC.

Figura 28: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 1B (1).




Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 29: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 1B (2).




Fonte: Teste Diagnóstico.

É interessante observar que o raciocínio combinatório é adquirido de forma bem espontânea. A resolução apresentada na Figura 28, por exemplo, foi escolhida por deixar em destaque que alguns números haviam sido esquecidos. De fato, durante a aplicação, o grupo chamou-nos e perguntou “Que números estão faltando?”, respondemos ao questionamento: “Quem disse que está faltando algum número?" e eles responderam: “No primeiro item havia a mesma quantidade de números começando com 1, 2 e 3. Se neste item escrevemos seis números começando com o algarismo 1, então está faltando um número começando com 2, com 3 e com 4.”. Isto nos mostra que, mesmo os que fizeram as listagens, já observavam um comportamento comum entre as situações.

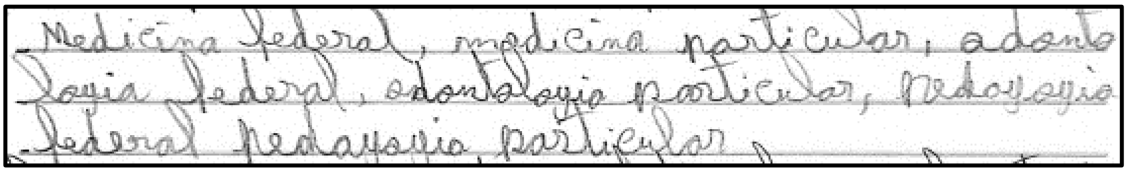
**PROBLEMA 2 –** Letícia pretende fazer um curso superior em sua cidade. Há duas opções para a escolha da instituição: uma particular e uma federal. Essas faculdades dispõem dos mesmos cursos, nos mesmos turnos. Ela pretende ingressar no curso de medicina, odontologia ou pedagogia.

a) De quantos modos ela pode escolher um curso para ingressar, levando em consideração que também deve escolher a faculdade?

b) Se os cursos podem ser feitos nos turnos da manhã, da tarde e da noite, de quantos modos ela pode fazer essa escolha?

Para este problema, nos foram apresentadas um total de 37 soluções. Em relação ao item a), temos um total de 17 acertos, o que nos fornece um índice de 45,94%. Desta vez, mais métodos apareceram nas resoluções apresentadas. Além da listagem e do PFC, alguns utilizaram diagramas e árvores de possibilidades na tentativa de solução. Conforme podemos observar a seguir.

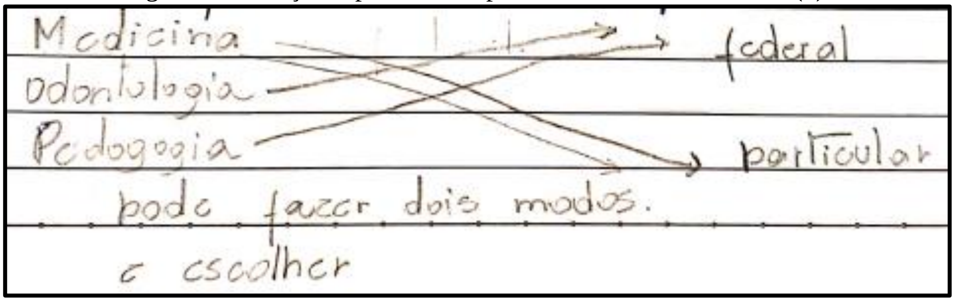
Figura 30: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 2A (1).



Medicina federal, medicina particular, odonto
logia federal, odontologia particular, pedagogia
federal pedagogia particular

Fonte: Teste Diagnóstico.

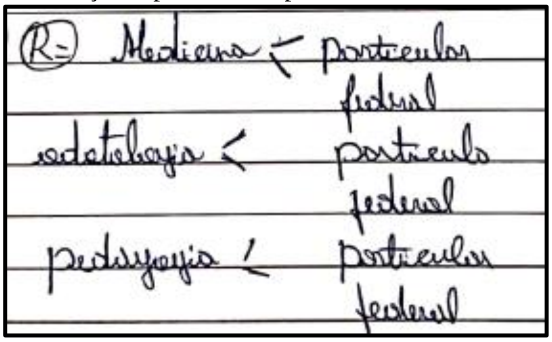
Figura 31: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 2A (2).



Medicina → federal
Odontologia
Pedagogia → particular
pode fazer dois modos.
e escolher

Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 32: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 2A (3).



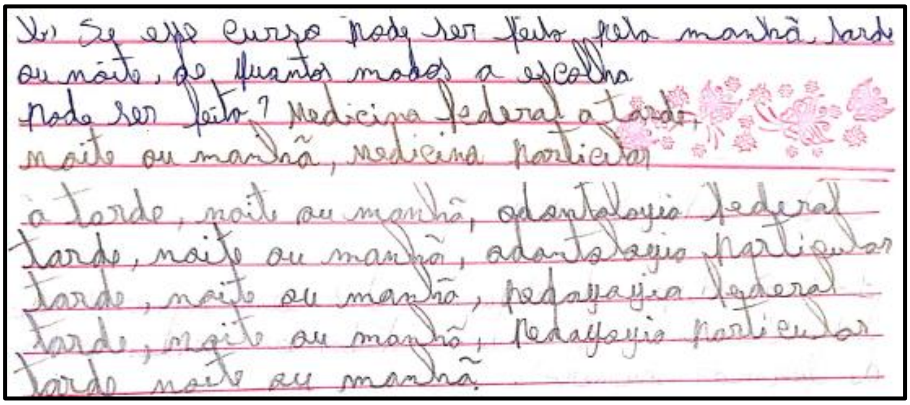
R= Medicina < particular
federal
odontologia < particulo
federal
pedagogia < particular
federal

Fonte: Teste Diagnóstico.

Embora alguns grupos de estudantes tenham se utilizado da multiplicação e tenham visto uma aproximação deste problema com o anterior, a maioria não conseguiu ou demonstrou essa percepção. Alguns apresentaram como resposta fatores financeiros que motivavam a escolha de uma faculdade específica, mostrando que não houve a compreensão clara do problema. Algumas listagens apareceram lembrando tabelas, mas nenhuma tabela foi criada de forma intencional ou estratégica.

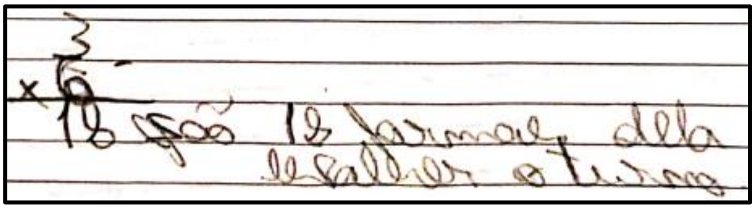
Passando para o item b), obtivemos um índice de acertos de 35,13%. As tentativas de resolução eram voltadas, em sua maioria, a listagem das possibilidades. Como nos outros quesitos, houve percepção em relação à multiplicação, mas apenas em uma pequena parcela dos grupos. Também houve algumas representações para as possibilidades que remetiam à diagramas e tabelas. Podemos observar a seguir algumas das soluções que nos foi proposta.

Figura 33: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 2B (1).


b) Se esse curso pode ser feito pela manhã, tarde ou noite, de quantos modos a escolha pode ser feita? Medicina federal a tarde, noite ou manhã, medicina particular a tarde, noite ou manhã, odontologia federal tarde, noite ou manhã, odontologia particular tarde, noite ou manhã, pedagogia federal tarde, noite ou manhã, pedagogia particular tarde, noite ou manhã.

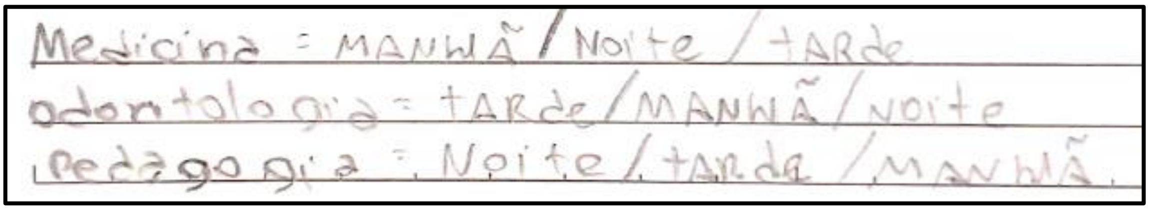
Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 34: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 2B (2).


3
×6
18 são 18 formas dela escolher o turno

Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 35: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 2B (3).


Medicina = MANHÃ / Noite / tarde
odontologia = tarde / MANHÃ / noite
pedagogia = Noite / tarde / MANHÃ.

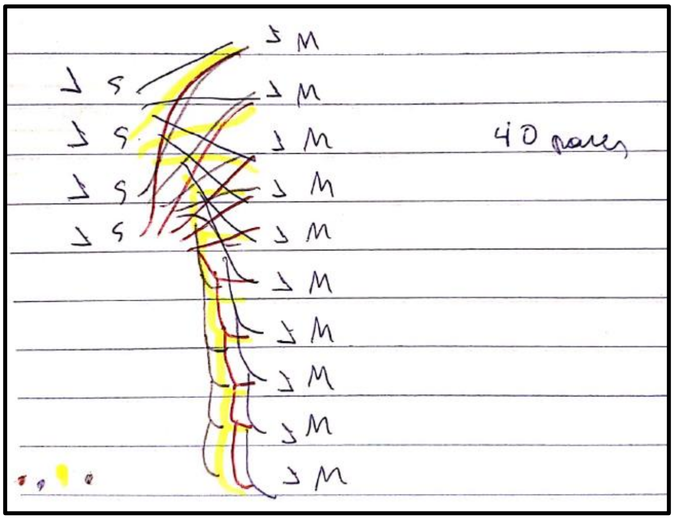
Fonte: Teste Diagnóstico.

Embora a contextualização e abordagem do Problema 2 tenham sido mais cotidianas e próximas da realidade dos estudantes, alguns estudantes mostraram não ter compreendido o problema, enquanto outros, mesmo aparentando compreensão, não conseguiram apresentar propostas em meio ao desejado.

**PROBLEMA 3 –** Organizando seu guarda-roupa, Maria percebeu que possui quatro pares de sapatos e pares de meias. Não tendo muito o que fazer, decidiu verificar quais combinações ficariam melhores. Para isto, testou todas as combinações de par de sapato e par de meia que poderia compor. Quantas foram as combinações testadas por Maria?

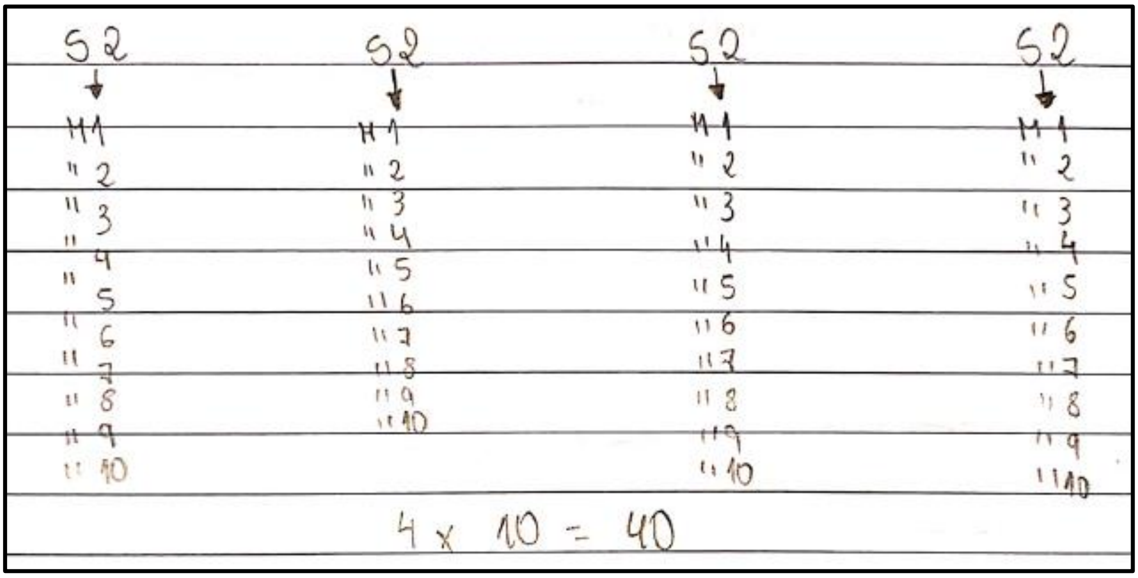
Para este problema, nos foram apresentadas 42 soluções, das quais 21 estavam corretas, nos fornecendo um índice de acertos de 50%. Nos foram apresentados mais métodos de resolução: a listagem das possibilidades e o uso da multiplicação, que têm aparecido com frequência, o diagrama e sistemas que remetem à árvore de possibilidades. Observemos a seguir algumas das resoluções apresentadas pelos estudantes.

Figura 36: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 3 (1).



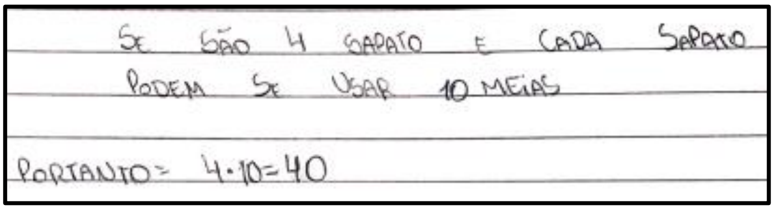

Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 37: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 3 (2).




Fonte: Teste Diagnóstico.

Figura 38: Soluções apresentadas pelos alunos – Problema 3 (3).




Fonte: Teste Diagnóstico.

Da observação e do levantamento das propostas de resolução dadas pelos alunos, temos que as representações utilizadas por eles foram: listagem, diagrama, árvore de possibilidades, tabelas (de forma indireta) e percepção do PFC. E são estas representações que serão utilizadas nas soluções previstas para os problemas que serão abordados nas etapas que estão por vir.

## 4.2. Abordando o Princípio Fundamental da Contagem

Nesta etapa, utilizaremos a aplicação de problemas envolvendo o PFC com seus princípios Aditivo e Multiplicativo, buscando a estruturação e a sistematização de um conceito que passará a ser utilizado como estratégia para solução de outros problemas.

**PROBLEMA 1 –** Uma determinada montadora de automóveis oferece um de seus modelos com a opção de pintura bicolor, ou seja, teto de uma cor e demais partes do carro de outra. Um vendedor lhe apresenta todas as cores disponíveis para ambas as partes e Glória decide comprar um carro nesta configuração. Quantas combinações de cores são possíveis sabendo que para o teto a fabricante disponibiliza três opções de cores, sendo: preto, branco e vermelho e para o restante do carro disponibiliza cinco opções, sendo elas: preto, branco, prata, marfim e vermelho?

Observação para o professor: note que a pintura seja bicolor, segundo o próprio enunciado, o teto deve ser de uma cor e as demais partes do carro de outra. É de extrema importância que os alunos se atentem a este detalhe, caso contrário, encontrarão mais casos do que os solicitados.

**Solução.** Verifiquemos possíveis soluções de acordo com as seguintes estratégias:

- ✓ Listagem das possibilidades de combinações;

Preto – Branco
Preto – Prata
Preto – Marfim
Preto – Vermelho

Branco – Preto
Branco – Prata
Branco – Marfim
Branco – Vermelho

Vermelho – Branco
Vermelho – Prata
Vermelho – Marfim
Vermelho – Preto

Totalizando 12 opções diferentes para a compra do carro bicolor.

- ✓ Elaboração de tabela;

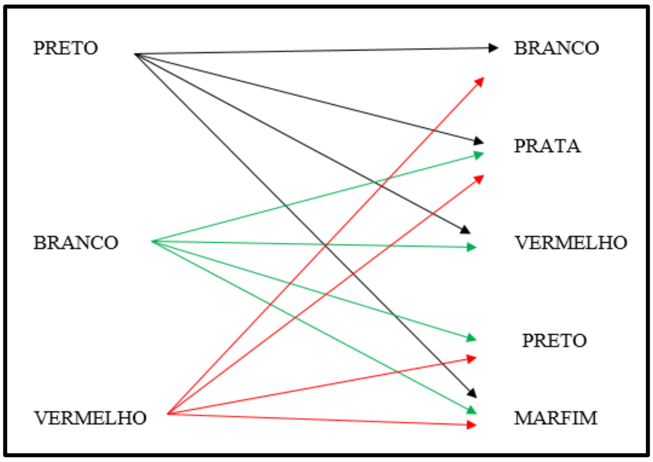
Tabela 1: Escolhas possíveis para o carro bicolor.

| | **Preto** | **Branco** | **Prata** | **Marfim** | **Vermelho** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Preto** | | Preto - Branco | Preto - Prata | Preto - Marfim | Preto - Vermelho |
| **Branco** | Branco - Preto | | Branco - Prata | Branco - Marfim | Branco - Vermelho |
| **Vermelho** | Vermelho - Preto | Vermelho - Branco | Vermelho - Prata | Vermelho - Marfim | |

Totalizando 12 opções diferentes para a compra do carro bicolor.

- ✓ Utilização de diagrama;

Figura 39: Diagrama de possibilidades para o carro bicolor.

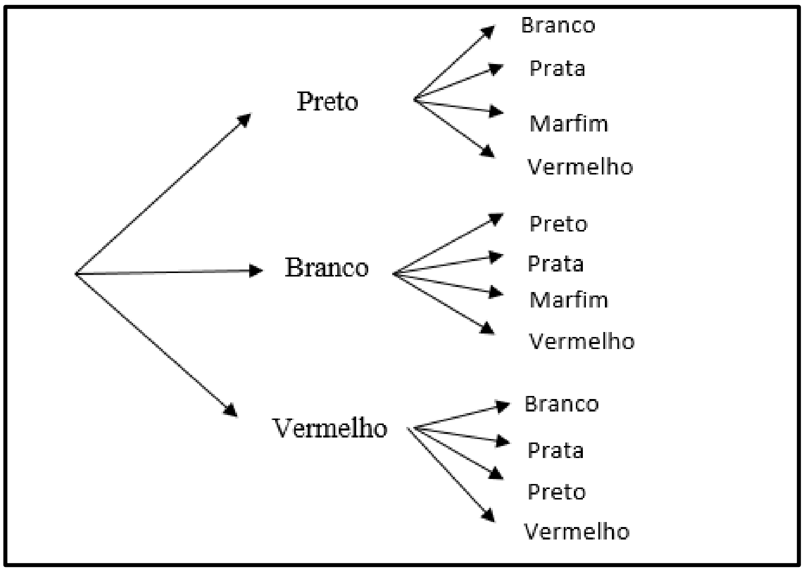



Fonte: Elaboração própria.

Totalizando 12 opções diferentes para a compra do carro bicolor.

- ✓ Construção de árvore de possibilidades;

Figura 40: Árvore de possibilidade para o carro bicolor.




Fonte: Elaboração própria.

Totalizando 12 opções diferentes para a compra do carro bicolor.

- ✓ Multiplicação das possibilidades induzindo o PFC, lembrando de retirar as possibilidades

A ideia é que os estudantes percebam, a princípio, que para cada possibilidade de cor para o teto, há cinco opções de cor para as demais partes do carro. Além disso, como isto incluiria situações que não formam uma combinação bicolor, como por exemplo Vermelho – Vermelho, precisamos retirar estes casos. O que nos fornece:

Quadro 1: Aplicação do PFC – Problema 1.

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{opções}\\\text{para o teto}}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\text{opções para}\\\text{as demais partes}}} - \underbrace{3}_{\substack{\text{opções}\\\text{não válidas}}} = \underbrace{12}_{\substack{\text{número de}\\\text{possibilidades}}}$$

É importante que, nesta aplicação, os estudantes entendam de forma clara o porquê do uso da multiplicação, uma vez que o aprimoramento deste raciocínio é o objetivo principal deste problema. Claro que muitos dos estudantes não apresentarão esta forma a princípio, mas é provável que em meio aos debates na troca e avaliação das soluções apresentadas, algum grupo apresente este método como uma forma mais rápida e direta para a solução. Caso isso não aconteça, ele pode ser apresentado como generalização de um dos métodos pelo próprio professor.

**PROBLEMA 2 –** Na escola I existem armários em que os alunos podem guardar seus materiais, como livros, lápis, entre outros. Cada aluno possui seu próprio armário que, como forma de segurança, é travado por uma fechadura eletrônica com uma senha de três dígitos (Exemplo: 222, 031, 123...). Cada digito é um algarismo de 0 a 3. Quantas possibilidades diferentes existem para a escolha da senha?

**Solução.** Verifiquemos possíveis soluções de acordo com as seguintes estratégias:

- ✓ Listagem das possibilidades de combinações;

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | 020 | 100 | 120 | 200 | 220 | 300 | 320 |
| 001 | 021 | 101 | 121 | 201 | 221 | 301 | 321 |
| 002 | 022 | 102 | 122 | 202 | 222 | 302 | 322 |
| 003 | 023 | 103 | 123 | 203 | 223 | 303 | 323 |
| 010 | 030 | 110 | 130 | 210 | 230 | 310 | 330 |
| 011 | 031 | 111 | 131 | 211 | 231 | 311 | 331 |
| 012 | 032 | 112 | 132 | 212 | 232 | 312 | 332 |
| 013 | 033 | 113 | 133 | 213 | 233 | 313 | 333 |

Totalizando 64 opções para a escolha da senha. No entanto, espera-se que os alunos percebam que existe um padrão e enumere-os, a fim de evitar a listagem efetiva de todas as possibilidades, uma vez que a quantidade de senhas iniciadas por cada um dos algarismos é a mesma.

✓ Elaboração de tabela;

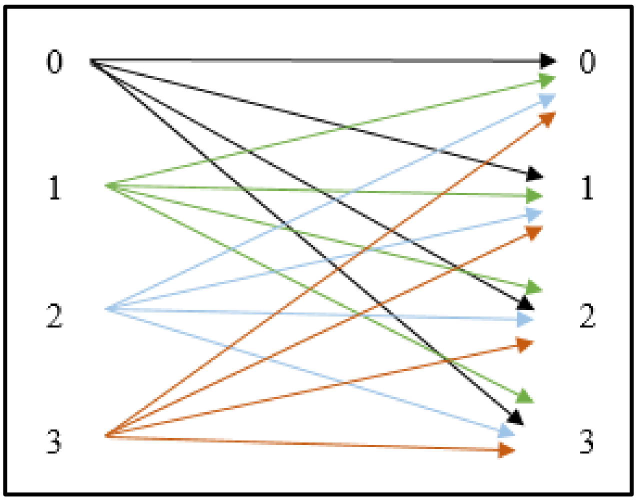
Tabela 2: Escolhas possíveis para a senha.

| | **0** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|---|
| **0** | 00 | 01 | 02 | 03 |
| **1** | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **2** | 20 | 21 | 22 | 23 |
| **3** | 30 | 31 | 32 | 33 |

A tabela nos fornece 16 possibilidades. Mas ela só apresenta dois dígitos. Espera-se que o aluno perceba, como dito anteriormente, que, para o dígito que está faltando, temos quatro opções. Portanto, teremos os valores apresentados na tabela para cada um deles, totalizando $4 \,.\, 16 = 64$ possíveis senhas.

✓ Utilização de diagrama;

Figura 41: Diagrama de possibilidades para a senha.

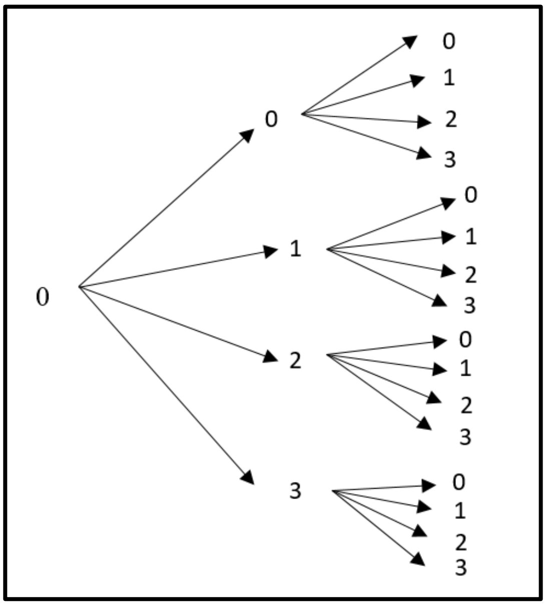



Fonte: Elaboração própria.

Assim como dito anteriormente, o diagrama fixou apenas dois dígitos, fornecendo 16 possibilidades. Como falta o terceiro dígito e para este há 4 opções, espera-se que os alunos percebam que é possível, mas desnecessário, construir 4 diagramas deste, um para cada opção de algarismo do dígito que falta. Portanto, o total de senhas será $4 \,.\, 16 = 64$.

✓ Construção de árvore de possibilidades;

Figura 42: Ramo de possibilidade para a senha.




Fonte: Elaboração própria.

Como mencionado no nome da figura, temos apenas um ramo da árvore de possibilidades deste problema. Isto é, fixado o zero como primeiro digito da senha, conseguimos formar 16 senhas distintas. Assim como nos casos anteriores, espera-se que o estudante perceba que para cada um dos outros dígitos o número de ramificações será o mesmo, nos fornecendo um total de $4\,.\,16 = 64$ possibilidades.

- ✓ Multiplicação das possibilidades induzindo o PFC;

A ideia é que os estudantes percebam que para cada um dos três dígitos da senha há quatro possibilidades, o que nos fornece:

Quadro 2: Aplicação do PFC – Problema 2.

$$\underbrace{4}_{\text{primeiro dígito}} \,.\, \underbrace{4}_{\text{segundo dígito}} \,.\, \underbrace{4}_{\text{terceiro dígito}} = \underbrace{64}_{\text{número de possibilidades}}$$

**PROBLEMA 3 –** Maria e João estão planejando seu casamento. Junto com a cerimonia e a festa, precisam decidir sobre o destino da lua de mel. Ao se dirigir a uma agência de viagens o vendedor lhe oferece diversas opções. A primeira delas é quanto ao destino: bonito; exótico; ou aconchegante. A segunda escolha a ser feita pelo casal é sobre o meio de transporte: carro; trem; ou avião. Por fim, precisam decidir sobre o tipo de hospedagem: hostel; pousada; ou hotel. Efetuando as três escolhas, de quantos modos eles podem o pacote turístico para a lua de mel?

**Solução.** Verifiquemos possíveis soluções de acordo com as seguintes estratégias:

- ✓ Listagem das possibilidades de combinações;

| | | |
|---|---|---|
| Bonito, carro, hostel | Bonito, trem, hostel | Bonito, avião, hotel |
| Bonito, carro, pousada | Bonito, trem, pousada | Bonito, avião, pousada |
| Bonito, carro, hotel | Bonito, trem, hotel | Bonito, avião, hotel |

Diante os apontamentos já feitos anteriormente, espera-se que os estudantes não sintam mais a necessidade de escrever todos os casos. Após a escrita dos primeiros, eles já poderão prever o que acontecerá com os demais. Se optando por um lugar bonito encontramos 9 possibilidades de escolha, também haverá 9 possibilidades para o lugar exótico e o aconchegante, totalizando $9 \,.\, 3 = 27$ possibilidades de escolha.

- ✓ Elaboração de tabela;

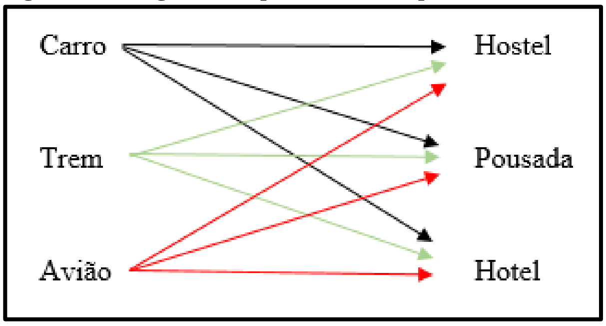
Tabela 3: Escolhas possíveis para a lua de mel.

| | **Hostel** | **Pousada** | **Hotel** |
|---|---|---|---|
| **Carro** | Carro – Hostel | Carro – Pousada | Carro - Hotel |
| **Trem** | Trem – Hostel | Trem – Pousada | Trem - Hotel |
| **Avião** | Avião – Hostel | Avião – Pousada | Avião - Hotel |

Assim como na estratégia anterior, fixado um destino, teremos a tabela de possibilidades acima, que nos fornece 9 possibilidades para escolha de transporte e hospedagem. Como há 3 opções de destino, podemos supor uma tabela para cada. Portanto, temos $3 \,.\, 9 = 27$ opções de escolha.

- ✓ Utilização de diagrama;

Figura 43: Diagrama de possibilidades para a lua de mel.

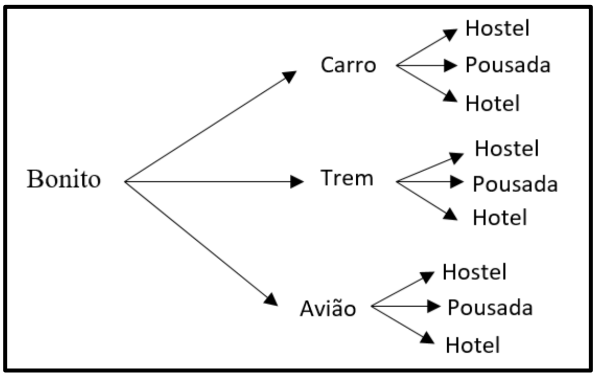



Fonte: Elaboração própria.

Mais uma vez, a estratégia consistiu em fixar um destino, o que resultou nas 9 possibilidades de escolha de transporte e hospedagem apresentados acima. Como há 3 opções de destino, podemos construir 3 diagramas como este, o que nos fornece: $3\,.\,9 = 27$ modos de escolher a viagem de lua de mel.

- ✓ Construção de árvore de possibilidades;

Figura 44: Ramo de possibilidade para a lua de mel.




Fonte: Elaboração própria.

Mais uma vez, ainda seguindo a estratégia anterior, temos um de três possíveis ramos da árvore de possibilidades. Como este ramo nos fornece 9 opções de escolha de transporte e hospedagem, temos que o número total de possibilidades para a viagem de lua de mel será dado por $3\,.\,9 = 27$.

- ✓ Multiplicação das possibilidades induzindo o PFC;

A ideia agora é que os estudantes percebam que três escolhas precisam ser feitas: destino, transporte e hospedagem. Respeitando o número de opções para cada um deles e seguindo o processo já utilizado nos problemas anteriores, obtemos:

Quadro 3: Aplicação do PFC – Problema 3.

$$\underbrace{3}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{o destino}}} \;.\; \underbrace{3}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{o transporte}}} \;.\; \underbrace{3}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{a hospedagem}}} = \underbrace{27}_{\substack{\text{número de}\\ \text{possibilidades}}}$$

Depois de propostas as soluções é a hora de debater, trocar experiências, organizar as ideias e compartilhar resultados, com o objetivo de eleger os métodos mais eficazes. É válido observar com os estudantes que nos primeiros problemas foi possível construir estratégias diversificadas, pois o número de possibilidades era menor. Com o aumento do número de possibilidades, ocorre o aumento no grau de dificuldade para a formulação dessas estratégias. Além disso, é fundamental a tentativa de uma generalização do método mais adequado e que coube ao maior número de problemas, que, neste primeiro momento, foi o PFC. Em comparativo com as aplicações e com o ponto de vista dos estudantes, o professor deve construir uma definição/conceito para o mesmo. Por fim, para que o processo de ensino-aprendizagem seja completo, deve-se ressaltar a que ramo da matemática pertence o método (Análise Combinatória) e outras aplicabilidades.

## 4.3. Abordando a Permutação e o Arranjo Simples

Nesta etapa, utilizaremos a aplicação de problemas envolvendo Permutações Simples e Arranjo. O objetivo, assim como o do tópico anterior e os que estão por vir, é estruturar e sistematizar estes e outros conceitos que sirvam para resolução ou otimização de processos resolutivos.

**PROBLEMA 1 –** Eduardo é um crítico gastronômico consagrado. Ele foi convidado a experimentar quatro pratos principais de um novo restaurante francês cujas proteínas utilizadas, uma em cada prato, são: pato, frango, filé e cordeiro. Eduardo sempre come um prato de cada vez, até o fim, para que o sabor de uma não interfira no outro. No momento do primeiro pedido, o garçom já precisa ser informado sobre a sequência de pratos que ele deseja experimentar. De quantas maneiras Eduardo pode formar esta sequência de pratos?

**Solução.** Verifiquemos possíveis soluções de acordo com as seguintes estratégias:

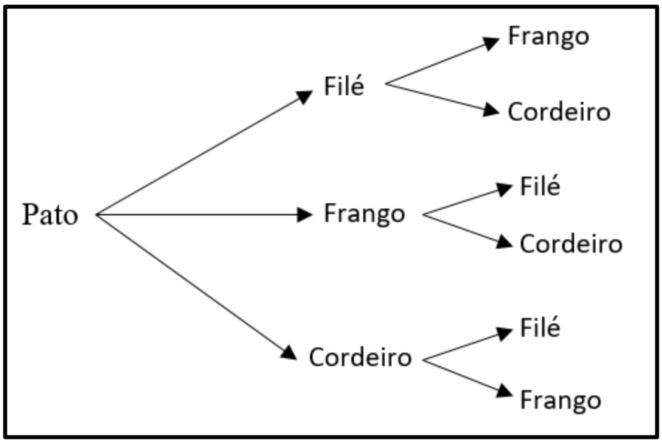
- ✓ Listagem das possibilidades de sequências;

Pato, frango, filé, cordeiro
Pato, frango, cordeiro, filé
Pato, filé, frango, cordeiro
Pato, filé, cordeiro, frango
Pato, cordeiro, frango, filé
Pato, cordeiro, filé, frango

O objetivo agora não é mais combinar todas as possibilidades possíveis, mas sim verificar todas as ordenações possíveis. Iniciando com o pato, conseguimos formar seis sequências. Conforme já utilizado na seção anterior, como há quatro possibilidades para o primeiro prato, segue que o número de sequências possíveis é: $4 \, . \, 6 = 24$.

- ✓ Construção de árvore de possibilidades;

Figura 45: Ramo de possibilidade para a sequência de pratos.




Fonte: Elaboração própria.

Mais uma vez, ainda seguindo a estratégia anterior, temos um de quatro possíveis ramos da árvore de possibilidades. Como este ramo nos fornece seis modos de ordenação dos pratos, temos que o número total de sequências possíveis será dado por $4\ .\ 6 = 24$.

- ✓ Multiplicação das possibilidades induzindo o PFC;

A ideia agora é que os estudantes percebam que há quatro opções de prato para ser escolhido como primeiro da sequência. Uma vez que esteja escolhido o primeiro, só restarão três opções para o segundo, analogamente duas para o terceiro e uma para o quarto, nos fornecendo:

Quadro 4: Aplicação do PFC na permutação – Problema 1.

$$\underbrace{\quad 4 \quad}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o primeiro}}} \ .\ \underbrace{\quad 3 \quad}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o segundo}}} \ .\ \underbrace{\quad 2 \quad}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o terceiro}}} \ .\ \underbrace{\quad 1 \quad}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o quarto}}} = \underbrace{\quad 24 \quad}_{\substack{\text{número de} \\ \text{possibilidades}}}$$

Agora o problema está voltado para as formas de se ordenar elementos, e não mais para as escolhas isoladas, o que já remete ao conceito de Permutação. Também é possível observar que ainda se faz presente o uso do PFC. De fato, ele é a base de toda a Análise Combinatória e, por este motivo, é o ponto de partida na proposta metodológica de ensin-aprendizagem em questão.

**PROBLEMA 2 –** Um shopping de uma cidade do interior do Rio Grande do Sul pretende realizar uma feira de livros. A Editora XY estará com um estande nessa feira e selecionou 5 livros distintos, grandes, de mesmo tamanho, e 4 livros distintos, pequenos, de mesmo tamanho. Eles serão expostos em uma prateleira junto com um único exemplar de Descobrindo a Lua, mais nova obra da editora. De quantas maneiras diferentes os livros podem ser alinhados na prateleira, se os de mesmo tamanho devem ficar juntos e Descobrindo a Lua deve ficar em um dos extremos?

**Solução.** Tendo em vista que a proposta se assemelha a anterior e, consequentemente, às da seção anterior, acredita-se que os estudantes já busquem uma resolução envolvendo o PFC ou um método que se assemelhe a este. No entanto, a grau de dificuldade foi elevado consideravelmente. De fato, agora além da permutação dos objetos, precisamos pensar nos agrupamentos solicitados. Por este motivo, é interesse incitar os alunos a desenhar ou organizar mentalmente algumas possíveis sequências, recomendando uma separação dos livros respeitando o critério solicitado no problema.

Com a separação, espera-se que os alunos consigam enxergar que haverá dois blocos de objetos: o dos livros grandes e o dos livros pequenos. Portanto, pode-se fazer a permutação entre os blocos, algo análogo ao do primeiro problema, o que resulta em $2\,.\,1 = 2$ possibilidades. Além disso, o exemplar de Descobrindo a Lua (DL) pode ser colocado ao início ou final da organização, o que resulta em duas possibilidades para este. Por outro lado, os livros de cada bloco também podem ser permutados, o que nos fornece:

Quadro 5: Aplicação do PFC na permutação – Problema 2.

$$\underbrace{2\,.\,1}_{\substack{\text{permutação}\\ \text{dos blocos}}}\;.\;\underbrace{2\,.\,1}_{\substack{\text{extremos para}\\ \text{o exemplar DL}}}\;.\;\underbrace{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}_{\substack{\text{permutação}\\ \text{dos grandes}}}\;.\;\underbrace{4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}_{\substack{\text{permutação}\\ \text{dos pequenos}}} = \underbrace{11.520}_{\substack{\text{número de}\\ \text{possibilidades}}}$$

**PROBLEMA 3 –** Para incentivar um aprofundamento na disciplina de matemática, o colégio A decide promover uma olimpíada para os 10 melhores alunos da escola. Serão premiadas as três primeiras colocações com medalhas de ouro, prata e bronze, com uma viagem, cujo destino depende da colocação do aluno, e com materiais didáticos. Levando em consideração que todos os alunos partilham de mesmas chances, quantos rankings distintos podem ser formados?

**Solução.** Agora as combinações saem um pouco do campo das escolhas e vão para o campo da seleção. De um grupo de 10 estudantes, deseja-se selecionar 3 para permutar as premiações de 1º, 2º e 3º lugar. Espera-se que, em analogia com o problema anterior, os alunos percebam que há 10 possibilidades para a primeira colocação, 9 para a segunda colocação e 8 para a terceira colocação e que eles não se disponham mais a fazer listagem de possibilidades, mas sim aplicações do PFC, o que nos forneceria:

Quadro 6: Aplicação do PFC no arranjo – Problema 3.

$$\underbrace{10}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o 1º lugar}}} \cdot \underbrace{9}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o 2ª lugar}}} \cdot \underbrace{8}_{\substack{\text{opções para} \\ \text{o 3ª lugar}}} = \underbrace{720}_{\substack{\text{número de} \\ \text{possibilidades}}}$$

**PROBLEMA 4 –** Em um hospital há 12 enfermeiras, igualmente competentes. Mediante a falta de organização e após reclamações por falta de coordenação no hospital, o mesmo decidiu promover quatro enfermeiras para os cargos de coordenadora, subcoordenadora, chefe de departamento e chefe de laboratório. Sabendo que Larissa, uma das enfermeiras da equipe, tem espírito de liderança e já deixou claro que não aceitaria o cargo de subcoordenadora, de quantos modos as enfermeiras podem ser promovidas aos cargos?

**Solução.** Neste momento, espera-se que os estudantes façam uma conexão com o problema anterior, enfatizando suas semelhanças e diferenças para propor sua solução, mostrando, assim, se os objetivos por trás dos problemas trabalhados estão sendo alcançados. Acredita-se que eles consigam enxergar semelhança em relação ao agrupamento, com ordenação, dos elementos disponíveis, o que nos fornece:

Quadro 7: Aplicação do PFC no arranjo – Problema 4 (1).

$$\underbrace{12}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ coordenadora}}} \cdot \underbrace{11}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ subcoordenadora}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ chefe dep.}}} \cdot \underbrace{9}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ chefe lab.}}} = \underbrace{11.880}_{\substack{\text{número de} \\ \text{possibilidades}}}$$

Mas é preciso enfatizar e alerta os discentes sobre possíveis detalhes nos problemas, como o fato de que Larissa não poderá ser subcoordenadora. Diante desta condição, basta que percebam que deve-se retirar do total de possibilidades para a promoção da equipe, todos os casos em que considera-se Larissa como subcoordenadora. Para isto, deve-se fixar Larissa como subcoordenadora e verificar quantas são as possíveis promoções para os outros cargos.

Quadro 8: Aplicação do PFC no arranjo – Problema 4 (2).

$$\underbrace{11}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ coordenadora}}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ chefe dep.}}} \cdot \underbrace{9}_{\substack{\text{possibilidades} \\ \text{p/ chefe lab.}}} = \underbrace{990}_{\substack{\text{número de} \\ \text{Possibilidades}}}$$

Tendo em vista que encontraram 11.880 possibilidades gerais para os agrupamentos, isto é, para as possibilidades de promoção das enfermeiras, das quais 990 não são considerados válidas, pois apresentam Larissa no cargo de subcoordenadora, o número de modos de agrupa-las da forma solicitada será dado por:

Quadro 9: Assimilação dos casos válidos – Problema 4 (3).

$$\underbrace{11.880}_{\text{possibilidades gerais}} - \underbrace{990}_{\text{Larissa como subcoordenadora}} . = \underbrace{10.890}_{\text{número de possibilidades}}$$

Depois de propostas as soluções é a hora, mais uma vez, de debater, trocar experiências, organizar as ideias e compartilhar resultados, conforme ocorrido na seção anterior. Precisamos que os alunos compreendam as diferenças entre os dois primeiros problemas e os dois últimos. Enquanto os dois primeiros tratavam apenas de uma mudança de ordem, uma permuta, os dois últimos abordaram a seleção de um grupo ordenado da amostra disponível. A partir destas diferenças e baseado nos propostos apresentados pelos estudantes, o professor pode inserir os termos “permutação” e “arranjo”, enfatizando que são especificidades de problemas ainda envolvendo o PFC.

## 4.4. Abordando a Combinação Simples

Finalmente, utilizaremos a aplicação de problemas envolvendo Combinações Simples. O objetivo, assim como os dos tópicos anteriores, é estruturar e sistematizar este e outros conceitos que sirvam para resolução ou otimização de processos resolutivos, buscando diferenciar agrupamentos ordenados de agrupamentos não ordenados, isto é, grupos que não diferem somente pela ordem de seus elementos.

**PROBLEMA 1 –** Um resort está prestes a inaugurar suas instalações. Uma de suas ações de inauguração é um sorteio, em seu Instagram, de um final de semana *all inclusive* com direito a dois acompanhantes. Raquel foi sorteada, mas, por ser menor de idade, seus pais só autorizarão sua ida se acompanhada de dois de seus irmãos. Sabendo que ela possui cinco irmãos: Alberto (A), Bernardo (B), Carlos (C), Danilo (D) e Eduardo (E), de quantos modos diferentes ela pode escolher seus dois acompanhantes, no intuito de curtir seu prêmio?

**Solução.** Espera-se que o aluno perceba que, embora se assemelhe com os problemas vistos anteriormente, a permuta, isto é, mudança realizada apenas em relação a ordem dos elementos, não gera uma nova possibilidade.

- ✓ Listagem das possibilidades;

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A e B | B e A | C e A | D e A | E e A |
| A e C | B e C | C e B | D e B | E e B |
| A e D | B e D | C e D | D e C | E e C |
| A e E | B e E | C e E | D e E | E e D |

A listagem é composta por 20 elementos, mas os alunos devem verificar a partir do enunciado, que a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades, uma vez que a escolha por A e B é a mesma que B e A, Raquel teria os mesmos acompanhantes. Como a escolha feita é por 2 elementos, e eles podem ser permutados de 2 modos, temos que cada combinação possível está contabilizada 2 vezes na tabela. Logo, o número de possibilidades para a escolha dos acompanhantes é dado por $20 \div 2 = 10$ possibilidades.

- ✓ Multiplicação das possibilidades induzindo o PFC, com divisão pela permutação dos elementos de cada agrupamento;

Partindo dos conceitos já adquiridos, podemos contatar que há 5 possibilidades de escolha para o primeiro acompanhante e 4 para o segundo, o que nos fornece:

Quadro 10: Aplicação do PFC na combinação – Problema 1.

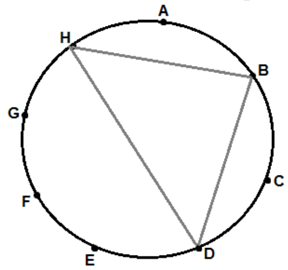
$$\underbrace{5}_{\text{opções para o primeiro}} \cdot \underbrace{4}_{\text{opções para o segundo}} = \underbrace{20}_{\text{número de possibilidades}}$$

Agora, conforme já visto na estratégia anterior, é preciso eliminar os casos repetidos. Como são dois elementos, eles podem se permutar de 2 modos. Então, para retirar os casos repetidos, basta dividir o total de possibilidades por 2. Portanto, há 10 modos de Raquel escolher seus acompanhantes.

**PROBLEMA 2 –** Sobre uma circunferência são marcados oito pontos: A, B, C, D, E, F, G e H. Com vértices sobre esses pontos, quantos triângulos diferentes podemos compor?

**Solução.** Espera-se que o aluno perceba que, assim como no problema anterior, a ordem de escolha das letras para os vértices do triângulo não é relevante, uma vez que uma alteração na ordem das mesmas não gera triângulos diferentes. Isto é, o triângulo BDH é o mesmo que o BHD, que é o mesmo que HDB, ou qualquer outra permutação, conforme pode ser observado na figura a seguir.

Figura 46: Circunferência do problema 2.




Fonte: Elaboração própria.

Portanto, como temos 8 opções de pontos para o primeiro vértice, 7 para o segundo e 6 para o terceiro, teríamos:

Quadro 11: Aplicação do PFC na combinação – Problema 2 (1).

$$\underbrace{8}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{o primeiro}}} \cdot \underbrace{7}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{o segundo}}} \cdot \underbrace{6}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{o terceiro}}} = \underbrace{336}_{\substack{\text{número de}\\ \text{possibilidades}}}$$

Mas, como a permutação das letras escolhidas para os vértices não gera um novo triângulo, precisamos eliminar os agrupamentos repetidos e, como os vértices de cada triângulo podem se permutar 6 vezes, basta dividirmos o resultado encontrado por 6, o que nos fornece um total de 56 triângulos.

**PROBLEMA 3 –** Luiz, depois de passar mal algumas vezes, percebeu que não estava se alimentando adequadamente. Por este motivo, está passando por uma reeducação alimentar. Sua nutricionista recomendou que, em seu café da manhã, ele tomasse uma vitamina de duas ou três frutas, escolhidas dentre seis pré-selecionadas por ela. De acordo com as possibilidades de escolhas para as frutas, quantas vitaminas diferentes poderão ser feitas para ele?

**Solução.** Espera-se que, a princípio, os alunos se atentem que a vitamina pode ser feita com duas ou três frutas. Isto é, temos duas formas distintas de compor os sabores. Visto que a ordem de escolha das frutas não altera o sabor final da vitamina e baseados nos problemas anteriores, acredita-se que os alunos já percebam que, ao final das contas, deve-se retirar as possíveis permutações dos grupos. Começando com a vitamina de duas frutas, obtemos:

Quadro 12: Aplicação do PFC na combinação – Problema 3 (1).

$$\underbrace{6}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{a primeira}}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\text{opções para}\\ \text{a segunda}}} \cdot = \underbrace{30}_{\substack{\text{número de}\\ \text{possibilidades}}}$$

Como a permutação das duas frutas escolhidas não gera um novo sabor e, sabendo que há 2 modos possíveis de permutar as duas frutas, obtemos, nesta primeira etapa, um total de $30 \div 2 = 15$ vitaminas. Por outro lado, a vitamina também pode ser feita com três frutas, o que nos fornece:

Quadro 13: Aplicação do PFC na combinação – Problema 3 (2).

$$\underbrace{6}_{\text{opções para a primeira}} \cdot \underbrace{5}_{\text{opções para a segunda}} \cdot \underbrace{4}_{\text{opções para a terceira}} = \underbrace{120}_{\text{número de possibilidades}}$$

Mais uma vez, como a permutação das três frutas escolhidas não gera um novo sabor e, sabendo que há 6 modos possíveis de permutar as duas frutas, obtemos, nesta segunda etapa, um total de $120 \div 6 = 20$ vitaminas. Portanto, há $15 + 20 = 35$ vitaminas diferentes para Luiz tomar.

Chegamos ao momento, mais uma vez, da troca de experiência, debate, compartilhamento das soluções encontradas e sistematização do método considerado mais eficaz. É o momento em que se é constituído o conceito do que se fora utilizado pelos alunos. O professor deve aproveitar o espaço para tentar esclarecer, caso ainda não se tenha conseguido, as diferenças entre os agrupamentos ordenados (arranjos) e não ordenados (combinações). Também é interessante que se faça um exemplo envolvendo uma grande quantidade de termos, a fim de se denotar o fatorial de um número e completar os conceitos fundamentais da Análise Combinatória.

É valido ressaltar que durante todo percurso priorizamos a não utilização de fórmulas, deixando a resolução do problema como eixo central, buscando sistematizar as estratégias do PFC e a compreensão do que denotamos por Permutação, Arranjo e Combinação. Acreditamos que, sob este ponto de vista, a Análise Combinatória se torne mais atrativa e significativa para os estudantes.

# Considerações Finais

A partir dos dados apresentados, dos estudos realizados e da experiência em sala de aula, consideramos que os métodos ativos de aprendizagem apresentam-se como importantes ferramentas de ensino para as instituições educacionais. Em um mundo onde o dinamismo e a criatividade parecem dominar muitos dos aspectos da vida do ser humano, métodos clássicos de aprendizagem parecem cada vez mais ineficazes e menos motivadores. Na busca pelo interesse e desenvolvimento das competências de nossos alunos, nos deparamos com a necessidade de mudança, de evolução... De fato, a estrutura metodológica chamada de Ensino Médio vem evoluindo constantemente e, junto com ela, todo o meio a qual pertencemos, mas a maioria das escolas permanecem paradas. Apesar de toda evolução tecnológica, didática, emocional, o método tradicional expositivo toma conta das salas de aula.

Na Matemática, a sermos mais específicos, na Análise Combinatória, os resultados insatisfatórios podem ser frutos da monotonia. Por este motivo nossa proposta veio como uma tentativa de intervenção ao grande problema que a educação vem sofrendo. Não podemos considerar muito a respeito de sua validez, pois, por questões de tempo e planejamento anual das escolas, não tivemos oportunidade de aplica-la.

Diante o fato de nossa experiência ser totalmente voltada ao Ensino Médio, e tendo em vista as principais dificuldades apresentadas pelos estudantes, nossa proposta foi motivada pelos obstáculos e oportunidades que, tão frequentemente, se verificam em nosso cotidiano: alunos desinteressados pela matéria, a Análise Combinatória ser considerada um terror pelos professores e alunos, os baixos índices de acertos em relação à temática no Enem, a fácil problematização do conteúdo, a facilidade de rejeição à fórmulas, entre outras. Estes pontos devem ser utilizados como base ou inspiração para propostas metodológicas mais ativas.

É fácil utilizar desculpas de que não há recursos suficientes ou espaço suficiente para a aplicação de uma metodologia ativa específica, mas porque não as moldas para que seja possível sua utilização? Não existe só uma metodologia, precisamos explora-las, testa-las, a fim de encontrar a que mais se enquadra para cada contexto. Particularmente, somos adeptos a resolução de problemas, pois se encaixa perfeitamente na proposta de ensino da Matemática e não exige mais do que poucas adaptações para serem utilizadas. Nos acostumamos ao conformismo e nos sentimos incapazes de evoluir como o nosso meio, mas precisamos tentar. “Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema” (PÓLYA).

# Referências

ALMEIDA, Adriana Luziê de. *Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática: um estudo de caso com o 2º ano do Ensino Médio.* 2010. 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto De Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

AZEVEDO, Rodrigo. *História da Educação no Brasil*. Gazeta do Povo. Disponível em: <https://www.gazetadopovo.com.br/educacao/a-historia-da-educacao-no-brasil-uma-longa-jornada-rumo-a-universalizacao-84npcihyra8yzs2j8nnqn8d91/>. Acesso em: 07 de agosto de 2019.

BACICH, Lilian; MORAN, José. *Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora: Uma Abordagem Teórico-Prática*. 1ª Edição. Editora Penso: São Paulo, 2017.

BARBOSA, Eduardo Fernandes; MOURA, Dárcio Guimarães de. *Metodologias ativas de aprendizagem na Educação Profissional e Tecnológica*. Boletim Técnico do Senac, Rio de Janeiro, v. 39, n.2, p.48-67, maio/agosto 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza; ROCHA, Cristiane de Arimatéa; AZEVEDO, Juliana. *Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica*. Boletim de Educação Matemática, vol. 29, n 53, p. 1348-1368, dez. 2015.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum – 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/BNCC-APRESENTACAO.pdf - BNCC 2015>. Acesso em: 08 de agosto de 2019.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/bncc-2versao.revista.pdf - BNCC 2016>. Acesso em: 08 de agosto de 2019.

BRASIL. Base Nacional Curricular Comum. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf - BNCC 2018>. Acesso em: 08 de agosto de 2019.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil, de 5 de outubro de 1988. Diário Oficial da União, seção 1, página 1, 5 out. 1988.

BRASIL. Decreto-Lei n° 4.244, de 9 de abril de 1942. Lei orgânica do ensino secundário Diário Oficial da União, seção 1, página 5798, 10 abr. 1942.

BRASIL. Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – 2017. Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/conteudo/ideb-2017-o-que-podemos-aprender-mesmo-quase-sem-novidades>. Acesso em: 11 de agosto de 2019.

BRASIL. Lei n° 4.024, de 20 de dezembro de 1961. Fixa as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da União, Seção 1, página 11429, 27 dez. 1961.

BRASIL. Lei n° 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa Diretrizes e Bases para o ensino de 1° e 2º graus, e dá outras providências. Diário Oficial da União, seção 1, página 6377, 12 ago. 1971.

BRASIL. Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, seção 1, página 27833, 23 dez. 1996.

BRASIL. Lei 13.415, de 16 de fevereiro de 2017. Altera as Leis n º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, e 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho - CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Diário Oficial da União, seção 1, página 1, 17 fev. 2017.

BRASIL. Novo Ensino Médio. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/>. Acesso em 09 de agosto de 2019.

BRASIL. Orientações curriculares – 2008. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/ seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: acesso em 12 de agosto de 2019.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf - PCN 2000>. Acesso em: 10 de agosto de 2019.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais – Livro de Matemática. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> Acesso em: 10 de agosto de 2019.

BRASIL. Plano Nacional de Educação - 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/485745/Plano+Nacional+de+Educa%C3%A7%C3%A3o+PNE+2014-2024++Linha+de+Base/c2dd0faa-7227-40ee-a520-12c6fc77700f?version=1.1>. Acesso em: 05 de agosto de 2019.

BRASIL. Prova do Exame Nacional do Ensino Médio – 2013. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2013/caderno_enem2013_dom_amarelo.pdf - Prova ENEM 2013>. Acesso em: 09 de agosto de 2019.

BRASIL. Prova do Exame Nacional do Ensino Médio – 2005. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2005/2005_amarela.pdf - Prova ENEM 2005>. Acesso em: 09 de agosto de 2019.

BRASIL. Prova do Exame Nacional do Ensino Médio – 2015. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2015/CAD_ENEM%202015_DIA%202_05_AMARELO.pdf>. Acesso em: 09 de agosto de 2019. – Prova ENEM 2015

BRASIL. Prova do Exame Nacional do Ensino Médio. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2016/CAD_ENEM_2016_DIA_2_05_AMARELO.pdf - Prova ENEM 2016>. Acesso em: 09 de agosto de 2019.

CEESD. Pirâmide de Glasser. Disponível em: <http://www.ceesd.org.br/piramide-de-aprendizagem-de-william-glasser/>. Acesso em: 05 de agosto de 2019.

COUTO, Monique de Andrade da Conceição. *Resolução de Problemas de Análise Combinatória e Aplicação na Lousa*. 2019. 128f. Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019.

DANTE, Luiz Roberto. *Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática / Luiz Roberto Dante*. 1. ed. - São Paulo: Ática, 2011.

DURO, Mariana Lima. *Análise combinatória e construção de possibilidades: O raciocínio formal no Ensino Médio*. 2012. 106f. Dissertação - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

FGV. *Reformas Educacionais*. Disponível em: https://cpdoc.fgv.br/sites/default/files/verbetes/primeira-republica/REFORMAS%20EDUCACIONAIS%20.pdf>. Acesso em: 04 de agosto de 2019.

GIORDANO, Cassio Cristiano; SILVA, Danilo Saes Corrêa da. *Metodologias ativas em Educação Matemática: a abordagem por meio de projetos na Educação Estatística*. Revista de Produção Discente em Educação Matemática, vol. 6, n. 2, 2017.

MENINO, Fernanda dos S. *Resolução de Problemas no Cenário da Matemática Discreta*. 2013. 290f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes dos Santos de. *Análise combinatória: raciocínio recursivo e processos sistemáticos de enumeração*. 2015. 104f. Dissertação de mestrado em matemática – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2015.

OLIVEIRA, Mireli Morais de; LINS, Isnara Mendes. *Caracterização do conhecimento combinatório dos alunos do 3º ano do ensino médio*. 2016. 12f. Artigo Cientifico – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

OLIVEIRA, Santana; SANTANA, Erivalda. *O desempenho de estudantes do ensino médio em situações problema de análise combinatória*. 2013. 25f. Artigo Cientifico – Universidade Federal de Santa Cruz, Santa Cruz, 2013.

PAIVA, Manoel. *Matemática. V. 2*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

PEIXOTO, Priscilla Costa. *EXPECTATIVA versus REALIDADE: A Trigonometria e os Exames de Acesso à Universidade Federal da Paraíba.* 2016. 51f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Cultura e Esportes. *Política de Ensino e Escolarização Básica*. Coleção Professor Paulo Freire. Recife: SECE, 1998.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Elizabete de Souza Rosa. *O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica*. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n 1, p. 30 – 52, 2010.

PICADO, Jorge. *Estruturas Discretas: Textos de Apoio*. Universidade de Coimbra, 2009.

PÓLYA, George. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. 2ª reimpressão. Editora Interciência: Rio de Janeiro, 1995.

RELLY, Alisson Rogério. *Um Roteiro para Criação de Conteúdo Digital Baseado na Metodologia de Resolução de Problemas*. 2019. 78f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019.

RIBEIRO, Geovani Henrique. *Matemática, Aprendizagem Baseada em Problemas: meotodologia inovadora no 9° ano do ensino fundamental de uma escola pública*. 2019. 120f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Góias, Catalão, 2019.

ROMANELLI, Otaiza de Oliveira. *História da Educação no Brasil*. 40ª edição. Editora Vozes: Petropolis, 2014.

SANTOS, Paula Eugenia dos. *Resolução de Problemas como uma Estratégia Didática para o Ensino da Matemática*. 2019. 48f. Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

SANTOS, Rulian Rocha dos. *Breve histórico do ensino médio no brasil*. 2011. 14f. Artigo Cientifico – Universidade Estadual de Santa Cruz, Santa Cruz, 2010.

SILVA, Jessé Carvalho da. *A Álgebra Linear no Ensino Básico*. Dissertação - Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), Mossoró, 2013.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. *Análise Combinatória no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.* 2010. 344f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SOUZA, Samir Cristino de; DOURADO, Luís. *Aprendizagem baseada em problemas (abp): um método de aprendizagem inovador para o ensino educativo*. Revista Holos, v. 5, p. 182-200, out. 2015.

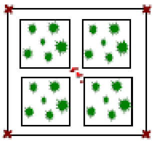
SUPER PROFESSOR. *Questões de Análise Combinatória*. Disponível em: https://www.sprweb.com.br/mod_app/index.php>. Acesso em 11 de agosto de 2019.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristine Hopner. *Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica*. 2004. 13f. Artigo Cientifico - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2004.

# ANEXO A

*Situação 1* - Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinho ou copinho. Tem 4 sabores diferentes: menta, baunilha, chocolate, morango. Maria quer um sorvete de uma bola, de quantas maneiras diferentes ela tem para escolher?

*Situação 2* – Um pedestre encontra-se no meio da praça abaixo. Em cada canto da praça tem uma saída. Quantos caminhos ele pode seguir para sair da praça, sem pisar nos canteiros e sem passar pelo mesmo caminho duas vezes? Ele sairá pela primeira saída que encontrar.



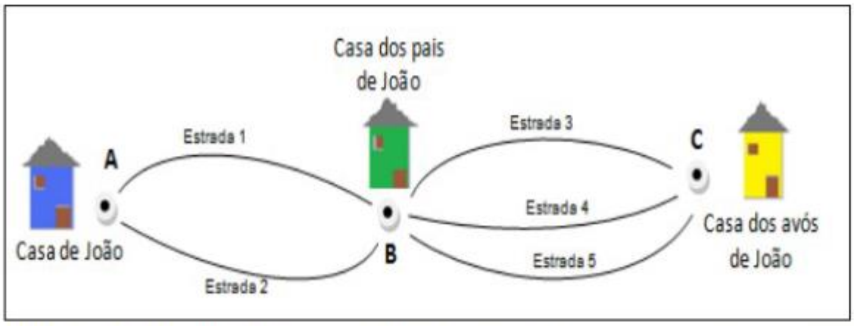
*Situação 3* - Márcia pode formar 20 conjuntos diferentes combinando uma blusa e uma calça. Sabemos que ela tem 5 blusas diferentes, quantas calças diferentes ela tem?

*Situação 4* - Lucas precisa criar uma senha para acessar um jogo na internet, porém a senha só pode ter as letras A, B, C e o número 1. De quantas maneiras diferentes ele pode criar sua senha com as 3 letras e o número, sem que haja repetições?

*Situação 5* - Num shopping para ir do 1° andar para a praça de alimentação que fica no 2° andar, uma pessoa pode escolher entre 3 escadas rolantes para subir para a praça, e 5 escadas rolantes para descer ao 1° andar. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode subir e descer do 1° andar para a praça de alimentação do shopping?

# ANEXO B

1) João vai visitar seus avós, mas antes deve passar pela casa de seus pais. De sua residência a casa de seus pais, há duas estradas e da casa de seus pais para a casa de seus avós há três estradas. De quantas maneiras diferentes João pode ir de sua casa até a casa de seus avós.




O desenho lhe ajudou a responder a questão?

2) Da cidade A ate a cidade B pode-se fazer a viagem de trem ou de navio. Existem duas companhias ferroviárias e duas de navegação á disposição e em todas há 3 tipos de passagem: 1ª classe, 2ª classe e econômica. De quantas modos uma pessoa pode fazer sua viagem de A ate B.

3) De quantas maneiras diferentes Bia poderá se vestir se ela possui quatro blusas(A, B, C, D) e três saias(1, 2, 3)? (Enumere todas as possibilidades que ela tem de se vestir)