UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

WILIAM DE SOUSA SABINO

Subjetividade no Ensino Médio

Santo André

2013

Wiliam de Sousa Sabino

SUBJETIVIDADE NO ENSINO MÉDIO

Dissertação

Dissertação apresentada ao PROFMAT da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Santo André

2013

Universidade Federal do ABC

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato **Wiliam de Sousa Sabino**, realizada em 22 de maio de 2013.

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi (UFABC) – Presidente

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva (UFMA) – Membro Titular

Prof. Dr. João Carlos da Motta Ferreira (UFABC) – Membro Titular

Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi (UFABC) – Membro Suplente

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (UNICAMP) – Membro Suplente

Universidade Federal do ABC, Av. dos Estados, 5.001 - CEP 09210-580 - Santo André - SP
Tel 0 XX 11 - 4996-0086 www.ufabc.edu.br

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 31 de maio de 2013.

Assinatura do autor: ______________________________

Assinatura do orientador: ______________________________

Agradecimentos

A minha esposa, Renata C. Cazarim Sabino, pelo total apoio antes, durante e depois da conclusão das disciplinas do PROFMAT. Sem ela, não teria condições de concluir esta dissertação.

Ao meu filho, Victor Cazarim Sabino, que mesmo sendo uma criança soube ter maturidade suficiente para entender a necessidade da ausência do pai em alguns momentos de diversão. Finalmente, o papai terminou a dissertação e vai poder brincar um pouco mais com você, filho!

A Sociedade Brasileira de Matemática e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pela iniciativa deste modelo de mestrado.

A CAPES, pelo auxílio financeiro fundamental para a conclusão do curso.

A UFABC por ter se tornado um polo do PROFMAT e em tão pouco tempo já ser uma das mais respeitadas universidades do Brasil.

Ao querido Professor Dr. Rodney Carlos Bassanezi, por ter tido paciência e dedicação para ser meu orientador.

Aos professores do PROFMAT-UFABC por suas valiosas contribuições durante o curso.

Aos colegas de turma que demonstraram grande união ao longo de dois anos.

A querida tia Ivani pelo apoio na revisão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos os principais conceitos da Lógica Fuzzy, desde conjuntos fuzzy até números fuzzy. Tópicos importantes como a noção de alfa-nível, princípio da extensão e aritmética fuzzy são abordados. O objetivo é servir como fundamento para professores do ensino médio no que diz respeito à subjetividade existente em problemas reais da matemática básica. Foram propostos quatro problemas que podem ser utilizados em sala de aula, com ou sem o auxílio de recursos computacionais. Tais problemas ilustram situações em que a matemática clássica não é suficiente para se tomar alguma decisão e exemplificam o uso da Lógica Fuzzy no ensino-aprendizado de matemática escolar.

Palavras-chave: Teoria Fuzzy, Modelagem, Subjetividade, Resolução de Problemas.

Abstract

In this work we present the main concepts of Fuzzy logic, since fuzzy sets up fuzzy numbers. Important topics such as the concept of alpha-level, principle of extension and fuzzy arithmetic are addressed. The goal is to serve as the foundation for high school teachers with regard to subjectivity that exist in real problems of basic mathematics. Four problems have been proposed that can be used in the classroom, with or without the aid of computing resources. Such problems illustrate situations where the classical mathematics is not enough to take any decision and exemplify the use of fuzzy logic in the teaching and learning of mathematics.

Keywords: Fuzzy Theory, Modeling, Subjectivity, Problem Solving.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

É inegável que em algumas decisões do dia a dia os seres humanos precisam manipular situações extremamente complexas, baseados em informações aproximadas ou até mesmo imprecisas. O mecanismo usado para lidar com estas decisões é também de uma natureza imprecisa que, na maioria dos casos pode ser representada por meio de termos linguísticos. O uso da Teoria Fuzzy pode facilitar o uso da informação imprecisa, expressa por um conjunto de regras linguísticas, em conversão para um conjunto de termos matemáticos. Assim, se tivermos a capacidade de estabelecer uma conexão entre a estratégia a ser tomada e um conjunto de regras da forma **se...então** temos uma lista de regras ou algoritmo que podem ser implementados no computador. Produzimos, então, um sistema de regras sendo a Teoria Fuzzy fundamental para apresentar os quantificadores matemáticos indispensáveis à tomada de decisão dos seres humanos.

Na Grécia Antiga, Aristóteles (384-322 a.C.) foi o pioneiro em estabelecer um conjunto de regras rígidas para que conclusões recebessem a aceitação de logicamente válidas. Esta Lógica Aristotélica conduziu até uma linha de raciocínio, tendo como fundamentos premissas e conclusões. A esta lógica também atribuímos o nome de Lógica Ocidental. Sua essência é baseada em relações binárias, pois para cada afirmação só existem duas possibilidades: ou é verdadeira ou é falsa. Sendo impossível ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa.

Na Lógica Difusa, estes conceitos são quebrados, uma vez que é possível a coexistência entre termos opostos. Muitas situações no mundo real não podem ser simplesmente solucionadas com respostas do tipo sim ou não, como na Lógica Ocidental. Entre o ser ou não ser há inúmeros graus de incerteza e esta falta de precisão foi tratada anteriormente com a teoria das probabilidades. Entretanto, a teoria das probabilidades pode ser de certo modo incapaz de resolver alguns problemas práticos. Esta limitação se deve ao fato de a teoria das probabilidades tratar de um único tipo de incerteza: a de natureza aleatória, ficando as de conhecimento incompleto e vago ou impreciso negligenciadas. Por isso a Lógica Fuzzy tem se mostrado mais adequada para resolver problemas com informações imprecisas. A imprecisão e a incerteza são características intimamente ligadas e ao mesmo tempo com uma evidente oposição, pois quanto mais se aumenta uma, mais a outra diminui.

Por exemplo, qual é o horário de início do próximo filme da matinê? Poderíamos responder que o filme começa entre 14h00 e 15h00. Mas se desejássemos oferecer uma resposta mais precisa, diríamos que o filme começa por volta de 14h15, tendo um aumento da incerteza, pois a probabilidade do filme começar neste horário não é mais 1.

Mesmo com inúmeras situações do cotidiano pautadas por incerteza e imprecisão, o ensino de matemática na escola básica é, em grande parte, desenvolvido com uma ausência de significado no mundo real. Os resultados são sempre classificados como precisos, dotados de máximo rigor e, acima de tudo, pautado por situações puramente objetivas. Respostas subjetivas e de característica linguística são pouco utilizadas. Sendo muito comum a prática de professores e de alunos em acreditar fielmente no valor numérico que aparece como resposta no final do livro didático. O mundo subjetivo é muito pouco explorado e a matemática parece ser um privilégio de poucos que podem compreendê-la.

1.1 Objetivo

Nesta dissertação procuramos apresentar ao público interessado, professores do Ensino Médio e pesquisadores em Educação Matemática ou Ensino de Matemática, alguns problemas que retratam situações em que a subjetividade para a tomada de decisões se faz presente. Esses problemas podem servir para futuras pesquisas sobre este tema. Trata-se, portanto, de um material de auxílio ao professor de matemática que poderá iniciar novos projetos de pesquisa com os resultados obtidos na aplicação dos problemas em sala de aula.

1.2 Metodologia

Para tanto, fizemos uma pesquisa de revisão bibliográfica para conhecer os conceitos envolvidos na Teoria Fuzzy e encontrar problemas que necessitam dos conhecimentos dessa teoria. Evidentemente, nem todos os problemas encontrados na bibliografia apresentavam uma solução que dependia de conhecimentos de matemática do ensino médio. Desta forma, procuramos destacar os problemas que exigiam apenas conhecimentos básicos de conjuntos, intervalos e médias. A leitura e análise de dados agrupados em tabelas também é indispensável.

1.3 Estrutura da dissertação

No capítulo 2 apresentamos uma primeira abordagem com conjuntos fuzzy. Descrevemos as principais operações com conjuntos, o significado de conjunto fuzzy, função de pertinência e α-nível, exemplos e métodos para a inferência fuzzy.

No capítulo 3 descrevemos os principais conceitos sobre números fuzzy. As operações com intervalos e os principais tipos de números fuzzy também foram mencionados.

Por fim, colocamos 4 problemas para ilustrar situações em que a subjetividade é necessária à tomada de decisão, ou seja, o uso a Teoria Fuzzy para encontrar uma solução para problemas que a matemática clássica não consegue resolver.

Capítulo 2

Conjuntos Fuzzy

2.1 Incerteza

É evidente que a forma de pensar e a linguagem humana estão, necessariamente, pautadas por incertezas ou conceitos vagos, imprecisos. Nosso pensamento e linguagem não são uma relação binária, ou seja, não tomamos nossas decisões apenas com respostas do tipo sim ou não, branco ou preto, zero ou um. Em nosso cotidiano adicionamos muitas outras variedades para nossas decisões e classificações. Esses conceitos vagos ou incertos são chamados de fuzzy. Encontramos a imprecisão quase que em toda parte no nosso dia a dia.

2.1.1 Um pouco de motivação

Por exemplo, quando falamos sobre a altura de uma pessoa, a questão "ser ou não alto" depende do contexto. Uma pessoa com 1,80 m poderia ser considerada de estatura média ou até mesmo alta em uma população e esta mesma pessoa poderia ser considerada baixa em uma população em que a média de altura é de 2,00 m.

Em uma situação da vida real, poderíamos procurar por um local adequado para construir uma casa. Os critérios para o terreno que procuramos poderiam ser formulados da seguinte forma: O lugar deve:

- ter uma inclinação moderada;
- ter uma vista favorável;
- ter altitude moderada;
- estar perto de um lago;
- não ser próximo de uma rodovia;
- não estar localizado em uma área restrita.

Todas as condições mencionadas, menos a última, são vagas, porém correspondem à forma como expressamos estas condições em nosso pensamento e linguagem. No modo tradicional de transformar estas relações em intervalos de classes da Matemática Clássica (crisp) teríamos, por exemplo:

- inclinação menor que 10°;
- vista panorâmica entre 140° e 230°;
- altitude entre 1.500 m e 2.000 m;
- distante 1 km de um lago;
- não estar a menos de 300 m de uma rodovia.

Se o local estiver dentro de nosso critério podemos aceitá-lo, caso contrário, se estiver muito próximo de uma área restrita podemos excluí-lo. Se, entretanto, atribuíssemos graus de pertinência para nossas classes, poderíamos agregar também os lugares que não se enquadram no critério por poucos metros ou graus. Eles teriam um baixo grau de pertinência, porém estariam incluídos na análise dos locais. Geralmente, atribuímos um grau de pertinência para uma classe como um valor entre zero e um, onde o zero indica sem pertinência e um representa a máxima pertinência. Qualquer valor entre esses dois extremos pode ser considerado um grau de pertinência.

2.1.2 Pertinência *versus* Probabilidade

Grau de pertinência como um valor estabelecido entre zero e um parece muito familiar com o conceito de probabilidade, que também estabelece um valor entre zero e um. Poderíamos ser tentados a acreditar que pertinência e probabilidade são basicamente as mesmas coisas. Há, contudo, uma sutil, porém importante, diferença.

Probabilidade nos dá uma indicação com qual chance um certo evento ocorrerá. Se ele vai ocorrer, não há certeza pois depende da probabilidade. A pertinência é uma indicação do grau que algo tem com uma certa classe ou fenômeno. Sabemos que o fenômeno existe. O que não sabemos, entretanto, é a sua medida, ou seja, com qual grau membros de um dado universo pertence à classe. Nas próximas seções vamos estabelecer as bases matemáticas para se trabalhar com conceitos fuzzy.

2.2 Conjuntos Clássicos (*Crisp*) e Conjuntos Fuzzy

Na teoria clássica dos conjuntos, um elemento é ou não membro de um dado conjunto. Podemos expressar este fato com a função característica para que os elementos de um dado universo pertençam a um certo subconjunto deste universo. Chamamos este conjunto de clássico (*crisp*).

Definição. (Função característica). Seja A um subconjunto de um universo X. A *função característica* $\chi_A$de A é definida como

$$\chi_A : X \to \{0,1\}$$

com

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se, e somente se,} \quad x \in A \\ 0 & \text{se, e somente se,} \quad x \notin A \end{cases}$$

Desta forma, podemos sempre indicar se um elemento pertence ou não a um conjunto. Porém, se tivermos um grau de incerteza se um elemento pertence a um conjunto, podemos expressar a pertinência de um elemento a um conjunto por sua função de pertinência.

Definição. (Conjuntos Fuzzy). Um conjunto fuzzy A de um universo X é definido por uma função de pertinência μ_A definida como $\mu_A : X \to [0,1]$ onde $\mu_A(x)$ é o valor de pertinência de x em A. O universo X é sempre um conjunto clássico (*crisp*).

Se o universo é um conjunto finito $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, então, o conjunto fuzzy A em X é dado por

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_1^n \mu_A(x_i)/x_i.$$

O termo $\mu_A(x_i)/x_i$ indica o valor de pertinência de x_i do conjunto fuzzy A. O símbolo "/" é um separador, $\sum$ e "+" tem funções de agregação e conexão dos termos.

Se o universo for um conjunto infinito $X = \{x_1, x_2...\}$, então, o conjunto fuzzy A em X é denotado por

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

Vale ressaltar que os símbolos $\sum$, $\int$ e $+$ não devem ser interpretados com seus significados usuais de somatório, integral e adição.

O conjunto vazio fuzzy $\emptyset$ é definido como $\forall x \in X, \mu_\emptyset(x) = 0$.

Para cada elemento do universo X temos que $\forall x \in X, \mu_X(x) = 1$, ou seja, o universo é sempre clássico.

Uma função de pertinência atribui para cada elemento do universo um grau de pertinência ao conjunto fuzzy. Este grau de pertinência deve estar entre zero (sem pertinência) e um (pertinência absoluta). Todos os outros valores entre zero e um indicam em que medida um elemento pertence a um conjunto fuzzy.

Exemplo 1. Considere três pessoas Antônio, Bernardo e Carlos e suas respectivas alturas, 1,85 m, 1,65 m e 1,80 m. Queremos atribuir para estas pessoas diferentes uma das seguintes classes de altura: pequeno, médio ou alto.

Se considerarmos uma classificação clássica e definirmos os intervalos de classe como

	Baixo	Médio	Alto
Antônio	0	1	0
Bernardo	1	0	0
Carlos	0	1	0

Tabela 2.2: Valores da função característica do exemplo 1

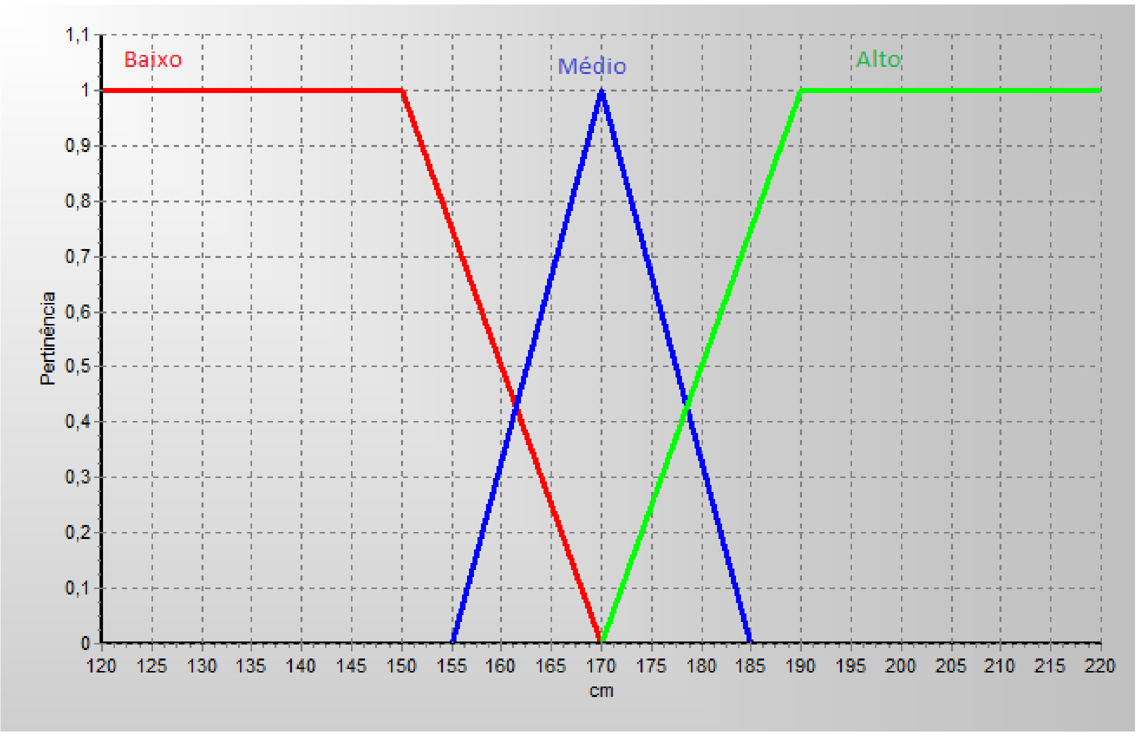

Figura 2.2.1: Gráfico da função característica do exemplo 1

menor ou igual a 1,65 m para **baixo**; entre 1,65 m e 1,85 m incluindo este último extremo para **médio**; e por fim maior que 1,85 m para **alto**, temos que Antônio tem altura **média**, Bernardo é **baixo** e Carlos é **alto**. Percebemos também que Antônio está tão próximo de **alto** quanto Carlos, porém eles se enquadram em diferentes classes. A função característica das três classes é mostrada na Tabela 2.2.

Quando escolhemos uma abordagem com conjuntos fuzzy, precisamos definir três funções de pertinência para as três classes, respectivamente. Vejamos na Figura 2.2.1.

Para baixo selecionamos uma função linear que produz o valor de pertinência para pessoas com estatura menor que 1,50 m e diminui até zero em 1,70 m. Ou seja, em cm temos

$$\mu_{Baixo} = \begin{cases} 1 & se \quad x < 150 \\ \frac{-x+170}{20} & se \quad 150 \leq x < 170 \\ 0 & se \quad x \geq 170 \end{cases}$$

A função de pertinência para a classe de estatura média produz valores iguais a zero para pessoas menores que 1,55 m, e cresce até atingir um em 1,70 m. Deste ponto em diante, a função decresce até atingir o zero em 1,85 m. Ou seja, em cm temos

$$\mu_{Médio} = \begin{cases} 0 & se \quad x < 155 \\ \frac{x-155}{15} & se \quad 155 \leq x < 170 \\ \frac{-x+185}{15} & se \quad 170 \leq x < 185 \\ 0 & se \quad x \geq 185 \end{cases}$$

A função de pertinência para a classe alta vale zero até 1,70 m. Depois cresce até atingir um em 1,90 m. Ou seja, em cm temos

$$\mu_{Alto} = \begin{cases} 0 & se \quad x < 170 \\ \frac{x-170}{20} & se \quad 170 \leq x < 190 \\ 1 & se \quad x \geq 190 \end{cases}$$

O grau de pertinência das três pessoas para as três classes são dados na Tabela 2.4.

	Baixo	Médio	Alto
Antônio	0,00	0,00	0,75
Bernardo	0,25	0,66	0,00
Carlos	0,00	0,33	0,50

Tabela 2.4: Grau de pertinência para o exemplo 1.

2.3 Funções de Pertinência

A escolha de uma função adequada para um conjunto fuzzy é fundamental para uma melhor performance da modelagem. É uma das responsabilidades do usuário selecionar uma função que é a melhor representação para o conceito fuzzy que será modelado. Alguns critérios são interessantes para a função de pertinência:

- Ela deve ser definida em $A \subset X$, com valores reais entre zero e um;

$$\mu : A \subset X \to [0; 1]$$

- Os valores de pertinência devem ser 1 para os membros que, definitivamente, pertencem ao conjunto;

- A função de pertinência deve diminuir, de modo apropriado, para os valores limitantes;

- Os pontos com valor de pertinência 0,5 devem estar na fronteira do conjunto clássico (*crisp*), ou seja, se aplicarmos uma classificação clássica (*crisp*), a classe de fronteira deve ser representada por esses pontos.

Há dois tipos de funções de pertinência mais usados: as lineares e as senoidais. A notação de um conjunto fuzzy linear é $(a; b; c; d)$,com $a \leq b \leq c \leq d$; indicando que se $x \leq a$ ou $x \geq d$ então $\mu_A(x) = 0$ e $\mu_A(x) = 1$ se $x \in [b; c]$. No caso em que $a < b = c < d$ temos um conjunto fuzzy na forma triangular. A Figura 2.3.1 mostra uma função de pertinência linear na forma trapezoidal. Esta função possui quatro parâmetros a, b, c, e d. A escolha de valores apropriados para cada um desses parâmetros faz a função de pertinência ter a forma trapezoidal ou triangular.

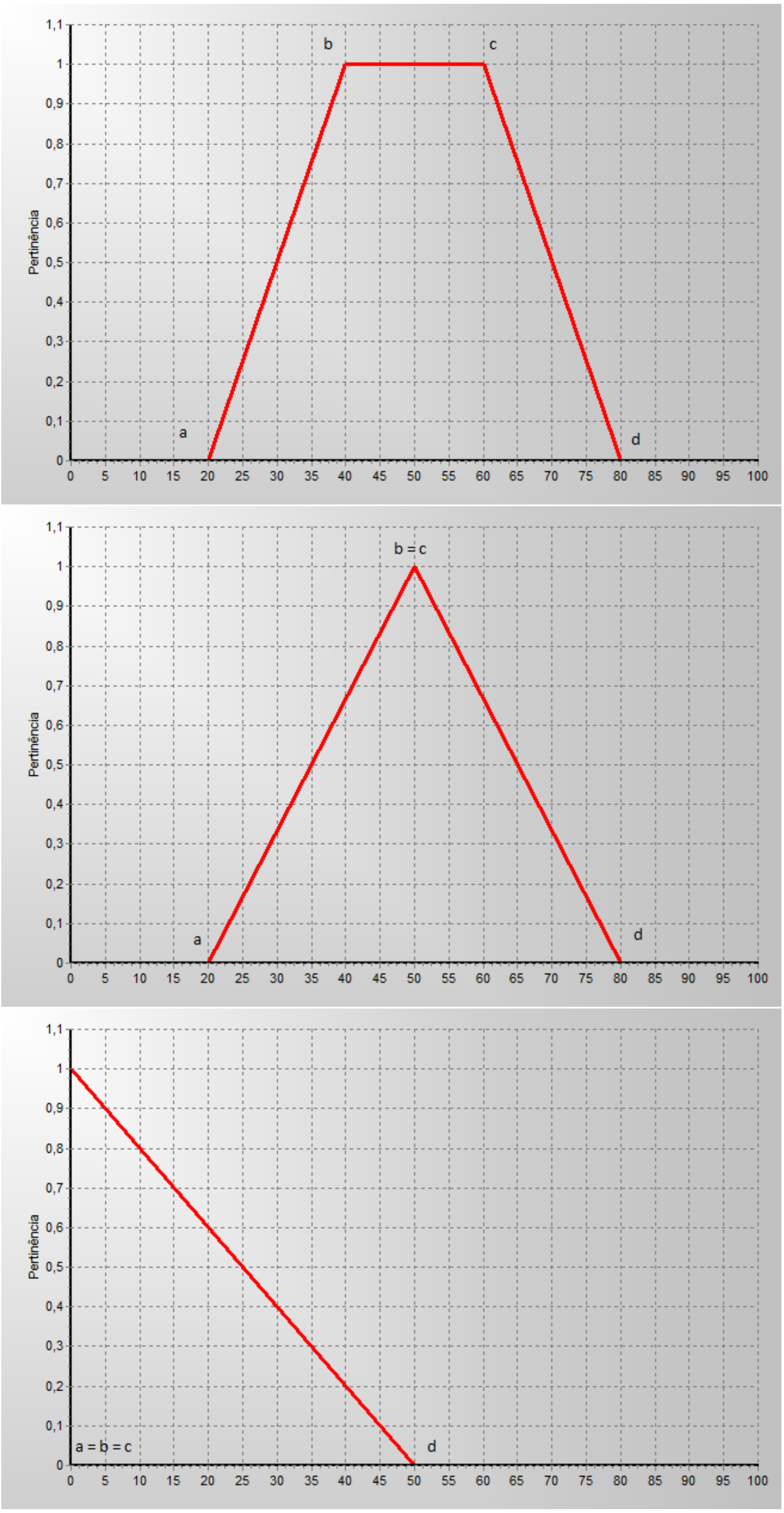

Figura 2.3.1: Funções de pertinência linear

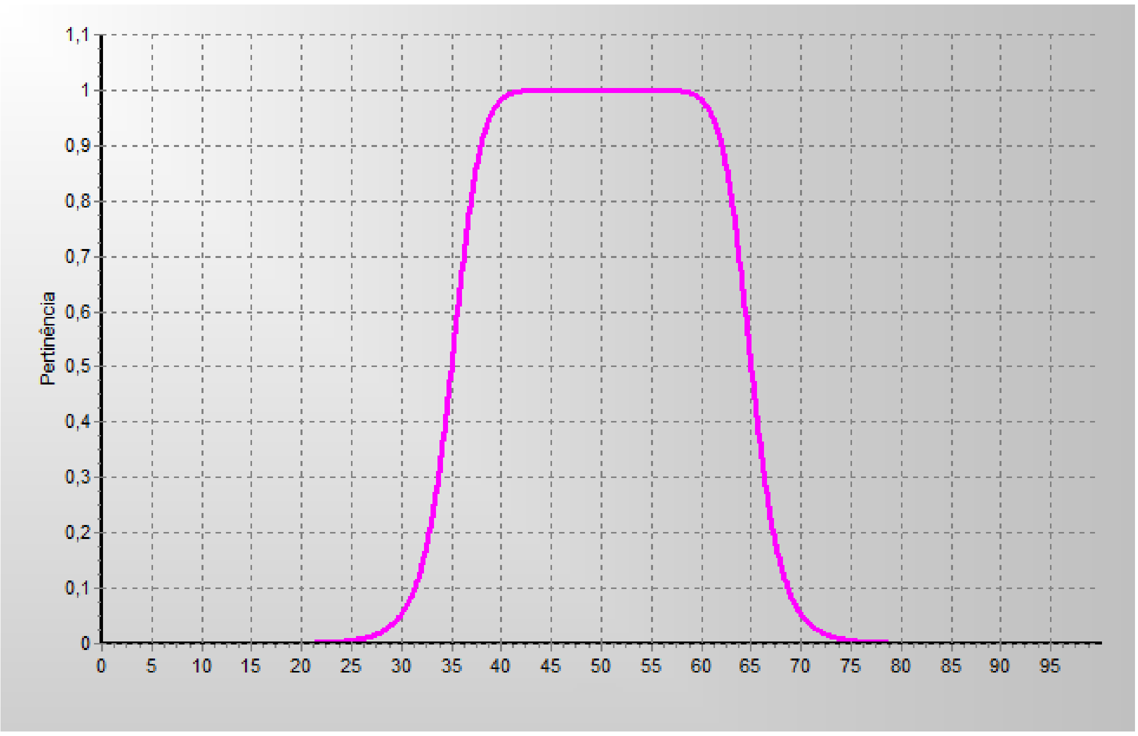

Figura 2.3.2: Função de pertinência senoidal

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases}$$

Se um formato arredondado é o mais apropriado para o nosso propósito, então devemos escolher uma função de pertinência senoidal (veja Figura 2.3.2). Assim como na forma linear, podemos por meio de escolhas apropriadas dos quatro parâmetros ter formatos diferentes na representação do conjunto fuzzy.

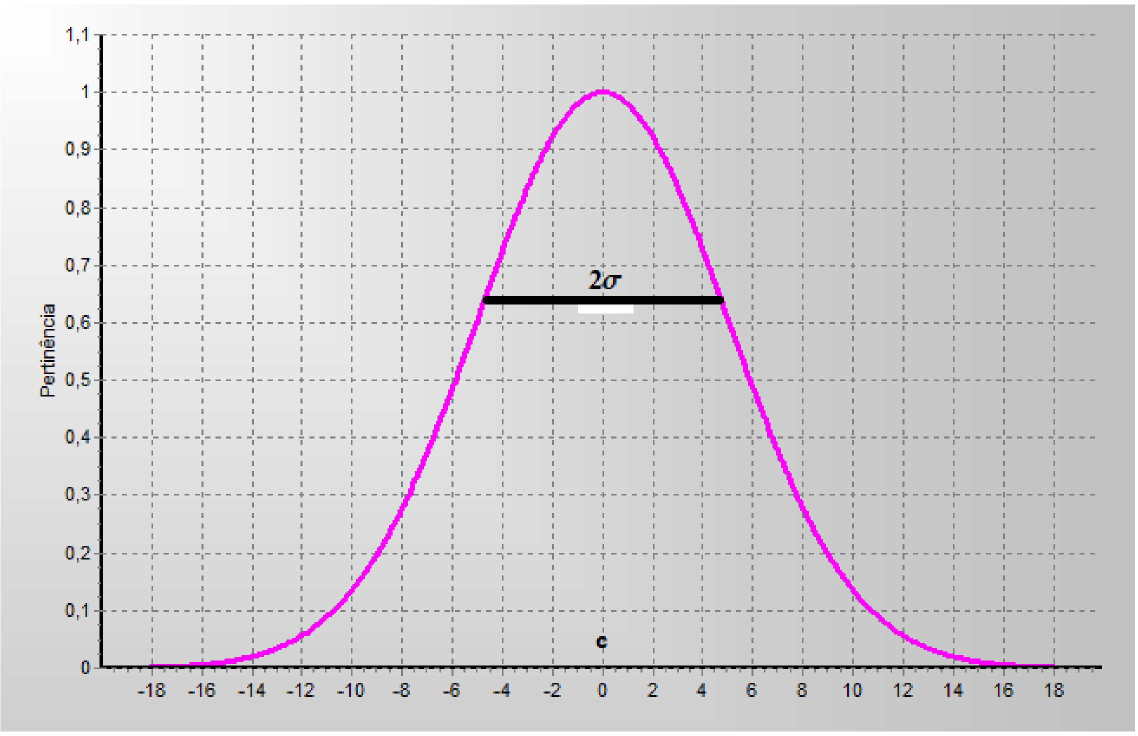

Figura 2.3.3: Função Gaussiana

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\pi\frac{x-a}{b-a}\right)\right) & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x < c \\ \frac{1}{2}\left(1 + cos\left(\pi\frac{x-c}{d-c}\right)\right) & c \leq x \leq d \\ 0 & x > d \end{cases}$$

Um caso especial de função de pertinência é a função Gaussiana, oriunda da função densidade de probabilidade de uma distribuição normal com dois parâmetros c (média) e σ (desvio padrão), veja Figura 2.3.3. Embora seja uma função derivada da teoria da probabilidade, é possível usá-la como função de pertinência para um conjunto fuzzy.

Exemplo 2. As funções de pertinência do Exemplo 1 são lineares com os seguintes parâmetros

$$\mu_{Baixo} = \begin{cases} 1 & se \quad x < 150 \\ \frac{-x+170}{20} & se \quad 150 \leq x < 170 \\ 0 & se \quad x \geq 170 \end{cases}$$

$$\mu_{Médio} = \begin{cases} 0 & se \quad x < 155 \\ \frac{x-155}{15} & se \quad 155 \leq x < 170 \\ \frac{-x+185}{15} & se \quad 170 \leq x < 185 \\ 0 & se \quad x \geq 185 \end{cases}$$

$$\mu_{Alto} = \begin{cases} 0 & se \quad x < 170 \\ \frac{x-170}{20} & se \quad 170 \leq x < 190 \\ 1 & se \quad x \geq 190 \end{cases}$$

2.4 Operações em Conjuntos Fuzzy

Operações em conjuntos fuzzy são definidas de forma parecida com as dos conjuntos clássicos. Entretanto, nem todas as regras para operações com conjuntos clássicos são válidas para conjuntos fuzzy. Da mesma forma que em conjuntos clássicos temos subconjuntos, união, interseção e complemento de conjuntos fuzzy. Além disso, há mais de uma forma de operar com a união e a interseção destes conjuntos.

Definição (Suporte). Todos os elementos de um universo X que possuem um valor de pertinência maior que zero para um conjunto fuzzy A são chamados de *suporte de A,* ou

$$supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

Exemplo 3. O suporte do conjunto fuzzy para pessoas de estatura baixa (Exemplo 1) são todas as pessoas que são menores que 1,70 m.

Definição (Altura). A altura de um conjunto fuzzy A é o maior valor de pertinência em

A, escrito como $alt(A)$.

Se $alt(A) = 1$ então o conjunto é chamado de normal.

Exemplo 4. A altura dos conjuntos fuzzy **Baixo**, **Médio** e **Alto** do primeiro exemplo é um. Todos são conjuntos fuzzy normais.

Podemos sempre normalizar um conjunto fuzzy dividindo-se todos os seus valores de pertinência pela altura do conjunto.

Definição (Igualdade). Dois conjuntos fuzzy A e B são iguais (denotaremos $A = B$) se para todo membro do universo X seus valores de pertinência são iguais, ou seja,

$$\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

Os subconjuntos são definidos pela inclusão de conjuntos fuzzy.

Definição (Inclusão). Um conjunto fuzzy A está contido em um conjunto fuzzy B (denotamos $A \subseteq B$) se para cada elemento do universo X os valores de pertinência de A são menores ou iguais aos de B, ou seja,

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Observando a Figura 1.4.1, percebemos que um conjunto fuzzy A está contido em um conjunto fuzzy B quando o gráfico da função de pertinência de A fica completamente coberto pelo gráfico de B.

Para a união de dois conjuntos fuzzy temos mais de uma forma de defini-la. As mais comuns são apresentadas a seguir.

Definição (União). A união de dois conjuntos fuzzy A e B pode ser calculada para todos os elementos do universo X por uma das seguintes formas

1. $\mu_{A\cup B}(x) = max\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right)$

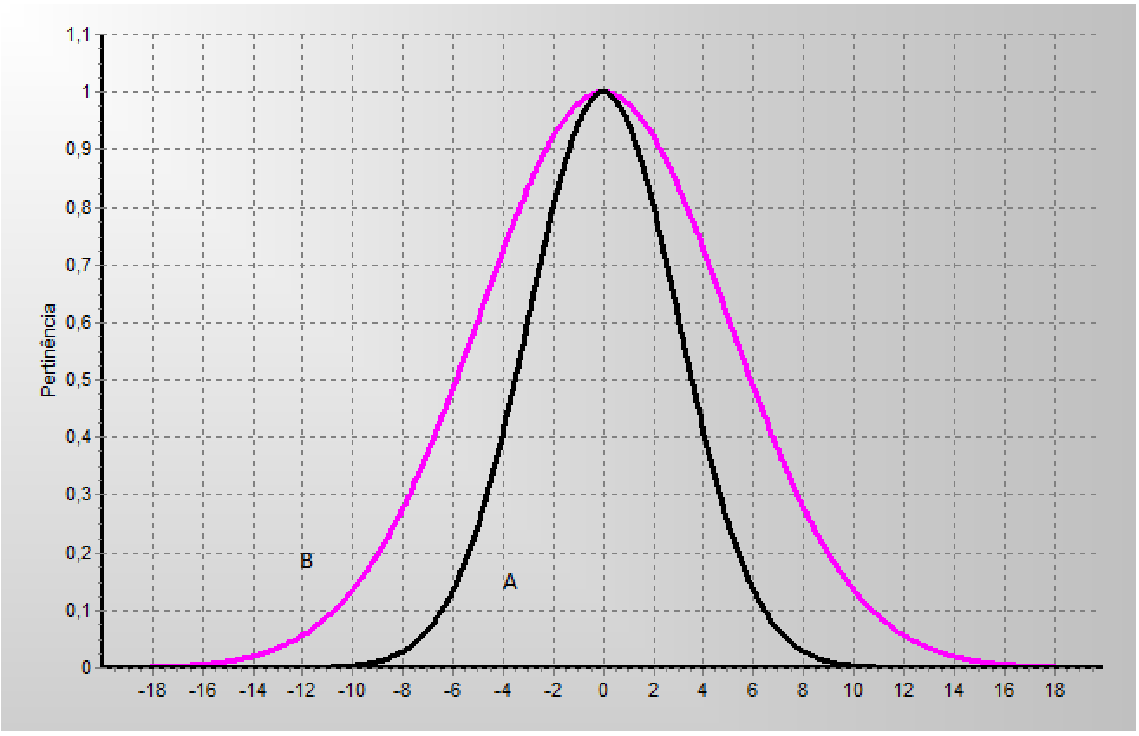

Figura 2.4.1: Inclusão de conjuntos fuzzy - $A \subseteq B$

2. $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

3. $\mu_{A \cup B}(x) = min\,(1, \mu_A\,(x) + \mu_B\,(x))$

Podemos dizer que a união definida em 1 é de um operador não interativo, uma vez que os valores de pertinência dos conjuntos não possuem interação. De fato, um conjunto pode ser completamente ignorado na operação de união quando está incluído no outro. As outras duas definições possuem um caráter interativo, pois o valor da função de pertinência da união é determinado com os valores de pertinência dos dois conjuntos.

Exemplo 5. A Figura 2.4.2 ilustra a operação de união para os conjuntos fuzzy **Baixo** e **Médio** do Exemplo 1.

Definição (Interseção). A interseção de dois conjuntos fuzzy A e B pode ser calculada para todos os elementos do universo X por uma das seguintes operações:

1. $\mu_{A \cap B}(x) = min\,(\mu_A(x), \mu_B(x))$

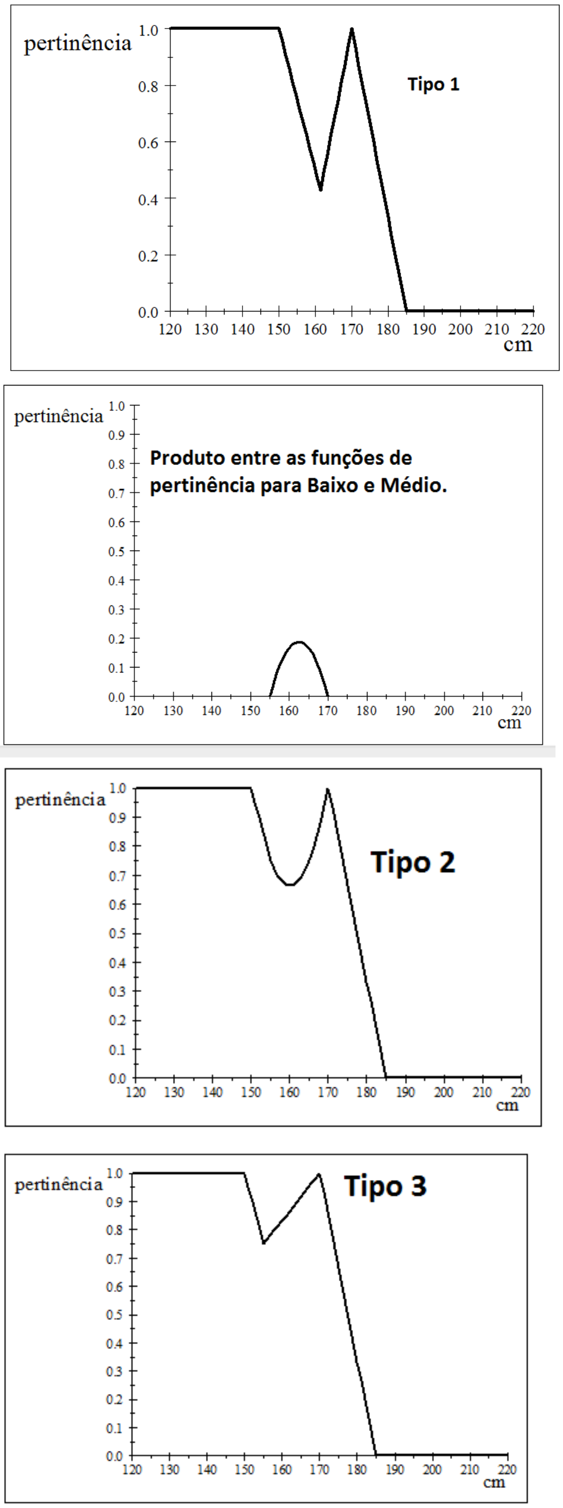

Figura 2.4.2: Gráficos com os três tipos de união de conjuntos fuzzy

2. $\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$

3. $\mu_{A\cap B}(x) = max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$

Como já mencionado anteriormente, o primeiro caso é de um operador não interativo, os demais são interativos. Cabe destacar que existe uma correspondência estre as definições, ou seja, a união do tipo 1 está associada com a interseção do tipo 1, e assim sucessivamente.

Exemplo 6. A figura 2.4.3 ilustra a interseção dos conjuntos fuzzy Baixo e Médio do Exemplo 1.

Definição (Complemento). O complemento de um conjunto fuzzy A no universo X (representado por $\overline{A}$) é definido como

$$\forall x \in X, \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

Exemplo 7. A Figura 2.4.4 mostra o conjunto fuzzy Médio do Exemplo 1 e seu complemento.

Muitas das regras para operações são válidas tanto para conjuntos crisp quanto para conjuntos fuzzy. A Tabela 2.6 mostra as regras que são válidas em ambos.

1.	$A \cup A = A$	lei da idempotência
2.	$A \cap A = A$	
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	associatividade
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
5.	$A \cup B = B \cup A$	comutatividade
6.	$A \cap B = B \cap A$	
7.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributividade
8.	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
9.	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	lei de De Morgan
10.	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
11.	$\overline{\overline{A}} = A$	Complemento duplo

Tabela 2.6: Tabela com leis válidas para conjuntos crisp e fuzzy

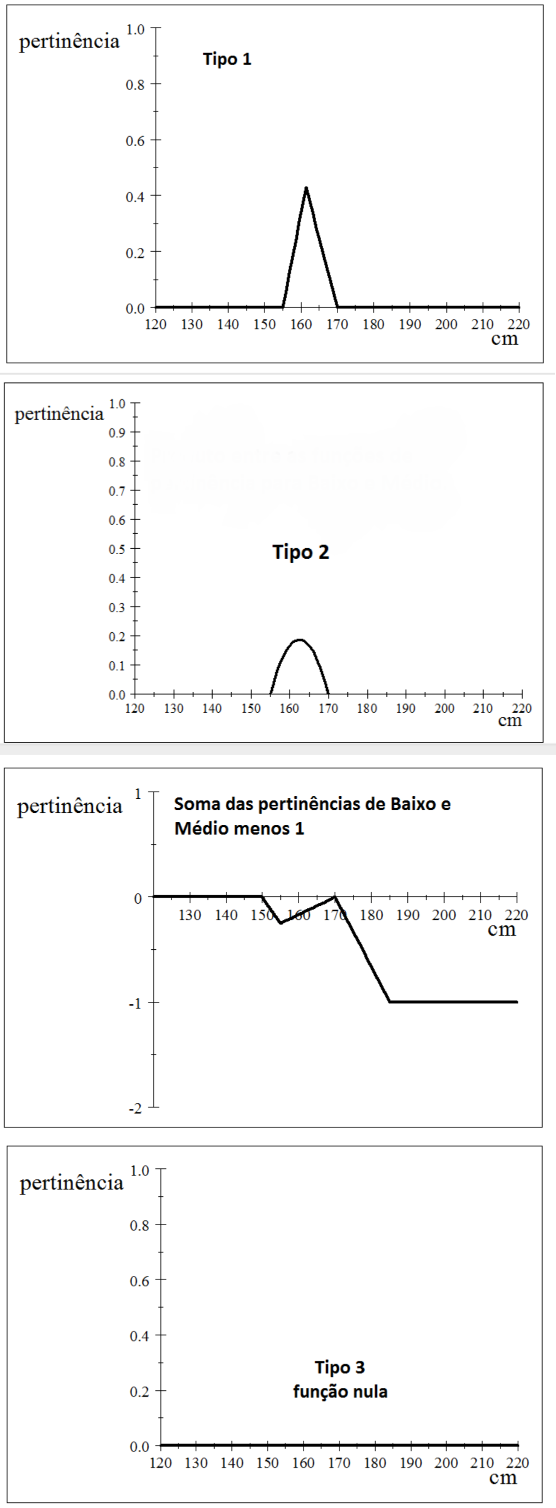

Figura 2.4.3: Gráficos com os três tipos de interseção de conjuntos fuzzy

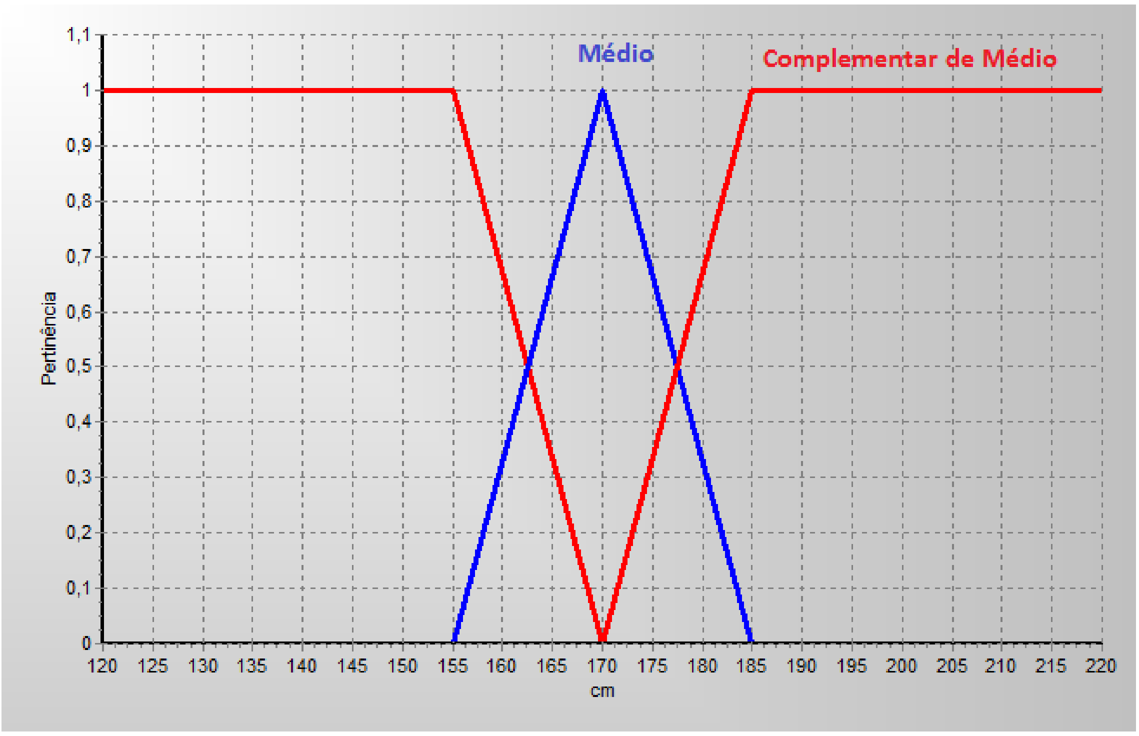

Figura 2.4.4: Complementar de um conjunto fuzzy

A Tabela 2.8 mostra as regras que em geral são válidas para os conjuntos crisp mas não são válidas para conjuntos fuzzy.

1.	$A \cup \overline{A} = X$	lei do meio excluído
2.	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	lei da contradição

Tabela 2.8: Regras que não são válidas em conjuntos fuzzy

A Figura 2.4.5 ilustra que as leis desta última tabela em geral não funcionam com conjuntos fuzzy.

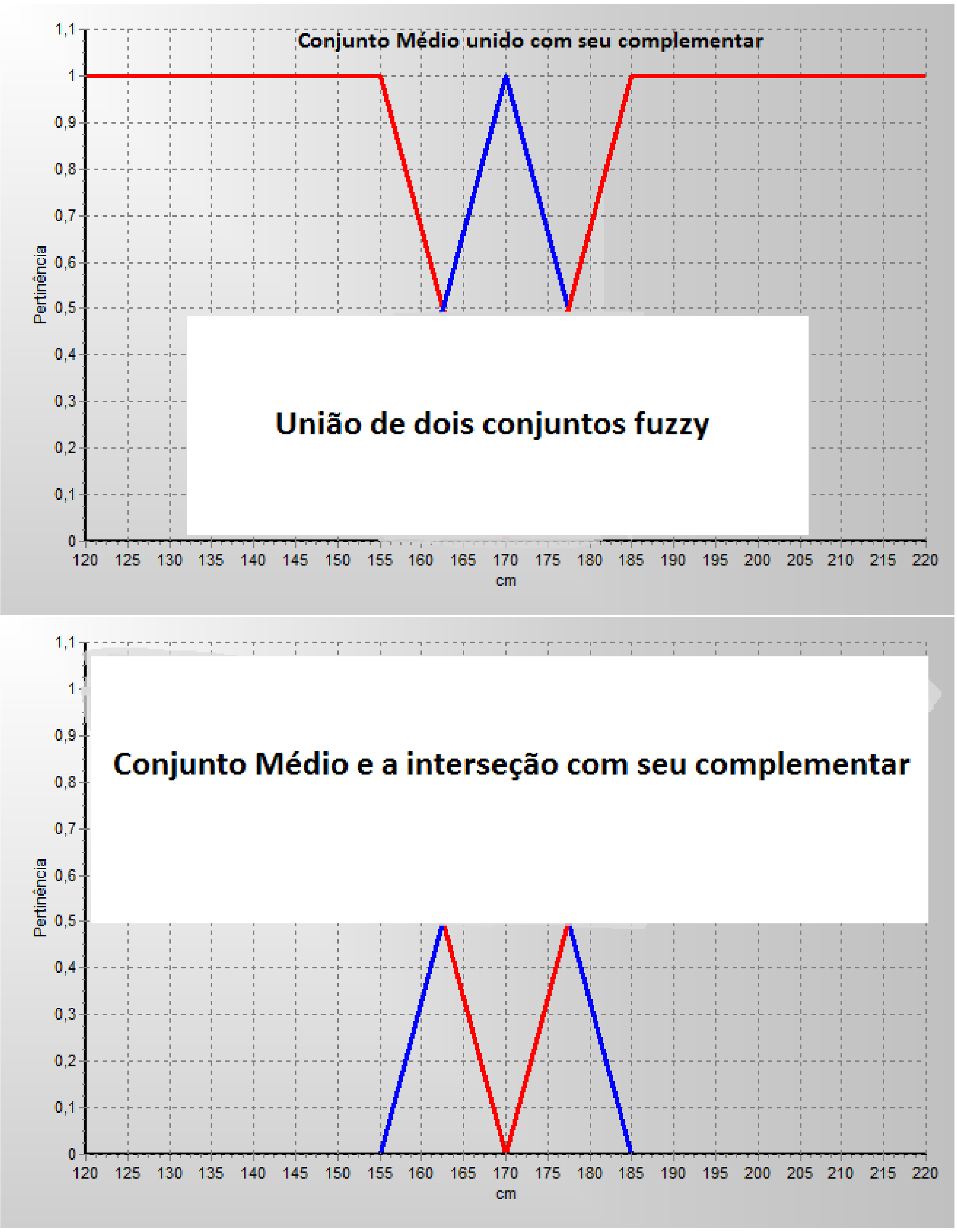

Figura 2.4.5: Leis que não são sempre válidas em conjuntos fuzzy

2.5 Alfa-Níveis

Se desejarmos conhecer todos os elementos de um universo que pertencem a um conjunto fuzzy e têm, pelo menos, um certo grau de pertinência, então podemos usar a noção de α-nível.

Definição (α-nível). Um α-nível A_α com $0 < \alpha \leq 1$ é o conjunto $A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Exemplo 8. O 0,8-nível do conjunto fuzzy Alto contém todas as pessoas que têm 1,86 m ou mais de altura.

Com o conjuntos α-nível podemos identificar os elementos do universo que tipicamente pertencem ao conjunto fuzzy em questão.

2.6 Variáveis Linguísticas e Modificadores Linguísticos

Na matemática as variáveis geralmente assumem valores numéricos. Uma variável linguística é uma variável que assume valores linguísticos que são palavras (termos linguísticos). Se, por exemplo, tivermos a variável linguística "altura", os valores linguísticos para altura podem ser "pequena", "média" e "grande". Estes valores linguísticos possuem um certo grau de incerteza ou imprecisão que podem ser expressos por uma função de pertinência de um conjunto fuzzy. Geralmente, modificamos um termo linguístico pela adição de palavras como "muito", "pouco", "muitíssimo", ou "mais ou menos" e chegamos em expressões como "muito alto" ou "um pouco baixo".

Para estas mudanças daremos o nome de modificadores linguísticos. Eles podem ser expressos como operadores aplicados ao conjunto fuzzy representando termos linguísticos. (confira na Tabela 2.9)

A próxima tabela (Tabela 2.10) mostra os modelos que podem ser usados para representar modificadores linguísticos para os termos linguísticos.

Exemplo 9. A Figura 2.6.1 mostra a função de pertinência para Alto, Muito Alto e Muitíssimo Alto.

Operador	Expressão
Normalização	$\mu_{norm(A)}(x) = \frac{\mu_A(x)}{alt(\mu_A)}$
Concentração	$\mu_{con(A)}(x) = \mu_A^2(x)$
Dilatação	$\mu_{dil(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)}$
Negação	$\mu_{neg(A)}(x) = \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
Intensificação de contraste	$\mu_{int(A)}(x) = \begin{cases} 2\mu_A^2(x) & \text{se } \mu(x) \in [0; 0,5] \\ 1 - 2\left(1 - \mu_A(x)\right)^2 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Tabela 2.9: Modificadores linguísticos

Modificadores	Operadores
muito A	$con(A)$
mais ou menos A	$dil(A)$
não A	$not(A)$

Tabela 2.10: Modelos para modificadores linguísticos

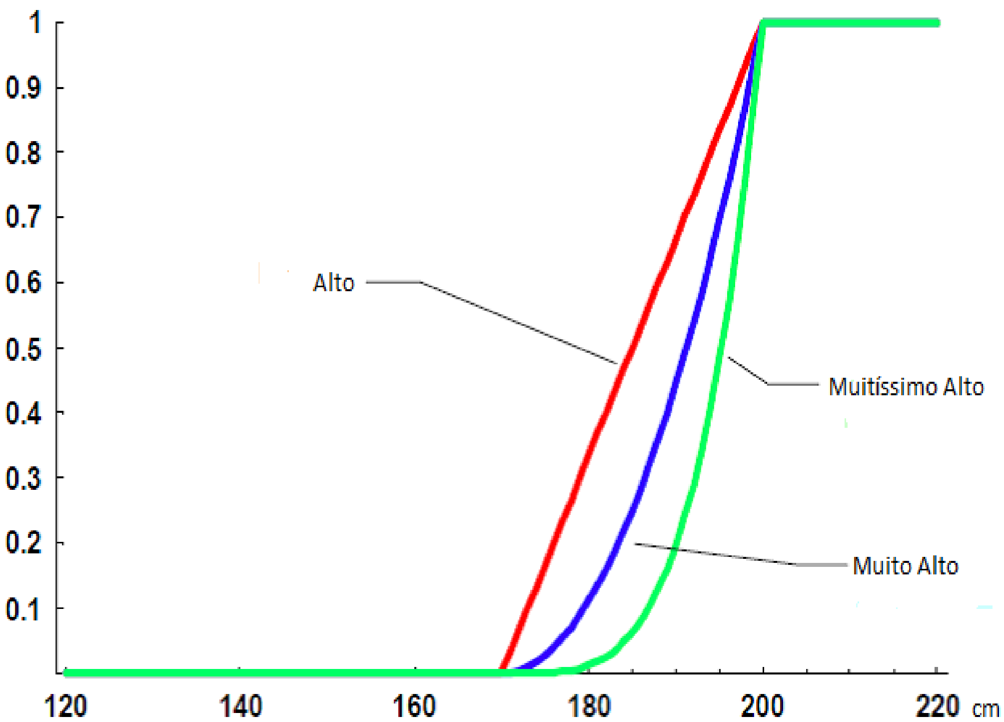

Figura 2.6.1: Função de pertinência com modificadores linguísticos I

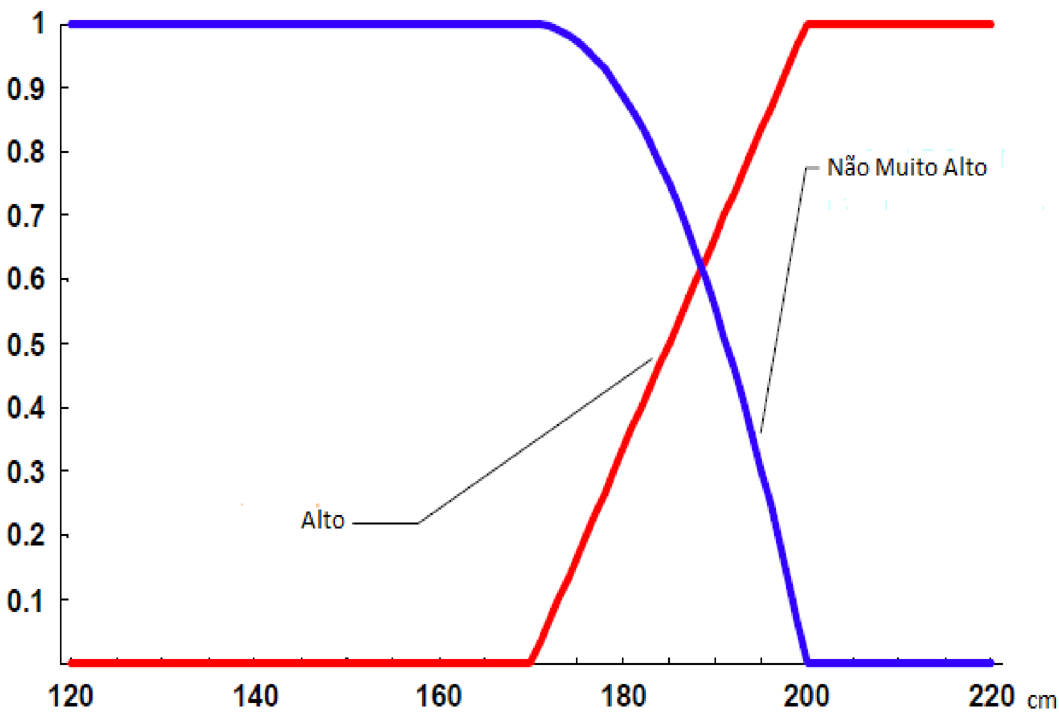

Figura 2.6.2: Função de pertinência com modificadores linguísticos II

Exemplo 10. A Figura 2.6.2 mostra a função de pertinência para Alto e Não Muito Alto.

Exemplo 11. A figura 2.6.3 mostra a função de pertinência para Alto e Um Pouco Alto.

2.7 Inferência Fuzzy

Na lógica clássica temos apenas dois possíveis valores para uma variável lógica, verdadeiro ou falso, 0 ou 1. Como já vimos neste capítulo, muitos fenômenos podem ser melhor representados por conjuntos fuzzy em vez de conjuntos clássicos. Os conjuntos fuzzy podem também ser aplicados em argumentações quando conceitos vagos estão envolvidos.

Na lógica clássica, a argumentação é baseada ou na dedução (*modus ponens*) ou na indução (*modus tollens*). Na argumentação fuzzy, usamos um modelo de *modus ponens* generalizado com o seguinte formato:

- Premissa 1: Se x é A então y é B

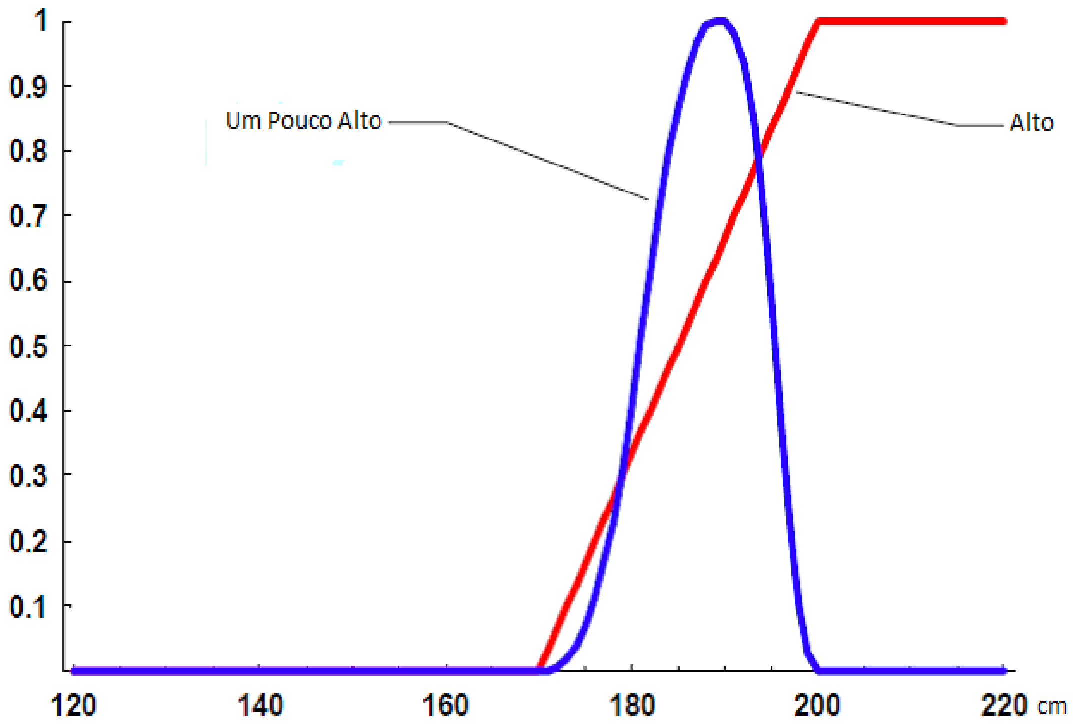

Figura 2.6.3: Função de pertinência com modificadores linguísticos III

- Premissa 2: x é $A\acute{}$
- Conclusão: y é $B\acute{}$

Aqui, A, B, $A\acute{}$, e $B\acute{}$ são conjuntos fuzzy onde $A\acute{}$ e $B\acute{}$ não são exatamente o mesmo que A e B.

Exemplo 12. Consideremos o modelo *modus ponens* generalizado para o controle de temperatura.

- Premissa 1: Se a temperatura é *baixa* então ajuste o aquecedor para *alto*.
- Premissa 2: A temperatura é *muito baixa*.
- Conclusão: Ajuste o aquecedor para *muito alto*.

Na inferência lógica normalmente temos mais de uma regra. De fato, o número de regras pode ser muito maior pois sabemos que há inúmeros métodos para a argumentação fuzzy. Veremos alguns a seguir.

2.8 Alguns Métodos Fuzzy

2.8.1 O Método Direto de Mandani

Este método é baseado em uma argumentação *modus ponens* generalizada da forma

$$p \Rightarrow q : \begin{cases} \text{Se } x \text{ é } A_1 \text{e } y \text{ é } B_1 \text{então } z \text{ é } C_1 \\ \text{Se } x \text{ é } A_2 \text{e } y \text{ é } B_2 \text{então } z \text{ é } C_2 \\ \vdots \\ \text{Se } x \text{ é } A_n \text{e } y \text{ é } B_n \text{então } z \text{ é } C_n \end{cases}$$

$$p_1 : \ x \text{ é } A`, \ y \text{ é } B'$$

$$q_1 : \ z\text{é } C\,\acute{}$$

A premissa 1 se torna um conjunto de regras ilustrado na Figura 2.8.1. A, B, e C são conjuntos fuzzy, x e y são variáveis premissas e z é a variável consequência.

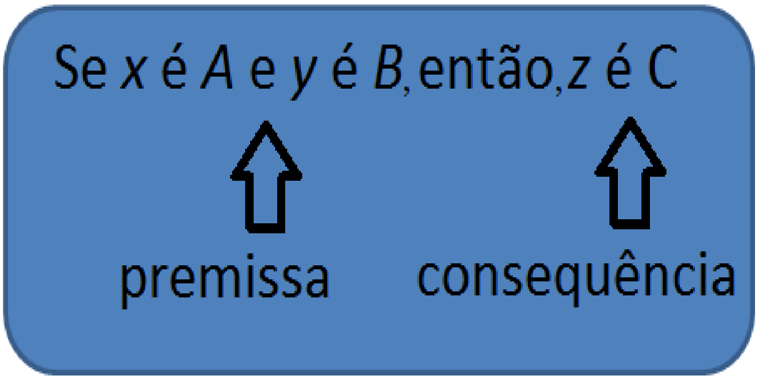

Figura 2.8.1: Premissa e consequência

O processo de argumentação é então simplificado de acordo com o seguinte procedimento. Sejam x_0 e y_0 as variáveis premissas de entrada.

1. Aplique os valores iniciais das variáveis premissas para cada regra e compute o

mínimo de $\mu_{A_i}(x_0)$ e $\mu_{B_i}(y_0)$:

$$\begin{array}{ll} \text{Regra 1:} & m_1 = min(\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)) \\ \text{Regra 2:} & m_2 = min(\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)) \\ \vdots & \vdots \\ \text{Regra n:} & m_n = min(\mu_{A_n}(x_0), \mu_{B_n}(y_0)) \end{array}$$

2. Corte a função de pertinência da consequência $\mu_{C_i}(z)$ em m_i:

$$\begin{array}{ll} \text{Conclusão da regra 1:} & \mu_{C_1^{'}}(z) = min\left(m_1, \mu_{C_1}(z)\right), \forall z \in C_1 \\ \text{Conclusão da regra 2:} & \mu_{C_2^{'}}(z) = min\left(m_2, \mu_{C_2}(z)\right), \forall z \in C_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Conclusão da regra n:} & \mu_{C_n^{'}}(z) = min\left(m_n, \mu_{C_n}(z)\right), \forall z \in C_n \end{array}$$

3. Calcule a conclusão final com a determinação da união de todas as conclusões individuais do passo 2

$$\mu_C(z) = max\left(\mu_{C_1^{'}}(z), \mu_{C_2^{'}}(z), \ldots, \mu_{C_n^{'}}(z)\right)$$

O resultado da conclusão final é um conjunto fuzzy. Por questões práticas, precisamos de um valor definido para a variável de consequência. O processo para determinar este valor é chamado de *defuzzificação.* Há muitos métodos para defuzzificar um dado conjunto fuzzy. Um dos mais comum é o centro de gravidade (ou centro de área).

Para um conjunto fuzzy discreto o centro de área é computado como

$$z_0 = \frac{\sum \mu_C(z) \cdot z}{\sum \mu_C(z)}$$

Para um conjunto fuzzy contínuo temos

$$z_0 = \frac{\int \mu_C(z) \cdot z dz}{\int \mu_C(z) dz}$$

Exemplo 13. Fornecidas a velocidade de um carro e a distância do carro a sua frente, poderíamos determinar se deveríamos frear, manter a velocidade, ou acelerar. Vamos assumir o seguinte conjunto de regras para a situação dada.

- Regra 1: Se a distância entre os carros é pequena e a velocidade é baixa, então, mantenha a velocidade.
- Regra 2: Se a distância entre os carros é pequena e a velocidade é alta, então, reduza a velocidade.
- Regra 3: Se a distância entre os carros é grande e a velocidade é baixa, então, aumente a velocidade.
- Regra 4. Se a distância entre os carros é grande e a velocidade é alta, então, mantenha a velocidade.

Distância, velocidade e aceleração são variáveis linguísticas com os valores "pequena", "grande"; "alta", "baixa"; e "reduza", "mantenha" e "aumente", respectivamente. Elas podem ser modeladas como conjuntos fuzzy (Figuras 2.8.2, 2.8.3 e 2.8.4).

Com uma distância fornecida $x_0 = 15$ m e uma velocidade de $y_0 = 60$ km/h iniciamos o passo 1. Os resultados são mostrados na Tabela 2.11.

Regra	Pequena	Grande	Baixa	Alta	Min.
1	0,75		0,25		0,25
2	0,75			0,75	0,75
3		0,25	0,25		0,25
4		0,25		0,75	0,25

Tabela 2.11: Tabela com os valores do exemplo 13

Agora devemos cortar a função de pertinência para a variável de conclusão nos mínimos valores do passo 1. O resultado é ilustrado na figura 2.8.5.

Por fim, devemos combinar as funções de pertinência individuais do passo 2 ao resultado final a defuzzificá-lo. A união das quatro funções de pertinência é mostrada na Figura 2.8.6. O valor final após a defuzzificação, com duas casas decimais, é -5,46 e é

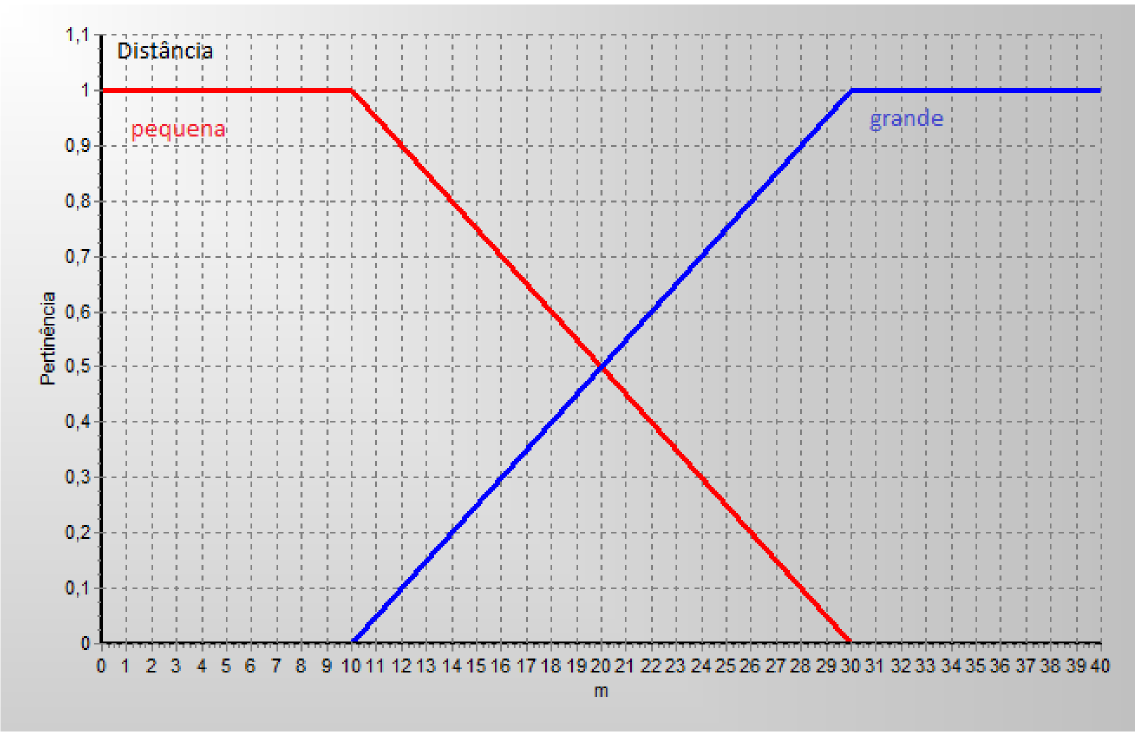

Figura 2.8.2: Função de pertinência da distância

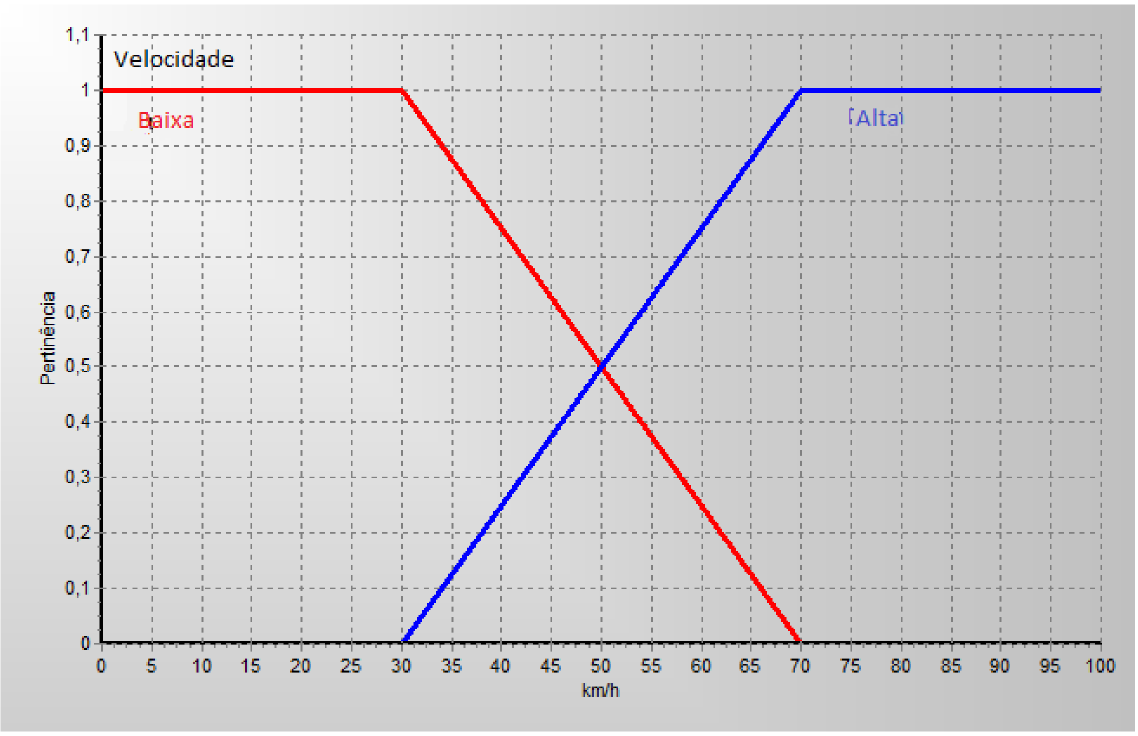

Figura 2.8.3: Função de pertinência da velocidade

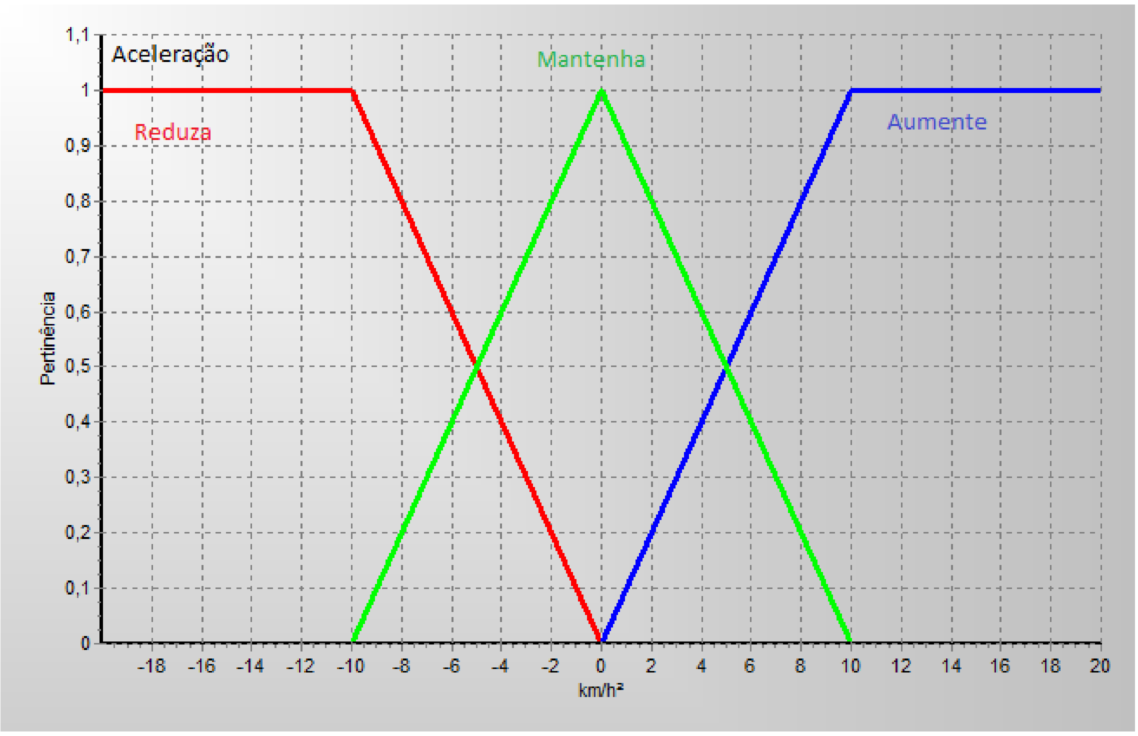

Figura 2.8.4: Função de pertinência da aceleração

indicado na reta . A conclusão desta inferência fuzzy é que quando a distância entre os carros é de 15 metros e a velocidade é de 60 km/h, devemos frear suavemente para reduzir a velocidade.

2.8.2 O Método Simplificado

Frequentemente, o processo de defuzzificação consome muito tempo e é muito complicado. Uma aproximação alternativa é o método simplificado em que a conclusão é um valor real c ao invés de um conjunto fuzzy. Ele é baseado na *modus ponens* generalizada sobre a forma:

$$p \Rightarrow q : \begin{cases} \text{Se } x \text{ é } A_1 \text{e } y \text{ é } B_1\text{,então, } z \text{ é } c_1 \\ \text{Se } x \text{ é } A_2 \text{e } y \text{ é } B_2\text{,então, } z \text{ é } c_2 \\ \vdots \\ \text{Se } x \text{ é } A_n \text{e } y \text{ é } B_n\text{,então, } z \text{ é } c_n \end{cases}$$

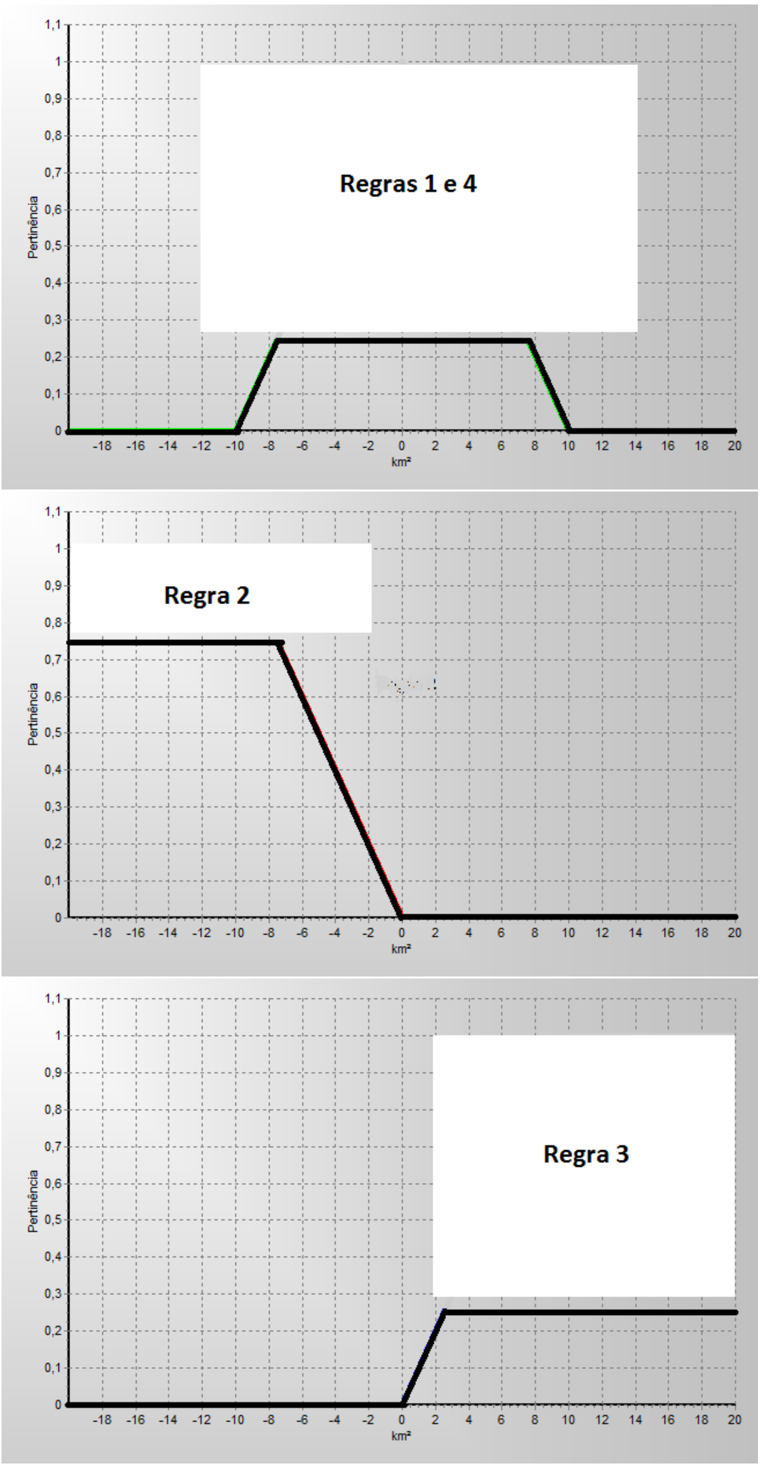

Figura 2.8.5: Cortes nos mínimos valores para cada regra

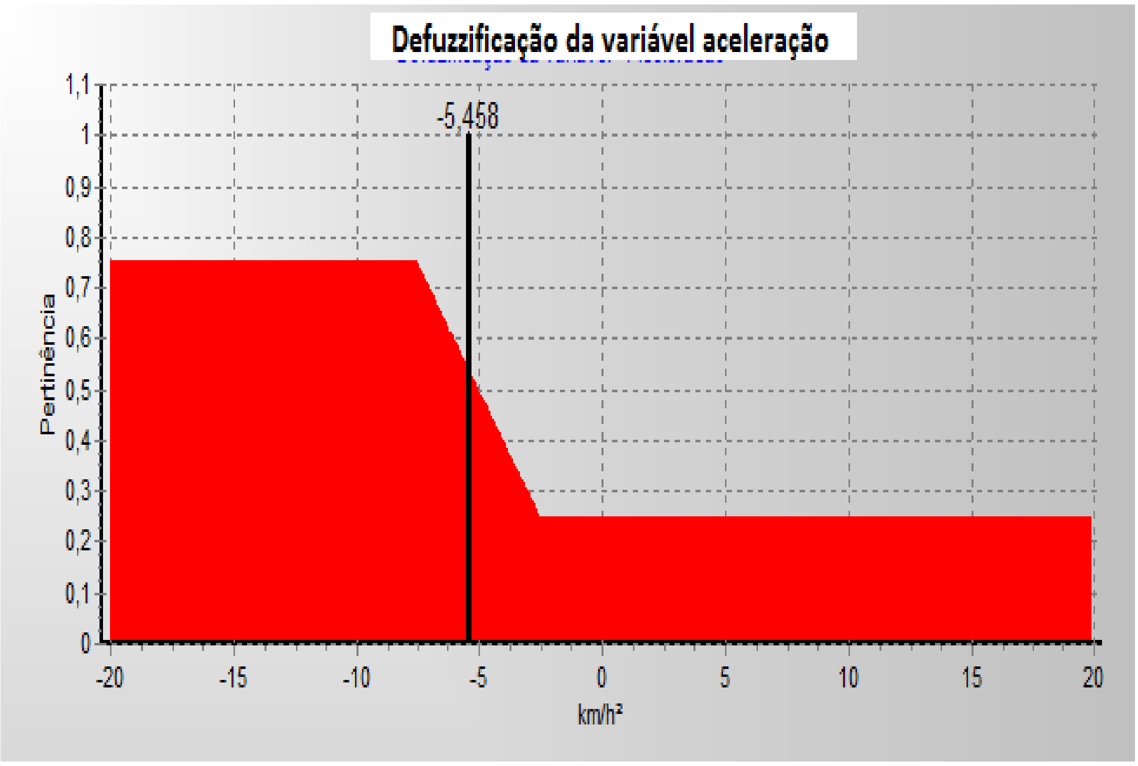

Figura 2.8.6: União das quatro funções de pertinência

$$p_1 : \; x \text{ é } A', \; y \text{ é } B'$$

$$q_1 : \; z \text{é } c'$$

A premissa 1 torna-se um conjunto de regras como ilustrado na figura 2.8.7. As variáveis premissas são conjuntos fuzzy; a conclusão é um número real (*fuzzy singleton*).

O processo de argumentação é então muito mais simples se comparado com o método anterior, com a diferença de que o resultado não é um conjunto fuzzy que precisa ser defuzzificado, mas se pode computar o resultado final diretamente depois do passo 2 no algoritmo.

O algoritmo funciona como no procedimento a seguir. Sejam x_0 e y_0 as entradas para as variáveis premissas.

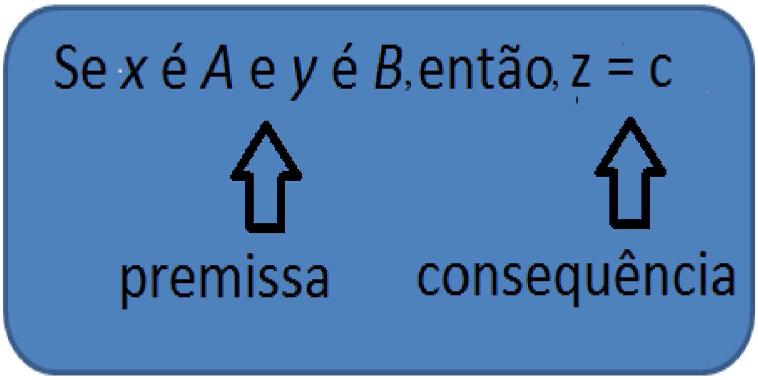

Figura 2.8.7: Premissa e consequência no método simplificado

1. Aplique os valores iniciais das variáveis premissas para cada regra e compute o mínimo de $\mu_{A_i}(x_0)$ e $\mu_{B_i}(y_0)$:

$$\begin{array}{ll} \text{Regra 1:} & m_1 = min(\mu_{A_1}(x_0), \mu_{B_1}(y_0)) \\ \text{Regra 2:} & m_2 = min(\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)) \\ \vdots & \vdots \\ \text{Regra n:} & m_n = min(\mu_{A_n}(x_0), \mu_{B_n}(y_0)) \end{array}$$

2. Compute o valor de conclusão por regra como:

$$\begin{array}{ll} \text{Conclusão da regra 1:} & c_1^{'} = m_1 \cdot c_1 \\ \text{Conclusão da regra 2:} & c_2^{'} = m_2 \cdot c_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Conclusão da regra n:} & c_n^{'} = m_n \cdot c_n \end{array}$$

3. Compute a conclusão final como:

$$c^{'} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i^{'}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Exemplo 14. Dados o declive, o mapa de aspecto de uma região e o seguinte conjunto de regras, podemos realizar uma análise de risco baseada no grau da taxa de risco, variando de 1 (baixo risco) até 4 (risco muito alto). Os conjuntos fuzzy para a declividade plana e

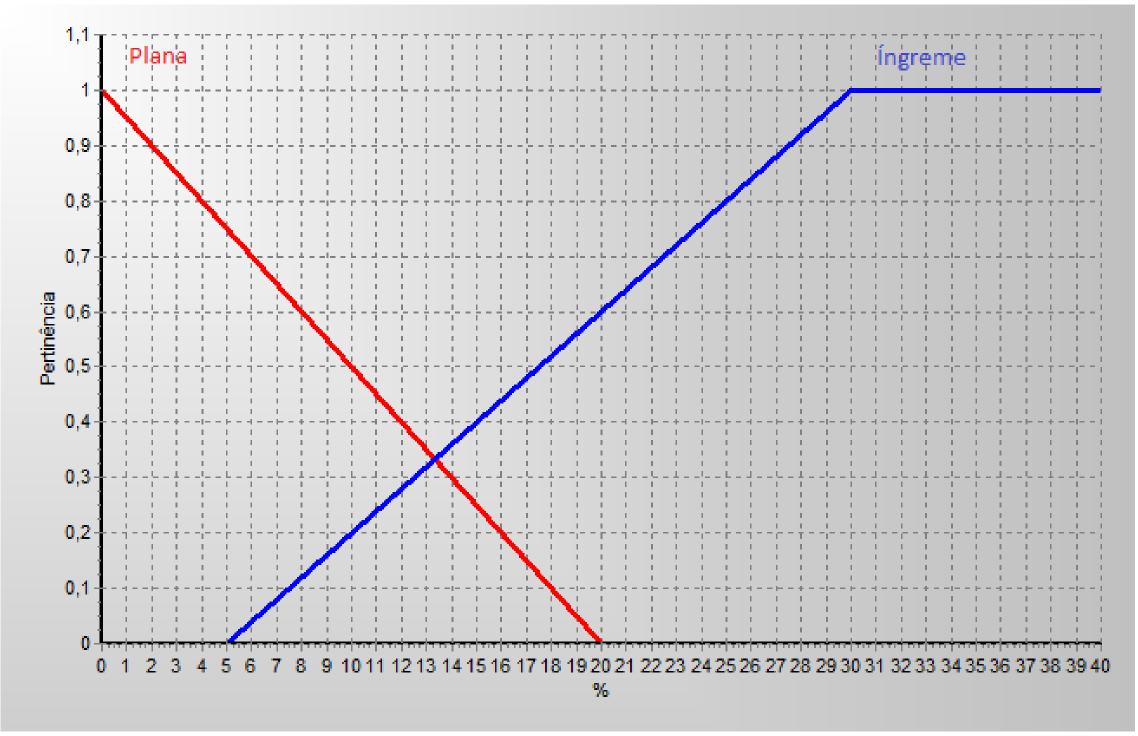

Figura 2.8.8: Função de pertinência da declividade

íngreme e o aspecto são mostrados nas Figuras 2.8.8 e 2.8.9.

- Regra 1: Se a declividade é plana e o aspecto é favorável, então, o risco é 1.
- Regra 2: Se a declividade é íngreme e o aspecto é favorável, então, o risco é 2.
- Regra 3: Se a declividade é plana e o aspecto desfavorável, então, o risco é 3.
- Regra 4: Se a declividade é íngreme e o aspecto desfavorável, então, o risco é 4.

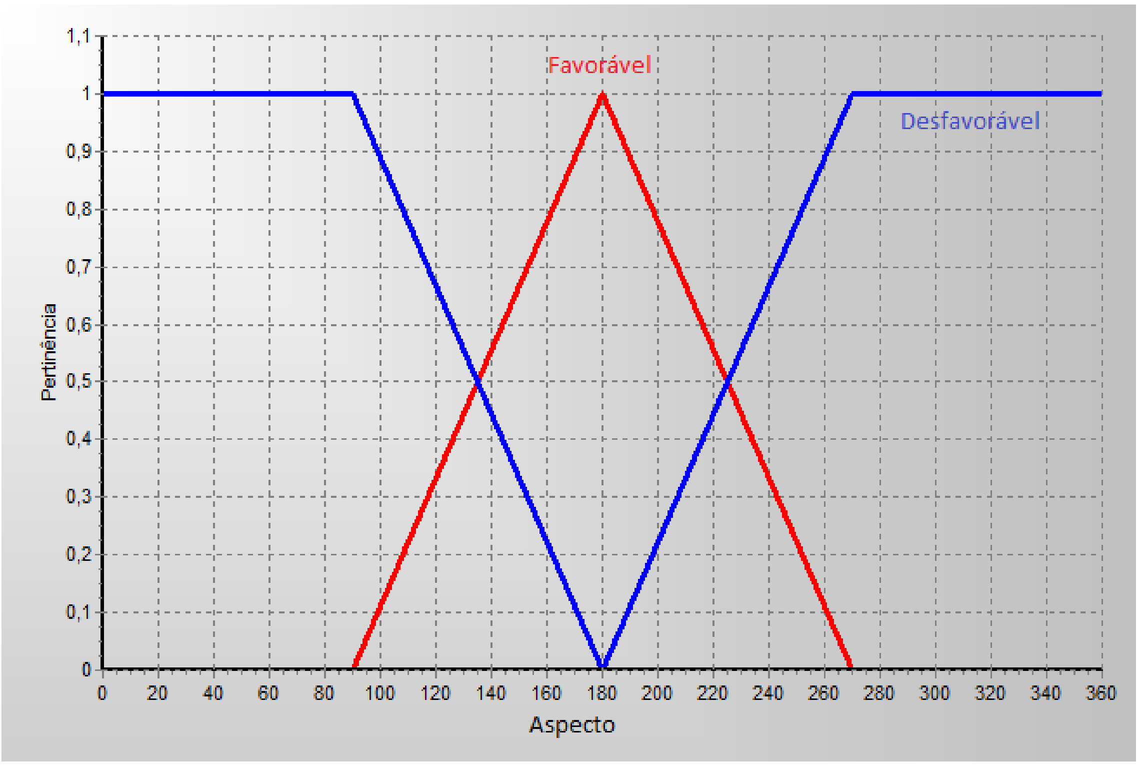

Figura 2.8.9: Função de pertinência do aspecto

Para uma declividade de 10% e um aspecto de 180° temos os seguintes resultados na Tabela 2.12

	Declividade (d)	Aspecto (a)	Min (d,a)	Conclusões
Regra 1	0,5	1	0,5	0,5
Regra 2	0,2	1	0,2	0,4
Regra 3	0,5	0	0	0
Regra 4	0,2	0	0	0

Tabela 2.12: Resultados do Exemplo 14

Para o resultado final temos: $c\,' = \frac{0{,}5+0{,}4+0+0}{0{,}5+0{,}2+0+0} = 1,29$, que significa baixo risco.

Capítulo 3

Números Fuzzy

Um número fuzzy pode ser dado de diversas maneiras distintas, dependendo de sua função grau de pertinência.

Definição. (Número Fuzzy) . Um número fuzzy é um conjunto fuzzy com domínio $\mathbb{R}$, ou seja é:

1. normal: algum elemento tem função de pertinência 1;

2. limitado: o suporte do conjunto fuzzy é um intervalo limitado; e

3. convexo: essencialmente cada $\alpha-nível$ é um intervalo fechado para valores positivos de α .

Com um pouco mais de rigor matemático, podemos definir que um conjunto fuzzy T é normal se existe um $x \in X$ em que $T(x) = 1$. Um conjunto fuzzy T é convexo se cada α-nível T^α, para cada $\alpha \in (0, 1]$, é um subconjunto convexo do domínio, ou seja, um intervalo contínuo. Finalmente, o suporte ou α-nível forte em zero deve ser limitado, isto é, $T^{0+} = [a, b]$ com $a \leq b$ e nem a nem b podem ser infinito.

Inegavelmente, uma das partes mais importantes na lógica fuzzy é a ideia de número fuzzy. Nas próximas partes deste capítulo abordaremos mais especificamente este conceito.

A Figura 3.0.1 apresenta a evolução do número natural 50, com sua representação gráfica $A(x)$ que vale 1 em $x = 50$ e zero caso contrário. Em seguida temos um intervalo

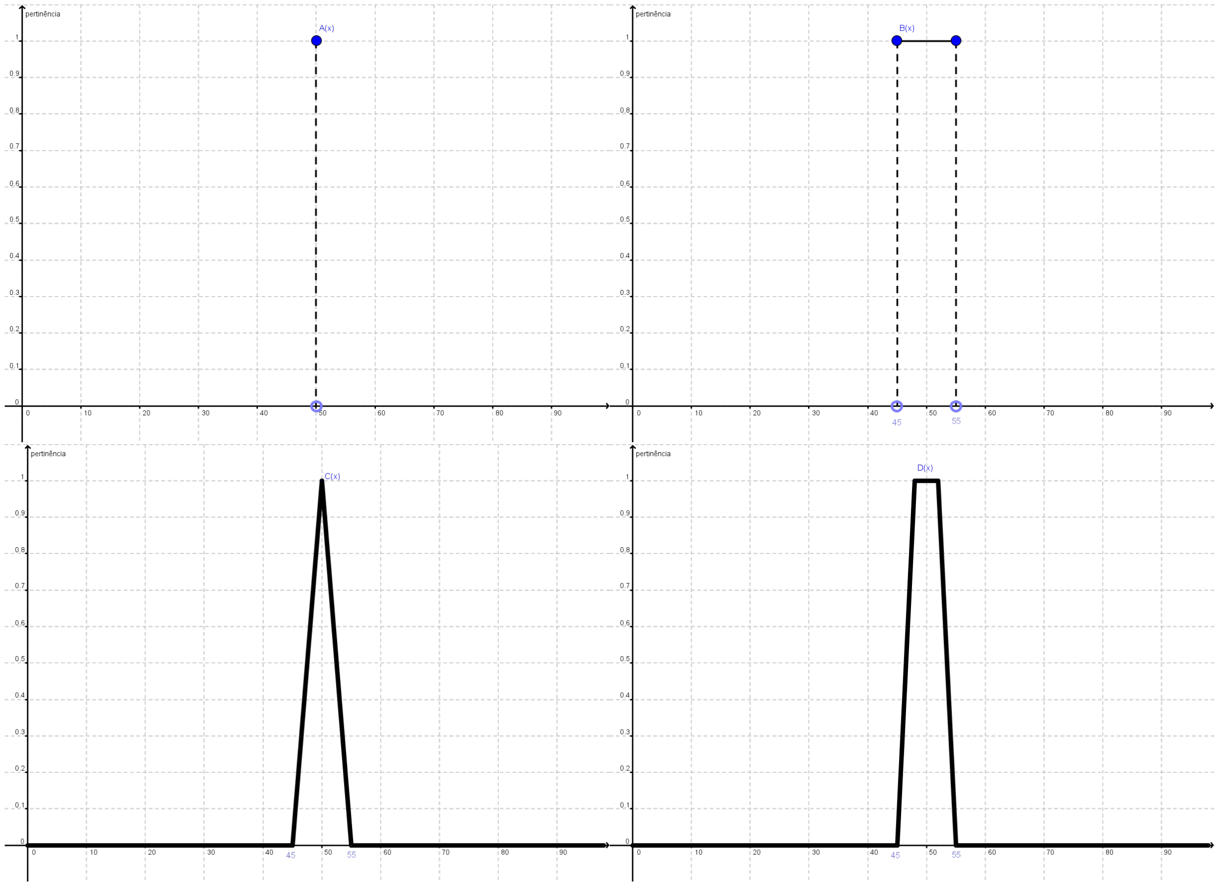

Figura 3.0.1: Evolução do número 50

contendo 50 com a representação gráfica $B(x)$ que vale 1 no intervalo $45 \leq x \leq 55$ e zero caso contrário. Passando para o número fuzzy mais ou menos 50 com a representação gráfica $C(x)$ que cresce em linha reta desde (45,0) até o ponto (50,1), e, então, decresce até o ponto (55,0). Por fim, o intervalo fuzzy próximo de 50 com a representação gráfica $D(x)$ que cresce em linha reta desde (45,0) até o ponto (48,1), permanece constante em 1 até o ponto (52,1) e decresce até o ponto (55,0). Ultimamente, a distinção entre número fuzzy e intervalo fuzzy vem desaparecendo e ambos passaram a ser considerados como números fuzzy, mas ainda é possível encontrar a nomenclatura intervalo fuzzy na literatura sobre este tópico.

3.1 Números Fuzzy

Um certo número fuzzy T é um conjunto fuzzy limitado, convexo e normal, definido sobre os números reais.

Vamos iniciar com um simples exemplo antes de passarmos aos detalhes técnicos. As equações 3.1 e 3.2 definem dois números fuzzy A e B. O número fuzzy A representa o conceito vago mais ou menos um e B representa o conceito vago mais ou menos dois. Um conjunto fuzzy é determinado por sua função de pertinência, assim podemos definir a equação para o conjunto fuzzy A como

$$A(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

e a equação para o conjunto fuzzy B é

$$B(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & 2 < x \leq 3 \end{cases} \tag{3.2}$$

Examinando os gráficos de A e B (Figura 3.1.1) vemos que números fuzzy são representados por funções triangulares construídas com dois segmentos de reta. Vale destacar também, que não mencionamos a restrição adicional que $A(x) = 0$ se x está fora do intervalo fechado [0,2] e que $B(x) = 0$ se x está fora do intervalo fechado [1,3]. Deste ponto em diante, assumiremos que qualquer número fuzzy tem zero como valor de pertinência para cada valor do domínio x no universo X não explicitado como um valor de pertinência diferente de zero. O número fuzzy A dá a noção que mais ou menos um incluiu qualquer valor do domínio maior que zero e menor que dois, mas também indica que temos mais certeza que 1,1 é mais ou menos 1 (0,9 de grau de pertinência) que 0,2 (grau de pertinência 0,2) e que 2,1 definitivamente não é mais ou menos 1 (grau de pertinência 0).

Vamos agora considerar um problema sobre a adição de dois números fuzzy, o A e o B descritos anteriormente. O resultado deve ser um número fuzzy e se os números fuzzy A e

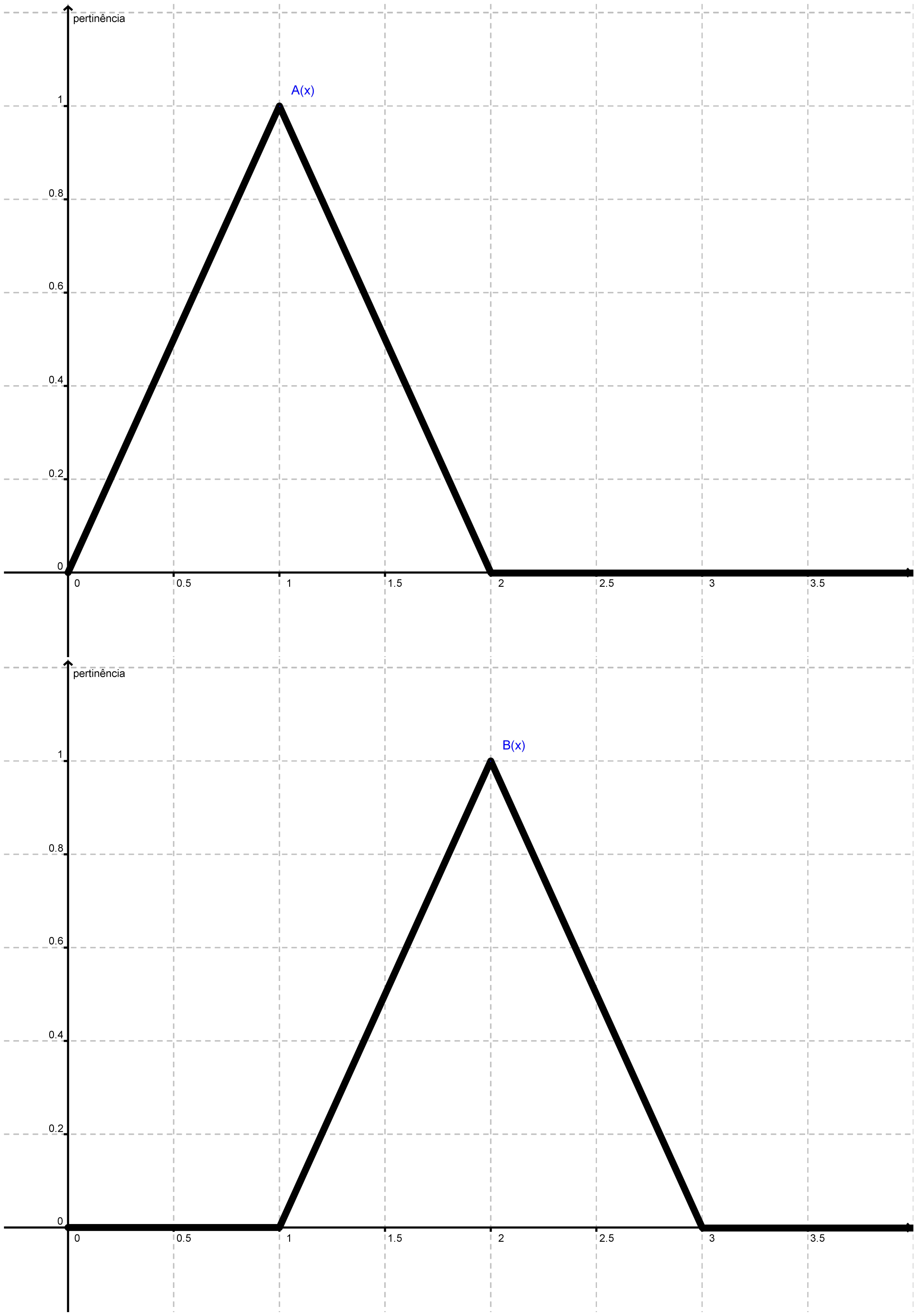

Figura 3.1.1: Números fuzzy triangulares

B representam, respectivamente, mais ou menos um e mais ou menos dois, é de se esperar que o resultado da soma seja mais ou menos três. Vejamos uma definição um pouco mais formal sobre um número fuzzy.

3.1.1 Número Fuzzy Triangular

Um número fuzzy triangular - Tr - recebe este nome por sua própria forma. Sua função de pertinência é dada por dois segmentos de reta, um crescendo do ponto (a;0) para (b;1) e o segundo decrescendo de (b;1) até (c;0). Seu domínio é o intervalo fechado [a;c]. Um número fuzzy triangular pode ser especificado pela tripla ordenada (a;b;c) com $a \leq b \leq c$ e sua função de pertinência é

$$Tr[a;b;c](x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c} & b < x \leq c \end{cases}$$

3.1.2 Número Fuzzy Trapezoidal

Um número fuzzy trapezoidal - Tp - pode ser especificado por uma quádrupla ordenada (a; b; c; d) com $a \leq b \leq c \leq d$ e sua função de pertinência consiste em três segmentos de reta. O primeiro segmento cresce de (a;0) até (b;1). O segundo é um segmento horizontal com valor constante igual a um desde (b;1) até (c;1). E o terceiro segmento decresce de (c;1) até (d;0). A função de pertinência para números fuzzy trapezoidais é

$$Tp[a;b;c;d](x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b < x < c \\ \frac{x-d}{c-d} & c \leq x \leq d \end{cases}$$

Há outras formas de número fuzzy, porém para exemplos mais simples (destinados aos alunos do ensino médio) estes descritos anteriormente são os mais usados.

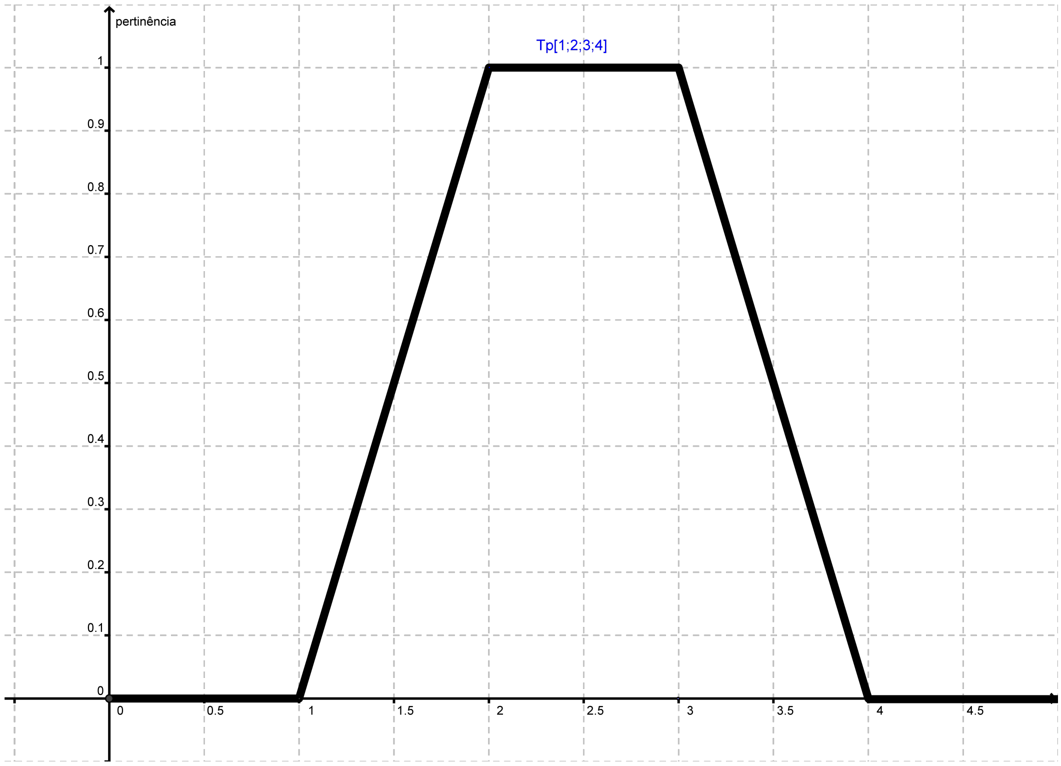

Figura 3.1.2: Número fuzzy trapezoidal

3.2 Aritmética Fuzzy

3.2.1 O princípio da extensão

Sem dúvida alguma, a ferramenta mais importante em todos os conjuntos fuzzy é o princípio da extensão. Ele é fundamental pois proporciona a conexão entre conjuntos fuzzy e todas as funções, operações e ferramentas da matemática clássica.

Por exemplo, se definirmos um número fuzzy $A = Tr[0; 1; 2]$ e outro número fuzzy $B = Tr[1; 2; 3]$.

É natural perguntar qual o valor da soma destes dois números fuzzy? E a diferença, o produto e o quociente? Além disso, como definimos funções sobre os números fuzzy? Os números fuzzy teriam pouca utilidade se não existisse resposta para algumas destas perguntas, ou se não existisse um método geral para estender qualquer função ou operação da matemática clássica para o domínio dos números fuzzy. O princípio da extensão permite isso e muito mais.

Primeiro, é algo um tanto quanto óbvio que a soma de dois números fuzzy deveria ser um número fuzzy. Um número fuzzy, como A, modela o conceito de mais ou menos um e B modela mais ou menos dois. Se somarmos mais ou menos um com mais ou menos dois seria extremamente surpreendente se conseguíssemos um resultado exato, de fato esperamos que a resposta seja mais ou menos três.

Então, a soma de A e B deve ser outro número fuzzy C e precisamos de uma fórmula para definir o grau de pertinência de x em C com base nas definições de A e B.

A definição apropriada para esta soma é:

$$C(z) = \underset{x+y=c}{max}\, min[A(x), B(y)]$$

a qual nos dá a função de pertinência de $C = A \oplus B$. Neste exemplo, assumimos que x, y e z são todos definidos sobre $\mathbb{R}$. Usamos a notação $\oplus$ para a adição de números fuzzy pois, é importante lembrar que $C = A \oplus B$ não pode ser dada pela adição das duas funções de pertinência de A e B. O resultado é outro número fuzzy triangular

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

As duas fórmulas anteriores foram produzidas com o princípio da extensão. Entretanto, o princípio da extensão é um resultado muito geral, que pode ser aplicado em muitas outras situações, além da adição de dois números fuzzy. Ele pode ser aplicado em qualquer um dos operadores da aritmética básica para fornecer fórmulas de adição, diferença, produto e quociente de números fuzzy. Ele pode ser aplicado em qualquer relação numérica ou funcional da matemática clássica para produzir um resultado análogo na teoria fuzzy.

Seja X o produto cartesiano de n conjuntos, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$, n conjuntos fuzzy definidos sobre os universos $X_1, X_2, \cdots, X_n$ respectivamente. Suponhamos, além disso, que f é um mapeamento de X sobre algum conjunto Y,

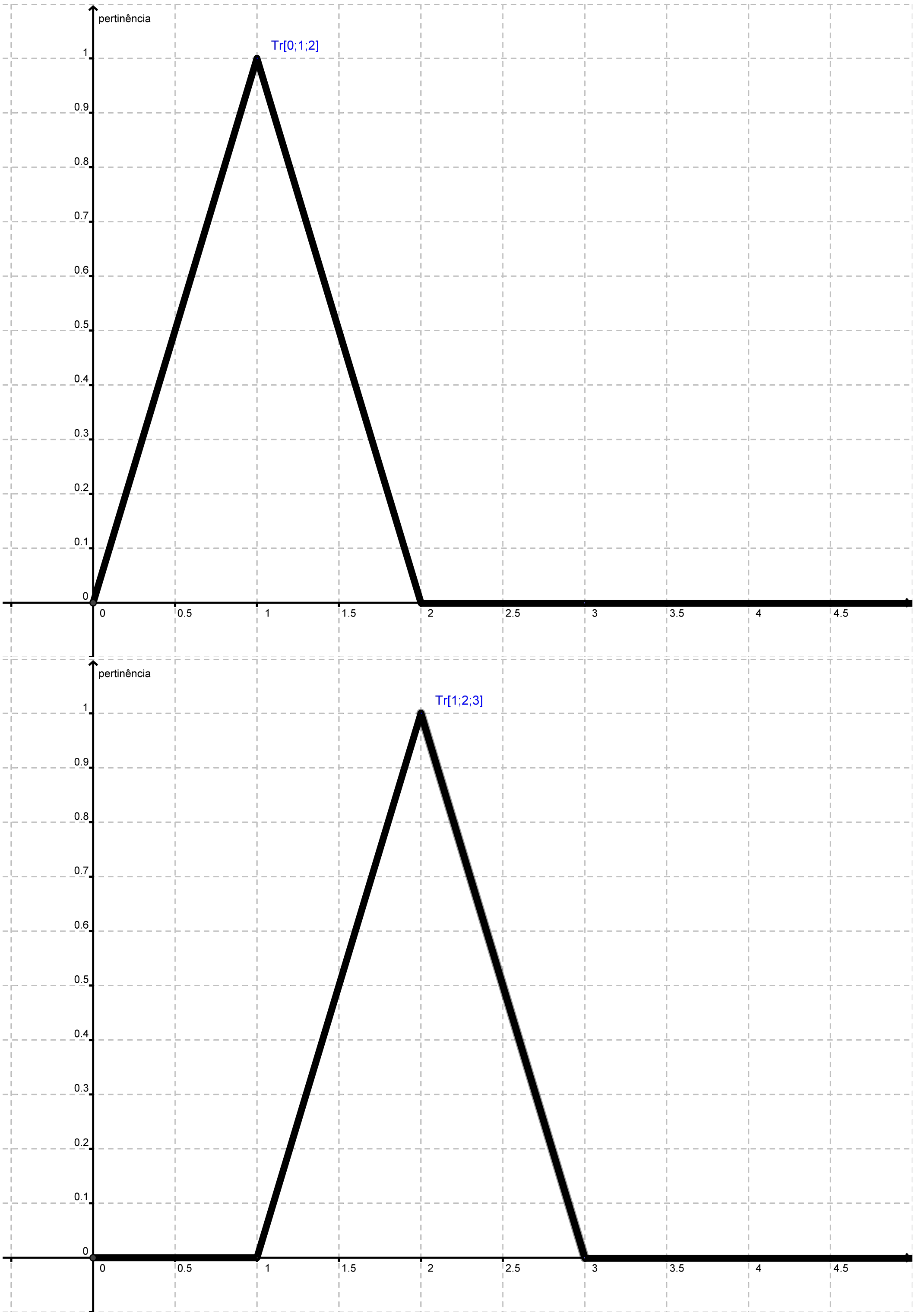

Figura 3.2.1: Números fuzzy triangulares A e B

$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x)$. Finalmente, por $f^{-1}(y)$ denotamos o subconjunto de X que é mapeado pela função f para $y \in Y$, ou seja, $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$. Podemos agora definir um conjunto fuzzy B com domínio *Y,* induzido pelo mapeamento f e os conjuntos fuzzy $A_1, A_2, \cdots, A_n$, por meio do princípio da extensão

$$B(y) = \underset{x \in f^{-1}(x)}{sup} \; min\,[A_1(x_1), A_2(x_2), \cdots, A_n(x)]$$

para todo $y \in Y$. É importante destacar que f não precisa ser uma função, apenas uma relação.

Assim, a definição da função de pertinência para a soma de A e B, $C = A \oplus B$, dada anteriormente é devida a aplicação do princípio da extensão sobre os números fuzzy A e B e a função aritmética binária da adição.

Com a ajuda do princípio da extensão podemos agora definir a aritmética fuzzy dos números fuzzy. Relembrando as definições de A e *B,* o princípio da extensão nos dá $C = A \oplus B$, com a função de pertinência $C = Tr\,[1; 3; 5]$:

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

3.2.1.1 Intervalo aritmético

Como conseguimos a solução dada na equação anterior para o número fuzzy $C(x)$ que é a soma dos números fuzzy *A(x)* e *B(x)?* Isso pode ser resolvido com o uso da álgebra, mais um método mais fácil é usar a interpretação intervalar. Lembrando que um conjunto fuzzy é completamente caracterizado por seus α-níveis. Desde que um número fuzzy seja um conjunto fuzzy convexo definido como subconjunto de algum número real, os α-níveis são intervalos

$$A^{\alpha} = [\underline{a}, \overline{a}] = \{x \mid A(x) \geq \alpha\}$$

Figura 3.2.2: Número fuzzy C = A + B

onde

$$\underline{a} = min\{x \mid A(x) \geq \alpha\}$$

e

$$\overline{a} = max\{x \mid A(x) \geq \alpha\}$$

Assim, o conjunto de pares (α, A^α), para cada $\alpha \in [0, 1]$, caracteriza um número fuzzy e consiste em um nível de presunção α e de um intervalo de confiança $A^\alpha = [\underline{a}, \overline{a}]$.

Desde que A seja um número fuzzy, em cada α-nível o intervalo de confiança é simplesmente um intervalo sobre a reta real. Em análise de intervalos, a soma de dois intervalos $[\underline{a}, \overline{a}]$ e $[\underline{b}, \overline{b}]$ é apenas um outro intervalo $\left[\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}\right]$,

$$[\underline{a},\overline{a}] \oplus [\underline{b},\overline{b}] = \left[\underline{a}+\underline{b};\overline{a}+\overline{b}\right]$$

De maneira muito semelhante, o produto entre dois intervalos é dado pela fórmula

$$[\underline{a},\overline{a}] \otimes [\underline{b},\overline{b}] = \left[\underline{a}\cdot\underline{b};\overline{a}\cdot\overline{b}\right]$$

A fórmula para o oposto de um intervalo é

$$\ominus[\underline{a},\overline{a}] = [-\overline{a},-\underline{a}]$$

e a fórmula do inverso multiplicativo de um intervalo é

$$[\underline{a},\overline{a}]^{-1} = \left[\overline{a}^{-1},\underline{a}^{-1}\right], \ \ se \quad \underline{a},\ \overline{a} \geq 0.$$

Com isso, conseguimos a definição da subtração de intervalos

$$[\underline{a},\overline{a}] \ominus [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a},\overline{a}] \oplus (\ominus[\underline{b},\overline{b}])$$

e o quociente de dois intervalos é definido por

$$[\underline{a},\overline{a}] \oslash [\underline{b},\overline{b}] = [\underline{a},\overline{a}] \otimes ([\underline{b},\overline{b}]^{-1})$$

Podemos agora mostrar que se $C = A \oplus B$ então $C^\alpha = A^\alpha \oplus B^\alpha$ para todo α, onde $A^\alpha \oplus B^\alpha$ é uma soma de intervalos. Assim, se desejarmos adicionar dois números fuzzy, podemos fazer a soma dos intervalos de confiança correspondentes em cada um dos α-níveis.

Vamos rever o problema introduzido anteriormente neste capítulo. Queremos adicionar dois números fuzzy A e B com as seguintes funções de pertinência

$$A(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad e \; B(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

e produzir suas fórmulas para a soma, diferença, produto e quociente.

Vamos primeiro exemplificar o cálculo com alguns valores numéricos, para posteriormente chegar em um resultado geral.

Fixemos $\alpha = 0,3$. Os cortes de A e B são intervalos, especificamente $A^{0,3} = [0,3; 1,7]$ e $B^{0,3} = [1,3; 2,7]$

Adição: Quando adicionamos intervalos, somamos os extremos correspondentes, ou seja,

$$A^{0,3} \oplus B^{0,3} = [0,3; 1,7] \oplus [1,3; 2,7] = [1,6; 4,4]$$

que deve ser o corte em $C = A \oplus B$ em $\alpha = 0,3$, ou $C^{0,3} = [1,6; 4,4]$

Subtração: Quando subtraímos intervalos (com todos os extremos sendo números positivos), devemos inverter o segundo intervalo e então subtrair os extremos correspondentes, assim:

$$A^{0,3} \ominus B^{0,3} = [0,3; 1,7] \ominus [1,3; 2,7] = [0,3; 1,7] \oplus [-2,7; -1,3] = [-2,4; 0,4] = C^{0,3}$$

Multiplicação: Quando multiplicamos intervalos, devemos multiplicar os extremos correspondentes

$$A^{0,3} \otimes B^{0,3} = [0,3; 1,7] \otimes [1,3; 2,7] = [0,39; 4,59] = C^{0,3}$$

Divisão: Quando dividimos intervalos (com todos os extremos sendo números positivos), devemos inverter o segundo intervalo e então dividir os extremos correspondentes

$$A^{0,3} \oslash B^{0,3} = [0,3;1,7] \oslash [1,3;2,7] = [0,3;1,7] \, / \, [2,7;1,3] = [0,11;1,31] = C^{0,3}$$

com duas casas decimais de aproximação.

Oposto: Quando queremos o oposto de um intervalo, devemos inverter os extremos e trocar os sinais

$$\ominus B^{0,3} = \ominus [1,3;2,7] = [-2,7;-1,3]$$

Recíproco: Quando invertemos um intervalo, devemos inverter os extremos e tomar seus recíprocos

$$\left(B^{0,3}\right)^{-1} = [1,3;2,7]^{-1} = \left[\frac{1}{2,7};\frac{1}{1,3}\right] = [0,37;0,77]$$

com a aproximação de duas casas decimais.

Vejamos, agora, um caso mais geral com os dois números fuzzy A e B. Primeiramente, já sabemos que ambos são números fuzzy triangulares. Para cada α escolhido, temos que A^{α} é um intervalo, e por causa da forma triangular da função de pertinência podemos resolver para os limites esquerdo e direito do corte em termos de α. Para um α arbitrário, $A^{\alpha} = [\underline{a}(\alpha);\overline{a}(\alpha)]$. O mesmo ocorre para B^{α}, pois os limites esquerdo e direito dependem só do α.

Agora temos condições de resolver explicitamente usando as equações

$$A(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 < x \le 2 \end{cases} \quad e \; B(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x \le 2 \\ 3-x & 2 < x \le 3 \end{cases} .$$

Por exemplo, se usarmos o lado direito do número fuzzy triangular B e igualarmos a α temos

$$\alpha = 3 - x$$

e resolvendo para x temos $x = 3 - \alpha$ que deve ser o extremo direito do corte em B. De maneira análoga, escolhendo α igual ao lado esquerdo e resolvendo para x encontramos $x = \alpha + 1$ que deve ser o extremo esquerdo do intervalo do corte. Repetindo o procedimento para o número fuzzy triangular A conseguimos as fórmulas para os extremos dos cortes em A e B

$$\underline{a}(\alpha) = \alpha$$
$$\overline{a}(\alpha) = 2 - \alpha$$
$$\underline{b}(\alpha) = \alpha + 1$$
$$\overline{b}(\alpha) = 3 - \alpha$$

Uma outra forma de dizer este mesmo resultado é que para qualquer $\alpha \in [0; 1]$ os cortes são intervalos

$$A^\alpha = [\alpha; 2 - \alpha]$$

e

$$B^\alpha = [\alpha + 1; 3 - \alpha]$$

Anteriormente, mostramos que se $C = A \oplus B$, então, os cortes de C são iguais a soma dos cortes de A e B. Assim,

$$\begin{aligned} C^\alpha &= [\underline{c}(\alpha); \overline{c}(\alpha)] \\ &= [\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)] \oplus [\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)] \\ &= \left[\underline{a}(\alpha) + \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) + \overline{b}(\alpha)\right] \end{aligned}$$

E se substituirmos pelos valores correspondentes, temos

$$C^\alpha = [\alpha; 2 - \alpha] \oplus [\alpha + 1; 3 - \alpha] = [2\alpha + 1; 5 - 2\alpha]$$

Sabemos que o extremo esquerdo do corte em C, em termos de α, é

$$\underline{c}(\alpha) = 2\alpha + 1$$

e o extremo direito é

$$\overline{c}(\alpha) = 5 - 2\alpha$$

Resolvendo para α encontramos

$$\alpha = \frac{\underline{c}(\alpha) - 1}{2}$$

e

$$\alpha = \frac{5 - \overline{c}(\alpha)}{2}$$

Vale destacar que α é essencialmente um valor de pertinência e que $\underline{c}(\alpha)$ é o valor de x mais a esquerda do valor de pertinência α, $\overline{c}(\alpha)$ é portanto, o valor de x mais a direita. Entendendo esta parte corretamente, temos a fórmula para o número fuzzy *C:*

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ \frac{5-x}{2} & 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

O intervalo da definição, $1 \leq x \leq 3$, pode ser determinado pela adição dos intervalos correspondentes da definição de A, que é $0 \leq x \leq 1$, e *B,* que é $1 \leq x \leq 2$, ou determinando onde $\frac{x-1}{2}$ assume os valores do intervalo $0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$. Os dois métodos produzem os mesmos resultados.

Como um segundo exemplo, vamos encontrar a fórmula para os cortes do número fuzzy C que a diferença entre A e B. Sendo $C = A \ominus B$

$$
\begin{aligned}
C^{\alpha} &= \left[\underline{c}(\alpha);\overline{c}(\alpha)\right] \\
&= \left[\underline{a}(\alpha);\overline{a}(\alpha)\right] \ominus \left[\underline{b}(\alpha),\overline{b}(\alpha)\right] \\
&= \left[\underline{a}(\alpha)-\overline{b}(\alpha);\overline{a}(\alpha)-\underline{b}(\alpha)\right] \\
&= [\alpha;2-\alpha] \ominus [\alpha+1;3-\alpha] \\
&= [\alpha-(3-\alpha);(2-\alpha)-(\alpha+1)] \\
& [2\alpha-3;1-2\alpha]
\end{aligned}
$$

Sabemos que

$$\underline{c}(\alpha) = 2\alpha - 3$$

e

$$\overline{c}(\alpha) = 1 - 2\alpha$$

Resolvendo as equações para α vem

$$\alpha = \frac{\underline{c}(\alpha)+3}{2}$$

e

$$\alpha = \frac{1-\overline{c}(\alpha)}{2}$$

O que nos dá a forma do número fuzzy $C = A \ominus B$

$$C(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2} & -3 \leq x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2} & -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

O número fuzzy C é triangular, $C = Tr[-3;-1;1]$

O próximo exemplo ilustra que o produto e o quociente de números fuzzy triangulares não são, necessariamente, um número fuzzy triangular. Vamos encontrar a fórmula para

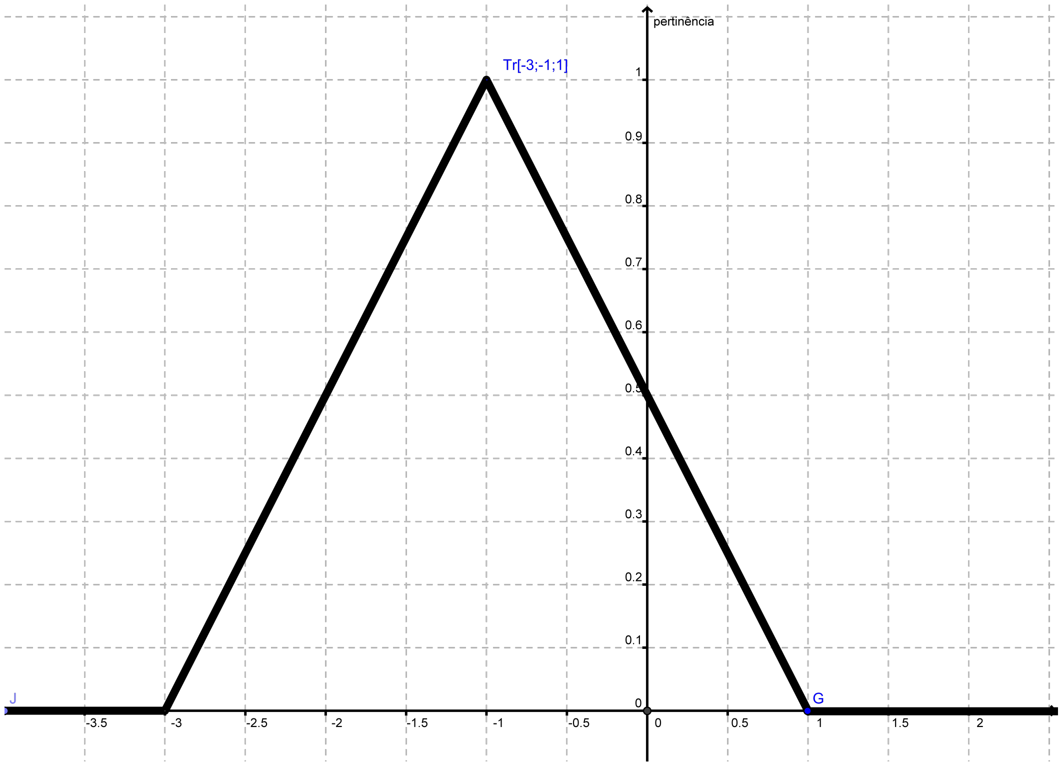

Figura 3.2.3: Número fuzzy C = A - B

o número fuzzy C que é o produto entre A e B. Com $C = A \otimes B$ podemos deduzir que

$$\begin{aligned} C^{\alpha} &= [\underline{c}(\alpha); \overline{c}(\alpha)] \\ &= A^{\alpha} \otimes B^{\alpha} \\ &= [\underline{a}(\alpha); \overline{a}(\alpha)] \otimes [\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)] \\ &= \left[\underline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha); \overline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha)\right] \\ &= [\alpha \cdot (\alpha + 1); (3 - \alpha) \cdot (2 - \alpha)] \\ &= [\alpha^2 + \alpha; 6 - 5\alpha + \alpha^2] \end{aligned}$$

Temos que o extremo esquerdo do intervalo é

$$\underline{c}(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$$

e o extremo direito é

$$\overline{c}(\alpha) = 6 - 5\alpha + \alpha^2$$

Mantendo apenas as raízes positivas das equações quadráticas temos

$$C(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{5-\sqrt{4x+1}}{2} & 2 < x \leq 6 \end{cases}$$

Para o quociente temos, se $C = A \oslash B$

$$\begin{aligned} C^{\alpha} &= [\underline{c}(\alpha); \overline{c}(\alpha)] \\ &= A^{\alpha} \oslash B^{\alpha} \\ &= [\underline{a}(\alpha); \overline{a}(\alpha)] \oslash [\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)] \\ &= \left[\tfrac{\underline{a}(\alpha)}{\overline{b}(\alpha)}; \tfrac{\overline{a}(\alpha)}{\underline{b}(\alpha)}\right] \\ &= [\alpha; 2-\alpha] \oslash [\alpha+1; 3-\alpha] \\ &= \left[\tfrac{\alpha}{3-\alpha}; \tfrac{2-\alpha}{\alpha+1}\right] \end{aligned}$$

Assim,

$$\underline{c}(\alpha) = \frac{\alpha}{3-\alpha}$$

e

$$\overline{c}(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha+1}$$

Resolvendo as equações, encontramos

$$C(x) = \begin{cases} \frac{3x}{1+x} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2-x}{x+1} & \frac{1}{2} < x \leq 2 \end{cases}$$

A próxima figura ilustra os produto e o quociente em questão.

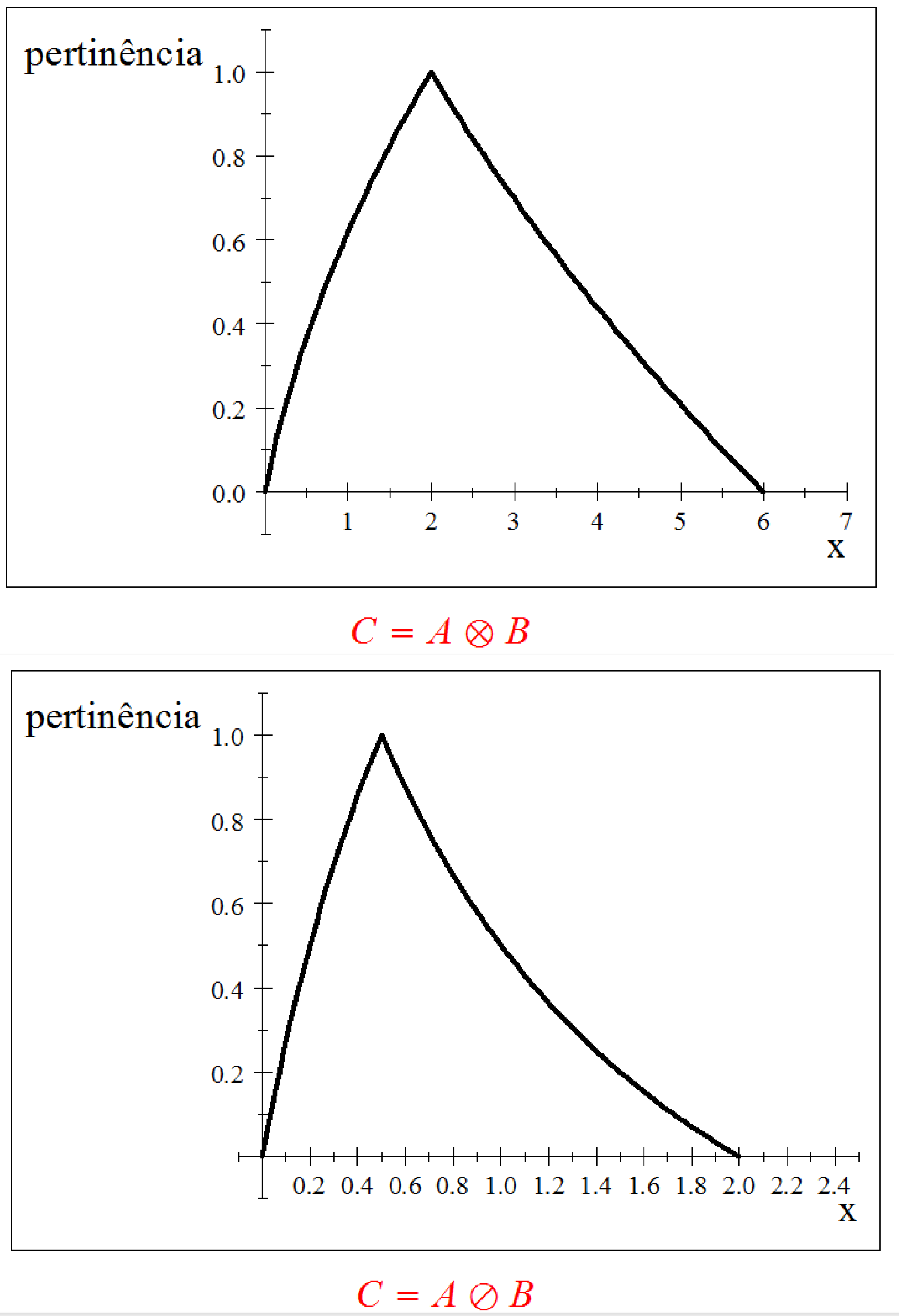

Figura 3.2.4: Produto e quociente entre A e B

Capítulo 4

Problemas para a sala de aula

Neste capítulo apresentamos alguns problemas que podem ser usados em sala de aula para turmas do ensino médio. Em alguns casos, usaremos o software InFuzzy que está disponível para download em http://www.unisc.br/portal/pt/cursos/mestrado/mestrado-em-sistemas-e-processos-industriais/softwares-para-download/infuzzy.html.

Cabe ao professor definir as melhores estratégias para colocar em prática a resolução de tais problemas, porém, sugerimos, como uma primeira abordagem, que estes problemas sejam primeiramente propostos sem apresentação alguma da lógica fuzzy. O objetivo é ter um grupo de controle para a pesquisa em sala de aula. Posteriormente, sugerimos um minicurso sobre conjuntos e números fuzzy (como apresentados nos capítulos anteriores), bem como os métodos para a inferência (Mandani por exemplo).

O uso de um software para a resolução dos problemas é opcional e fica a critério do professor, uma vez que os resultados podem ser obtidos com o uso dos conhecimentos matemáticos de um aluno do ensino médio.

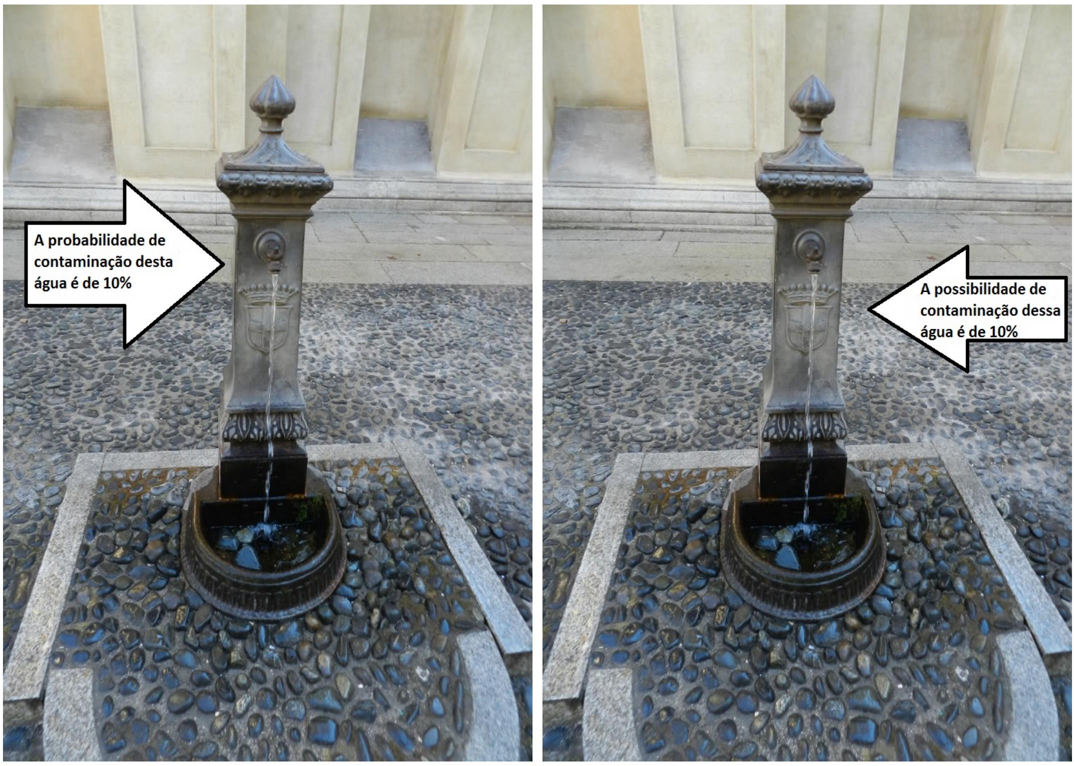

Figura 4.1.1: As fontes d´água

4.1 Probabilidade *versus* Possibilidade

Enunciado: Após uma longa caminhada, sob intenso calor, você se depara com duas fontes de água. Sedento, porém cauteloso, você lê o que está escrito em cada uma delas.

Na 1ª está escrito que a probabilidade de contaminação da água é de 10%. Já na 2ª está escrito que a possibilidade de contaminação da água é 10%.

De qual fonte você beberia a água? Justifique sua resposta.

Obs.: Este problema é baseado no encontrado em [2]. Sugerimos a leitura desta tese para maiores esclarecimentos.

Com este problema podemos inicialmente verificar se os alunos possuem algum tipo de conhecimento sobre a distinção entre probabilidade e possibilidade. Em ambos os casos há uma incerteza associada às fontes d´água. Porém, no caso da teoria fuzzy, a incerteza (*fuzziness*) tem a capacidade de descrever a ambiguidade de um evento, medindo o grau com que um evento acontece, não a sua ocorrência. Já a aleatoriedade das probabilidades descreve a incerteza da ocorrência de um evento que pode ocorrer ou não. Se um evento ocorre ou não é aleatório, com que grau é tal ocorrência é fuzzy.

Há muitas semelhanças entre probabilidades e incerteza fuzzy ou possibilidade. Por exemplo, ambas quantificam e modelam a incerteza em um intervalo [0;1]. As manipulações das incertezas são distributivas, comutativas e associativas. Mas há uma diferença primordial nas duas teorias, pois o que se modela não é o mesmo tipo de objeto. Na segunda fonte está escrito que a possibilidade de contaminação da água é de 10%, ou seja, seu conteúdo é bastante similar à água potável, pois há um grau de pertinência de 90%, o que indica que é praticamente água boa para o consumo. Na pior hipótese, ao bebê-la, a pessoa terá uma leve dor de barriga, uma vez que a água não é contaminada. Já na primeira fonte, está escrito que a probabilidade de contaminação da água é de 10%, ou seja, após inúmeros experimentos é esperado que o conteúdo desta fonte seja potável em 90% dos casos. Nos outros 10% o conteúdo está contaminado, ou seja, há uma chance em 10! E como se sabe nas teorias das probabilidades, isto não quer dizer que se retirarmos dez copinhos com amostras desta fonte, então há um copinho com água contaminada. Pode ser que todos os copinhos estajam com água contaminada, ou seja, é provável que o indivíduo que beba esta água venha a morrer por intoxicação.

Assim, fica evidente a distinção entre as duas informações das placas. A primeira fornece informação sobre as expectativas relativas a um grande número de experimentos aleatórios. Já a segunda fornece o grau de pertinência fuzzy, que tem como função quantificar a similaridade de objetos com propriedades definidas de maneira imprecisas/vagas. Por isso, é esperado que seja escolhida a segunda fonte para se beber a água.

4.2 O Cálculo do Seguro do Carro

Enunciado: Você é um corretor de seguros de automóveis e deve fazer o cálculo do seguro de um cliente. Sabe-se que o veículo possui 6 amassados e seu valor é de aproximadamente R$ 15.000,00.

Para o cálculo do seguro, a empresa usa tabelas que atribuem diferentes valores para as variáveis preço e amassados.

Obs.: Este e o próximo problema foram retirados de

http://nstec.com.br/IA/listas/Lista4.pdf, acesso em 01/03/2013.

Preço (R$)	0	2500	5000	7500	10000	12500	15000	17500	20000	22500	25000
Barato	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
Caro	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

Tabela 4.1: Função de pertinência para o preço do veículo

Amassados	0	1	2	3	4	5	6	7	8 ou mais
Muitos	0	0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1
Poucos	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0	0

Tabela 4.2: Função de pertinência para os amassados do veículo

Seguro (reais)	<100	100	200	300	400	500
Alto	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Baixo	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Tabela 4.3: Função de pertinência do valor do seguro

Fora isso, você deve seguir algumas regras estipuladas pela empresa.

Regra 1: Se o preço é caro e os amassados são poucos, então, o seguro é alto.

Regra 2: Se o preço é barato e os amassados são poucos, então, o seguro é baixo.

Regra 3: Se o preço é barato e os amassados são muitos, então, o seguro é alto.

Assim, qual deve ser o valor pago pelo seguro do veículo?

4.2.1 Uma possível solução:

1ª etapa: processo de fuzzyficação

Para a variável preço temos

$$\mu_{Barato}(15.000) = 0,4$$

$$\mu_{Caro}(15.000) = 0,6$$

Para a variável amassados temos

$$\mu_{Muitos}(6) = 0,8$$

$$\mu_{Poucos}(6) = 0,2$$

2ª etapa: processo de inferência

Regra 1: Se o preço é caro e os amassados são poucos, então, o seguro é alto.

Preço é caro com pertinência 0,6.

Amassados são poucos com pertinência 0,2.

Seguro é alto com pertinência 0,2, pois $min\{0,6;0,2\} = 0,2$.

Regra 2: Se o preço é barato e os amassados são poucos, então, o seguro é baixo.

Preço é barato com pertinência 0,4.

Amassados são poucos com pertinência 0,2

Seguro é baixo com pertinência 0,2 pois $min\{0,4;0,2\} = 0,2$.

Regra 3: Se o preço é barato e os amassados são muitos, então, o seguro é alto.

Preço é barato com pertinência 0,4.

Amassados são muitos com pertinência 0,8

Seguro é alto com pertinência 0,4, pois $min\{0,4;0,8\} = 0,4$.

3ª etapa: defuzzyficação

Regra 1: $\mu_{Alto}(X) = 0,2 \therefore X = 100$

Regra 2: $\mu_{Baixo}(Y) = 0,2 \therefore Y = 400$

Regra 3: $\mu_{Alto}(Z) = 0,4 \therefore Z = 200$

Para chegar ao valor do seguro, devemos calcular a média ponderada entre os valores do seguro e seus respectivos graus de pertinência. Assim:

$$Seguro = \frac{(0,2 \times 100) + (0,2 \times 400) + (0,4 \times 200)}{0,2 + 0,2 + 0,4} = \frac{20 + 80 + 80}{0,8} = 225$$

Concluímos que o valor a ser pago pelo seguro do veículo é de R$ 225,00.

Comentário: Este problema pode ser facilmente resolvido por um aluno do ensino médio. Não é preciso ter conhecimentos matemáticos sofisticados, basta entender o que é a leitura e interpretação de dados em uma tabela; saber descrever o menor elemento de um conjunto; e por fim, conhecer o significado de média aritmética ponderada.

4.2.2 Solução com o uso do InFuzzy

Vamos resolver o problema com o uso do software InFuzzy. Ao abrir o programa devemos definir um novo projeto, atribuindo um nome, um autor e uma descrição.

Na próxima tela, precisamos incluir as variáveis de entrada, preço e amassados, clicando na seta verde.

O próximo passo é criar uma função que melhor modela as variáveis em questão.

Para a variável **preço**, definimos uma função decrescente para o termo linguístico **barato** e uma crescente para o termo linguístico **caro**.

Para **amassados**, definimos duas funções rampa (uma esquerda para o termo **muitos** e uma direita para o termo **poucos**).

Podemos, agora, criar a variável de saída **seguro** clicando na seta vermelha. Mais uma vez, duas funções lineares modelam perfeitamente os dados da tabela.

O próximo passo é incluir a base de regras. Para tanto devemos clicar no ícone de adicionar bloco de regras e ligar as variáveis até o bloco para realizar as conexões para a inferência.

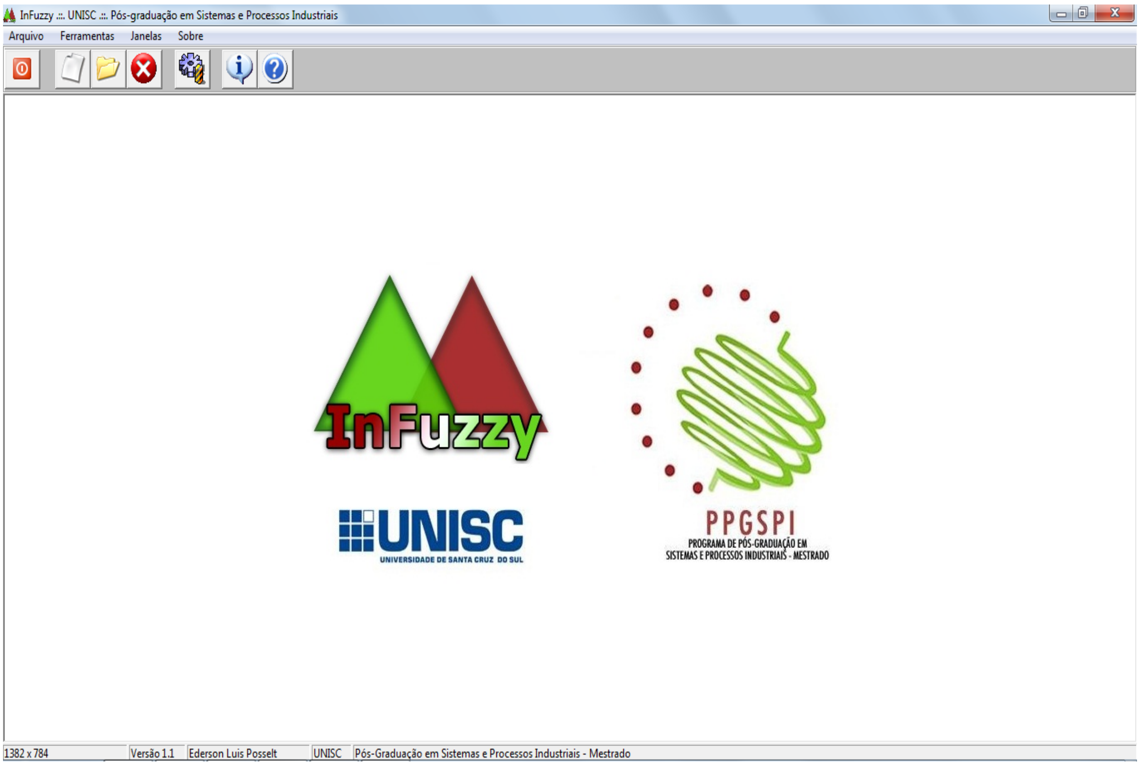

Figura 4.2.1: Tela inicial do InFuzzy

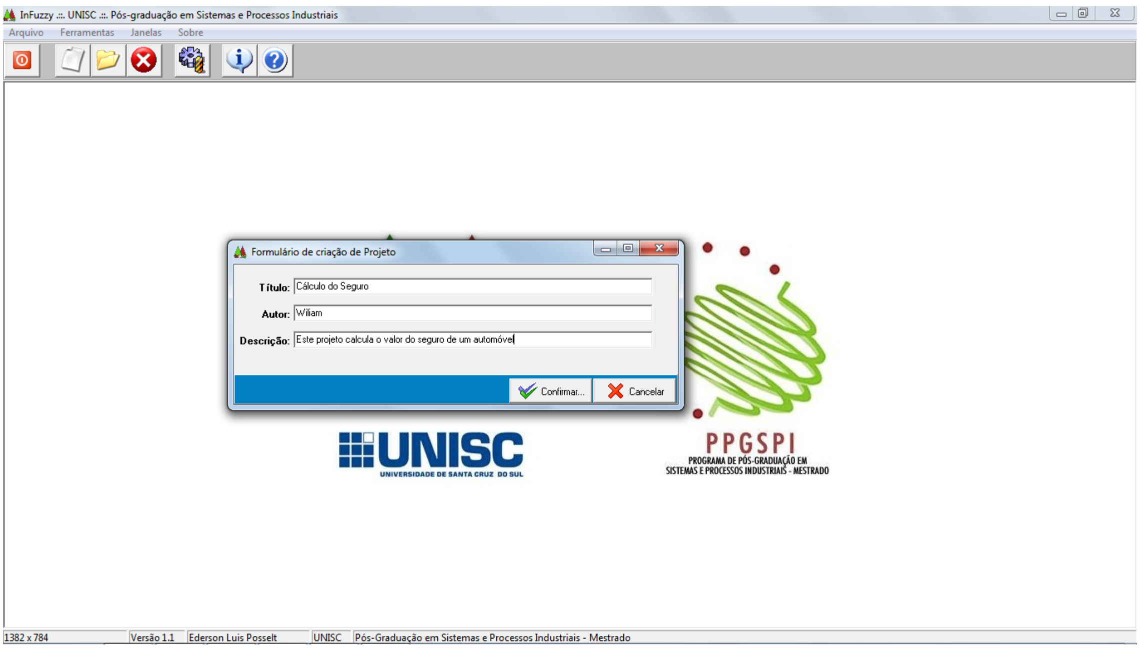

Figura 4.2.2: Criação do projeto para o cálculo do seguro

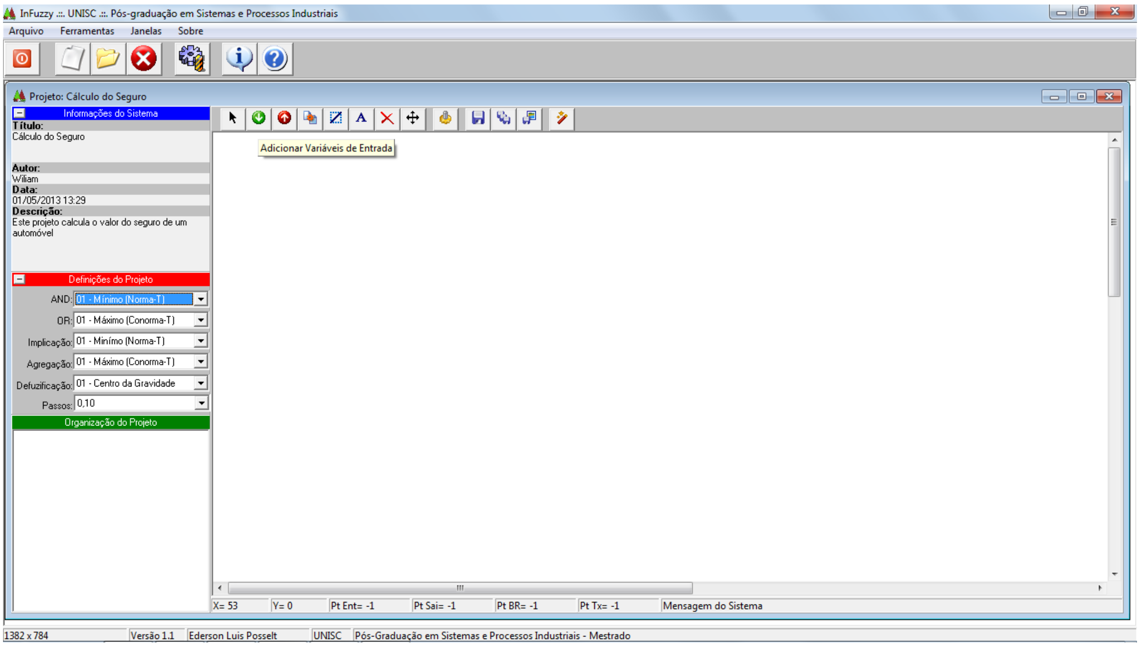

Figura 4.2.3: Tela para definir as configurações do projeto

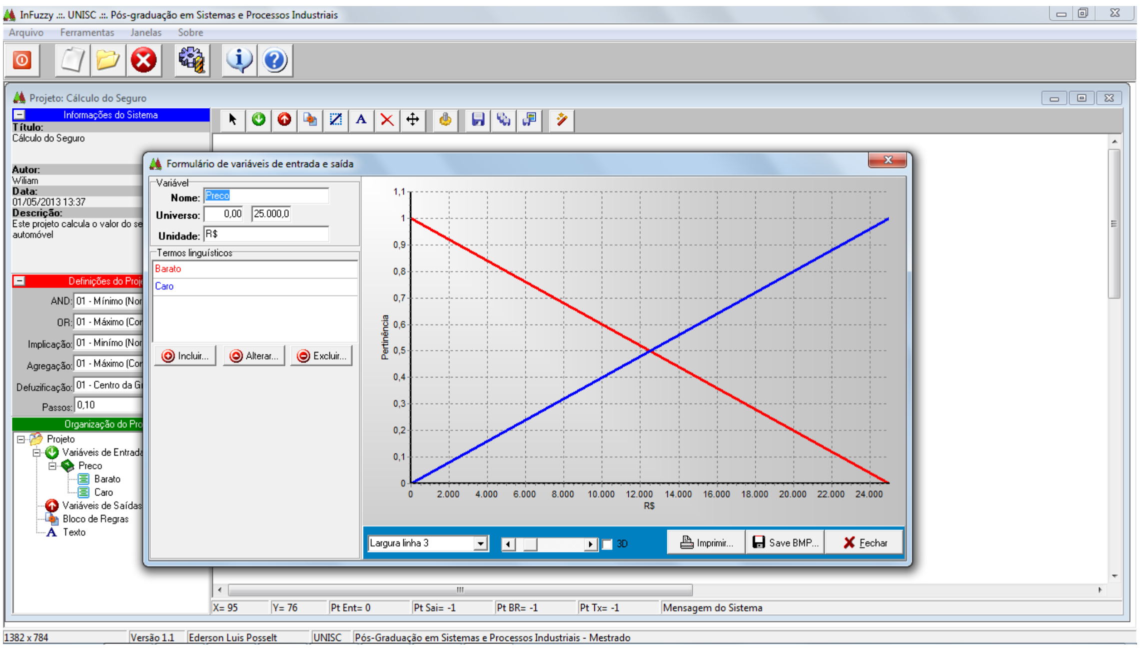

Figura 4.2.4: Função de pertinência da variável preço

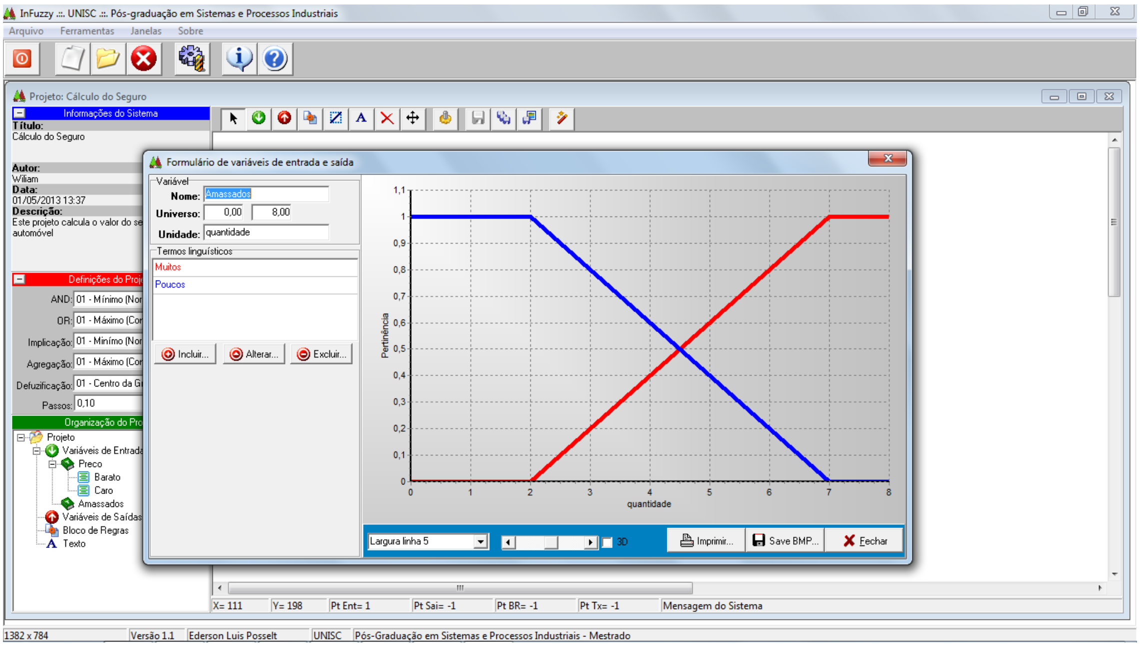

Figura 4.2.5: Função de pertinência da variável amassados

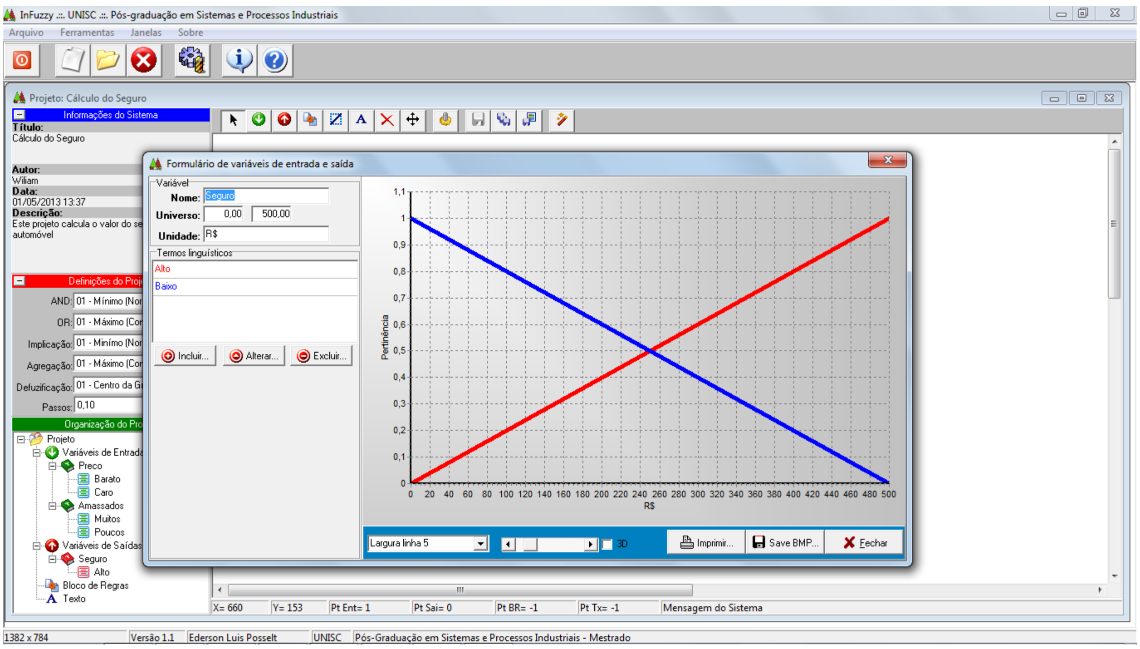

Figura 4.2.6: Função de pertinência da variável seguro

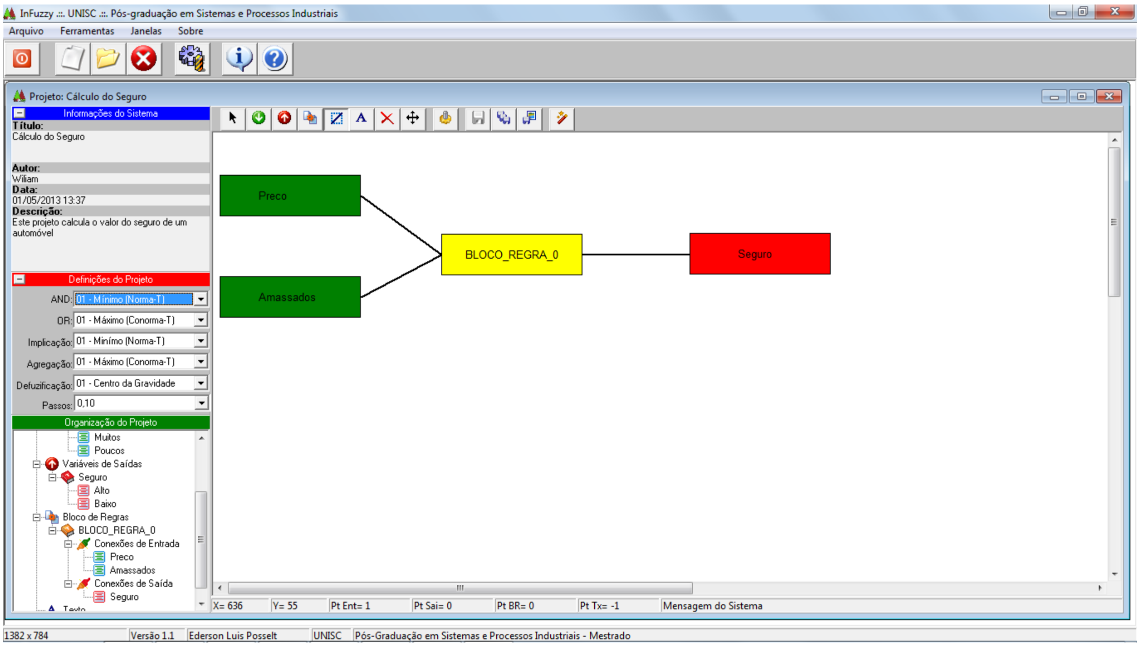

Figura 4.2.7: Conexões entre variáveis e bloco de regras

Podemos, então, criar as regras de acordo com as restrições do enunciado.

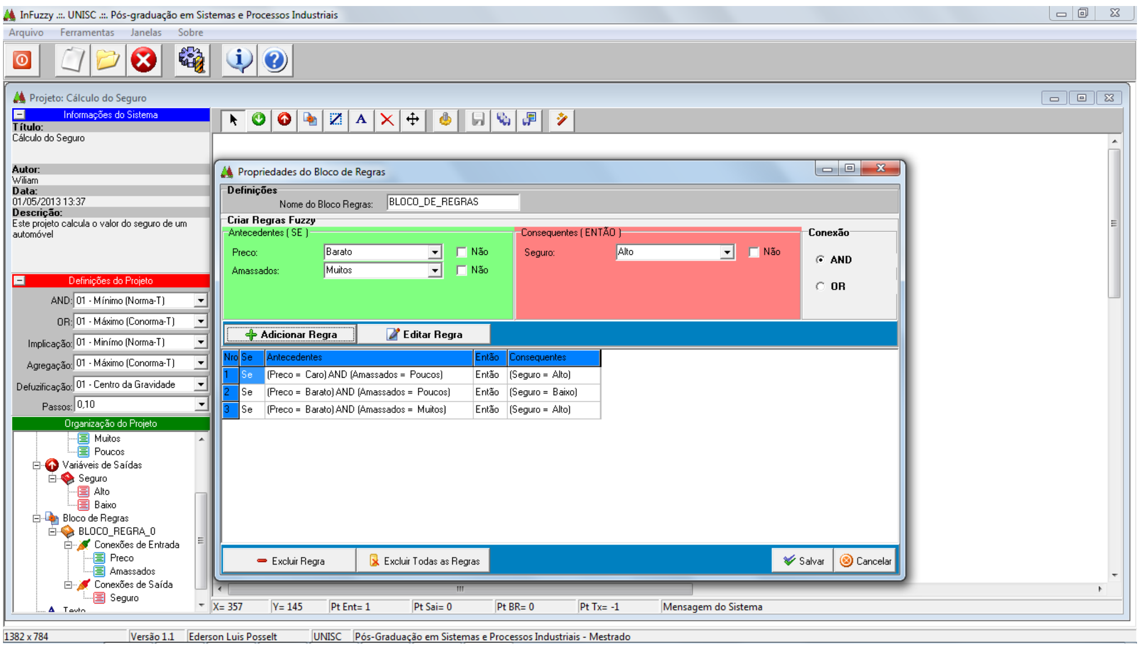

Figura 4.2.8: Edição das regras no programa

Neste momento podemos clicar no último ícone (ferramentas de simulação) e atribuir os parâmetros do problema: preço de R$ 15.000,00 e 6 amassados.

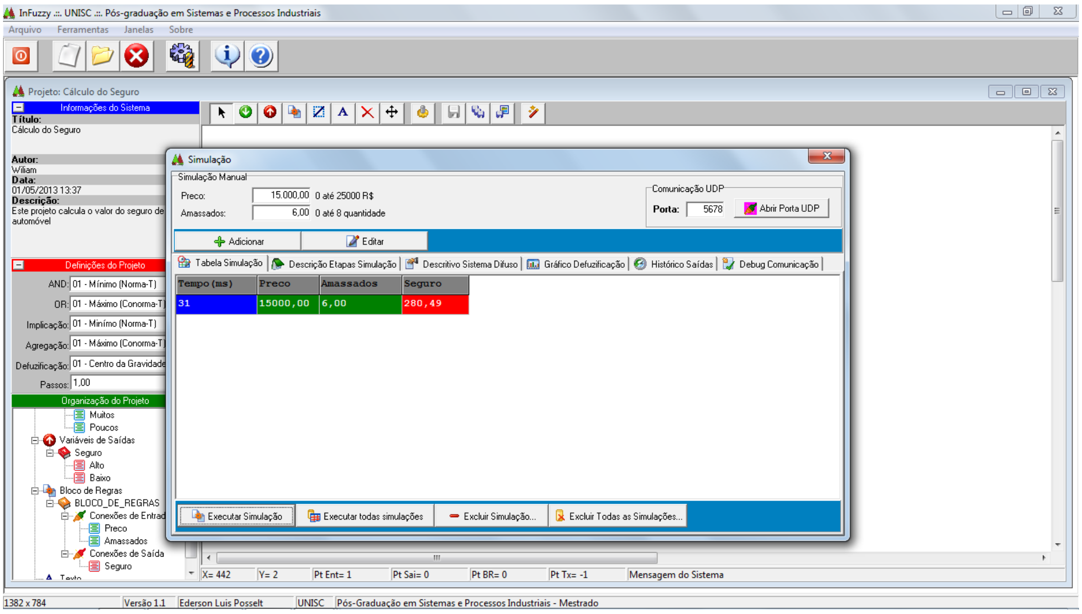

Figura 4.2.9: Simulação com os valores do problema

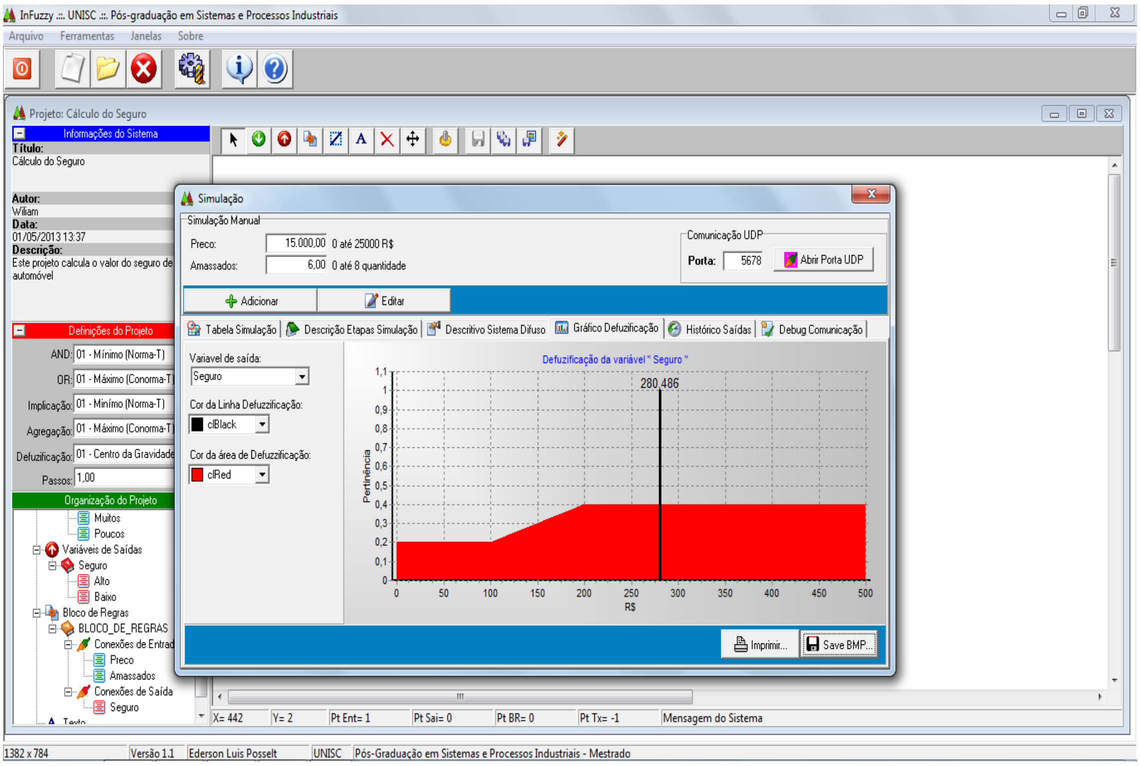

Figura 4.2.10: Gráfico da saída defuzzificada

Vale destacar que o valor da saída para o seguro foi de aproximadamente R$ 280,00. Esta diferença em relação aos R$ 225,00 calculados anteriormente se deve ao fato dos diferentes métodos utilizados para a inferência fuzzy.

4.3 O Cálculo do Rendimento da Aplicação

Enunciado: Você é o gerente do Banco Fuzzy e deve simular para um cliente o rendimento de uma determinada aplicação de acordo com um certo período de tempo. Para tanto, é preciso seguir algumas regras do banco:

- Há uma tabela para a função de pertinência de cada valor aplicado.

Valor (R$ em milhares)	2,5	4	5	9	16	23	30	37	42	60
Muito Baixo	1	0,7	0,5	0,2	0	0	0	0	0	0
Baixo	0	0,4	0,5	0,9	0,9	0,3	0	0	0	0
Alto	0	0	0	0	0,2	0,8	1	0,8	0,4	0
Muito Alto	0	0	0	0	0	0	0	0,2	0,7	1

Tabela 4.4: Função de pertinência do valor aplicado

- Existe uma tabela para o período da aplicação.

Período (meses)	1	3	6	8	12	24
Curto	1	0,8	0,5	0,3	0	0
Médio	0,3	0,5	1	1	0,5	0,2
Longo	0	0	0,2	0,6	0,8	1

Tabela 4.5: Função de pertinência do período aplicado

- Por fim, há uma tabela de pertinência para o rendimento.

Rendimento (%)	1	5	10	30	50	100
Alto	0	0	0,2	0,3	0,5	1
Baixo	1	0,8	0,5	0,4	0	0

Tabela 4.6: Função de pertinência do rendimento

Os gerentes ainda precisam seguir com rigor as regras estipuladas pelo banco:

Regra 1: Se o valor é muito baixo, então, o rendimento é baixo.

Regra 2: Se o valor é baixo e o período longo, então, o rendimento é alto.

Regra 3: Se o valor é baixo e o período não é longo, então, o rendimento é baixo.

Regra 4: Se o valor é alto e o período é curto, então, o rendimento é baixo.

Regra 5: Se o valor é alto e o período não é curto, então, o rendimento é alto.

Regra 6: Se o valor é muito alto, então, o rendimento é alto.

Desta forma, qual deveria ser o rendimento de um cliente caso invista:

a) R$ 5.000,00 durante 8 meses?

b) R$ 30.000,00 durante 1 mês?

c) R$ 60.000,00 durante 24 meses?

4.3.1 Uma possível solução (a):

1ª etapa: fuzzificação

Para a variável valor da aplicação temos

$$\mu_{MuitoBaixo}(5000) = 0,5$$

$$\mu_{Baixo}(5000) = 0,5$$

$$\mu_{Alto}(5000) = 0$$

$$\mu_{MuitoAlto}(5000) = 0$$

Para a variável período da aplicação

$$\mu_{Curto}(8) = 0,3$$

$$\mu_{Médio}(8) = 1$$

$$\mu_{Longo}(8) = 0,6$$

2ª etapa: processo de inferência

Regra 1: Se o valor é muito baixo, então, o rendimento é baixo.

$$min(0,5) = 0,5$$

O rendimento é baixo com pertinência 0,5.

Regra 2: Se o valor é baixo e o período longo, então, o rendimento é alto.

$$min(0,5; 0,6) = 0,5$$

O rendimento é alto com pertinência 0,5.

Regra 3: Se o valor é baixo e o período não é longo, então, o rendimento é baixo.

$$min\,(0,5; (1-0,6)) = min\,(0,5; 0,4) = 0,4$$

O rendimento é baixo com pertinência 0,4.

Regra 4: Se o valor é alto e o período é curto, então, o rendimento é baixo.

$$min\,(0; 0,3) = 0$$

O rendimento é baixo com pertinência 0.

Regra 5: Se o valor é alto e o período não é curto, então, o rendimento é alto.

$$min\,(0; (1-0,3)) = min\,(0; 0,7) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

Regra 6: Se o valor é muito alto, então, o rendimento é alto.

$$min\,(0) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

3ª etapa: defuzzyficação

Regra 1: $\mu_{Baixo}\,(A) = 0,5 \therefore A = 10$

Regra 2: $\mu_{Alto}\,(B) = 0,5 \therefore B = 50$

Regra 3: $\mu_{Baixo}\,(C) = 0,4 \therefore C = 30$

Regra 4: $\mu_{Baixo}\,(D) = 0 \therefore D = 50; D' = 100$

Regra 5: $\mu_{Alto}\,(E) = 0 \therefore E = 1; E' = 5$

Regra 6: $\mu_{Alto}\,(F) = 0 \therefore F = 1; F' = 5$

O cálculo da média ponderada fornece

$$R = \frac{(0,5 \cdot 10) + (0,5 \cdot 50) + (0,4 \cdot 30) + ((0 \cdot 50) + (0 \cdot 100)) + 2\,((0 \cdot 1) + (0 \cdot 5))}{0,5 + 0,5 + 0,4 + 0 + 0 + 0} =$$

$$= \frac{5 + 25 + 12}{1,4} = 30$$

O rendimento é de 30% para a simulação (a).

4.3.2 Uma possível solução (b):

1ª etapa: fuzzyficação

Para a variável valor da aplicação, temos

$$\mu_{MuitoBaixo}\,(30000) = 0$$

$$\mu_{Baixo}\,(30000) = 0$$

$$\mu_{Alto}\,(30000) = 1$$

$$\mu_{MuitoAlto}\,(30000) = 0$$

Para a variável período da aplicação

$$\mu_{Curto}\,(1) = 1$$

$$\mu_{Médio}\,(1) = 0,3$$

$$\mu_{Longo}\,(1) = 0$$

2ª etapa: processo de inferência

Regra 1: Se o valor é muito baixo, então, o rendimento é baixo.

$$min(0) = 0$$

O rendimento é baixo com pertinência 0.

Regra 2: Se o valor é baixo e o período longo, então, o rendimento é alto.

$$min(0; 0) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

Regra 3: Se o valor é baixo e o período não é longo, então, o rendimento é baixo.

$$min\,(0; (1-0)) = min\,(0; 1) = 0,$$

O rendimento é baixo com pertinência 0.

Regra 4: Se o valor é alto e período é curto, então, o rendimento é baixo.

$$min\,(1;1) = 1$$

O rendimento é baixo com pertinência 1.

Regra 5: Se o valor é alto e o período não é curto, então, o rendimento é alto.

$$min\,(1;(1-1)) = min\,(1;0) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

Regra 6: Se o valor é muito alto, então, o rendimento é alto.

$$min\,(0) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

3ª etapa: defuzzyficação

Regra 1: $\mu_{Baixo}\,(A) = 0 \therefore A = 50; A\acute{}$=100

Regra 2: $\mu_{Alto}\,(B) = 0 \therefore B = 1; B\acute{}$=5

Regra 3: $\mu_{Baixo}\,(C) = 0 \therefore C = 50; C\acute{}$=100

Regra 4: $\mu_{Baixo}\,(D) = 1 \therefore D = 1$

Regra 5: $\mu_{Alto}\,(E) = 0 \therefore E = 1; E\acute{}$=5

Regra 6: $\mu_{Alto}\,(F) = 0 \therefore F = 1; F\acute{}$=5

O cálculo da média ponderada fornece

$$Rendimento = \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

O rendimento é de 1% para a simulação (b).

4.3.3 Uma possível solução (c):

1ª etapa: fuzzificação

Para a variável valor da aplicação temos

$$\mu_{MuitoBaixo}\,(60000) = 0$$

$$\mu_{Baixo}\,(60000) = 0$$

$$\mu_{Alto}\,(60000) = 0$$

$$\mu_{MuitoAlto}\,(60000) = 1$$

Para a variável período da aplicação

$$\mu_{Curto}\,(24) = 0$$

$$\mu_{Médio}\,(24) = 0,2$$

$$\mu_{Longo}\,(24) = 1$$

2ª etapa: processo de inferência

Regra 1: Se o valor é muito baixo, então, o rendimento é baixo.

$$min(0) = 0$$

O rendimento é baixo com pertinência 0.

Regra 2: Se o valor é baixo e o período longo, então, o rendimento é alto.

$$min(0;1) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

Regra 3: Se o valor é baixo e o período não é longo, então, o rendimento é baixo.

$$min\,(0;(1-1)) = min\,(0;0) = 0$$

O rendimento é baixo com pertinência 0.

Regra 4: Se o valor é alto e período é curto, então, o rendimento é baixo.

$$min\,(0;0) = 0$$

O rendimento é baixo com pertinência 0.

Regra 5: Se o valor é alto e o período não é curto, então, o rendimento é alto.

$$min\,(0;(1-0)) = min\,(0;1) = 0$$

O rendimento é alto com pertinência 0.

Regra 6: Se o valor é muito alto, então, o rendimento é alto.

$$min\,(1) = 1$$

O rendimento é alto com pertinência 1.

3ª etapa: defuzzyficação

Regra 1: $\mu_{Baixo}\,(A) = 0 \therefore A = 50; A´{=}100$

Regra 2: $\mu_{Alto}\,(B) = 0 \therefore B = 1; B = 5$

Regra 3: $\mu_{Baixo}\,(C) = 0 \therefore C = 50; C´{=}100$

Regra 4: $\mu_{Baixo}\,(D) = 0 \therefore D = 50; D´{=}100$

Regra 5: $\mu_{Alto}\,(E) = 0 \therefore E = 1; E´{=}5$

Regra 6: $\mu_{Alto}\,(F) = 1 \therefore F = 100$

O cálculo da média ponderada fornece

$$Rendimento = \frac{1 \times 100}{1} = 100$$

O rendimento é de 100% para a simulação (c).

Comentários: Novamente, as operações exigidas são facilmente dominadas por um aluno do ensino médio. Cabe destacar que neste problema há um número maior de variáveis linguísticas e regras de inferência. Um outro ponto importante é que em alguns casos havia mais de um possível valor para a variável com determinado valor de pertinência conhecido.

4.4 A Viagem Campinas - São Paulo

Enunciado: Você vai fazer uma viagem de ônibus de Campinas até São Paulo que está sujeita às seguintes condições:

- A distância é de aproximadamente 100 km;
- A velocidade não deve exceder os 120 km/h;
- O trânsito é geralmente intenso e a velocidade é reduzida nos pedágios;
- O ônibus sai quase sempre atrasado, mas nunca houve atraso de mais de meia hora.

Qual o tempo total (T) gasto em uma viagem de ônibus de Campinas à São Paulo?

Para mais detalhes deste problema confira [1] pp. 57-60.

4.4.1 Uma possível solução

Do ponto de vista da matemática clássica é impossível conseguir uma resposta exata para este problema, pois só possuímos informações vagas, mal definidas.

Quem já entrou no famoso Cometa poderia fornecer uma resposta intuitiva entre uma hora e uma hora e meia, baseada exclusivamente em sua experiência no trajeto Campinas - São Paulo.

Porém, o que procuramos é uma resposta que não carece da experiência do percurso, mas tenha condições de lidar com estas informações vagas e produzir respostas carregadas de conteúdo matemático, mesmo sendo oriundo de uma resposta linguística.

Vamos verificar como fica a solução deste problema com o raciocínio fuzzy.

Como sabemos que a distância D é de aproximadamente 100 km, podemos defini-la como um número fuzzy triangular $D = (90; 100; 110)$ que possui a função de pertinência

$$\varphi_D(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 90 \\ \frac{x}{10} - 9 & se \quad 90 < x \leq 100 \\ 11 - \frac{x}{10} & se \quad 100 < x \leq 110 \\ 0 & se \quad x > 110 \end{cases}$$

e com o que foi visto no Capítulo 2 podemos deduzir que os α-níveis são $D^\alpha = [10\alpha + 90; -10\alpha + 110]$.

Podemos modelar a incerteza da velocidade V do ônibus por um número triangular fuzzy também. Como já sabemos que a velocidade nunca ultrapassa os 120 km/h e que há cobrança de pedágio, ou seja redução da velocidade, podemos supor que $V = (30; 100; 120)$ e sua função de pertinência é

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 30 \\ \frac{x-30}{70} & se \quad 30 < x \leq 100 \\ \frac{x-120}{-20} & se \quad 100 < x \leq 120 \\ 0 & se \quad x > 120 \end{cases}$$

Os α-níveis são: $V^\alpha = [70\alpha + 30; -20\alpha + 120]$.

O ônibus parte quase sempre atrasado, assim devemos considerar um tempo extra (T_1) de espera que não é superior a 30 minutos (meia hora). Podemos modelar este tempo extra por um número fuzzy triangular $T_1 = (0; 0; 0,5)$, que possuem os seguintes α-níveis são $T_1^\alpha = [0; -0,5\alpha + 0,5] = \left[0; \frac{1-\alpha}{2}\right]$.

Conhecimentos básicos de cinemática indicam que o tempo gasto na estrada é o número fuzzy $T_2 = \frac{D}{V}$, cujos α-níveis são $T_2^\alpha = [10\alpha + 90; 110 - 10\alpha]\left[\frac{1}{120-20\alpha}; \frac{1}{70\alpha+30}\right] = \left[\frac{10\alpha+90}{120-20\alpha}; \frac{110-10\alpha}{70\alpha+30}\right]$.

O tempo total gasto T é dado pelo número fuzzy $T = T_1 + T_2$cujos α-níveis são: $T^\alpha = \left[0; \frac{1-\alpha}{2}\right] + \left[\frac{10\alpha+90}{120-20\alpha}; \frac{110-10\alpha}{70\alpha+30}\right] = \left[\frac{10\alpha+90}{120-20\alpha}; \frac{1-\alpha}{2} + \frac{110-10\alpha}{70\alpha+30}\right] = [f(\alpha); g(\alpha)]$.

Se $\alpha = 0$, temos que $T^0 = \left[\frac{3}{4}; \frac{25}{6}\right]$ e isto indica que qualquer resposta entre $\frac{3}{4}h$ e $\frac{25}{6}h$

seria uma solução para o problema.

Vale destacar que o tempo que possui o maior grau de pertinência ($\alpha = 1$)é $t = 1$h.

Capítulo 5

Considerações Finais

Sem dúvida, a Teoria Fuzzy modificou a forma de se modelar problemas da vida prática, sendo possível trabalhar com variáveis imprecisas. A matemática clássica, dotada da mais plena dicotomia do sim/não, 0/1, é/não é, vai se tornando obsoleta, frente aos novos desafios encontrados no campo da inteligência artificial, biomatemática, dentre outras áreas que avançaram muito no século XX. Assim sendo, apresentar novos meios de se pensar o ensino de matemática e atribuir-lhe significado é um dos desafios da educação do novo século.

É tarefa dos professores, dos formadores de professores e dos legisladores garantir novas maneiras de se pensar o ensino de matemática, como, por exemplo, na subjetividade de problemas e no uso da Teoria Fuzzy no ensino médio, preparando nossos alunos para situações futuras, em que o domínio dessa teoria pode ser fundamental.

Referências Bibliográficas

[1] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática.* 2ª ed. Campinas, SP. Coleção IMECC - Unicamp, 2010.

[2] Corcoll-Spina, C. O. *Lógica Fuzzy: reflexões que contribuem para a questão da subjetividade na construção do conhecimento matemático.* Tese de Doutorado. FEUSP. São Paulo, 2010.

[3] Ross, T. J. *Fuzzy logic with engineering applications.* 3rd ed. John Wiley & Sons, 2010.

[4] Nguyen, H.T and Walker, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic.* 3rd ed.Chapman & Hall/CRC, 2006.

[5] Klir, G. J. and Yuan, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: theory and applications.* Pratice Hall, 1995.

[6] Silva, F. F. B. *Desvendando a Lógica Fuzzy.* Dissertação de mestrado. UFU. Uberlândia, 2011.

[7] McNeill, F. M. and Thro, E. *Fuzzy Logic: a pratical approach.* Academic Press, 1994.

[8] Ross, T. J, Booker, J. M and Parkinson, W. J. *Fuzzy Logic and Probability Applications: bridging the gap.* SIAM/ASA, 2002.

[9] Pires, D. M. *Implementação Computacional do Princípio da Extensão de Zadeh.* Dissertação de Mestrado. UFL. Lavras, 2010.

[10] Brinckmann, R. *A Avaliação Formativa da Aprendizagem Através da Matemática Nebulosa - Uma Proposta Metodológica.* Tese de Doutorado. UFSC. Florianópolis, 2004.

[11] Posselt, E. L.; Frozza, R.; Molz, R. F.. Software Infuzzy 2011. Programa de Mestrado em Sistemas e Processos Industriais PPGSPI, UNISC, 2011. Disponível em: http://www.unisc.br/ppgspi.