UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Paulo Roberto dos Santos

INTRODUZINDO TEMAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Teófilo Otoni
2019
Paulo Roberto dos Santos

INTRODUZINDO TEMAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales Jequitinhonha e Mucuri como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profa. Dra. Deborah Faragó Jardim
Coorientador: Prof. Dr. Alexandre Faissal Brito

Teófilo Otoni
2019

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

S237i
2019

Santos, Paulo Roberto dos.

O introduzindo temas da análise combinatória por meio de sequência didática. / Paulo Roberto dos Santos. Teófilo Otoni, 2019.

54 p. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019

Orientador: Profª. Drª. Deborah Faragó Jardim.

1. Análise combinatória. 2. Ensino de matemática. 3. Sequência didática. 4. GeoGebra. I. Título.

CDD: 510

PAULO ROBERTO DOS SANTOS

INTRODUZINDO TEMAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Dissertação apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

Orientador (a): Prof.ª Dr.ª Deborah Faragó Jardim

Data da aprovação : 24/07/2019

Prof.Dr. ALEXANDRE FAISSAL BRITO - UFVJM

Prof.Dr.ª JAQUELINE MARIA DA SILVA - UFVJM

Prof.Dr. ALEX SANDER DE MOURA - UFJF

TEÓFILO OTONI

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer à toda minha família, pois sempre me incentivaram e me apoiaram em todas as minhas decisões. Em particular minha esposa que já concluiu o mestrado e sabe a dedicação necessária para fazer este curso.

Gostaria de agradecer também aos colegas de classe que tornaram as longas e cansativas viagens em momentos de alegria e descontração. Que nos momentos de dificuldade nas disciplinas se dedicaram a tentar resolver todos os exercícios e mais do que isso, compartilharam com todos para que todos pudessem aprender.

E por último, gostaria de agradecer também à minha orientadora, Prof. Dra Déborah Faragó Jardim, que sempre dedicou muito tempo e carinho para que este trabalho fosse feito da melhor maneira possível.

RESUMO

A Análise Combinatória é um dos principais temas abordados no segundo ano do Ensino Médio. Este tema é normalmente ensinado por professores com o foco na utilização de fórmulas, o que contraria os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Segundos as diretrizes dos PCN's, este tema deve ser ensinado propiciando ao estudante o desenvolvimento do raciocínio combinatório, que é através de estratégias de raciocínio e não apenas utilização de fórmulas. Porém, o que se constata segundo pesquisas é que este tema não tem sido ensinado dessa maneira, e sim com o foco no uso de fórmulas, o que acarreta no baixo desempenho dos estudantes na resolução de questões de Análise Combinatória. Pensando nas diretrizes dos PCN's e o que foi constatado nas pesquisas relacionadas ao ensino deste tema, propõe-se uma sequência didática para a introdução deste conteúdo através de cinco jogos desenvolvidos no *software* GeoGebra. Em cada jogo propõe-se a abordagem de um tema específico sendo eles: Arranjo, Arranjo com Repetição, Combinação, Permutação e Permutação Circular. Em cada jogo, elabora-se um problema em que são feitas perguntas direcionadas à construção do raciocínio combinatório relacionado ao tema específico. E por fim, formaliza-se o conteúdo e apresenta-se sua respectiva fórmula ressaltando que esta é apenas uma compactação da escrita da solução do problema mas não sua solução em si.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Ensino de Matemática. Sequência didática. GeoGebra.

ABSTRACT

The Combinatorial Analysis is one of the main topics addressed in the second year of high school. This topic is usually taught by teachers with focusing in the use of formulas, which is against to National Curriculum Parameters (NCPs). According to the guidelines of the NCPs, this topic must be taught by providing to the student the development of combinatorial thinking, which is build reasoning strategies and not just the use of formulas. However, according to some researches, this topic has not been taught in this sense, but with focusing in the use of formulas, which results in the students' poor performance in solving Combinatorial Analysis issues. Considering the guidelines of the NCPs and what was verified in the research related to the teaching of this topic, it is proposed a didactic sequence to introduce this content through five games developed with the GeoGebra *software*. In each game it is proposed to approach a specific theme being: Arrangement, Arrangement with Repetition, Combination, Permutation and Circular Permutation. In each game, a problem is elaborated in which questions are made to construct the combinatorial thinking related to the specific topic. Finally, the content is formalized and a formula is presented, emphasizing that this is only an option of the writing of the solution of the problem, but not the solution itself.

Keywords: Combinatorial Analysis. Mathematics Teaching. Following teaching. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, o conceito de Análise Combinatória está atrelado à contagem. Segundo Berge (1971, p.10), a preocupação mais antiga da combinatória eram os problemas de contagem. No entanto, este conteúdo ganhou destaque no século XVII e a partir daí tornou-se um ramo da Ciência. Neste século surgiram várias aplicações da contagem, como por exemplo na área de estatística e probabilidade. Autores muito famosos como Pascal e Leibniz lançaram livros relacionados a este assunto exatamente neste período.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental colocam a Análise Combinatória no bloco de Tratamento de Informações, que é composta deste conteúdo juntamente com Estatística e Probabilidade. Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o estudante a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 1998 p.52). Ou seja, neste momento é apresentado o tema cujo o foco não é desenvolvimento da definição dos termos e fórmulas.

Já no Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) nas orientações complementares inclui a Análise Combinatória no terceiro eixo, Análise de dados.

> O objeto de estudo da Análise de dados são os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles dos demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, frequências e medidas estatísticas e probabilidades (BRASIL, 2006 p.126).

Neste mesmo documento esclarece-se como o tema em questão deve ser abordado no Ensino Médio.

> A contagem, ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (BRASIL, 2006 p.126).

Portanto, o foco do ensino não é a utilização das fórmulas e sim o desenvolvimento do raciocínio. O motivo para tal é que as fórmulas são, na verdade, apenas uma maneira compacta de se escrever a solução de um problema, e não a solução do problema em si. Filho, H.S.G. (2016) em sua dissertação de Mestrado apresenta um quadro comparativo relacionando os conteúdos de Análise Combinatória ensinados em alguns livros didáticos:

Autor/Conteúdo	PFC	PAC	Fatorial	Permutação	Arranjo	Combinações	Binômio de Newton
(LEONARDO, 2013)	X		X	X	X	X	X
(DANTE, 2009)	X			X	X	X	X
(PAIVA, 2009)	X	X	X	X	X	X	X
(IEZZI et al., 2013)	X			X	X	X	X
(SMOLE; DINIZ, 2010)	X			X	X	X	
(SOUZA, 2010)	X	X		X	X	X	X

Fonte: Filho, H.S.G., O JOGO SENHA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DE MÉTODOS DE CONTAGEM, 2016 p.17.

Neste quadro, PFC significa Princípio Fundamental da Contagem e PAC significa Princípio Aditivo de Contagem. Observe que todos os livros apresentam o PFC, a Permutação, o Arranjo e a Combinação. Ou seja, há uma concentração nas fórmulas que existem no ensino de Análise Combinatória sendo que, em geral, não é enfatizado o PFC, que é o mais importante para o entendimento do conteúdo, corroborando com a resolução de problemas através das fórmulas.

É comum entre professores do Ensino Médio a rejeição para lecionar no 2° ano. O motivo, em geral, é exatamente parte do conteúdo a ser ensinado contemplar Análise Combinatória e Probabilidade. Segundo Morgado et al. (2004, p.2), a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Porém, se os próprios professores têm dificuldade em lecionar o conteúdo em questão, como introduzir o tema Análise Combinatória de uma maneira mais construtivista? Ou seja, como tratar desse assunto sem o uso abusivo de fórmulas desde o início, uma vez que as fórmulas servem para compactar a escrita da solução do problema, e não a solução em si.

Pensando nesta questão, sugere-se uma sequência didática utilizando o GeoGebra para iniciar o tema Análise Combinatória com os estudantes. Se os estudantes entenderem a dinâmica de um problema, ou seja, exatamente como se forma o objeto do problema e como cada restrição afeta o mesmo, automaticamente fica mais fácil determinar uma estratégia de contagem sem ter que listar todas as possíveis situações, que é exatamente o tema em questão: como contar todas as possibilidades sem ter que listá-las.

Esta sequência didática abordará no capítulo 4 alguns problemas mais comuns, que ao serem estudados podem ser utilizados como base de raciocínio para outros problemas ou até mesmo formalizar alguns conceitos ou fórmulas como permutação, arranjo ou combinação. Entende-se que esta sequência didática deve ser trabalhada no início do conteúdo, pois este é o momento mais crítico do aprendizado, uma vez que se os estudantes não conseguem abstrair o que ocorre em cada problema tornando ainda mais difícil a elaboração de uma estratégia para atender os requisitos e restrições de cada problema e, consequentemente, a obtenção de sua solução. Portanto, se os estudantes conseguem “visualizar” como o objeto de cada problema se comporta, então a solução é mais fácil de ser obtida.

Como metodologia de pesquisa para a tarefa descrita aqui será utilizada a Engenharia Didática em suas duas primeiras fases, isto é, *Análise Preliminar*, onde todos os levantamentos são realizados e analisados, e a *Concepção e Análise a Priori*, momento em que se dá a concepção das sequências didáticas e se conjectura acerca do impacto das atividades propostas quando de sua aplicação em sala de aula.

Acredita-se que essa metodologia, por sua capacidade de investigação e ampla visão do ensino-aprendizagem dentro do meio estudado, ou seja, em sala de aula, é bastante apropriada na realização da tarefa descrita nesse texto.

Este trabalho possui como objetivo principal realizar uma ampla investigação sobre o ensino de Análise Combinatória e buscar uma maneira alternativa de introduzir o tema Análise Combinatória utilizando o recurso computacional GeoGebra através de sequências didáticas. Dessa forma, espera-se contribuir com o aprendizado dos estudantes, despertando o interesse sobre o tema por meio do uso do GeoGebra, além de facilitar a interpretação e estratégias de contagem com os recursos deste *software*.

No Capítulo 2 é apresentado detalhadamente quais são as diretrizes à respeito do ensino de Análise Combinatória tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Além disso, é realizada uma pesquisa sobre como este tema é abordado pela maioria dos professores, qual é a percepção de alguns estudantes sobre Análise Combinatória e o desempenho de questões que abordam este tema em provas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) em 2017.

No Capítulo 3 é apresentado o *software* GeoGebra. Quando o mesmo foi desenvolvido e por quem. Além disso, comenta-se sobre suas inúmeras aplicações em outras áreas da Matemática na atualidade.

No Capítulo 4 é proposta uma sequência didática para introduzir o tema Análise Combinatória propiciando aos estudantes uma possível estratégia de raciocínio ao resolver um problema combinatório. As sequências didáticas foram elaboradas com base em jogos desenvolvidos no *software* GeoGebra. Desenvolveu-se cinco jogos sendo que cada um aborda um tema específico da Análise Combinatória: Arranjo, Arranjo Simples, Combinação, Permutação e Permutação Simples. Para cada jogo são elaboradas perguntas direcionadas à contagem de possibilidades, direcionando o estudante a desenvolver uma possível estratégia de resolver problemas combinatórios. A construção das perguntas é elaborada de maneira que o estudante construa a solução do problema sem antes conhecer a respectiva fórmula do tema específico abordado no problema. Por fim, no final de cada jogo é apresentado formalmente o que significa Arranjo, Arranjo Simples, Combinação, Permutação ou Permutação Simples. E consequentemente, qual a sua respectiva fórmula.

No Capítulo 5 apresenta-se as considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido, bem como algumas limitações dos jogos desenvolvidos e sugestões de trabalhos futuros.

2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Contar objetos sempre foi uma tarefa importante, seja para se obter controle daquilo que se possui ou para saber as reais chances em jogos de azar. Na antiguidade a contagem era necessária, em sua forma mais básica, como controle e até na realização de trocas de mercadorias, o que era bem comum nos tempos em que não existia moeda. À medida que a sociedade evoluiu, os problemas de contagem também se tornaram cada vez mais complexos. Devido à complexidade dos problemas de contagem, surgiu a teoria combinatória no século XVII, tendo participação de vários Próprio Autores sendo alguns muito renomados como Pascal, Fermat e Leibniz.

A origem da teoria combinatória ocorreu devido à necessidade de cálculos de possibilidades dentro dos jogos de azar. Sendo neste momento reconhecida como um ramo da ciência. Após desenvolvida, organizada e sistematizada, a teoria combinatória trouxe várias contribuições para outras áreas da Matemática como Cálculo, Estatística e outros ramos da ciência. Segundo Bose e Manvel (1984), a Análise Combinatória se tornou um dos maiores e mais importantes ramos da Matemática, uma vez que os métodos combinatórios são particularmente relevantes em ciência da computação e estatística.

De acordo com Vasquez (2011), Leibniz em 1666 descreveu a Combinatória como "o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos". Já Morgado et al (2006) diz que a Análise Combinatória é parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Portanto, segundo Morgado et al (2006), define-se Análise Combinatória como uma metodologia para contar objetos com certas restrições sem ter que listar todos estes objetos.

2.1 O Ensino da Análise Combinatória no Ensino Básico

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, um dos objetivos do ensino da Matemática no Ensino Fundamental é

> Levar o estudante a fazer observações sistemáticas de aspectos qualitativos e quantitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório e probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretar e avaliá-las criticamente; (BRASIL, 1997 p. 37)

O motivo para tal é atender à demanda social que indica a necessidade de abordar assuntos como elementos da estatística, probabilidade e combinatória no Ensino Fundamental

(BRASIL, 1997 p.21). Em particular, em relação à combinatória, o objetivo é levar o estudante a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem (BRASIL, 1997 p. 40).

Este tema está inserido dentro do bloco “Tratamento da Informação” em que se espera que o estudante seja capaz de identificar possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e contabilizá-las utilizando estratégias próprias (BRASIL, 1997 p. 62).

Em relação ao Ensino Médio, os Parâmetros Curriculares Nacionais dentro das competências no âmbito da Matemática explicita o que se espera do estudante em cada uma delas. Em particular, em Investigação e Compreensão espera-se que o estudante

> Frente uma situação ou problema, reconheça a sua natureza e situe o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das fórmulas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto para analisar a relação entre espaço e tempo no desenvolvimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas (BRASIL, 2006 p. 115).

Ou seja, espera-se que um estudante ao abordar um problema seja capaz de analisar o mesmo para decidir qual a melhor estratégia a ser utilizada para resolvê-lo. E, ainda, que não fique preso à tipificação, pois há situações em que o estudante pode utilizar outro ramo da Matemática para resolver um mesmo problema.

Neste mesmo documento no terceiro eixo, Análise de Dados que engloba Estatística, Contagem e Probabilidade, propõe-se como objeto de estudo

> Os conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles dos demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, frequências e medidas de estatísticas e probabilidades. (BRASIL , 2006 p. 126)

Neste momento, a Análise Combinatória

> Ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da solução (BRASIL, 2006 p.126).

Portanto, espera-se que o estudante seja capaz de analisar um problema sem dar ênfase em qual fórmula utilizar mas sim em qual estratégia a ser pensada para atender os requisitos do problema, desenvolvendo assim o raciocínio combinatório, sendo este a capacidade de elaborar estratégias de contagem para abordar um problema. Ou seja,

> As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. (BRASIL, 2006 p. 126 e 127).

Isto é, as fórmulas são uma consequência do raciocínio combinatório. Portanto, representam a estratégia de resolução de um problema e que nos casos de cálculos de grandes quantidades de dados, torna-se mais interessante a compactação desses cálculos através do uso de fórmulas. Além disso, espera-se que os problemas trabalhados com os estudantes devem ser contextualizados para que o conteúdo não se torne excessivamente teórico e sem aplicação prática.

Dessa maneira, segundo os PCN+ em 2006 espera-se que o estudante seja capaz de

> • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> •Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
> •Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando processos de contagem. (BRASIL, 2006 p.127)

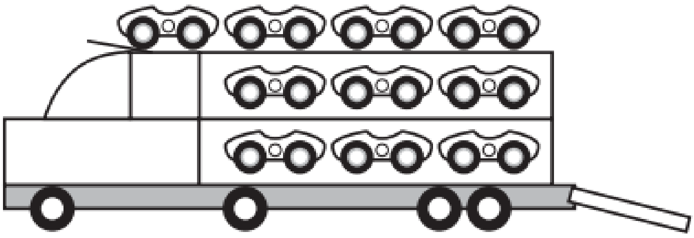
Portanto, o que se espera de um estudante ao resolver um problema de Análise Combinatória é que este não fique focado em qual "fórmula" utilizar, mas sim como deve proceder, que estratégia utilizar para atender os requisitos e desenvolver uma maneira de contar as possibilidades sem ter que listar todas as possíveis maneiras.

Apesar das claras instruções dos PCN's, sobre a não utilização automática de fórmulas pelos estudantes, a realidade observada em resultados de provas, tomando o ENEM como método de comparação entre outras disciplinas, é que os estudantes em geral têm muita dificuldade em relação à Análise Combinatória..

De acordo com o Guia do Estudante o aplicativo ''Quero Minha Nota!'' processou mais de um milhão de gabaritos do Enem 2017 para checar a média de acertos e erros dos estudantes, verificando as questões com maior e menor porcentagem de acertos nas quatro provas objetivas do exame. Das três questões com maior índice de erros, duas eram de análise combinatória. As duas questões mencionadas anteriormente são:

QUESTÃO 143

Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A) $C_{6,4}$

B) $C_{9,3}$

C) $C_{10,4}$

D) 6^4

E) 4^6

Figura 1:Questão 143 ENEM 2017
Fonte: Guia do estudante em 28 abr 2019[1]

[1] **As questões que tiveram mais erros no ENEM 2017 por área.** Disponível em: <https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/as-questoes-que-tiveram-mais-erros-no-enem-2017-por-area/> Acesso em 28 abr 2019

QUESTÃO 160

O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o *slogan* “Juntos num só ritmo”, com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 nov. 2013 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

A 15
B 30
C 108
D 360
E 972

Figura 2: Questão 160 ENEM 2017
Fonte: Guia do estudante em 28 abril 2019[2]

Não são apenas os estudantes que têm dificuldade com Análise Combinatória, é comum professor não gostar de lecionar Matemática no 2º ano do Ensino Médio, ano no qual o tema deve ser ensinado.

Segundo Calisti A.S. (2016 p.2), muitos professores apresentam dificuldade no ensino de Análise Combinatória.

> Constatada através em conversas informais, reuniões pedagógicas e etc, muitos professores apresentam dificuldade em ensinar o conteúdo Análise Combinatória por falta dos conceitos claros e significativos que subsidiem um melhor entendimento do assunto, o que faz com que apresentem aos estudantes um processo de aplicação de fórmulas, sem significados e justificativas para a resolução de problemas neste sentido (Calisti, 2016 p.2)

[2] **As questões que tiveram mais erros no ENEM 2017 por área.** Disponível em: <https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/as-questoes-que-tiveram-mais-erros-no-enem-2017-por-area/> Acesso em 28 abr 2019

Isto é, segundo Calisti (2016), alguns professores não apresentam domínio do conteúdo de Análise Combinatória e, portanto, ao lecionar este tema focam na utilização de fórmulas e não no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Dessa maneira, o aprendizado deste tema para o estudante se torna sem sentido.

Esta realidade também foi observada por Gonçalves (2014)

> Trabalho como professora de matemática do Ensino Médio e, durante todos esses anos pude perceber a grande dificuldade que os estudantes possuem em relação ao raciocínio combinatório, que lhes é apresentado, na maioria das vezes, pela primeira vez no segundo ano do Ensino Médio. Na verdade, percebi essa dificuldade não somente por parte dos estudantes, mas também dos colegas professores, que muitas vezes das vezes evitavam tal conteúdo em seus planejamentos e, quando eram "obrigados" a lecioná-lo, o fazia de forma superficial, pois não tinham pleno domínio do conteúdo. (Gonçalves, R.R.S., 2014 p. 13)

Ou seja, segundo Gonçalves (2014), este tema é ensinado de maneira superficial por alguns professores devido ao não domínio do mesmo. Acarretando assim, a dificuldade de aprendizado dos estudantes devido ao uso abusivo de fórmulas e tipificação de problemas.

Segundo Martins, G.G. (2018 p. 12) este assunto é apontado como grande obstáculo para estudantes e professores, fato que pode estar relacionado à forma mecânica com que tradicionalmente é trabalhado na Educação Básica, calcada em definições e fórmulas.

Assim como Gonçalves (2014), Martins (2018) também detectou o ensino superficial a respeito do tema focado na aplicação de fórmulas. Corroborando assim com a necessidade de introduzir este tema de maneira diferente da tradicionalmente utilizada por alguns professores.

Segundo Pereira, G.N. (2017 p. 9)

> Infelizmente percebe-se ainda que o ensino de Matemática no Brasil, em sua maioria, é feito da forma tradicional, seguindo uma tendência tecnicista, sem significado. Os estudantes aprendem o como fazer sem saber o porquê e para que. Desta maneira, muitas vezes, o ensino resume-se em o professor passar definições, propriedades e fórmulas prontas, sem dar margem à reflexão e questionamentos, seguidos de uma série de exercícios sem sentido, enquanto que o estudante executa as fórmulas e repete os procedimentos como aprendeu (Pereira, G.N., 2017 p.9)

Segundo Viana (2013) em uma matéria da revista *Cálculo*, citado por Oliveira (2015, p.27), "Ao perguntar para três professores experientes quais tópicos não gostam de ensinar, surge uma lista com o binômio de Newton bem no topo, juntinho da análise combinatória". Sendo que um deles ainda ressalta "...(Eu) não gostava de ensinar análise combinatória, probabilidade e binômio de newton, porque, no ensino médio, os estudantes têm dificuldade em acompanhar o conteúdo que vão acabar vendo de novo na faculdade, nas aulas de estatística".

Portanto, de maneira geral, até hoje ainda é comum a priorização da utilização de fórmulas na resolução dos problemas de Análise Combinatória. Porém, o que deveria ser apenas uma maneira compacta de escrever a solução, se tornou o modo de resolver os problemas. Ocasionado a limitação dos problemas a serem resolvidos e mais ainda, limitando as possíveis estratégias a serem abordadas nas resoluções dos problemas acerca deste tema.

É muito comum ouvir perguntas do tipo "qual fórmula devo usar para resolver este problema?". Devido a este tipo de questionamento e a forma como é ensinada esta disciplina, os estudantes acabam categorizando os problemas. Por exemplo, se é comissão então devo utilizar combinação, se é fila então devo utilizar permutação. Porém, o que deveria ser perguntado ao analisar um problema é que tipo de sequência é esta? Pois, ao se pensar em sequência, já se está pensando em como construir o objeto atendendo suas restrições e, consequentemente, em como elaborar uma estratégia para resolver o mesmo.

Calisti (2016) afirma que se as fórmulas forem utilizadas de maneira repetitiva, sem uma prévia análise do problema, isto pode fazer com que os estudantes tomem este processo como único método de resolver os mesmos, deixando de pensar sobre eles.

Em 2009 foi criado um grupo de estudos em Raciocínio Combinatório, chamado de Geração, pelo Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Este grupo tinha o propósito de investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório na Educação Básica.

> O Geração tem realizado investigações junto a crianças, adolescentes, jovens e adultos de diferentes níveis e modalidades de ensino, bem como tem realizado pesquisas com tem realizado pesquisas com professores do Ensino Fundamental e Médio (Borba et al, 2015 p.1349)

Esse grupo possuía cinco linhas de pesquisa cada qual com seus objetivos principais, sendo um destes "Análise e produção de recursos – Levantar abordagens de ensino de problemas de Combinatória em propostas curriculares, em livros-texto e em meios digitais; produzir atividades, em meio impresso e/ou digital, para a Educação Básica" (Borba et al, 2015 p. 1350).

Em um de seus artigos, é ratificada a limitação dos tipos de problema trabalhados pelos professores em relação à Análise Combinatória.

> Na Educação Básica são tratados, em geral, problemas de *enumeração* e de *contagem*. Além da limitação em termos de problemas combinatórios tratados, restringem-se, também, os tipos de situações a determinados níveis de ensino, apesar das recomendações em contrário de documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997). (Borba et al, 2015 p.1350)

É ressaltado também o pequeno número de exercícios relacionados ao tema em questão nos livros do Ensino Básico quando comparado a outros assuntos da Matemática. "Os problemas de maior frequência foram os de multiplicação e divisão e um número reduzido de problemas de Combinatória, mas os mesmos foram inseridos por meio de contextos adequados ao público alvo” (Borba et al, 2015 p. 1354).

Segundo Borba et al (2015), pesquisas com professores apontam que há poucos indícios de relações entre o Princípio Fundamental da Contagem e as fórmulas. Ou seja, não é mostrado para os estudantes a origem das fórmulas, que é o próprio Princípio Fundamental da Contagem, sendo que as fórmulas são apenas uma maneira mais simples de escrever a resolução dos problemas.

Como sugestão para melhoria dos resultados de estudantes em geral, Borba et al (2015) diz

> Indicamos a necessidade de professores compreenderem melhor como diferentes estratégias de solução de problemas combinatórios – tais como listagens, árvores de possibilidades, o PFC e as fórmulas – podem se articular em situações de ensino e aprendizagem em sala de aula. (Borba et al, 2015 p. 1363)

Neste artigo apresentado por Borba et al (2015) é mostrado que os *software*s existentes para o ensino de Análise Combinatória são limitados e não apropriados para uso, pois limitam-se ao uso de fórmulas. Os recursos tecnológicos adequados deveriam fornecer ajuda e *feedback* para que os usuários do mesmo pudessem refletir a respeito do problema proposto. Além disso, deveriam permitir aos também maneiras alternativas de se resolver o mesmo, menos formais, durante a busca da solução do problema.

2.2 Uma maneira alternativa para introduzir Análise Combinatória

Após o exposto na seção anterior, ficou evidenciado que, em geral, a forma como é ensinado Análise Combinatória no Ensino Básico, em particular no Ensino Médio, não tem gerado os resultados desejados conforme o que está exposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Buscando propor uma estratégia diferente das comumente utilizadas para tentar melhorar estes resultados, pensou-se em uma forma de introduzir o conteúdo em questão de uma maneira alternativa de forma que os estudantes não tenham o foco na utilização de fórmulas.

O principal objetivo desta proposta é fazer com que os estudantes, ao abordarem um problema, primeiramente tentem construir o objeto solicitado abstratamente atendendo aos requisitos ou restrições do problema proposto. Vale ressaltar que essa “construção” não significa listar todas as possíveis maneiras, mas sim entender como o objeto do problema se comporta. Pois, desta maneira, os estudantes estarão analisando o problema antes de pensar “qual fórmula devo utilizar?” Ou seja, irão focar no tipo de sequência que está sendo formada e, consequentemente, pensarão primeiramente no Princípio Fundamental da Contagem, que é uma das sugestões de alternativas de abordagem a problemas segundo Borba et al (2015).

A proposta para esta abordagem alternativa é a utilização de jogos para introduzir Análise Combinatória através de sequência didática. Nesta proposta desenvolve-se cinco jogos no *software* GeoGebra sendo que cada um aborda um tema diferente dentro do tema. Os jogos abordarão os principais assuntos na Análise Combinatória: Arranjo, Permutação, Permutação Circular e Combinação.

É importante lembrar que, ao abordar cada assunto apresentado em cada jogo, deve-se apresentar formalmente o respectivo conteúdo. E frisar que a fórmula é apenas uma maneira compacta de se escrever a solução do problema mas não a solução do mesmo. Além disso, quando possível, o professor deve mostrar que alguns problemas que são aparentemente diferentes do que foi apresentado, possuem solução semelhante à aplicada em outro problema, ou seja, que é possível utilizar estratégias semelhantes para problemas diferentes.

Em relação ao *software* escolhido, GeoGebra, um dos fatores que influenciou na decisão foi a sua livre distribuição. Sabe-se que o custo de obtenção de *software*s pelas escolas públicas ou privadas, provavelmente, tornaria inviável a utilização desta abordagem por outros professores. Além disso, este *software* pode ser utilizado também em *smartphones*, facilitando ainda mais sua utilização não somente por professores mas também por estudantes.

3 GEOGEBRA

O *software* GeoGebra foi criado para ser utilizado em sala de aula. Seu início ocorreu em 2001 por Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg. Atualmente, este é usado em 190 países e traduzido para 155 idiomas. São mais de 300.000 downloads mensais, onde há 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso segundo a Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC de São Paulo[3].

Este é um *software* de Matemática dinâmica que combina conceitos de várias áreas em uma única interface. Por exemplo, podemos citar a Geometria, Álgebra, Planilhas de Cálculo, Estatística e Probabilidade.

Sua distribuição é livre e seu algoritmo é escrito em linguagem Java. Portanto, pode ser considerado de multiplataforma. Ou seja, pode ser utilizado em vários sistemas operacionais e obtido facilmente em sites de busca ou no próprio endereço https://www.geogebra.org/?lang=pt.

Devido à sua gratuidade, este tem sido aplicado em novas estratégias de ensino e aprendizagem relacionados aos conteúdos Matemáticos: geometria, álgebra, estatística e outros. Dessa maneira, permite a exploração, conjecturação e investigação para construir o conhecimento Matemático.

[3] **Faculdade Ciências Exatas e Tecnologia – PUC SP.** Disponível em:
< https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html>
Acesso em 30 set 2019

4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentaremos a seguir a sequência didática que será baseada em 5 jogos desenvolvidos no *software* GeoGebra. Estes jogos e os respectivos questionamentos sobre cada jogo foram desenvolvidos pelo próprio autor nesta dissertação. Vale ressaltar que essas atividades foram desenvolvidas para serem trabalhadas com estudantes do segundo ano do Ensino Médio, preferencialmente antes de ser apresentado o tema Análise Combinatória, pois assim os estudantes serão estimulados a pensar no comportamento de cada objeto em um determinado problema e não em qual fórmula aplicar. Porém, devido à simplicidade de cada jogo, não há impedimento em aplicar os mesmos para estudantes de outros graus de escolaridade, em particular, para estudantes do Ensino Fundamental II.

4.1 Atividade 1: Jogo das Permutações

4.1.1 Objetivo

Fazer com que os estudantes entendam o que é permutação e apresentar uma estratégia de raciocínio durante a resolução de problemas deste tipo.

4.1.2 Roteiro

Primeiramente deve-se separar os estudantes em grupos ou até mesmo individualmente. Após este passo é necessário explicar aos estudantes como o Jogo das Permutações funciona.

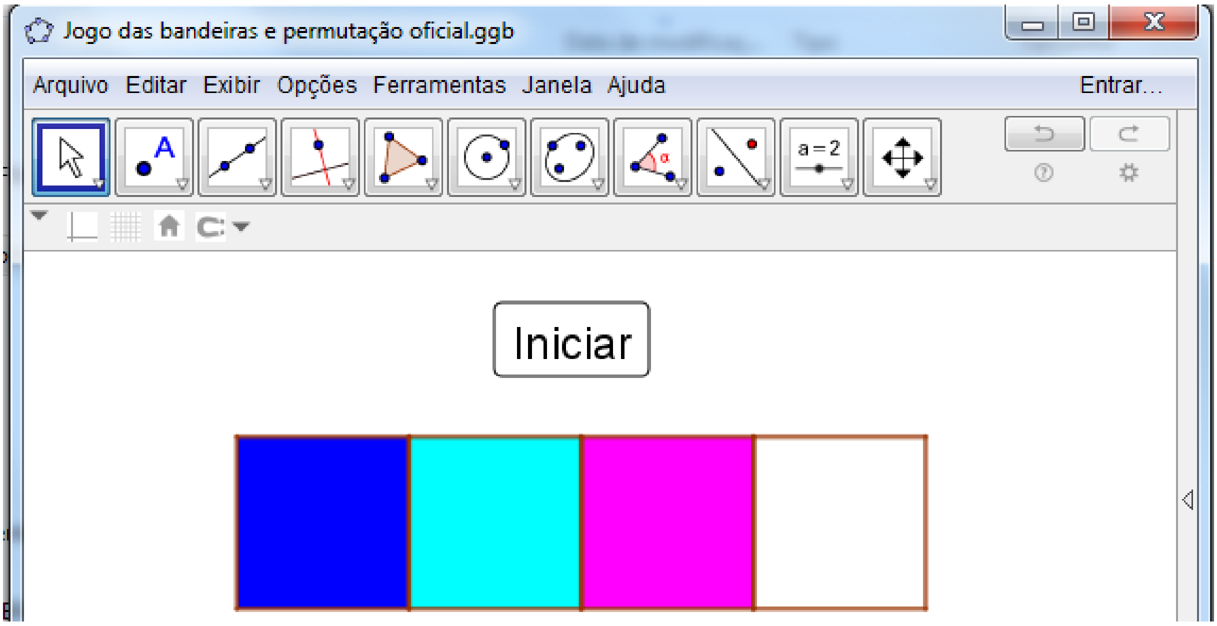


Figura 3: Jogo das Permutações - tela inicial
Fonte: Próprio Autor

A tela inicial deste jogo apresenta quatro quadrados ligados com um botão “Iniciar” na parte superior. Ao clicar neste botão, as cores que aparecem em cada quadrado serão substituídas aleatoriamente por uma das cores azul, branco, rosa e verde. Este botão foi criado para que cada estudante ou grupo ao iniciar o jogo não fique focado no jogo que estiver com os outros colegas. Para trocar a cor de cada quadrado, basta clicar no interior do mesmo que a cor deste irá trocar. Por exemplo, ao clicar no interior do quadrado do lado esquerdo, a sequência de cores que aparecerá será:

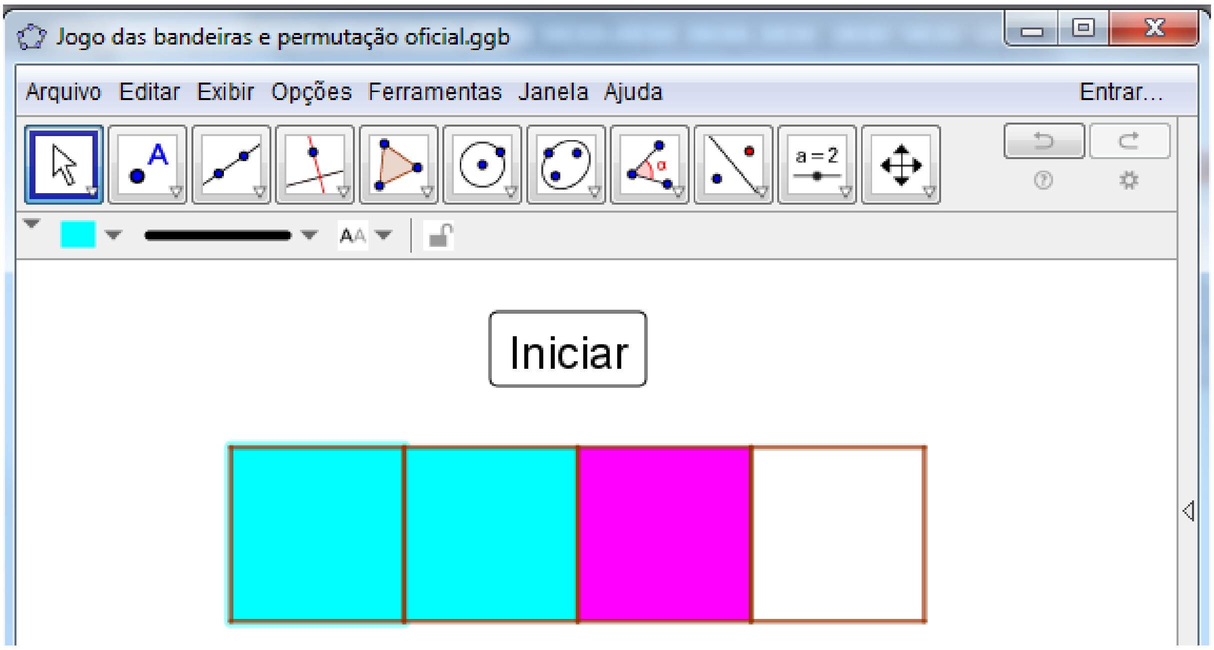


Figura 4: Jogo das Permutações - troca de cor de quadrado
Fonte: Próprio Autor

Uma vez explicado como trocar as cores de cada quadrado e como reiniciar o jogo, deve-se direcionar o estudante a lidar com um problema combinatório.

4.1.3 Problema combinatório de permutações

Considere que cada quadrado represente uma poltrona da fila de um cinema, ou seja, essa fila possui quatro poltronas apenas. Quatro pessoas sentarão nesta fila. Sabe-se que estas pessoas estão com camisas com cores distintas, sendo estas cores: azul, branco, rosa e verde. Considerando estas informações, pede-se aos estudantes que respondam às seguintes perguntas:

1) De quantas formas diferentes é possível sentar uma pessoa na primeira poltrona?

Neste momento, é importante deixar os estudantes experimentarem o jogo até que entendam que qualquer uma das pessoas podem sentar nesta poltrona, ou seja, há 4 maneiras distintas. É interessante que seja mostrado visualmente estas quatro possibilidades aos estudantes para que nas próximas perguntas eles tentem fazer o mesmo processo.

2) Se a pessoa que está com a camisa rosa quer sentar na primeira poltrona e a de camisa azul quer sentar última poltrona, então de quantas maneiras distintas é possível sentar estas quatro pessoas nestas poltronas?

Primeiramente é importante fazer com que os estudantes coloquem as respectivas pessoas aonde desejam: a pessoa de camisa rosa deve sentar na primeira poltrona e a de camisa azul deve sentar na última poltrona.

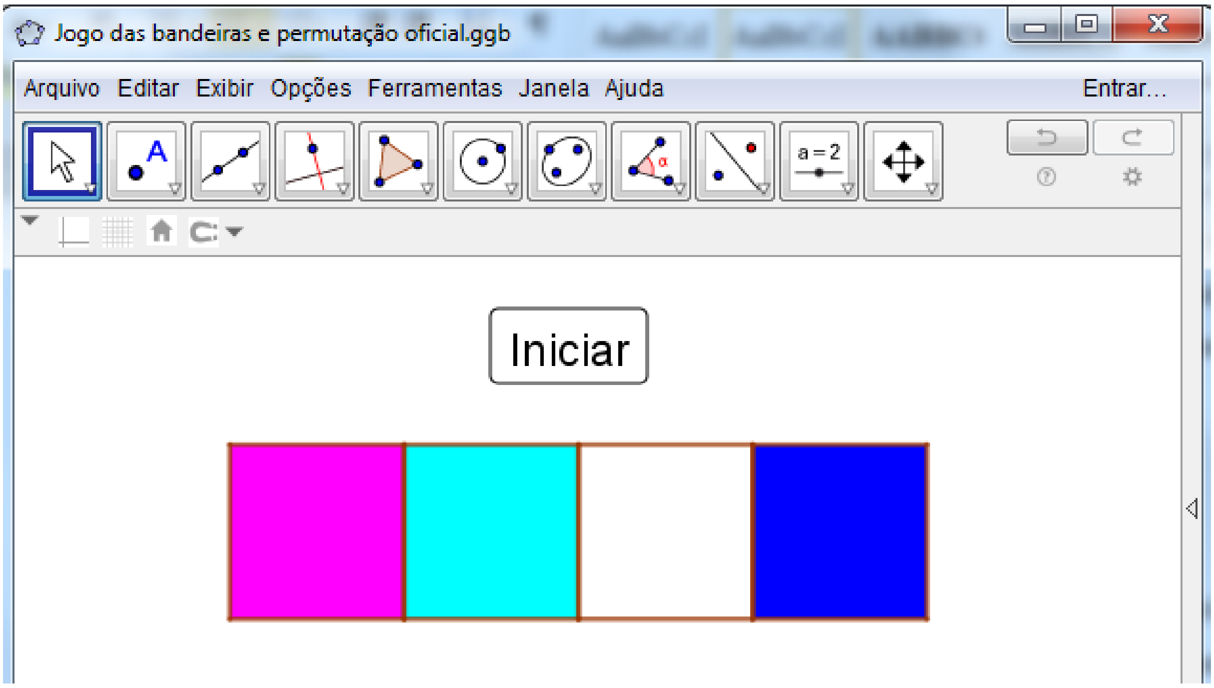


Figura 5: Jogo das Permutações - fixando pessoas
Fonte: Próprio Autor

Após atender a restrição, espera-se que o estudante busque pensar em como sentar as duas pessoas restantes. Neste caso, podendo ser a sequência: verde e branco ou branco e verde. Ou seja, há duas maneiras distintas podendo contá-las da seguinte maneira: primeiramente senta a pessoa de camisa rosa na primeira poltrona (Uma maneira apenas), depois senta a pessoa de camisa azul na última poltrona (Uma maneira apenas) e por fim, na segunda poltrona pode sentar a pessoa de camisa verde ou branca (Duas maneiras) e a que sobrar senta na terceira poltrona. É importante que seja esclarecido para os estudantes que antes de qualquer passo, deve-se sempre primeiramente atender às restrições e, em sequência, finalizar o contagem das possibilidades dos outros casos. Neste momento, como o número de possibilidade ainda é pequeno, é interessante mostrar aos estudantes visualmente as soluções encontradas.

3) De quantas maneiras é possível sentar estas quatro pessoas se a pessoa de camisa rosa só assiste filme se estiver na primeira poltrona?

À medida que a pergunta se tornou mais complexa, é interessante que os estudantes tentem responder sem recorrer exclusivamente ao recurso visual. Ou seja, que tentem elaborar estratégias de contar sem precisar listar. Novamente, primeiro deve-se atender à restrição: sentar a pessoa de camisa rosa na primeira poltrona (Uma maneira). Em seguida, sentar as outras pessoas. Pela pergunta 1, espera-se que os estudantes pensem nas possibilidades sentando uma pessoa por vez. Ou seja, na segunda poltrona há 3 maneiras (Azul, branco ou rosa), na terceira poltrona sobrará apenas duas opções e por fim, na quarta poltrona sobrará apenas uma opção. Totalizando, neste caso, assim 6 maneiras distintas

4) De quantas maneiras é possível sentar estas quatro pessoas nas quatro poltronas?

Novamente, a pergunta se tornou mais complexa, pois é preciso analisar quatro posições ao mesmo tempo. Não que seja impossível visualizar todas as possibilidades mas após construir a estratégia de sentar uma pessoa de cada vez, com certeza é mais simples pensar dessa maneira do que ter certeza de gerar e visualizar todas as possibilidades. É importante mostrar aos estudantes como a estratégia de construção do objeto, neste caso sentar uma pessoa de cada vez, facilitou sua contagem sem ter que listar. Mas tudo partiu da sua pré-visualização em como sentar pessoas nas poltronas. Portanto, temos:

$$\frac{4\ possibilidades}{Poltrona\ 1}\quad\frac{3\ possibilidades}{Poltrona\ 2}\quad\frac{2\ possibilidades}{Poltrona\ 3}\quad\frac{1\ possibildade}{Poltrona\ 4}\qquad(1)$$

Totalizando 4x3x2x1=24 possibilidades.

5) Como última pergunta tem-se: de quantas maneiras é possível sentar estas quatro pessoas se a camisa rosa não pode sentar na primeira poltrona?

Agora espera-se que os estudantes já tenham a independência de pensar sozinhos. Sendo que é interessante o professor mostrar que em Análise Combinatória é sempre possível se obter pelo menos duas soluções distintas de um problema.

1ª solução:

$$\frac{3\ possibilidades\ (Não\ rosa)}{Poltrona\ 1}\quad\frac{3\ possibilidades}{Poltrona\ 2}\quad\frac{2\ possibilidades}{Poltrona\ 3}\quad\frac{1\ possibildade}{Poltrona\ 4}\qquad(2)$$

Totalizando 3x3x2x1=18 possibilidades.

2ª solução:

O raciocínio desta segunda solução é simples. Todas as maneiras de se sentar as quatros pessoas podem sem contadas separando-se em dois casos:

1º caso: Aqueles em que a pessoa de rosa senta na primeira poltrona.

2º caso: Aqueles em que a pessoa de rosa não senta na primeira poltrona.

Ou seja, se eu contar as possibilidades desejadas mais as indesejadas obtém-se todas as possíveis maneiras. Note que todas as possibilidades foram contadas na pergunta 4 (24 maneiras) e aquelas em que a pessoa de rosa está na primeira poltrona foram contadas na pergunta 3 (6 maneiras). Portanto, há 24-6=18 maneiras distintas das quatros pessoas sentarem nas quatro poltronas sendo que a pessoa de rosa não senta na primeira poltrona.

Neste momento, o professor deve formalizar matematicamente o conceito de permutação, que significa trocar lugar. Nos problemas em que envolvem permutação, há *n* objetos a serem colocados em sequência. Dessa forma, há *n* posições disponíveis. Utilizando a mesma estratégia do problema de sentar as pessoas nas cadeiras sem restrição, tem-se:

$$\frac{n\ possibilidades}{1^a Posição}\ \frac{(n-1)\ possibilidades}{2^a Posição}\ \frac{(n-2)\ possibilidades}{3^a\ Posição} \cdots \frac{1\ possibilidade}{(n-ésima) Posição} \quad (3)$$

O professor deve também explicar o porquê de se reduzir uma possibilidade ao avançar uma posição. Pensando no problema trabalhado anteriormente, uma vez que uma pessoa senta em uma determinada cadeira, ela não poderá ocupar outra cadeira novamente. Portanto, toda vez que se avança uma posição o número de possibilidades é reduzida em uma unidade. Totalizando-se como todas as possibilidades:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n! = P_n \quad (4)$$

Para encerrar a atividade, o professor deve mencionar que todo problema em que há troca de posições, este pode ser trabalhado como se pessoas estivessem sentando em poltronas, facilitando a construção do objeto e, consequentemente, sua solução.

4.2 Atividade 2: Jogo dos Números

4.2.1 Objetivo

Fazer com que os estudantes entendam o que é arranjo utilizando a construção dos números em Análise Combinatória e apresentar uma estratégia de raciocínio para resolução de problemas deste tipo.

4.2.2 Roteiro

Novamente deve-se separar os estudantes em grupos ou até mesmo individualmente. Após este passo é necessário explicar aos estudantes como o Jogo dos Números funciona.

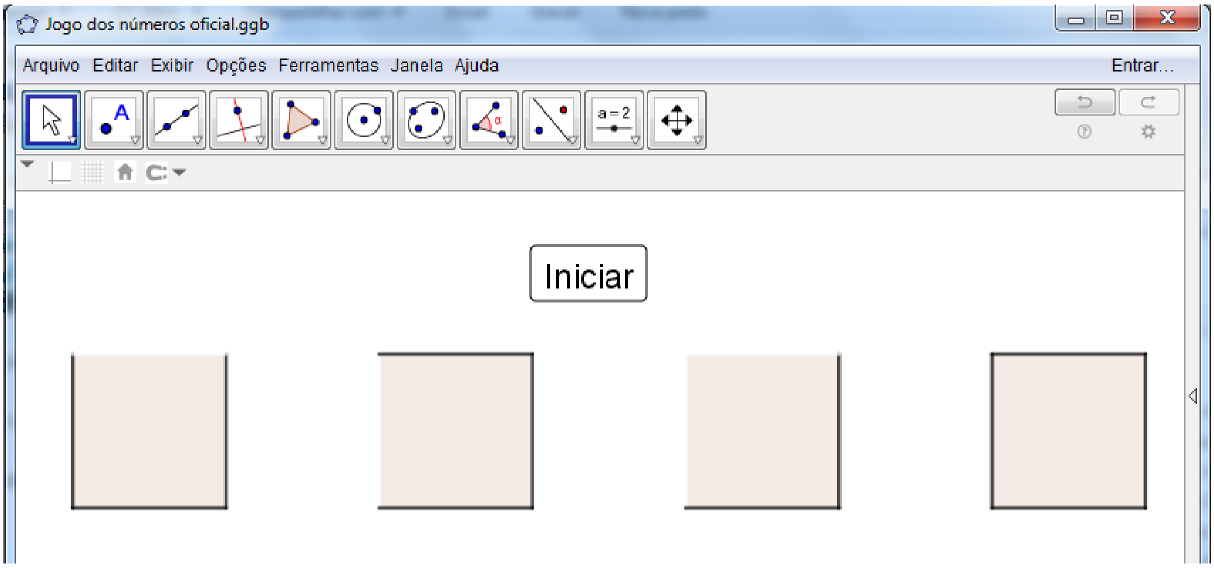


Figura 6: Jogo dos Números - tela inicial
Fonte: Próprio Autor

A tela inicial deste jogo contém quatro quadrados espaçados entre si com um botão "Iniciar" na parte superior. Ao clicar neste botão, as arestas destes quadrados terão algumas destacadas e outras arestas apagadas. Observa-se que as arestas inferiores sempre permanecem destacadas, ou seja, não é possível apagá-las mesmo clicando sobre as mesmas. O motivo para tal será explicado posteriormente. O botão "Iniciar" foi criado para que cada estudante ou grupo, ao iniciar o jogo não fique focado no jogo que estiver com os outros colegas. Para destacar ou apagar uma aresta qualquer de um quadrado, basta clicar sobre a respectiva aresta. Por exemplo, ao clicar na aresta superior do quadrado do lado esquerdo e na aresta do lado esquerdo do segundo quadrado obtém-se a seguinte imagem:

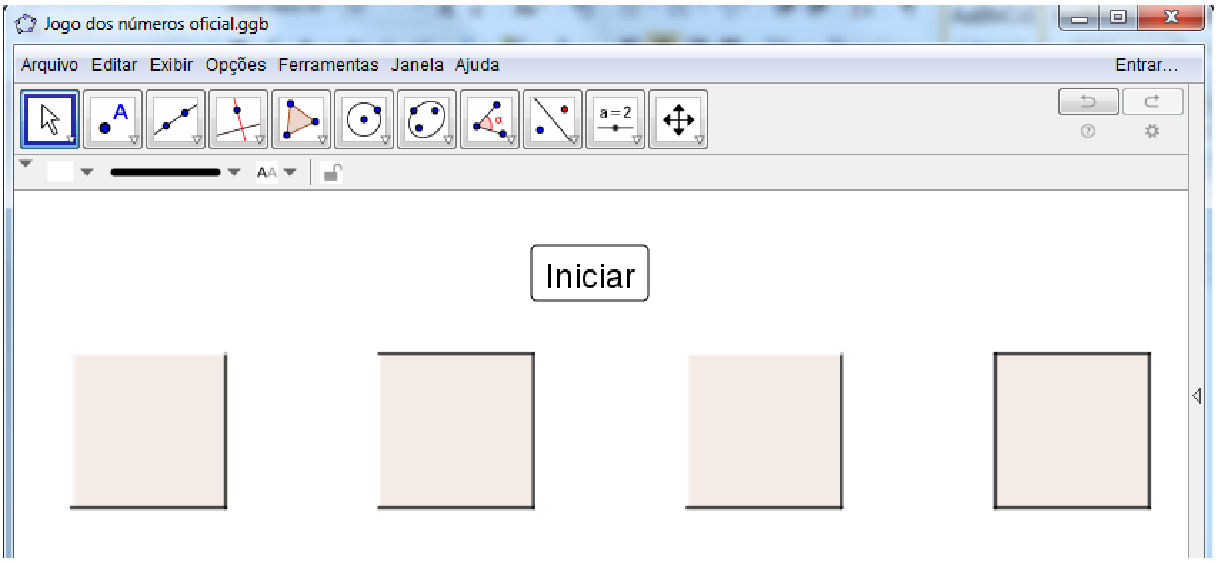


Figura 7: Jogo dos Números - clicar sobre a aresta
Fonte: Próprio Autor.

Uma vez explicado como destacar ou apagar a aresta de qualquer quadrado e como reiniciar o jogo, deve-se direcionar o estudante a lidar com um problema combinatório.

4.2.3 Problema combinatório de formação de números

Considere que o quadrado "da esquerda" para a direita representa a posição das unidades de milhares, centenas, dezenas e unidades de um número de quatro algarismos respectivamente. E que cada aresta destacada representa uma unidade em sua respectiva posição. Por exemplo o número 2431 é formado pela imagem:

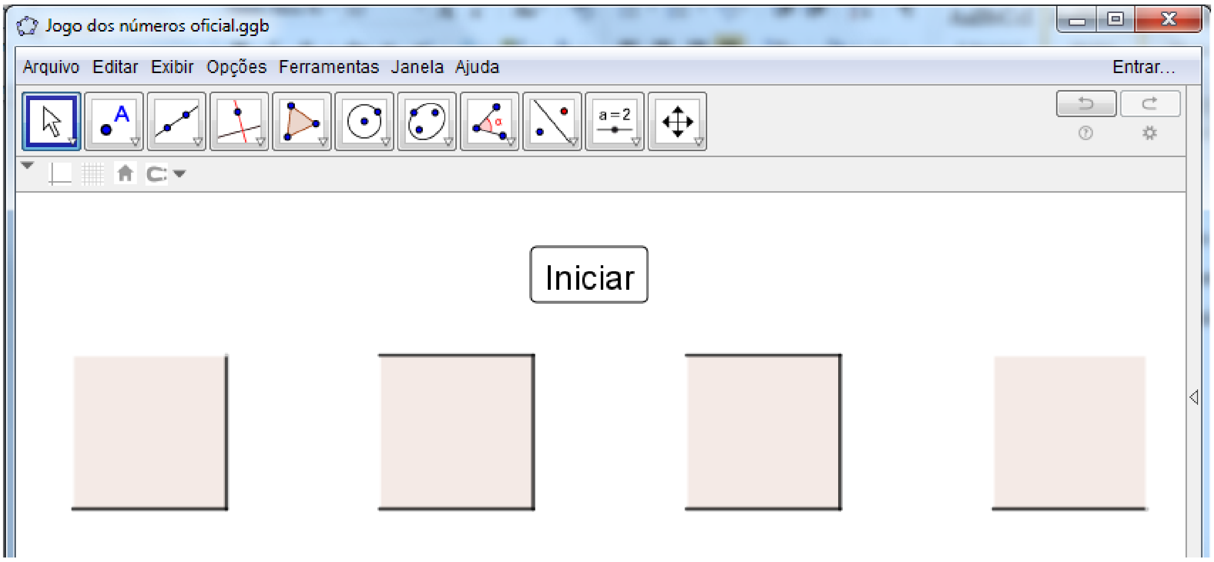


Figura 8: Jogo dos Números - formação de número
Fonte: Próprio Autor

O motivo para que a aresta inferior de cada quadrado não fosse possível apagar é para garantir que o número a ser formado sempre tenha quatro algarismos distintos. Considerando estas informações, pede-se aos estudantes que respondam às seguintes perguntas:

1) Quantos números de quatro algarismos podem sem formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4 sendo que na posição da unidade, dezena e centena está o número 2?

Neste momento é importante deixar os estudantes experimentarem o jogo até que entendam que para formar os possíveis números, basta avaliar a posição das unidades de milhar. Ou seja, é possível formar quatro números: 1222, 2222, 3222 e 4222. É interessante que seja mostrado visualmente estas quatro possibilidades aos estudantes para que nas próximas perguntas eles tentem fazer o mesmo processo.

2) Quantos números de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4 se este começa e termina com o algarismo 4?

É importante ressaltar para os estudantes que a prioridade ao resolver problemas de Análise Combinatória deve ser primeiramente atender à restrição do mesmo. Sendo assim, fixamos o algarismo 4 nas extremidades conforme figura abaixo:

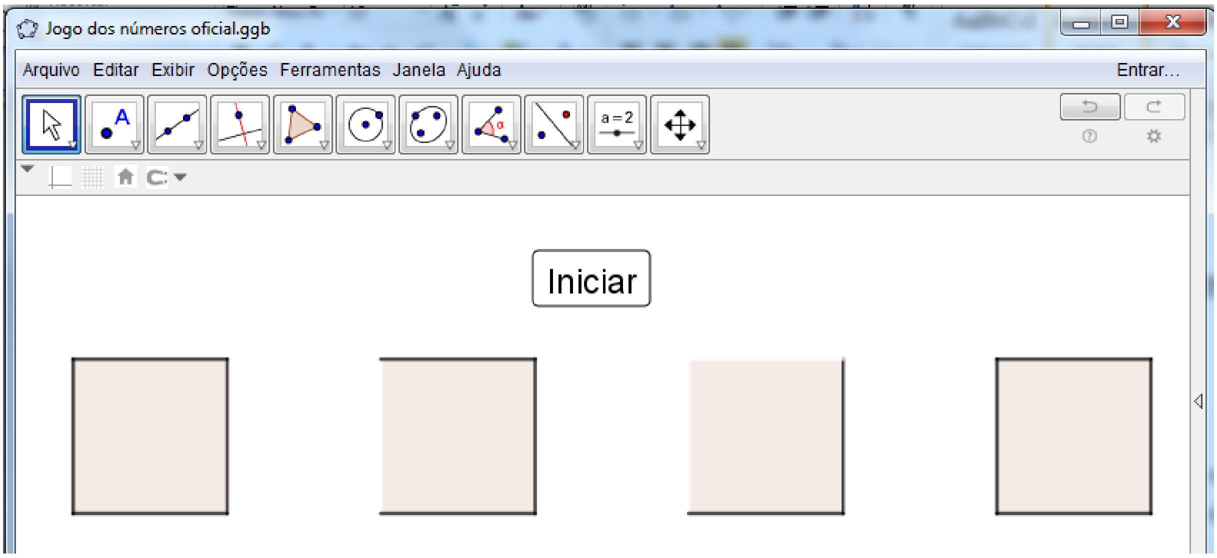


Figura 9: Jogo dos Números - fixando posições
Fonte: Próprio Autor

Logo, resta avaliar as posições das dezenas e centenas. Pela pergunta anterior, espera-se que o estudante avalie cada posição independentemente. Dessa maneira, conclui-se que para cada posição há 4 possibilidades, totalizando 4x4=16 possíveis maneiras de se formar números que começam e terminam com o algarismo 4. É também interessante mostrar visualmente para os estudantes que ao fixar o 4 nas extremidades e ao colocar um número qualquer na posição das dezenas, então resta 4 possibilidades para a posição das centenas. Como há 4 possibilidades de preencher a posição das dezenas, então há um total de 4x4=16 possibilidades. Ou seja, mesmo utilizando uma estratégia distinta para formar o número de 4 algarismos com o 4 fixo nas extremidades, encontra-se o mesmo resultado para o total de possibilidades.

3) Quantos números de algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Neste problema, apesar de ser possível montar todas as possibilidades no jogo, é interessante que os estudantes tentem resolver sem ter que listar todas estas possibilidades. Isto é, pensem em cada posição individualmente. Sendo assim temos:

$$\frac{4\ possibilidades}{Unidades\ de\ milhar}\quad \frac{3\ possibilidades}{Centenas}\quad \frac{2\ possibilidades}{Dezenas}\quad \frac{1\ possibilidade}{Unidades} \qquad (5)$$

É importante frisar o motivo para a redução de uma possibilidade ao avançar uma posição ao formar o número de quatro algarismos. Já que os algarismos são distintos, então o algarismo que foi utilizado uma vez não pode ser utilizado novamente. Por isso reduz-se uma possibilidade ao avançar uma posição na formação do número.

Finalizando o raciocínio, então há 4x3x2x1=24 possibilidades de formar números de 4 algarismos distintos utilizando os algarismos 1, 2, 3 e 4.

4) Quantos números pares de algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Neste momento espera-se que os estudantes já pensem em como formar o número sem utilizar obrigatoriamente o jogo. Isto é, pense nas posições dos números e quantas possibilidades há para preencher o mesmo. Sendo assim, ao pensar no requisito número par é preciso lembrar que para um número ser par, basta que este termine em algarismo par. Logo, para a posição das unidades há duas possibilidades: o algarismo 2 ou 4. Agora falta preencher as outras posições. Começando pela unidades de milhar, há 3 possibilidades já que o número a ser formado deve possuir algarismos distintos, ou seja, não deve haver algarismo repetido. Avançando para o posição das centenas sobram duas possibilidades. E por fim resta uma possibilidade para a posição das unidades. Totalizando 3x2x1x2=12 possibilidades de formar número par de algarismos distintos com os algarismos 1, 2, 3 e 4.

Ao finalizar o raciocínio é interessante que o professor faça a pergunta: Há outra forma de resolver este mesmo problema? Esta instigação é interessante para lembrar aos estudantes que não há uma única forma de resolver problemas em Análise Combinatória. Por exemplo, na pergunta anterior já foi determinado que é possível formar 24 números com algarismos distintos utilizando os algarismos 1, 2, 3 e 4. Já que há a mesma quantidade de algarismos pares e ímpares, então a quantidade de números pares e ímpares formados será a mesma, ou seja, há 24/2=12 números pares e 12 números ímpares com algarismos distintos utilizando os algarismos 1, 2, 3 e 4.

É provável que algum estudante pense que sempre é possível utilizar este raciocínio. Sendo assim, deve-se alertar que este raciocínio não pode ser utilizado quando um dos algarismos é zero, pois este não pode ocupar a posição de maior unidade, neste caso a de unidades de milhar porque senão formar-se-ia número de 3 algarismos e não 4. Mais adiante será elaborada uma pergunta na qual isto acontece para que fique claro aos estudantes o que não pode ocorrer na formação de números.

5) Quantos números ímpares de algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4?

Já se sabe que os estudantes tendem a aplicar o mesmo raciocínio nos problemas em geral. Sendo assim, a maioria utilizará a estratégia anterior para resolver este problema.

Porém, apesar de ser um raciocínio simples em Análise Combinatória, deve ser lembrado que sempre é possível contar as possibilidades desejadas se for retirada de todas as possíveis maneiras, as que são indesejadas. Isto é, é possível formar 24 números com algarismos distintos com os algarismos 1, 2, 3 e 4, sendo 12 destes números pares. Logo, há 24-12=12 números ímpares com algarismos distintos.

6) Como última pergunta, quantos números de quatro algarismos distintos é possível formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? Quantos destes números são pares?

Em relação à primeira pergunta, deve-se direcionar o estudante a pensar como formar o número. Preenche-se cada posição por vez analisando as possibilidades disponíveis. Porém, quando o algarismo 0 é uma das possibilidades há uma restrição implícita: se o algarismo das unidades de milhar for 0, então o número formado na verdade é de 3 algarismos. Sendo assim, deve-se garantir que este algarismo não ocupe a posição das unidades de milhar antes de preencher as outras posições, isto é, atender a este requisito antes de executar outra ação. Logo, temos:

$$\frac{9\ possibilidades\ (Não\ zero)}{Unidades\ de\ milhar}\quad \frac{9\ possibilidades}{Centenas}\quad \frac{8\ possibilidades}{Dezenas}\quad \frac{7\ possibilidades}{Unidades} \tag{6}$$

Dessa maneira há 9x9x8x7=4.536 números de quatro algarismos distintos.

Em relação à segunda pergunta, tem-se duas estratégias para resolver o problema:

1ª solução: Já que o número a ser formado deve ser par, então devemos primeiramente preencher a posição das unidades com algarismos pares. Pela solução anterior, deve-se também preencher a posição das unidades de milhar antes de formar o número para garantir que este seja de quatro algarismos. Porém, se o algarismo 0 for colocado na posição das unidades, o número de possibilidades para preencher a posição das unidades de milhar será 9 e, se não for o algarismo 0, então o número de possibilidades para preencher a posição das unidades de milhar será 8. Isto é, devemos contar as duas situações separadamente:

Ou o número formado termina com o algarismo 0:

$$\frac{9\ possibilidades}{Unidades\ de\ milhar}\quad \frac{8\ possibilidades}{Centenas}\quad \frac{7\ possibilidades}{Dezenas}\quad \frac{1\ possibilidade\ (0)}{Unidades} \tag{7}$$

Totalizando 9x8x7x1=504 números pares de algarismos distintos terminando com o algarismo 0.

Ou o número formado não termina com o algarismo 0:

$$\frac{8\ possibilidades (Não\ 0)}{Unidades\ de\ milhar}\quad \frac{8\ possibilidades}{Centenas}\quad \frac{7\ possibilidades}{Dezenas}\quad \frac{4\ possibilidades\ (2{,}4{,}6{,}8)}{Unidades}$$

Totalizando 8x8x7x4=1.792 números pares de algarismos distintos não terminando com o algarismo 0.

Portanto, há 1.792+504=2.296 números pares de quatro algarismos distintos.

2ª solução: Note que para formar números pares de algarismos distintos deve-se tomar o cuidado de não preencher a posição da maior unidade com o algarismo 0. Logo, deve-se separar em duas situações distintas para realizar esta contagem. Este raciocínio pode ser simplificado se ao invés de contar estas situações separadamente, contar os números ímpares de algarismos distintos e retirar esta quantidade do total, sobrando apenas os números pares de algarismos distintos.

Sendo assim, o número de quatro algarismos distintos ímpares são:

$$\frac{8\ possibilidades(Não\ 0)}{Unidades\ de\ milhar}\ \frac{8\ possibilidades}{Centenas}\ \frac{7\ possibilidades}{Dezenas}\ \frac{\begin{matrix}5\ possibilidades\\ (1,3,5,7\ ou\ 9)\end{matrix}}{Unidades} \quad (9)$$

Totalizando 8x8x7x5=2.240 números de quatros algarismos distintos ímpares. Como já foi contada a quantidade total de números de quatro algarismos distintos, 4.536, então há 4.536-2.240=2.296 números pares de quatro algarismos distintos. É importante ressaltar para os estudantes a importância de lembrar que todos os problemas de Análise Combinatória possuem pelo menos duas soluções. Contando diretamente o desejado ou conta o indesejado e retira da quantidade total. Este simples exemplo ilustra a praticidade destas duas possibilidades. O motivo para tal é que ao utilizar esta estratégia em alguns problemas complexos, pode-se obter a solução do mesmo simplesmente por se contar o oposto do que foi exigido pelo problema, uma vez que pode ser mais fácil realizar esta contagem.

Neste momento o professor deve formalizar o conceito de arranjo, que significa colocar *n* objetos distintos em *p* posições sendo que dois ou mais objetos não podem ocupar uma mesma posição. Utilizando o raciocínio semelhante ao formar números com algarismos distintos , tem-se:

$$\frac{n\ possibilidades}{1^a Posição}\ \frac{(n-1)\ possibilidades}{2^a Posição}\ \frac{(n-2)\ possibilidades}{3^a\ Posição} \cdots \frac{\begin{matrix}[n-(p-1)]\\ possibilidades\end{matrix}}{(P-ésima)Posição} \quad (10)$$

Totalizando $n.(n-1).(n-2)\ldots([n-(p-1)]$ possibilidades. Porém, por uma questão de compactação da escrita, multiplica-se o numerador e denominador por $(n-p)!$, obtendo-se:

$$n.(n-1).(n-2)\ldots([n-(p-1)].\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{n,p} \quad (11)$$

4.3 Atividade 3: Jogo das Bandeiras

4.3.1 Objetivo

Fazer com que os estudantes entendam o que é arranjo com repetição e apresentar uma estratégia de raciocínio para resolução de problema deste tipo.

4.3.2 Roteiro

Assim como mencionado anteriormente, deve-se separar os estudantes em grupos ou até mesmo individualmente. Após este passo é necessário explicar aos estudantes como o Jogo das Bandeiras funciona.

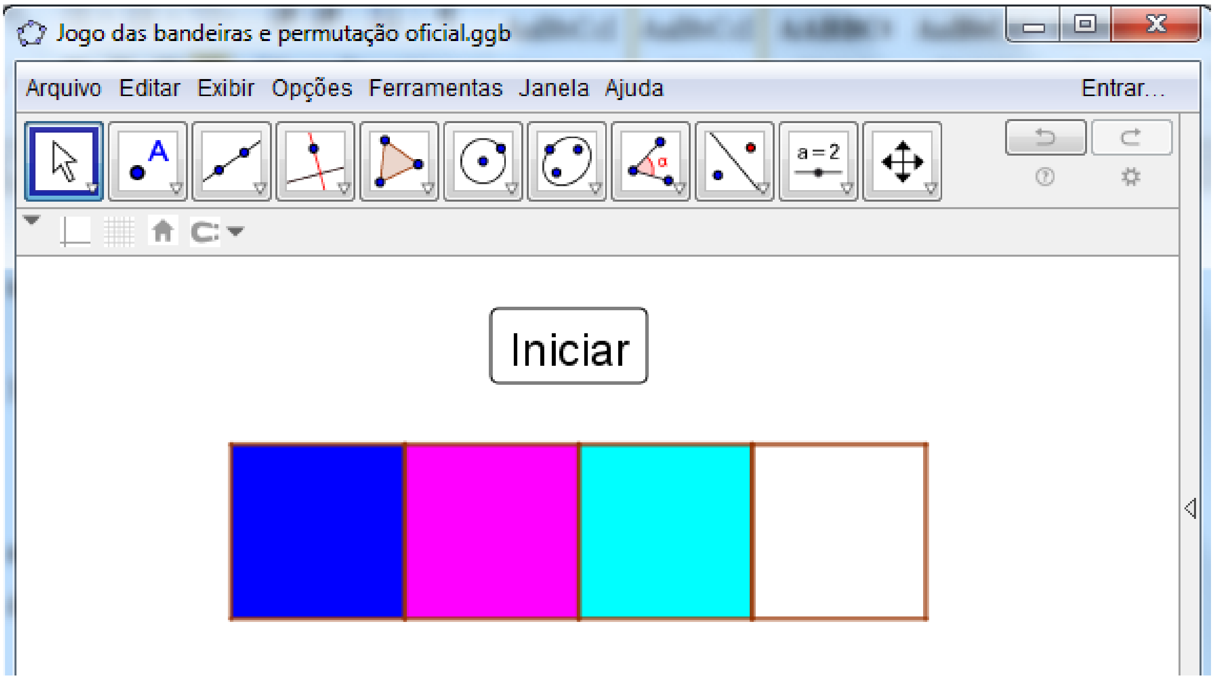


Figura 10: Jogo das Bandeiras - tela inicial
Fonte: Próprio Autor

A tela inicial deste jogo apresenta quatro quadrados ligados com um botão “Iniciar” na parte superior. Ao clicar neste botão as cores que aparecem em cada quadrado serão substituídas aleatoriamente por uma das cores azul, branco, rosa e verde. Este botão foi criado para que cada estudante ou grupo ao iniciar o jogo não fique focado no jogo que estiver com os outros colegas. Para trocar a cor de cada quadrado, basta clicar no interior do mesmo que a cor deste irá trocar. Por exemplo, ao clicar no interior do quadrado do lado esquerdo, a sequência de cores que aparecerá será:

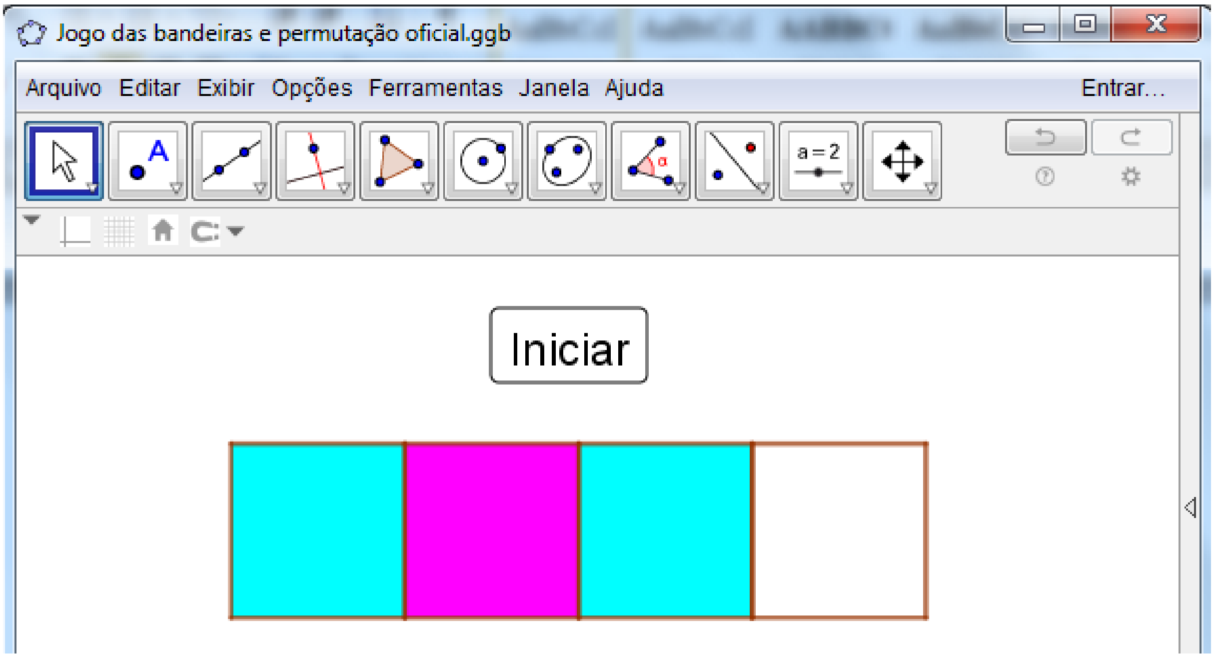


Figura 11: Jogo das Bandeiras - troca de cor de quadrado
Fonte: Próprio Autor

Uma vez explicado como trocar as cores de cada quadrado e como reiniciar o jogo, deve-se direcionar o estudante a lidar com um problema combinatório.

4.3.3. Problema combinatório de permutação com repetição

Considere que cada quadrado representa a faixa de uma bandeira que será elaborada para um novo país. Cada faixa pode ter as seguintes cores: azul, branco, rosa e verde. Considerando estas informações, pede-se aos estudantes que respondam às seguintes perguntas:

1) Se a bandeira a ser desenvolvida tiver que ter a cor azul na faixa da esquerda, então quantas bandeiras podem ser desenvolvidas?

Neste momento, é importante deixar os estudantes experimentarem o jogo até que entendam que ao pintar a primeira faixa de azul, depois basta escolher a cor das outras faixas. Isto é, qualquer uma das cores disponíveis, inclusive azul, podem ser utilizadas para as outras faixas. Logo, é possível elaborar 4 bandeiras distintas para este país começando com a cor azul.

2) Se a bandeira a ser desenvolvida tiver que ter as duas faixas centrais com a mesma cor e as faixas das extremidades também iguais, porém distintas das faixas centrais, então quantas bandeiras podem ser desenvolvidas para este novo país?

Neste momento, espera-se que o estudante crie uma estratégia para construir a bandeira. Por exemplo, primeiro escolhe-se uma cor para as faixas centrais e depois pinta-se as faixas das extremidades. Como exemplo tem-se:

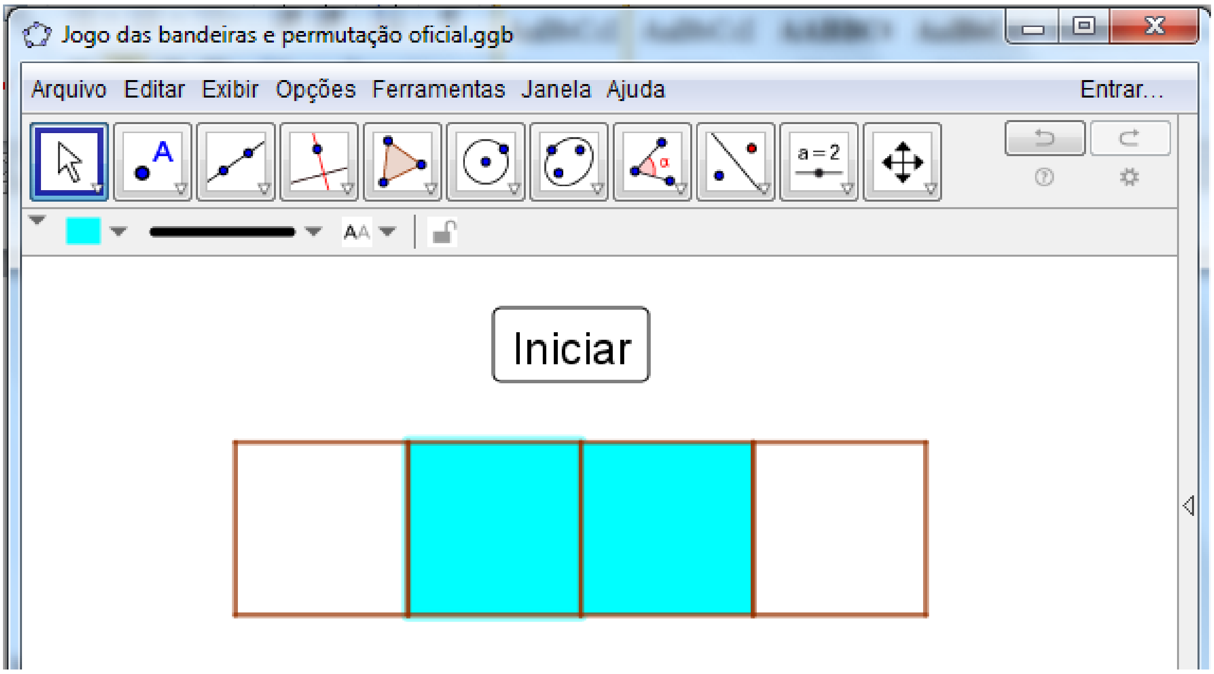


Figura 12: Jogo das Bandeiras - criando estratégias para construir a bandeira
Fonte: Próprio Autor

Sabendo que a faixa central é verde, o estudante deve agora pensar em quantas possibilidades há para pintar as faixas laterais. Neste caso, há 3 possibilidades já que não se pode repetir a cor. Como há 4 cores para primeiro pintar a faixa central, e para cada uma delas há 3 outras cores para pintar as laterais, então há 4x3=12 possíveis bandeiras a serem desenvolvidas atendendo ao requisito solicitado.

3) Quantas bandeiras podem ser desenvolvidas se as faixas não podem ter cores repetidas?

Apesar deste problema a princípio não ter ligação tanto com as pessoas sentando em poltronas ou com a formação de números com algarismos distintos, o raciocínio para solucionar é exatamente o mesmo. Deve-se avaliar uma faixa por vez, e em seguida avançar para a próxima faixa. Neste caso temos:

$$\frac{4\ possibilidades}{1^a Faixa} \quad \frac{3\ possibilidades}{2^a Faixa} \quad \frac{2\ possibilidades}{3^a\ Faixa} \quad \frac{1\ possibilidades}{4^a\ Faixa} \qquad (12)$$

Totalizando assim 4x3x2x1=24 possíveis bandeiras.

4) Quantas bandeiras podem ser desenvolvidas se a cor da faixa da esquerda deve ser distinta da faixa da direita?

Vale ressaltar que, apesar de ser possível elaborar todas as possibilidades através do jogo, não é interessante buscar a solução desta maneira uma vez que além de dispendiosa, fica difícil ter certeza que não deixou de listar algum caso. Assim como foi abordado anteriormente, deve-se primeiramente atender às restrições dos problemas. Neste caso, garantir que as cores das faixas das extremidades sejam de cores distintas. Portanto, estas devem ser pintadas antes das faixas centrais. Logo, temos:

$$\frac{4\ possibilidades}{Faixa\ da\ esquerda}\ \frac{4\ possibilidades}{2^{a} Faixa}\ \frac{4\ possibilidades}{3^{a}\ Faixa}\ \frac{\begin{array}{c}3\ possibilidades\\ (diferente\ da\ esquerda)\end{array}}{Faixa\ da\ direita} \quad (13)$$

Totalizando 4x4x4x3=192 bandeiras possíveis.

5) Quantas bandeiras podem ser desenvolvidas utilizando estas cores?

Após responder às perguntas anteriores, espera-se que o estudante já pense no processo de construir a bandeira isto é, pensando nas possibilidades em cada faixa. Logo, temos:

$$\frac{4\ possibilidades}{1^{a} Faixa}\ \frac{4\ possibilidades}{2^{a} Faixa}\ \frac{4\ possibilidades}{3^{a}\ Faixa}\ \frac{4\ possibilidades}{4^{a} Faixa} \quad (14)$$

Totalizando 4x4x4x4=256 bandeiras possíveis.

6) Quantas bandeiras podem ser desenvolvidas se esta deve possuir pelo menos uma cor repetida?

Como procedimento padrão, primeiramente deve-se atender ao requisito de repetir cor. Porém, a palavra "pelo menos" significa no mínimo, ou seja, a bandeira pode ter 2, 3 ou todas as cores repetidas. Esta última opção é até simples de contar mas 2 cores já se torna bem complexa, pois pode-se ter duas faixas com cores iguais e as outras distintas ou duas faixas com as mesmas cores e as outras duas também iguais e distintas entre si.

É importante lembrar que se a solução do problema é muito complexa, tem-se como possibilidade contar os casos indesejados: faixas com cores distintas. Isto é, se retirar de todas as possíveis bandeiras aquelas que possuem todas as faixas com cores distintas, então sobrará faixas com pelo menos uma cor repetida, que é bem mais simples a contagem e, consequentemente, a obtenção da solução do problema. Logo, o total de bandeiras com pelo menos duas cores distintas é 256-24=232 bandeiras possíveis.

Neste momento, o professor deve formalizar o conceito de arranjo com repetição, que significa colocar *n* objetos em *p* sequência sendo que estes podem aparecer em mais de uma posição. Utilizando o raciocínio semelhante ao da formação de bandeiras em que as faixas podem ter cores repetidas, tem-se:

$$\frac{n\ possibilidades}{1^{a} Posição}\ \frac{n\ possibilidades}{2^{a} Posição}\ \frac{n\ possibilidades}{3^{a}\ Posição} \cdots \frac{n\ possibilidades}{(P - ésima) Posição} \quad (15)$$

Totalizando,

$$\underbrace{n.n.n.n\ldots n}_{p\ vezes} = n^p \tag{16}$$

4.4 Atividade 4: Jogo do Quadro

4.4.1 Objetivo

Fazer com que os estudantes entendam o que é permutação circular e apresentar uma estratégia de raciocínio para solucionar problemas deste tipo.

4.4.2 Roteiro

Assim como mencionado anteriormente, deve-se separar os estudantes em grupos ou até mesmo individualmente. Após este passo, é necessário explicar aos estudantes como o Jogo do Quadro, apresentado na Figura 13, funciona.

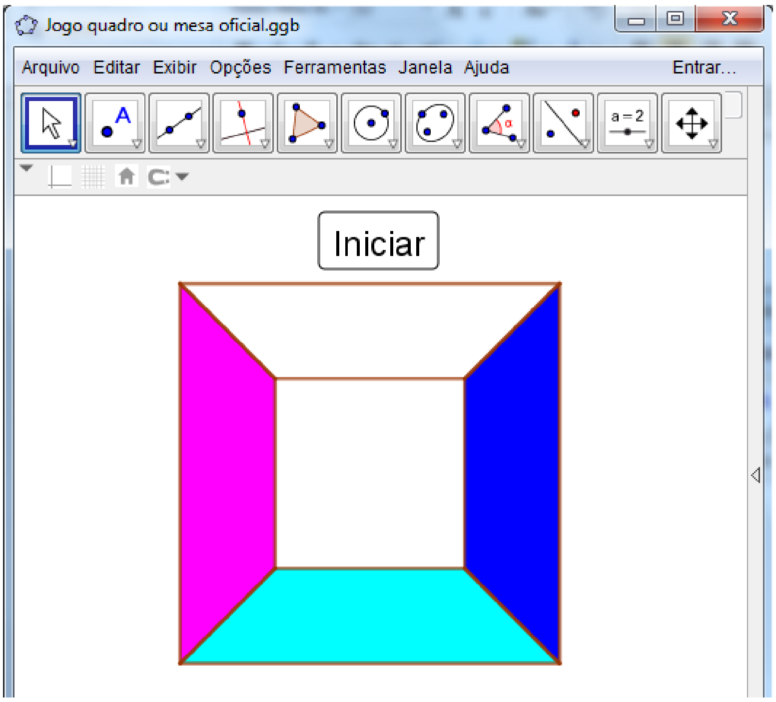


Figura 13: Jogo do Quadro - tela inicial
Fonte: Próprio Autor

A tela inicial deste jogo apresenta quatro trapézios ligados com um botão "Iniciar" na parte superior. Ao clicar neste botão as cores que aparecem em cada trapézio serão substituídas aleatoriamente por uma das cores azul, branco, rosa e verde. Este botão foi criado para que cada estudante ou grupo ao iniciar o jogo não fique focado no jogo que estiver com os outros colegas. Para trocar a cor de cada trapézio, basta clicar no interior do mesmo que sua cor será trocada. Por exemplo, ao clicar no interior do trapézio do lado esquerdo, a sequência de cores que aparecerá poderá ser a que está apresentada na Figura 14:

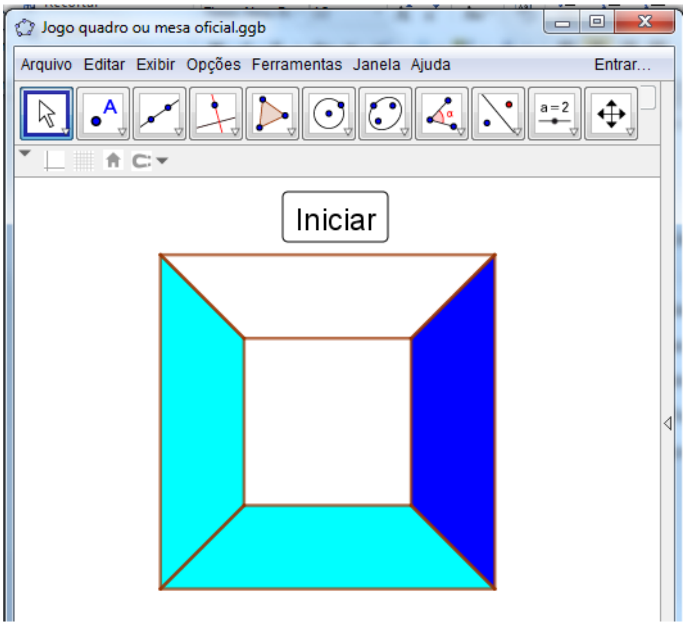


Figura 14: Jogo do Quadro - mudança de cor
Fonte: Próprio Autor

Uma vez explicado como trocar as cores de cada trapézio e como reiniciar o jogo, deve-se direcionar o estudante a lidar com um problema combinatório.

4.4.3 Problema combinatório de permutação circular

Uma pessoa possui um quadro no formato retangular e decidiu reformá-lo. Este quadro é formado pelo encaixe de quatro molduras em formatos de trapézios por suas extremidades. Para reformar este quadro, esta pessoa pintará cada moldura utilizando uma das quatro cores: azul, branco, rosa e verde. Considerando estas informações, pede-se aos estudantes que respondam às seguintes perguntas:

1) Se a pessoa deseja pintar todas as molduras com a mesma cor, então de quantas maneiras é possível pintar o quadro?

Neste momento, é importante deixar os estudantes experimentarem o jogo até que entendam que ao pintar a primeira moldura, determina a cor das outras molduras também. Isto é, há quatro possibilidades para pintar a primeira moldura. Portanto, há quatro maneiras distintas de pintar este quadro com a mesma cor.

2) Suponha que o quadro esteja fixado em uma parede e que para deixar este quadro com um aspecto moderno, todas as molduras terão a mesma cor, exceto a moldura da parte inferior do quadro. De quantas maneiras distintas é possível reformar este quadro?

Como este é o quarto jogo, espera-se que os estudantes, ao abordarem este problema tentem criar uma estratégia para resolver o mesmo utilizando o próprio jogo. Por exemplo, primeiramente pintar a moldura da parte inferior e depois pintar as outras molduras que serão da mesma cor, como mostrado na Figura 15.

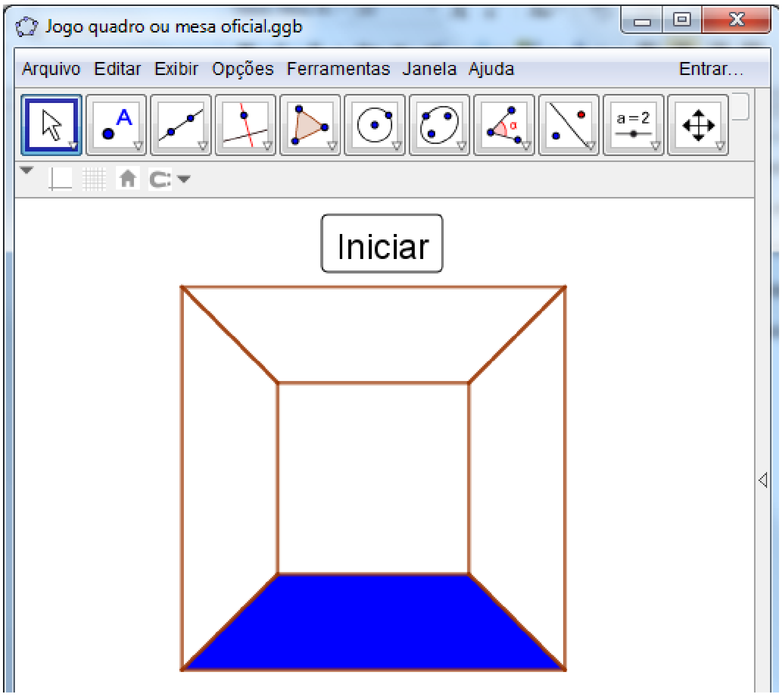


Figura 15: Jogo do Quadro - fixando a cor de uma moldura
Fonte: Próprio Autor

Considerando esta estratégia, ao pintar a moldura inferior, restará 3 possibilidades de cores para pintar as molduras restantes, uma vez que a cor não pode ser a mesma. Como há 4 possibilidades de cor para pintar a primeira moldura, então há um total de 4x3=12 maneiras distintas de pintar este quadro.

3) Suponha que o quadro esteja fixado em uma parede e que para deixar este quadro com um aspecto moderno, as molduras opostas terão a mesma cor. De quantas maneiras distintas é possível reformar este quadro?

Novamente, espera-se que o estudante crie uma estratégia para atender ao requisito do problema e não simplesmente tente listar todas as possibilidades. Por exemplo, se o estudante pintar a moldura inferior, a cor da moldura superior também já foi escolhida, pois deve ser a mesma. Resta apenas pintar duas molduras que devem ser da mesma cor. Já que a cor destas duas molduras deve ser diferente das que já foram pintadas, então restam 3 possibilidades de escolha desta. Totalizando assim 4x3=12 possíveis maneiras de pintar este quadro. É interessante que o professor mostre essas possibilidades através do jogo e frise que a estratégia de contar sem ter que listar é mais rápida de se obter e garanta que não se esqueçam de nenhuma possibilidade.

4) Suponha que o quadro esteja fixado em uma parede e que para deixar este quadro com um aspecto moderno, todas as molduras terão cores distintas. De quantas maneiras distintas é possível reformar este quadro?

Considerando que os estudantes já tenham feito as atividades anteriores, espera-se que o estudante tente criar uma estratégia de contagem ao invés de listar todas as possibilidades. É importante que o professor mostre que este problema possui a mesma solução do problema em que há quatro pessoas sentando em quatro poltronas em uma fila de cinema. Isto é, um problema que não tem nada em comum com o outro, possui exatamente a mesma solução. Sendo assim, para pintar a moldura inferior, há 4 possibilidades. Uma vez que as cores são distintas, para cada nova moldura há menos uma possibilidade de escolha de cor. Portanto, há 4x3x2x1=24 maneiras distintas de pintar este quadro.

5) Suponha agora que este quadro não esteja fixado mais em uma parede e que este deve ser pintado utilizando cores distintas. De quantas maneiras distintas é possível reformar este quadro?

É importante deixar os estudantes discutirem a respeito desta pergunta. Num primeiro momento, sem uma análise cuidadosa, pensa-se que a solução é a mesma da pergunta anterior. Porém, os dois problemas possuem uma importante diferença: ter uma referência para a posição das cores na pergunta anterior. Quando o quadro está fixado na parede, fica claro que faz diferença quando se pinta o mesmo nas seguintes cores, apresentadas nas Figuras 16 e 17:

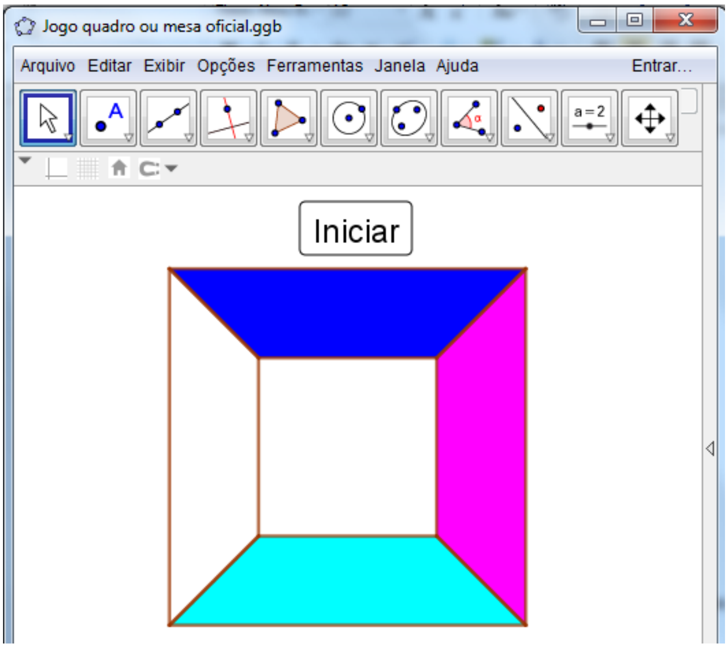


Figura 16: Jogo do Quadro - diferença com quadro fixado na parede modo 1
Fonte: Próprio Autor

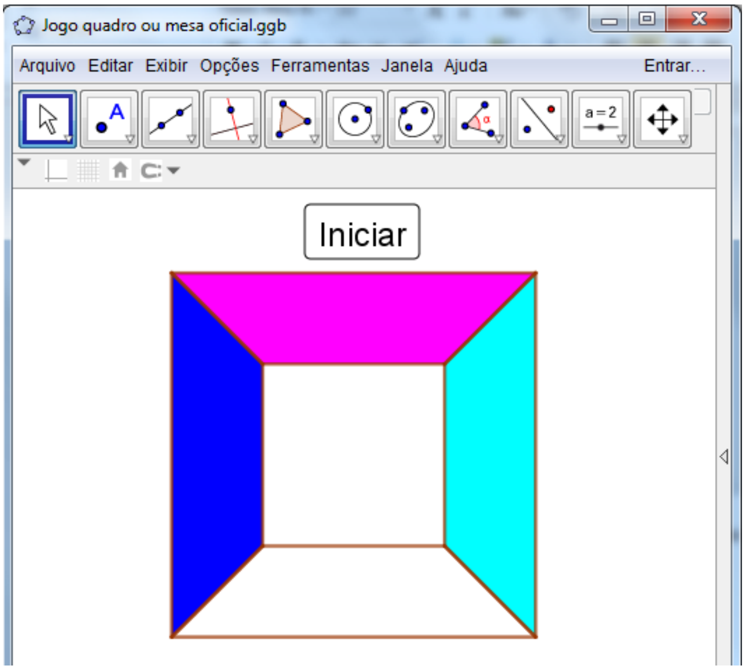


Figura 17: Jogo do Quadro - diferença com quadro fixado na parede modo 2
Fonte: Próprio Autor

Porém, se o quadro não estiver mais fixado na parede, ou seja, não tiver mais uma referências, estas duas formas de pintar representam a mesma, pois o quadro foi apenas rotacionado em torno de seu centro. Na verdade, há mais possíveis rotações em torno do centro do quadro que se tornam pinturas idênticas. Por se tratar do primeiro contato dessa situação pelos estudantes, é interessante que o professor mostre as outras possibilidades, que são:

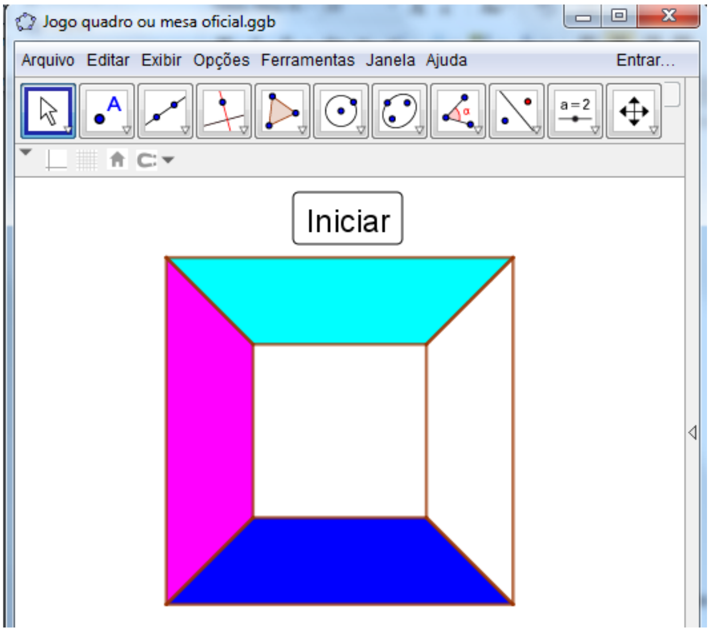


Figura 18: Jogo do Quadro - diferença com quadro fixado na parede modo 3
Fonte: Próprio Autor

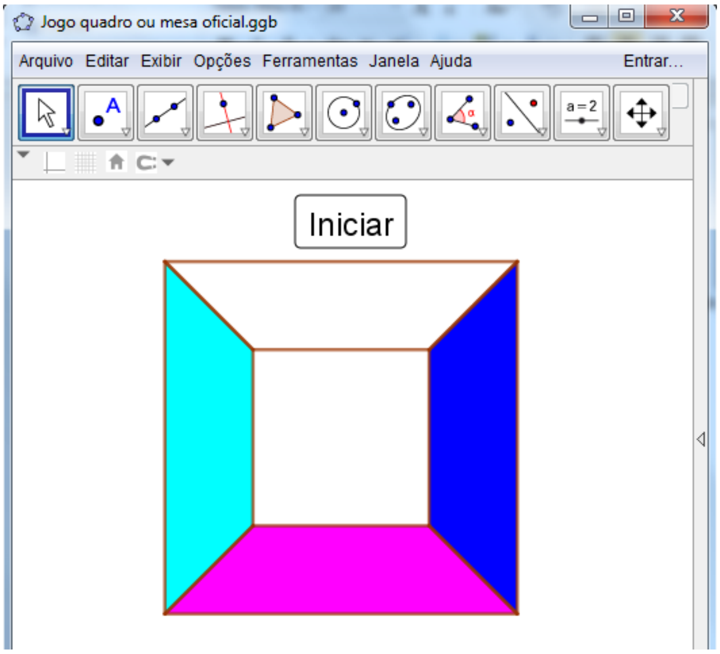


Figura 19: Jogo do Quadro – diferença com quadro fixado na parede modo 4
Fonte: Próprio Autor

Após mostrar esta diferença, conforme Figura 18 e 19, deve-se mostrar uma estratégia de contagem para este tipo de problema. Num primeiro momento, desconsidera-se que as rotações em torno do centro geram o mesmo quadro. Isto é, conta-se as possibilidades como se o quadro estivesse fixado na parede. Como esta pergunta já foi respondida anteriormente, há 4x3x2x1=24 possíveis maneiras distintas de pintar o quadro fixado na parede. Porém, esta quantidade de possibilidades precisa ser corrigida devido às rotações em torno do centro, que neste caso são 4. Portanto, quando o quadro não está fixado na parede há 4x3x2x1/4=3x2x1=6 maneiras distintas de pintar o quadro.

Neste momento, o professor deve formalizar o conceito de permutação circular, que é sentar n pessoas em uma mesa redonda com n cadeiras sendo que cada pessoa ocupa apenas um lugar. Uma possível estratégia para contar estes casos é a mesma utilizada na contagem dos quadros não fixados em paredes. Isto é, considera-se que há n cores para pintar um quadro com n molduras, sendo que tais cores são distintas e não podem se repetir nas molduras. Assim tem-se:

$$\frac{n\ possibilidades}{1^a\ Moldura}\ \frac{(n-1)\ possibilidades}{2^a\ Moldura}\ \frac{(n-2)\ possibilidades}{3^a\ Moldura} \cdots \frac{1\ possibilidade}{(n-ésima)Moldura} \quad (17)$$

Totalizando $n!$ possíveis maneiras de pintar a moldura. Porém, deve-se corrigir a contagem das possibilidades de rotações em torno do centro. Como há n posições, há n possíveis rotações em torno do centro gerando uma mesma pintura. Portanto, há

$$n!/n=(n\text{-}1)!=P_{c(n)} \quad (18)$$

maneiras distintas de sentar n pessoas em uma mesa circular com n cadeiras sendo que cada pessoa ocupa apenas uma cadeira.

4.5 Atividade 5: Jogo dos Polígonos

4.5.1 Objetivo

Fazer com que os estudantes entendam o que é combinação e apresentar uma estratégia de solução de problemas deste tipo.

4.5.2 Roteiro

Assim como mencionado anteriormente, deve-se separar os estudantes em grupos ou até mesmo individualmente. Após este passo, é necessário explicar aos estudantes como o Jogo dos Polígonos funciona.

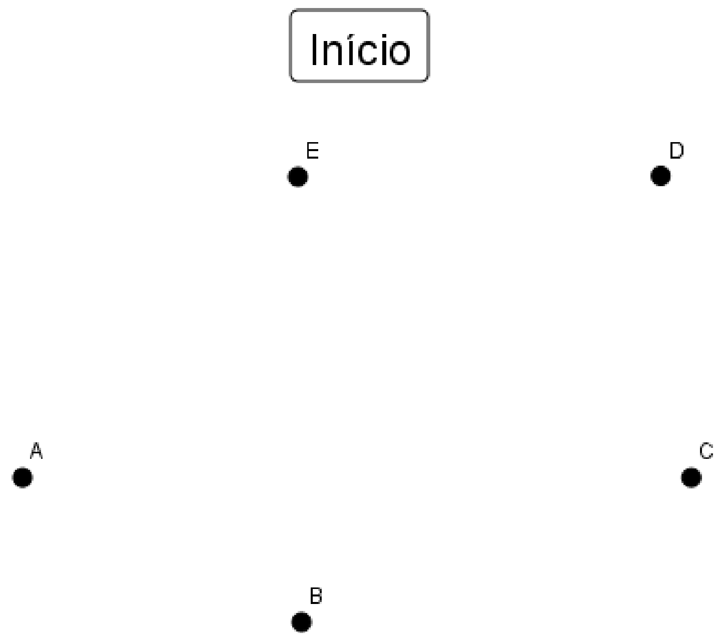


Figura 20: Jogo dos Polígonos - tela inicial
Fonte: Próprio Autor

A tela inicial deste jogo apresenta cinco pontos em um plano, sendo que não há 3 ou mais pontos colineares e há um botão “Iniciar” na parte superior. Para formar um segmento, basta posicionar o mouse sobre a direção do segmento e clicar com o botão esquerdo sobre a posição deste segmento. Por exemplo, para formar o segmento $\overline{AB}$ clica-se na direção de $\overline{AB}$ que o mesmo aparecerá conforme figura 21:

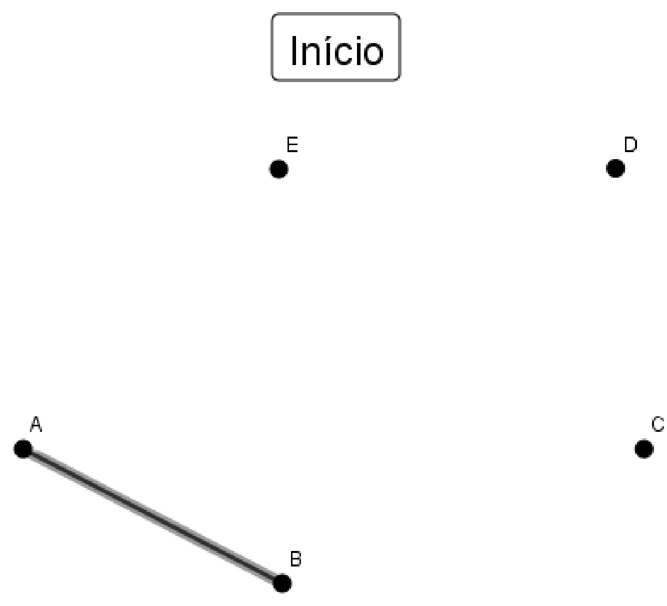


Figura 21: Jogo dos Polígonos - formando um segmento
Fonte: Próprio Autor

Para apagar o segmento, também deve-se clicar sobre o mesmo que este apagará. Diferentemente dos outros jogos, ao clicar no botão “Iniciar”, todos os segmentos serão apagados, pois a ideia do jogo é formar polígonos. Agora que já foi explicado como formar segmentos, deve-se direcionar o estudante a lidar com um problema combinatório.

4.5.3 Problema combinatório de combinação

Considere cinco pontos A, B, C, D e E em um plano sendo que não há 3 ou mais pontos colineares. Deve-se formar polígonos através da ligação de segmentos formados pelos cinco pontos citados anteriormente. Considerando estas informações, pede-se aos estudantes que respondam às seguintes perguntas:

1) Quantos pentágonos convexos é possível formar com estes cinco pontos?

Neste momento, é importante deixar os estudantes experimentarem o jogo até que entendam que para formar um pentágono convexo é necessário ter cinco segmentos. Como é possível formar no máximo cinco segmentos com interseção apenas nas extremidades, então é possível formar apenas um pentágono convexo com esses pontos, conforme Figura 22 abaixo.

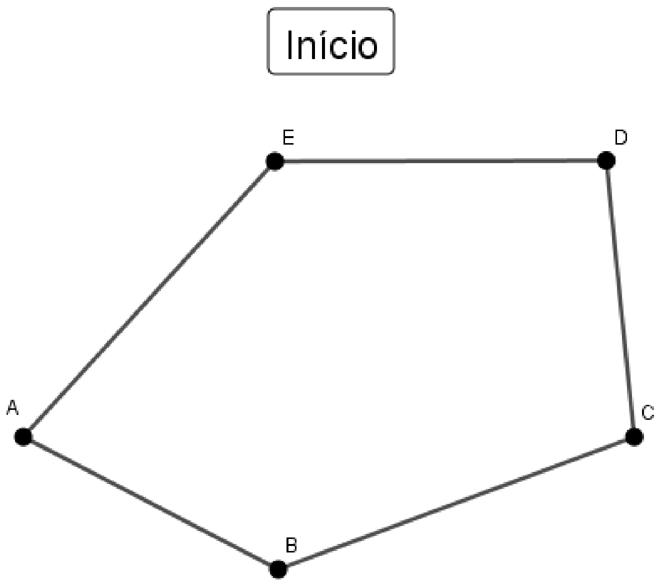


Figura 22: Jogo dos Polígonos - pentágono convexo
Fonte: Próprio Autor

Porém, a intenção deste jogo é fazer com que os estudantes entendam o que é combinação. Sendo assim, o professor deve instigar os estudantes com a pergunta: para formar o pentágono convexo, faz alguma diferença por qual lado se inicia a formação do mesmo?

Por exemplo, para formar o pentágono da Figura 22 (ABCDE), gera-se um resultado diferente se a formação deste iniciar pela ligação do segmento $\overline{AB}$, depois ligar o segmento $\overline{BC}$, depois ligar o segmento $\overline{CD}$, depois ligar o segmento $\overline{DE}$ e por fim o segmento $\overline{EA}$ ou se a formação iniciar pela ligação do segmento $\overline{AE}$, depois ligar o segmento $\overline{ED}$, depois ligar o segmento $\overline{DC}$, depois ligar o segmento $\overline{CB}$ e por fim o segmento $\overline{BA}$?

Como o pentágono é o mesmo, então não faz diferença a sequência de formação dos segmentos desde que os segmentos sejam os mesmos. Assim, o professor deve explicar aos estudantes como é feita a contagem das possibilidades neste tipo de problema. Conta-se como se fizesse diferença a formação do polígono através da sequência dos segmentos, e depois corrige-se a contagem retirando a ordenação. Neste caso, há cinco segmentos para formar o pentágono convexo. Logo, se levar em consideração que faz diferença a ordenação dos 5 segmentos, há 5x4x3x2x1=5! maneiras distintas de construir este polígono. Agora deve-se retirar a ordenação dos segmentos para construção do polígono. Para cada cinco segmentos há 5x4x3x2x1=5! maneiras de se ordenar a construção de um polígono. Logo, a quantidade de pentágonos convexos é 5!/5!=1.

2) Quantos quadriláteros convexos é possível formar com estes cinco pontos?

Pela pergunta anterior, espera-se que os estudantes já saibam que ao ligar quatro pontos quaisquer é possível formar um quadrilátero convexo. Como há cinco pontos, então basta escolher quatro destes para que se forme quatro segmentos. Assim, considerando a mesma estratégia do problema anterior, tem-se:

$$\frac{5\ possibilidades}{1^{\underline{o}}\ Ponto}\ \frac{4\ possibilidades}{2^{\underline{o}}\ Ponto}\ \frac{3\ possibilidades}{3^{\underline{o}}\ Ponto}\ \frac{2\ possibilidades}{4^{\underline{o}}\ Ponto} \qquad (19)$$

Totalizando 5x4x3x2=5x4x3x2x1=5! maneiras distintas de se formar um quadrilátero convexo considerando que faz diferença a sequência das escolhas dos quatro segmentos. Como isto não é verdade para a formação de um polígono, agora deve-se corrigir essa contagem. Isto é, para cada quatro pontos escolhidos, é possível colocá-los em 4x3x2x1=4! sequências de segmentos distintas formando o mesmo quadrilátero convexo. Logo, a quantidade real de quadriláteros convexos possível de se formar utilizando os pontos A, B, C, D e E será 5!/4!=5.

É importante que o professor mostre aos estudantes a vantagem desta estratégia de raciocínio. Num primeiro momento não parece ser uma escolha sábia mas quando se aumenta o número de pontos para formar os polígonos convexos, torna-se muito complexa a listagem de todos os possíveis casos e, além disso, o tempo necessário para executar este procedimento torna-se muito dispendioso. Vale ressaltar que o propósito da Análise Combinatória é contar o número de possibilidades sem ter que listar todas estas possibilidades. É interessante que o professor também mostre quais são os possíveis quadriláteros convexos formados utilizando estes 5 vértices: ABCD, ABCE, ABDE, ACDE e BCDE.

Novamente, deve-se perguntar aos estudantes se há outra estratégia de raciocínio para este problema. Como há cinco pontos e para formar o quadrilátero convexo, necessita-se de apenas quatro destes. Então, outra maneira de contar quantos quadriláteros convexos existem, basta excluir um dos cinco pontos que restará exatamente quatro pontos, que forma-se exatamente um quadrilátero convexo. Assim, há cinco possíveis pontos a serem excluídos e, portanto, há cinco maneiras distintas de se formar um quadrilátero convexo com estes cinco pontos.

3) Quantos triângulos é possível formar com estes cinco pontos?

Considerando a estratégia utilizada para resolver os exercícios anteriores, espera-se que os estudantes pensem de maneira semelhante. Isto é, considerem que faça diferença a construção de um triângulo pela sequência dos segmentos e, em sequência, corrijam o resultado obtido retirando a ordenação na formação dos triângulos.

Sabendo que para formar um triângulo é necessário ter três segmentos, ou seja, é necessário ter três pontos, então o total de possibilidades de escolhas dos vértices considerando que a ordenação dos segmentos gere triângulos distintos será:

$$\frac{5\ possibilidades}{1^{\text{o}}\ Ponto}\ \frac{4\ possibilidades}{2^{\text{o}}\ Ponto}\ \frac{3\ possibilidades}{3^{\text{o}}\ Ponto} \qquad (20)$$

Totalizando 5x4x3 maneiras distintas de formar triângulos, considerando que sequências distintas dos segmentos geram triângulos distintos. Porém, sabe-se que isto não é verdade, e, portanto, deve-se corrigir a contagem sabendo que não importa por qual segmento se inicie a construção do triângulo - se os segmentos são os mesmos, então o triângulo também será o mesmo. Como as possíveis sequências de cada trio de segmentos são iguais a 3x2x1, então o total de triângulos que são possíveis de se formar com os pontos A, B, C, D e E é 5x4x3/3x2x1=10.

Neste momento, o professor deve formalizar o conceito de combinação, que é agrupar *p* objetos dentre um total de *n* objetos sendo que não pode haver objetos repetidos neste agrupamento. Note que a palavra agrupar já simboliza que não há distinção da ordenação dos objetos escolhidos para o agrupamento. Isto é, o primeiro objeto escolhido também pode ser o último escolhido, e a composição do agrupamento será a mesma. Uma possível estratégia para contar estes casos é a mesma utilizada na contagem das possíveis maneiras de se formar um polígono, ou seja, conta-se as possibilidades considerando que a ordenação dos objetos faz diferença para formar o agrupamento e depois corrige-se a contagem retirando a ordenação dos objetos.

Desta maneira, se há *n* pontos em um plano sendo que não há três ou mais pontos colineares. Então o total de maneiras para formar um polígonos convexos de *p* lados considerando que faz diferença a sequência dos lados para a formação do polígono será:

$$\frac{n\ possibilidades}{1^{\underline{o}}\ Ponto}\ \frac{(n-1)\ possibilidades}{2^{\underline{o}}\ Ponto}\ \frac{(n-2)\ possibilidades}{3^{\underline{o}}\ Ponto} \cdots \frac{[n-(p-1)]\ possibilidades}{P - \acute{e}simo\ Ponto} \quad (21)$$

Obtendo-se um total de *n* x (*n-1*) x (*n-2*) x ...x [n-(p-1)] maneiras distintas. Porém, sabe-se que não importa por qual segmento se inicie a formação do polígono, que este será o mesmo desde que os segmentos sejam os mesmos. Logo, deve-se corrigir a contagem das possibilidades. Para tal, deve-se obter quantas são as sequências possíveis de se formar um polígono de *p* lados com *p* segmentos. Isto é o mesmo que permutar *p* objetos, que é igual a *p*!. Assim, o total de maneiras de se agrupar *p* objetos de um total de *n* objetos será

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{p!} \quad (22)$$

Por uma questão de compactação da escrita da solução, multiplica-se o numerador e denominador por *(n-p)*!. Portanto, o resultado será:

$$\frac{n.(n-1).(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{p!}.\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!} = C_{n,p} \quad (23)$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo os PCN’s, espera-se que o ensino de Análise Combinatória proporcione o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Isto é, o estudante deve “decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas” (BRASIL, 2006 p.126). Porém, o que foi verificado neste trabalho é que, na maioria das escolas, o tema em questão não é ensinado com este propósito. Alguns professores preferem não lecionar no segundo ano do Ensino Médio, pois é neste momento que os estudantes devem aprender Análise Combinatória. E se não houver opção, focam na utilização de fórmulas, o que contradiz as diretrizes dos PCN’s.

Esta forma de ensino acarreta na tipificação de problemas, levando o estudante a tentar resolver problemas pensando em “qual fórmula devo aplicar?”. Conforme exposto nas sequências didáticas no Capítulo 3, as fórmulas são apenas uma forma compacta de se escrever a solução do problema e não são a solução do problema. O foco durante a abordagem de qualquer problema deveria ser: qual estratégia devo utilizar para atender os requisitos e conseguir contar as possibilidades sem ter que listar todos os casos?.

Pensando nesta pergunta, desenvolveu-se as cinco sequências didáticas abordando alguns dos principais conteúdos de Análise Combinatória: Arranjo, Arranjo com Repetição, Combinação, Permutação e Permutação Circular. O objetivo das sequências didáticas é propiciar ao estudante uma possível estratégia de raciocínio ao abordar problemas combinatórios que envolva(m) algum(ns) dos conteúdos citados anteriormente, sem que este tente primeiramente utilizar alguma das fórmulas apresentadas antes de pensar em como atender aos requisitos do problema. Pois, novamente, a fórmula não resolve o problema mas sim compacta a escrita da solução do mesmo.

Em relação à escolha de uma sequência didática utilizando recurso computacional, primeiramente sabe-se que os estudantes atualmente estão intimamente ligados à tecnologia. Quase todos possuem *smartphone* ou acesso a computador seja em casa ou nas próprias escolas. Dessa forma, é possível aplicar a sequência didática de várias maneiras alternativas, seja pelo uso dos próprios celulares dos estudantes ou pelo laboratório das escolas, caso este exista. Segundo, há professores de Matemática que lecionam no segundo ano do Ensino Médio a Análise Combinatória inicialmente através de jogos concretos. Estes professores encontram dificuldades, uma vez que os estudantes cada vez mais têm menos interesse na utilização dos jogos concretos como forma de aprendizado. Um dos motivos é que eles precisam utilizar jogos diferentes ao mesmo e, às vezes, para eles é difícil construir os objetos dos jogos buscando determinar todas as possibilidades possíveis. Devido ao dinamismo do *software* GeoGebra, que é uma de suas grandes qualidades, é possível até criar competição entre os estudantes e/ou grupos motivando os mesmos a tentarem responder as atividades de cada sequência didática proposta neste trabalho e, consequentemente, atingir o objetivo que é propiciar uma maneira alternativa de ensino de Análise Combinatória sem foco na utilização de fórmulas.

Em relação à escolha do *software*, GeoGebra, um dos principais motivos é a sua livre distribuição. Deste modo torna-se mais fácil o acesso por qualquer pessoa, sendo este professor ou estudante. Além disso, é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino reunindo várias áreas da ciência.

Vale ressaltar que a proposta deste trabalho é introduzir Análise Combinatória com o uso das sequências didáticas apresentadas. O motivo para tal é que desta forma o estudante tente pensar em estratégias de raciocínio combinatório ao abordar um problema. É evidente que os problemas aqui abordados são poucos e sem grande complexidade. Mas é importante que o professor mostre aos estudantes que outros problemas que aparentemente são completamente diferentes, possuem a mesma estratégia de solução. Por exemplo, a formação das bandeiras com cores distintas e a formação de números com algarismos distintos possuem a mesma estratégia de solução. Levando isto em consideração, sugere-se como trabalhos futuros a criação de jogos interativos que abordem outros temas de Análise Combinatória que não foram abordados aqui e também a criação de problemas mais complexos em que seja possível se obter a resolução nos respectivos jogos ou que seja possível mostrar uma estratégia de raciocínio através do mesmo.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGE, C. **Principles of Combinatorics.** Tradução de John Sheehan. New York: Academic Press, 1971. p.1-11.

BORBA, R.E.S.R; ROCHA, C.A.; AZEVEDO, JULIANA. **Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica.** Bolema, Rio Claro, São Paulo, v.29, n.53, p. 1348-1368, dez 2015.

BOSE, R.C.; MANVEL, B. (RajChandra). **Introduction to combinatorial theory.**New York: Wiley, 1984.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, D. F.: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática**. Brasília, D. F.: MEC/SEF, 1998.

CALISTI, A.S. **O estudo da Análise Combinatória na estratégia de resolução de problemas: uma abordagem sem o uso de fórmulas.** Paraná, 2016.

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA – PUC SP. **Sobre o GeoGebra.** Disponível em: < https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html> Acesso em 30 set 2019

FILHO, H.S.G. **O jogo senha como recurso didático para o ensino de métodos de contagem**, 2016, 76 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da terra) – Universidade Federal do Norte Fluminense – Campus dos Goytacazes, Rio de Janeiro.

GONÇALVES, R.R.S. **Uma abordagem alternativa para o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio,** 2014, 111 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da terra) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

GUIA DO ESTUDANTE. **As questões que tiveram mais erros no ENEM 2017 por área.** Disponível em: <https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/as-questoes-que-tiveram-mais-erros-no-enem-2017-por-area/> Acesso em 28 abr 2019

LOPES, J.M.; REZENDE, J.C.; **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade**, Revista Bolema, Agosto 2010, v.3 n°36.

MALAGUTTI, P.L.A.; VÁSQUEZ, C.M.R.; **Atividades Experimentais de Análise Combinatória no Ensino Médio em uma Escola Estadual.** São Carlos , São Paulo, 2010.

MARTINS, G.G. **Ensino de Análise Combinatória: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus**, 2018, 111 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da terra) – Universidade Federal do Espírito Santo – São Mateus, Espírito Santo.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**: com as soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MORGADO, A. C. de O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, C.A.L.S. **Análise Combinatoria: Raciocínio recursivo e processos de enumeração.** 2015, 104 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da terra) – Universidade Estadual do Norte Fluminense - Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro.

PEREIRA, G.N. **Proposta de Oficinas Didáticas para o ensino de Análise Combinatória utilizando traços da investigação Matemática como método de ensino**, 2017, 48f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e da terra) – Universidade Estadual de Santa Cruz – Ilhéus, Bahia.

VAZQUEZ, C. M. R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades Orientadoras em uma Escola Estadual do Interior Paulista.** Tese (Mestrado em ciências exatas) — Ufscar, 2011.

UFVJM