UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

GRAFOS:
UMA EXPERIÊNCIA EM TURMAS MILITARES DOS ENSINOS MÉDIO E FUNDAMENTAL

RODRIGO CESÁRIO DE AQUINO

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GRAFOS:
UMA EXPERIÊNCIA EM TURMAS MILITARES DO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL

RODRIGO CESÁRIO DE AQUINO

Sob a Orientação do Professor

Montauban Moreira de Oliveira Júnior

Dissertação submetida como requisito parcial para a aprovação no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Setembro de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

AQUINO, RODRIGO CESÁRIO DE, 1989-
A657g GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA EM TURMAS MILITARES DOS ENSINOS MÉDIO E FUNDAMENTAL / RODRIGO CESÁRIO DE AQUINO. - NOVA IGUAÇU, 2019.
154 f.: il.

Orientador: MONTAUBAN MOREIRA DE OLIVEIRA JÚNIOR. Dissertação (Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT, 2019.

1. DEFINIÇÕES INICIAIS SOBRE GRAFOS. 2. CICLOS EULERIANOS E CAMINHOS SEMIEULERIANOS. 3. ALGORITMO DE DIJKSTRA. 4. COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM GRAFOS. I. MOREIRA DE OLIVEIRA JÚNIOR, MONTAUBAN, 1981-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Rodrigo Cesário De Aquino

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 05 / 09 /2019

____

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ (Orientador)

____

Orlando dos Santos Pereira. Dr. UFRRJ

____

Gladson Octaviano Antunes. Dr. UNIRIO

Dedico este trabalho à mulher mais maravilhosa desse mundo, que nunca poderá me ver mestre. Mãe, como sinto sua falta.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha esposa, Fabiana, por ter sido desde sempre a mulher mais compreensível e amorosa desse mundo, abdicando das suas necessidades para que eu pudesse vir a concluir esse trabalho com perfeição e sem muitos contratempos.

Agradeço à minha filha, Júlia, por ter tido paciência todas as vezes que não pude brincar e por ser a criança mais pura e sensacional da qual tive o prazer de ser pai.

Agradeço ao meu filho, Iuri que ainda se encontra na barriga da minha esposa, mas já é amado incondicionalmente, fazendo com que esse amor me impulsione a terminar meu mestrado de forma honrosa.

Agradeço ao meu pai, Reinor, que sempre teve como objetivo de vida entregar ao mundo os dois filhos formados e dignos, e com muita excelência, e mesmo sem demonstrar muito afeto fez isso.

Agradeço ao meu irmão, Roger, que sempre me teve como alguém a se seguir, e por isso me forçava a sempre tomar as melhores decisões para que as decisões dele também pudessem ser as melhores.

Agradeço à minha mãe, Ildete, que, mesmo não estando mais aqui em carne, foi peça fundamental com seu amor e dedicação a mim, fazendo com que eu extraísse o melhor de mim, com intuito de deixá-la orgulhosa.

Agradeço ao meu sogro, Jaime, e à minha sogra, Nanci, por todo carinho a mim depositado, fazendo com que eu me sentisse parte da família.

Agradeço aos meus familiares que sempre acreditaram no meu potencial, dando a mim forças para prosseguir.

Agradeço aos meus colegas do mestrado que fizeram essa turma se tornar uma família, onde tudo acabava se tornando muito mais fácil.

Agradeço muito ao meu orientador, prof. Doutor Montauban Moreira de Oliveira Júnior, que foi extremamente atencioso e aplicável, nunca me deixou desanimar e sempre se manteve rígido ao fato de eu ter que construir um trabalho qualificado, fazendo com que eu perseguisse esse objetivo.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001.

This study was financed in part by the coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior – Brasil (CAPES) – Finance code 001.

RESUMO

Aquino, Rodrigo Cesário. **Grafos: uma experiência em turmas militares dos ensinos médio e fundamental. 2019.** 154 páginas. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

Este trabalho tem por objetivo analisar, por meio de um estudo de caso, uma experiência com problemas envolvendo conceitos e técnicas básicas de Teoria de Grafos numa turma da 3° série militar e numa turma do 9° ano militar da rede particular de ensino, totalizando 80 alunos. São alunos que normalmente se preparam para as provas dos mais complexos e concorridos concursos militares do Brasil. A aplicação desse trabalho foi realizada no período entre outubro e novembro do ano de 2018, e contou com um total de 4 aulas de 50 minutos cada. As aulas foram separadas da seguinte forma: na primeira aula foi aplicado um questionário motivacional, adaptado do questionário de Gontijo (com o intuito de coletar informações essencialmente relativas a hábitos de estudo), e um teste, com quatro problemas que podem ser resolvidos tanto com técnicas de Grafos quanto com técnicas do currículo tradicional dos alunos. Na segunda e na terceira aulas, os conceitos e técnicas sobre grafos foram introduzidos em sala de aula com a participação ativa dos alunos. Os alunos eram levados a desenvolver e descobrir as técnicas através da indução do professor. Na quarta aula foi aplicado um segundo teste, nos moldes do primeiro, na qual os alunos já podiam usar as ferramentas absorvidas nas aulas 2 e 3, e foi aplicado também um questionário final, com o intuito de investigar se as aulas juntamente com as atividades surtiram efeito positivo ou negativo nos alunos. Ao final percebeu-se que os resultados tenderam mais para o positivo referente ao nível de absorção e aprendizado dos estudantes.

Palavras – chave: Ensino Fundamental Militar, Ensino Médio Militar, Algoritmo de Dijkstra, Coloração, Grafos.

ABSTRACT

Aquino, Rodrigo Cesário. Graphs: an experience in military classes of secondary and fundamental education. 2019. 154 pages. Dissertation (Master in mathematics in national network - PROFMAT). Institute of Exact Sciences, Department of Mathematics, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

This work aims to analyze, through a case study, an experience with problems involving basic concepts and techniques of Graph Theory in a class of the military 3rd grade and in a group of the 9th military year of the private education, totalizing 80 students. They are students who usually prepare themselves for the tests of the most complex and contested military competitions in Brazil. The application of this work was carried out in the period between October and November of the year 2018, and counted on a total of 4 classes of 50 minutes each. The classes were separated as follows: in the first class, a motivational questionnaire was applied, adapted from the Gontijo questionnaire (with the purpose of collecting information essentially related to study habits), and a test, with four problems that can be solved both with Graph techniques as well as techniques of the students' traditional curriculum. In the second and third classes, the concepts and techniques on graphs were introduced in the classroom with the active participation of the students. Students were led to develop and discover techniques through teacher induction. In the fourth class, a second test was applied, similar to the first one, in which students could already use the tools absorbed in classes 2 and 3, and a final questionnaire was also applied to investigate whether the classes together with the activities had a positive or negative effect on the students. In the end it was noticed that the results tended more towards the positive regarding the level of absorption and learning of the students.

Keywords: Basic Military Education, Military High School, Dijkstra Algorithm, Graph Coloring, Graphs.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, baseado nos dados contidos no blog: escola da inteligência, o aprendizado sobre a matemática sofre constantemente com aulas pouco dinâmicas, alunos desmotivados e professores com deficiência em sua formação fazendo com que 89% dos alunos cheguem ao fim do ensino médio sem terem aprendido o mínimo necessário. Isso se dá muito a complexidade com que a disciplina é inserida no meio acadêmico dos alunos e a falta de ferramentas intuitivas para a devida compreensão. A nova geração de alunos muitas vezes prefere apresentar uma resolução mais rápida. De fato, o tema do trabalho em questão apresenta ferramentas que são extremamente intuitivas e objetivas sendo positivas para um aprendizado amplo.

O objetivo desse trabalho foi analisar uma experiência com problemas envolvendo ideias e técnicas simples de Teoria de Grafos em duas turmas: uma turma da 3° série militar e uma turma do 9° ano militar da rede particular de ensino. Houve um total de 80 alunos participando da experiência. O trabalho foi realizado entre outubro e novembro do ano de 2018. Foram utilizadas 4 aulas de 50 minutos cada.

O objetivo da Teoria de Grafos é o estudo de estruturas chamadas grafos, formadas por vértices (que essencialmente são pontos) e arestas (que essencialmente são segmentos ligando os pontos). Esta estrutura modela bem relações entre objetos: se um objeto possui uma relação com outro, cada um é modelado como um vértice e ligado por uma aresta. Se não há relação entre eles, não há aresta entre eles. Grafos podem ser usados para resolver problemas práticos do mundo real sobre física, biologia, sociologia, sistemas de informação, linguística, química, matemática, psicologia e muitas outras áreas.

A Teoria de Grafos apresenta algumas técnicas tão simples e intuitivas, o gosto pelo aprendizado referente ao tema pode ser algo natural. De fato, a atual realidade de aprendizado dos alunos referente a assuntos da matemática requer técnicas educacionais que favoreçam os estudantes. Existe um benefício global em relação ao aprendizado quando tornamos a complexidade gerada por demonstrações, lemas e teoremas algo intuitivo, e determinados assuntos acabam se tornando de mais simples aceitação.

Na primeira aula foi aplicado um questionário motivacional, semelhante ao questionário de Gontijo que é um questionário que tem o objetivo de absorver informações relativas ao hábito de estudo, gosto pela matemática, família, etc. Também na primeira aula foi aplicado um teste, com quatro problemas que podem ser resolvidos tanto com técnicas de Grafos quanto com técnicas do currículo tradicional dos alunos.

Na segunda aula e na terceira aula, os conceitos e técnicas sobre grafos foram introduzidos em sala de aula com a participação dos alunos. A intenção era que os conceitos e as técnicas não fossem introduzidos mecanicamente, mas que fossem desenvolvidos paulatinamente, e de forma a convencer o aluno de sua utilidade. Na quarta aula foi aplicado um segundo teste, nos moldes do primeiro, no qual os alunos já podiam usar as ferramentas absorvidas nas aulas 2 e 3. Também foi aplicado um questionário final, com o intuito de analisar se as atividades aplicadas aos alunos tiveram retorno positivo ou negativo mediante a aplicabilidade e funcionalidade das ferramentas empregadas em aulas.

Este trabalho foi escrito em capítulos onde no capítulo 1, é apresentado um estudo básico sobre algumas técnicas da Teoria de Grafos, visando efetivar uma revisão sobre a literatura com a finalidade de auxiliar o leitor. No capítulo 2, é abordado todo o processo escolhido e desenvolvido para fazer tal estudo. No capítulo 3, são mostrados os resultados e discussões das atividades desenvolvidas. O capítulo 4 foi reservado para as considerações finais desta pesquisa.

O grupo escolhido como o público-alvo dessa pesquisa foi o de jovens que almejam, ano após ano, entrar para a carreira militar através de alguns dos concursos mais difíceis no país. Com isso, existem característica particulares desse grupo: eles são independentes, focados, academicamente disciplinados, e sua rotina de estudo é regulada.

Trabalhos anteriores foram realizados na mesma linha: em (DA SILVA, 2015) há uma experiência na rede pública descrita numa monografia; em (COSTA, 2017) e (SILVA Jr, 2016) há experiências com coloração nos ensinos fundamental e médio, respectivamente; em (DA SILVA Jr, 2018) há uma experiência com caminhos em grafos no ensino fundamental, e em (GOMES, 2015) uma experiência com vários tópicos de grafos no ensino fundamental.

Podemos afirmar como objetivos específicos dessa experiência:

- Introduzir conceitos básicos da teoria dos grafos aos alunos;
- Analisar estruturas planares e não planares;
- Saber diferenciar grafos com caminhos eulerianos e semieulerianos;
- Contextualizar problemas sobre caminhos em Grafos através do algoritmo de Dijkstra, para descobrir o menor caminho ou um caminho mais rentável de um vértice do grafo a todos os outros vértices do mesmo, passando uma única vez pelas arestas;
- Contextualizar problemas sobre coloração de grafos por incompatibilidade de vértices;
- Exemplificar e elaborar atividades que o professor poderá utilizar em sala de aula para despertar o interesse do aluno pela matemática, explorando o fato de que qualquer aluno é capaz de aprender conceitos básicos de grafos;

1 REVISÃO DE LITERATURA

1.1 DEFINIÇÕES INICIAIS SOBRE GRAFOS

Um grafo é uma estrutura abstrata representada por um conjunto de pontos ligados por segmentos. Esses pontos são chamados de vértices e os segmentos que ligam um vértice a outro são chamados de arestas. Podemos assim admitir que um grafo é uma visualização muito simples de uma situação problema, pois possui apenas dois elementos construtivos primitivos.

Pensemos então na Figura 1 como uma cidade onde os vértices são as escolas que obtiveram melhor aproveitamento nas olimpíadas de matemática no ano de 2018, e as arestas são as estradas que conectam essas escolas.

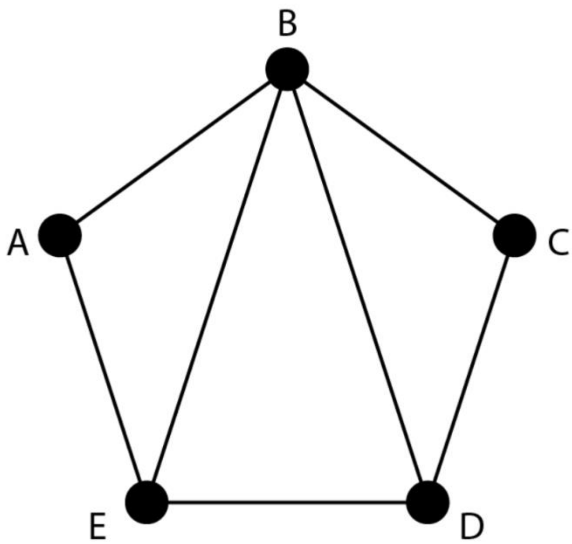


FIGURA 1: Exemplo de um grafo.

FONTE: Autor

Seja G o grafo representado na Figura 1. Denotamos por V(G) o conjunto de vértices de G, e A(G) o conjunto de arestas de G. Neste caso, V(G) = {A, B, C, D, E} e A(G) = {AB, AE, BE, BD, BC, CD, DE}. Em um grafo, quando uma aresta conecta um vértice a ele mesmo, chamamos a mesma de laço. Na Figura 2, observamos um laço no vértice C.

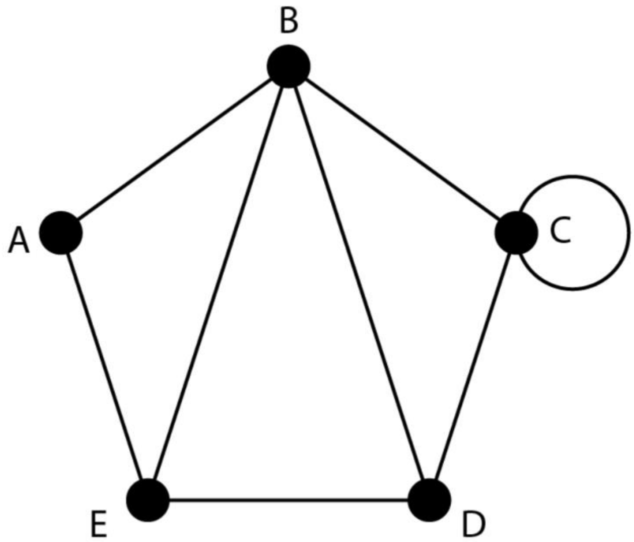


FIGURA 2: Exemplo de um grafo com um laço em C.

FONTE: Autor

1.1.1 GRAU DE UM VÉRTICE

Definiremos o grau de um vértice como o número de arestas que incide sobre ele. O grau de um vértice é denotado por d(A). Observando a Figura 2, podemos apresentar o grau de cada vértice, d(A) = 2; d(B) = 4; d(C) = 4; d(D) = 3; d(E) = 3. Repare que se a aresta for um laço, ela é contada duas vezes. É válido ressaltar que d(A) + d(B) + d(C) + d(D) + d(E) = 16, que equivale ao dobro do número de arestas. Temos um teorema e um corolário para generalizar o conceito visto.

Teorema: A soma dos graus dos vértices de um grafo G é sempre o dobro do número de arestas.

Corolário*:* Todo grafo G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Um grafo é dito completo quando todos os vértices são ligados entre si (sem a presença de laços). Um grafo completo com n vértices é denotado K_n. Na Figura 3 temos o K_5.

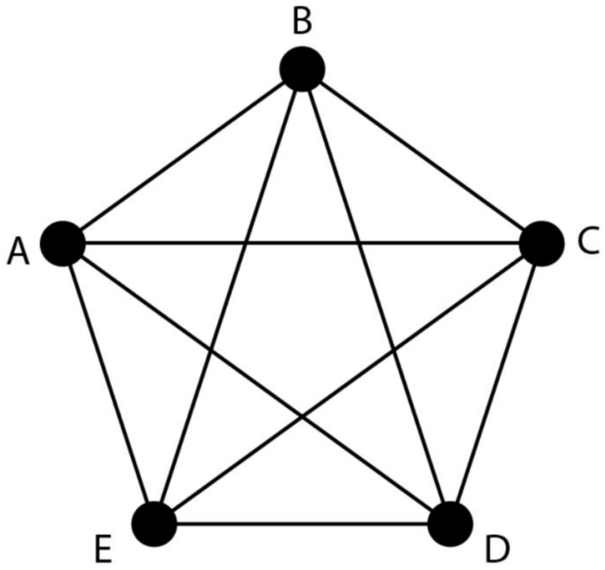


FIGURA 3: Exemplo de um grafo completo.

FONTE: Autor

1.2 SUBGRAFOS, CAMINHOS E CICLOS

Um subgrafo H de um grafo G é um grafo onde $V(H) \subset V(G)$ e $A(H) \subset A(G)$. Alguns subgrafos serão importantes para este trabalho, e serão destacados agora. Um passeio num grafo G é uma sequência alternada de vértices e arestas $V_0x_1V_1x_2V_2...V_{n-1}x_nV_n$, começando e terminando com vértices, na qual cada aresta é incidente aos dois vértices que vêm imediatamente antes e depois. Tal passeio liga V_0 a V_n, e também podem ser denotado por $V_0V_1V_2...V_{n-1}V_n$ (as arestas são evidentes pelo contexto). Um passeio é fechado se $V_0 = V_n$, e aberto caso contrário. Um passeio é uma trilha se todas as arestas são distintas. Um passeio é um caminho se todos os vértices são distintos. Um passeio fechado é um circuito. Se um circuito possui todos os vértices distintos, então ele é um ciclo.

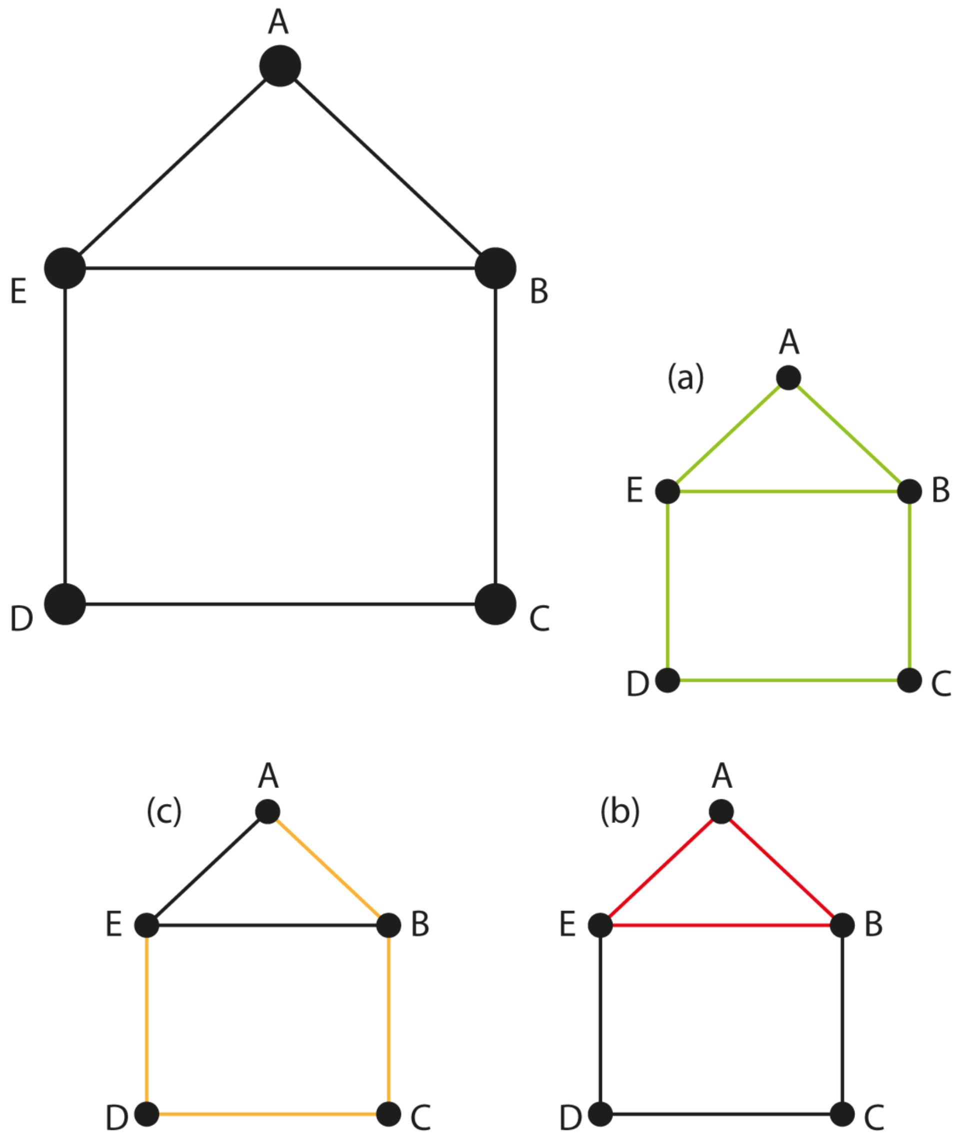


FIGURA 4: Um grafo destacado e alguns subgrafos em destaque: uma trilha EABCDEB (a), um ciclo ABEA (b) e com um caminho ABCDE (c).

FONTE: Autor

Considere a Figura 4. Observe que ABABABC é um exemplo de passeio. A aresta AB se repetiu várias vezes. Se quisermos um exemplo de passeio fechado, podemos considerar ABABEA. Um exemplo de trilha é EABCDEB. Repare que o vértice E foi repetido, mas nenhuma aresta foi repetida, o que caracteriza uma trilha. Um exemplo de caminho (quando não se repetem nem vértices e nem arestas) é ABCDE. E um exemplo de um ciclo é ABEA, onde não se repetem arestas nem vértices (tirando o inicial e o final, que devem se repetir pelo fato de o ciclo ser fechado).

1.3 ISOMORFISMO DE GRAFOS

Dois grafos G_1 e G_2 são ditos isomorfos se existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos de vértices que preserva as suas adjacências. Isto significa que se A e B pertencem a $V(G_1)$ e são vizinhos, então f(A) e f(B) pertencem a $V(G_2)$ e são vizinhos. Se A e B pertencem a $V(G_1)$ e não são vizinhos, então f(A) e f(B) pertencem a $V(G_2)$ e não são vizinhos. Na realidade, grafos não possuem uma única representação visual. Eles podem ser desenhados de várias formas distintas possuindo as mesmas características fundamentais. Dois grafos desenhados de duas formas diferentes podem ser essencialmente o mesmo grafo. Observe na Figura 5 dois grafos isomorfos.

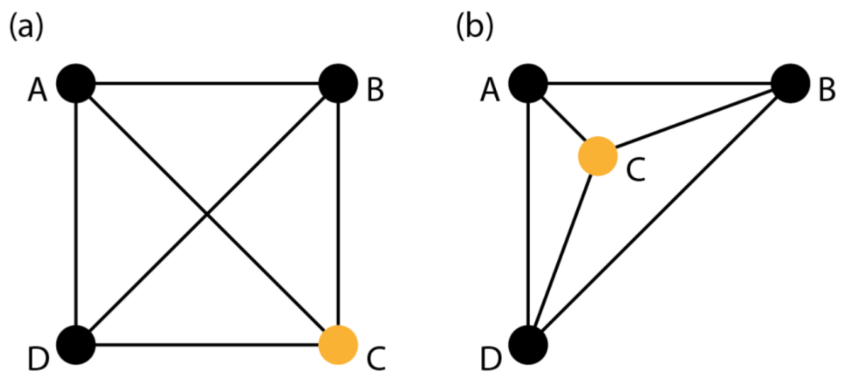


FIGURA 5: Exemplo de grafos isomorfos. Repare que, para obter o grafo em (b) a partir do grafo em (a), basta arrastar o vértice C para dentro do triângulo ABD.

FONTE: Autor

1.4 GRAFO BIPARTIDO

Um grafo G é dito bipartido se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, $V_1(G)$ e $V_2(G)$. Os vértices que pertencerem a um mesmo conjunto não podem se conectar entre si; só pode haver arestas entre vértices de conjuntos distintos. Um grafo é dito bipartido completo quando todos os vértices de $V_1(G)$ se conectam a todos os vértices de $V_2(G)$. Representamos por $K_{n,p}$, onde n representa a quantidade de vértices no subconjunto $V_1(G)$ e p representa a quantidade de vértices no subconjunto $V_2(G)$. Veja, na Figura 6, exemplos de grafos bipartidos.

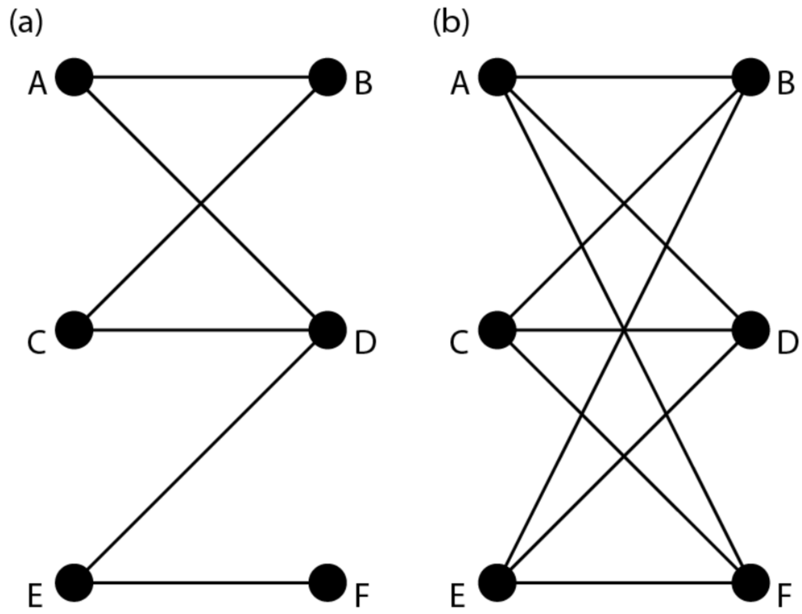


FIGURA 6: Um grafo bipartido (esquerda) e grafo bipartido completo $K_{3,3}$ (direita).

FONTE: Autor

1.5 CICLOS EULERIANOS E CAMINHOS SEMIEULERIANOS

Na cidade de Konigsberg, território da Prússia até 1945 e atual Kaliningrado, existia um rio, o Rio de Prególia, que cortava a cidade e a dividia em complexos que eram conectados por 7 pontes, como mostra a Figura 7.

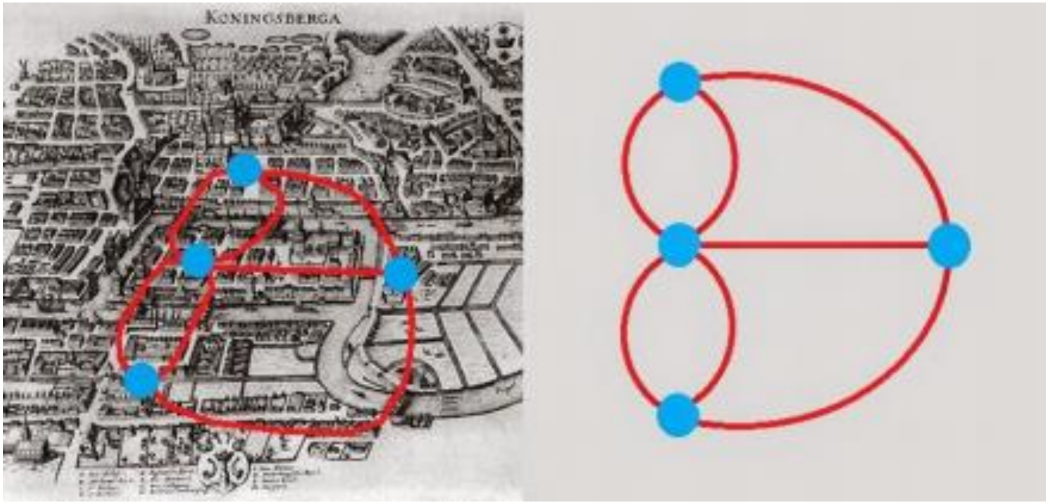


FIGURA 7: As 7 pontes de Konigsberg.

FONTE: **http://1.bp.blogspot.com/-vamKx2VkdrI/VNIvQkE69HI/AAAAAAAABNM/lq5JbMbgRp8/s1600/koninsberg%2B1652_2.png**

Discutia-se se era possível uma pessoa atravessar as 7 pontes sem repetir nenhuma, começando e terminando no mesmo ponto.

Leonhard Euler, em 1736, provou que não era possível cumprir tal trajeto. Ele usou uma ideia bem simples: como a cidade era dividida em 4 complexos, e os mesmos se conectavam por meio de 7 pontes, Euler construiu um modelo representativo da cidade onde os vértices eram os complexos e as arestas eram as pontes. A partir daí, com a modernização da teoria, chegou-se às seguintes definições e ao teorema:

O comprimento de uma trilha é o número de arestas que ela possui. Seja G um grafo com m arestas. Uma trilha em G é dita euleriana se possui comprimento m.

Teorema: Um grafo possui uma trilha euleriana se, e somente se todos os vértices possuem grau par.

Tal grafo é dito euleriano. Sendo assim, pode-se iniciar uma trilha em um vértice e terminar no mesmo. O grafo da figura 7, que representa o problema das pontes de Konigsberg, não satisfaz o Teorema. Um grafo possui uma trilha semieuleriana se todos os seus vértices possuem grau par, exceto dois, o que inicia e o que termina o caminho. Tal grafo é dito semieuleriano. Observe na Figura 8 um grafo euleriano e um grafo semieuleriano. Em (a) o grafo é semieuleriano, pois há dois vértices com grau ímpar: B e E. Podemos criar a trilha semieuleriana começando em B e terminando em E, por exemplo: BAEBCDE. Em (b), temos um grafo euleriano. Podemos usar a trilha euleriana ABCDEBEA para percorrer todas as arestas sem repetição.

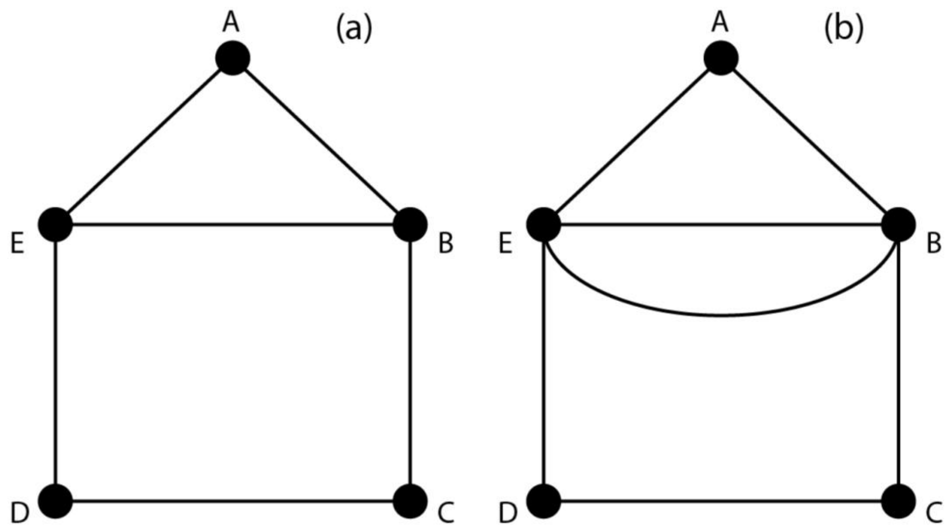


FIGURA 8: Grafo semieuleriano (a), grafo euleriano (b).

FONTE: Autor

1.6 ALGORITMO DE DIJKSTRA

O algoritmo de Dijkstra tem como objetivo encontrar uma árvore representando o menor caminho de um vértice a todos os demais em um grafo. Para simplificar a compreensão do leitor, um problema será solucionado.

Considere o grafo da Figura 9. Os vértices representam regiões e as arestas, a distância entre as mesmas. Vamos encontrar, pelo algoritmo de Dijkstra, o menor caminho entre A e os demais vértices. Estamos particularmente interessados no menor caminho entre A e E.

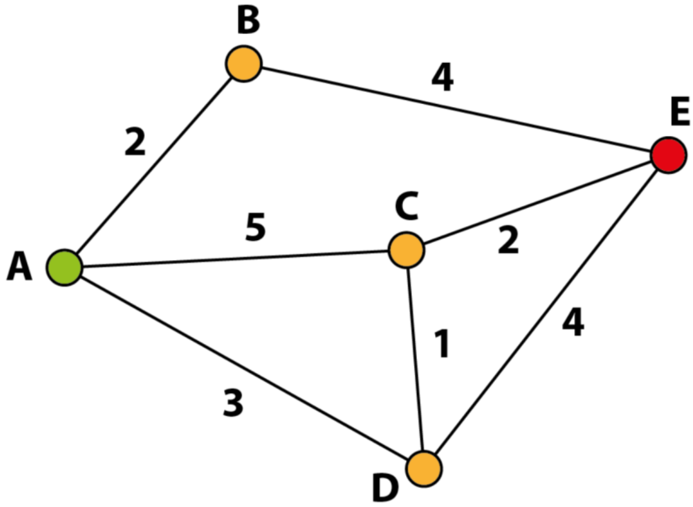


FIGURA 9: Grafo modelando o problema proposto.

FONTE: Autor

PASSO 1: Iniciaremos o processo pelo vértice A (Figura 9) analisando seus vértices vizinhos que são os vértices B, C e D. Iremos atualizá-los com as respectivas distâncias de A até eles e marcar as arestas dos possíveis caminhos. Em B vamos escrever (2,A), deixando claro que a distância total de B até A é igual a 2, se viermos de A. Em C vamos escrever (5,A), deixando claro que a distância total de C até A é igual a 5, se viermos de A. Em D vamos escrever (3,A), deixando claro que a distância total de D até A é igual a 3, se viermos de A. Podemos ilustrar este passo na Figura 10.

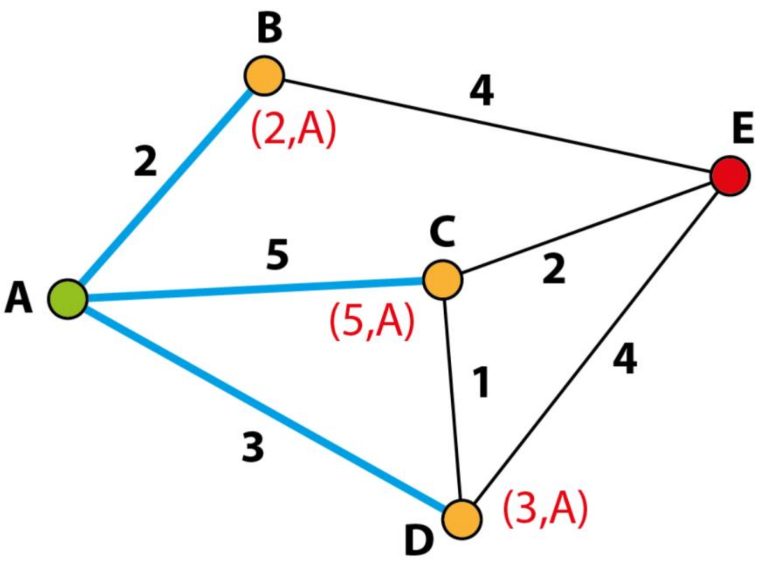


FIGURA 10: Grafo ilustrando o passo 1 do algoritmo.

FONTE: Autor

PASSO 2: O próximo passo começa pelo vértice mais próximo (acompanhe pela Figura 10). O vértice que representa o menor caminho é o B, então será a partir dele que daremos continuidade ao processo. O seu vértice vizinho é o E, então vamos atualizá-lo marcando a aresta BE e escrevendo (5,A) em E. Isso deixa claro que a distância total de E até A é igual a 6, se viermos de B. Para ilustrar, observe a Figura 11.

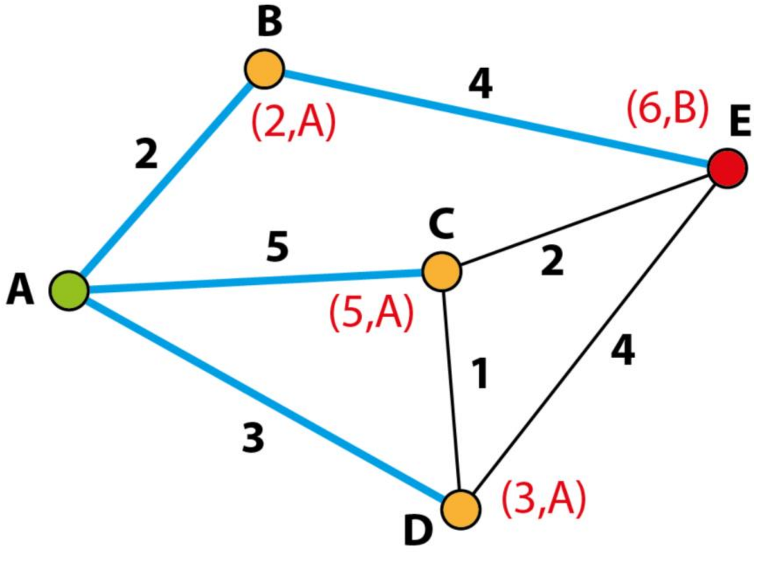


FIGURA 11: Grafo ilustrando o passo 2 do algoritmo.

FONTE: Autor

PASSO 3: Analisando os vértices C e D (acompanhe pela Figura 11), que são os vértices que ainda não visitaram nenhum outro vértice, o que possui a menor distância é o D. Então é a partir dele que daremos continuidade ao processo. Em relação ao vértice D, os seus vizinhos são os vértices C e E. Vamos analisar primeiramente a aresta DE. Observe atentamente: se formos de D para E, aumentaremos a distância contida no vértice E (pois 3+4=7 é maior que 6, que é a distância de A a E quando fazemos o caminho por B). Então não marcaremos DE. Vamos analisar agora a aresta DC. Observe que se formos de D para C, diminuiremos a distância contida no vértice C (pois 3+1=4 é menor que 5, que é a distância vinda de A). Então **desmarcaremos** a aresta AC e o e vamos marcar a aresta DE. Também vamos alterar o rótulo de C para (4,D), deixando claro que a distância total de C até A é igual a 4, se viermos de D. Observe uma ilustração na Figura 12.

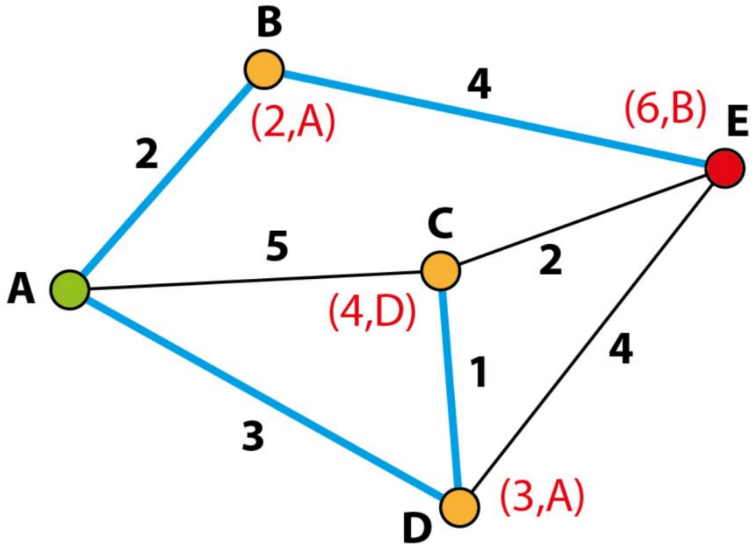


FIGURA 12: Grafo ilustrando o passo 3 do algoritmo.

FONTE: Autor

PASSO 4: Analisando o vértice C (Figura 12), devemos tratar da aresta CE. Ela não deverá ser marcada, uma vez que 4+2=6=6. O processo está finalizado, e a menor distância entre A e E é 6.

1.7 COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM GRAFOS

Uma **coloração** de um grafo é uma associação de cores aos vértices do grafo, de forma que dois vértices vizinhos não possuam a mesma cor. O **número cromático** de um grafo G, denotado por χ(G), é o número mínimo de cores com as quais o conjunto de vértices de G pode ser colorido. Repare que é possível colorir um grafo de n vértices com n cores: cada vértice com uma cor diferente. A questão interessante é, realmente, encontrar o mínimo. Observe o exemplo da Figura 13. Os vértices do grafo em (a) podem ser coloridos com duas cores, como podemos ver em (b). Este é o mínimo de cores que podemos usar para colorir tal grafo respeitando a condição de que vértices vizinhos não tenham a mesma cor.

A coloração tem aplicações em problemas que possuem elementos que apresentam alguma incompatibilidade. Veremos mais exemplos no próximo capítulo.

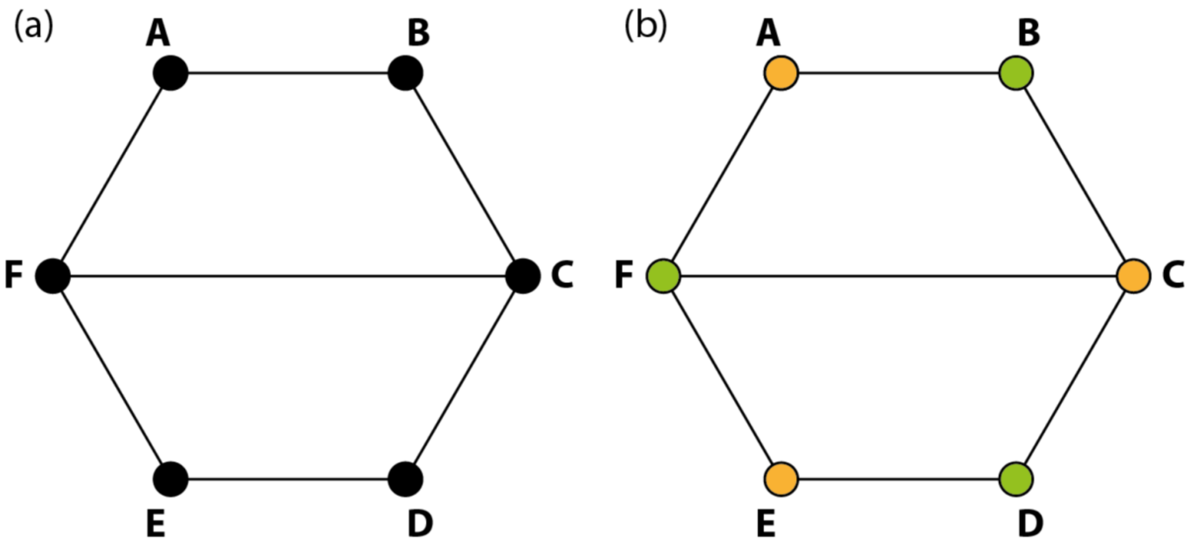


FIGURA 13: Um exemplo de coloração de vértices de um grafo.

FONTE: Autor

1.8 PLANARIDADE

Revisitando os grafos da Figura 5, que é o K_4, observamos que alguns grafos admitem uma representação planar, ou seja, podem ser desenhados de maneira que arestas não se cruzem. Outros, no entanto, não admitem tal possibilidade. O K_5 e o $K_{3,3}$ são exemplos de grafos que não admitem uma representação planar. Um importante Teorema caracteriza tal propriedade:

Teorema (Kuratowski): Um grafo é planar se não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Como o homeomorfismo de grafos foge do nosso escopo, trabalharemos com uma versão mais simples:

Teorema: Um grafo é planar se não contiver subgrafo isomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Num grafo planar, como não há cruzamento de arestas, o grafo divide o plano em regiões poligonais. Podemos então pensar em **coloração de regiões**, onde regiões vizinhas (regiões que compartilham uma aresta) não possuem a mesma cor. Observe a Figura 14-(a). Há 5 regiões delimitadas pelo grafo: 3 triangulares, 1 quadrangular e 1 ilimitada (sempre haverá uma ilimitada). Podemos colorir as regiões (inclusive a ilimitada) de tal grafo com 3 cores, conforme observamos na parte (b). Repare que a região 1 e a região 4 podem receber a mesma cor, pois compartilhar um vértice não torna as regiões vizinhas.

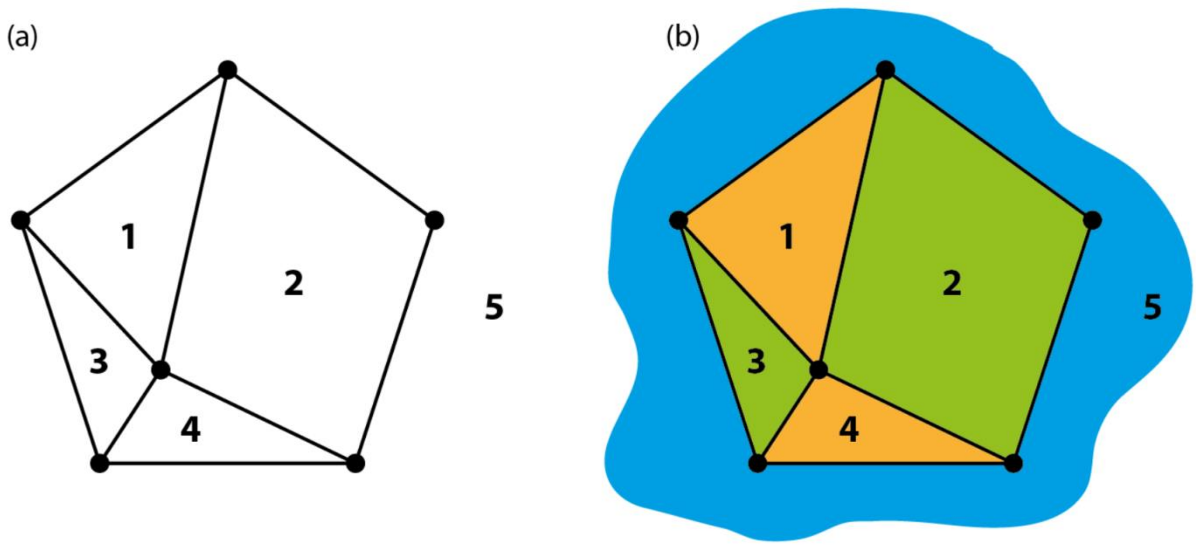


FIGURA 14: Um exemplo de coloração de regiões de um grafo planar.

FONTE: Autor

Uma pergunta natural pode ser feita: quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor (Figura 15)?

FIGURA 15: Mapa do Brasil.

FONTE: **Autor**

Vamos considerar que as cinco regiões mais a região externa ao mapa do Brasil, perfazendo 6 regiões, formem um grafo, onde cada vértice representa uma região.

Observe também que quando duas regiões fizerem fronteira, ligaremos essas regiões (vértices) Uma coloração de vértices possível está na Figura 16.

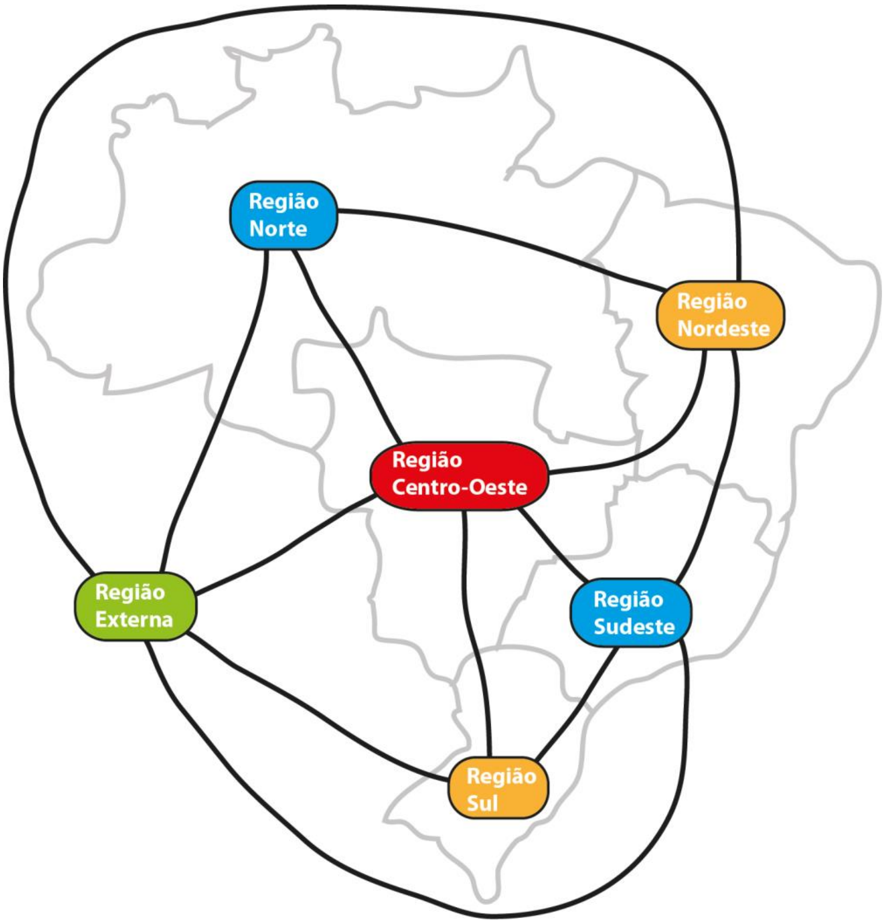


FIGURA 16: Coloração para o grafo representativo do mapa do Brasil

FONTE: **Autor**

2 TESTES

Neste capítulo, para que conceitos e técnicas introduzidas no capítulo anterior sejam testados, serão apresentadas soluções de problemas clássicos de grafos. Tais problemas são exatamente os que foram utilizados nos Testes 1 e 2 realizados na experiência com as turmas militares, de maneira que esta parte serve também como referência de gabarito para o leitor interessado durante a leitura dos problemas mais adiante.

2.1 TESTE 1

ATIVIDADE 01: Um canil possui 6 cachorros cuidados por um veterinário. Por motivo de controle de doença, sabe-se que o cachorro 1 não pode ficar com os cachorros 3, 4 e 5, que o cachorro 2 não pode ficar com o cachorro 6 e que o cachorro 5 não pode ficar nem com o cachorro 6, nem com o cachorro 4. Seja N o menor número de casinhas que são necessárias para comportar esses cachorros visando respeitar o controle de doença. Determine N:

<u>RESOLUÇÃO:</u>

Foi feita uma representação gráfica referente ao problema na Figura 17, onde cada vértice representa um cachorro e as arestas ligam os cachorros que ***não*** *podem ficar juntos, ou seja, o cachorro 1 não pode ficar com os cachorros 3, 4 e 5, o cachorro 6 não pode ficar com os cachorros 2 e 5 e assim sucessivamente.*

Iremos atribuir cores aos vértices de maneira que vértices vizinhos não possuam a mesma cor. Este problema tem uma solução óbvia: usar 6 cores diferentes, uma para cada vértice. Cada cor indicaria a necessidade de uma casa, e usaríamos 6 casas para acomodar os cães. No entanto, temos por objetivo encontrar o menor número de casas para acomodar esses cachorros. Isso significa que uma casa pode acomodar mais de um cão, desde que eles possam ficar juntos. Então o problema de coloração consiste em atribuir cores aos vértices, desde que os vizinhos não possuam a mesma cor, utilizando o menor número de cores possível.

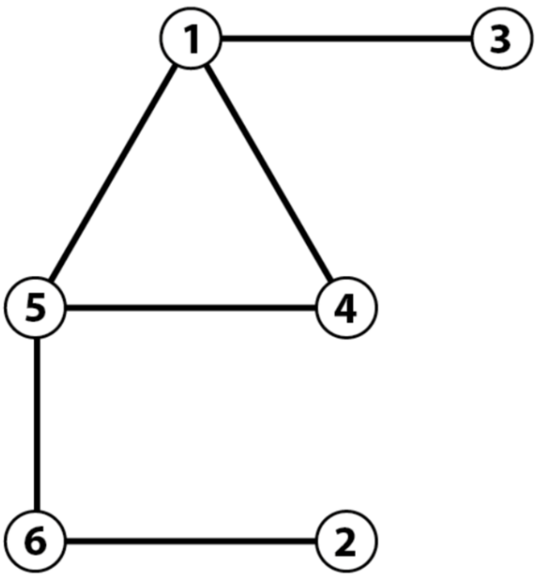


FIGURA 17: Grafo representativo do problema do canil.

FONTE: **Autor**

Passo 1: *Observe o subgrafo triangular 145. Repare que todos os vértices estão ligados entre si, o que implica a necessidade de três cores distintas para tais vértices. Observamos na Figura 18 tal coloração.*

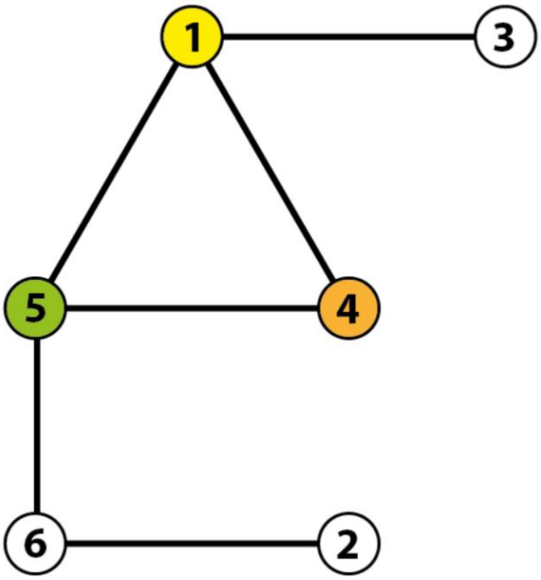


FIGURA 18: Grafo representativo do problema do canil (Passo 1).

FONTE: **Autor**

Passo 2: *Em seguida, repare que o vértice 3 não pode receber a cor amarela, mas pode receber a cor laranja. Analogamente, o vértice 6 não pode receber a cor verde, mas pode receber a cor laranja. A Figura 19 ilustra este passo.*

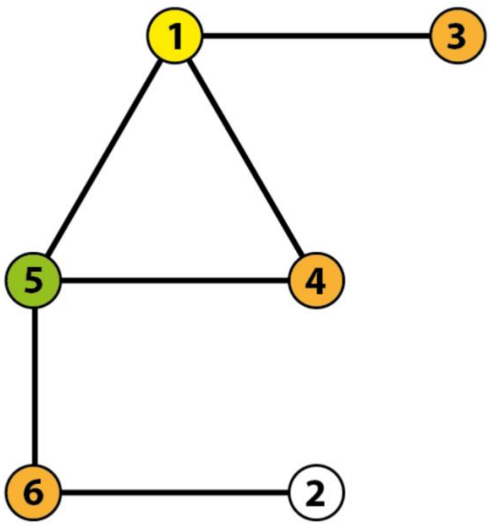


FIGURA 19: Grafo representativo do problema do canil (Passo 2).

FONTE: **Autor**

Passo 3: *Finalmente, podemos atribuir ao vértice 2 a cor verde, obtendo uma coloração final para o grafo, como pode-se ver na Figura 20.*

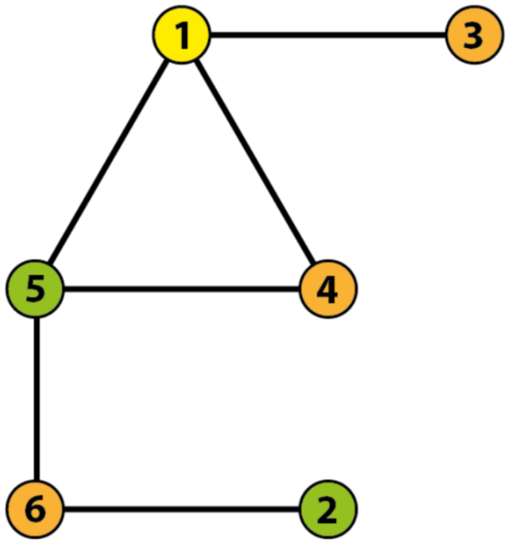


FIGURA 20: Grafo representativo do problema do canil (Passo 3).

FONTE: **Autor**

Analisando o grafo colorido na Figura 20, chegamos à conclusão de que são necessárias apenas 3 cores, ou seja, 3 casinhas para separar de forma mínima os 6 cachorros dentre as restrições para o controle de doença especificado no problema. A casinha laranja acomoda os cães 3, 4 e 6, a casinha amarela acomoda o cão 1 e a casinha verde os cães 2 e 5. Então N = 3.

ATIVIDADE 02: Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema? (A Figura abaixo refere-se a esta atividade).

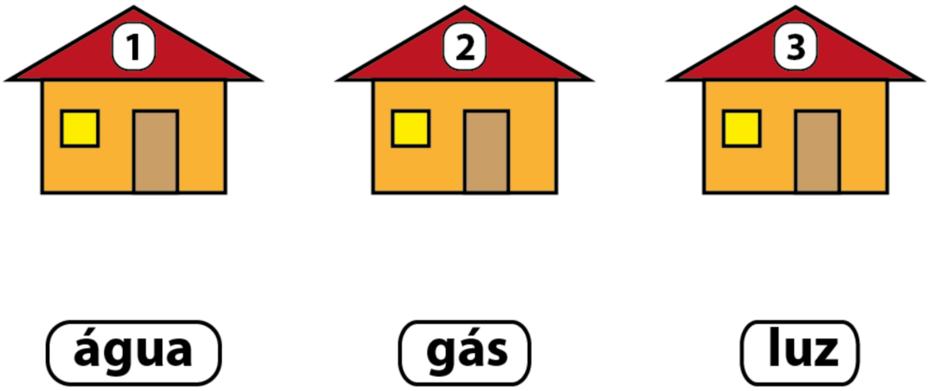


FIGURA 21: Problema da distribuição de água, gás luz.

FONTE: **Autor**

RESOLUÇÃO:

O problema das três casas com o fornecimento de água, gás e luz pode ser estruturada por um grafo com 6 vértices, como na Figura 22.

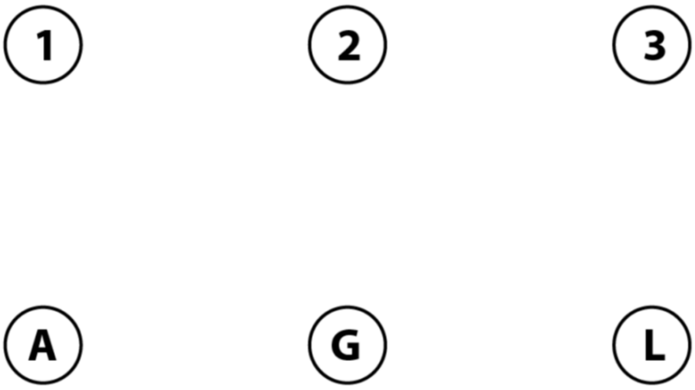


FIGURA 22: Representação dos vértices do grafo.

FONTE: **Autor**

Como desejamos fornecer água, gás e luz para as três casas, poderemos afirmar como uma possibilidade o esquema adotado na Figura 23.

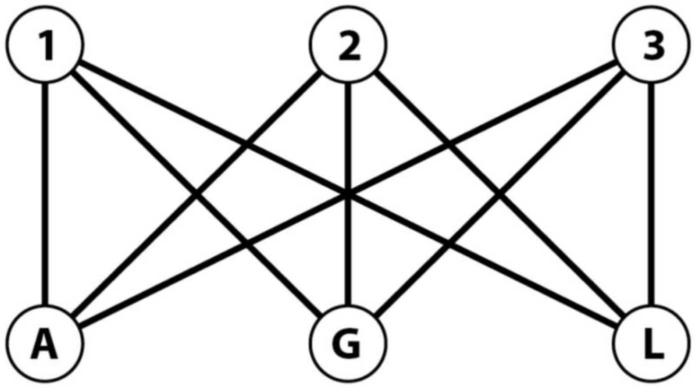


FIGURA 23: Grafo representativo do problema da água, gás e luz.

FONTE: **Autor**

Observe que a estrutura formada corresponde a um grafo bipartido $K_{3,3}$, e pelo Teorema de Kuratowski, não é possível que cada vértice de cada partição se ligue a todos os outros vértices da outra partição sem que as arestas se cruzem, ou seja, esse problema não possui solução, dentro da estrutura plana proposta.

ATIVIDADE 03: (DA SILVA, C.M.,2015) Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nelas elas caem. Nas Figuras 1 e 2, o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Ao final, ele deve sair pela porta A novamente. Qual é o melhor caminho, se existir, para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

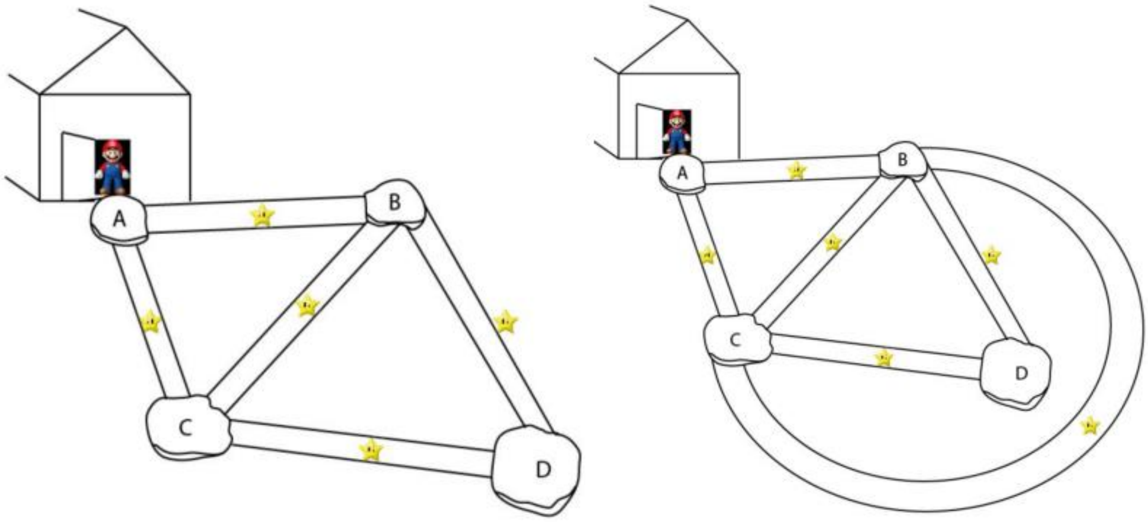


FIGURA 24: Figura representativa da atividade 3 do teste 1.

FONTE: DA SILVA, C.M.,2015

RESOLUÇÃO:

Analisando a Figura 1, é possível simplificá-la fazendo uso dos conceitos de grafo, onde os blocos A, B, C e D são os vértices e AB, AC, BC, BD e CD são as arestas, como definido na Figura 25.

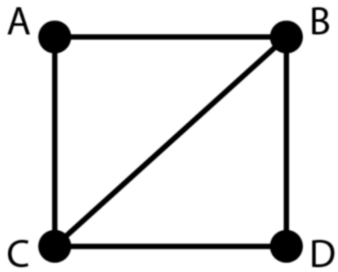


FIGURA 25: Grafo representativo da atividade 3 do teste 1.

FONTE: Autor

O grafo ilustrado acima é semieuleriano pois todos os vértices possuem grau par exceto dois, o vértice que iniciará e o vértice que terminará a trilha. Sendo assim, não *é possível completar a tarefa de recolher todas as estrelas partindo de A e voltar a A passando por todas as pontes uma única vez. Isso exigiria que todos os vértices tivessem grau par. Entretanto se essa tarefa iniciasse no vértice B ou no vértice C completaríamos o trabalho de recolher todas estrelas passando por todas as arestas uma única vez mas terminaríamos em um vértice diferente do que iniciamos: se a partida fosse do vértice C, terminaríamos no vértice B pela trilha CBDCAB, e se a partida fosse do vértice B, terminaríamos no vértice C pela trilha BDCABC. Observe a trilha CBDCAB ilustrada na Figura 26.*

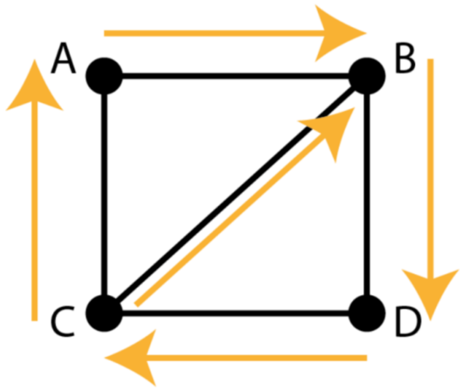


FIGURA 26: Grafo representativo da trilha CBDCAB da atividade 3 do teste 1.

FONTE: Autor

Analisando a Figura 24, é possível simplificá-la fazendo uso dos conceitos de grafo, onde os blocos A, B, C e D são os vértices e AB, AC, BC, BD e CD são as arestas, como definido na Figura 27.

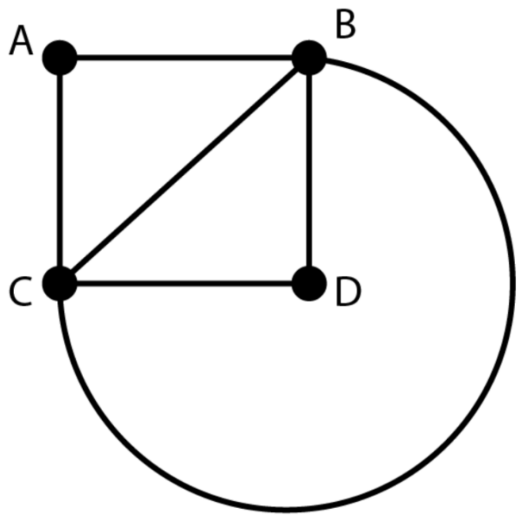


FIGURA 27: Grafo representativo da atividade 3 do teste 1.

FONTE: Autor

O grafo ilustrado acima é denominado de euleriano, pois todos os vértices possuem grau par. Assim, é possível desenvolver uma trilha que passa por todas as arestas uma única vez e retorne ao ponto de partida, fazendo com que seja possível iniciar essa caça às estrelas partindo de qualquer ponto. Uma possível trilha partindo de A seria a ilustrada na Figura 28.

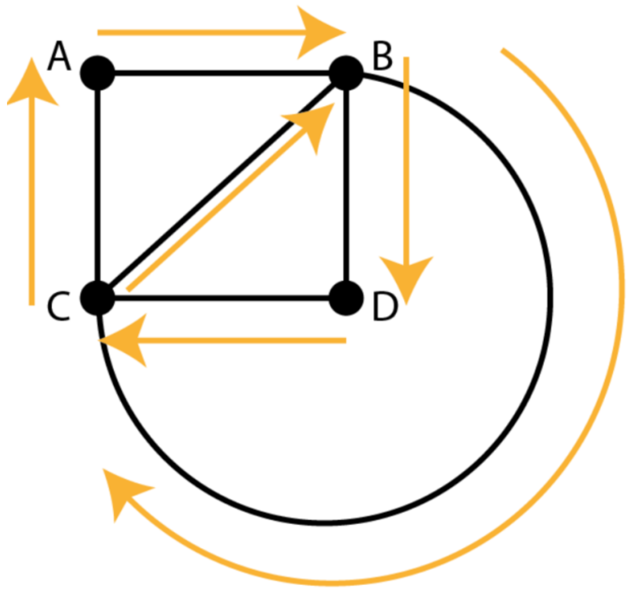


FIGURA 28: Grafo representativo da trilha ABDCBCA atividade 3 do teste 1.

FONTE: Autor

ATIVIDADE 04: No esquema abaixo, cada ponto representa uma região e cada ligação uma estrada. Os números representam as distâncias. Qual é o menor caminho para uma pessoa ir do ponto "4" até o ponto "8"?

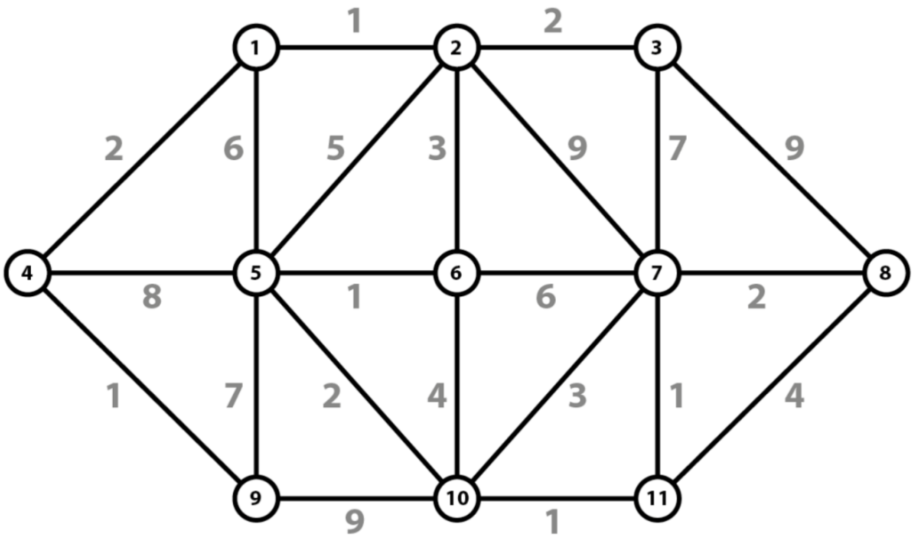


FIGURA 29: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1.

FONTE: Autor

<u>RESOLUÇÃO:</u>

A solução será dada usando o algoritmo de Dijkstra.

Passo 1: *Como desejamos o menor caminho do vértice "4" ao vértice "8", iniciaremos o processo pelo vértice "4" analisando seus vértices vizinhos que são "1", "5" e "9". Sendo assim, iremos atualizá-los com as respectivas distâncias de "4" até eles e marcar as arestas dos possíveis caminhos (Figura 30). Repare que os pares ordenados representam, na primeira entrada, a distância, e na segunda entrada, o vértice de onde ele veio.*

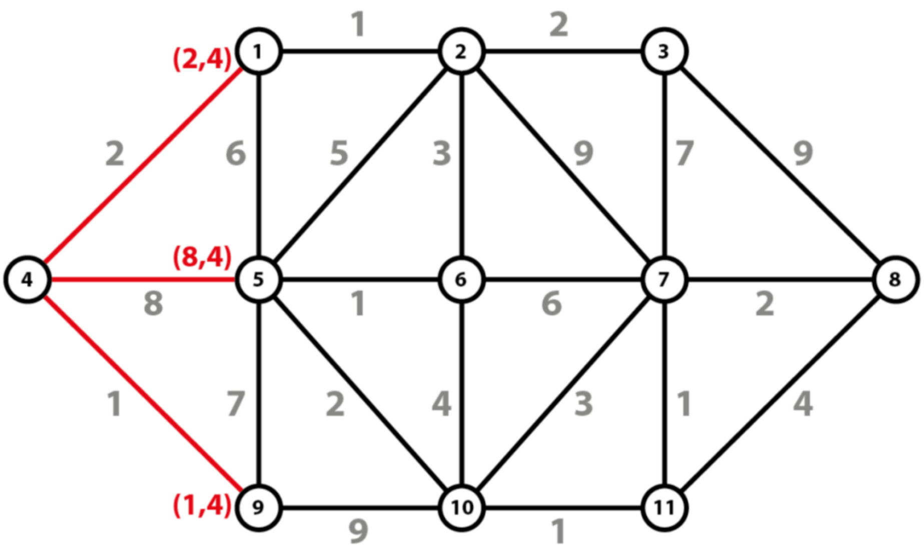


FIGURA 30: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo1).

FONTE: Autor

Passo 2: *O vértice que representa o menor caminho partindo de "4" é o "9". Então será a partir dele que daremos continuidade ao processo. Em relação ao vértice "9" os seus vizinhos são os vértices "5" e "10". Perceba que indo de "9" para "5" não iremos alterar a distância já contida no vértice que é 8, então manteremos como está. No entanto, indo de "9" para "10", teremos 1 + 9 = 10 como distância contida no vértice, então marcaremos a aresta "9-10" (Figura 31).*

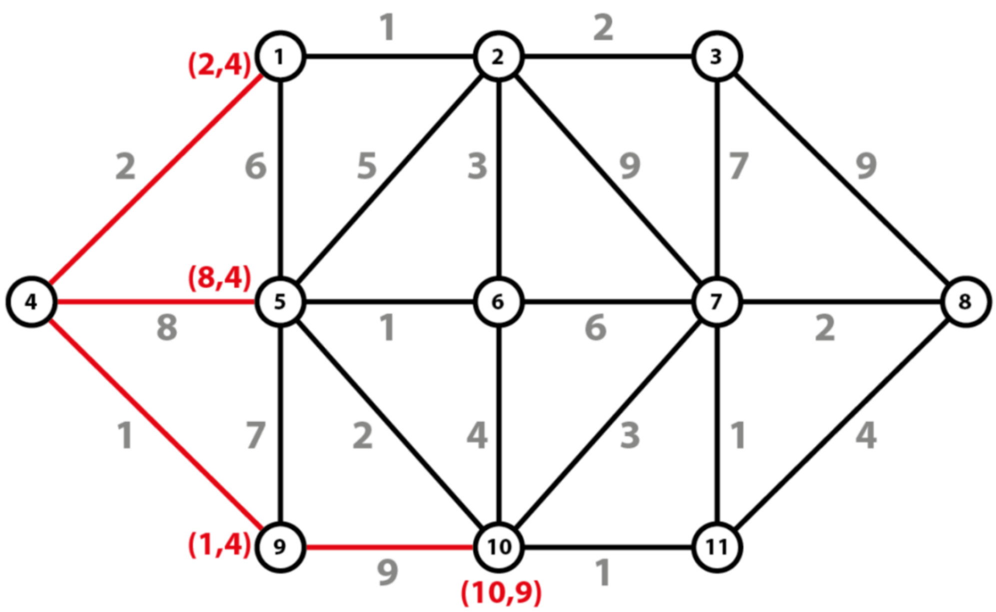


FIGURA 31: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 2).

FONTE: Autor

Passo 3: *Analisando os vértices "1", "5" e "10", que são os vértices que não visitaram nenhum vértice, o que possui menor distância é o "1". Então será a partir dele que daremos continuidade ao processo. Em relação ao vértice "1" os seus vizinhos são os vértices "5" e "2". Observe que indo de "1" até "5" não iremos alterar a distância contida no vértice que é 8, então manteremos como está não marcaremos a aresta "1-5". No entanto, indo do vértice "1" até o "2", teremos 2 + 1 = 3, então marcaremos a aresta "1-2" (Figura 32).*

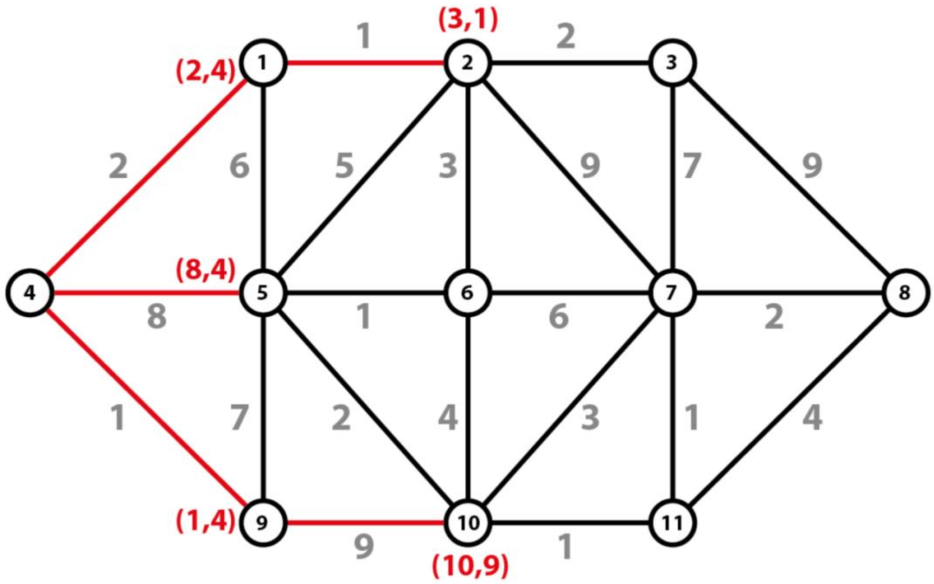


FIGURA 32: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 3).

FONTE: Autor

Passo 4: *Dentre os vértices “2”, “5” e “10”, que são os vértices que não visitaram nenhum vértice, o que possui menor distância até 4 é o “2”. Sendo assim, será a partir dele que daremos continuidade ao processo. Em relação ao vértice “2”, os seus vizinhos são os vértices “5”, “6”, “7” e “3”. Indo de “2” até “5” não teremos alteração na distância já contida no vértice; então manteremos como está, não marcaremos a aresta “2-5”. Indo de “2” até “6”, “7” e “3” teremos respectivamente como distâncias os valores 6, 12 e 5, então marcaremos as arestas “2-6”, “2-7” e “2-3” (Figura 33).*

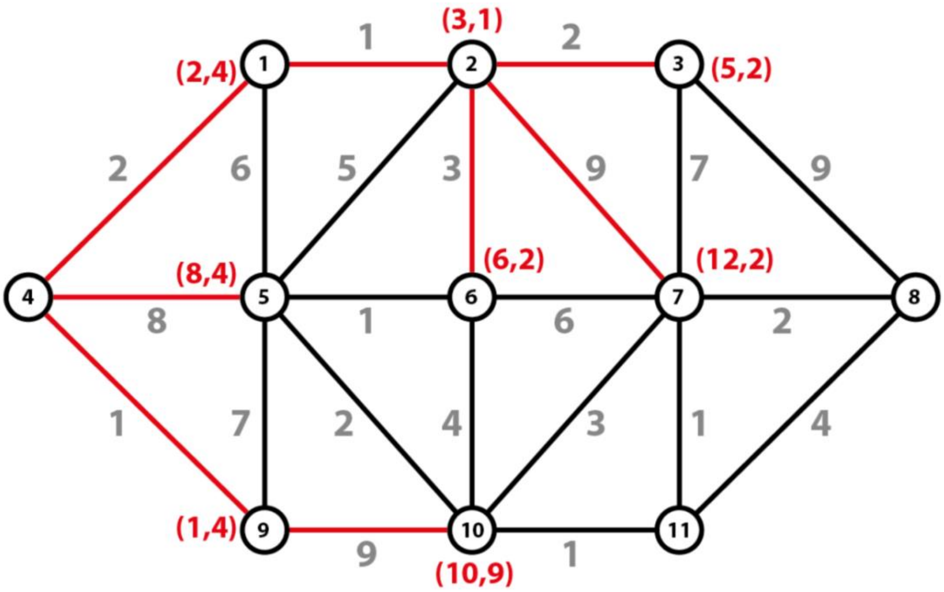


FIGURA 33: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 4).

FONTE: Autor

Passo 5: *Dentre os vértices "3", "5", "6", "7" e "10" que, são os vértices que não visitaram nenhum vértice, o que possui menor distância é o "3". Então será a partir dele que daremos continuidade ao processo. Em relação ao vértice "3", os seus vizinhos são os vértices "7" e "8". Indo de "3" até "7" não teremos alteração na distância contida no vértice. Entretanto, indo de "3" até "8" teremos 5 + 9 = 14, então marcaremos a aresta "3-8". (Figura 34)*

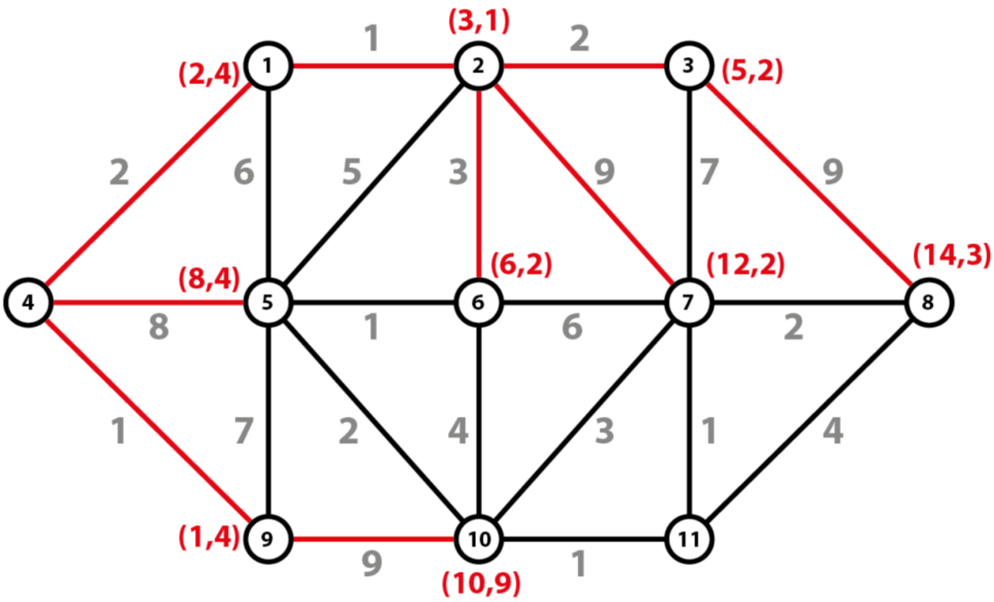


FIGURA 34: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 5).

FONTE: Autor

Passo 6: *Observe que chegamos de “4” até “8”, entretanto não podemos garantir que 14 seja a menor distância do vértice “4” ao vértice “8”. Sendo assim, ao analisar os vértices que não visitaram nenhum vértice, o que possui menor distância é o “6”.*

Dando continuidade ao processo a partir do vértice “6” percebe-se que seus vizinhos são os vértices “5”, “10” e “7”. Indo do vértice “6” ao “10” ou ao “7”, não teremos alteração na distância, então os mesmos ficarão como estão. Já, indo do vértice “6” ao “5” reduziremos o valor da distância nele contido 6 + 1 = 7. Sendo assim, marcaremos a aresta “6-5” e desmarcaremos a aresta “4-5”. (Figura 35)

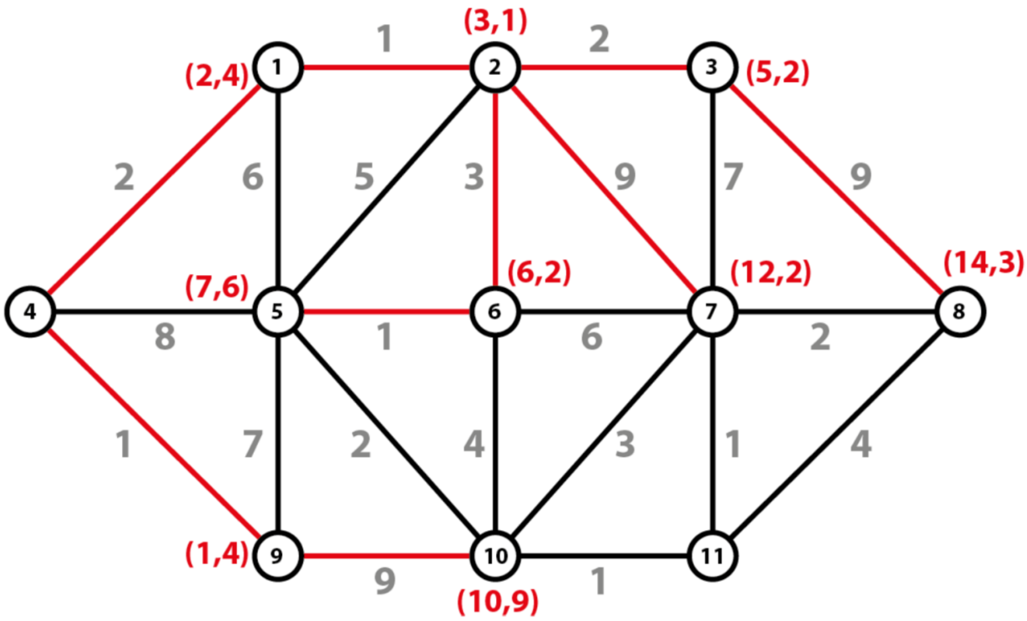


FIGURA 35: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 6).

FONTE: Autor

Passo 7: *Dentre os vértices “5”, “7”, “8" e “10” que, são os vértices que não visitaram nenhum vértice, o que possui menor distância é o “5”. Entre os vértices vizinhos do vértice “5” que são “1”, “9”, “10” e “2”, o único que irá reduzir a distância será o vértice “10” com 7 + 2 = 9; então, marcaremos a aresta “5-10” e desmarcaremos as arestas “9-10”. (Figura 36)*

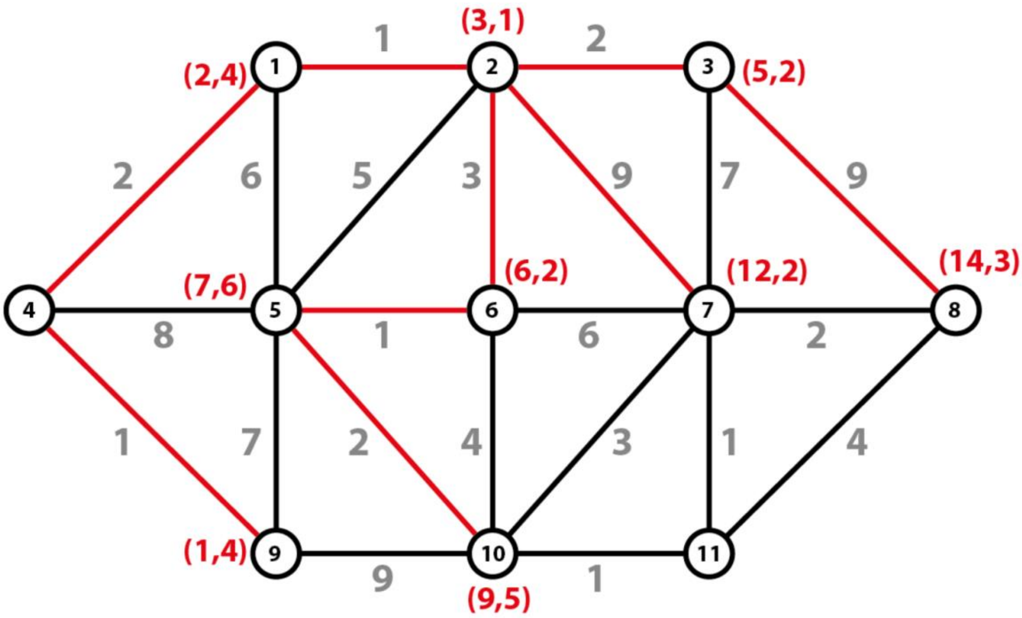


FIGURA 36: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 7).

FONTE: Autor

Passo 8: *Devemos continuar a paartir do “10”. Dentre os vizinhos do vértice “10” que são o “7” e o “11” , não mexemos na aresta 10-7 (já que não altera a distância) e como 9 + 1 = 10, então marcaremos a aresta “10-11”. (Figura 37).*

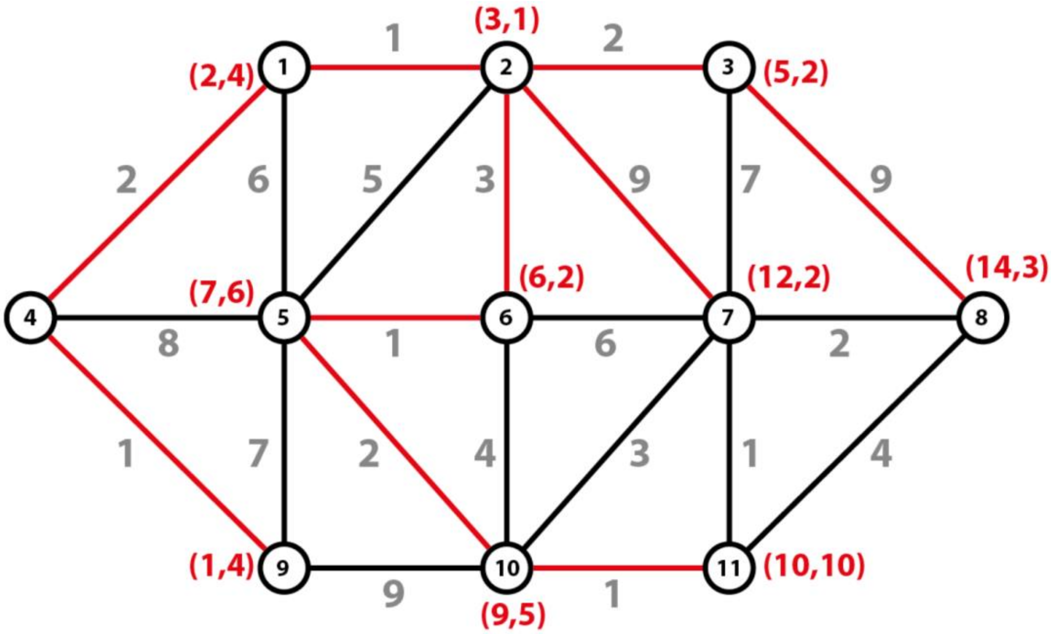


FIGURA 37: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 8).

FONTE: Autor

Passo 9: *Continuamos do "11". Dentre os vizinhos do vértice "11" que são o "7" e o "8", o único que reduzirá sua distância será o "7", convertendo o valor para 10 + 1 = 11, então marcaremos a aresta "11-7" e desmarcaremos a aresta "2-7" (Figura 38).*

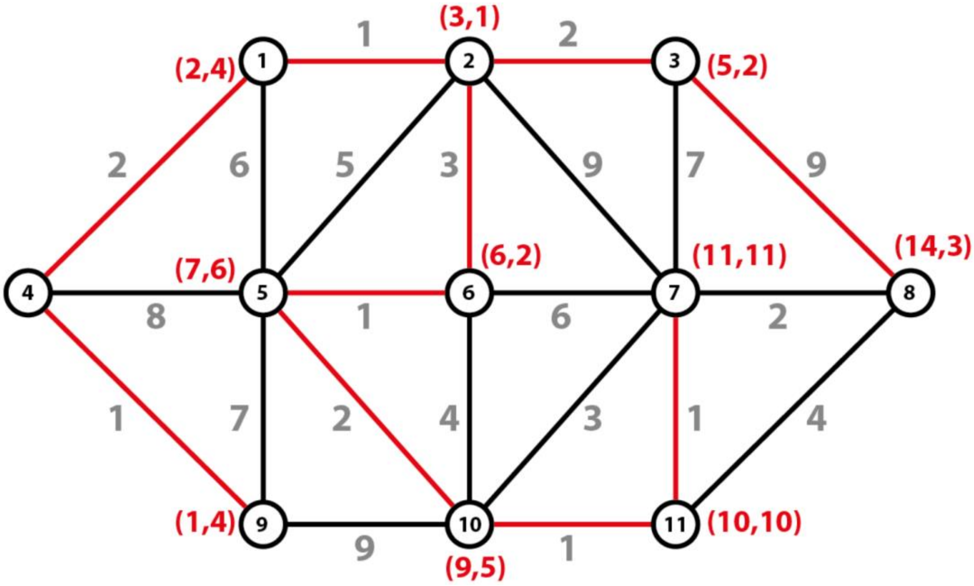


FIGURA 38: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 9).

FONTE: Autor

Passo 10: *Continuando a partir de "7" melhoramos apenas para o "8", onde o mesmo teria seu valor reduzido para 11 + 2 = 13, sendo assim desmarca-se a aresta "3-8" e marca-se a aresta "11-8", obtendo-se a árvore dos menores caminhos a partir de 4 (Figura 39). A resposta então será 13.*

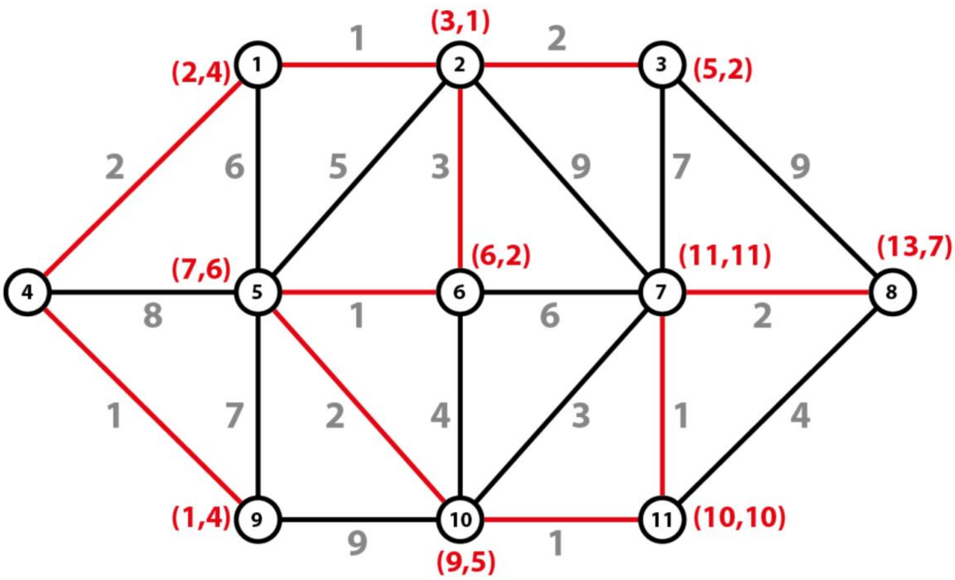


FIGURA 39: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1 (Passo 10).

FONTE: Autor

2.2 TESTE 2

ATIVIDADE 01: Uma indústria química precisa armazenar 10 reagentes que tem em estoque. Por razões de segurança, sabe-se que os reagentes do tipo A não podem ficar no mesmo galpão que os reagentes do tipo B, F e G; que os reagentes do tipo E não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo F, H e D; que os reagentes do tipo C não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo B, I e D e que os reagentes do tipo J não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo I. Qual o menor número de galpões de que a indústria precisa para armazenar todos os reagentes?

RESOLUÇÃO:

Resolveremos esse problema fazendo uso do estudo de incompatibilidade por coloração. Definiremos A, B, D, E, F, G, H, I, J como sendo os vértices de um grafo e as ligações entre eles como sendo a incompatibilidade gerada entre eles.

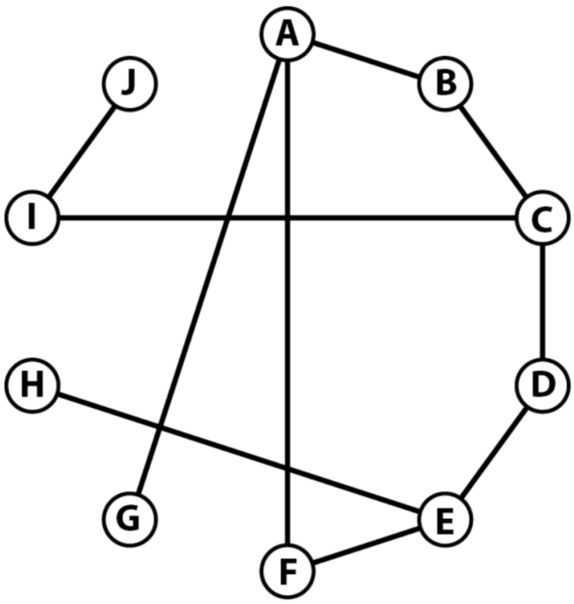


FIGURA 40: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2.

FONTE: Autor

Passo 1: *Escolhemos qualquer vértice desse grafo e atribuímos uma cor para ele. Nesse caso foi escolhido o vértice A, e atribuímos a cor amarela (Figura 41).*

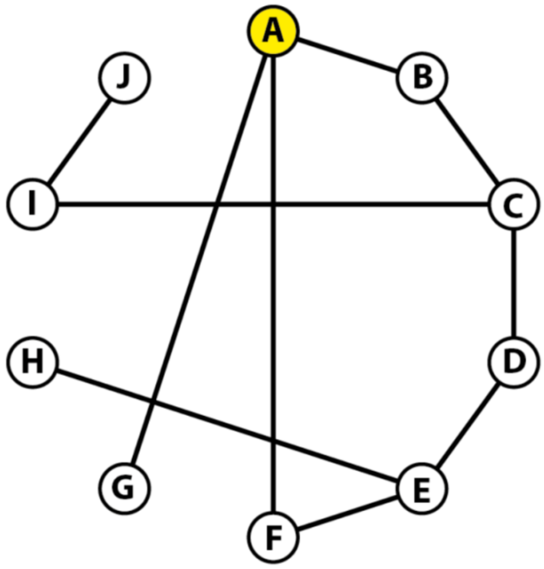


FIGURA 41: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 1).

FONTE: Autor

Passo 2: *Em seguida, inspecionando no sentido horário dos vértices, escolhemos o vértice B, e como o mesmo possui ligação com o vértice A, então teremos que escolher outra cor; nesse caso escolhemos a cor azul (Figura 42).*

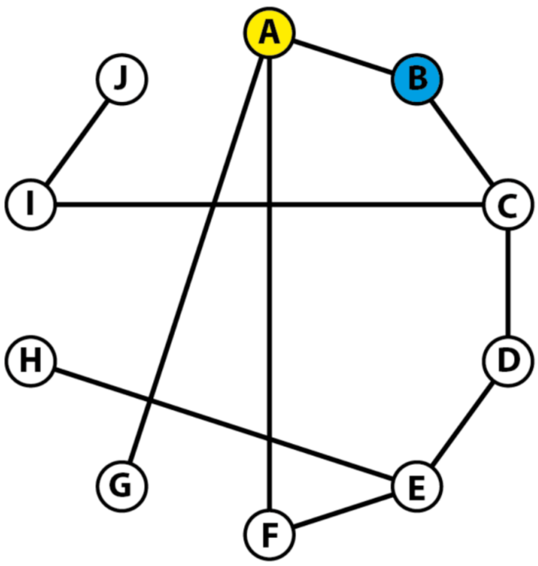


FIGURA 42: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 2).

FONTE: Autor

Passo 3: *Em seguida escolheremos o vértice C. Entretanto observa-se que o mesmo é conectado com B. Então, atribuiremos a cor amarela para C (Figura 43).*

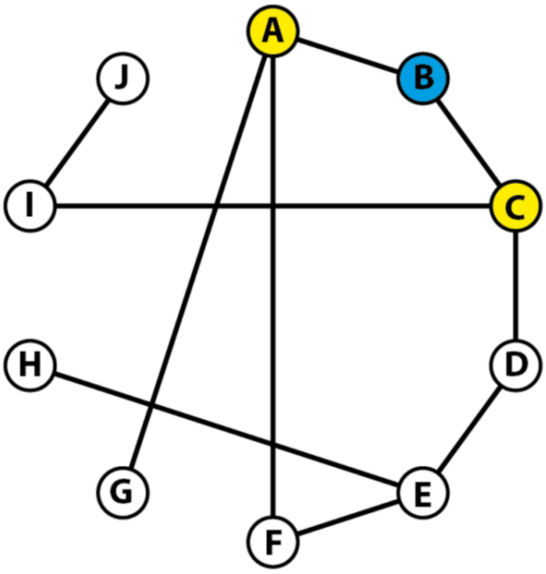


FIGURA 43: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 3).

FONTE: Autor

Passo 4: *Em seguida escolheremos o vértice D. Porém, o mesmo não poderá ter a mesma cor que a do vértice C, então atribuiremos a cor azul (Figura 44).*

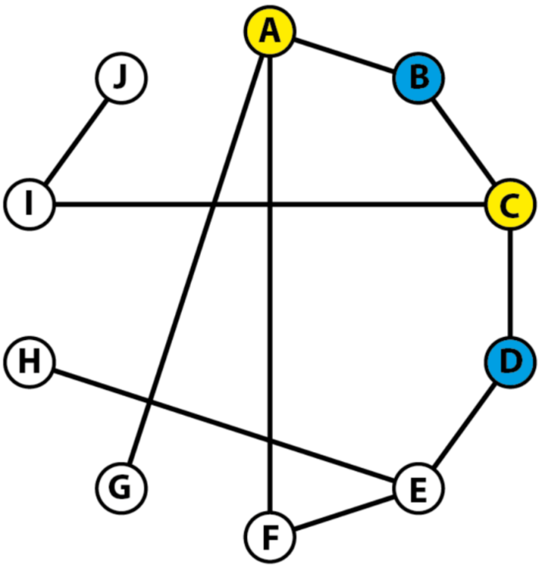


FIGURA 44: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 4).

FONTE: Autor

Passo 5: *Em seguida, escolheremos o vértice E. E como não podemos atribuir a mesma cor do vértice D, atribuiremos a cor amarela (Figura 45).*

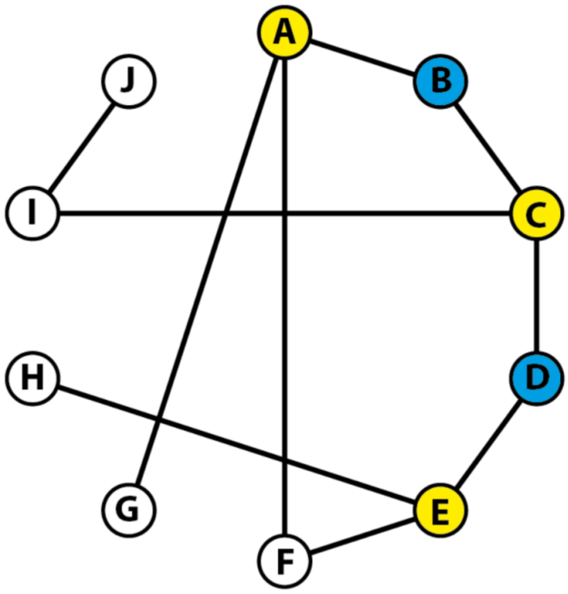


FIGURA 45: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 5).

FONTE: Autor

Passo 6: *Em seguida escolheremos o vértice F. E como não poderemos atribuir a cor amarela, atribuiremos a cor azul (Figura 46).*

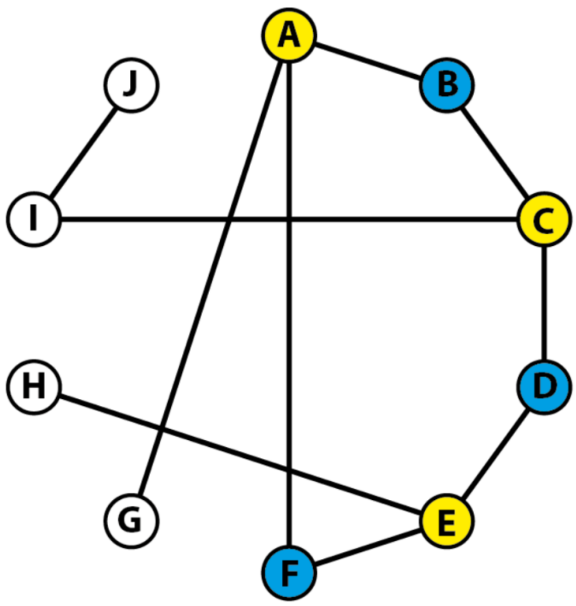


FIGURA 46: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 6).

FONTE: Autor

Passo 7: *Em seguida, escolheremos o vértice G. Como ele está conectado ao vértice A que possui a cor amarela, então atribuiremos a ele a cor azul (Figura 47).*

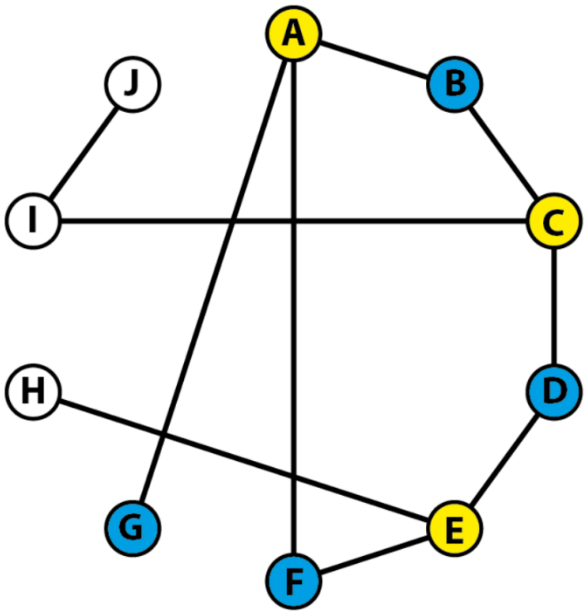


FIGURA 47: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 7)

FONTE: Autor

Passo 8: *Em seguida, escolheremos o vértice H. Como não podemos atribuir a ele a cor amarela, atribuiremos a ele a cor azul (Figura 48).*

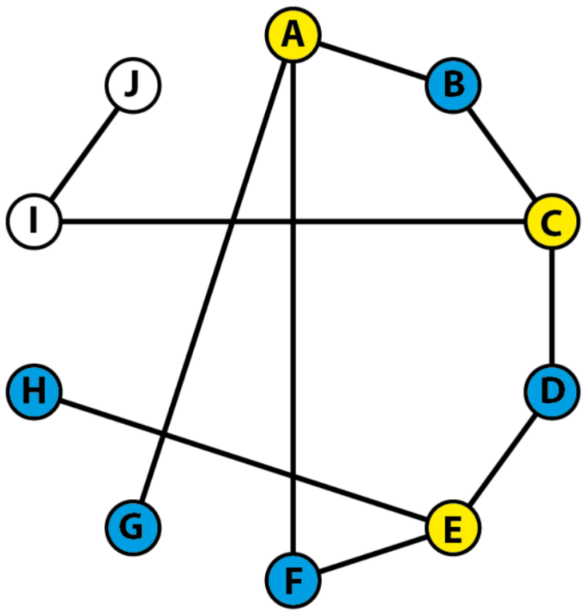


FIGURA 48: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 8).

FONTE: Autor

Passo 9: *Em seguida, escolheremos o vértice I. Como o mesmo está conectado ao vértice C então deveremos escolher a cor azul (Figura 49).*

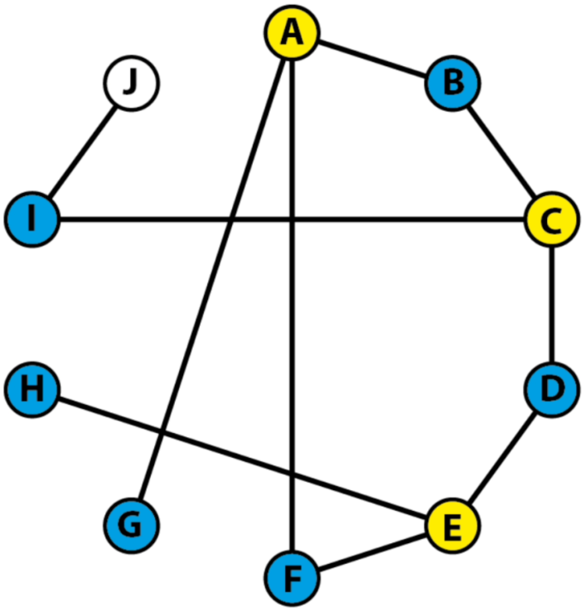


FIGURA 49: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 9).

FONTE: Autor

Passo 10: *Por fim, devemos atribuir ao vértice J a cor amarela, já que o mesmo está conectado ao vértice I que possui a cor azul (Figura 50).*

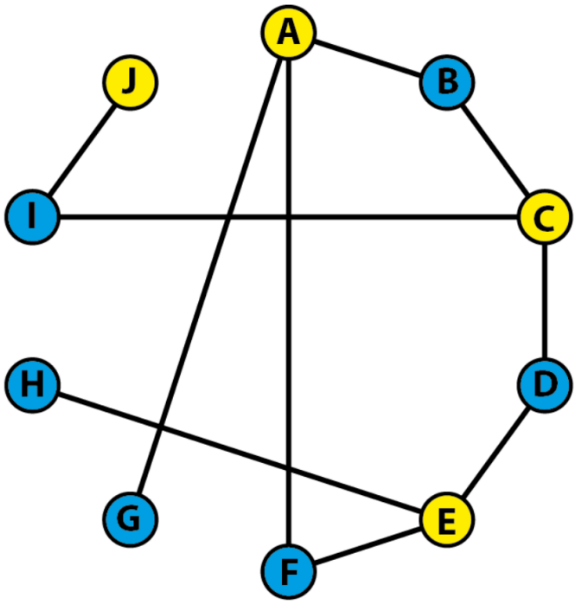


FIGURA 50: Grafo representativo da atividade 1 do teste 2 (Passo 10).

FONTE: Autor

Sendo assim é possível ver que, como foram necessárias apenas duas cores para armazenar os 10 tipos de reagentes dentro das restrições, então o número mínimo de galpões é 2.

ATIVIDADE 02: O esquema da Figura 50 representa o mapa de uma competição de corrida, onde os pontos representam as bases de reidratação para os velocistas e as ligações entre essas bases representam as ruas que ligam as mesmas. O valor dado a cada ligação representa o tempo, em minutos, que se leva para chegar de uma base a outra, e os competidores têm liberdade para escolher seu percurso.

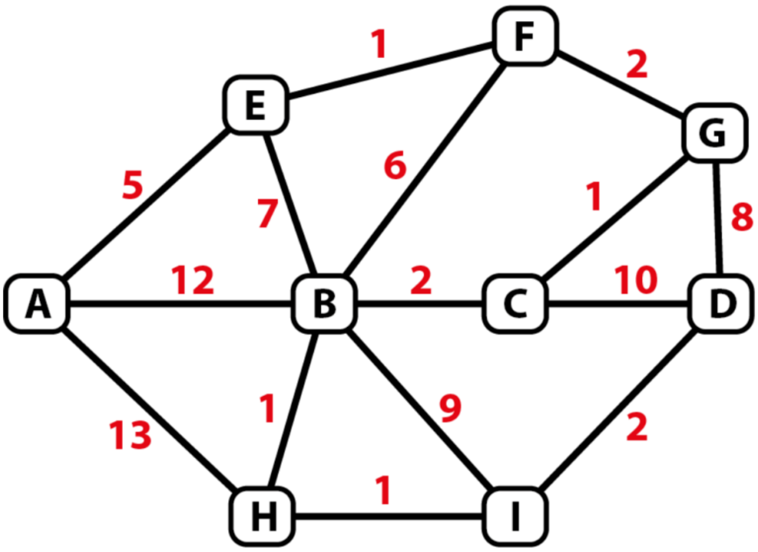


FIGURA 51: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2.

FONTE: Autor

Sabendo que essa corrida tem início na base A e termina na base D, e que o vencedor será o que concluir o percurso no menor tempo, podemos garantir que será vencedor o competidor que fizer qual trajeto?

RESOLUÇÃO:

A solução será dada usando o algoritmo de Dijkstra.

Passo 1: *Como desejamos o menor tempo para percorrer do vértice A ao D, iniciaremos o procedimento do vértice A. Os vizinhos de A são E, B e H. Escreve-se sobre E, B e H, respectivamente, (5,A), (12,A) e (13,A), indicando os tempos necessários percorrer os caminhos AE, AB e AH, e marcam-se tais arestas (Figura 52).*

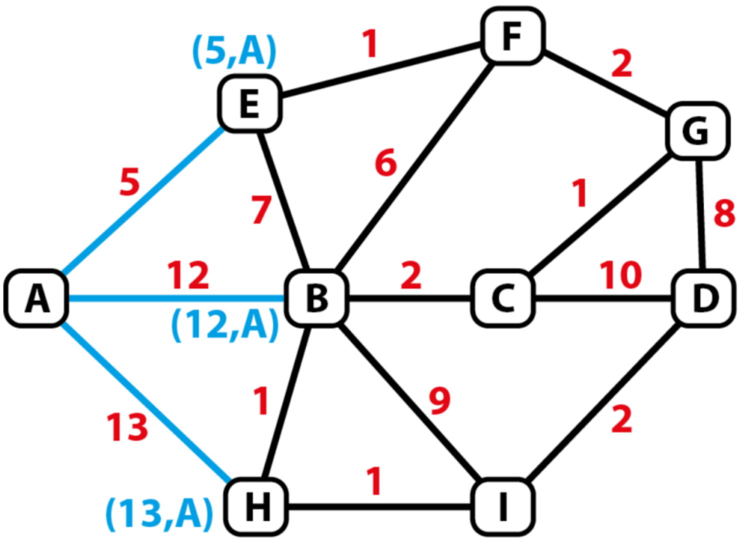


FIGURA 52: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 1).

FONTE: Autor

Passo 2: *O vértice que representa o menor tempo de percurso é E. Então é a partir dele que o processo continua. Seus vizinhos são B e F. Analisando inicialmente o vértice B: o tempo necessário para o caminho AEB é 5+7=12, o que não melhora o tempo do caminho AB. Então a aresta EB não será marcada. Agora será analisado o F. O caminho AEF pode ser feito em 5+1=6 minutos. Escreve-se então (6,E) sobre o vértice F, indicando que caminho total demora 6 minutos vindo de E. Obtém-se então a Figura 53.*

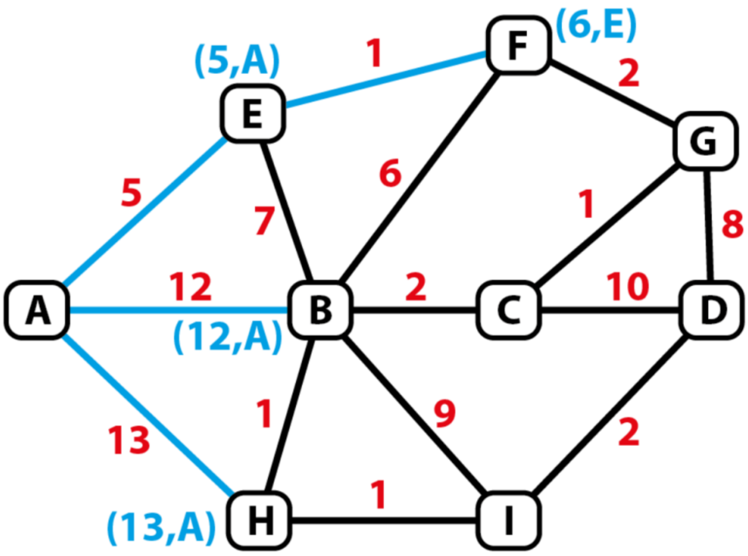


FIGURA 53: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 2).

FONTE: Autor

Passo 3: *Dentre os vértices que não visitaram nenhum outro vértice, o que possui menor tempo é o F. Dando sequência ao processo a partir do vértice F, teremos como seus vizinhos os vértices B e G. Analisando B, novamente AEFB pode ser feito em 12 minutos, o que não melhora o tempo do caminho AB. Então não marcamos FB. Agora será analisado o G. O caminho AEFG pode ser feito em 6+2=8 minutos. Escreve-se então (8,F) sobre o vértice G, indicando que o caminho total demora 8 minutos vindo de F. Obtém-se então a Figura 54.*

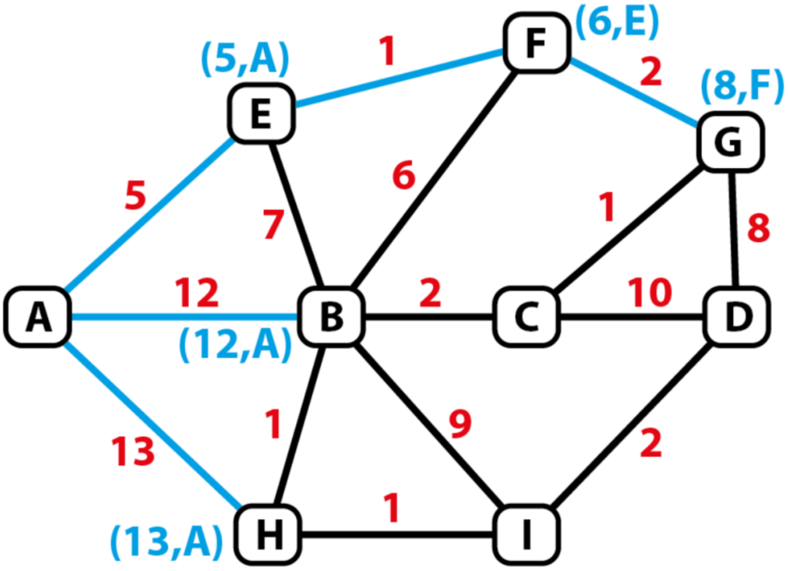


FIGURA 54: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 3).

FONTE: Autor

Passo 4: *O vértice que representa o menor tempo de percurso é G. Sendo seus vizinhos os vértices C e D. atualizando os respectivos vértices teremos em C (9,G) e em D devemos escrever (16,G). Então obtemos a Figura 55.*

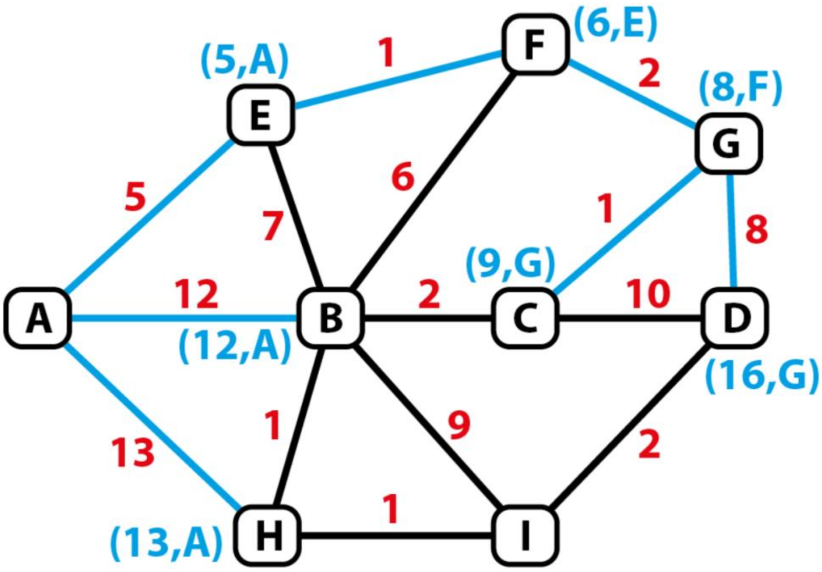


FIGURA 55: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 4).

FONTE: Autor

Passo 5: *O vértice que representa o menor tempo de percurso é C. Seus vizinhos são B e D. Observe que em D não mudamos nada, pois 9+10 não melhora o caminho já descrito que é 16. E em B deve-se escrever (11,C), pois 9+2=11 melhora o tempo 12 que havia sido marcado em B. Marca-se a aresta CB e desmarca-se a AB, obtendo a Figura 56.*

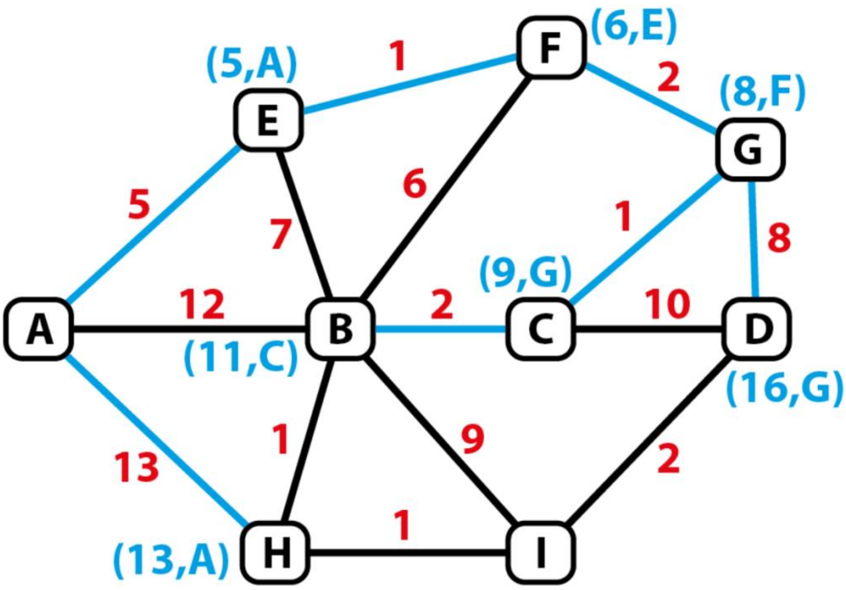


FIGURA 56: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 5).

FONTE: Autor

Passo 6: *O vértice que representa o menor tempo de percurso é B. Seus vizinhos são H e I. Em H deve-se mudar para (12,B), pois 11+1 melhora o tempo anterior de 12 vindo de A. Marca-se a aresta BH e desmarca-se a aresta AH, então. Em I escreve-se (20,B), e marca-se a aresta BI (Figura 57).*

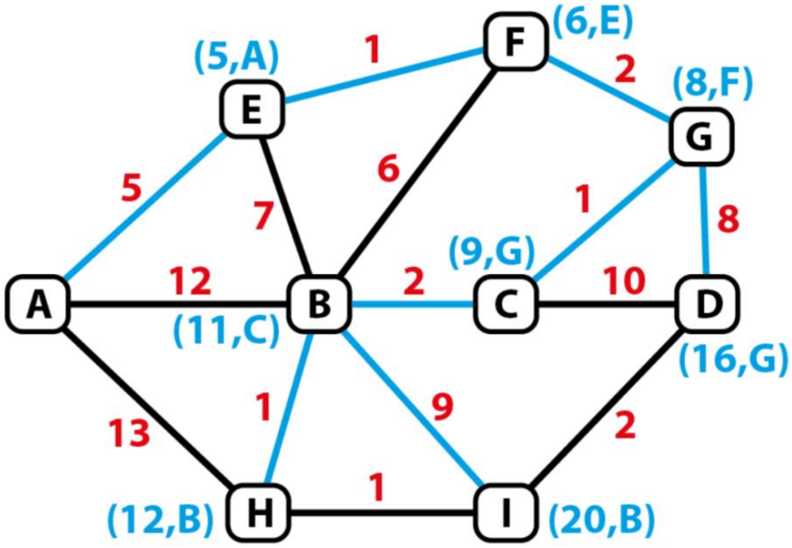


FIGURA 57: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 6).

FONTE: Autor

Passo 7: *O vértice que representa o menor tempo de percurso é H. Seus vizinhos são A e I. Como não faz sentido como propósito do algoritmo voltar para A. Então, considerando I, observa-se que deve-se mudar o rótulo de I de (20,B) para (13,I), pois vindo de I o tempo será 13. Marca-se a aresta HI e desmarca-se a aresta BI (Figura 58).*

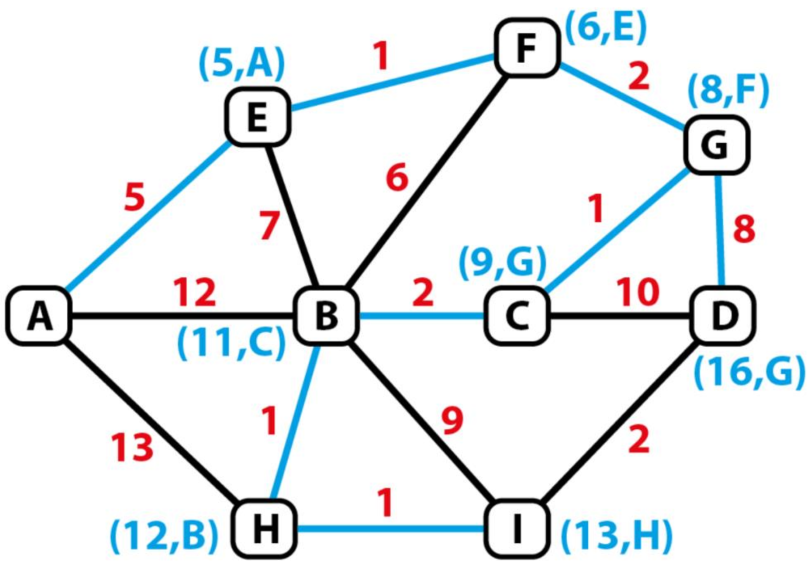


FIGURA 58: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 7).

FONTE: Autor

Passo 8: *Por fim, partindo de I, que representa o menor tempo de percurso, observa-se que se deve rotular D como (15,I), pois 13+2=15 melhora o tempo anterior que é 16. Então, desmarcamos a aresta GD e o menor tempo é 15 minutos, pelo caminho AEFGCBHI (Figura 59).*

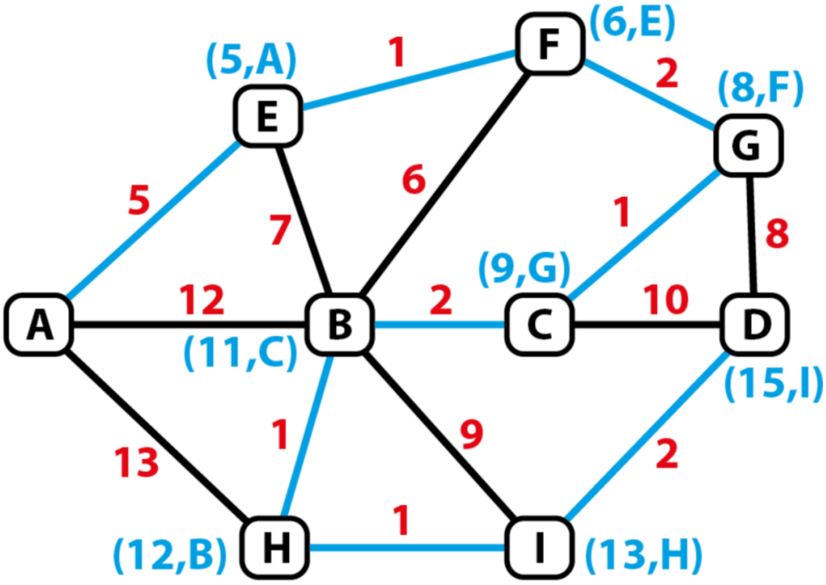


FIGURA 59: Grafo representativo da atividade 2 do teste 2 (Passo 8)

FONTE: Autor

ATIVIDADE 03: O prefeito de “GRAFOLÂNDIA” contratou os serviços de uma empresa de coleta de lixo para recolher todo lixo contido nos 7 bairros de sua cidade, distribuídos como na Figura 60**:**

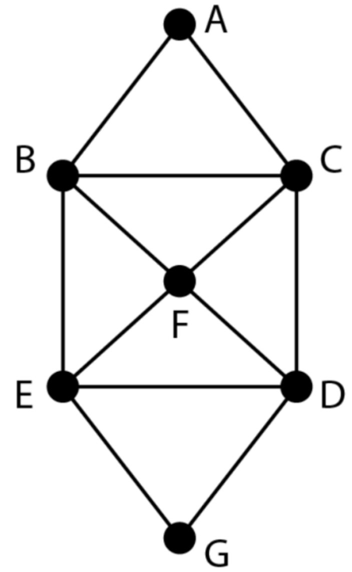


FIGURA 60: Grafo representativo da atividade 3 do teste 2.

FONTE: Autor

Sabe-se que o caminhão do recolhimento sai do bairro A e deve percorrer todas as ruas que ligam os bairros uma única vez e retornar ao lixão que se instala no bairro A. É possível o caminhão cumprir com as regras de recolhimento? Se for possível, defina um caminho.

<u>RESOLUÇÃO:</u>

Sim, é possível realizar essa tarefa pois o grafo representativo de “Grafolândia” é euleriano, ou seja, todos os vértices têm grau par. Sendo assim é possível iniciar e terminar pelo mesmo vértice passando por todas as arestas uma única vez. Uma possível trilha, ACDGEBFDEFCBA, está representado na Figura 61.

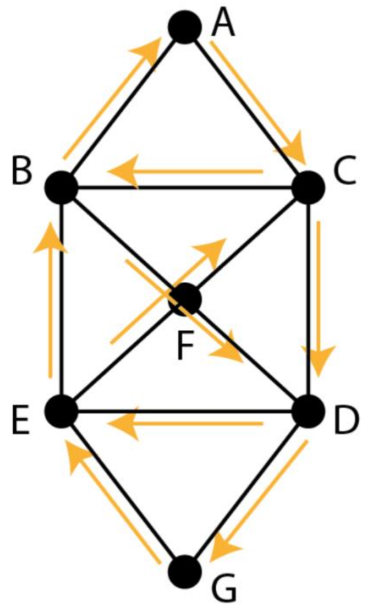


FIGURA 61: Grafo representativo da atividade 3 do teste 2 (Finalizado).

FONTE: Autor

ATIVIDADE 04: Considere a Tabela 1 dos alunos que precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do ensino fundamental:

ALUNO	**DISCIPLINA**
A	MATEMÁTICA E PORTUGUÊS
B	MATEMÁTICA E FÍSICA
C	FÍSICA, QUÍMICA E HISTÓRIA
D	PORTUGUÊS E GEOGRAFIA
E	MATEMÁTICA E GEOGRAFIA
F	PORTUGUÊS E QUÍMICA
G	GEOGRAFIA E HISTÓRIA
H	QUÍMICA E ARTES

TABELA 1: Tabela referente a atividade 4 do teste 2.

FONTE: Autor

A) Monte um grafo para a situação descrita acima, considerando os vértices representando as disciplinas.

OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

B) Encontre o número mínimo de horários.

RESOLUÇÃO:

Representaremos o problema acima fazendo uso do estudo de incompatibilidade por coloração com um grafo onde seus vértices são as disciplinas, e as arestas que as conectam, as disciplinas que não podem ser aplicadas no mesmo dia (Figura 62).

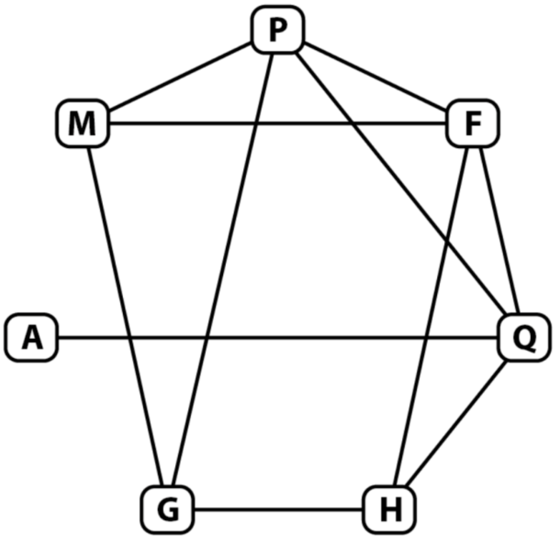


FIGURA 62: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2.

FONTE: Autor

Passo 1: *Escolhemos qualquer vértice desse grafo e atribuímos uma cor para ele. Nesse caso foi escolhido o vértice M e atribuímos a cor amarela a ele (Figura 63).*

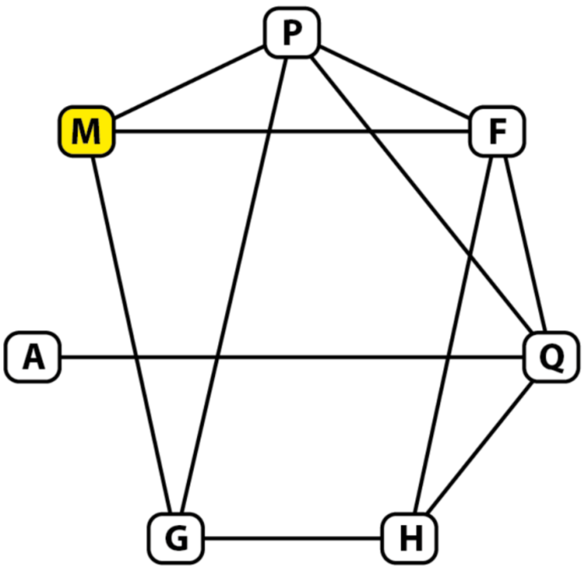


FIGURA 63: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 1).

FONTE: Autor

Passo 2: *Escolhendo os vértices em sentido horário, daremos sequência ao processo pelo vértice P. Como P é conectado ao vértice M, então não poderemos atribuir a cor amarela a ele; atribuiremos a cor vermelha (Figura 64).*

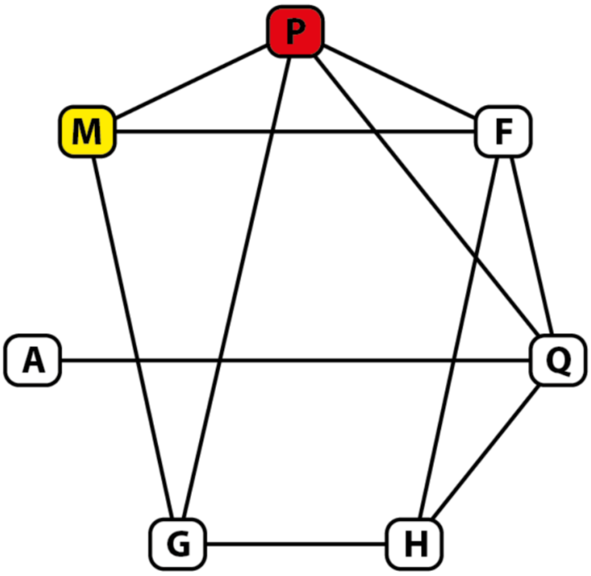


FIGURA 64: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 2).

FONTE: Autor

Passo 3: *Ao escolher o vértice F, percebe-se que o mesmo é conectado aos vértices M e P. Então não poderemos atribuir a ele nem a cor amarela nem a vermelha. Sendo assim, atribuiremos a cor azul (Figura 65).*

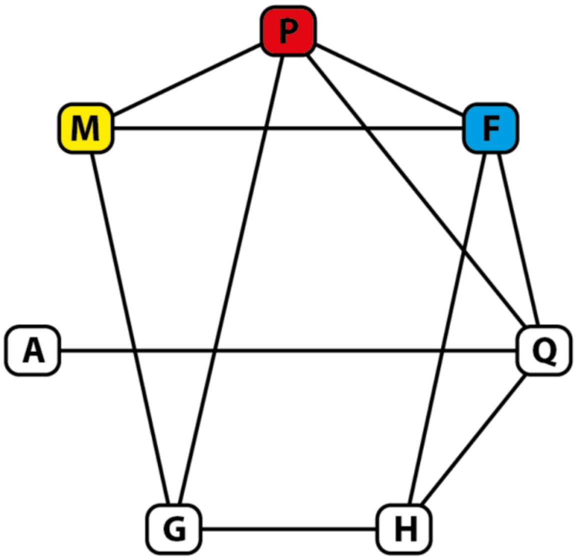


FIGURA 65: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 3).

FONTE: Autor

Passo 4: *Ao escolher o vértice Q, percebe-se que o mesmo é conectado aos vértices F e P. Então não poderemos atribuir a ele nem a cor azul nem a vermelha. Então, atribuiremos a cor amarela (Figura 66).*

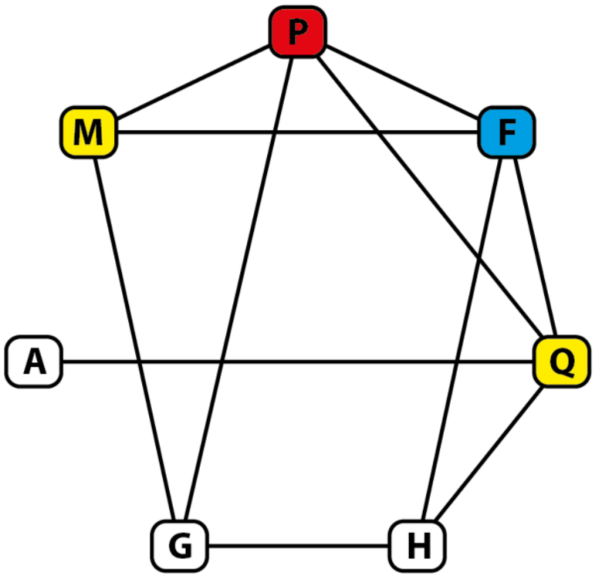


FIGURA 66: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 4).

FONTE: Autor

Passo 5: *Ao escolher o vértice H, percebe-se que o mesmo é conectado aos vértices F e Q, então não poderemos atribuir a ele nem a cor azul nem a amarela. Sendo assim ,atribuiremos a cor vermelha (Figura 67).*

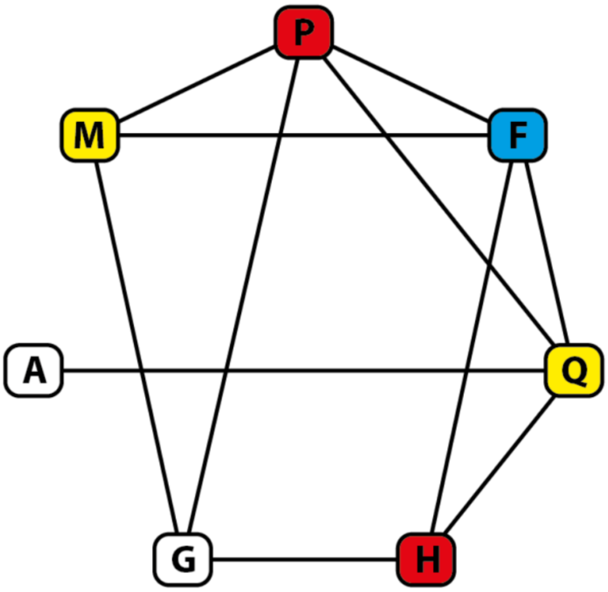


FIGURA 67: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 5).

FONTE: Autor

Passo 6: *Ao escolher o vértice G, observamos que o mesmo é conectado aos vértices M, P e H, então não poderemos atribuir a ele nem a cor vermelha nem a amarela. Sendo assim, atribuiremos a cor azul (Figura 68).*

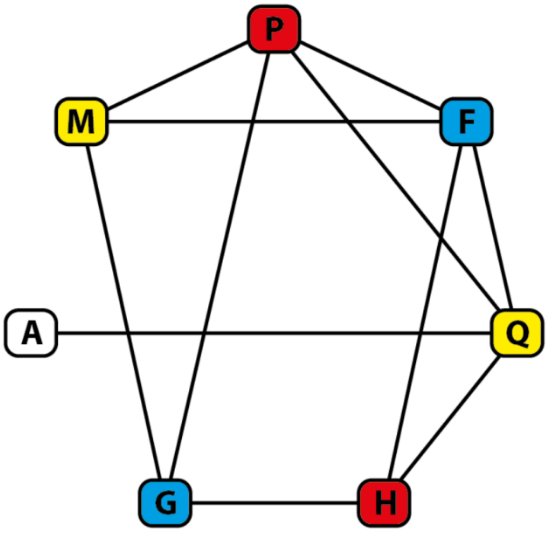


FIGURA 68: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 6).

FONTE: Autor

Passo 7: *Por fim, teremos a escolha do vértice A. Entretanto, o mesmo apenas está conectado ao vértice Q, que por sua vez tem atribuído a ele a cor amarela. Então ,podemos atribuir ao vértice A ou a cor azul ou a cor vermelha. Atribuiremos a cor vermelha (Figura 69).*

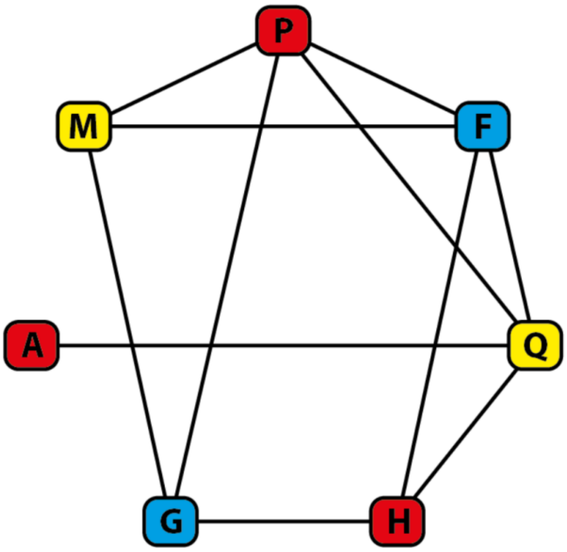


FIGURA 69: Grafo representativo da atividade 4 do teste 2 (Passo 7).

FONTE: Autor

Sendo assim o número mínimo de horários equivale ao número de cores que são 3, ou seja, português, história e artes podem ser aplicadas no mesmo dia assim como matemática e química que podem ser aplicadas no mesmo dia, e seguindo o mesmo roteiro com física e geografia.

3 METODOLOGIA

Nesse capítulo serão descritos os sujeitos da pesquisa, a metodologia usada na realização da pesquisa e cada procedimento realizado em cada uma das aulas.

3.1 SUJEITOS DA PESQUISA

A experiência foi desenvolvida em duas turmas distintas, uma sendo um 9º ano do ensino fundamental e outra do 3º ano do ensino médio, ambas turmas militares do sistema ELITE de ensino, da rede particular de ensino, que fica localizado na cidade de Nova Iguaçu, Rio de Janeiro. Para esta pesquisa foram utilizadas quatro aulas, cada aula com dois tempos de 50 minutos. As duas turmas possuíam aproximadamente 80 alunos, com a faixa etária variando de 14 a 18 anos. A experiência foi feita no período de outubro a novembro de 2018.

3.2 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste trabalho foi realizado um estudo de caso. Foi realizado um mesmo experimento em dois grupos distintos, uma turma de 9° ano do ensino fundamental e uma turma do 3° ano do ensino médio. Na aula inicial foi aplicado um questionário motivacional, adaptação do questionário de Gontijo, juntamente com um teste que continha quatro questões que podiam ser resolvidas com grafos, mas não necessariamente. Como os alunos não sabiam, foram orientados a resolvê-lo baseados na grade curricular básica que até então já tinham. A segunda e terceira aulas foram dedicadas ao ensino de conceitos e técnicas básicas de grafos, como resolução de problemas fazendo uso de caminhos em grafos, algoritmo de Dijkstra, planaridade e problemas de incompatibilidade por coloração. Na quarta aula foi aplicado um novo teste com quatro questões; entretanto, agora os alunos possuíam conhecimento a respeito do estudo de grafos, e poderiam usá-lo, se assim fosse conveniente. Em seguida, foi aplicado novamente um questionário a fim de avaliar se o estudo de grafos auxiliou no seu crescimento.

3.3 DESCRIÇÃO DAS AULAS

Nesta etapa da pesquisa iremos descrever como todas as aulas ocorreram, bem como os testes e questionários.

3.3.1 AULA 1: QUESTIONÁRIO INICIAL

Na aula 1 foi aplicado o Questionário Inicial, adaptado do Questionário de Gontijo. O objetivo era analisar os alunos escolhidos, e através de suas respostas, avaliar seus perfis. Este questionário teve como objetivo mensurar de alguma forma a motivação para o estudo em Matemática, tanto quanto sua característica social e familiar. Ele possui as seguintes possibilidades de resposta: (1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre.

1°) Satisfação pela matemática

	Fator 1 – Satisfação pela matemática	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas.					
2	Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a).					
3	Tenho muita dificuldade para entender matemática.					
4	Matemática é “chata”					
5	Aprender matemática é um prazer					
6	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas					
7	Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas					
8	Consigo bons resultados em matemática					

Tabela 2: Satisfação pela matemática

2°) Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e desafios	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.					
2	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.					
3	Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas					
4	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares.					

Tabela 3: Jogos e desafio

3°) Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Gosto de resolver os exercícios rapidamente					
2	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.					
3	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática.					
4	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.					
5	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.					

Tabela 4: Resolução de problemas

4°) Aplicações no cotidiano

	Fator 4 – Aplicações no cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.					
2	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.					
3	Faço desenhos usando formas geométricas					
4	Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola					
5	Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.					

Tabela 5: Aplicações no cotidiano

5°) Hábitos nos estudos

	Fator 5 – Hábitos nos estudos	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Estudo matemática todos os dias durante a semana.					
2	Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa.					
3	Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.					
4	Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes.					

Tabela 6: Hábitos nos estudos

6°) Interação na sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas.					
2	Relaciono-me bem com meu professor de matemática.					

Tabela 7: Interação na sala de aula

7°) Convívio familiar e social

	Fator 7 – Convívio familiar e social	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos?					
2	Em casa você recebe ajuda quando sente dificuldade nos estudos.					
3	Você se junta com seus amigos fora do ambiente escolar com o intuito de estudar.					
4	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos?					

Tabela 8: Convívio familiar e social

3.3.2 Aula 1: Teste 1

Após a aplicação do questionário motivacional, foi aplicado aos alunos um teste contendo 4 problemas e que poderiam ser resolvidos fazendo uso do conhecimento que adquiriram ao longo da construção de sua vida escolar. Entretanto, se tivessem o mínimo conhecimento sobre o estudo de grafos, a solução seria mais objetiva. Os alunos tiveram 60 minutos para a realização desse teste. Eles foram orientados a desenvolvê-lo individualmente da forma que eles se sentissem mais confortáveis, não podendo fazer uso de nenhum material auxiliador. Sendo assim, qualquer dúvida que surgisse, se não fosse sobre a formulação do problema, não seria explicada. O teste 1 segue abaixo.

QUESTÃO 1

Um canil possui 6 cachorros cuidados por um veterinário. Por motivo de controle de doença, sabe-se que o cachorro 1 não pode ficar com os cachorros 3, 4 e 5, que o cachorro 2 não pode ficar com o cachorro 6 e que o cachorro 5 não pode ficar nem com o cachorro 6, nem com o cachorro 4. Seja N o menor número de casinhas que são necessárias para comportar esses cachorros visando respeitar o controle de doença. Determine N:

QUESTÃO 2

Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema? (A Figura abaixo refere-se a esta atividade).

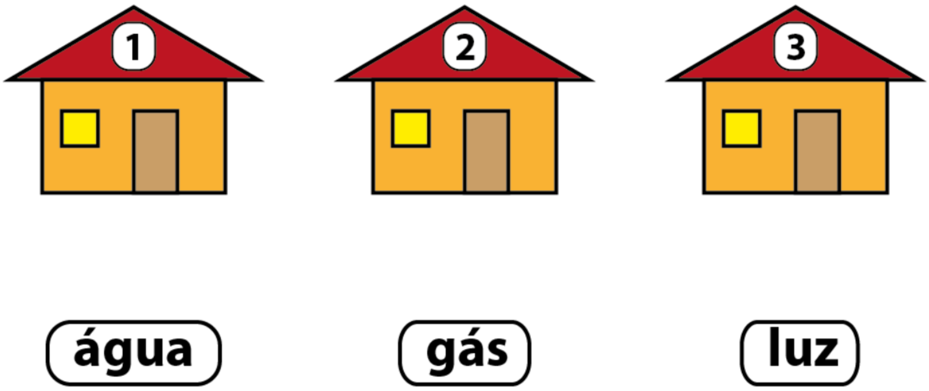


FIGURA 70: Figura representativa da atividade 2 do teste1

FONTE: Autor

QUESTÃO 3

(DA SILVA, C.M.,2015) Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nelas elas caem. Nas Figuras 1 e 2, o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Ao final, ele deve sair pela porta A novamente. Qual é o melhor caminho, se existir, para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

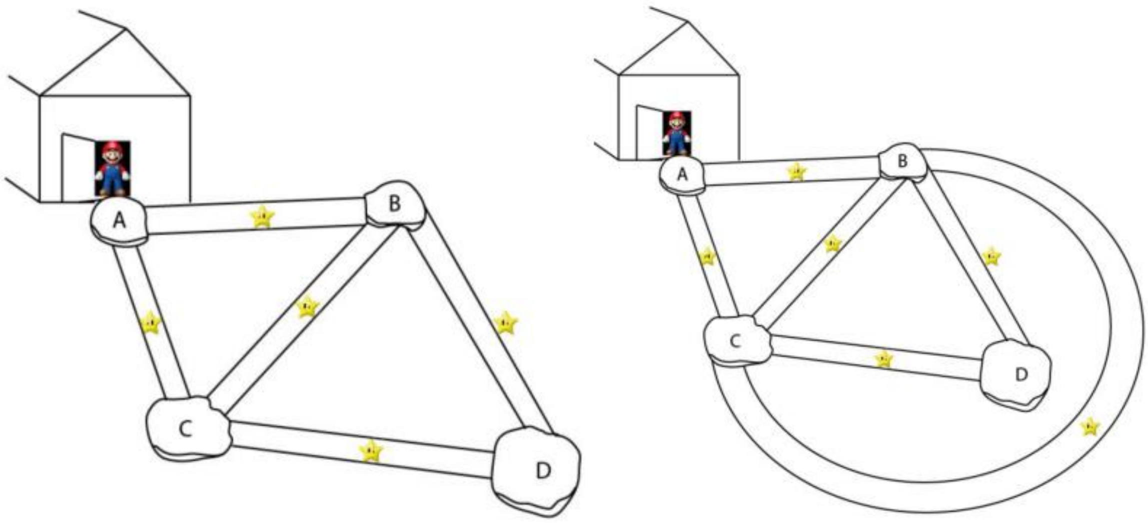


FIGURA 71: Figura representativa da atividade 3 do teste 1

FONTE: Autor

QUESTÃO 4

No esquema abaixo, cada ponto representa uma região e cada ligação uma estrada. Os números representam as distâncias. Qual é o menor caminho para uma pessoa ir do ponto “4” até o ponto “8”?

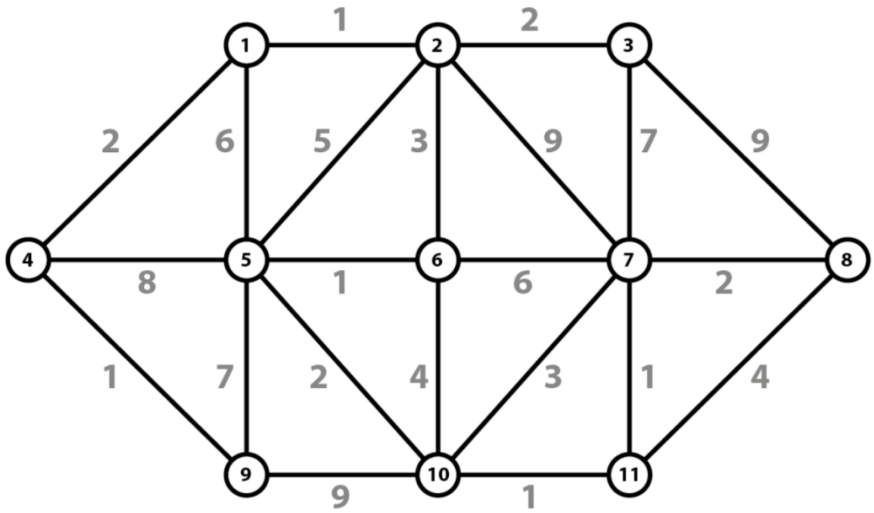


FIGURA 72: Grafo representativo da atividade 4 do teste 1

FONTE: Autor

Como já foi dito, as atividades foram desenvolvidas de tal forma que os alunos não necessitassem de um conhecimento sobre grafos para resolver. Entretanto, com tal conhecimento, a visualização do resultado das mesmas seria extremamente rápida.

Usando as técnicas de teoria de grafos, a primeira questão seria resolvida pela ideia de incompatibilidade de vértices, através do estudo de coloração. A segunda questão teria como resposta a palavra impossível, pois a figura proposta define um grafo bipartido $K_{3,3}$, e o mesmo não permite uma representação planar, ou seja, sem haver cruzamento entre as arestas. A terceira questão teria como resposta para a primeira figura a palavra impossível, já que a mesma não corresponde a um grafo Euleriano, ou seja, todos os vértices possuem grau par, o que ocorre na segunda figura. Uma possível solução como caminho é definida por ABCDBCA. A quarta questão tinha por objetivo identificar o menor caminho para ir do vértice 4 ao vértice 8, e para isso usaríamos o algoritmo de Dijkstra como ferramenta para a obtenção da solução.

3.3.3 Aulas 2 e 3: Construção teórica da teoria dos grafos

Para as aulas 2 e 3 foi feito um planejamento onde ideias e técnicas básicas de grafos seriam construídas juntamente com os alunos. Na verdade, o objetivo era fazê-los perceber, através de conceitos primitivos, as formalizações de tal assunto. A primeira parte da aula 2 iniciou com um problema motivacional representado na (Figura.73).

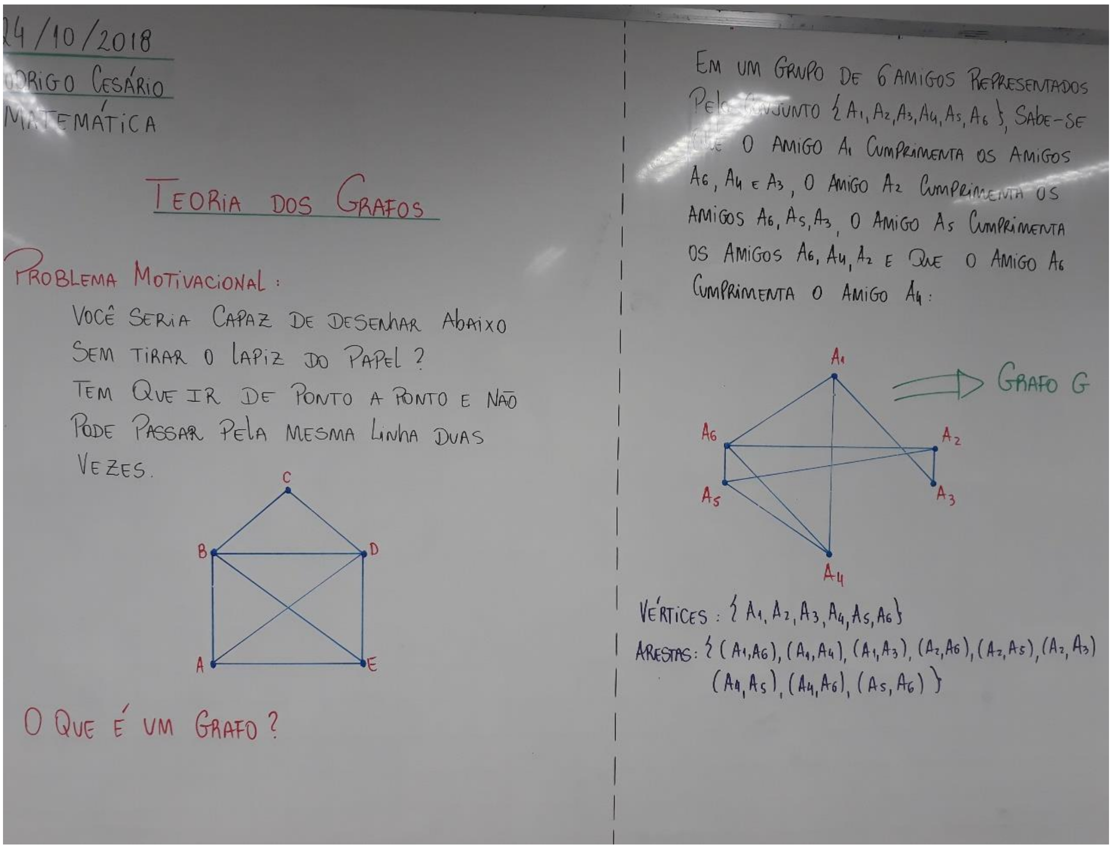


FIGURA 73: Foto da aula sobre introdução a grafos

FONTE: Autor

Para que a formalização dos conceitos de teoria dos grafos fosse algo construído pelos alunos, convoquei um aluno de cada turma, um do 9° ano e um da 3° série, a tentar resolver um problema, entretanto apenas um aluno dentre as duas se sentiu confortável a ir no quadro e conseguiu uma solução visualizada na (Figura.74).

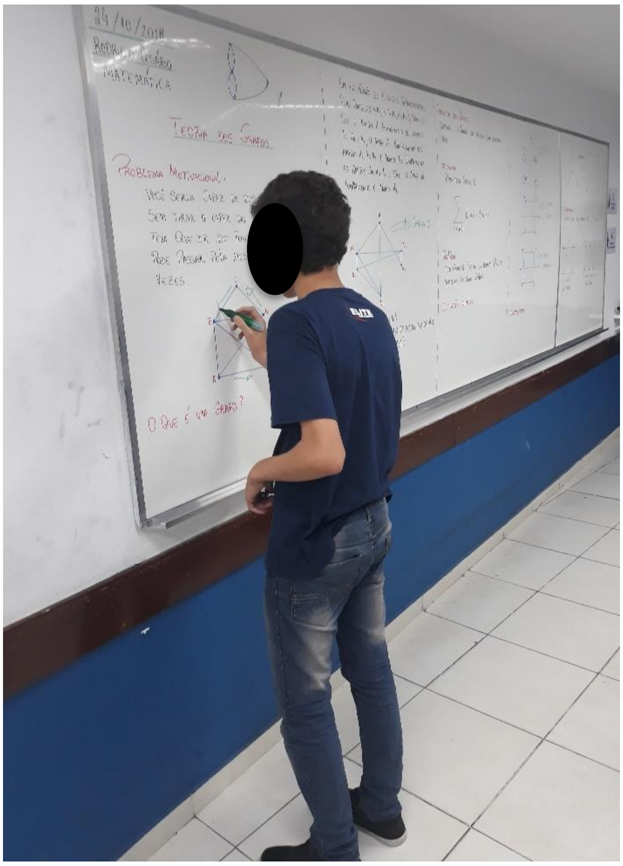


FIGURA 74: Foto De um aluno resolvendo o problema motivacional

FONTE: Autor

Logo após a essa atividade motivacional, foi iniciada a construção mais formal sobre a teoria dos grafos, onde foi apresentada a teoria sobre o grau de um vértice e sobre algumas definições simples como o que é um laço, um grafo conexo e desconexo (Figura.75), foi apresentado também a teoria sobre isomorfismo e planaridade com destaque para dois tipos de grafos não planares, o K_5 completo e o grafo bipartido completo $K_{3,3}$ (Figura.76).

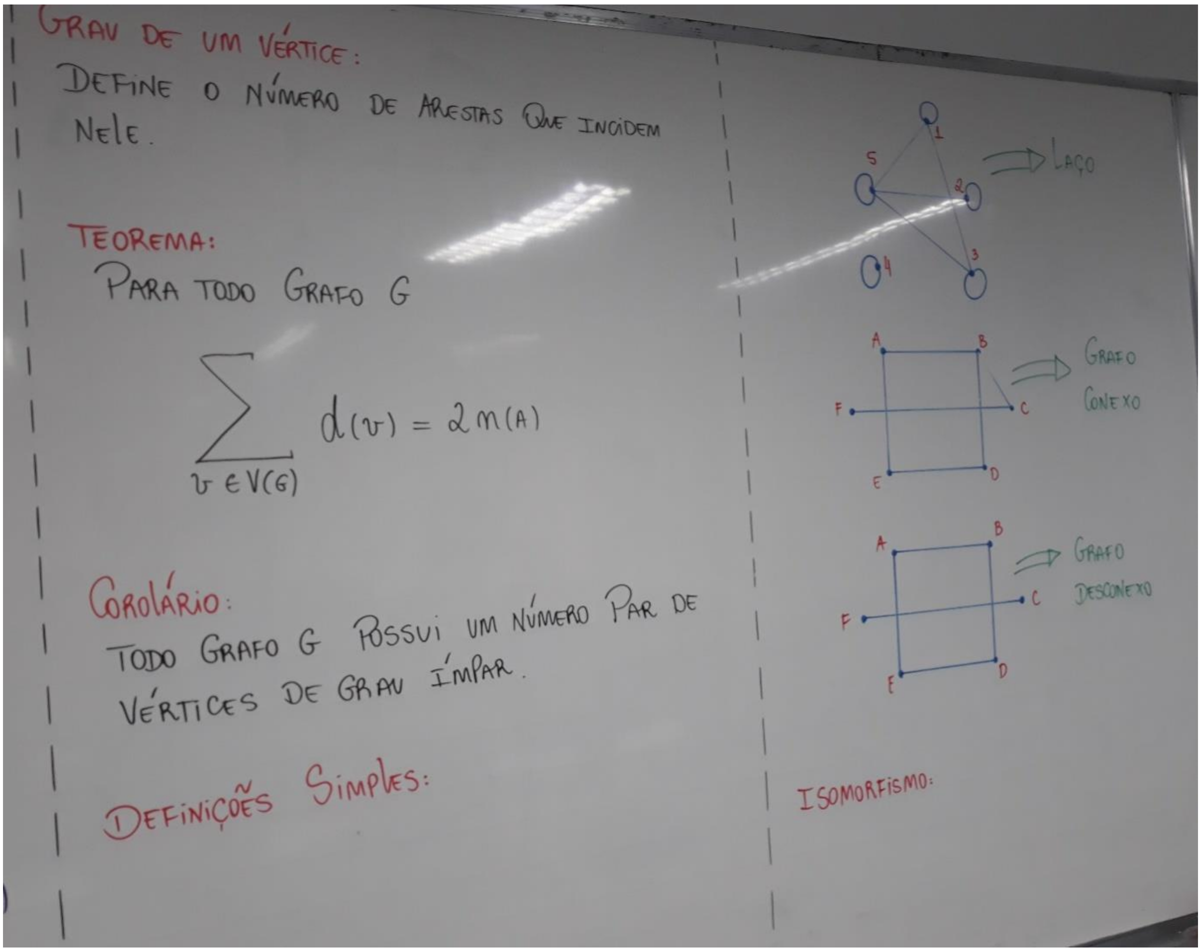


FIGURA 75: Foto da aula sobre grau de um vértice, laço, grafo conexo e desconexo

FONTE: Autor

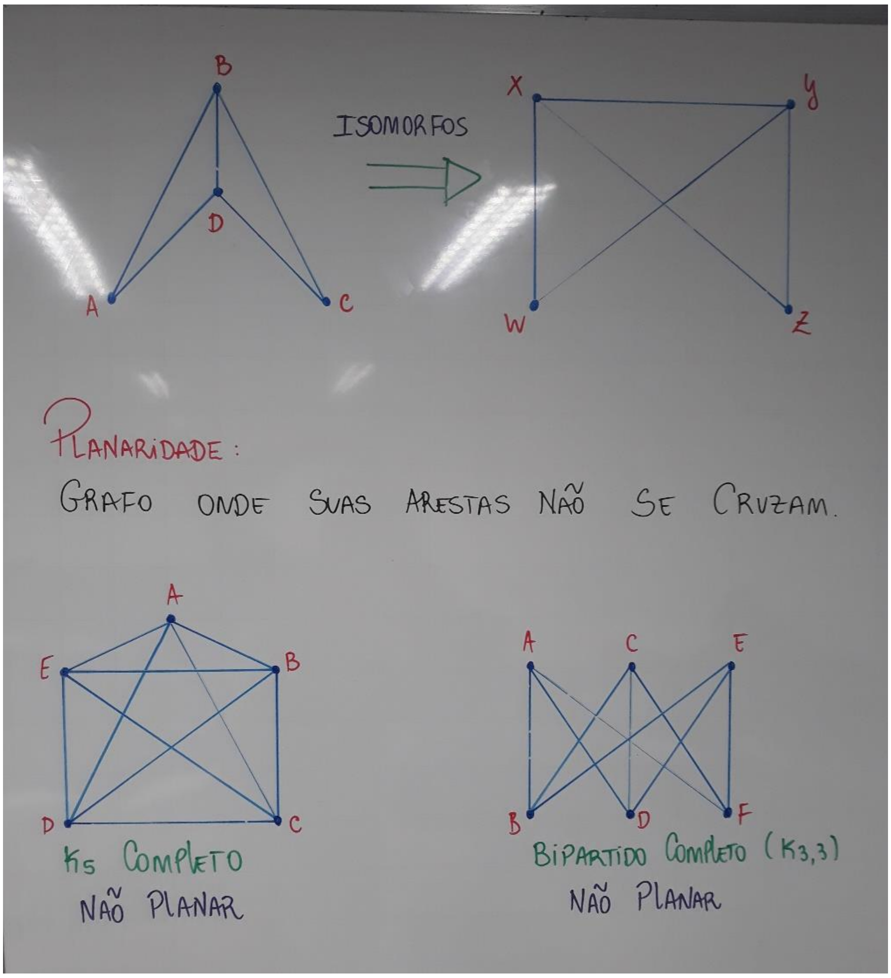


FIGURA 76: Foto da aula sobre isomorfismo e planaridade

FONTE: Autor

No decorrer da aula, logo após ter sido mencionado sobre grafos não planares, um aluno da 3° série do ensino médio indagou. “mestre!! Esse grafo bipartido $K_{3,3}$ é o mesmo do problema da água, gás e luz para as três casas, não é?”, “então é por isso que eu não achei solução”. Prontamente respondi que sim.

Para encerrar a primeira parte da aula 2 propus aos alunos achar uma solução para um grafo bipartido $K_{3,3}$ definido em um toro, de imediato informei que existia solução para que os alunos não fossem influenciados a achar que não teria solução como um bipartido $K_{3,3}$ não planar. Tanto no 9° ano (Figura.78) como na 3° série (Figura.79) foi determinada uma solução pelos grupos de alunos que tentaram.

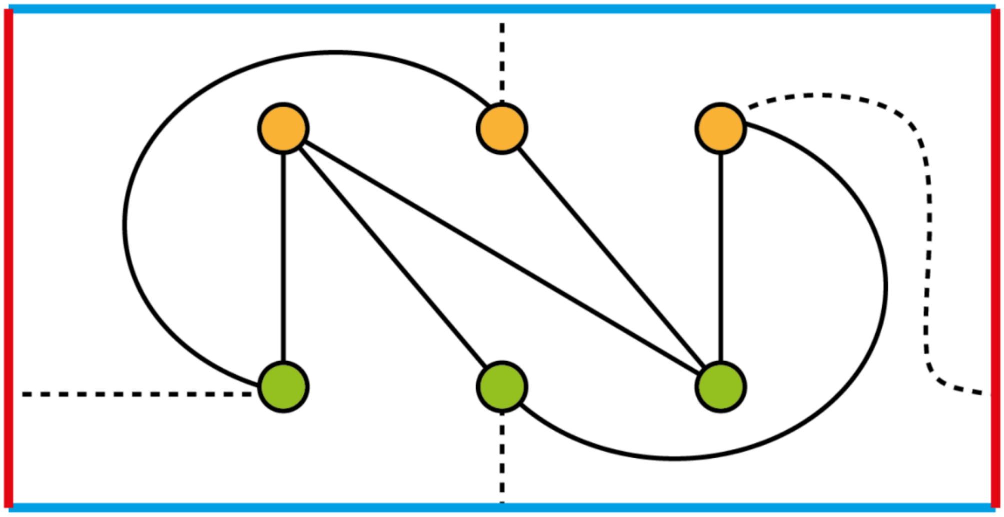


FIGURA 77: Solução possível na atividade do "TORO"

FIGURA 78: Foto da solução de um aluno do 9° ano na atividade do "TORO"

FONTE: Autor

FIGURA 79: Foto da solução de um aluno da 3° série na atividade do "TORO"

FONTE: Autor

Na segunda parte da aula 2 introduzi os conceitos sobre grafos eulerianos e semieulerianos e para isso foi contada a história sobre o problema gerado sobre as 7 pontes de Konigsberg (Figura.80).

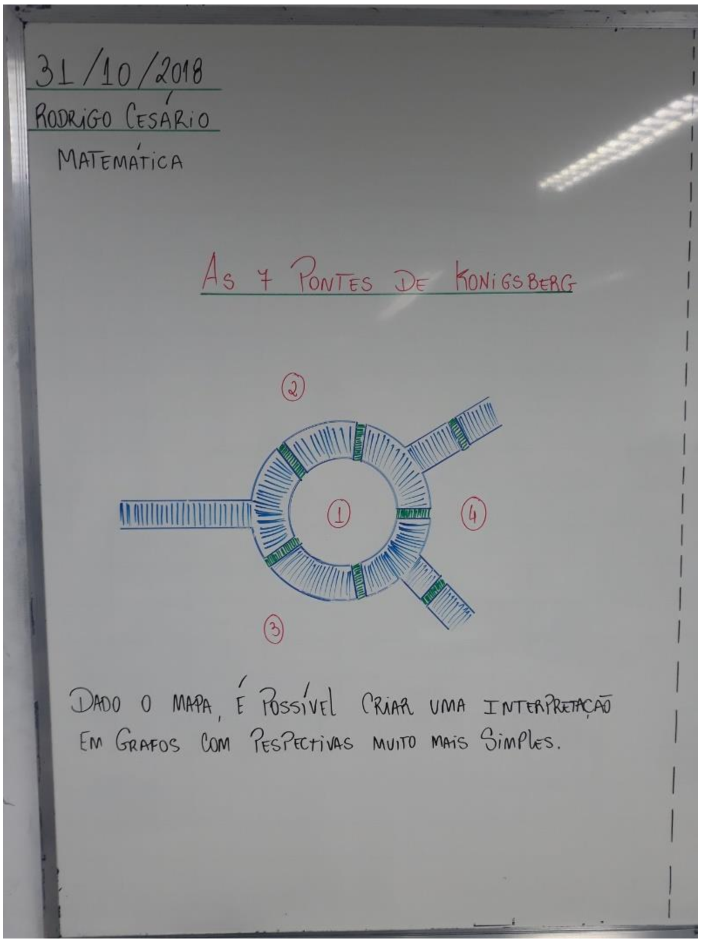


FIGURA 80: Foto da aula sobre as 7 pontes de Konigsberg

FONTE: Autor

Inicialmente falei que um grafo é dito euleriano se conseguimos trilhar um caminho partindo de um vértice, passar por todas as arestas uma única vez e retornar ao vértice inicial (Figura.81) e um grafo é dito semieuleriano se conseguimos trilhar um caminho onde iniciamos em um vértice passando por todas as arestas e terminamos em uma aresta diferente da qual iniciamos (Figura.82). Novamente fiz questão que os alunos participassem dessa construção teórica, então de forma objetiva mostrei que para iniciar e terminar em um mesmo vértice devíamos ter todos os vértices de grau par já que toda vez que visitássemos um vértice teríamos que sair.

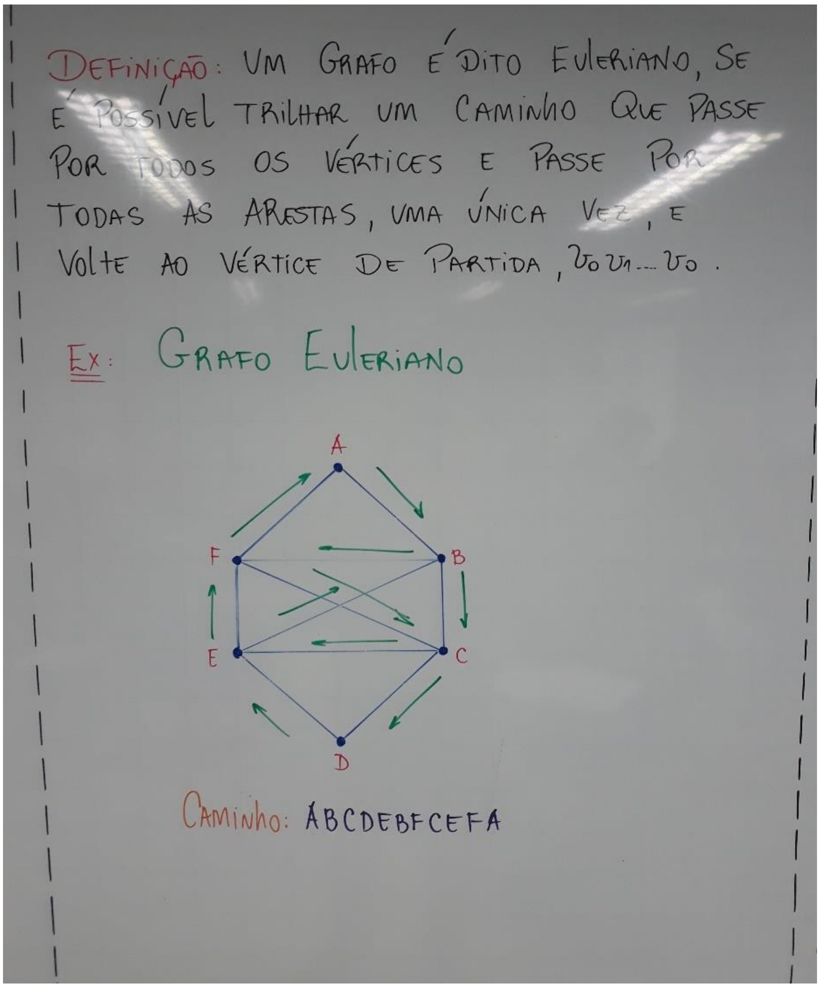


FIGURA 81: Foto da aula sobre grafos eulerianos

FONTE: Autor

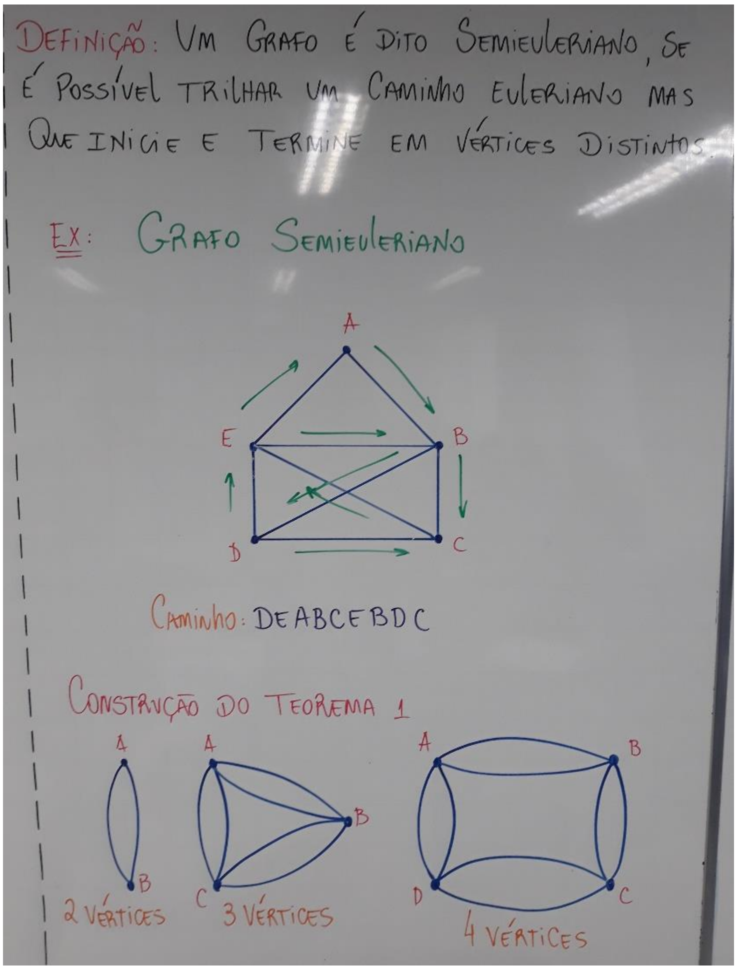


FIGURA 82: Foto da aula sobre grafos semieulerianos

FONTE: Autor

Após essa construção teórica sobre grafos eulerianos e semieulerianos, voltei ao problema sobre as pontes de Konigsberg para mostrar o porque o problema não possuía solução fazendo uso de uma representação em grafos das 7 pontes (Figura.83).

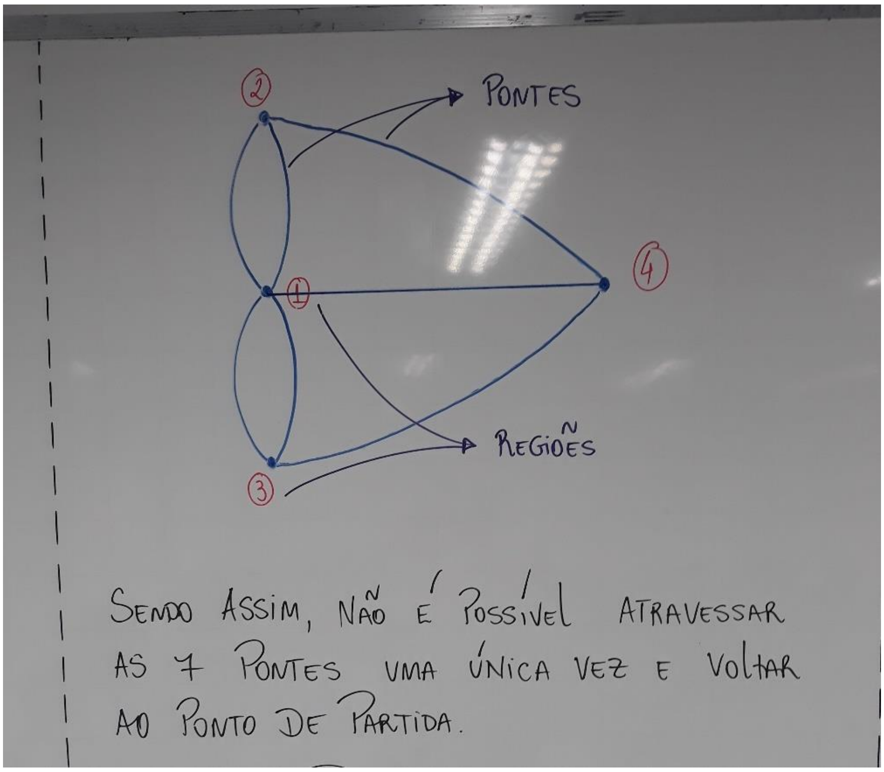


FIGURA 83: Foto da aula sobre as 7 pontes de Konigsberg (Conclusão)

FONTE: Autor

Para tornar a compreensão sobre grafos Eulerianos e semieulerianos mais divertida e lúdica levei um tablet com o aplicativo sobre caminhos Eulerianos e semieulerianos denominado Neocirkuits que é facilmente baixado pelo Play Store (Figura.84), orientei a quem quisesse e pudesse que baixasse o mesmo para desenvolver uma atividade em sala, prontamente os alunos pegaram o celular e baixaram o aplicativo, e logo após começaram as perguntas, “como joga isso mestre”, “ como faz para ganhar”, o que é grafo Hamiltoniano”, respondi a todas e deixei livre para que eles pudessem se concentrar na atividade.

FIGURA 84: Foto do aplicativo usado na aula de grafos eulerianos e semieulerianos

FONTE: Autor

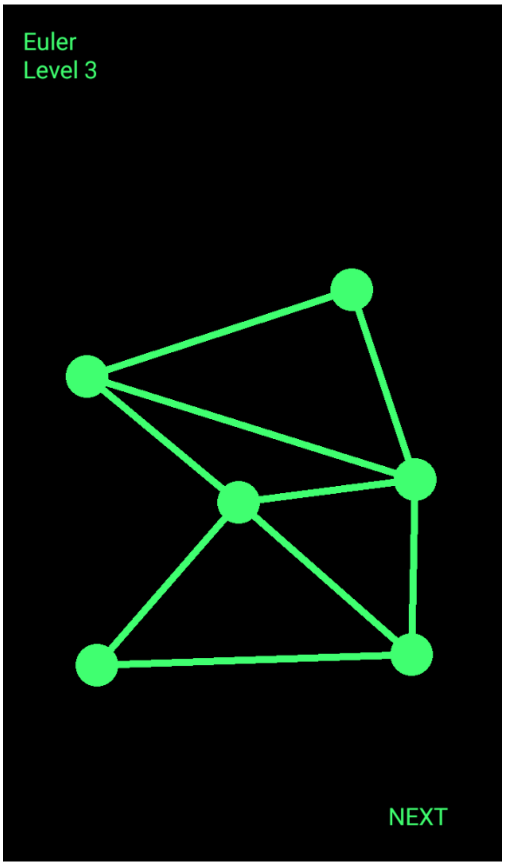


FIGURA 85: Foto do aplicativo usado na aula de grafos eulerianos e semieulerianos

FONTE: Autor

Seguindo para a aula 3, novamente essa foi dividida em duas partes. Na primeira parte da aula três dei início aos conceitos teóricos sobre o estudo de coloração de grafos por incompatibilidade e para isso usei a atividade 1, problema dos cachorros no canil, composta no teste 1 aplicado aos alunos e resolvi com eles fazendo uso de interpretação em grafos e incompatibilidade de vértices. Expliquei a eles que montaríamos um grafo onde cada cachorro seria o vértice desse grafo e toda vez que o problema informasse que tal cachorro não podia ficar junto a outro tal cachorro, faríamos uma linha ligando esses, sendo assim essas ligações seriam as arestas desse grafo e para concluir daríamos uma cor de forma mínima para cada vértice sendo que os que tivessem ligados seriam incompatíveis e por isso não poderiam ter a mesma cor (Figura.86).

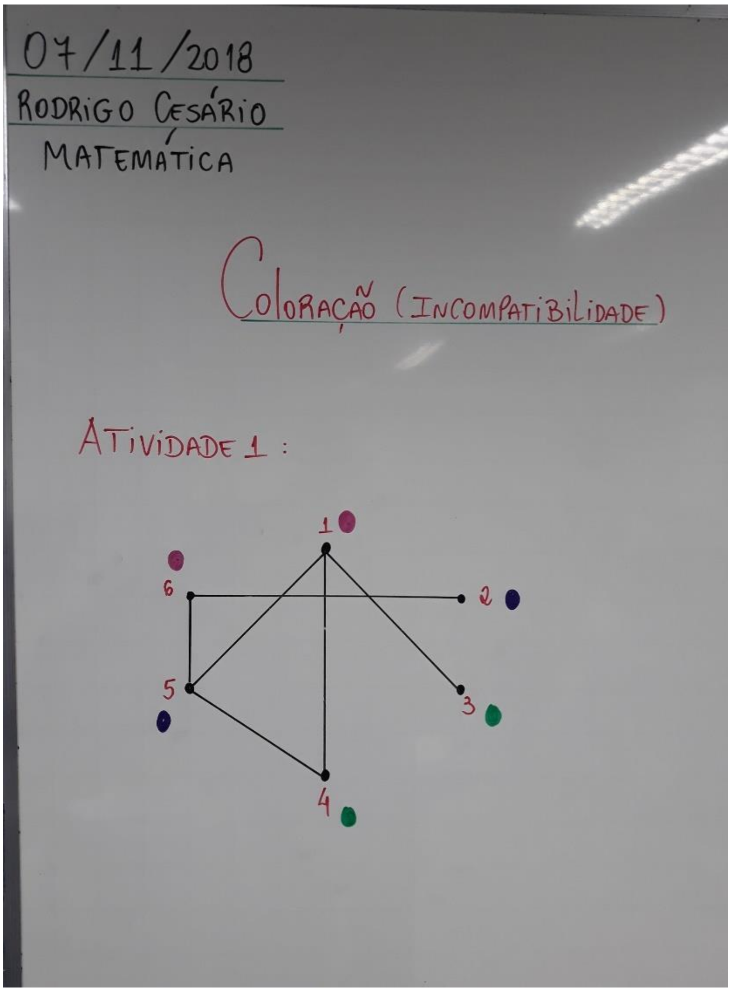


FIGURA 86: Foto da aula sobre coloração

FONTE: Autor

Para que os alunos absorvessem de forma clara o quanto o estudo sobre coloração por incompatibilidade era extremamente útil, foi produzido uma série de atividades em sala como o da Figura.86 que pedia para determinar o número mínimo de cores necessárias para pintar tal Figura onde as regiões adjacentes, ligadas por linhas ou arcos, não poderiam ter a mesma cor. Lembrando que o grupo em pesquisa eram alunos do 9° ano e 3° série de turmas militares, então procurou-se ser o mais objetivo possível nas formulações de atividades para se aproximar do ambiente acadêmico deles.

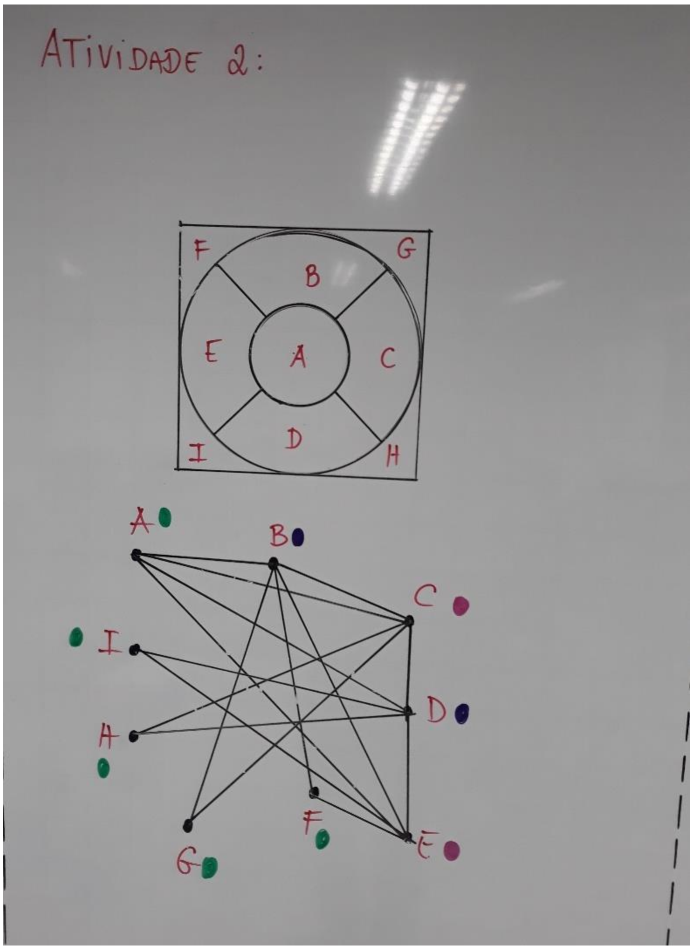


FIGURA 87: Foto da aula sobre coloração

FONTE: Autor

Para encerrar a primeira parte da aula 3 desenvolvi com eles um problema mais complexo porem que sua solução seria por coloração de grafos (Figura.88). A atividade consiste em um problema de sinais de trânsito onde deseja-se criar um sistema de semáforos para a liberação dos carros nesse cruzamento, entretanto não podemos abrir os 5 sinais ao mesmo tempo, sendo assim, precisa-se determinar quantos intervalos de tempo, no mínimo, deveremos inserir para que não haja nenhum acidente.

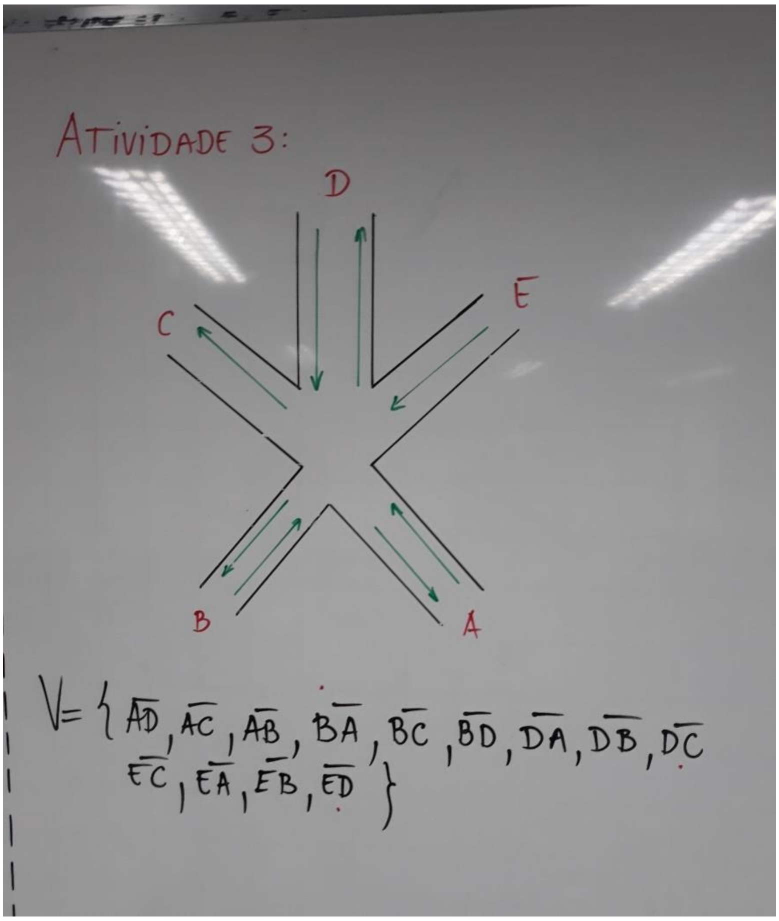


FIGURA 88: Foto da aula sobre a atividade sobre os sinais de trânsito

FONTE: Autor

Inicialmente deixei que os alunos se familiarizassem com o problema, e de forma surpreendente alguns alunos de ambas as turmas chegaram a mesma conclusão, que deveríamos montar um grafo onde os vértices seriam os caminhos que os carros poderiam fazer mediante o sentido representado pela seta verde, ou seja, um carro poderia ir da rua A para rua D como um carro poderia ir da rua A para rua C mas um carro não poderia ir da rua A para a rua C. após essa conclusão chegada exclusivamente pelos alunos dei inicio a montagem do grafo onde as arestas seriam formadas por incompatibilidade, ou seja, caminhos que os carros poderiam fazer(vértices) que se cruzavam com outro caminho eram incompatíveis (Figura.89).

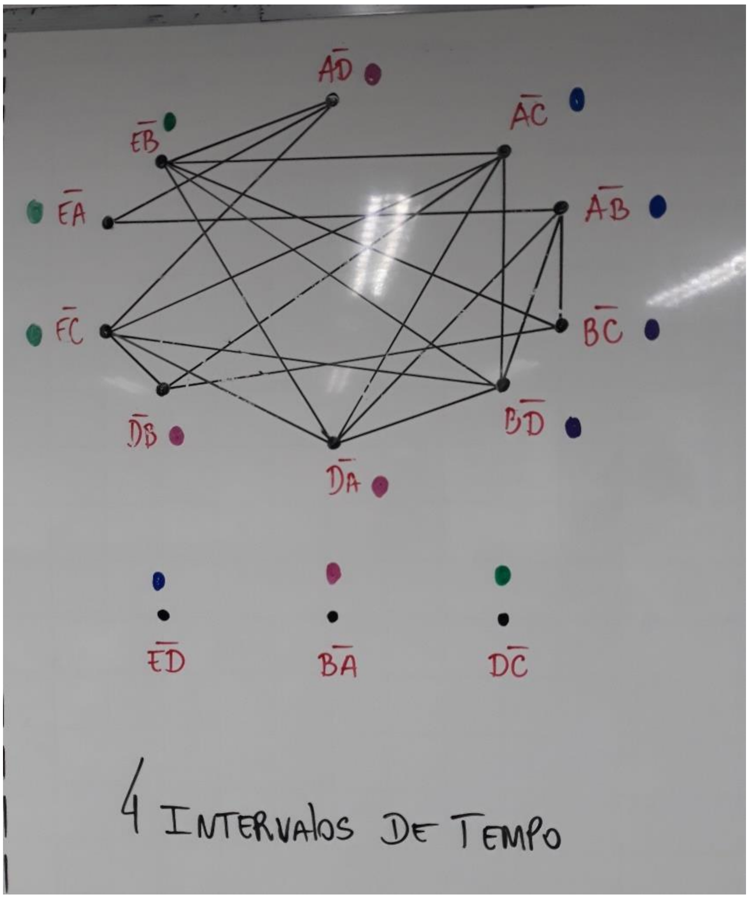


FIGURA 89: Foto do grafo representativo da atividade sobre os sinais de trânsito

FONTE: Autor

Na segunda parte da aula 3 foi falado sobre o problema do menor caminho, Algoritmo de Dijkstra, onde como mostrado na Figura 90 pede-se o menor caminho do vértice C até o vértice F. foi gasto em torno de 60 minutos para resolver e fazer a turma entender do que se trata o algoritmo de Dijkstra, após muita explicação tivemos um resultado muito positivo.

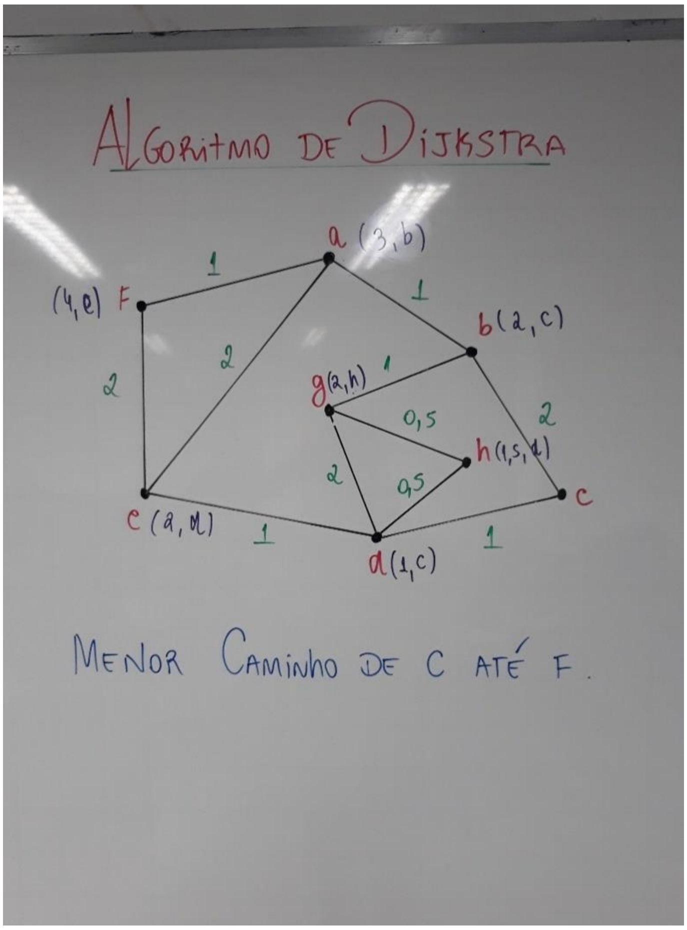


FIGURA 90: Foto da aula sobre Algoritmo de Dijkstra

FONTE: Autor

3.3.4 AULA 4: TESTE 2 E QUESTIONÁRIO FINAL

A aula 4 foi iniciada com a aplicação de um teste nos moldes do teste inicial, também com 4 problemas. Os alunos tiveram 60 minutos para a realização desse teste. O teste 2 segue abaixo.

QUESTÃO 1

Uma indústria química precisa armazenar 10 reagentes que tem em estoque. Por razões de segurança sabe-se que os reagentes do tipo A não podem ficar no mesmo galpão que os reagentes do tipo B, F e G; que os reagentes do tipo E não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo F, H e D; que os reagentes do tipo C não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo B, I e D e que os reagentes do tipo J não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo I. Qual o menor número de galpões de que a indústria precisa para armazenar todos os reagentes?

QUESTÃO 2

O esquema abaixo representa o mapa de uma competição de corrida, onde os pontos representam as bases de reidratação para os velocistas e as ligações entre essas bases representam as ruas que ligam essas bases. O valor dado a cada ligação representa o tempo, em minutos, que se leva para chegar de uma base a outra, onde os competidores têm liberdade para escolher seu percurso.

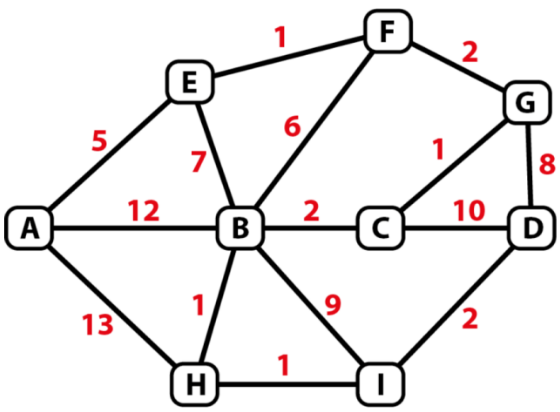


FIGURA 91: Grafo representativo da questão 2 do teste 2

FONTE: Autor

Sabendo que essa corrida dá início na base A e termina na base D, e que o vencedor será o que concluir o percurso no menor tempo, podemos garantir que será vencedor o competidor que fizer qual trajeto?

QUESTÃO 3

O prefeito de "GRAFOLÂNDIA" contratou os serviços de uma empresa de coleta de lixo para recolher todo lixo contido nos 7 bairros de sua cidade, distribuídos como na Figura abaixo:

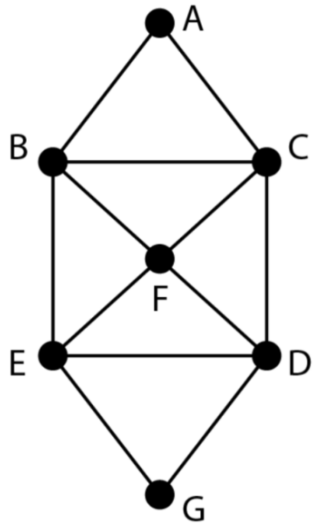


FIGURA 92: grafo representativo da questão 3 do teste 2

FONTE: Autor

Sabe-se que o caminhão do recolhimento sai do bairro A e deve percorrer todas as ruas que ligam os bairros uma única vez e retornar ao lixão que se instala no bairro A. é possível o caminhão cumprir com as regras de recolhimento? Se for possível, defina um caminho.

QUESTÃO 4

Considere a tabela abaixo dos alunos que precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do ensino fundamental:

ALUNO	DISCIPLINA
A	MATEMÁTICA E PORTUGUÊS
B	MATEMÁTICA E FÍSICA
C	FÍSICA, QUÍMICA E HISTÓRIA
D	PORTUGUÊS E GEOGRAFIA
E	MATEMÁTICA E GEOGRAFIA
F	PORTUGUÊS E QUÍMICA
G	GEOGRAFIA E HISTÓRIA
H	QUÍMICA E ARTES

TABELA 9: Tabela representativa da questão 4 do teste 2

FONTE: Autor

A) Monte um grafo para a situação descrita acima, considerando:

- **Os vértices representando as disciplinas;**

OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

B) Encontre o número mínimo de horários.

Após o teste 2, foram cedidos 30 minutos para a aplicação do questionário final onde esse questionário tinha como objetivo principal descobrir se os alunos acharam proveitoso o estudo sobre conceitos e técnicas de grafos. Segue abaixo o questionário final.

1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
2-Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
3 – Entendi como identificar caminhos eulerianos e semieulerianos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
4 – Entendi as várias situações onde pode-se usar o conceito de coloração. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
5 – Achei o algoritmo de Dijkstra muito útil. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
6 – Gostei muito de desenvolver uma solução na atividade dos sinais de trânsito. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
7 –Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
8 – Dentro dos assuntos vistos, o mais intuitivo é o de coloração. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
9 – O aplicativo sobre grafos eulerianos e semieulerianos, Neocirkuits, é ótimo. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
10 – Segui a orientação em aula e pesquisei sobre grafos Hamiltonianos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

TABELA 10: Tabela representativa do questionário final

FONTE: Autor

4 RESULTADOS E ANÁLISES

Na próxima seção iremos descrever as considerações, análise e resultados obtidos no questionário motivacional, nos testes 1 e 2 e no questionário final.

4.1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O QUESTIONÁRIO INICIAL

Primeiramente serão analisadas as informações obtidas no questionário motivacional para a turma do 9° ano.

Turma 9° ano Militar

	Fator 1: Satisfação pela matemática	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas.	***5%***	***10%***	***20%***	***40%***	***25%***
2	Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso(a).	***45%***	***24%***	***11%***	***10%***	***10%***
3	Tenho muita dificuldade para entender matemática.	***29%***	***33%***	***17%***	***12%***	***9%***
4	Matemática é “chata”	***66%***	***7%***	***12%***	***10%***	***5%***
5	Aprender matemática é um prazer	***5%***	***9%***	***27%***	***28%***	***31%***
6	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas	***1%***	***2%***	***3%***	***9%***	***85%***
7	Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas	***4%***	***33%***	***7%***	***12%***	***44%***
8	Consigo bons resultados em matemática	***15%***	***7%***	***47%***	***21%***	***10%***

TABELA 11: Satisfação pela matemática (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 11, que a turma do 9° ano militar possui um gosto considerável pelas aulas de matemática, já que 69% frequentemente ou sempre têm como as aulas de matemática entre suas preferidas. Outro dado pertinente é o fato de excepcionais 96% frequentemente ou sempre testarem os conhecimentos resolvendo problemas, e que 78% sempre, frequentemente ou às vezes consiga bons resultados em atividades envolvendo a matemática.

	Fator 2 – Jogos e desafios	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
9	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.	***17%***	3%	***33%***	3%	***44%***
10	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.	***8%***	***9%***	***23%***	***5%***	***55%***
11	Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas	***66%***	***11%***	***5%***	***4%***	***14%***
12	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemáticaparameus amigos e familiares.	***66%***	***11%***	***9%***	***4%***	***10%***

TABELA 12: Jogos e desafios (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 12, que 80% sempre ou às vezes participa de competições com amigos resolvendo problemas de matemática. De fato, é compreensível, já que o gosto pela matemática é tão evidente.

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Gosto de resolver os exercícios rapidamente	***17%***	***3%***	***33%***	***3%***	***44%***
14	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.	***34%***	***27%***	***7%***	***21%***	***11%***
15	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática.	***8%***	***9%***	***23%***	***5%***	***55%***
16	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.	***0%***	***2%***	***3%***	***17%***	***78%***
17	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.	***1%***	***2%***	***1%***	***9%***	***87%***

TABELA 13: Resolução de problemas (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 13, que 96% frequentemente ou sempre continuam tentando resolver um problema mesmo quando suas tentativas anteriores fracassaram. Esses dados contrastam com os 83% que ficam frustrados quando não consegue solucionar um problema, e assim podemos conjecturar que mesmo diante de um problema que os frustra, os alunos dessa turma, em sua maioria, não se deixam abater e continuam em busca de uma solução.

	Fator 4 – Aplicações no cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
18	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.	***34%***	***27%***	***7%***	***21%***	***11%***
19	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.	***2%***	***23%***	***23%***	***51%***	***1%***
20	Faço desenhos usando formas geométricas	***7%***	***10%***	***23%***	***5%***	***55%***
21	Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola	***34%***	***27%***	***7%***	***21%***	***11%***
22	Faço "continhas de cabeça" para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.	***11%***	***2%***	***3%***	***7%***	***77%***

TABELA 14: Aplicação no cotidiano (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 14, que 61% nunca ou quase nunca, costumam explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos. Da mesma forma, 61% nunca ou quase nunca percebem a presença da matemática nas atividades que desenvolvem fora da escola, dando a entender que o intuito dos alunos nessa turma é a preparação para um concurso militar, que possui como cobrança em suas questões desenvolvimentos muito objetivos.

	Fator 5 – Hábitos nos estudos	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
23	Estudo matemática todos os dias durante a semana.	***9%***	***13%***	***7%***	***12%***	***59%***
24	Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa.	***9%***	***2%***	***3%***	***9%***	***77%***
25	Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.	***7%***	***10%***	***23%***	***5%***	***55%***
26	Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes.	***8%***	***2%***	***3%***	***17%***	***70%***

TABELA 15: Hábitos nos estudos (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 15, que 83%, frequentemente ou sempre estudam as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula, fazendo com que o aprendizado se torne algo leve e simples.

	Fator 6 – Interação na sala de aula	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
27	Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas.	***42%***	***11%***	***20%***	***12%***	***15%***
28	Relaciono-me bem com meu professor de matemática.	***0%***	***0%***	***5%***	***25%***	***70%***

TABELA 16: Interação na sala de aula (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 16, que 53% nunca ou quase nunca fazem perguntas nas aulas de matemática. É um dado curioso, por serem alunos aplicados. Mediante as informações que as tabelas fornecem, a ausência de perguntas em aula pode mostrar que eles sentem-se desconfortáveis de tirar dúvida em meio a uma explicação do professor.

	Fator 7 – Convívio familiar e social	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
29	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos.	***34%***	***27%***	***7%***	***21%***	***11%***
30	Em casa você recebe ajuda quando sente dificuldade nos estudos	***42%***	***21%***	***20%***	***7%***	***10%***
31	Você se junta com seus amigos fora do ambiente escolar com o intuito de estudar	***1%***	***2%***	***3%***	***9%***	***87%***
32	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos	***75%***	***9%***	***1%***	***5%***	***10%***

TABELA 17: Convívio familiar e social (9° ano)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 17, que 96% dos alunos frequentemente ou sempre se juntam aos amigos de escola com o intuito de estudar. 61% dos alunos não conversam com seus pais sobre os estudos.

Nas próximas linhas serão analisadas as informações obtidas no questionário motivacional para a turma da 3° série.

Turma 3° série Militar

	Fator 1: Satisfação pela matemática	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas.	***8%***	***16%***	***52%***	***16%***	***8%***
2	Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso(a).	***11%***	***11%***	***38%***	***22%***	***18%***
3	Tenho muita dificuldade para entender matemática.	***10%***	***25%***	***45%***	***10%***	***10%***
4	Matemática é “chata”	***22%***	***38%***	***11%***	***20%***	***9%***
5	Aprender matemática é um prazer	***0%***	***6%***	***8%***	***31%***	***55%***
6	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas	***5%***	***22%***	***46%***	***20%***	***7%***
7	Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas	***5%***	***20%***	***12%***	***51%***	***12%***
8	Consigo bons resultados em matemática	***15%***	***7%***	***47%***	***21%***	***10%***

TABELA 18: Satisfação pela matemática (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 18, que a turma do 3° ano militar possui um gosto considerável pelas aulas de matemática, já que 76% às vezes, frequentemente ou sempre têm como as aulas de matemática entre suas preferidas. Outro dado é o fato de 73% testarem os conhecimentos resolvendo problemas às vezes, frequentemente ou sempre, e que 78% sempre, frequentemente ou às vezes consigam bons resultados em atividades envolvendo a matemática.

	Fator 2 – Jogos e desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
9	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.	***8%***	***16%***	***52%***	***16%***	***8%***
10	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.	***77%***	***13%***	***3%***	***5%***	***2%***
11	Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas	***66%***	***11%***	***5%***	***4%***	***14%***
12	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares.	***83%***	***15%***	***2%***	***0%***	***0%***

TABELA 19: Jogos e desafios (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 19, que 76% sempre, frequentemente ou às vezes participam de competições com amigos resolvendo problemas de matemática.

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
13	Gosto de resolver os exercícios rapidamente	***17%***	***3%***	***33%***	***3%***	***44%***
14	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.	***44%***	***17%***	***23%***	***8%***	***8%***
15	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática.	***4%***	***4%***	***6%***	***21%***	***65%***
16	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.	***0%***	***2%***	***3%***	***17%***	***78%***
17	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.	***1%***	***2%***	***6%***	***9%***	***82%***

TABELA 20: Resolução de problemas (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisado a tabela 20, que 95% frequentemente ou sempre continuam tentando resolver um problema mesmo quando suas tentativas anteriores fracassaram. 86% frequentemente ou sempre ficam frustrados quando não conseguem solucionar um problema.

	Fator 4 – Aplicações no cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
18	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.	***66%***	***13%***	***19%***	***2%***	***0%***
19	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.	***2%***	***23%***	***23%***	***51%***	***1%***
20	Faço desenhos usando formas geométricas	***3%***	***7%***	***47%***	***12%***	***31%***
21	Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola	***47%***	***33%***	***7%***	***3%***	***10%***
22	Faço "continhas de cabeça" para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.	***11%***	***2%***	***3%***	***7%***	***77%***

TABELA 21: Aplicação no cotidiano (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 21, que 79% nunca ou quase nunca costumam explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos, e 80% nunca ou quase nunca percebem a presença da matemática nas atividades que desenvolvem fora da escola novamente levando-nos a relacionar com o fato de o objetivo ser o concurso militar, que possui como cobrança em suas questões desenvolvimentos muito objetivos.

	Fator 5 – Hábitos nos estudos	Quantidade de respostas				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
23	Estudo matemática todos os dias durante a semana.	***4%***	***2%***	***46%***	***13%***	***35%***
24	Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa.	***9%***	***2%***	***3%***	***9%***	***77%***
25	Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.	***7%***	***10%***	***23%***	***5%***	***55%***
26	Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes.	***0%***	***12%***	***57%***	***23%***	***8%***

TABELA 22: Hábitos nos estudos (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 22, que 83% às vezes, frequentemente ou sempre estudam as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.

	Fator 6 – Interação na sala de aula	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
27	Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas.	***13%***	***7%***	***69%***	***5%***	***6%***
28	Relaciono-me bem com meu professor de matemática.	***0%***	***0%***	***5%***	***25%***	***70%***

TABELA 23: Interação na sala de aula (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 23, que 69% às vezes fazem perguntas nas aulas de matemática.

	Fator 7 – Convívio familiar e social	**Quantidade de respostas**				
	Itens:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
29	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos.	***34%***	***25%***	***9%***	***21%***	***11%***
30	Em casa você recebe ajuda quando sente dificuldade nos estudos	***42%***	***21%***	***20%***	***7%***	***10%***
31	Você se junta com seus amigos fora do ambiente escolar com o intuito de estudar	***2%***	***2%***	***3%***	***8%***	***85%***
32	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos	***70%***	***9%***	***1%***	***5%***	***15%***

TABELA 24: Convívio familiar e social (3° série)

FONTE: Autor

Nota-se, analisando a tabela 24, que 94% dos alunos frequentemente ou sempre se juntam aos amigos de escola com o intuito de estudar. 59% dos alunos não conversam com seus pais sobre os estudos.

4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE 1

No dia 24 de outubro, mesmo dia de aplicação do questionário inicial, foi aplicado o teste 1 à turma da 3° série do ensino médio na parte da manhã; na parte da tarde, à turma do 9° ano do ensino fundamental. Em ambas as turmas, o teste 1 teve duração de 60 minutos, e o mesmo foi desenvolvido individualmente e sem consulta a material algum.

O critério de avaliação usado na correção dos testes foi o do conceito A - excelente; B - bom; C - regular; D – insuficiente; E – muito ruim. Sabendo que o teste continha um total de quatro questões, foi atribuído a cada uma o valor de 2,5 pontos; o aluno que tirasse de 9 a 10 ficaria com o conceito A, de 7 a 8,9 com conceito B, de 5 a 6,9 com conceito, de 2 a 4,9 com conceito D e de zero a 1,9 com conceito E.

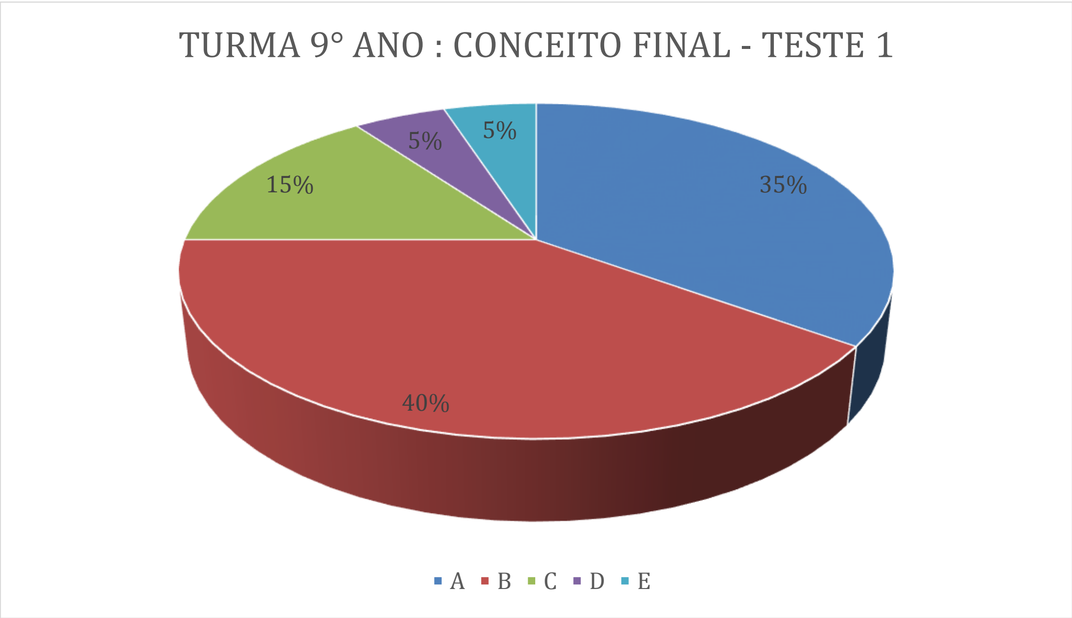


FIGURA 93: Gráfico do conceito final 9° ano

FONTE: Autor

Fazendo uma breve análise sobre os resultados, percebe-se que de fato a turma do 9° ano do ensino fundamental tem uma desenvoltura muito interessante para a prática matemática, pois 75% dessa turma tirou conceito A ou B. É válido mencionar que em nenhuma resolução do teste 1 da turma do 9° ano foi usado qualquer conceito de grafos.

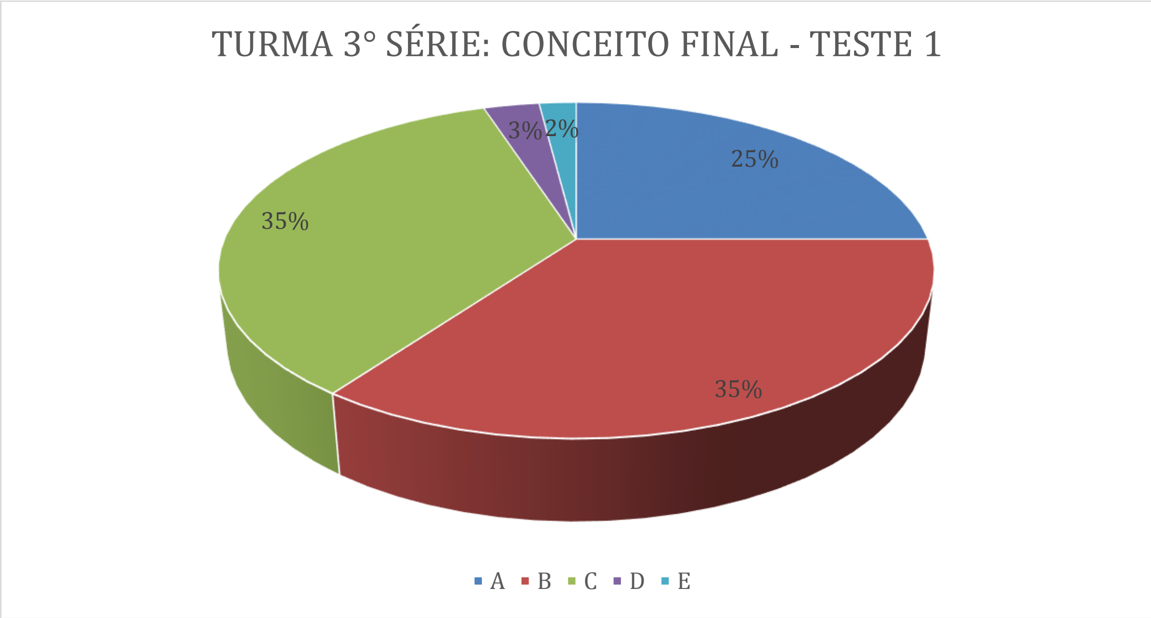


FIGURA 94: Gráfico do conceito final 3° série

FONTE: Autor

A 3° série do ensino médio teve um resultado bastante interessante, pois 60% dessa turma tirou conceito A ou B. Percebe-se ainda que o percentual de alunos que ficou com D ou E é bem baixo caracterizando essa turma como uma que erra pouco. Em nenhuma resolução do teste 1 da turma do 9° ano foi usado qualquer conceito de grafos.

Abaixo encontram-se os gráficos (em barras) representativos dos acertos das quatro questões na turma do 9° ano e na turma da 3° série.

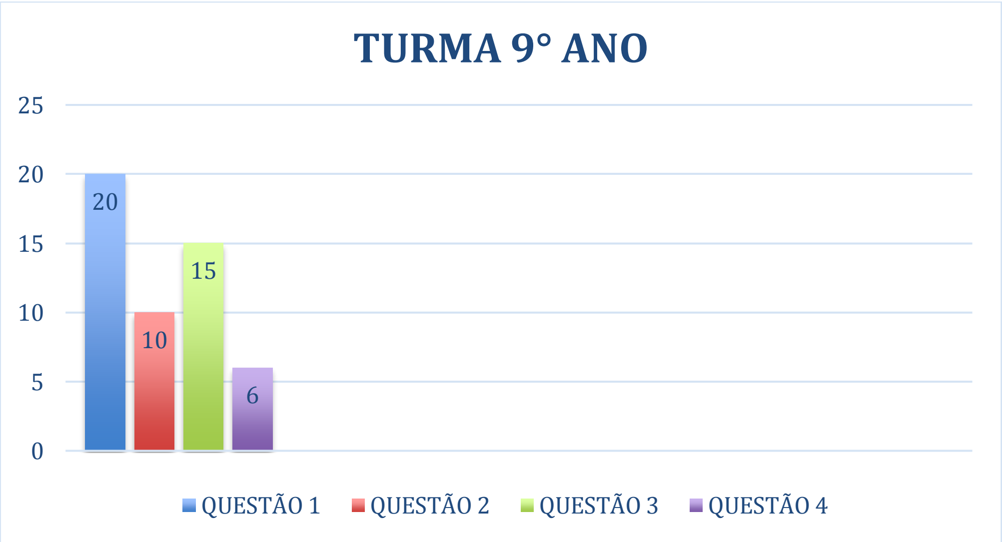


FIGURA 95: Gráfico do número de acertos do teste 1 (9° ano)

FONTE: Autor

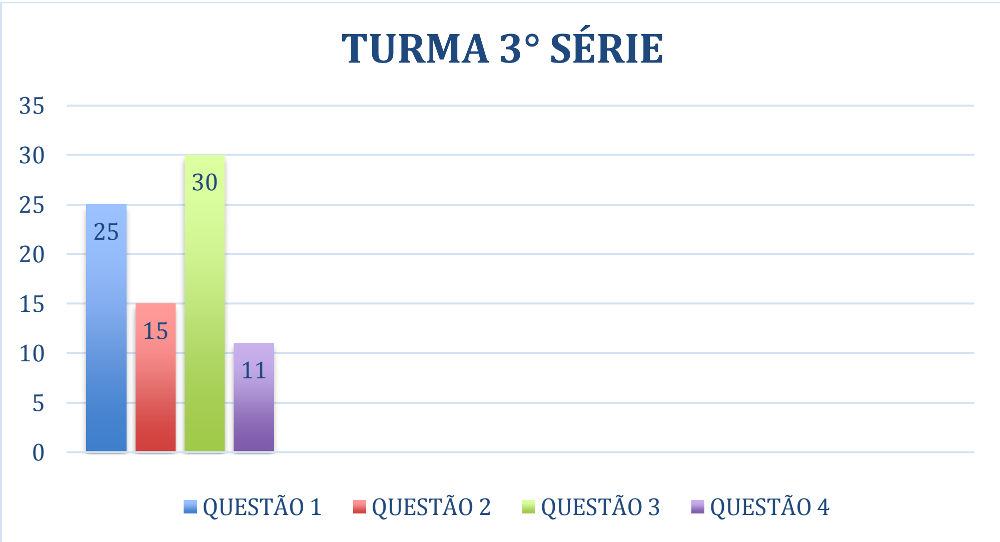


FIGURA 96: Gráfico do número de acertos do teste 1 (3° série)

FONTE: Autor

As questões 1 e 3 foram as mais acertadas dentre as duas turmas, e a que menos foi acertada foi a questão 4.

Abaixo se encontram algumas soluções que merecem um destaque.

ATIVIDADE 01: Um canil possui 6 cachorros cuidados por um veterinário. Por motivo de controle de doença, sabe-se que o cachorro 1 não pode ficar com os cachorros 3, 4 e 5, que o cachorro 2 não pode ficar com o cachorro 6 e que o cachorro 5 não pode ficar nem com o cachorro 6, nem com o cachorro 4. Seja N o menor número de casinhas que são necessárias para comportar esses cachorros visando respeitar o controle de doença. Determine N:

RESOLUÇÃO:

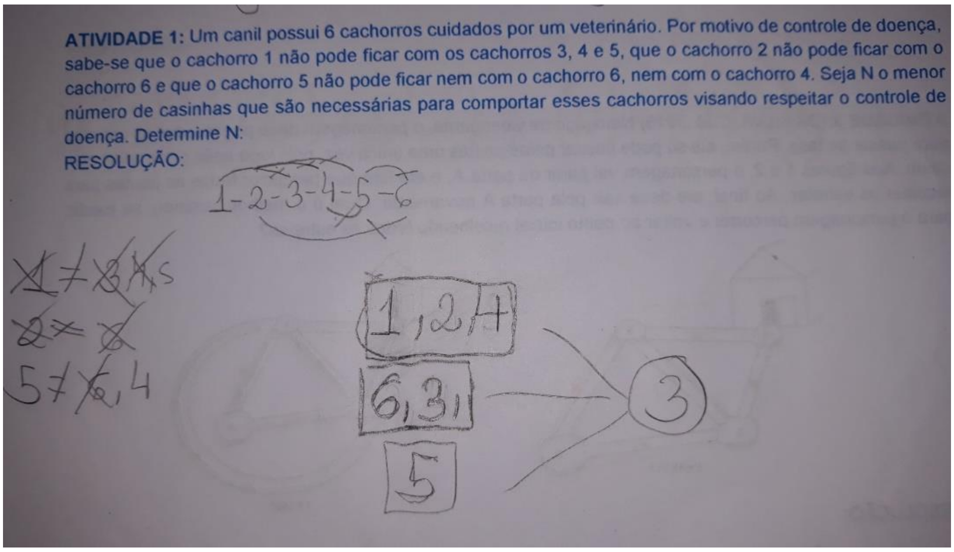


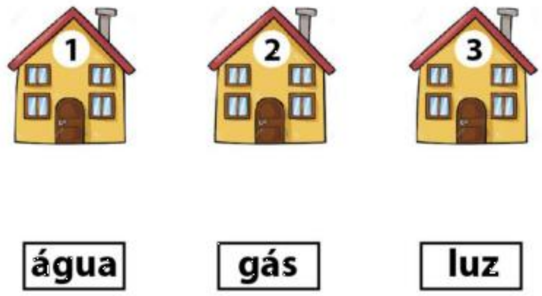
FIGURA 97: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

O aluno montou três grupos. Em cada grupo, o primeiro elemento equivale à restrição dada na atividade. Sendo assim, no grupo 1, o primeiro é o cachorro 1; no grupo 2, o primeiro é o cachorro 6; e no grupo 3 o primeiro é o cachorro 5. Após essa análise, ele distribuiu o restante dos cachorros respeitando as condições de isolamento.

ATIVIDADE 2: Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema? (A Figura abaixo refere-se a esta atividade).



RESOLUÇÃO:

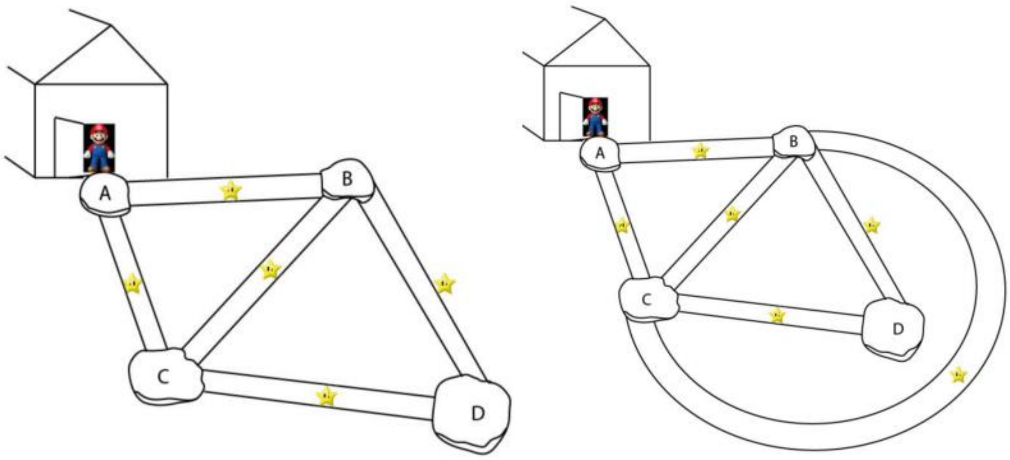
FIGURA 98: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

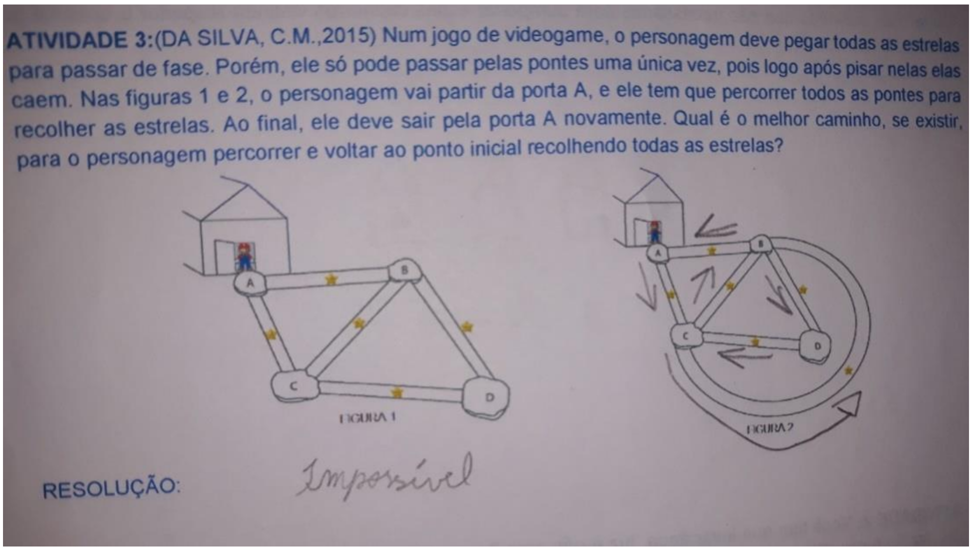
COMENTÁRIO:

A partir da resposta do aluno, percebe-se que ele provavelmente tentou todas as possibilidades até perceber que não havia solução. Além disso, reparou que sempre vai faltar ou água ou gás ou luz para alguma casa.

ATIVIDADE3: (DA SILVA, C.M.,2015) Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nelas elas caem. Nas figuras 1 e 2, o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Ao final, ele deve sair pela porta A novamente. Qual é o melhor caminho, se existir, para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?



RESOLUÇÃO:



ATIVIDADE 3:(DA SILVA, C.M.,2015) Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nelas elas caem. Nas figuras 1 e 2, o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Ao final, ele deve sair pela porta A novamente. Qual é o melhor caminho, se existir, para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

FIGURA 1

FIGURA 2

RESOLUÇÃO: Impossível

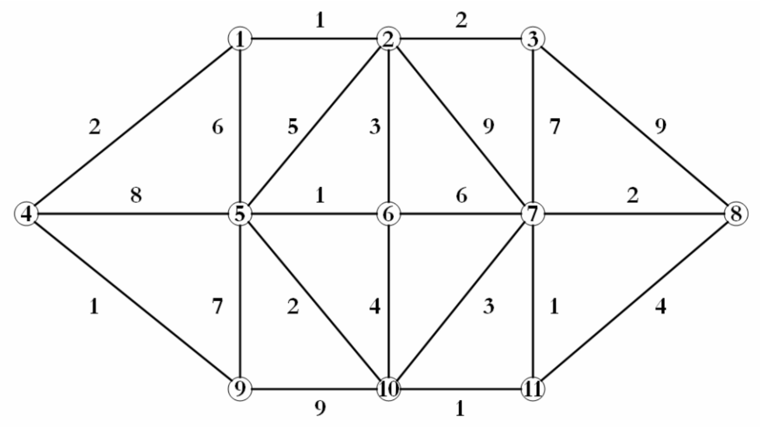
FIGURA 99: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

Pela resposta do aluno, na figura 1 ele escreveu “impossível”, onde faz parecer que deve ter tentado várias formas de sair do vértice A e voltar ao vértice A passando por todas as arestas uma única vez. Já na figura 2 ele conseguiu e expôs uma solução.

ATIVIDADE4: No esquema abaixo, cada ponto representa uma região e cada ligação uma estrada. Os números representam as distâncias. Qual é o menor caminho para uma pessoa ir do ponto “4” até o ponto “8”?



RESOLUÇÃO:

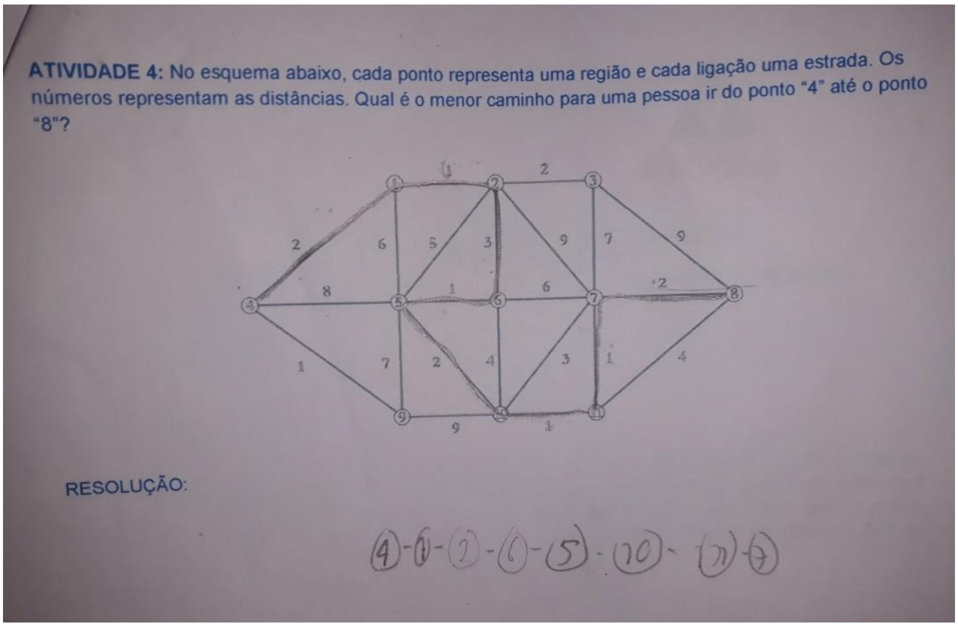


FIGURA 100: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

Pela resposta do aluno, percebe-se que o mesmo chegou à solução correta. Entretanto não é fácil ver como o fez.

4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS AULAS 2 E 3

A aula 2 ocorreu como o planejado. Ela iniciou com a ideia da construção de algumas ferramentas sobre grafos. Nesse momento os alunos ficaram atentos, e havia um grande alvoroço sobre o que as ferramentas dos grafos proporcionariam. O primeiro ponto importante foi sobre planaridade. Falamos sobre os grafos bipartidos, e ressaltamos a atividade da distribuição de água, gás e luz para as três casas definida no teste 1. Para comprovarmos a veracidade dos fatos, foi proposto que os alunos baixassem o aplicativo de geometria dinâmica Geogebra, para que pudéssemos, a partir de modificações no grafo bipartido $K_{3,3}$, nos convencer de que não existe solução. Os alunos se convenceram após modificarem bastante o grafo no plano do Geogebra. O resultado, no entanto, não é válido para certos tipos de superfícies, como o toro. A partir dessa atividade, montamos uma outra atividade com o toro onde alguns alunos conseguiram achar uma solução para o problema.

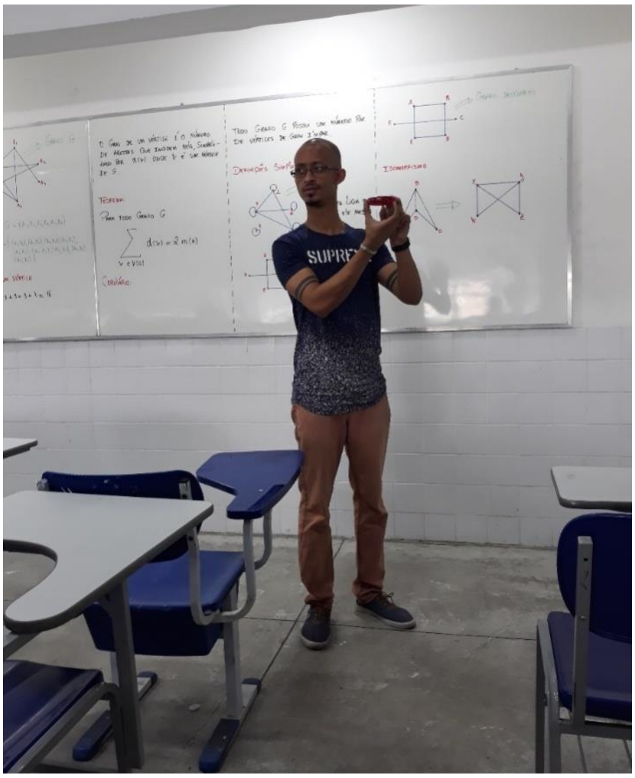


FIGURA 101: Foto do professor mostrando uma solução na atividade do "TORO"

FONTE: Autor

A partir daí, demos continuidade à formalização dos conceitos de teoria dos grafos dando prioridade à construção gerada pelos próprios alunos, aproveitando seu olhar crítico.

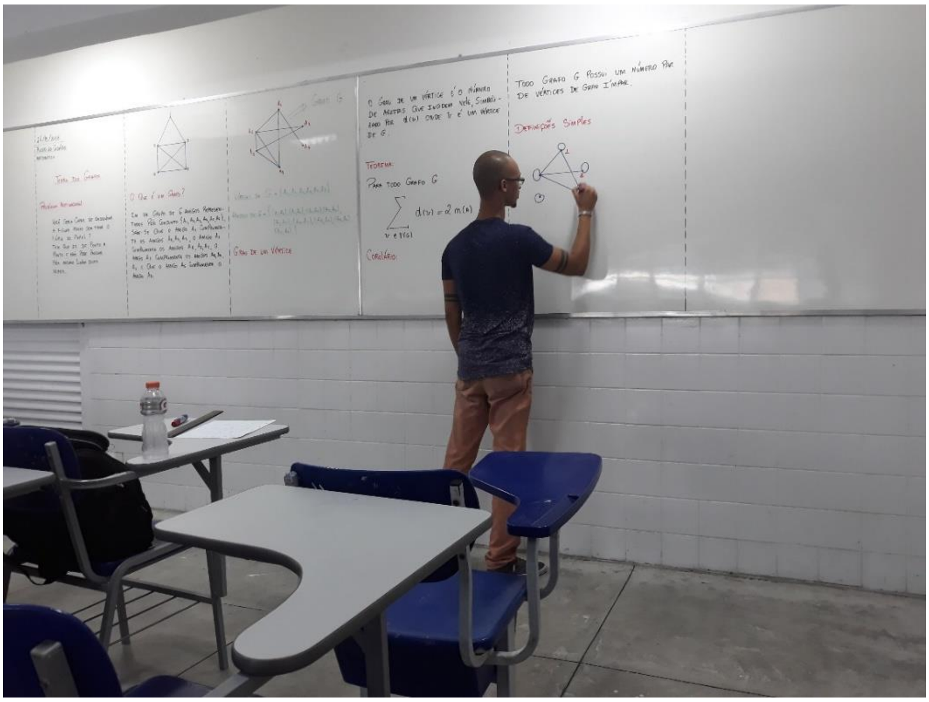


FIGURA 102: Foto do professor em aula

FONTE: Autor

Ainda na aula 2, ao fim da atividade com o “Toro” iniciamos a aula sobre caminhos eulerianos e semieulerianos. Para isso, foi resolvido o problema 2 do teste 1, mostrando a eles que para um grafo possuir um caminho euleriano, todos os vértices deveriam ter grau par. Isso fez a aula render, pois mesmo aceitando rapidamente que isso era correto, queriam a comprovação através de aplicações em grafos. Então, surgiu a perfeita oportunidade de utilizar o aplicativo Neocirkuits, que foi o carro chefe para a aula.

A aula 3 foi desenvolvida com dois objetivos. O primeiro era compreender e resolver problemas envolvendo incompatibilidade através do princípio de coloração. O segundo era resolver o problema do menor caminho com o algoritmo de Dijkstra. Os alunos mostraram muita empolgação a respeito dos temas abordados. Foram feitos muitos problemas sobre incompatibilidade, e o que gerou mais inquietação foi sobre os sinais de trânsito. Sobre o algoritmo de Dijkstra, tivemos muitos contratempos sobre a abordagem do algoritmo. Perdeu-se muito tempo fazendo os alunos compreenderem de fato o que o algoritmo aborda. Ao fim obtivemos êxito, com o desenvolvimento do problema 4 do teste 1.

4.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE 2

No dia 14 de novembro, mesmo dia de aplicação do questionário final, foi aplicado o teste 2 à turma da 3° série do ensino médio, na parte da manhã. Na parte da tarde, à turma do 9° ano do ensino fundamental. Em ambas as turmas o segundo teste aplicado teve duração de 60 minutos. Ele foi desenvolvido individualmente e sem consulta a material algum.

O critério de avaliação usado na correção dos testes foi o do conceito A - excelente; B - bom; C - regular; D – insuficiente; E – muito ruim. Sabendo que o teste continha um total de quatro questões, foi atribuído a cada uma o valor de 2,5 pontos, onde o aluno que tirasse de 9 a 10 ficaria com o conceito A, de 7 a 8,9 com conceito B, de 5 a 6,9 com conceito, de 2 a 4,9 com conceito D e de zero a 1,9 com conceito E.

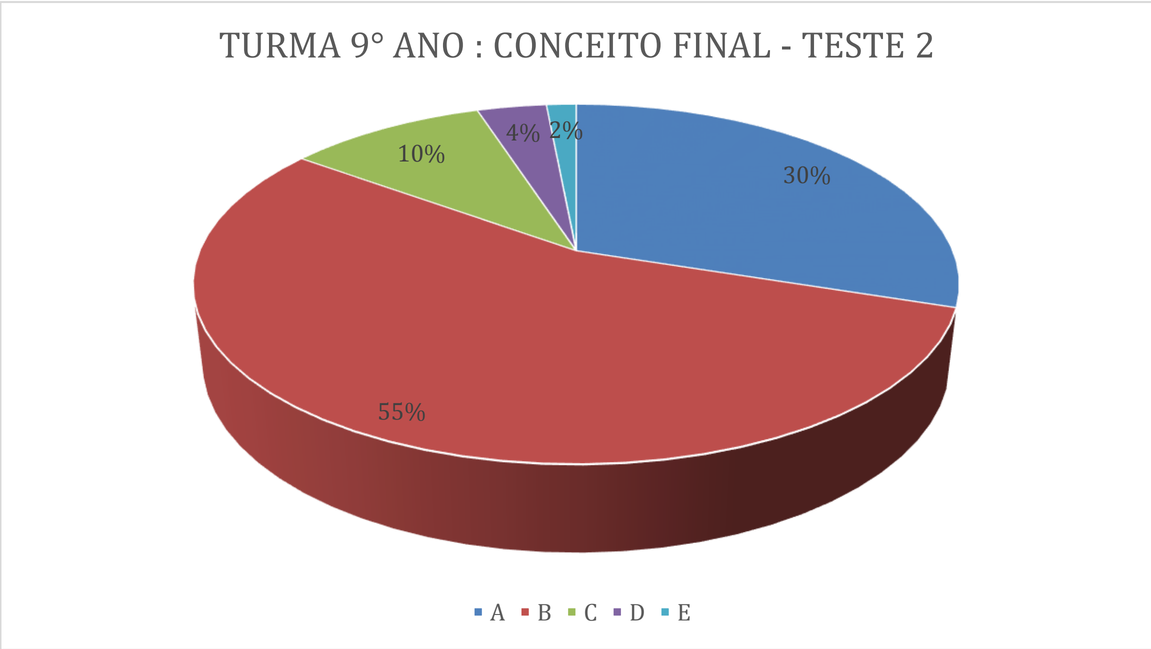


FIGURA 103: Gráfico do conceito final (9° ano)

FONTE: Autor

Fazendo uma breve análise sobre os resultados, conjectura-se que a turma do 9° ano do ensino fundamental obteve alguma evolução mediante o aprendizado da teoria de grafos, pois 85% dessa turma tirou conceito A ou B. Em praticamente todas as questões do teste 2 da turma do 9° ano foi usado algum conceito envolvendo grafos, mesmo não havendo interferência externa para tal uso.

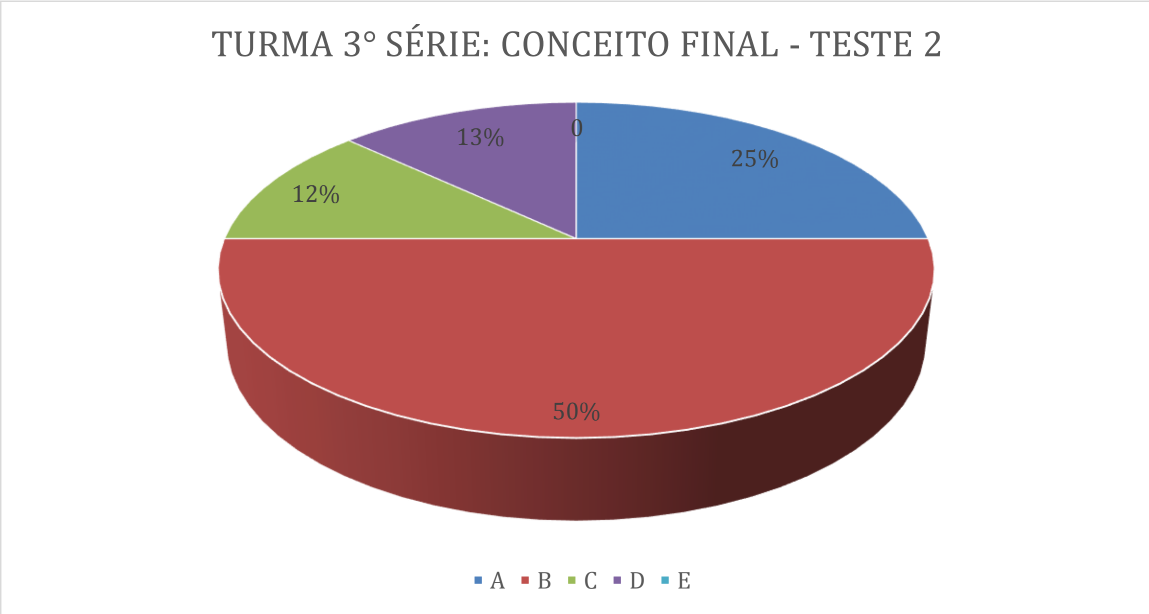


FIGURA 104: Gráfico do conceito final (3° série)

FONTE: Autor

Também podemos conjecturar que turma da 3° série do ensino médio obteve alguma evolução mediante o aprendizado da teoria de grafos, pois 75% dessa turma tirou conceito A ou B, e não houve nenhum aluno que obteve conceito E. Em praticamente todas as questões do teste 2 da turma da 3° série foi usado algum conceito envolvendo grafos, mesmo não havendo interferência externa para tal uso.

Abaixo encontram-se os gráficos (em barras) representativos dos acertos das quatro questões na turma do 9° ano e na turma da 3° série.

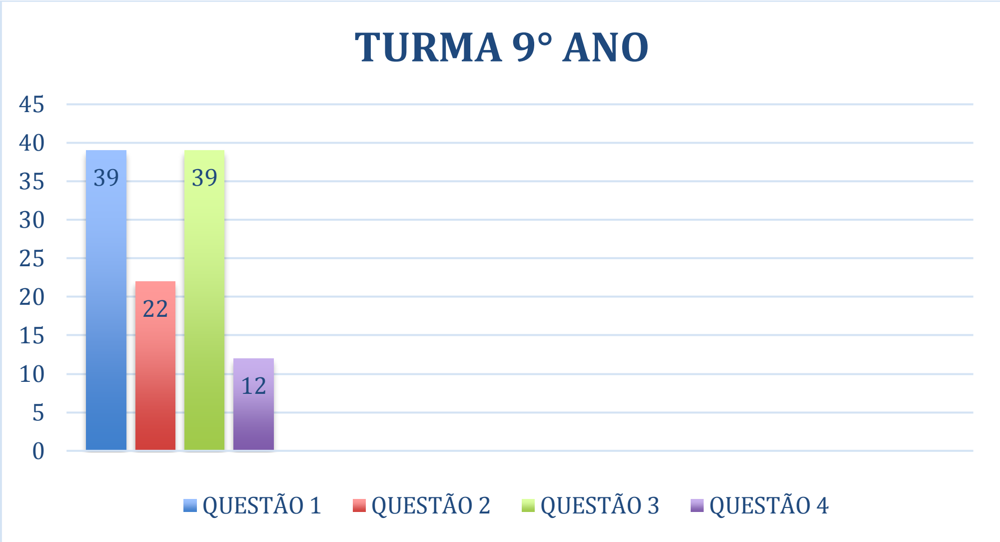


FIGURA 105: Gráfico do número de acertos teste 2 (9° ano)

FONTE: Autor

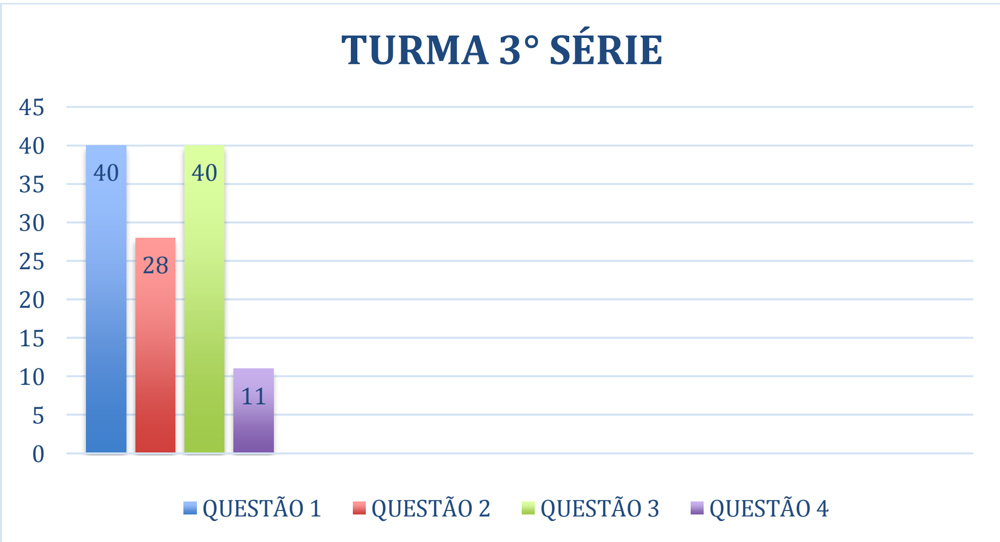


FIGURA 106: Gráfico do número de acertos teste 2 (3° série)

FONTE: Autor

As questões 1 e 3 foram as mais acertadas dentre as duas turmas, e a que menos foi acertada foi a questão 4.

Abaixo se encontram algumas soluções que merecem um destaque.

ATIVIDADE 01: Uma indústria química precisa armazenar 10 reagentes que tem em estoque. Por razões de segurança sabe-se que os reagentes do tipo A não podem ficar no mesmo galpão que os reagentes do tipo B, F e G; que os reagentes do tipo E não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo F, H e D; que os reagentes do tipo C não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo B, I e D e que os reagentes do tipo J não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo I. Qual o menor número de galpões de que a indústria precisa para armazenar todos os reagentes?

RESOLUÇÃO:

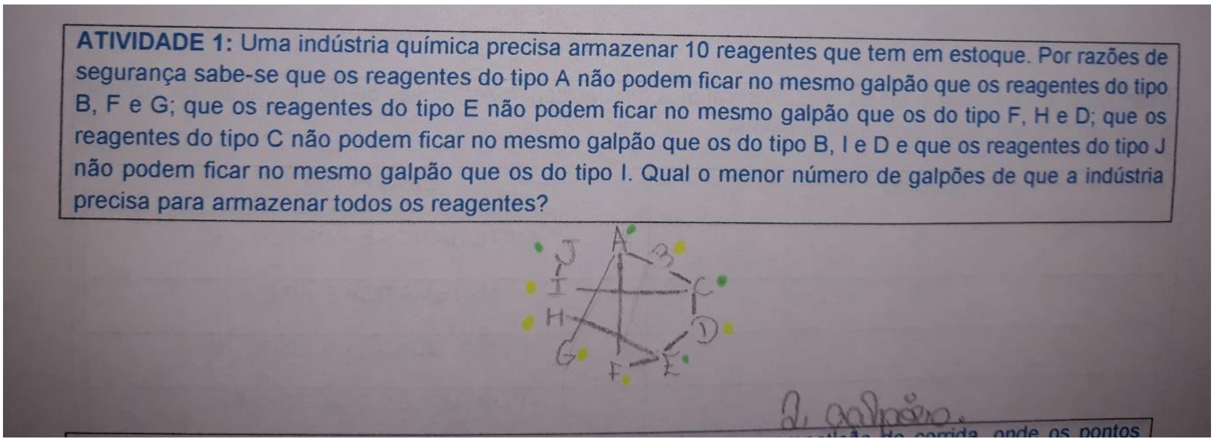

ATIVIDADE 1: Uma indústria química precisa armazenar 10 reagentes que tem em estoque. Por razões de segurança sabe-se que os reagentes do tipo A não podem ficar no mesmo galpão que os reagentes do tipo B, F e G; que os reagentes do tipo E não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo F, H e D; que os reagentes do tipo C não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo B, I e D e que os reagentes do tipo J não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo I. Qual o menor número de galpões de que a indústria precisa para armazenar todos os reagentes?

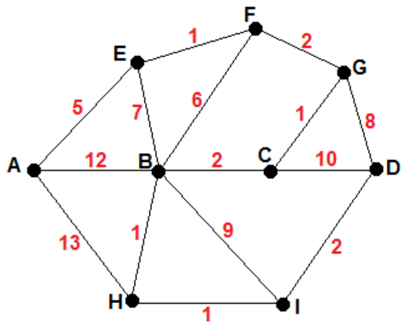
FIGURA 107: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

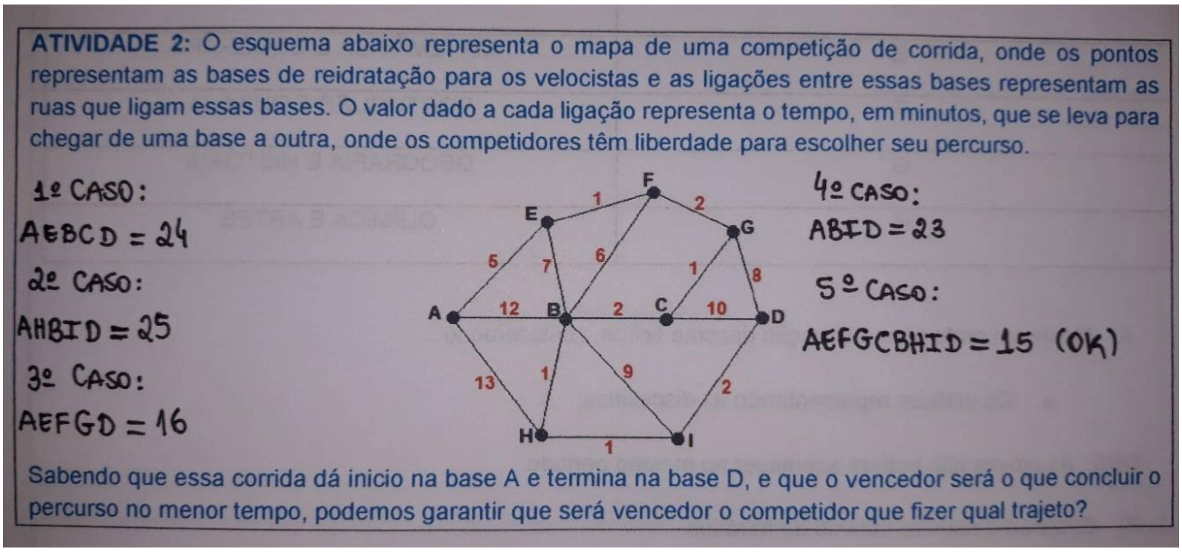
O aluno fez uso do conhecimento de incompatibilidade de vértices por coloração, chegando a uma solução correta. Percebe-se que o discente montou um grafo onde os vértices eram os reagentes e suas ligações caracterizavam suas incompatibilidades.

ATIVIDADE 02: O esquema abaixo representa o mapa de uma competição de corrida, onde os pontos representam as bases de reidratação para os velocistas e as ligações entre essas bases representam as ruas que ligam essas bases. O valor dado a cada ligação representa o tempo, em minutos, que se leva para chegar de uma base a outra, onde os competidores têm liberdade para escolher seu percurso.



Sabendo que essa corrida dá início na base A e termina na base D, e que o vencedor será o que concluir o percurso no menor tempo, podemos garantir que será vencedor o competidor que fizer qual trajeto?

RESOLUÇÃO:



ATIVIDADE 2: O esquema abaixo representa o mapa de uma competição de corrida, onde os pontos representam as bases de reidratação para os velocistas e as ligações entre essas bases representam as ruas que ligam essas bases. O valor dado a cada ligação representa o tempo, em minutos, que se leva para chegar de uma base a outra, onde os competidores têm liberdade para escolher seu percurso.

1º CASO:
AEBCD = 24
2º CASO:
AHBID = 25
3º CASO:
AEFGD = 16
4º CASO:
ABID = 23
5º CASO:
AEFGCBHID = 15 (OK)

Sabendo que essa corrida dá inicio na base A e termina na base D, e que o vencedor será o que concluir o percurso no menor tempo, podemos garantir que será vencedor o competidor que fizer qual trajeto?

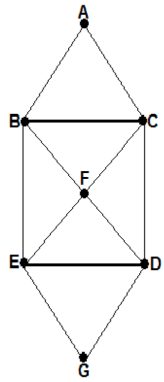
FIGURA 108: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

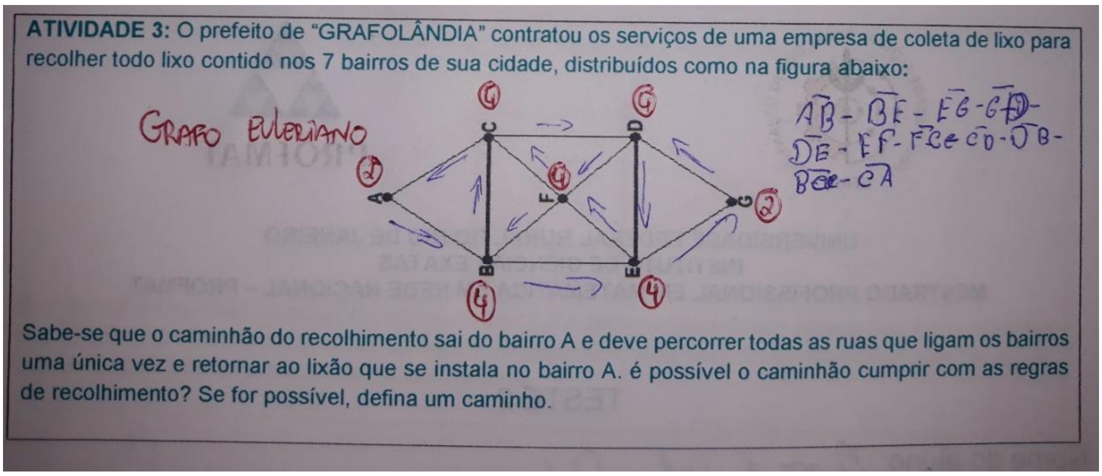
Percebe-se que o aluno abriu em vários casos para analisar o menor caminho entre eles, de certa forma, mesmo indiretamente, o aluno fez uso do algoritmo de Dijkstra.

ATIVIDADE 03: O prefeito de “GRAFOLÂNDIA” contratou os serviços de uma empresa de coleta de lixo para recolher todo lixo contido nos 7 bairros de sua cidade, distribuídos como na figura abaixo**:**



Sabe-se que o caminhão do recolhimento sai do bairro A e deve percorrer todas as ruas que ligam os bairros uma única vez e retornar ao lixão que se instala no bairro A. é possível o caminhão cumprir com as regras de recolhimento? Se for possível, defina um caminho.

RESOLUÇÃO:


ATIVIDADE 3: O prefeito de “GRAFOLÂNDIA” contratou os serviços de uma empresa de coleta de lixo para recolher todo lixo contido nos 7 bairros de sua cidade, distribuídos como na figura abaixo:

Sabe-se que o caminhão do recolhimento sai do bairro A e deve percorrer todas as ruas que ligam os bairros uma única vez e retornar ao lixão que se instala no bairro A. é possível o caminhão cumprir com as regras de recolhimento? Se for possível, defina um caminho.

FIGURA 109: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

O aluno distribuiu os graus de cada vértice, viu que o grafo era Euleriano, e então concluiu que existia uma solução para a proposta da atividade. Além disso, traçou um caminho possível.

ATIVIDADE 04: Considere a tabela abaixo dos alunos que precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do ensino fundamental:

ALUNO	DISCIPLINA
A	MATEMÁTICA E PORTUGUÊS
B	MATEMÁTICA E FÍSICA
C	FÍSICA, QUÍMICA E HISTÓRIA
D	PORTUGUÊS E GEOGRAFIA
E	MATEMÁTICA E GEOGRAFIA
F	PORTUGUÊS E QUÍMICA
G	GEOGRAFIA E HISTÓRIA
H	QUÍMICA E ARTES

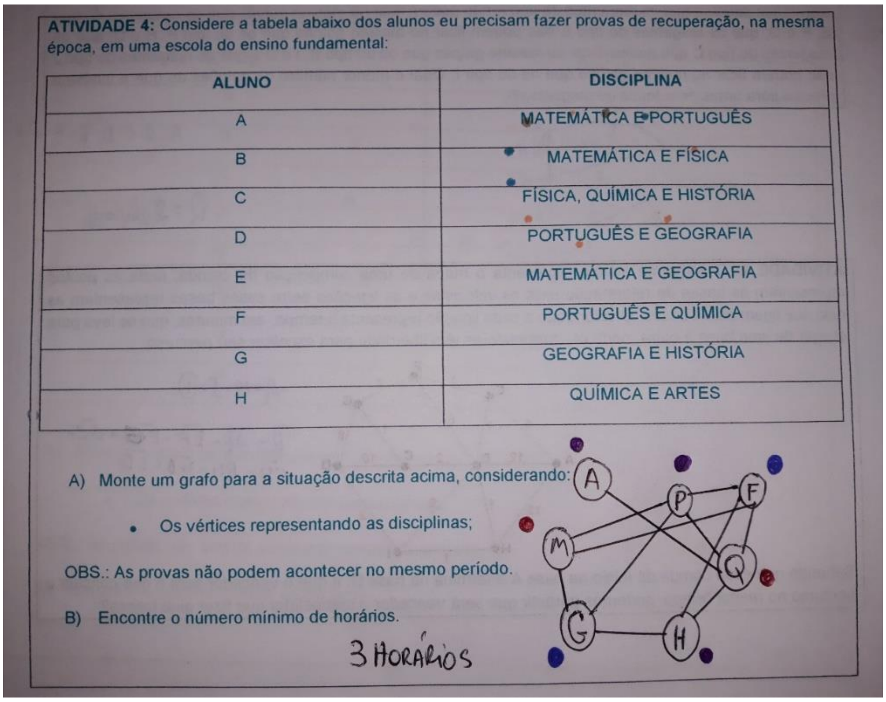
A) Monte um grafo para a situação descrita acima, considerando:

- Os vértices representando as disciplinas;

OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

B) Encontre o número mínimo de horários.

RESOLUÇÃO:


ATIVIDADE 4: Considere a tabela abaixo dos alunos eu precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do ensino fundamental:

ALUNO	DISCIPLINA
A	MATEMÁTICA E PORTUGUÊS
B	MATEMÁTICA E FÍSICA
C	FÍSICA, QUÍMICA E HISTÓRIA
D	PORTUGUÊS E GEOGRAFIA
E	MATEMÁTICA E GEOGRAFIA
F	PORTUGUÊS E QUÍMICA
G	GEOGRAFIA E HISTÓRIA
H	QUÍMICA E ARTES

A) Monte um grafo para a situação descrita acima, considerando:

- Os vértices representando as disciplinas;

OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

B) Encontre o número mínimo de horários.

3 HORÁRIOS

FIGURA 110: Foto de uma resolução de um aluno

FONTE: Autor

COMENTÁRIO:

Percebe-se um grau de maturidade impressionante do discente, dado que o mesmo construiu um grafo representativo do problema e conseguiu chegar a uma solução correta.

4.5 CONSIDERAÇÕES SOBRE O QUESTIONÁRIO FINAL

Nessa seção, traremos uma análise do encerramento das atividades, onde o foco foi a aplicação do questionário final que buscava revelar o quanto foi produtivo conhecer um pouco sobre a teoria básica dos grafos. Ao fim dos 30 minutos da aula 4, foi proposto o preenchimento de um questionário. Abaixo encontram-se as perguntas e respostas propostas, de cada turma.

1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

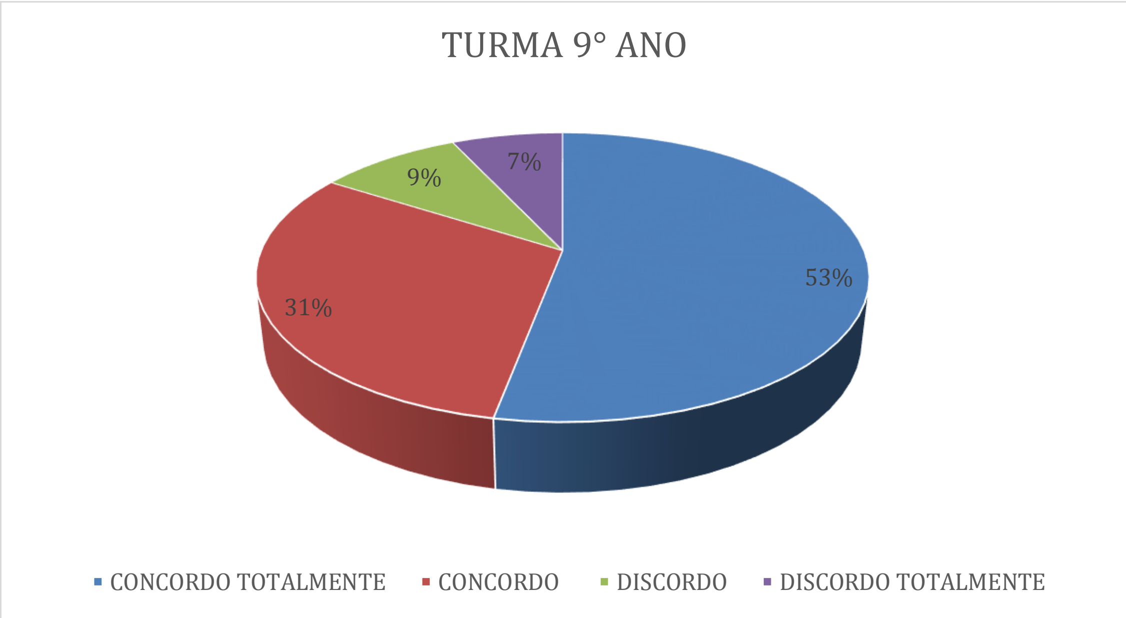


FIGURA 111: Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática

FONTE: Autor

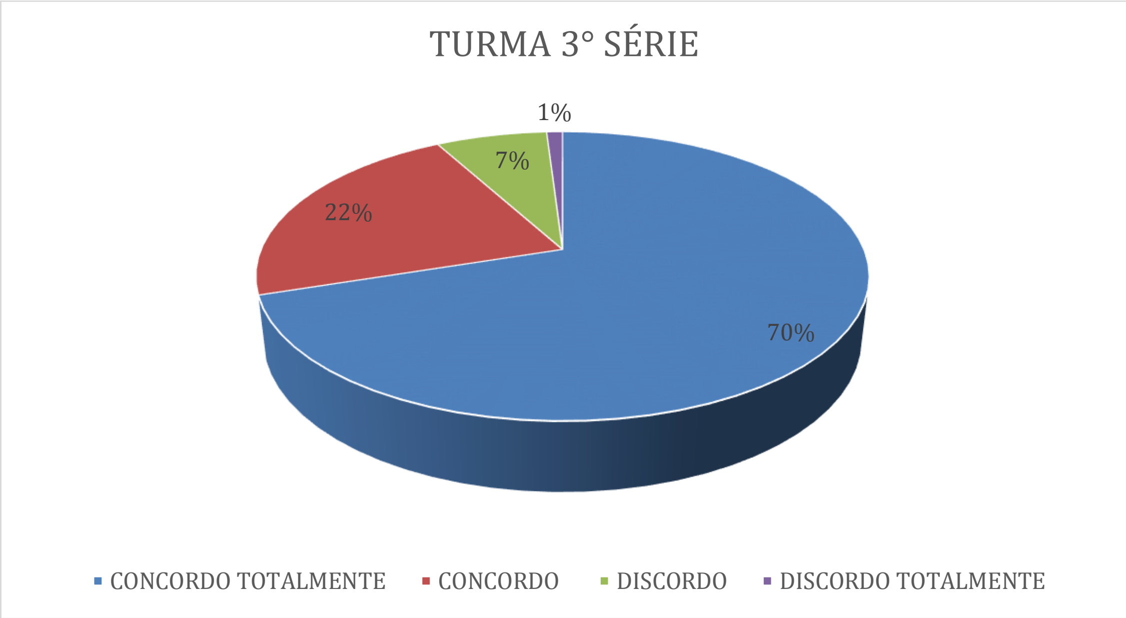


FIGURA 112: Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 111 e 112, que, em média, 62% concordam totalmente no fato de as aulas de matemática serem interessantes e apresentarem um gosto por elas. Apenas, em média, 4% discordam totalmente disso.

2- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

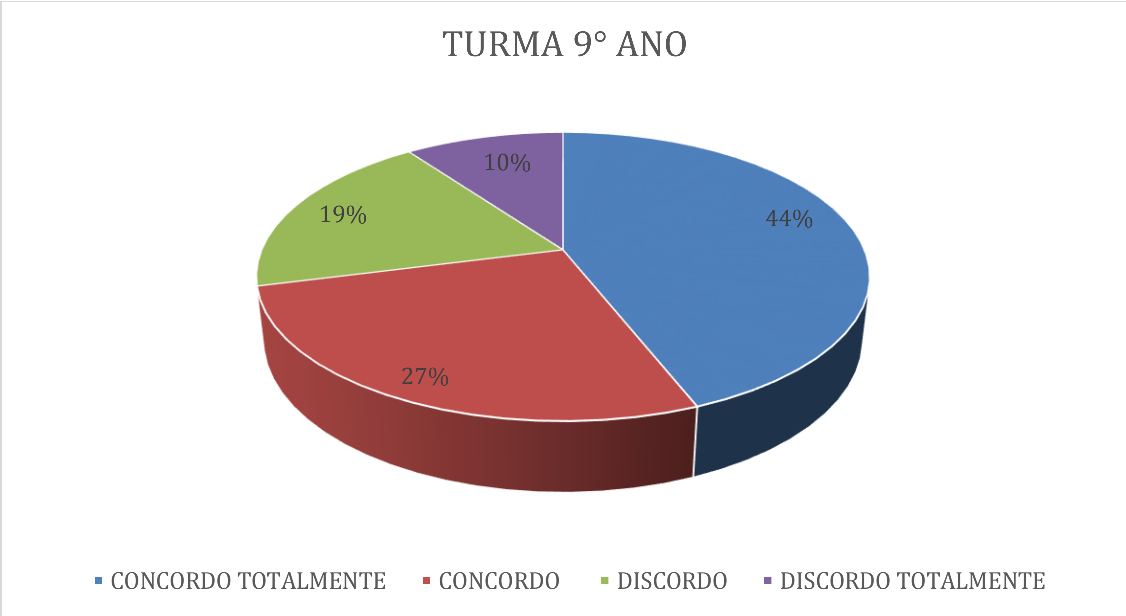


FIGURA 113: Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos

FONTE: Autor

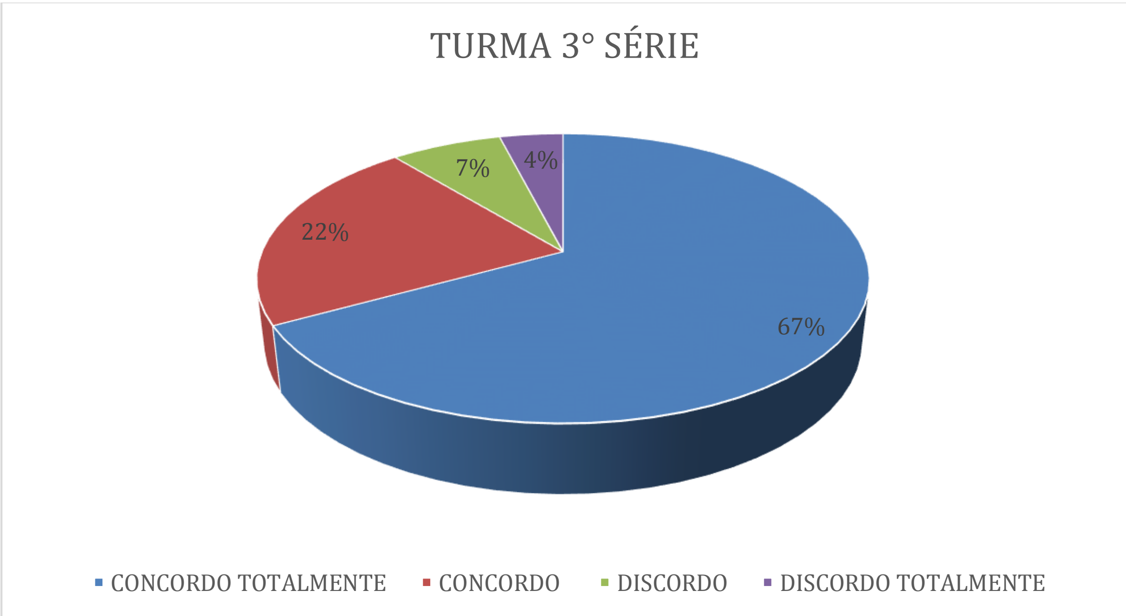


FIGURA 114: Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 113 e 114, que 43% da turma do 9° ano militar concordam totalmente com o fato de o aprendizado sobre os conteúdos de grafos, em geral, ter sido fácil. Percebe-se, pela variação percentual, que provavelmente a turma sentiu dificuldade em algum tema. Já na turma da 3° série militar, 67% concorda totalmente com o fato de o aprendizado sobre os conteúdos de grafos ter sido fácil. A turma exibe uma unanimidade nas respostas, fazendo pensar que de fato se entendeu praticamente tudo que foi ensinado pelo professor nas aulas.

3 – Entendi como identificar caminhos Eulerianos e semieulerianos.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

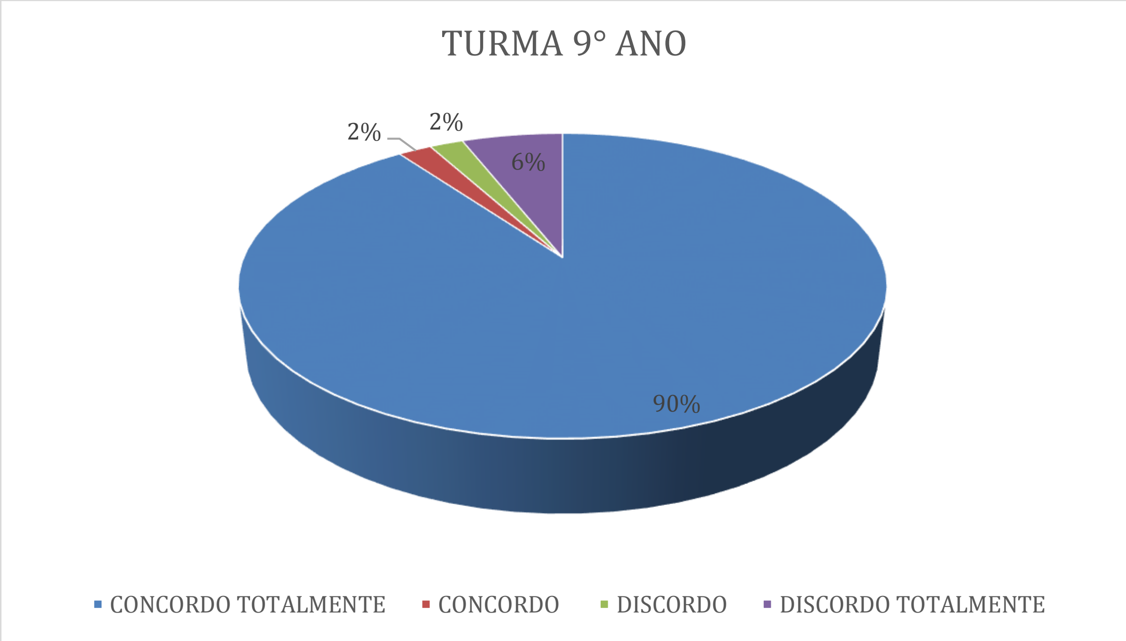


FIGURA 115: Entendi como identificar caminhos Eulerianos e semieulerianos

FONTE: Autor

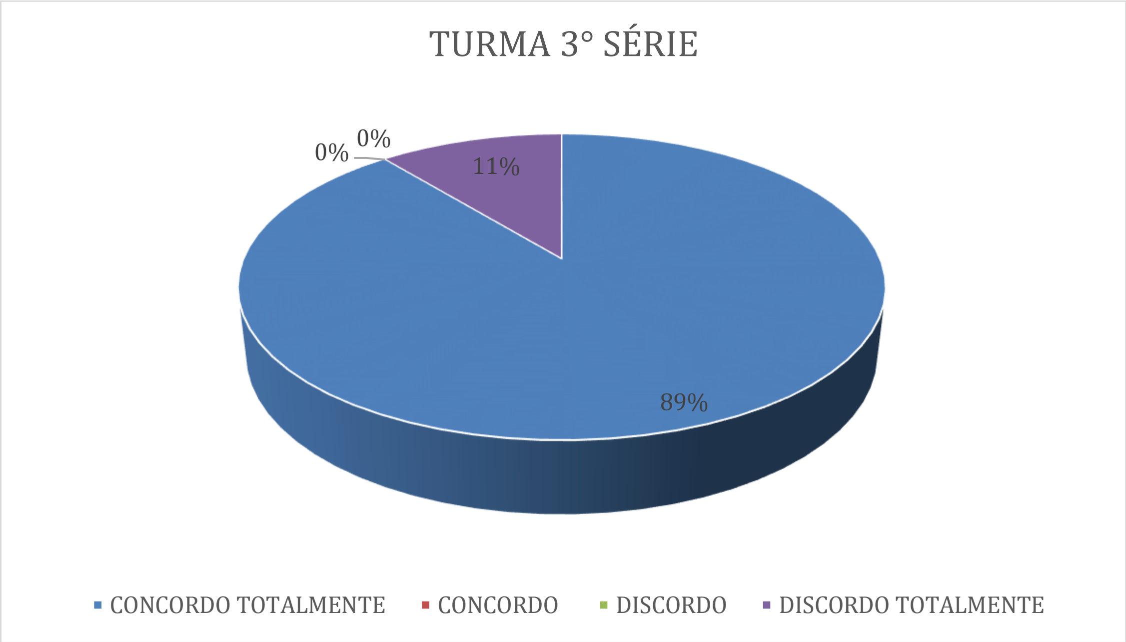


FIGURA 116: Entendi como identificar caminhos eulerianos e semieulerianos

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 115 e 116, que cerca de 90% dos alunos, sejam do 9° ano ou da 3° série, concordam totalmente que entenderam como identificar caminhos eulerianos e semieulerianos. Conjectura-se, então, que de fato as duas turmas haviam realmente entendido os conceitos formuladores da teoria dos caminhos eulerianos e semieulerianos.

4 – Entendi as várias situações onde pode-se usar o conceito de coloração. **( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**

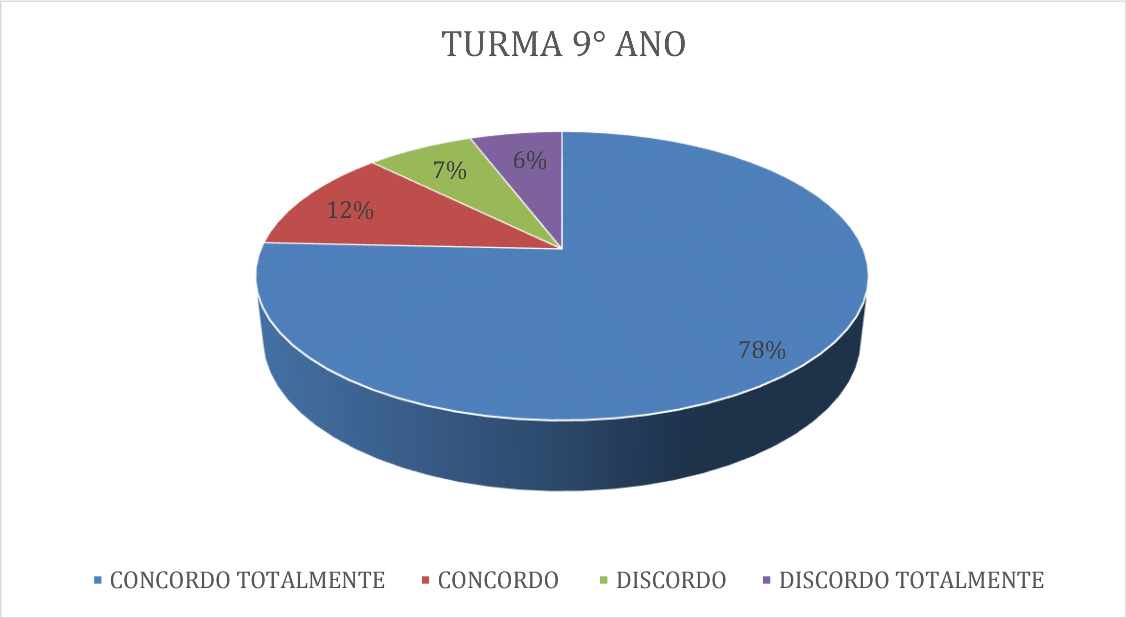


FIGURA 117: Entendi as várias situações onde pode-se usar o conceito de coloração

FONTE: Autor

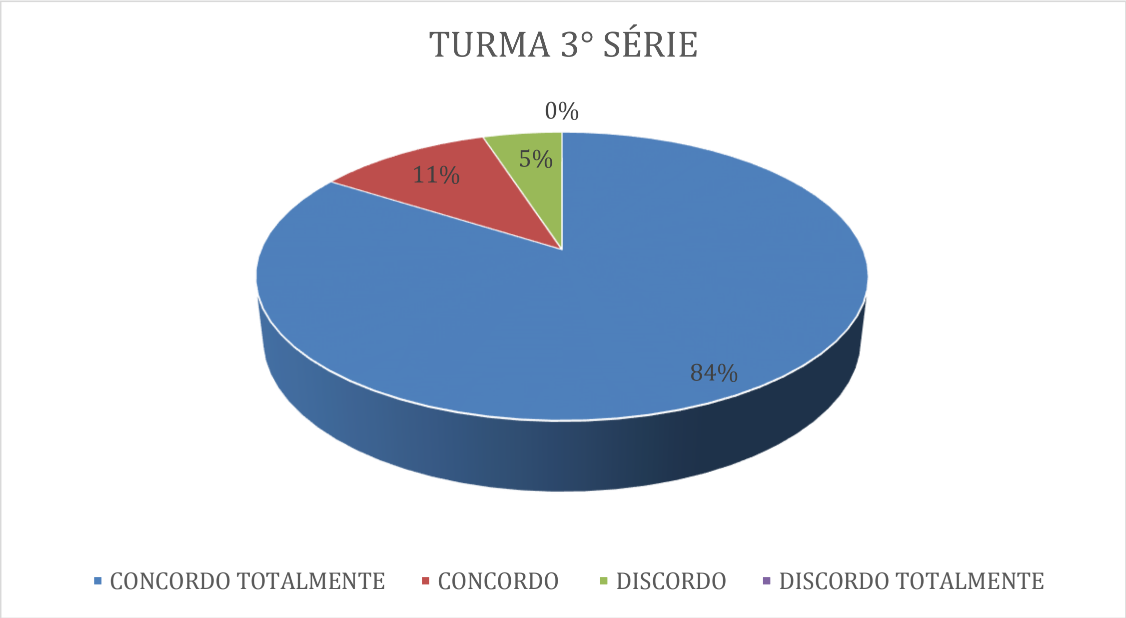


FIGURA 118: Entendi as várias situações onde pode-se usar o conceito de coloração

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 117 e 118, que 78% da turma do 9° ano e 84% da turma da 3° série, concordam totalmente que entenderam as várias formas ou situações onde é possível usar o conceito de coloração. De fato, nas aulas de coloração foi obtido um maior grau de questionamento, deixando claras todas as formas de uso da coloração.

5 – Achei o algoritmo de Dijkstra muito útil.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

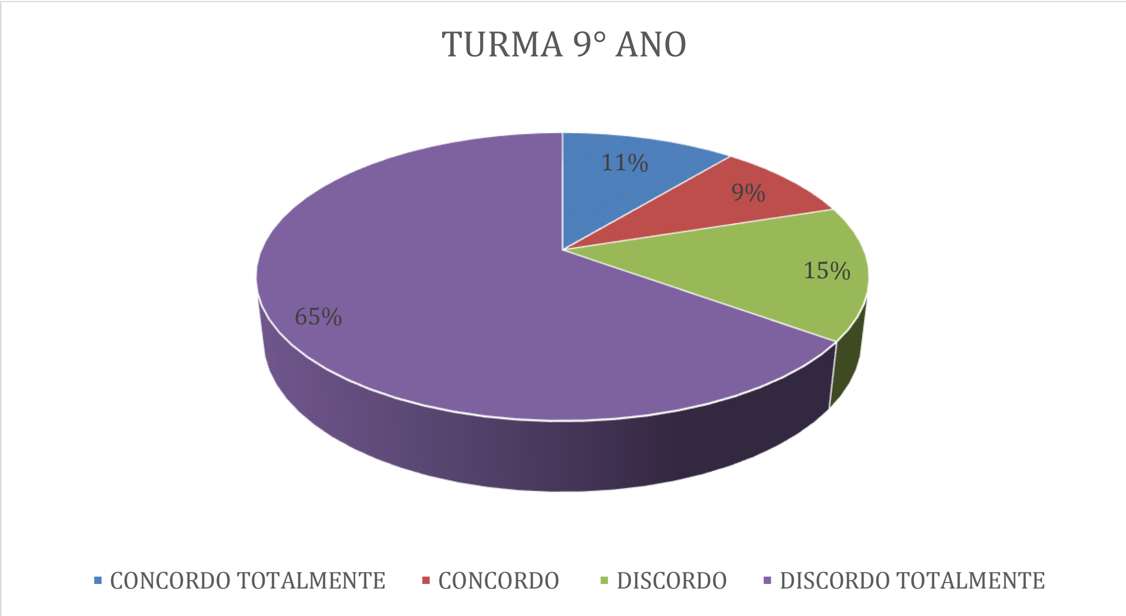


FIGURA 119: Achei o algoritmo de Dijkstra muito útil

FONTE: Autor

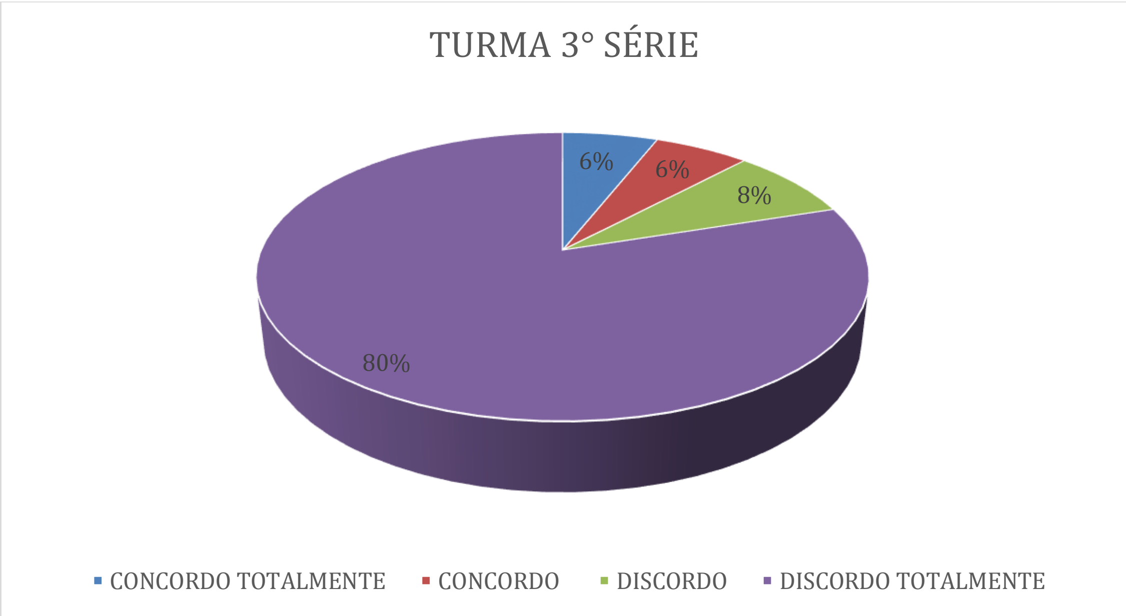


FIGURA 120: Achei o algoritmo de Dijkstra muito útil

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 119 e 120, que 65% da turma do 9° ano e 80% da turma da 3° série discorda totalmente que o algoritmo de Dijkstra seja muito útil, fazendo pensar que provavelmente os alunos não entenderam a ideia que o algoritmo preza, já que inconscientemente os mesmos resolveram os problemas dos testes 1 e 2 pelo algoritmo.

6 – Gostei muito de desenvolver uma solução na atividade dos sinais de trânsito.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

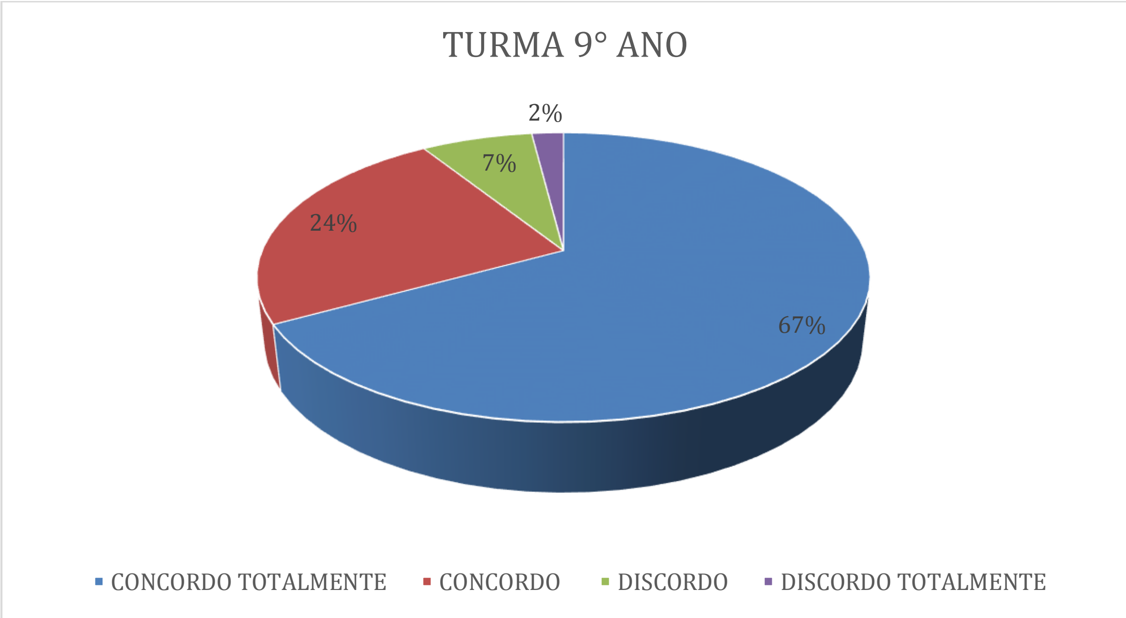


FIGURA 121: Gostei muito de desenvolver uma solução na atividade dos sinais de trânsito

FONTE: Autor

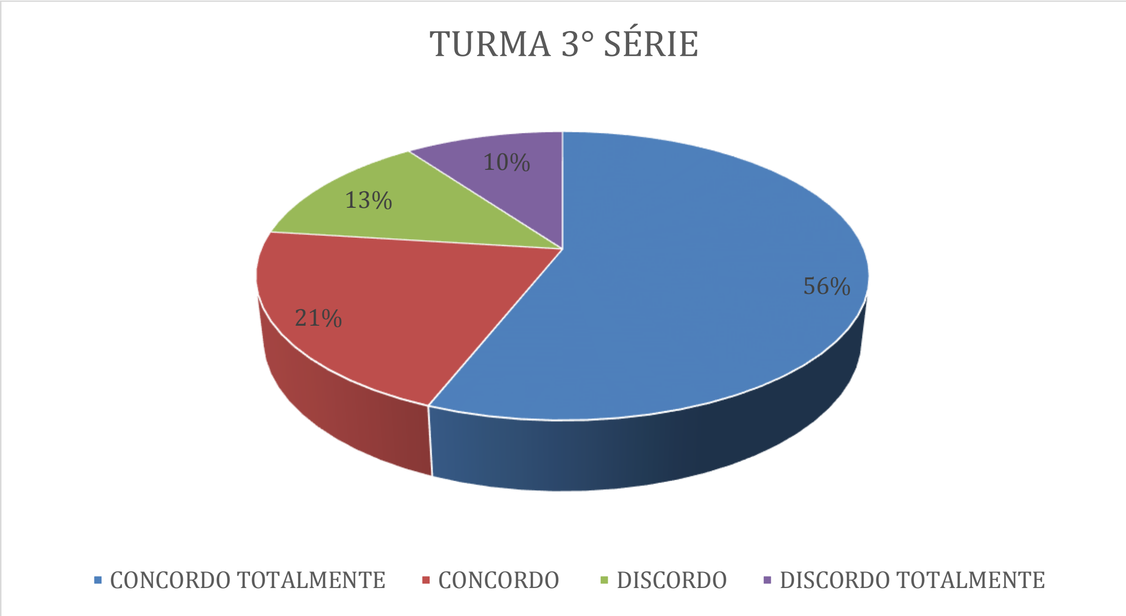


FIGURA 122: Gostei muito de desenvolver uma solução na atividade dos sinais de trânsito

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 121 e 122, que 67% da turma do 9° ano e 56% da turma da 3° série acharam bem interessante o problema dos sinais de trânsito. O problema causou inicialmente estranheza quando foi declarado que sua solução vinha da ideia de coloração.

7 – Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

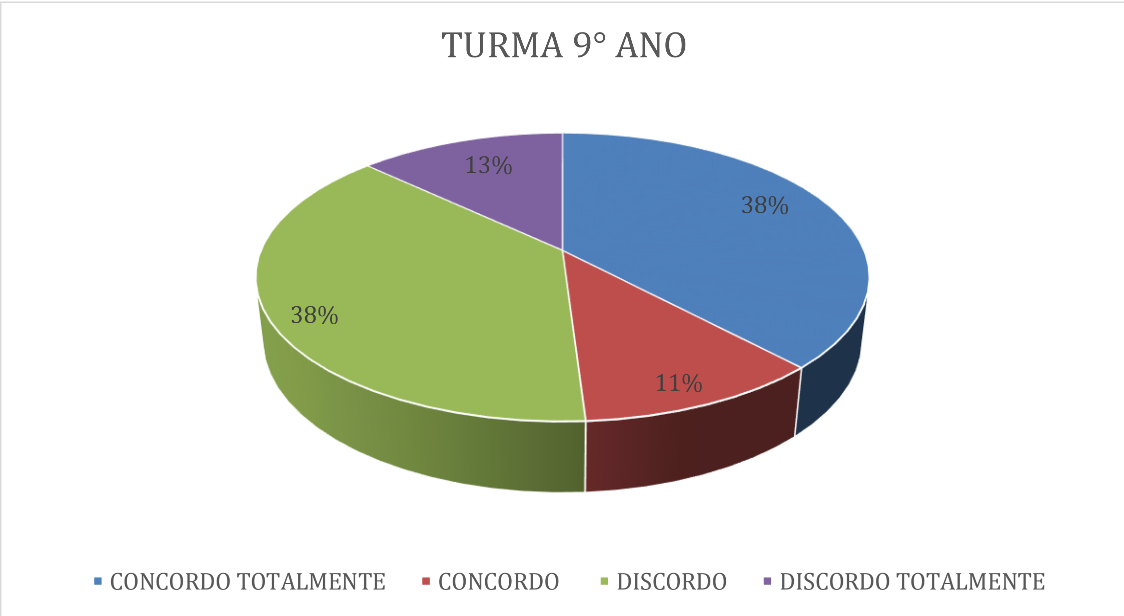


FIGURA 123: Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos

FONTE: Autor

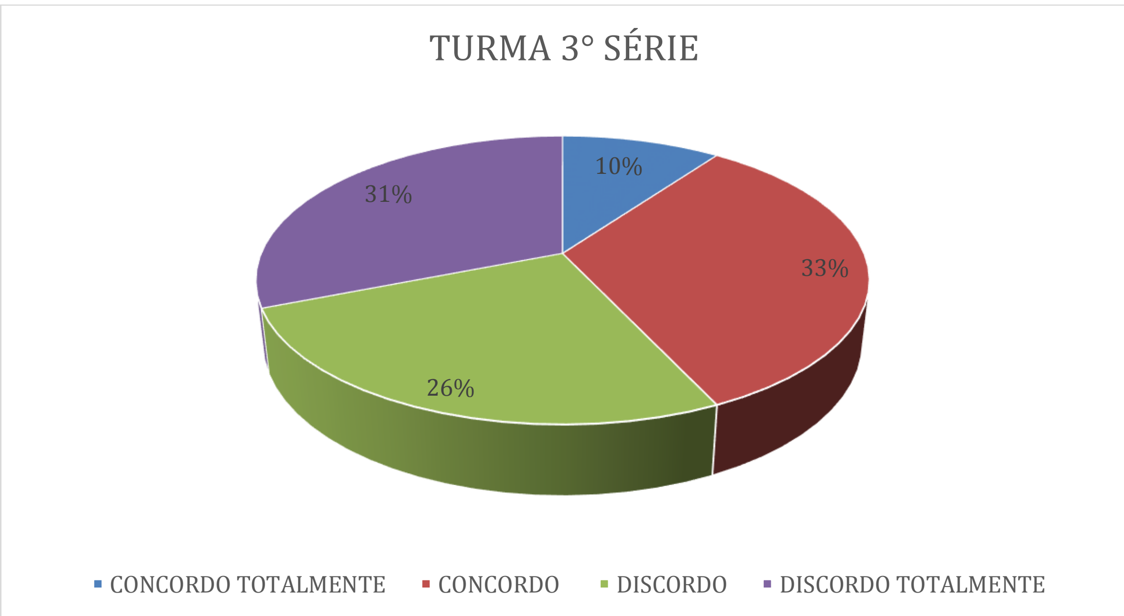


FIGURA 124: Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 123 e 124, que na turma do 9° ano militar, 38% concordou totalmente e 38% discordou totalmente sobre a busca individual de mais informações sobre grafos, tornando a avaliação difusa, já na turma da 3° série 33% da turma buscou mais informações sobre a teoria de grafos.

8 – Dentro dos assuntos vistos, o mais intuitivo é o de coloração.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

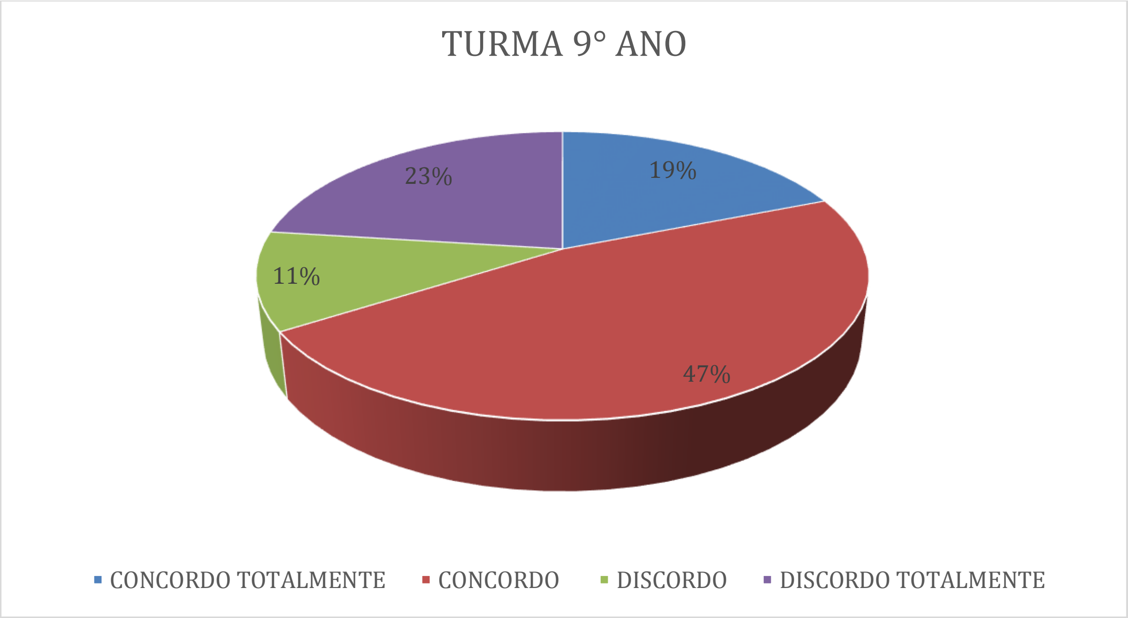


FIGURA 125: Dentro dos assuntos vistos, o mais intuitivo é o de coloração

FONTE: Autor

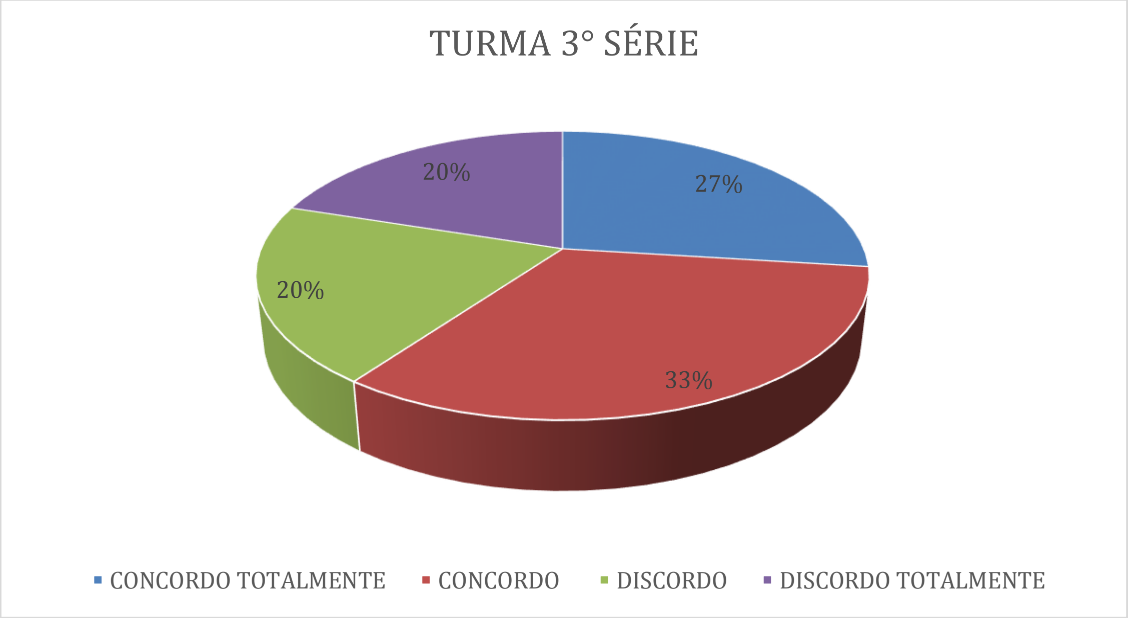


FIGURA 126: Dentro dos assuntos vistos, o mais intuitivo é o de coloração

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 125 e 126, que em média 63% dos alunos, ou do 9° ano ou da 3° série, acharam, entre os assuntos vistos nas aulas, o de coloração por incompatibilidade de vértices o mais intuitivo, fazendo jus aos questionamentos que surgiram ao longo das aulas.

9 – O aplicativo sobre grafos Eulerianos e semieulerianos, Neocirkuits, é ótimo.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

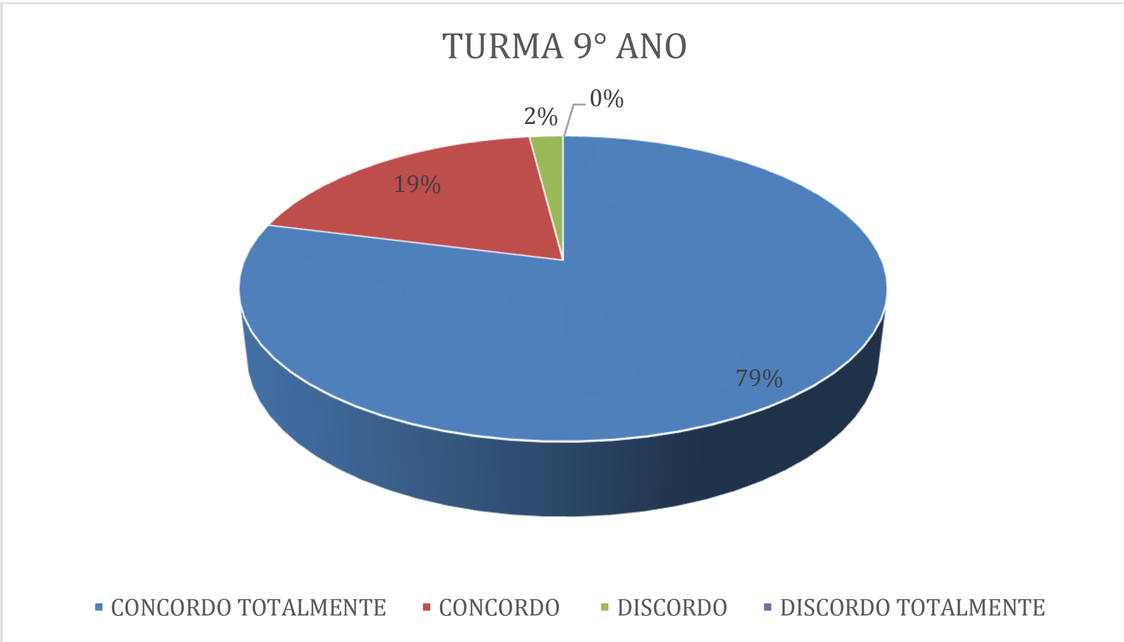


FIGURA 127: O aplicativo sobre grafos Eulerianos e semieulerianos, Neocirkuits, é ótimo

FONTE: Autor

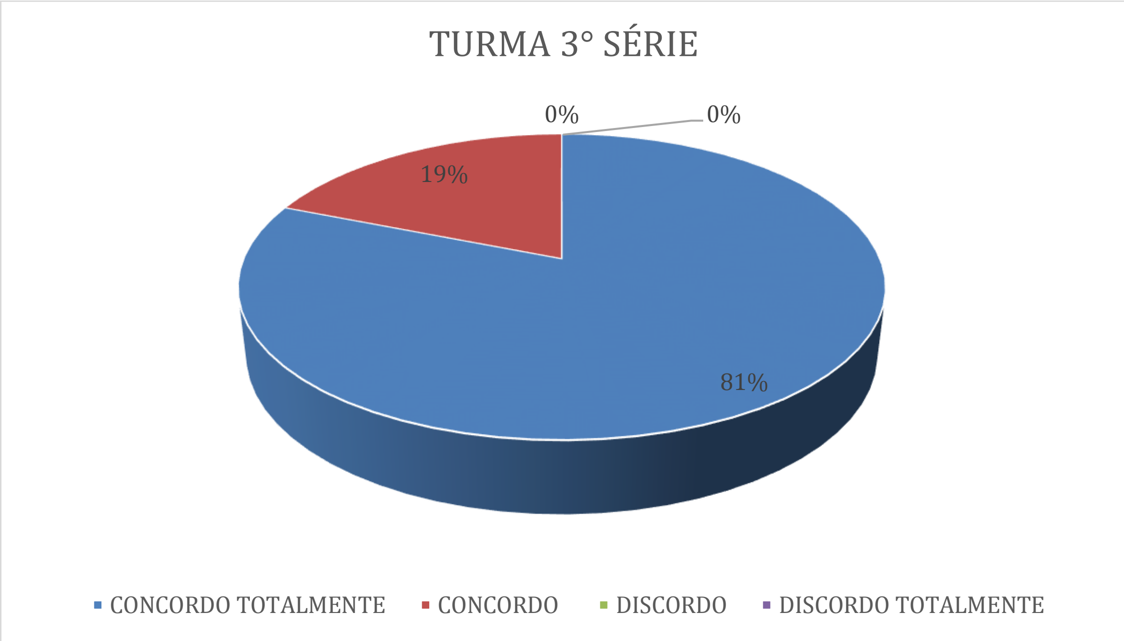


FIGURA 128: O aplicativo sobre grafos Eulerianos e semieulerianos, Neocirkuits, é ótimo

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 127 e 128, que em torno de 80% dos alunos, seja do 9° ano ou da 3° série, concordam totalmente que o aplicativo Neocirkuits é ótimo, fazendo entender que a atividade com o aplicativo em aula foi um sucesso.

10 – Segui a orientação em aula e pesquisei sobre grafos Hamiltonianos.
( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

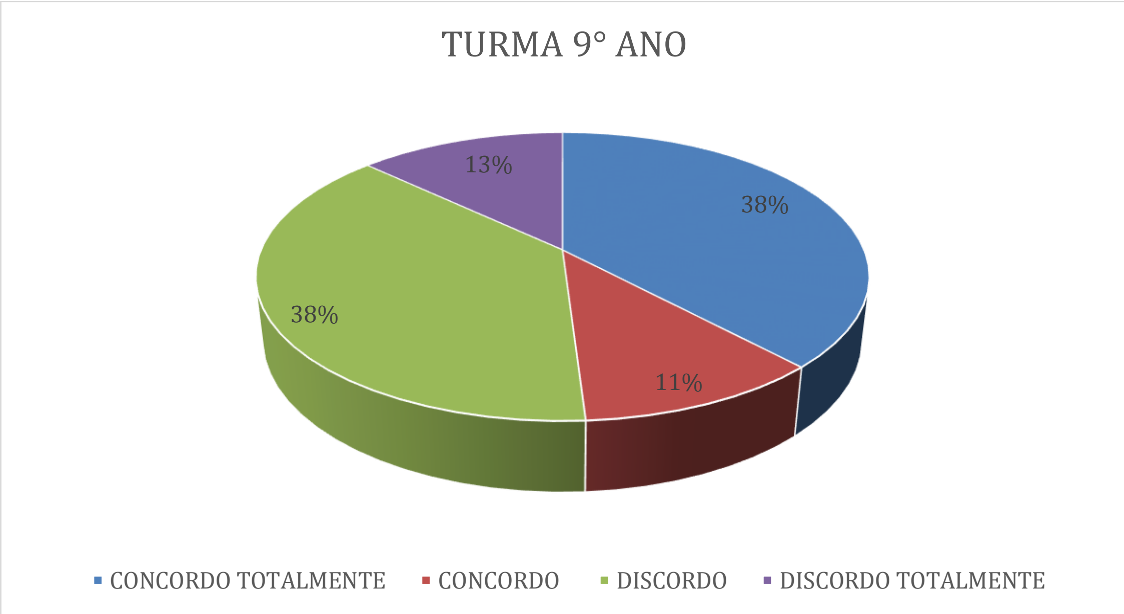


FIGURA 129: Segui a orientação em aula e pesquisei sobre grafos Hamiltonianos

FONTE: Autor

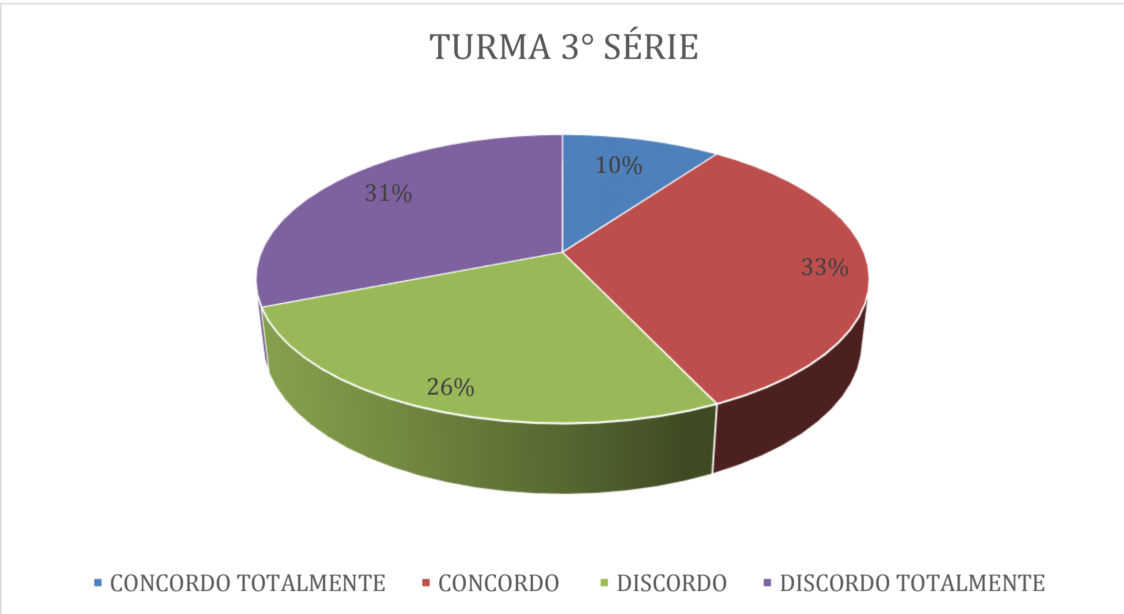


FIGURA 130: Segui a orientação em aula e pesquisei sobre grafos Hamiltonianos

FONTE: Autor

Nota-se, analisando as figuras 129 e 130, que as turmas do 9° ano e da 3° série não seguiram em totalidade as orientações do professor em pesquisar sobre grafos hamiltonianos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo investigar uma experiência com problemas envolvendo conceitos e técnicas básicas de Teoria de Grafos em 80 alunos de duas turmas preparatórias de concursos militares, uma de 9° ano e outra da 3° série. O objetivo principal foi concretizado, uma vez que se fez cumprir todo o planejamento proposto nas quatro aulas definidas. Ao aplicar o questionário inicial e o teste 1 na primeira aula pode-se obter informações cruciais sobre os hábitos de estudo e sobre a influência familiar. As aulas 2 e 3 forneceram aos alunos base (ferramentas) sobre grafos para que, caso eles se deparassem com algum questionamento em que a modelagem via grafos fosse adequada, os mesmos pudessem solucioná-lo. A aula 4 define um fim para essa experiência, com o teste 2 e o questionário final.

Em muitos casos, matemática ensinada nas escolas tornou-se sinônimo de complexidade e atribuições teóricas sem aplicabilidade. Na opinião de quem exerce a função de educador, percebe-se comumente que faltam aos alunos objetividade nas dúvidas e nos questionamentos. Há muitas vezes falta de interesse ou motivação dos alunos diante a temas das ciências exatas; de fato, é um erro esperarmos que os alunos tenham maturidade para compreender o quanto são aplicáveis os conceitos matemáticos. Entretanto, muitos desses conceitos podem ser contextualizados para a realidade desses alunos, e podem contribuir para a motivação e para o amadurecimento na matemática dos alunos. Deve partir do professor a postura de buscar contextualizar os conceitos para a realidade na qual o aluno está inserido.

Acreditamos que este trabalho seria útil para instruir outros professores a respeito do tema Grafos, contribuir com técnicas de contextualização para motivação dos alunos e servir como base para elaboração de outros trabalhos de pesquisa sobre o tema.

Uma proposta de trabalho futuro seriava criação e implementação de um projeto que desenvolvesse soluções ótimas em relação ao tempo para os semáforos nos cruzamentos do centro de Nova Iguaçu, onde seriam usadas construções teóricas envolvendo a teoria de incompatibilidade de vértices; o objetivo seria reduzir os congestionamentos causados pelo alto fluxo de carros nas horas de pico.

6 REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O, **Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos**, 2a.ed.São Paulo. Edgard Blücher,1996.405p.

BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. Grafos: Introdução e prática. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs)**. Ensino Médio, Brasília, 1998.

COSTA, P. P. **Teoria dos Grafos e suas Aplicações.** 2011. 77 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011.Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-polyanna.pdf>. Acesso em: 12 Fev. 2019,10:34:13.

DA SILVA, C.M. **GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NA REDE PÚBLICA DE ENSINO**. Monografia de Graduação – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ, Seropédica, 2015.

EOFILOFF, Paulo. **Exercícios de teoria dos grafos**. Disponível em: < http://www.ime.usp.br/~pf/grafos-exercicios> Acesso em: 15, set,2009.

GONTIJO, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio.** 2017, 194 p.Tese(Doutorado) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília. Brasília, 2007.

JURKIEWICZ, S. **Grafos – Uma Introdução** Disponível em: < http://arquivosevt.lncc.br/pdfs/Apostila5-Grafos.pdf> Acesso em: 20, ago,2009.

SANTOS, J. Plínio O., MELLO, M. P., MURIATI, I. T. C. **Introdução a Análise Combinatória**, Editora da UNICAMP, 1995.

7 BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

COSTA, FÁBIO DA ROCHA. **COLORAÇÃO EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- UFRRJ, Seropédica, 2017.

GOMES, A. A. **GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- UFRRJ, Seropédica, 2015.

SILVA Jr., ODILON MAGNO. **Coloração em Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio.** 2016.101 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2016.

DA SILVA Jr., OSNI NOVAES. **CAMINHOS EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- UFRRJ, Seropédica, 2018.

8 APÊNDICES

8.1 APÊNDICE I: QUESTIONÁRIO MOTIVACIONAL

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

MESTRANDO: Rodrigo Cesário De Aquino

PREZADO(A) ALUNO(A)

Este questionário faz parte de um estudo que estamos realizando a respeito do desempenho e das atitudes dos alunos com relação à Matemática. Além deste questionário, você será solicitado também a executar outras atividades, como resolver alguns testes e exercícios e responder a uma escala de atitudes. Contamos com sua colaboração para que possamos compreender melhor o processo de ensino – aprendizagem de Matemática e possamos apresentar algumas alternativas para sua melhoria.Responda o questionário abaixo procurando ser o mais sincero possível: A escala possui as seguintes possibilidades de resposta:

(1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre.

1°) Satisfação pela matemática

	Fator 1 – Satisfação pela matemática	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	As aulas de matemática estão entre as minhas aulas preferidas.					
2	Quando me pedem para resolver problemas de matemática, fico nervoso (a).					
3	Tenho muita dificuldade para entender matemática.					
4	Matemática é “chata”					
5	Aprender matemática é um prazer					
6	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas					
7	Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas					
8	Consigo bons resultados em matemática					

2°) Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e desafios	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.					
2	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.					
3	Procuro relacionar a matemática aos conteúdos das outras disciplinas					
4	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de matemática para meus amigos e familiares.					

3°) Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Gosto de resolver os exercícios rapidamente					
2	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.					
3	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de matemática.					
4	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.					
5	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.					

4°) Aplicações no cotidiano

	Fator 4 – Aplicações no cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.					
2	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.					
3	Faço desenhos usando formas geométricas					
4	Percebo a presença da matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola					
5	Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.					

5°) Hábitos nos estudos

	Fator 5 – Hábitos nos estudos	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Estudo matemática todos os dias durante a semana.					
2	Realizo as tarefas de casa que o professor de matemática passa.					
3	Estudo as matérias de matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.					
4	Além do meu caderno, eu costumo estudar matemática em outros livros para fazer provas e testes.					

6°) Interação na sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Faço perguntas nas aulas de matemática quando eu tenho dúvidas.					
2	Relaciono-me bem com meu professor de matemática.					

7°) Convívio familiar e social

	Fator 7 – Convívio familiar e social	Quantidade de respostas				
	Itens	1	2	3	4	5
1	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre os estudos.					
2	Em casa você recebe ajuda quando sente dificuldade nos estudos					
3	Você se junta com seus amigos fora do ambiente escolar com o intuito de estudar					
4	Com que frequência seus pais ou responsáveis conversam com você sobre seus amigos					

8.2 APÊNDICE II: TESTE 1

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

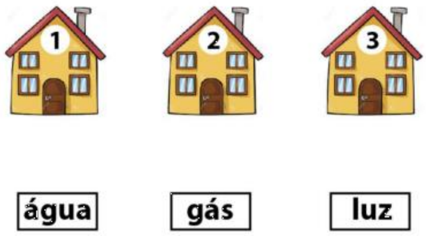
PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

MESTRANDO: Rodrigo Cesário De Aquino

TESTE 1

ATIVIDADE 1: Um canil possui 6 cachorros cuidados por um veterinário. Por motivo de controle de doença, sabe-se que o cachorro 1 não pode ficar com os cachorros 3, 4 e 5, que o cachorro 2 não pode ficar com o cachorro 6 e que o cachorro 5 não pode ficar nem com o cachorro 6, nem com o cachorro 4. Seja N o menor número de casinhas que são necessárias para comportar esses cachorros visando respeitar o controle de doença. Determine N:
RESOLUÇÃO:

ATIVIDADE 2: Você tem que levar água, luz e gás para 3 casas de uma cidade. As companhias de água (A), luz (L) e gás (G) permitem que os canos distribuidores não sejam retos. São canos flexíveis e podem ser arrumados da forma que você desejar. Os canos JAMAIS podem se cruzar e/ou invadir a região interna de qualquer casa e de qualquer fornecedora. A profundidade de encanamentos sob os terrenos da cidade que a prefeitura tolera é única. Ou seja, assuma no esquema que todos os canos são como linhas no mesmo plano. Como você resolveria esse problema? (A Figura abaixo refere-se a esta atividade).



RESOLUÇÃO:

ATIVIDADE 3:(DA SILVA, C.M.,2015) Num jogo de videogame, o personagem deve pegar todas as estrelas para passar de fase. Porém, ele só pode passar pelas pontes uma única vez, pois logo após pisar nelas elas caem. Nas figuras 1 e 2, o personagem vai partir da porta A, e ele tem que percorrer todos as pontes para recolher as estrelas. Ao final, ele deve sair pela porta A novamente. Qual é o melhor caminho, se existir, para o personagem percorrer e voltar ao ponto inicial recolhendo todas as estrelas?

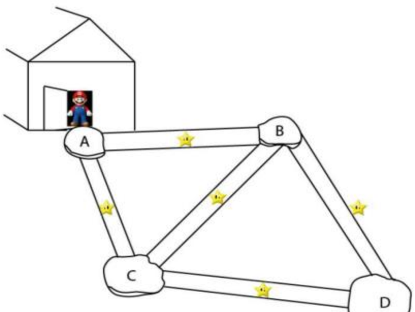


FIGURA 1

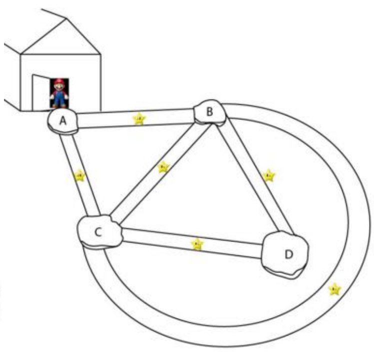
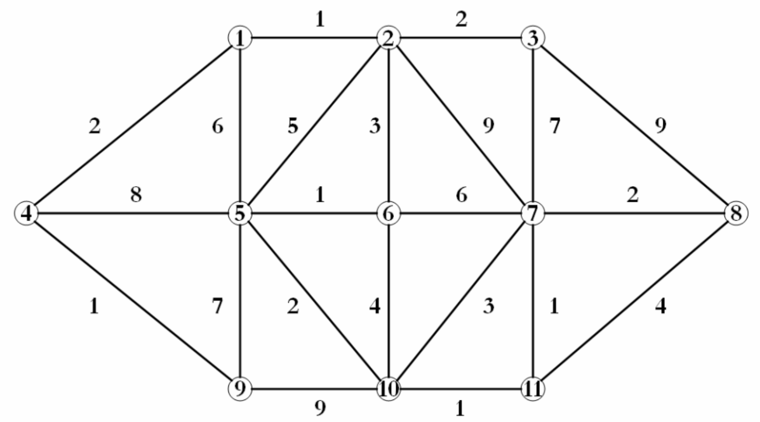


FIGURA 2

RESOLUÇÃO:

ATIVIDADE 4: No esquema abaixo, cada ponto representa uma região e cada ligação uma estrada. Os números representam as distâncias. Qual é o menor caminho para uma pessoa ir do ponto "4" até o ponto "8"? 
RESOLUÇÃO:

8.3 APÊNDICE III: TESTE 2

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

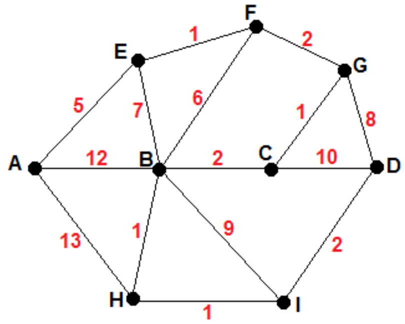
PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

MESTRANDO: Rodrigo Cesário De Aquino

TESTE 2

ATIVIDADE 1: Uma indústria química precisa armazenar 10 reagentes que tem em estoque. Por razões de segurança sabe-se que os reagentes do tipo A não podem ficar no mesmo galpão que os reagentes do tipo B, F e G; que os reagentes do tipo E não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo F, H e D; que os reagentes do tipo C não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo B, I e D e que os reagentes do tipo J não podem ficar no mesmo galpão que os do tipo I. Qual o menor número de galpões de que a indústria precisa para armazenar todos os reagentes?
RESOLUÇÃO:

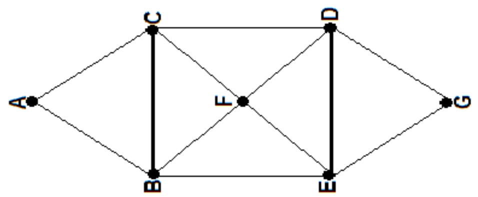
ATIVIDADE 2: O esquema abaixo representa o mapa de uma competição de corrida, onde os pontos representam as bases de reidratação para os velocistas e as ligações entre essas bases representam as ruas que ligam essas bases. O valor dado a cada ligação representa o tempo, em minutos, que se leva para chegar de uma base a outra, onde os competidores têm liberdade para escolher seu percurso.



Sabendo que essa corrida dá inicio na base A e termina na base D, e que o vencedor será o que concluir o percurso no menor tempo, podemos garantir que será vencedor o competidor que fizer qual trajeto?

RESOLUÇÃO:

ATIVIDADE 3:O prefeito de "GRAFOLÂNDIA" contratou os serviços de uma empresa de coleta de lixo para recolher todo lixo contido nos 7 bairros de sua cidade, distribuídos como na figura abaixo**:**



Sabe-se que o caminhão do recolhimento sai do bairro A e deve percorrer todas as ruas que ligam os bairros uma única vez e retornar ao lixão que se instala no bairro A. é possível o caminhão cumprir com as regras de recolhimento? Se for possível, defina um caminho.

RESOLUÇÃO:

ATIVIDADE 4: Considere a tabela abaixo dos alunos eu precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do ensino fundamental:

ALUNO	DISCIPLINA
A	MATEMÁTICA E PORTUGUÊS
B	MATEMÁTICA E FÍSICA
C	FÍSICA, QUÍMICA E HISTÓRIA
D	PORTUGUÊS E GEOGRAFIA
E	MATEMÁTICA E GEOGRAFIA
F	PORTUGUÊS E QUÍMICA
G	GEOGRAFIA E HISTÓRIA
H	QUÍMICA E ARTES

A) Monte um grafo para a situação descrita acima, considerando:

- Os vértices representando as disciplinas;

OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

B) Encontre o número mínimo de horários.

RESOLUÇÃO:

8.4 APÊNDICE IV: QUESTIONÁRIO FINAL

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROF ORIENTADOR: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

MESTRANDO: Rodrigo Cesário De Aquino

Este questionário faz parte de um estudo que estamos realizando a respeito do desempenho e das atitudes dos alunos com relação à Matemática. Contamos com sua colaboração para que possamos compreender melhor o processo de ensino – aprendizagem de Matemática e possamos apresentar algumas alternativas para sua melhoria.Responda o questionário abaixo procurando ser o mais sincero possível:

1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
2-Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
3 – Entendi como identificar caminhos Eulerianos e semieulerianos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
4 – Entendi as várias situações onde pode-se usar o conceito de coloração. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
5 – Achei o algoritmo de Dijkstra muito útil. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
6 – Gostei muito de desenvolver uma solução na atividade dos sinais de trânsito. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

7 – Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
8 – Dentro dos assuntos vistos, o mais intuitivo é o de coloração. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
9 – O aplicativo sobre grafos Eulerianos e semieulerianos, Neocirkuits, é ótimo. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente
10 – Segui a orientação em aula e pesquisei sobre grafos Hamiltonianos. ( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente