UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
– PROFMAT

Simone da Silva Martins

UMA ABORDAGEM PARA O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS NO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Santa Maria, RS

2019

Simone da Silva Martins

UMA ABORDAGEM PARA O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS NO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria - UFSM, RS, como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Orientadora: Profª Drª. Luciane Gobbi Tonet

Coorientadora: Profª Drª. Fabiane Cristina Höpner Noguti

Santa Maria, RS
2019

Simone da Silva Martins

UMA ABORDAGEM PARA O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS NO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, da Universidade Federal de Santa Maria - UFSM, RS, como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 30 de agosto de 2019

Luciane Gobbi Tonet

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Fabiane C. Höpner Noguti

Fabiane Cristina Höpner Noguti, Dra. (UFSM)
(Coorientadora)

Janice Rachelli

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)

Vitalino Cesca Filho

Vitalino Cesca Filho, Dr. (Unipampa)

Santa Maria, RS
2019

RESUMO

UMA ABORDAGEM PARA O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS NO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

AUTORA: Simone da Silva Martins
ORIENTADORA: Luciane Gobbi Tonet
COORIENTADORA: Fabiane Cristina Höpner Noguti

Este trabalho apresenta uma sugestão de atividade que aborda o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas no Ensino Fundamental. O objetivo é mostrar como um dos conteúdos estudados no Mestrado Profissional de Matemática pode ser aplicado no Ensino Fundamental, que é o público atendido pela autora deste trabalho, trazendo benefícios para as aulas e consequentemente para o aprendizado dos alunos. A dificuldade dessas atividades aumenta gradualmente de forma que a primeira utiliza material concreto, a segunda está relacionada com questões do cotidiano dos alunos e exigem abstração e, a terceira e última atividade, é um desafio bem mais complexo. A forma como essas atividades foram executadas em uma turma de nono ano do Ensino Fundamental em uma escola pública municipal de Porto Alegre - RS e os resultados apresentados pelos alunos são expostos e analisados no decorrer desta dissertação. Encerra-se o trabalho concluindo-se que as atividades atingiram seus objetivos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Princípio da Casa dos Pombos. Resolução de Problemas.

ABSTRACT

AN APPROACH TO THE PIEGEONHOLE PRINCIPLE IN ELEMENTARY SCHOOL THROUGH THE PROBLEM SOLVING

AUTHOR: Simone da Silva Martins
ADVISOR: Luciane Gobbi Tonet
COORIENTATION: Fabiane Cristina Höpner Noguti

This work presents a suggested activity that addresses the Pigeonhole Principle by solving problems in Elementary School. The goal is to show how a content studied in Master's degree in Mathematics can be performed in Elementary School, which is attended by the author of this work, bringing benefits to the school and consequently for learning students. The difficulty of these activities increases gradually so that the first uses concrete material, the second is related to everyday issues and requires abstraction and, the third and last activity, is a much more complex challenge. How these activities were performed in a class of ninth grade of Elementary School in a public school in Porto Alegre - RS and the results presented by the students are exposed and analyzed in the course of this dissertation. This work is closed concluding that the activities have reached their goals.

Keywords: Math Education. Pigeonhole Principle. Problem Solving.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No decorrer do Mestrado Profissional em Matemática foram abordados diversos tópicos da Matemática como Cálculo, Geometria e Aritmética. O objetivo principal desse trabalho de dissertação é apresentar como um desses conteúdos desenvolvidos no curso pode ser trabalhado no Ensino Fundamental.

O motivo de se elaborar uma atividade para o Ensino Fundamental se deve ao público que é atendido pela autora desse trabalho. Formada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS, sempre atuou no Ensino Fundamental de escolas públicas. Após sete anos lecionando, ingressou no Mestrado Profissional em Matemática com a intenção de aperfeiçoar seus conhecimentos e assim melhorar suas aulas. Inclusive, um dos objetivos deste trabalho é mostrar como o curso pode melhorar a prática dos professores em sala de aula.

No entanto, a complexidade de alguns conteúdos impede que sejam aplicados diretamente no Ensino Básico. Por este motivo, o conteúdo escolhido foi o Princípio da Casa dos Pombos, que pode ser facilmente compreendido e tem potencial de estimular o raciocínio lógico, aguçar a curiosidade e, com isso, despertar o gosto pela matemática.

Para tanto este trabalho apresenta uma proposta de atividade que utiliza a Resolução de Problemas e a manipulação de material concreto com o objetivo de desenvolver gradualmente a compreensão do Princípio da Casa dos Pombos com alunos de Ensino Fundamental.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) a Resolução de Problemas deve ser considerada como uma orientação para o ensino já que possibilita a aprendizagem de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Através dela o aluno constrói conceitos articulados com outros conceitos, dando um maior sentido ao conteúdo estudado.

Já o Princípio da Casa dos Pombos normalmente não é um conteúdo trabalhado no Ensino Básico, ficando restrito ao Ensino Superior e cursos preparatórios para concursos.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) não prevê a abordagem desse conteúdo em nenhum ano específico do Ensino Fundamental. No entanto, aponta que o desenvolvimento das habilidades deve progredir ano a ano aumentando a complexidade das situações problemas e através da utilização de novas ferramentas de ensino. Nesse sentido, apresenta-se o Princípio da Casa dos Pombos como uma possibilidade de aplicação em um contexto mais amplo sobre problemas de contagem.

Além disso, Brasil (2018) apresenta como competência da disciplina de matemática o desenvolvimento do raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de argumentação. Tais habilidades podem ser desenvolvidas através do Princípio da Casa dos Pombos e da Resolução de Problemas.

No entanto um fator essencial para a escolha do tema foi a simplicidade de seu conteúdo. O fato de não possuir fórmulas, ser de fácil compreensão ao mesmo tempo em que pode ser utilizado para a resolução de problemas muito complexos faz com que o Princípio da Casa dos Pombos tenha um charme especial. Por esse motivo, acredita-se que esse conteúdo pode ser utilizado para despertar o interesse do aluno pela matemática, desmistificando um pouco a disciplina e auxiliando no desenvolvimento das habilidades previstas para esse componente curricular. E é justamente isso que se pretende com a proposta apresentada nesse trabalho.

Dentro do universo de dissertações apresentadas no curso de Mestrado Profissional em Matemática, que é em rede nacional, constatou-se que existe um número relativamente pequeno de trabalhos que abordam o Princípio da Casa dos Pombos, até o momento. A maior parte destes apresenta o princípio através de propostas de atividades ou relatos de experiências direcionados ao Ensino Médio (ZONTA, 2019; AGUIAR, 2013; MUNIZ JÚNIOR, 2016; COSTA, 2013; PACÍFICO, 2019).

Em Placidina (2017) é encontrada uma proposta de estudo do conteúdo através da metodologia da investigação matemática, na forma de sete tarefas. No entanto o público alvo dessas atividades não é informado. Já em Paiva (2014) e Moraes Júnior (2014) são encontradas diferentes aplicações para o Princípio da Casa dos Pombos, assim como uma coletânea de exercícios no primeiro e uma relação com a contagem dupla no segundo.

Somente em Amorim (2013) é que se encontra uma proposta de atividade voltada para o Ensino Fundamental, assim como um breve relato de experiência com o conteúdo em turmas de 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Portanto, este trabalho de dissertação se diferencia dos demais, especialmente, por focar no ensino da matemática no Ensino Fundamental e por apresentar além de uma proposta de estudo para o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas, uma análise detalhada de sua execução.

Para isso, este trabalho de dissertação está estruturado da seguinte forma: no segundo capítulo o Princípio da Casa dos Pombos é enunciado e alguns exercícios são resolvidos detalhadamente para que o leitor possa ter contato com algumas aplicações do conteúdo.

No terceiro capítulo é apresentado um breve relato histórico sobre a Resolução de Problemas e, na sequência, as três diferentes interpretações que essa metodologia de ensino possui. No final do capítulo é anunciada qual dessas interpretações será a base para a atividade proposta neste trabalho.

No quarto capítulo é descrita uma sequência com três atividades voltadas para o nono ano do Ensino Fundamental e que foram aplicadas em uma escola municipal de Porto Alegre, com a finalidade de abordar o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas. A proposta é que os alunos compreendam o princípio através da resolução de problemas inserindo atividades cada vez mais complexas até chegar a um desafio final.

A descrição da aplicação das atividades e os resultados apresentados pelos alunos são expostos e analisados no quinto capítulo deste trabalho.

No sexto capítulo estão presentes as considerações finais com a análise da execução e sugestões para o aperfeiçoamento da proposta.

2 O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

O Princípio da Casa dos Pombos, também chamado de PCP, é um assunto que normalmente não é trabalhado no Ensino Fundamental. No entanto, acredita-se que seja um conteúdo de fácil compreensão, já que possui um enunciado simples, bastante intuitivo e não apresenta fórmulas. A resolução dos problemas propostos dentro deste princípio tem sua essência baseada no raciocínio lógico.

Este princípio aparece em alguns livros como Princípio das Gavetas de Dirichlet, Princípio das Gavetas ou até mesmo Princípio de Dirichlet. De acordo com Holanda (2012) e Giocomo (2008) o matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1839) tem seu nome associado ao princípio por ter sido o primeiro matemático a utilizar esse método para resolver problemas não triviais.

Segue, então, seu enunciado:

Dadas n casas e $n+1$ pombos pode-se afirmar que se forem distribuídos os pombos nas casas, pelo menos uma casa ficará com mais de um pombo.

A compreensão desse princípio é simples, não exigindo conhecimentos prévios ou a utilização de fórmulas. Emprega-se apenas o uso do raciocínio lógico. Para isso, considera-se que os n pombos sejam distribuídos cada um em uma das n casas disponíveis. Como o número de pombos é $n+1$, um dos pombos ficará fora dessa distribuição. Tendo em vista que todas as casas já estão ocupadas, cada uma por exatamente um pombo, independente da casa que for escolhida para este último pombo, essa casa ficará com dois pombos, tornando assim o princípio verdadeiro.

A partir de agora, seguem alguns exemplos de aplicação do Princípio da Casa dos Pombos.

Exemplo 1: Em uma gaveta há 12 meias brancas e 12 meias pretas. Faltou luz na casa de Maria e ela não consegue enxergar a cor das meias que estão na gaveta. Quantas meias Maria deve retirar da gaveta, no mínimo, para ter certeza de que conseguirá vestir um par de meias com a mesma cor?

Solução: A primeira meia que Maria irá retirar da gaveta pode ser branca ou preta. A segunda se tiver sorte, será da mesma cor da primeira. Nesta hipótese são retiradas duas meias e a condição é satisfeita.

No entanto, se a segunda meia retirada não é da mesma cor da primeira, então a terceira meia deverá ser da mesma cor da primeira ou da mesma cor da segunda, já que são apenas duas possibilidades de cores. Neste caso, também há formação de um par com a mesma cor, satisfazendo a condição do problema.

Portanto são necessárias, no mínimo, três meias para se ter certeza de que Maria terá um par da mesma cor para vestir.

Resolvendo dessa forma pode parecer que o exemplo proposto não tem relação com o Princípio da Casa dos Pombos. No entanto, se as cores das meias representam as casas dos pombos e as meias representam os pombos então, para que em pelo menos uma casa (cor) haja dois pombos (meias), o número de meias deve ser o número de cores mais um, ou seja, três meias são necessárias.

Em outras situações o princípio se mostra mais necessário, uma vez que não é possível solucionar o problema de forma tão trivial, como no caso do exemplo a seguir retirado de Carvalho (1999, p.27).

Exemplo 2: Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

Solução: Neste caso o número de casas será o número de possibilidades de respostas diferentes para a prova. Como cada questão pode ser respondida de 5 formas diferentes, há $\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times \cdots \times 5}_{10 \text{ vezes}} = 5^{10} = 9765625$ possibilidades diferentes de se responder a prova.

Então pelo Princípio da Casa dos Pombos, se houverem $5^{10} + 1 = 9765626$ pessoas realizando o concurso, pelo menos duas deverão responder toda a prova de forma idêntica.

Algumas situações, como as descritas a seguir, também decorrem deste princípio:

- Em um grupo de 13 pessoas é possível afirmar que pelo menos duas fazem aniversário no mesmo mês, ou ainda, que pelo menos duas tem o mesmo signo do zodíaco.
- Em um grupo de três pessoas é possível afirmar que pelo menos duas são do mesmo sexo.
- Retirando-se aleatoriamente cinco cartas de um baralho é possível afirmar que pelo menos duas das cartas serão do mesmo naipe.
- Em um grupo de 27 pessoas é possível afirmar que pelo menos duas tem seu nome começando com a mesma letra do alfabeto.

Na maioria das vezes a grande dificuldade em se resolver questões que envolvam o Princípio da Casa dos Pombos está em distinguir o que deve ser considerado como “casa” e que deve ser considerado como “pombos”. Após identificadas casas e pombos, praticamente não há maiores problemas em se aplicar o princípio, conforme destaca-se no exemplo a seguir, adaptado de Lima et al (2000, p.182).

Exemplo 3: Em um grupo de 20 pessoas prove que existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos dentro do grupo.

Solução: Nesse exercício, considera-se que uma amizade é algo recíproco, ou seja, se uma pessoa A é amiga da pessoa B, a pessoa B deve ser amiga da pessoa A.

Outro ponto essencial nesse problema é perceber que se uma pessoa dentro do grupo não é amiga de nenhuma outra, então não existe nesse grupo uma pessoa que seja amiga de todas as outras. Da mesma forma, se houver no grupo uma pessoa que é amiga de todas as outras, então não existe nesse grupo uma pessoa com nenhum amigo. Ou seja, cada pessoa pode ter $0, 1, 2, \cdots, 18$ ou 19 amigos dentro do grupo e, se existir uma pessoa com 19 amigos (o que corresponde a ser amiga de todas as outras), não existirá uma com 0 amigos e vice e versa.

Feitas essas considerações, parte-se para distinguir o que representarão as casas e o que representarão os pombos.

Baseando-se nos dados desse exercício, as casas serão o número de amizades que cada pessoa pode ter. Os pombos representam as próprias pessoas, que nesse caso são vinte. Assim uma pessoa dentro do grupo pode ter 19 amigos (pois as possibilidades irão variar de 0 a 18 ou de 1 a 19) representando as 19 casas. Portanto, havendo $19 + 1 = 20$ pessoas (representando os pombos) afirma-se, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que ao menos uma pessoa irá repetir o número de amizades. Ou seja, pelo menos duas pessoas terão o mesmo número de amigos dentro do grupo.

O Princípio da Casa dos Pombos também pode ser apresentado da seguinte forma:

Dadas n casas e $nk + 1$ pombos, pode-se afirmar que em pelo menos uma das casas haverá $k + 1$ pombos.

Essa forma é conhecida como Princípio Geral da Casa dos Pombos. Neste caso basta considerar $k = 1$ para retornar ao Princípio da Casa dos Pombos usual. Este princípio mais geral pode ser empregado para resolver problemas conforme ilustrado no exemplo a seguir, retirado de Fomin, Genkin e Itenberg (2012, p.36)

Exemplo 4: Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove engradados contém o mesmo tipo de maçã.

Solução: Nesse caso, os tipos de maçãs representam as casas e os pombos correspondem aos engradados onde as maçãs são colocadas. Dessa forma, segue que $n = 3$ casas e $3k + 1 = 25$ pombos, ou seja, $k = 8$. Logo, haverá pelo menos $k + 1 = 9$ pombos em alguma das casas. Em outras palavras, haverá pelo menos nove engradados com o mesmo tipo de maçã.

Problemas bem mais complexos e que envolvem conceitos pertinentes a outras áreas da Matemática, tais como Geometria e Aritmética, podem ser resolvidos utilizando esse princípio. No entanto, não é o objetivo desse trabalho aprofundar-se em assuntos mais delicados, uma vez que sua aplicação está direcionada ao Ensino Fundamental e exemplos resolvidos destes problemas mais complexos podem ser encontrados facilmente em livros e artigos.

3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Baseada na Teoria Significativa, de Willian Brownell, a partir da segunda metade da década de 1930 a ênfase do ensino de Matemática passou a ser sobre o desenvolvimento da aprendizagem e não somente sobre o resultado final como era considerada anteriormente. Neste sentido a Resolução de Problemas começou a despontar como uma teoria desenvolvida principalmente pelo matemático e pesquisador George Polya e difundida inicialmente através do livro 'A arte de resolver problemas'. Esta obra foi publicada em 1945 e é um dos livros mais vendidos do mundo moderno. Após sua publicação as pesquisas sobre a Resolução de Problemas começaram a ganhar força. Tanto que em 1975 ocorreu o primeiro 'Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática' que favoreceu trocas entre os pesquisadores da área, (MORAIS; ONUCHIC, 2014; POLYA,1995).

No entanto foi a partir de 1980 que a Resolução de Problemas passou a integrar os currículos como uma proposta de aprendizagem, inicialmente nos Estados Unidos e após expandindo-se para outros países ao redor do mundo. Foi nesse mesmo ano que o NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics*[1] dos EUA publicou um documento chamado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's.* Esse documento continha recomendações para o ensino da matemática durante a década de 1980 e indicava que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar nesse período. (BRASIL, 1997; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014; MORAIS; ONUCHIC, 2014)

De acordo com Morais e Onuchic (2014) logo que a Resolução de Problema foi proposta como metodologia de ensino não havia um consenso referente à sua aplicação nas aulas de matemática. Havia três entendimentos diferentes que eram o ensino **sobre** a Resolução de Problemas, o ensino **para** a Resolução de Problemas e o ensino **através** da Resolução de Problemas.

O ensino **sobre** a Resolução de Problemas considerava a Resolução de Problemas como mais um conteúdo a ser trabalhado pelos professores. Nele se previa a orientação dos alunos com regras e estratégias para a resolução de problemas sobre qualquer tipo de assunto. Inclusive em Polya (1995), citado anteriormente, consta um roteiro de como resolver qualquer tipo de problema. Esse roteiro é composto por quatro passos. O primeiro passo seria a compreensão do problema. Os segundo e o terceiro seriam o planejamento de ação e sua respectiva execução. O quarto passo seria a análise da solução obtida.

---

[1] Conselho Nacional dos Professores de Matemática

Já o ensino **para** a Resolução de Problemas entendia que os conteúdos matemáticos deveriam ser desenvolvidos com finalidade de serem utilizados posteriormente para a resolução de problemas propostos. O problema seria então uma aplicação da matemática aprendida.

> [...] o eixo de sustentação dessa abordagem não está mais na Resolução de Problemas, mas na Matemática, tendo a resolução de problemas como um apêndice, um acessório. Nessa visão, a Matemática é considerada utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.37-38)

No ensino **através** da resolução de problemas os conteúdos matemáticos são trabalhados a partir de um problema. Nessa proposta um problema previamente escolhido pelo professor é abordado com a finalidade de motivar a aprendizagem de determinados conteúdos. Esses conteúdos tornam-se ferramentas para a resolução do problema proposto dando assim sentido ao que está sendo estudado.

Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.80) “Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo coconstrutores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo”.

Nessa perspectiva não há transmissão de conhecimento. O papel do professor é o de mediar e oferecer os recursos necessários aos alunos e os alunos são responsáveis por suas próprias aprendizagens. Por isso a aprendizagem ocorre de forma significativa, já que o aluno compreende a utilidade da matemática dando sentido ao conteúdo estudado.

No entanto, para que isso ocorra, é necessária uma mudança de postura, tanto dos professores, mas especialmente dos alunos. Essa mudança pode não ser fácil já que muitas vezes os alunos estão acostumados a apresentar uma postura passiva em sala de aula e neste tipo de aula é preciso que o aluno seja proativo e responsável pelo próprio aprendizado. E para que seja proativo é preciso que o aluno esteja motivado, que seja instigado. Cabe ao professor então despertar tal interesse selecionando um problema que realmente aguce a curiosidade dos alunos.

A partir do momento em que o aluno se torna ativo e responsável pelo próprio aprendizado isso favorece sua autoestima. Resolvendo o problema o aluno se compreende capaz de fazer matemática, ocorrendo então um empoderamento em relação à disciplina, sendo este mais um ponto positivo dessa proposta.

Salientamos que nessa perspectiva de ensino a escolha do problema não pode ser arbitrária. Além de despertar o interesse, a situação proposta aos alunos deve ser bem escolhida para que realmente seja considerado um problema. De acordo com o dicionário Sacconi (2001) problema é qualquer questão que envolva dúvida, incerteza ou dificuldade. Portanto se a questão proposta não gerar nenhum dos elementos citados ela não deve ser considerada um problema, mas sim um exercício sobre algum assunto já conhecido, não servindo então como motivador para novas aprendizagens.

Tendo em vista todos os pontos elencados sobre os três entendimentos sobre a resolução de problemas, acreditamos que o que prevê o ensino da matemática **através** da resolução de problemas seja o mais interessante e traga mais benefícios ao aprendizado dos alunos. Embora reconhecendo que seja a mais difícil de ser executada, pois a seleção do problema pode não ser uma tarefa simples e a falta de controle gerada por esse tipo de aula possa gerar desconforto para muitos professores, uma vez que a proposta está centrada justamente na ação do aluno e não no professor. No entanto, entendemos que os benefícios que esse tipo de aula pode trazer superam os possíveis obstáculos.

Outro fator que motiva esse tipo de proposta são as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). De acordo com a BNCC a Resolução de Problemas é uma estratégia para a aprendizagem que pode ser usada ao longo do Ensino Fundamental e pode auxiliar no desenvolvimento de competências como o raciocínio lógico, representação, comunicação e argumentação.

Um documento norteador que apresenta a Resolução de Problemas como estratégia para o ensino de matemática são os PCN (BRASIL, 1997). De acordo com esse documento o aluno deve ser protagonista na construção de sua aprendizagem e apresenta a Resolução de Problemas como um dos caminhos possíveis para "se fazer matemática" em sala de aula.

Este documento faz ainda reflexões sobre a Resolução de Problemas na sala de aula afirmando que deve se ter cuidado para que o problema proposto não seja mera aplicação de um conceito estudado, tornando-se assim um exercício de fixação. Alerta também que o problema deve ser desafiador e que dependendo do nível de conhecimento, a situação proposta pode ser um problema para um aluno e não para outro. E afirma ainda que ao estimular o aluno a questionar e resolver problemas o professor favorece uma aprendizagem via ação refletida, construindo e não só apenas reproduzindo conhecimentos.

Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividade baseada no ensino da matemática através da Resolução de Problemas, por acreditar nos benefícios advindos desse tipo de estratégia. Propomos assim uma sequência de problemas com a intenção de instigar os alunos com o Princípio da Casa dos Pombos. A ideia é desenvolver os conceitos do conteúdo com alunos do Ensino Fundamental sem enunciar o princípio, partindo de problemas em que os alunos precisem explorar diferentes estratégias para a resolução e assim chegar à formalização do conteúdo.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE SOBRE CASA DOS POMBOS PARA O 9º ANO

Este capítulo apresenta uma sequência didática com três propostas de atividades que envolvem o Princípio da Casa dos Pombos. As atividades foram elaboradas com a intenção de mostrar como o Princípio da Casa dos Pombos pode ser trabalhado no Ensino Fundamental, trazendo benefícios para o desenvolvimento lógico matemático dos alunos além de tornar a aula mais atraente e agradável.

O objetivo é que os alunos possam compreender o Princípio da Casa dos Pombos através da Resolução de Problemas, sem entrar no rigor matemático do conteúdo propriamente dito.

O nível de complexidade dos problemas propostos aumenta gradualmente no decorrer das atividades. Na primeira atividade se faz uso de material concreto e se prevê alguma abstração. Na segunda, a intenção é que as atividades estejam relacionadas com a realidade do aluno. Nesta etapa, não haverá manipulação de material concreto, exigindo, portanto, um nível maior de abstração. Na terceira e última atividade é proposto um desafio que exige compreensão da lógica do Princípio da Casa dos Pombos e muita abstração.

As propostas foram pensadas para o nono ano do Ensino Fundamental, a uma turma em que a autora do trabalho lecionava na época da elaboração da dissertação do Mestrado Profissional em Matemática.

4.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE 1

Tema: Casa dos Pombos

Objetivo Geral: Abordar o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental

Objetivo Específico: Resolver problemas que envolvem a lógica da casa dos pombos sem o rigor matemático do conteúdo. Os problemas trabalhados serão representados com material concreto. A intenção é de que os alunos consigam responder as perguntas propostas através da manipulação do material. No decorrer da aula é esperado que os alunos comecem a realizar abstrações e, dessa forma, cheguem à resposta correta fazendo menos manipulações, ou até mesmo sem a necessidade da manipulação do material concreto.

Conteúdo: Casa dos pombos

Tempo de Aula: 2 períodos de 45 minutos cada (1h30min de aula)

Turma: 9º ano do Ensino Fundamental

Metodologia: Cada aluno receberá uma folha com sete problemas envolvendo o Princípio da Casa dos Pombos, tanto no caso usual quanto geral. Serão criadas sete estações de trabalho, e em cada uma, haverá um material concreto que represente a situação de algum dos problemas propostos. Os problemas serão chamados de A, B, C, D, E, F e G, assim como as estações que contiverem o material que os representa. A turma será dividida em sete grupos e cada um dos grupos se posicionará em uma das estações de trabalho. Após manipular o material e responderem corretamente a pergunta da estação na qual se encontram, cada aluno deverá anotar os resultados em sua folha, informando à professora, que os orientará para que aguardem ou troquem de estação com outro grupo, até que todos os grupos tenham visitado todas as estações. A professora circulará pela sala questionando as respostas dos alunos, tentando auxiliar através de perguntas e na manipulação do material concreto, instigando, mas sem fornecer o resultado. Todas as situações propostas foram criadas especialmente para esta atividade. A seguir serão descritos os problemas presentes na folha entregue aos alunos:

A) Dentro de um estojo há quatro canetas pretas, cinco canetas azuis, duas vermelhas e uma verde. Distribuindo aleatoriamente as canetas desse estojo para que um grupo de pessoas assine um cartão de aniversário para um amigo, e considerando que não haverá trocas de canetas e cada um assinará com a cor que receber, quantas canetas devem ser distribuídas, no mínimo, para se ter certeza de que duas dessas pessoas assinarão o cartão com a mesma cor?

B) Quantas cartas devem ser retiradas aleatoriamente de um baralho embaralhado, para se ter certeza de que pelo menos três das cartas retiradas tenham naipes iguais?

C) No refeitório da escola estão sendo oferecidas três opções de fruta para lanche, banana, maçã e melancia. Em uma das turmas vai um aluno de cada vez retirar seu lanche. Quantos alunos devem ir ao refeitório para que se possa afirmar que dois alunos, pelo menos, escolheram a mesma fruta?

D) Em uma caixa há cinco bolas azuis, três amarelas, três vermelhas e duas verdes misturadas. Retirando uma bola de cada vez, quantas bolas devem ser retiradas no mínimo para que se possa afirmar que pelo menos duas têm a mesma cor?

E) Em um envelope há cartões verdes e laranjas. Quantos cartões devem ser retirados do envelope para que se tenha pelo menos três cartões da mesma cor?

F) Uma escola dispõe de quatro cores de tintas para pintar suas salas de aulas, rosa, amarelo, azul e lilás. Cada sala de aula será pintada na cor mais votada por cada turma. Para conferir a pintura, a diretora fará vistoria sala por sala. Em quantas salas ela deverá entrar, no mínimo, para encontrar duas salas pintadas com a mesma cor?

G) Em uma loja há camisetas de duas cores distintas para serem vendidas (branca ou preta). Quantas camisetas devem ser vendidas, no mínimo, para que seja possível afirmar que foram vendidas três camisetas da mesma cor?

Avaliação: A avaliação será realizada no decorrer da aula, a partir da observação da ação dos alunos mediante os problemas propostos e também através da análise do registro das respostas de cada aluno em sua folha de respostas. Considera-se que a atividade terá sido positiva se os alunos demonstrarem a compreensão da lógica do Princípio da Casa dos Pombos e conseguirem responder corretamente os problemas propostos.

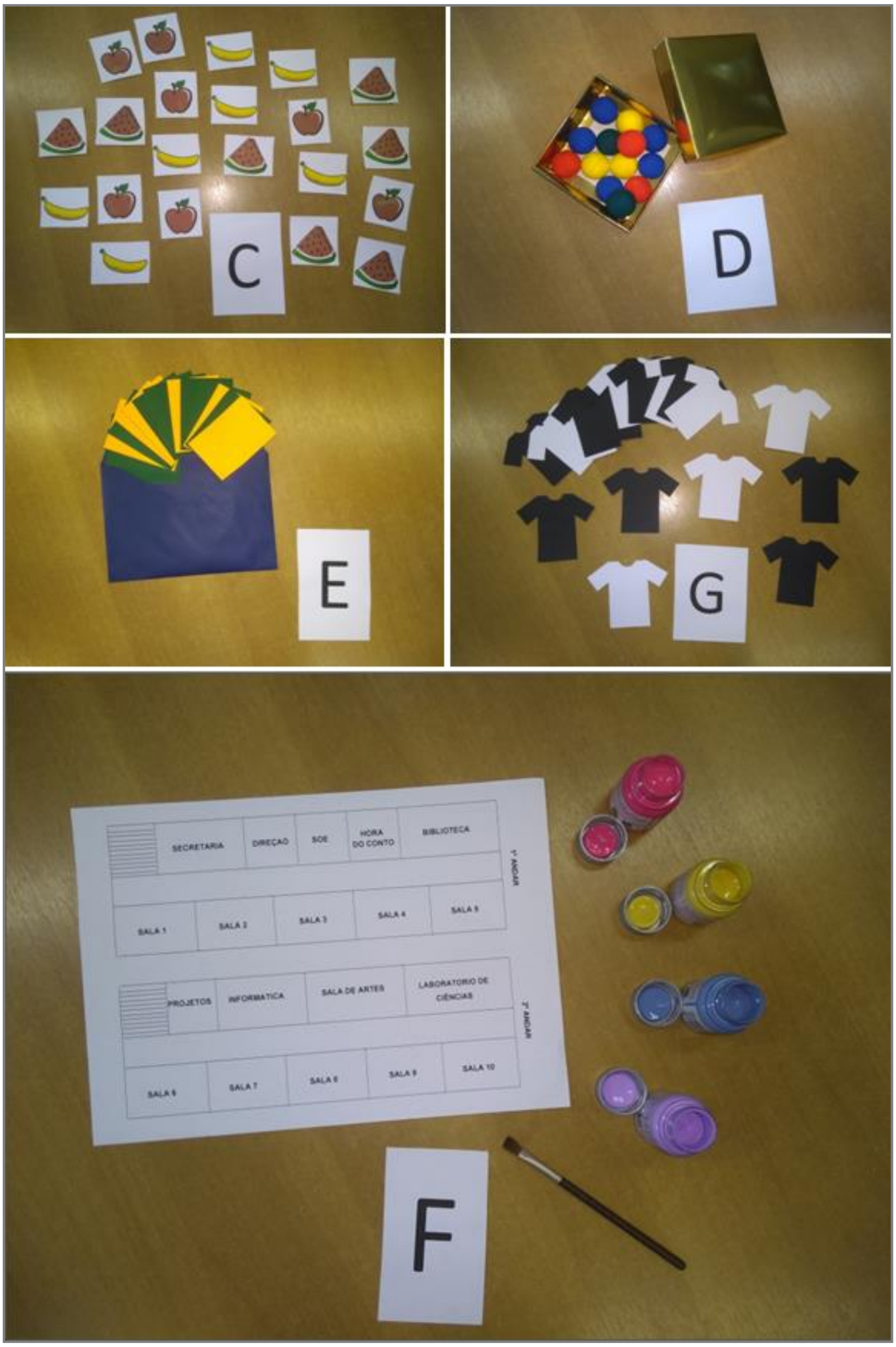
As Figuras 1 e 2 ilustram com fotos os materiais que serão utilizados nessa aula.

Figura1 – Material utilizado para ilustração dos problemas A e B

Fonte: A autora

Para a ilustração do problema A será disponibilizado um estojo com o mesmo número e cores de canetas mencionadas no enunciado e para o problema B, um baralho de cartas.

Figura 2 – Material utilizado para ilustração dos problemas C, D, E, F e G



Fonte: A autora

Para a ilustração do problema C serão disponibilizadas figurinhas com desenhos das frutas oferecidas no refeitório. Para o D, uma caixa com bolinhas com as mesmas cores e quantidades mencionadas no enunciado. Para o problema E será disponibilizado um envelope com diversos cartões verdes e laranjas dentro. Para o F, uma planta baixa do prédio da escola e quatro cores de tintas diferentes e, para o problema G, diversas miniaturas de camisetas brancas e pretas confeccionadas em papel.

4.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE 2

Tema: Casa dos Pombos

Objetivo Geral: Abordar o Princípio da Casa dos Pombos no Ensino Fundamental

Objetivo Específico: Resolver problemas que envolvam a lógica da Casa dos Pombos, mas sem adotar o rigor matemático. As questões trabalhadas nessa aula serão de baixa complexidade dentro do conteúdo. Não serão mais utilizados materiais concretos, mas sim situações que envolvam a realidade dos alunos e que exijam abstração, tais como data de nascimento e dias da semana. A intenção é que depois da primeira aula, utilizando o material concreto, os alunos consigam abstrair e generalizar a estratégia de resolução, respondendo a problemas mais complexos.

Conteúdo: Casa dos pombos

Tempo de Aula: 2 períodos de 45 minutos cada (1h30min de aula)

Turma: 9º ano do Ensino Fundamental

Metodologia: Nessa aula a turma será novamente dividida em sete grupos, compostos pelos mesmos integrantes da aula anterior. Cada aluno receberá uma folha com seis problemas, onde deverá fazer o registro de suas respostas. Os alunos poderão discutir as questões com os demais integrantes de seu grupo, mas deverão realizar o registro individualmente. A professora circulará pela sala auxiliando os alunos com questionamentos que ajudem na resolução. Também fará relação com as questões trabalhadas na aula anterior, induzindo os alunos a realizarem o mesmo padrão de pensamento empregado para resolver os problemas da primeira aula. Assim como na primeira atividade, todas as situações propostas foram criadas especialmente para esta aula. A seguir serão descritos os problemas presentes na folha entregue aos alunos.

Leia atentamente cada problema e responda:

1) Conte o número de alunos presentes na sala hoje.

   a) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que fazem aniversário no mesmo mês?

   b) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que farão (ou já fizeram) aniversário em um mesmo dia da semana neste ano?

2) Se for realizada uma votação para escolher o professor conselheiro da turma, em um grupo de dez professores, quantos alunos devem votar, no mínimo, para que se possa afirmar que um professor recebeu dois votos?

3) Em um grupo de três alunos é possível afirmar que há, no mínimo, quantas pessoas do mesmo sexo?

4) Quantas pessoas deveriam ter na sala para que se possa afirmar que, pelo menos, duas nasceram em um mesmo dia? (não necessariamente no mesmo mês. Exemplo: 17 de agosto e 17 de janeiro)

5) Será feita uma gincana na escola. Haverá cinco equipes nas quais os alunos poderão se inscrever. Supondo que ordenadamente os alunos da turma escolham a sua equipe, a partir de qual aluno será possível afirmar que haverá dois alunos da turma em uma mesma equipe?

6) Na nossa escola há 13 turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Será realizado um sorteio para selecionar 40 desses alunos para representar a escola em uma gincana. A partir de qual sorteado será possível afirmar que há pelo menos dois alunos sorteados de uma mesma turma?

Avaliação: A avaliação será realizada no decorrer da aula, por meio da observação da discussão dos alunos sobre as questões apresentadas e também através da análise do registro das respostas na folha. Considera-se que a atividade terá sido positiva se os alunos conseguirem aplicar a lógica do Princípio da Casa dos Pombos em diferentes situações do cotidiano respondendo os problemas propostos corretamente.

4.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE 3

Tema: Casa dos Pombos

Objetivo Geral: Abordar o conteúdo Casa dos Pombos no Ensino Fundamental

Objetivo Específico: Resolver um problema que exija abstração e compreensão do Princípio da Casa dos Pombos. É esperado que após as duas primeiras aulas os alunos consigam solucionar uma questão mais complexa, proposta no sentido de desafio.

Conteúdo: Casa dos Pombos

Tempo de Aula: 1 período de 45 minutos

Turma: 9º ano do Ensino Fundamental

Metodologia: Os alunos permanecerão sentados como costumam assistir as aulas normalmente, individualmente ou em duplas, sem a formação de grupos das aulas anteriores. Cada um receberá uma folha de atividade, onde poderá fazer anotações e registrará sua resposta. Os alunos serão incentivados a escrever suas ideias no papel, mesmo que não saibam como chegar ao resultado final. Será dado tempo para que pensem sobre o problema, propiciando a relação com os problemas aplicados nas aulas anteriores. Os alunos poderão trocar ideias com os colegas, mas cada um deverá ter seu próprio registro. O problema a ser proposto foi adaptado da Questão 10 do nível 3 do Banco de Questões da OBMEP de 2016 que está ilustrada na Figura 3.

Figura 3 – Questão 10 do nível 3 do Banco de Questões da OBMEP 2016

10 ***Bolas na urna***

Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo $k = 1, 2, \ldots, 2016$. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

Fonte: Banco de Questões da OBMEP 2016

A fim de tornar a questão mais acessível considerou-se conveniente explicar a variação de k, visto que a maioria dos alunos que realizará a atividade não está habituada a este tipo de linguagem matemática. Além disso, o valor 2016 foi alterado para 2019 para que coincida com o ano corrente da aplicação da atividade. Dessa forma o desafio proposto foi o seguinte:

Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo $k = 1, 2, \cdots, 2019$. Ou seja, há uma bola com o número 1, duas bolas com o número 2 e assim sucessivamente. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

Avaliação: A avaliação será realizada por meio da observação da discussão dos alunos sobre o problema apresentado e também através do registro das respostas na folha. Considera-se que a atividade terá sido positiva se os alunos se mostrarem motivados e se empenharem na resolução, mesmo que não cheguem ao resultado correto.

5 APLICAÇÃO DAS PROPOSTAS

Na sequência é apresentado um relato detalhado da aplicação de cada uma das propostas exibidas no capítulo anterior. Este capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira delas é feita uma breve descrição da turma onde as atividades foram executadas. Nas três seções subsequentes são descritas como ocorreram as aplicações, sendo realizada uma análise das respostas apresentadas em cada um dos problemas propostos.

5.1 DESCRIÇÃO DA TURMA

As atividades propostas neste trabalho foram aplicadas em uma turma do 3º ano do 3º ciclo da Escola Municipal de Ensino Fundamental Vereador Antônio Giúdice, localizada em Porto Alegre/RS, que corresponde ao 9º ano do Ensino Fundamental. Essa escola atende, em grande maioria, alunos de baixa renda, muitos deles em situação de vulnerabilidade social.

A aplicação da proposta ocorreu em uma das turmas regulares da autora deste trabalho, composta por 32 alunos, que frequentavam as aulas no turno da manhã. Um dos alunos da turma era portador de necessidades educativas especiais devido ao comprometimento cognitivo causado pelas crises de epilepsia que sofria enquanto ainda era bebê.

As atividades foram implementadas no início do ano letivo, entre a quarta e a sexta aula de matemática da turma. Quase todos os estudantes já tinham sido alunos regulares da professora em anos anteriores e todos a conheciam de aulas eventuais, o que garantia um vínculo afetivo entre os mesmos. A conversa era uma característica marcante dessa turma, sendo habitual a perda de alguns minutos no início das aulas na tentativa de acalmá-los. Entretanto, os estudantes costumavam se comprometer com as atividades propostas nas aulas matemática, apresentando boa produção.

5.2 A APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ATIVIDADE 1

No dia em que a atividade 1 foi aplicada, 28 alunos estavam presentes. Os alunos formaram os grupos por afinidade. A maioria escutou com atenção as orientações e se mostrou empolgada com a proposta. Alguns alunos conseguiram responder bem rápido o problema correspondente à primeira estação que visitaram, outros demoraram um pouco mais e outros ainda precisaram de auxílio para chegar a alguma conclusão. O tempo planejado para a execução da atividade foi suficiente, embora alguns alunos não tenham finalizado a tarefa. Ressalta-se que, nestes casos, a falta de comprometimento e distração prejudicaram o desempenho do grupo.

Alguns alunos se destacaram na aula, compreendendo rapidamente o raciocínio e auxiliando os demais colegas na resolução dos problemas.

Ao longo da aula a necessidade da manipulação do material concreto foi diminuindo, sendo que ao final, muitos alunos já nem o utilizavam, conseguindo realizar abstrações sobre as situações propostas nos problemas.

A movimentação dos grupos entre as diferentes estações de trabalho ocorreu de forma tranquila. Alguns alunos, compreendendo a dinâmica, ajudaram na organização, de tal forma que a professora pouco precisou intervir nesse sentido.

Dezesseis alunos responderam todas as questões, o que representa pouco mais da metade da turma. A maioria do grupo de 12 alunos restante entregou a folha de respostas faltando poucas questões. Apenas dois alunos entregaram a atividade em branco. Um deles afirmou não ter compreendido que cada aluno deveria entregar a sua atividade individualmente. O outro, portador de necessidades educativas especiais, que embora tivesse condições de realizar as atividades que estavam sendo propostas, nesse dia não estava disposto.

5.2.1 Sobre o problema A

O enunciado do problema A estabelecia a seguinte situação.

A) Dentro de um estojo há quatro canetas pretas, cinco canetas azuis, duas vermelhas e uma verde. Distribuindo aleatoriamente as canetas desse estojo para que um grupo de pessoas assine um cartão de aniversário para um amigo, e considerando que não haverá trocas de canetas e cada um assinará com a cor que receber, quantas canetas devem ser distribuídas, no mínimo, para se ter certeza de que duas dessas pessoas assinarão o cartão com a mesma cor?

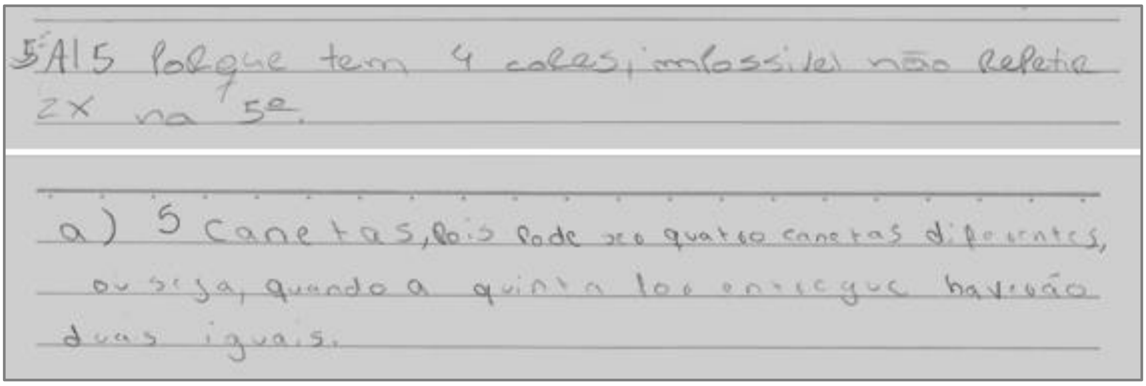
Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do Princípio da Casa dos Pombos (PCP), conforme destaca-se a seguir.

Solução: Pelo PCP o número de casas nesta questão é dado pelo número de cores diferentes, ou seja, $n = 4$, e as canetas representam os pombos. Como se quer uma repetição é necessário que sejam distribuídos $n + 1 = 4 + 1 = 5$ pombos nas quatro casas. Portanto, para que se possa afirmar que duas pessoas assinarão o cartão com a mesma cor devem ser distribuídas 5 canetas.

Vinte e um alunos responderam esse problema.

A Figura 4 ilustra duas respostas que indicam que, embora os alunos não tenham sido apresentados formalmente ao PCP, eles conseguiram compreender a sua lógica e responder corretamente a questão proposta.

Figura 4 – Duas respostas apresentadas para o problema A



Fonte: Dados da pesquisa

Um dos alunos afirma que a resposta do problema é “5 porque tem 4 cores impossível [sic] não repetir 2x na 5º.”, outro aluno concluí que são necessárias “5 canetas, pois pode ser quatro canetas diferentes, ou seja, quando a quinta for entregue haverão duas iguais.”

5.2.2 Sobre o problema B

O enunciado do problema B estabelecia a seguinte situação.

B) Quantas cartas devem ser retiradas aleatoriamente de um baralho embaralhado, para se ter certeza de que pelo menos três das cartas retiradas tenham naipes iguais?

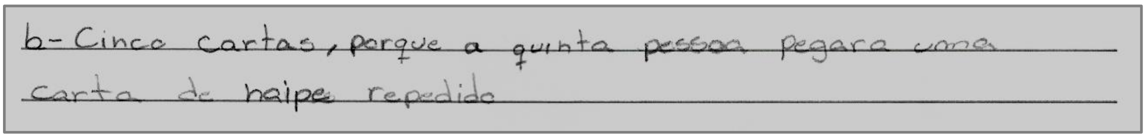
Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme destaca-se a seguir.

Solução: Pelo PCP, o número de casas nesse caso são os diferentes naipes das cartas, ou seja, $n = 4$ e, os pombos correspondem às próprias cartas. Como se quer três repetições então $k + 1 = 3$, ou seja, $k = 2$. Logo $nk + 1 = 4 \times 2 + 1 = 9$ e, portanto, são necessárias nove cartas para que se possa afirmar que pelo menos três possuem o mesmo naipe.

O primeiro grupo que respondeu a questão B chegou ao resultado de uma forma interessante. Usaram o seguinte raciocínio: 4 naipes vezes 3 cartas resulta em 12, mas como é preciso que somente uma carta repita três vezes se diminui 3, já que são quatro naipes, obtendo o resultado 9. Essa resposta foi apresentada oralmente durante a aula e, infelizmente, não foi registrada nas folhas de respostas.

Dos 20 alunos que responderam a este problema, somente quatro erraram. Desses quatro, todos apresentaram o mesmo resultado de 5 cartas. Essa resposta seria correta se a questão ilustrasse o Princípio da Casa dos Pombos usual, onde é considerada apenas uma repetição em alguma das casas. Um exemplo deste raciocínio errôneo pode ser visto na Figura 5. Neste exemplo, o aluno afirma que são necessárias "cinco cartas, porque a quinta pessoa pegaria uma carta de naipe repetido".

Figura 5 – Resposta errada dada para o problema B

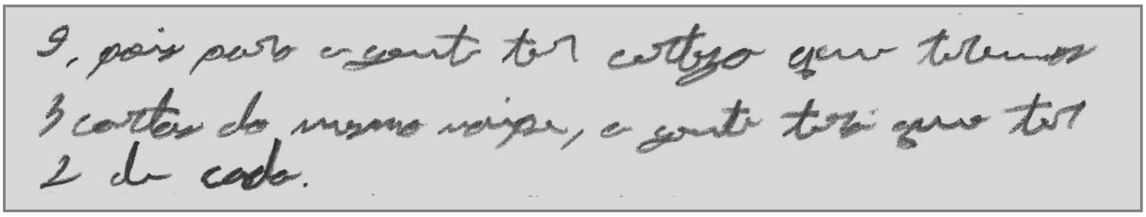

b- Cinco cartas, porque a quinta pessoa pegara uma carta de naipe repedido

Fonte: Dados da pesquisa

É possível perceber que embora o resultado não esteja correto, o aluno compreendeu a lógica do princípio.

Os outros 16 alunos que responderam a questão conseguiram apresentar o resultado correto, mas nenhum expressou de forma clara seu raciocínio, como podemos observar na Figura 6.

Figura 6 – Resposta correta dada para o problema B


9, pois para a gente ter certeza que teremos 3 cartas do mesmo naipe, a gente terá que ter 2 de cada.

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno afirma que são necessárias “9, pois para a gente ter certeza que teremos 3 cartas do mesmo naipe, a gente terá que ter 2 de cada”.

5.2.3 **Sobre o problema C**

O enunciado do problema C estabelecia a seguinte situação.

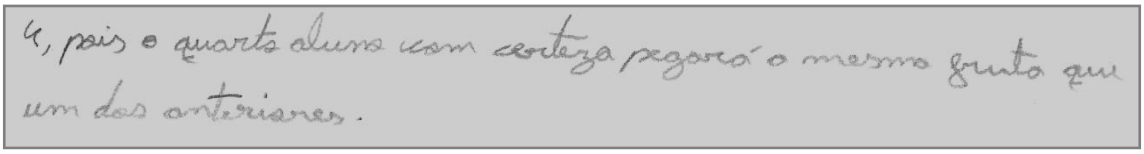
C) No refeitório da escola estão sendo oferecidas três opções de fruta para lanche, banana, maçã e melancia. Em uma das turmas vai um aluno de cada vez retirar seu lanche. Quantos alunos devem ir ao refeitório para que se possa afirmar que dois alunos, pelo menos, escolheram a mesma fruta?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de casas nessa questão é dado pelo número de frutas diferentes disponíveis, ou seja, $n = 3$. Os pombos representam os alunos. Como se quer apenas uma repetição, devemos ter $n + 1 = 4$ pombos. Portanto, quatro alunos devem ir ao refeitório para que se possa afirmar que, pelo menos, dois escolherão a mesma fruta.

O problema C foi respondido por todos (exceto pelos que entregaram em branco). Somente um aluno não acertou ao responder de maneira imprecisa que poderiam ser 4 ou 5 alunos. A seguir, na Figura 7, um exemplo de resposta que foi apresentada para esse problema que demonstra a ideia intuitiva do PCP.

Figura 7 – Resposta dada para o problema C


4, pois o quarto aluno com certeza pegará o mesmo fruto que um dos anteriores.

Fonte: Dados da pesquisa

É possível observar no registro que o aluno afirma que são necessários “4, pois o quarto aluno com certeza pegará a mesma fruta que um dos anteriores.”

5.2.4 **Sobre o problema D**

O enunciado do problema D estabelecia a seguinte situação.

D) Em uma caixa há cinco bolas azuis, três amarelas, três vermelhas e duas verdes misturadas. Retirando uma bola de cada vez, quantas bolas devem ser retiradas no mínimo para que se possa afirmar que pelo menos duas têm a mesma cor?

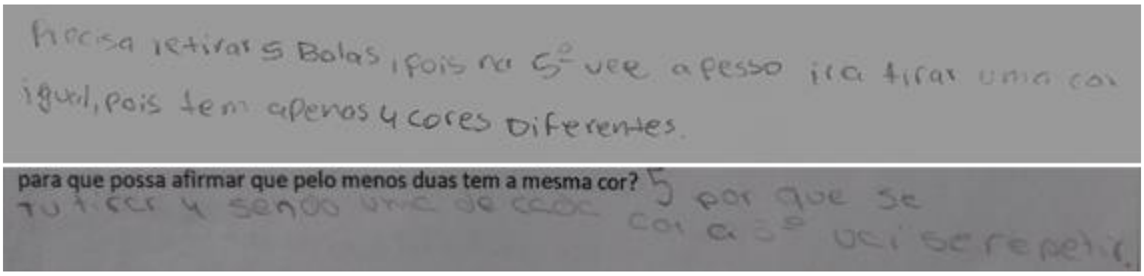
Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: Nesse caso, o número de casas é igual ao número de cores, isto é, $n = 4$. O número de pombos corresponde ao número de bolinhas. Como se quer uma repetição, deve-se ter $n + 1 = 5$ pombos. Portanto, retirando-se cinco bolinhas é possível afirmar que, pelo menos, duas serão da mesma cor.

O problema D foi respondido por 21 alunos. Desses, três apresentaram o mesmo erro ao responderem que seriam 4 bolinhas. No entanto, pressupõe-se que tenham se equivocado na hora de redigir a resposta, pois durante a aula, discutindo essa questão, esse grupo de alunos aparentou tê-la compreendido corretamente.

A Figura 8 ilustra dois exemplos de como o problema foi respondido corretamente e demonstram a compreensão da lógica do PCP.

Figura 8 – Duas respostas apresentadas para o problema D



Fonte: Dados da pesquisa

Na primeira resposta, o aluno afirma que “precisa retirar 5 bolas, pois na 5ª vez a pessoa irá tirar uma cor igual, pois tem apenas 4 cores diferentes.” e na segunda, o aluno registrou a resposta “5 por que se tu tirar 4 sendo uma de cada cor a 5ª vai se repetir.”

5.2.5 **Sobre o problema E**

O enunciado do problema E estabelecia a seguinte situação.

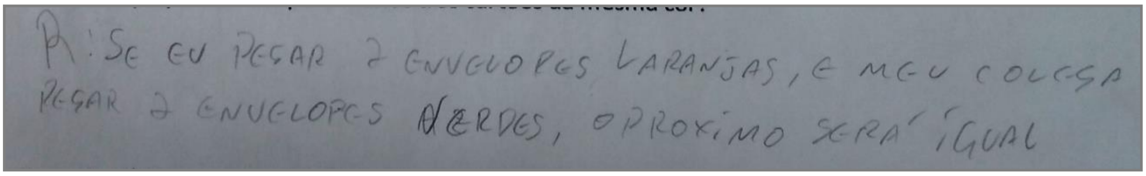
E) Em um envelope há cartões verdes e laranjas. Quantos cartões devem ser retirados do envelope para que se tenha pelo menos três cartões da mesma cor?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: Neste caso, os pombos correspondem aos cartões e o número de casas representam as cores, ou seja, $n = 2$. Como se quer três repetições, $k + 1 = 3$ e, com isso, $k = 2$. Aplicando em $nk + 1$ obtemos $2 \times 2 + 1 = 5$ pombos. Logo, são necessários cinco cartões para que se tenha certeza de que, pelo menos, três terão a mesma cor.

Vinte e um alunos responderam o problema E. Desses, três responderam erroneamente indicando que eram necessários 6 cartões. Esses alunos não justificaram suas respostas, mas é possível imaginar que tenham pensado no número de cores de cartões possíveis (dois) multiplicado pelo número de repetições desejadas (três) para chegar nesse resultado. Nenhum aluno que apresentou o resultado correto soube explicar bem o seu raciocínio. Um exemplo de resposta que melhor conseguiu expressar seu pensamento está ilustrado na Figura 9.

Figura 9 – Resposta dada para o problema E



Fonte: Dados da pesquisa

O aluno, nesse registro, afirma que "Se eu pegar 2 envelopes laranjas, e meu colega pegar 2 envelopes verdes, o próximo será igual". Ao escrever envelopes, crê-se que o aluno estava se referindo aos cartões.

5.2.6 Sobre o problema F

O enunciado do problema F estabelecia a seguinte situação.

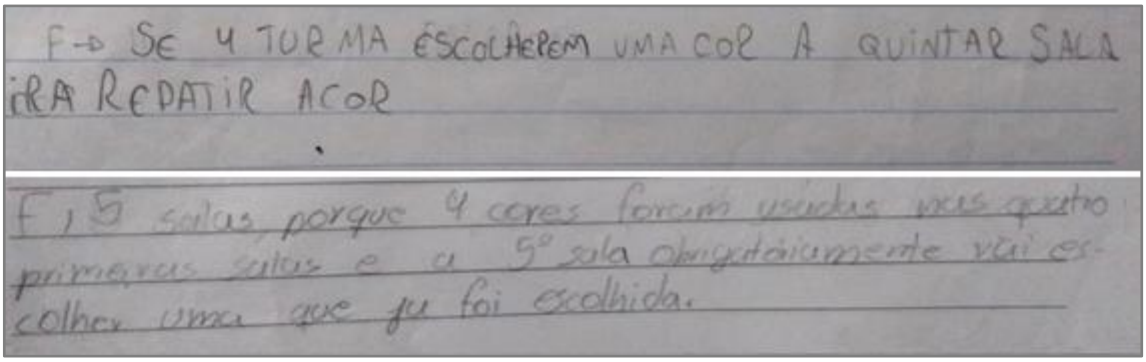
F) Uma escola dispõe de quatro cores de tintas para pintar suas salas de aulas, rosa, amarelo, azul e lilás. Cada sala de aula será pintada na cor mais votada por cada turma. Para conferir a pintura, a diretora fará vistoria sala por sala. Em quantas salas ela deverá entrar, no mínimo, para encontrar duas salas pintadas com a mesma cor?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: Nesta questão, o número de casas é dado pelas cores disponíveis, ou seja, $n = 4$. Os pombos representam as salas. Como se quer uma repetição tem-se que $n + 1 = 5$ salas. Portanto, a diretora deve entrar, no mínimo, em cinco salas para que se possa afirmar com certeza que encontrará duas salas com a mesma cor.

Todas as respostas apresentadas a este problema estavam corretas. Na Figura 10 são exibidas duas respostas para esse problema, que demonstram a lógica utilizada para a resolução.

Figura 10 – Duas respostas apresentadas para o problema F


F→ SE 4 TURMA ESCOLHEREM UMA COR A QUINTAR SALA IRA REPATIR ACOR

F, 5 salas porque 4 cores foram usadas nas quatro primeras salas e a 5º sala obrigatoriamente vai es-colher uma que ju foi escolhida.

Fonte: Dados da pesquisa

Na primeira resposta observa-se que um dos alunos afirma que "Se 4 turma escolherem uma cor a quinta sala ira repetir a cor". Já na segunda, o estudante registra a resposta "5 salas porque 4 cores foram usadas nas quatro primeiras salas e a 5ª sala obrigatoriamente vai escolher uma que já foi escolhida."

5.2.7 **Sobre o problema G**

O enunciado do problema G estabelecia a seguinte situação.

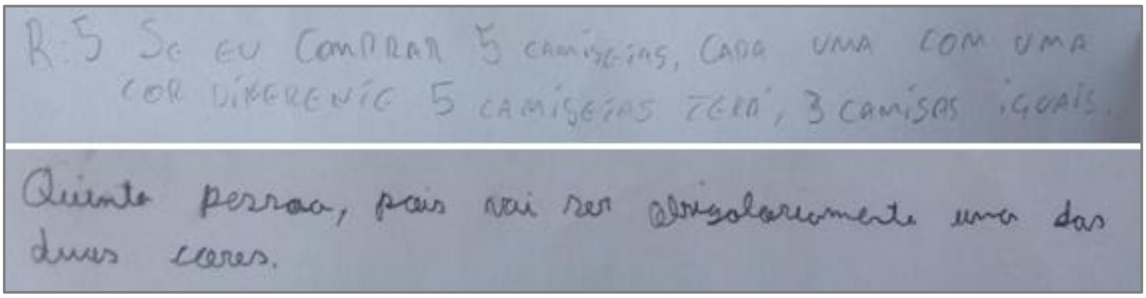
G) Em uma loja há camisetas de duas cores distintas para serem vendidas (branca ou preta). Quantas camisetas devem ser vendidas, no mínimo, para que seja possível afirmar que foram vendidas três camisetas da mesma cor?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de cores corresponde às casas, ou seja, $n = 2$. As camisetas correspondem aos pombos. Como se estima três repetições tem-se $k + 1 = 3$ e, assim, $k = 2$. Com isso, $nk + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$. E, portanto, é necessário vender cinco camisetas para que se possa afirmar que, pelo menos, três camisetas vendidas são da mesma cor.

Este último problema foi respondido por 21 alunos, sendo que 4 deles responderam erroneamente o total de seis camisetas. Estes alunos não explicaram os seus raciocínios, mas é possível supor que tenham cometido erro semelhante ao apresentado no problema E. Isto é, multiplicaram as duas possibilidades de cores pelas três repetições desejadas. Na Figura 11 estão ilustrados dois exemplos de como essa questão foi respondida corretamente por alunos que melhor conseguiram expressar seu raciocínio.

Figura 11 – Duas respostas apresentadas para o problema G



Fonte: Dados da pesquisa

Na primeira resposta, o aluno registra “5 se eu comprar 5 camisetas, cada uma com uma cor diferente 5 camisetas terá, 3 camisas iguais”, enquanto o outro aluno afirma que será a “Quinta pessoa, pois vai ser obrigatoriamente uma das duas cores.”

5.2.8 Síntese dos resultados

No Quadro 1 são apresentadas informações quantitativas sobre as respostas apresentadas pelos alunos.

Quadro 1 – Dados quantitativos das respostas apresentadas na atividade 1

Problema	**Número de alunos que responderam**	**Número de respostas corretas**	**Percentual de acerto entre os que responderam**
A	21	21	100%
B	20	16	80%
C	26	25	96,1%
D	21	18	85,7%
E	21	18	85,7%
F	26	26	100%
G	21	17	80,9%

Fonte: A autora

Durante a aplicação da atividade 1, observou-se que os alunos apresentaram mais dificuldades nos problemas B, E e G, todos relacionados com o Princípio Geral da Casa dos Pombos. Isso se confirma quando analisamos os resultados apresentados no Quadro 1.

Ainda em relação aos problemas B, E e G, ressalta-se a grande dificuldade apresentada pelos alunos no que se refere a justificar adequadamente a suas respostas, mesmo quando estas estavam corretas. Tanto que, nenhum aluno conseguiu expressar de forma clara seu pensamento nestas questões. Esse fato não ocorreu em questões que versavam sobre o Princípio da Casa dos Pombos usual, em que muitos alunos conseguiram expressar bem o seu raciocínio, demonstrando a compreensão da lógica do problema.

Os problemas A, B, D, E e G foram deixados em branco por um número maior de alunos. Além disso, os problemas B e G foram os que mais apresentaram erros entre os alunos que tentaram respondê-los, seguidos dos problemas D e E.

Entre os problemas que abordavam o caso geral, os alunos tiveram mais facilidade para compreender o problema B, sobre os naipes das cartas de um baralho, embora tenha sido no problema E, sobre os cartões, que eles tenham apresentado menos erros.

Os problemas em que os alunos apresentaram mais facilidade, e consequentemente mais acertos, foram o A e o F.

Entre os problemas que abordavam o princípio usual, o que os alunos tiveram maior dificuldade de compreensão foi o problema D, que tratava da caixa com bolas coloridas. Quase todos os grupos pediram auxílio nesse problema, sendo o que apresentou maior porcentagem de erro, entre os problemas desse tipo.

Durante a aula os alunos foram auxiliados pela professora, que os induziu para que chegassem à resposta correta. Todo acerto era devidamente confirmado. No decorrer da dinâmica, as respostas das atividades foram trocadas entre os alunos de tal forma que alguns já sabiam o resultado antes mesmo de ter lido a questão. Dessa forma, observou-se que alguns alunos, ao invés de compreender o problema, tentavam adivinhar como chegar ao resultado que eles já sabiam estar correto. Esse fato pode ter prejudicado o desenvolvimento do raciocínio de alguns alunos e, por este motivo, em uma próxima aplicação, o ideal seria evitar que isso acontecesse, por exemplo, procurando conscientizar os alunos de que a troca de informações não trará benefícios aos seus aprendizados.

Houve uma boa receptividade dos alunos à aula proposta, percebida inclusive pelos comentários de “muito legal essa aula” no final do período.

Os alunos não apresentaram dificuldade muito evidente quanto à interpretação dos problemas, situação que é muito frequente em aulas de matemática. Em geral, os alunos compreendiam o que estava sendo perguntado embora, às vezes, não soubessem como resolver a situação proposta.

5.3 A APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ATIVIDADE 2

Muitos alunos iniciaram a aula questionando se uma continuidade à aula anterior seria dada. A animação decorria da manipulação do material concreto, pois houve um certo desânimo quando foram informados que os mesmos não seriam utilizados nesta aula. No entanto, todos se mostraram entusiasmados quando informados de que poderiam repetir os grupos da aula anterior.

Estavam presentes 26 alunos nessa aula. Novamente, dois alunos não entregaram a atividade, não sendo os mesmos dois da aula anterior. A maioria dos alunos se mostrou empenhada na resolução dos problemas, apesar da dificuldade demonstrada por muitos. Tanto que, os que entregaram, responderam todas as questões propostas.

O tempo planejado de dois períodos para a atividade foi suficiente e adequado.

Mais uma vez, alguns alunos se destacaram e responderam rapidamente quase sem ajuda. Outros alunos tiveram mais dificuldades, especialmente na primeira questão, a qual abordava o caso geral do princípio. Em diversos momentos, tornou-se necessária a intervenção da professora que procurava fazer questionamentos que auxiliassem na compreensão dos problemas. A partir desses questionamentos, os alunos logo compreendiam a lógica e conseguiam responder às questões propostas.

5.3.1 **Sobre o problema 1**

O enunciado do problema 1 estabelecia a seguinte situação.

1) Conte o número de alunos presentes na sala hoje.

a) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que fazem aniversário no mesmo mês?

b) Quantos alunos, no mínimo, é possível afirmar que farão (ou já fizeram) aniversário em um mesmo dia da semana neste ano?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: (a) Pelo PCP, o número de casas nesse exercício é dado pelo número de meses de um ano, $n = 12$. Os pombos representam os alunos, que nesse dia eram 26.

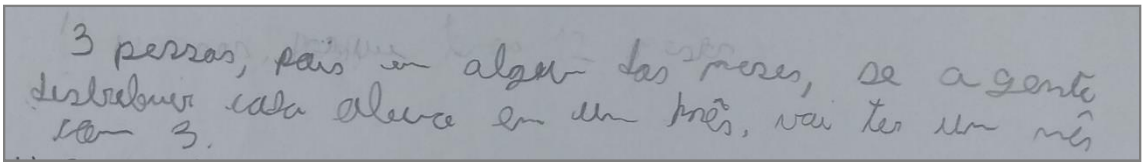
Como $26 = \underbrace{12 \times 2 + 1}_{nk+1} + 1$, então $k = 2$, de onde pode-se afirmar que haverão $k + 1 = 2 + 1 = 3$ pombos em alguma das casas, ou seja, no mínimo três alunos fazem aniversário em algum dos meses. Vale ressaltar que não é possível realizar nenhuma afirmação sobre o $+1$ que excede da forma $nk + 1$ nesse caso, pois esse aluno pode fazer aniversário em qualquer um dos meses.

(b) O número de casas nesse caso é dado pelos dias da semana, ou seja, $n = 7$. Como $26 = \underbrace{7 \times 3 + 1}_{nk+1} + 4$, temos $k = 3$ e portanto, $k + 1 = 3 + 1 = 4$, ou seja, no mínimo quatro alunos farão, ou fizeram, aniversário em um mesmo dia da semana neste ano.

Vale observar que se houvessem 22 alunos na sala já seria possível fazer a mesma afirmação já que $22 = 7 \times 3 + 1$, ou seja, seria possível que 21 alunos estivessem igualmente distribuídos nos sete dias da semana e, neste caso, o 22º certamente ocuparia um dia da semana já ocupado por outros três alunos. No entanto, como não eram 22, mas sim, 26 alunos presentes e $26 = 7 \times 3 + 1 + 4$, os quatro alunos que excedem da forma $nk + 1$ podem ser distribuídos de diferentes formas nos sete dias da semana e por isso não é possível fazer qualquer afirmação sobre o dia da semana que será o aniversário deles. Portanto a afirmação feita para os 26 alunos presentes é a mesma que se faria se fossem 22 alunos.

Dezenove alunos resolveram corretamente o item (a). A melhor resposta é apresentada na Figura 12, onde o aluno afirma que são necessárias “3 pessoas, pois em algum dos meses, se a gente distribuir cada aluno em um mês, vai ter um mês com 3.”

Figura 12 – Resposta dada para o problema 1A

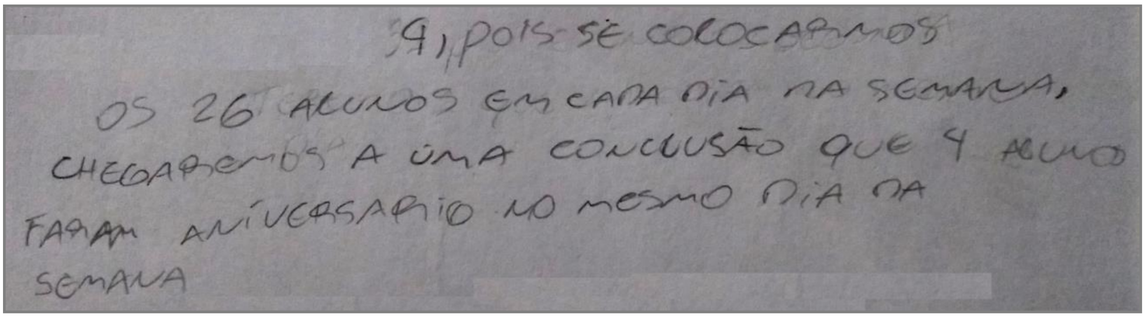


Fonte: Dados da pesquisa

Para auxiliar na resolução do problema 1 (a), a professora questionava se era possível que, em um grupo de 12 pessoas, cada uma das 12 fizesse aniversário em um mês diferente das outras. Na sequência, os alunos eram questionados sobre o que aconteceria se houvesse uma pessoa a mais nesse grupo. Dentre as resoluções incorretas, quatro responderam que 13 alunos fariam aniversário no mesmo mês. Observa-se que esse é o número necessário para que se possa afirmar que há dois alunos fazendo aniversário em um mesmo mês. Esta resposta deve ter sido induzida pelos questionamentos feitos, os quais tinham a intenção de auxiliar na resolução. Isso demonstra que, nesse caso, os alunos não conseguiram conectar a explicação com o que estava sendo proposto no exercício. No entanto, houve uma compreensão parcial, o que já é bastante válido, pois evidencia que estes alunos estão em processo de aprendizado.

Apenas 12 alunos resolveram corretamente o item (b) do problema 1. Precisamente a metade dos que tentaram resolvê-lo Nenhum deles explicou de forma clara como obteve o resultado, conforme ilustrado na Figura 13, em que o aluno afirma que são necessários “4, pois se colocarmos os 26 alunos em cada dia da semana, chegaremos a uma conclusão que 4 alunos faram [sic] aniversario no mesmo dia da semana”.

Figura 13 – Resposta dada para o problema 1 B



Fonte: Dados da pesquisa

Dentre os alunos que responderam incorretamente, seis afirmaram que oito alunos farão (ou já fizeram) aniversário em um mesmo dia da semana neste ano. Observa-se que este seria o número de pessoas necessárias para que houvesse, pelo menos, duas fazendo aniversário em um mesmo dia da semana. Quatro alunos responderam dois e, outros dois alunos, responderam 13. Com isso, foi possível observar que o nível de compreensão foi bem baixo nesse problema.

5.3.2 Sobre o problema 2

O enunciado do problema 2 estabelecia a seguinte situação.

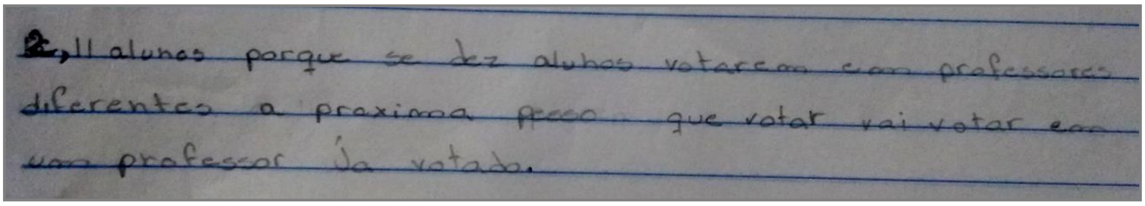
2) Se for realizada uma votação para escolher o professor conselheiro da turma, em um grupo de dez professores, quantos alunos devem votar, no mínimo, para que se possa afirmar que um professor recebeu dois votos?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de professores são as casas, isto é, $n = 10$. Os votos representam os pombos. Como se quer dois pombos em alguma das casas, deve-se ter $n + 1$ pombos. Logo, são necessários, no mínimo, 11 votos para que se possa afirmar que algum professor recebeu dois votos.

Vinte e dois alunos responderam esse problema corretamente. Alguns conseguiram apresentar uma boa explicação para o resultado dado, como o ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Resposta dada para o problema 2



Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, o aluno respondeu que são necessários “11 alunos porque se dez alunos votarem em professores diferentes a proxima [sic] pessoa que votar vai votar em um professor já votado.”

5.3.3 Sobre o problema 3

O enunciado do problema 3 estabelecia a seguinte situação.

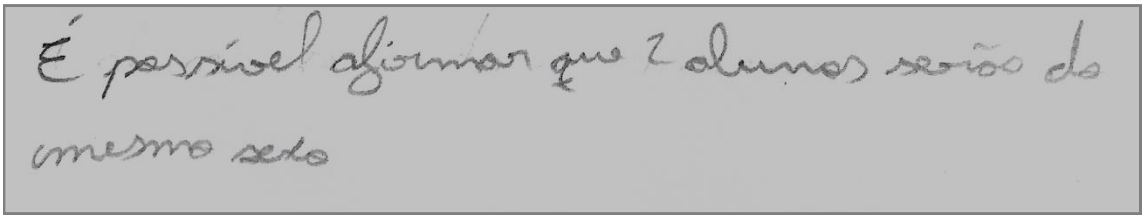
3) Em um grupo de três alunos é possível afirmar que há, no mínimo, quantas pessoas do mesmo sexo?

Uma possível solução para este problema por ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de casas, $n = 2$, está representando as duas possibilidades de sexo, que são masculino e feminino. Os pombos representam os alunos. Assim, temos três pombos para distribuir em duas casas, de modo que, existirão pelo menos dois pombos em alguma das casas. Ou seja, deve haver pelo menos dois alunos do mesmo sexo.

Todas as respostas dadas para esse problema foram consideradas corretas, embora muitas delas não apresentassem justificativas redigidas de maneira adequada. Na Figura 15 está ilustrado um exemplo, onde o aluno responde que "É possível afirmar que 2 alunos serão do mesmo sexo". O correto seria acrescentar um "pelo menos" ao final da frase. Além disso, como o aluno apresentou somente o resultado, não é possível compreender qual foi a estratégia ou raciocínio empregado para obter essa resposta.

Figura 15 – Resposta dada para o problema 3



Fonte: Dados da pesquisa

O grande número de acertos desse problema pode ter sido decorrente da facilidade de se elencar os diferentes grupos formados por três pessoas. Essa forma de resolver o problema, descrevendo as possibilidades de formação dos grupos, é uma maneira de concretizar a situação proposta. Isso demonstra que os alunos apresentam mais facilidade quando conseguem manipular a situação de maneira mais concreta, não dependendo somente da abstração.

5.3.4 Sobre o problema 4

O enunciado do problema 4 estabelecia a seguinte situação.

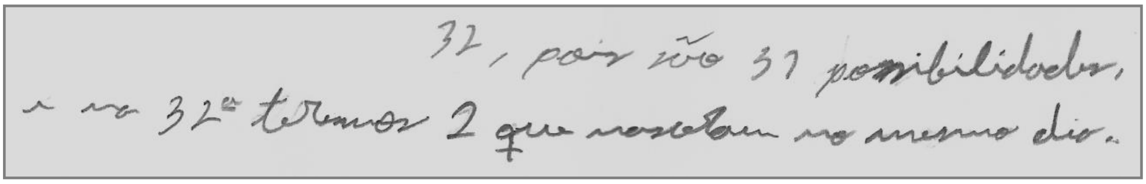
4) Quantas pessoas deveriam ter na sala para que se possa afirmar que, pelo menos, duas nasceram em um mesmo dia? (não necessariamente no mesmo mês. Exemplo: 17 de agosto e 17 de janeiro).

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de casas, nesse caso, é o número máximo de dias que um mês pode ter, ou seja, $n = 31$. Os pombos representam as pessoas. Neste caso, para garantir que hajam dois pombos em uma das casas, precisa-se de, no mínimo, $n + 1 = 31 + 1 = 32$ pombos. Portanto, são necessárias 32 pessoas na sala para que seja possível afirmar que, pelo menos, duas nasceram em um mesmo dia do mês.

Neste problema, cinco alunos apresentaram respostas erradas. Três responderam 13 pessoas, um aluno respondeu 2 e outro respondeu 24. É possível supor que as respostas 13 e 24 tenham relação com o número de meses do ano, o que evidencia alguma confusão na interpretação do enunciado. No entanto, como não há justificativa junto ao resultado, não é possível ter certeza quanto a esta suposição. Um exemplo de resposta correta que apresenta uma boa justificativa é ilustrado na Figura 16.

Figura 16 – Resposta dada para o problema 4



Fonte: Dados da pesquisa

Neste registro, o aluno responde “32, pois são 31 possibilidades, e na 32ª teremos 2 que nasceram no mesmo dia.”

5.3.5 **Sobre o problema 5**

O enunciado do problema 5 estabelecia a seguinte situação.

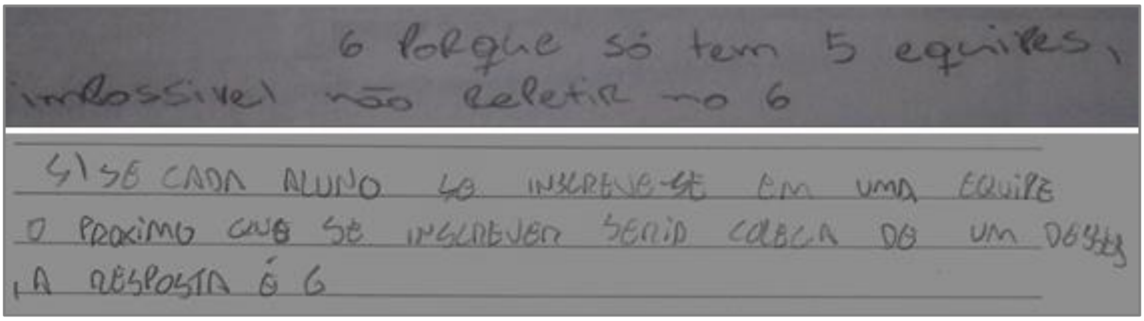
5) Será feita uma gincana na escola. Haverá cinco equipes nas quais os alunos poderão se inscrever. Supondo que ordenadamente os alunos da turma escolham a sua equipe, a partir de qual aluno será possível afirmar que haverá dois alunos da turma em uma mesma equipe?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de casas é igual ao número de equipes, isto é $n = 5$. O número de pombos é dado pelo número de alunos. Como se quer dois pombos em alguma das casas é preciso $n + 1 = 5 + 1 = 6$ pombos. Logo, a partir do sexto aluno, é correto afirmar que haverá, pelo menos, dois alunos da turma em alguma das equipes.

Todos os alunos que responderam, acertaram esse problema. Muitas respostas demonstraram uma boa compreensão, duas delas estão ilustradas na Figura 17.

Figura 17 – Duas respostas apresentadas para o problema 5



Fonte: Dados da pesquisa

Um dos alunos responde “6 porque só tem 5 equipes, impossível não repetir no 6”, enquanto que outro destaca que “Se cada aluno se inscreve-se em uma equipe o proximo que se inscrever seria colega de um desses, a resposta é 6 [sic]”.

5.3.6 **Sobre o problema 6**

O enunciado do problema 6 estabelecia a seguinte situação.

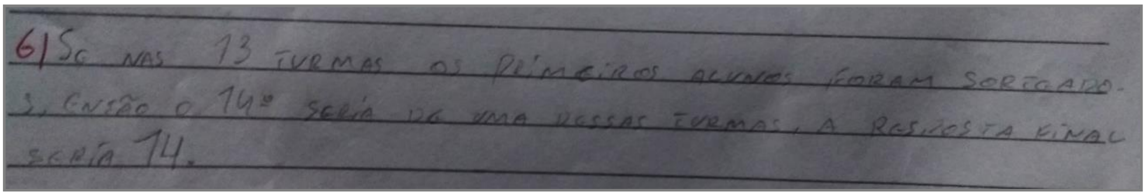
6) Na nossa escola há 13 turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. Será realizado um sorteio para selecionar 40 desses alunos para representar a escola em uma gincana. A partir de qual sorteado será possível afirmar que há pelo menos dois alunos sorteados de uma mesma turma?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: O número de casas, neste caso, é dado pelo número de turmas, ou seja, $n = 13$. Os pombos representam os alunos. Como se quer dois em alguma das casas, são necessários, pelo menos, $n + 1 = 13 + 1 = 14$ pombos. Portanto, a partir do 14º sorteado, é possível afirmar que haverá pelo menos dois alunos de uma mesma turma.

Todos os alunos, que responderam a esse problema, apresentaram resultado correto. Um ponto satisfatório desse problema é que ninguém utilizou o valor 40 presente no enunciado, erro muito comum cometido pelos alunos. Um ponto negativo é que, no geral, os alunos tiveram dificuldade de justificar seu resultado, não conseguindo expressar de forma clara seu pensamento, além de apresentarem erros na escrita. Um exemplo disso está ilustrado na Figura 18, onde o aluno registra a resposta “Se nas 13 turmas os primeiros alunos foram sorteados, então o 14º seria de uma dessas turmas, a resposta final seria 14.”

Figura 18 – Resposta dada para o problema 6

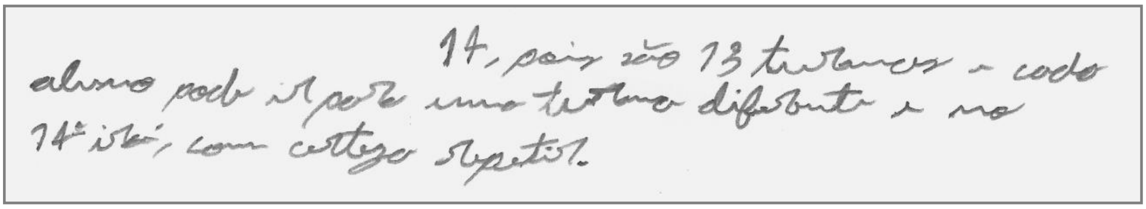


Fonte: Dados da pesquisa

Esse tipo de escrita confusa e com muitos erros apareceu em todos os problemas, tanto da primeira quanto da segunda atividade propostas, e revelam um grave problema de comunicação que boa parte dos alunos dessa turma possui. Infelizmente, por experiência da autora deste trabalho, afirma-se que esse problema não é exclusivo dessa turma, ao menos no âmbito das escolas municipais de Porto Alegre.

Na sequência, é ilustrada na Figura 19 outra resposta dada para a questão que exibiu a melhor justificativa, ainda que bastante confusa.

Figura 19 – Outra resposta dada para o problema 6


14, pois são 13 turmas e cada aluno pode ir para uma turma diferente e no 14º irá, com certeza repetir.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, o aluno respondeu “14, pois são 13 turmas e cada aluno pode ir para uma turma diferente e no 14º irá, com certeza repetir.”. Acredita-se que o aluno quis dizer “cada aluno pode ser de uma turma diferente” ao invés de “cada aluno pode ir para uma turma diferente”.

5.3.7 Síntese dos resultados

Apresentam-se aqui os resultados obtidos ao longo da aplicação das atividades. A análise foi condensada de forma que os dados sejam facilmente visualizados no Quadro 2.

Quadro 2 – Dados quantitativos das respostas apresentadas na atividade 2

Problema	**Número de alunos que responderam**	**Número de respostas corretas**	**Percentual de acerto entre os que responderam**
1 A	24	19	79,1%
1 B	24	12	50%
2	24	22	91,6%
3	24	24	100%
4	24	19	79,1%
5	24	24	100%
6	24	24	100%

Fonte: A autora

Ao contrário da atividade 1, em que os grupos resolveram os problemas cada um em uma ordem diferente, na atividade 2, embora não houvesse a obrigatoriedade de realizar na ordem em que apareciam, a maioria dos alunos assim o fez. Com isso, é possível pressupor que o nível de compreensão foi aumentando no decorrer da aula, já que as últimas duas questões não apresentaram erros.

Conforme o Quadro 2, o problema 1 apresentou o menor índice de acerto, o qual aborda também o caso geral do PCP. Vale observar ainda que este problema, assim como o problema 3, aborda a lógica de uma forma invertida em relação às outras. Neles são fornecidos os valores e se questionam o número de repetições, enquanto nas outras se pergunta o valor necessário para um determinado número de repetições. A diferença entre os dois é que o problema 3 aborda o PCP usual e todos os alunos que o responderam fizeram corretamente. Essa análise reforça a dificuldade apresentada pelos alunos com o caso geral do PCP.

Dentre os problemas que abordavam o PCP usual, o que mais apresentou erros foi o problema 4. Embora seu enunciado estivesse claro, os alunos apresentaram dificuldades de compreensão, aos quais creditam-se os erros cometidos.

No geral, os alunos apresentaram muitas dúvidas no início da aula, mas evoluíram bem no decorrer da mesma e, no final, já conseguiam responder as perguntas corretamente e sem auxílio, demonstrando compreensão da lógica presente nos problemas.

5.4 APLICAÇÃO DA PROPOSTA DE ATIVIDADE 3

A terceira atividade proposta era um desafio. Tratava-se de uma questão de maior complexidade e necessidade de abstração envolvendo o PCP. No dia em que foi aplicada, estavam presentes 25 alunos. Infelizmente, três alunos que se destacaram nas aulas anteriores e com grande potencial para resolver o desafio, não estavam presentes.

O tempo estimado para execução dessa atividade não foi suficiente, sendo necessários dois períodos completos de 45 minutos.

5.4.1 **O desafio**

O desafio proposto constava do seguinte problema, adaptado da questão 10 do nível 3 do banco de questões da OBMEP de 2016.

Desafio: Uma urna contém k bolas marcadas com k, para todo k = 1,2,...,2019. Ou seja, há uma bola com o número 1, duas bolas com o número 2 e assim sucessivamente. Qual é o número mínimo de bolas que devemos retirar, sem reposição e sem olharmos as bolas, para termos certeza de que teremos 12 bolas com o mesmo número?

Uma possível solução para este problema pode ser obtida através do PCP, conforme se destaca a seguir.

Solução: Para resolver esse problema, observa-se inicialmente que as bolinhas de 1 até 11 não estão em quantidade suficiente para as 12 repetições solicitadas. Já as bolinhas de 12 até 2019 sim e, por isso, consideram-se somente estas para aplicação do PCP geral.

O número de casas, nesse caso, é dado pelos 2008 tipos de bolas diferentes que existem da bolinha 12 até a 2019, ou seja, $n = 2008$. Os pombos representam as bolinhas. Como se quer 12 repetições tem-se $k + 1 = 12$ e, portanto, $k = 11$. Ou seja, para se ter 12 pombos em uma das casas, deve-se ter, no mínimo, $nk + 1 = 2008 \times 11 + 1 = 22089$ pombos. Dessa forma, se houvessem somente as bolinhas a partir do número 12, seriam necessárias, no mínimo, 22089 bolas.

No entanto, existem as bolinhas com numeração de 1 até 11 que também estão na urna e podem ser retiradas. Por isso, torna-se necessário saber a quantidade dessas bolinhas também.

Como tem-se uma bolinha com o número um, duas com o número dois e assim sucessivamente, essa quantidade será expressa pela soma $1 + 2 + 3 + \cdots + 11$, cujas parcelas estão em progressão aritmética (P.A.) de $n = 11$ termos, razão 1, com primeiro termo $a_1 = 1$ e último termo $a_{11} = 11$. Logo, usando a fórmula

$$S_n = \frac{(a_n + a_1) \, . \, n}{2}$$

que fornece a soma dos termos de uma P.A. obtém-se

$$\frac{(11 + 1) \, . \, 11}{2} = \frac{12 \, . 11}{2} = 6 \, . \, 11 = 66.$$

Portanto são 66 bolinhas com numeração inferior a 12.

Na pior das hipóteses, considera-se que antes de começar a retirar as bolinhas que realmente podem ter 12 repetições, retiram-se todas as 66 que não têm essa possibilidade. Logo, o número mínimo de bolinhas a ser retirado deve ser $22089 + 66 = 22155$.

5.4.2 **Sobre a aplicação do desafio**

A aula iniciou retomando as questões das aulas anteriores, enfatizando que todos os problemas trabalhados, inclusive o desafio que seria proposto na sequência, possuíam a mesma lógica.

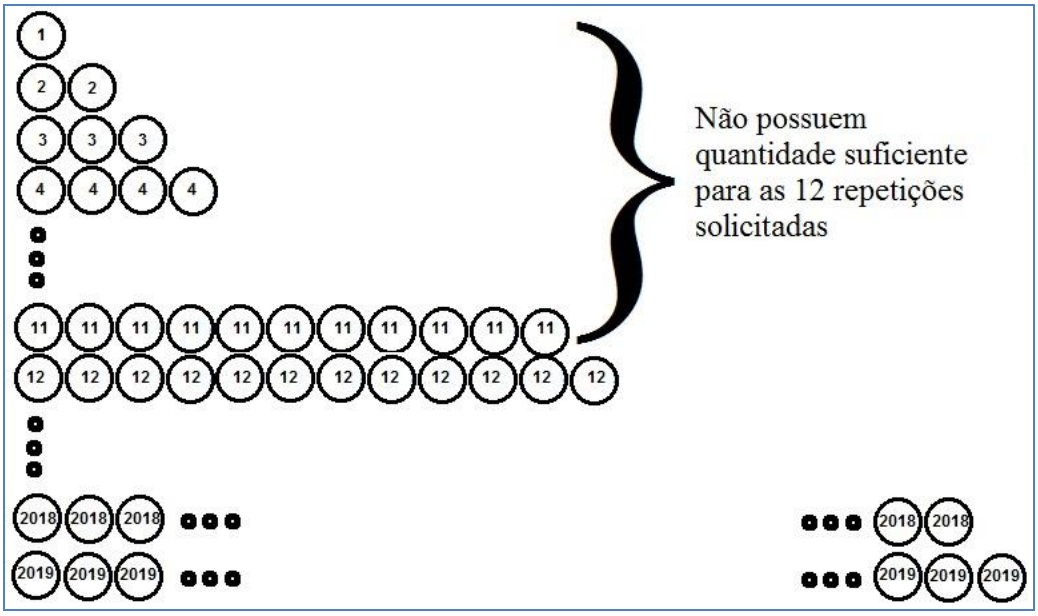
Foi proposto o seguinte exercício: quantas pessoas são necessárias em um grupo para que se possa afirmar que, pelo menos, quatro delas fazem aniversário em um mesmo mês?

No quadro, foram descritas todas as possibilidades de meses. Imaginando um grupo formado por 12 pessoas, distribuiu-se cada uma em um mês diferente e se questionou se aquela situação seria possível. O grupo foi ampliado de tal forma que cada mês ficasse com exatamente três pessoas. No que segue, discutiu-se sobre o que aconteceria se esse grupo tivesse uma 37º pessoa. Concluiu-se que o número de pessoas necessárias em um grupo para que se possa afirmar que, pelo menos, quatro delas fazem aniversário em um mesmo mês é $37 = 36 + 1 = 12 \times 3 + 1$.

Na sequência, o desafio foi lido em voz alta para todos. Informou-se que ele era realmente mais complexo que os outros, precisando de mais empenho e, por isso, os acertadores seriam merecedores de um prêmio. A promessa surtiu efeito já que a maior parte da turma encarou o desafio com seriedade e realmente tentou resolvê-lo. Tanto que foi necessário mais tempo do que o previsto inicialmente.

Explicou-se o que o problema pedia e um desenho ilustrativo das bolinhas, semelhante ao da Figura 20, foi feito no quadro.

Figura 20 – Ilustração do desenho feito no quadro



Fonte: A autora

Foi explicado que as primeiras bolinhas não tinham quantidade suficiente para serem repetidas 12 vezes, no que se sugeriu separar o exercício em dois casos. As bolinhas de um a 11 que não poderiam se repetir 12 vezes seriam o primeiro caso e, as bolinhas de 12 a 2019 que poderiam se repetir 12 vezes, o segundo caso. Reforçou-se que o cálculo do segundo caso era semelhante ao exemplo inicial da aula.

A maioria dos alunos se mostrou motivada e curiosa com o desafio proposto. Foi percebido que realmente tentaram resolver e mais de um aluno pediu que a resposta e a explicação fossem dadas na aula seguinte.

5.4.3 Analisando os resultados

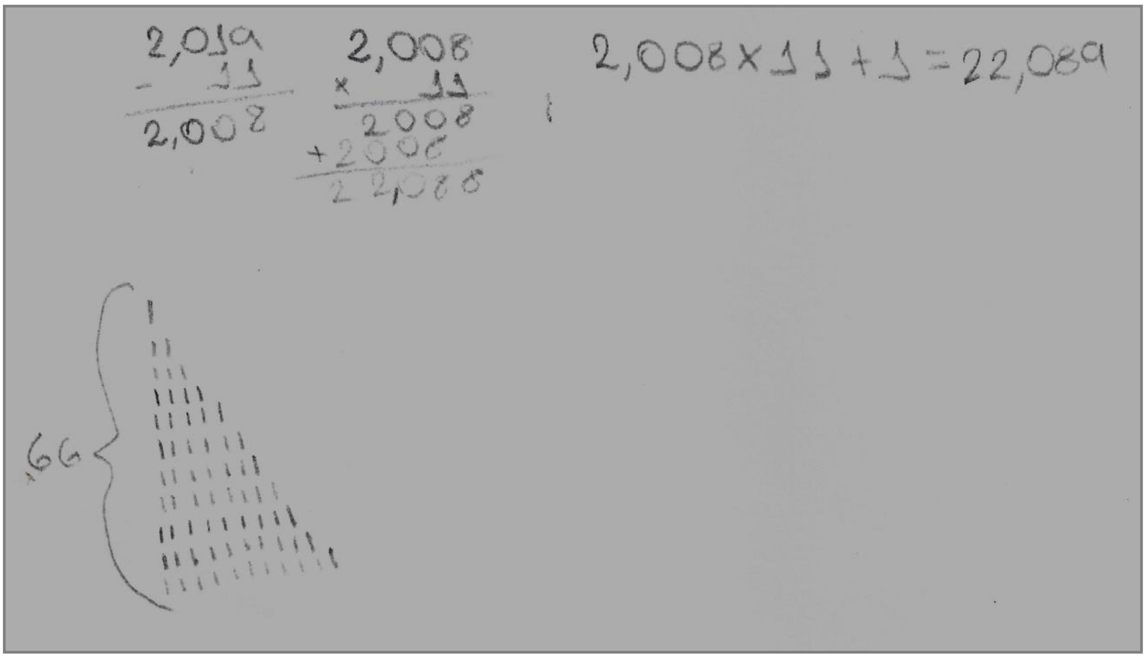
Nove alunos entregaram a atividade em branco. No entanto não foi caso de desleixo ou falta de motivação. Muitos desses tentaram resolver, mas não conseguiram. Estes optaram não escrever nada no papel na hora de entregar a atividade.

Dos 16 que entregaram algo escrito, seis alunos se destacaram. Três chegaram muito perto do resultado, apresentando um raciocínio próprio ou seguindo as dicas dadas. Outros três acertaram o problema completamente, dois deles seguindo as dicas e um terceiro usando uma estratégia própria.

Em geral os alunos solicitaram bastante auxílio no decorrer da aula. Nestes momentos eram informados se estavam no caminho certo ou se havia falhas nas suas estratégias. Essa orientação sempre era feita através de questionamentos para que os alunos refletissem sobre a estratégia adotada e percebessem quando a mesma não estava correta.

A Figura 21 ilustra a resposta de uma aluna que chegou bem perto do resultado correto.

Figura 21 – Resposta dada ao desafio



Fonte: Dados da pesquisa

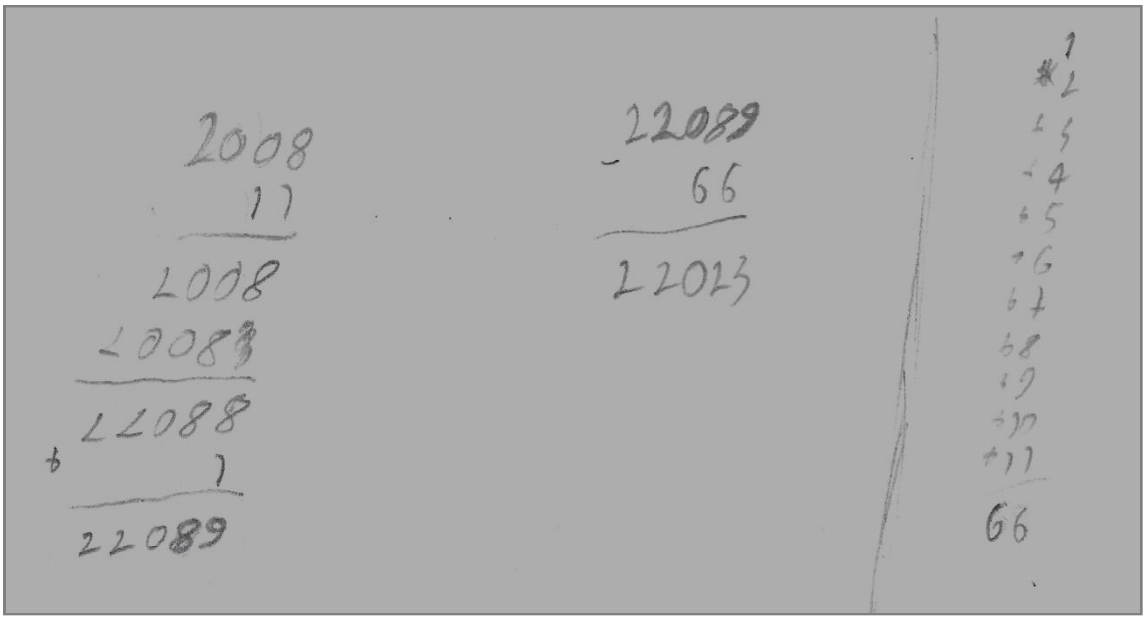
Essa aluna se destacou em todas as aulas mostrando ter compreendido bem o princípio. O desafio a deixou intrigada e motivada a encontrar a solução até o final. Ela conseguiu compreender o problema e chegar ao valor 22089. Também contou as 66 bolinhas que existem com numeração de 1 a 11, mas não sabia o que fazer com os dois valores calculados.

Todos os alunos que chegaram ao valor 66, o total de bolinhas com numeração menor do que 12 foram contando uma a uma, ou somando termo a termo, já que progressão aritmética não é um assunto abordado no Ensino Fundamental.

Na aula seguinte, quando foi resolvido o desafio para toda a turma, este valor foi calculado de uma forma mais fácil. Mostrou-se que, em uma Progressão Aritmética (P.A.) de termos $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$, tem-se $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \cdots$ e assim sucessivamente, obtendo a fórmula da soma dos termos de uma P.A. de uma forma simplificada. Não foi mencionado que essa sequência era uma progressão aritmética por entender que não era o objetivo daquela aula. No entanto, acredita-se que esse desafio também possa ser utilizado como motivador para o ensino desse conteúdo específico.

Outro aluno que chegou aos valores 22089 e 66 apresentou a resposta que consta na Figura 22.

Figura 22 – Resposta dada ao desafio

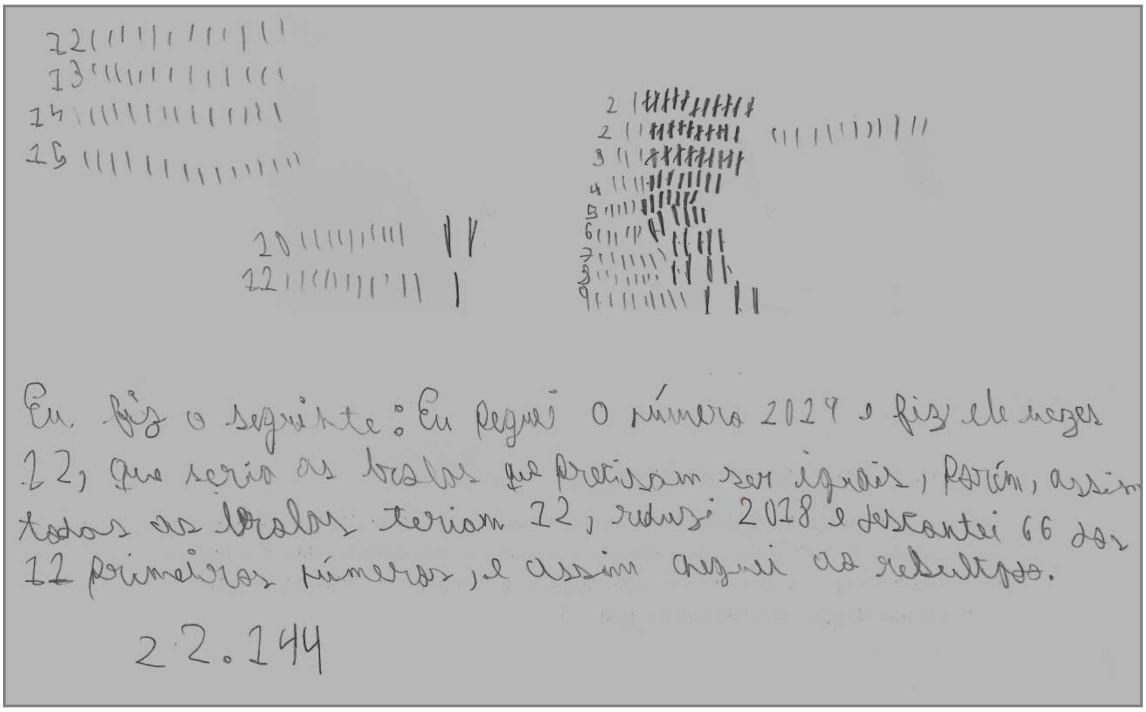


Fonte: Dados da pesquisa

No entanto esse aluno também não compreendeu o significado dos valores que encontrou nos cálculos.

O terceiro aluno que chegou próximo do resultado adotou uma estratégia própria, como ilustra a Figura 23.

Figura 23 – Resposta dada ao desafio



Fonte: Dados da pesquisa

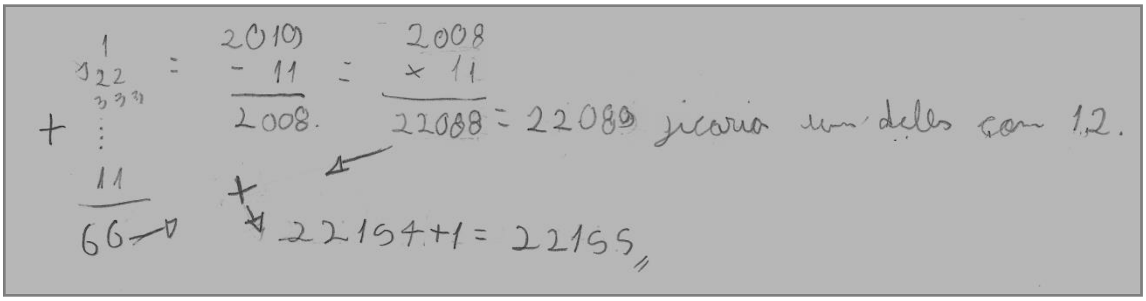
No registro, o aluno respondeu que "Eu fiz o seguinte: Eu peguei o número 2019 e fiz ele vezes 12, que seria as bolas que precisam ser iguais, porém, assim todas as bolas teriam 12, reduzi 2018 e descontei 66 dos 12 primeiros números, e assim cheguei ao resultado 22144".

Procurou-se entender como o aluno pensou. Primeiro ele multiplicou as 2019 possibilidades de bolinhas por 12. Ao fazer isso, todas as bolinhas terão 12 repetições e na realidade só é necessário que uma se repita 12 vezes. Por isso ele decidiu reduzir 2018 bolinhas, para que somente um número fique com 12 repetições. Além disso, ele percebeu que na sua contagem está considerando bolinhas que não existem, que são 11 bolinhas com o número um, dez bolinhas com o número dois e assim sucessivamente, até chegar em uma bolinha com o número 11, totalizando $11 + 10 + \cdots + 1$ bolinhas. Esta é exatamente a mesma soma das bolinhas existentes de 1 até 11, isto é, 66. Como essas bolinhas não existem, mas estão sendo consideradas no cálculo, esse valor também deve ser descontado.

Esse aluno apresentou uma ótima estratégia e só se equivocou quando descontou duas vezes a 12ª bolinha do total de bolinhas de um até 11. Portanto, se forem adicionadas essas 11 bolinhas ao resultado encontrado por ele, chega-se ao resultado correto.

Entre os alunos que acertaram o desafio, duas chegaram ao resultado correto colaborando uma com a outra. Suas respostas estão expostas nas Figuras 24 e 25.

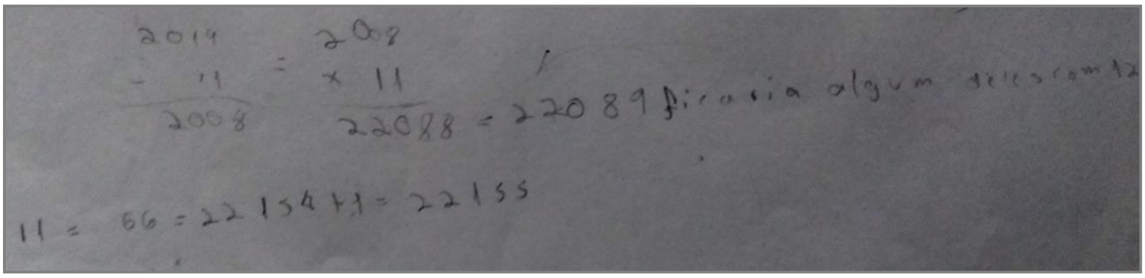
Figura 24 – Resposta correta dada ao desafio



Fonte: Dados da pesquisa

É possível perceber que essas alunas chegaram ao resultado seguindo exatamente as dicas dadas e apresentaram respostas bem semelhantes.

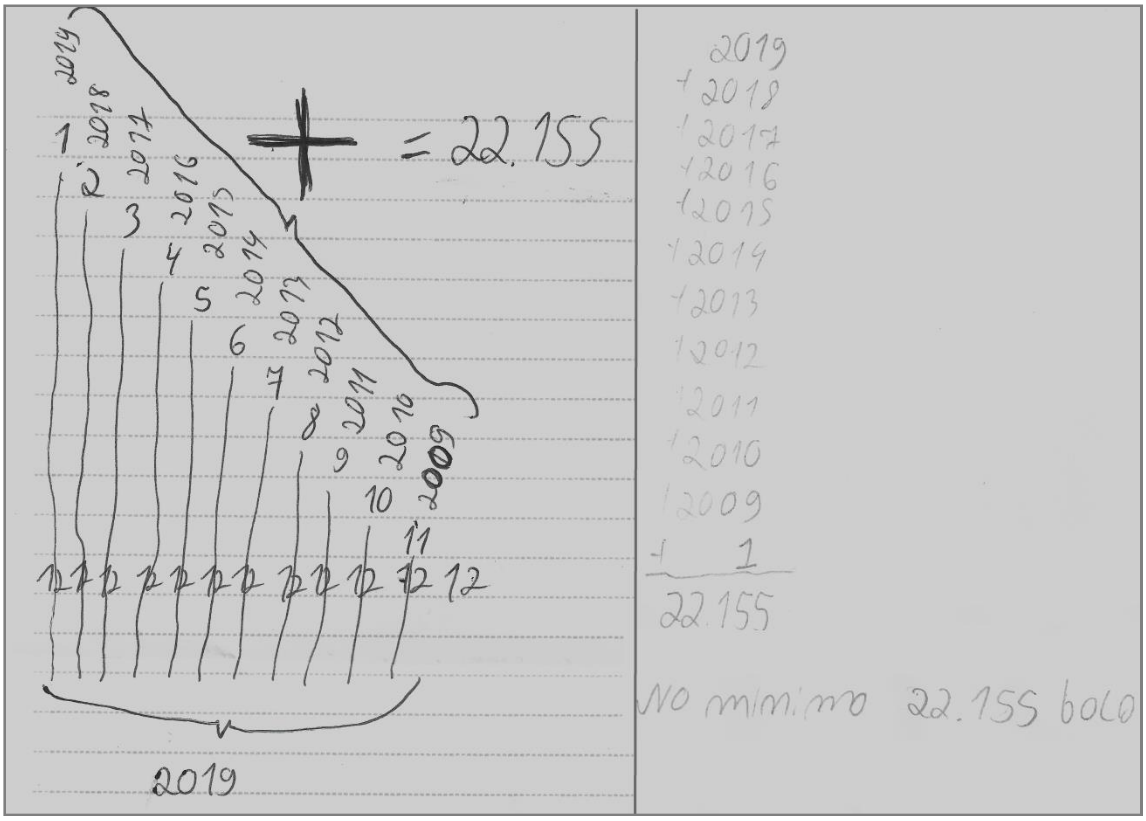
Figura 25 – Outra resposta correta dada ao desafio



Fonte: Dados da pesquisa

Outro aluno que apresentou resultado correto utilizou uma estratégia própria conforme é apresentado na Figura 26.

Figura 26 – Resposta dada ao desafio



Fonte: Dados da pesquisa

Esse aluno teve a seguinte ideia. Suponha que sejam retiradas todas as primeiras bolinhas de todos os números. Isso corresponde a 2019 bolinhas. Depois retira-se todas as segundas bolinhas de cada. Como a bolinha 1 não possui segunda bolinha, são 2018 segundas bolinhas. Após retirar todas as 2017 terceiras bolinhas de cada número, repete-se esse processo até que sejam retiradas todas as 11ª primeiras bolinhas de todas as bolinhas, que serão 2008. A próxima bolinha a ser retirada certamente será a 12ª bolinha de alguma bolinha. O resultado será então a soma de todos esses valores de bolinhas retiradas.

$$2019 + 2018 + 2017 + \cdots + 2009 + 1 = 22155$$

Interessante foi que ele chegou a esse resultado rapidamente e sozinho. Acredita-se que sua estratégia tenha se baseado na ilustração das bolinhas feita no quadro. De qualquer forma, ele demonstrou em excelente raciocínio e compreensão do assunto estudado, o que foi muito satisfatório.

Considerando a complexidade do problema, e que o mesmo originalmente é destinado a alunos do ensino médio, avalia-se que um número significativo dos alunos da turma conseguiu resolvê-lo, ou chegar muito perto da resolução, utilizando diferentes estratégias de raciocínio lógico e conseguindo aplicar o PCP trabalhado nas aulas anteriores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O propósito dessa dissertação foi apresentar uma maneira de inserir um conteúdo abordado no curso de Mestrado Profissional em Matemática no Ensino Fundamental de forma a valorizar o aprendizado de alunos do Ensino Fundamental.

O grande diferencial dessa pesquisa está no fato de que a sua aplicação ocorreu em uma turma regular do Ensino Fundamental e não em um grupo de estudantes selecionados formando uma sala de aula irreal. Isto fez com que aparecessem situações adversas, como os alunos que entregaram a atividade em branco, os que não compreenderam a proposta e não expuseram suas dúvidas e os que faltaram e perderam a sequência do trabalho. Adversidades muito comuns em qualquer sala de aula.

No entanto, mesmo com as dificuldades, avalia-se que a aplicação da proposta foi muita positiva. Os alunos se mostraram motivados e realmente instigados com os problemas que eram propostos. Por isso, considera-se que a Resolução de Problemas foi uma ótima estratégia de ensino, pois era visível a animação durante as aulas e acredita-se que a maioria dos alunos conseguiu compreender o Princípio da Casa dos Pombos.

Antes da aplicação houve receio de que os alunos considerassem o desafio muito difícil e isso os desestimulassem. Temia-se até que nenhum dos alunos chegasse perto da solução. No entanto o que ocorreu foi justamente o contrário. A grande maioria dos alunos se empenhou muito, sentindo-se realmente desafiados. Inclusive alunos que não se destacam e muitas vezes nem se esforçam para isso, se comprometeram na resolução do desafio, apresentando assim uma melhora em suas autoestimas. Foi percebida até uma mudança de postura por parte de alguns destes alunos no decorrer do ano que se seguiu, mostrando-se mais empenhados e afetivos nas aulas de matemática, superando as expectativas da proposta.

Durante a aplicação das atividades foi percebido uma dificuldade maior nos exercícios que envolviam o caso geral do Princípio da Casa dos Pombos, visto que esses exercícios apresentaram mais erros. Com base nisso, sugere-se que, em uma próxima aplicação, a primeira atividade seja dividida em duas partes. A primeira parte destinada somente a exercícios sobre o caso usual do princípio, para que assim os alunos consigam fixar melhor o conceito antes de executar os exercícios sobre o caso geral, que estariam na segunda parte da atividade. Para tanto, seria interessante acrescentar outros exercícios em cada uma dessas partes, ampliando o tempo de aplicação da proposta.

Tendo em vista ainda a dificuldade apresentada pelos alunos com o caso geral do princípio, outra alteração interessante seria deslocar o primeiro problema da atividade 2 para o final da mesma, já que este é o único desse tipo nessa atividade.

Embora as atividades tenham sido elaboradas para um nono ano, acredita-se que elas possam ser executadas em outros anos do Ensino Fundamental. No entanto, para que isso ocorra, talvez sejam necessárias algumas adaptações, especialmente no desafio que é proposto na última atividade.

Uma alternativa para tornar o desafio viável para alunos de anos anteriores seria retirar do problema as bolinhas com numeração inferior a 12, ou seja, aquelas que não estão em número suficiente para as 12 repetições solicitadas. Neste caso, o problema se tornaria uma aplicação usual do Princípio da Casa dos Pombos e a dificuldade estaria em trabalhar com um número mais elevado de repetições e de casas, comparado com os exercícios das atividades 1 e 2.

Outra possibilidade que facilitaria ainda mais seria, além de retirar as bolas com numeração inferior a 12, diminuir o número de tipos de bolas ou número de repetições solicitadas ou até mesmo ambos, dependendo do nível de aprendizagem dos alunos. Porém, aconselha-se que não se retire o desafio por receio de que ele não seja respondido, pois o potencial dos alunos sempre pode nos surpreender, assim como aconteceu na execução da proposta presente neste trabalho.

Visto a análise apresentada, considera-se que a proposta de atividade presente neste trabalho atingiu seus objetivos e é digna de ser repetida outras vezes.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, T. P. **Princípio da casa dos pombos: uma abordagem diferenciada com objetos de aprendizagem**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (orgs). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35-52.

AMORIM, L. A. B. **O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico**. Dissertação (mestrado). Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.

_____, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_ 110518_ versaofinal_site.pdf. Acesso em: 18/03/2019

CARVALHO, P. C. P. **O Princípio das Gavetas**. Revista Eureka! Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, RJ, nº 5, 1999, p. 27-33.

COSTA, A. L. B. **O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico**. Dissertação (mestrado) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos: a experiência russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GIOCOMO, S. R. **Princípio da Casa dos Pombos**. Clubes de Matemática da OBMEP: Disseminando o Estudo da Matemática, 2008. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos/ Acesso em: 27/03/2019

HOLANDA, B. **Princípio da Casa dos Pombos I**. Programa Olímpico de Treinamento. Curso de Combinatória- Nível 2, 2012. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2014/02/Aula07-PCPI_bruno.pdf Acesso em: 27/03/2019

IMPA/OBMEP. **Banco de questões 2016**. Rios de Janeiro, IMPA, 2016.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, vol. 2. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

MORAES JÚNIOR, O. F. **O Princípio da Casa dos Pombos e a Contagem Dupla**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (orgs). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 17-34.

MUNIZ JÚNIOR, C. A. **Matemática Discreta: Médias e Princípio das Gavetas**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas. BOLEMA - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PAIVA, V. B. **Sobre Pombos e Gavetas**. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – Universidade Federal de São João del-Rei, 2014.

PLACIDINA, H. B. S. **O Princípio das Gavetas de Dirichlet: uma Proposta de Tarefas de Investigação Matemática**. 2017. 44 páginas. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. 1945. Título em inglês: “How to solve it: a new aspect of mathematical method”. Tradução de Heitor Lisboa Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SACCONI, L. A. **Dicionário essencial da língua portuguesa**. São Paulo: Atual, 2001.

ZONTA, C. A. **O Princípio da Casa dos Pombos aplicado ao ensino de matemática com metodologia ativa de aula invertida**. 2019. 66f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, Três Lagoas, 2019.