



PROFMAT



UFOP

Universidade Federal
de Ouro Preto

UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Washington Mariano Praxedes

COBERTURAS DE TABULEIROS
O PROBLEMA DO DIAMANTE DE AZTEC

Ouro Preto

2019

WASHINGTON MARIANO PRAXEDES

**COBERTURAS DE TABULEIROS
O PROBLEMA DO DIAMANTE DE AZTEC**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Ouro Preto - MG, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto.

**Ouro Preto
2019**

P919c

Praxedes, Washington Mariano.

Coberturas de tabuleiros [manuscrito]: o Problema do Diamante de Aztec / Washington Mariano Praxedes. - 2019.

58f.: il.: color; tabs.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Geraldo do Couto.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática Com Oferta Nacional.

1. Jogos de tabuleiro. 2. Teoria dos grafos. I. Couto, Rodrigo Geraldo do. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 519.17



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB)
Departamento de Matemática - PROFMAT



Coberturas de Tabuleiros: O Problema do Diamante de Aztec

Autor(a): Washington Mariano Praxedes

Dissertação defendida e aprovada em **17 de setembro de 2019** pela banca examinadora constituída pelos professores:

Professor(a) Dr. Rodrigo Geraldo do Couto - Orientador
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

Professor(a) Dr. Alexandre Celestino Leite Almeida
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL REI

Professor(a) Dr. Rogério Gomes Alves
UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO

DEDICATÓRIA: Dedico este trabalho a todos que acreditam na educação e a utiliza como meio de construção de um mundo mais justo, ético, solidário e agradável para viver. Em especial, dedico este trabalho à memória de meu avô Sebastião, que, além do seu sobrenome, me deixou como herança um exemplo de honestidade, perseverança e respeito pelo próximo e pelo meio em que habitamos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por toda graça concedida.

Agradeço a todos os meus amigos e familiares que acreditam em meu trabalho e que me incentivam constantemente.

Agradeço a todos os meus professores e colegas de curso pelo conhecimento compartilhado.

Em especial, agradeço ao meu orientador Rodrigo pelo excelente papel desempenhado, vindo a extrapolar as atribuições de orientador e se tornando um verdadeiro amigo para a vida toda.

Agradeço a todos os funcionários da UFOP por tornarem possível a realização de projetos de formação acadêmica com alto grau de qualidade assegurado.

Agradeço também a CAPES por oferecer o programa de mestrado e por garantir o acesso aos recursos necessários à sua implementação.

Resumo

O objetivo deste trabalho é tratar de problemas gerais de coberturas de tabuleiros por poliminós, tendo como foco a análise da cobertura de uma região plana específica, denominada *diamante de Aztec*. Tal análise irá propor o estabelecimento da quantidade de coberturas distintas por dominós possíveis de serem realizadas nesta região. Além das ideias relacionadas aos problemas de cobertura de tabuleiros, o resultado é obtido a partir da utilização de estratégias bastante elegantes e engenhosas, tendo os conceitos da *Teoria dos Grafos* como ferramentas essenciais para modelar e encontrar uma relação de recorrência para resolver o problema. Nesse contexto, as teorias apresentadas tendem reforçar a justificativa de que o tema de *Coberturas de Tabuleiros* e demais regiões planas é um campo altamente rico e fértil para o desenvolvimento de projetos de oficinas de estudos de conteúdos da Matemática.

Palavras-chave: Coberturas de Tabuleiros, Poliminós, Teoria dos Grafos, Diamante de Aztec.

Abstract

The objective of this work is to deal with general tiling problems by polyominoes, focusing on the analysis of the coverage of a specific flat region, denominated *Aztec diamond*. Such analysis will propose the establishment of the amount of distinct coverings by domains possible to be performed in that region. In addition to the ideas related to board coverage problems, the result is obtained through the use of very elegant and ingenious strategies, having the concepts of *Graph Theory* as essential tools for modeling and finding a recurrence relationship to solve the problem. In this context, the theories presented tend to reinforce the justification that the theme of *Covering Boards* and other flat regions is a highly rich and fertile field for the development of projects of studies of contents of Mathematics.

Keywords: Tiling Problems, Polyominoes, Graph Theory, Aztec Diamond.

Conteúdo

1	Introdução	12
2	Os Problemas de Coberturas de Tabuleiros por Poliminós	14
2.1	Alguns Exemplos de Problemas de Coberturas de Tabuleiros por Poliminós	15
2.1.1	Coberturas de Tabuleiros $2^n \times 2^n$ por L-triminós	15
2.1.2	Coberturas Sem Quebras de Tabuleiros por Dominós	17
2.1.3	Coberturas de Tabuleiros por Tetraminós	23
2.2	O Problema da Cobertura do Diamante de Aztec por Dominós	25
3	Número de Coberturas por Dominós do Diamante de Aztec	27
3.1	Demonstração do Problema Principal	29
4	Proposta de Aula Sobre Coberturas de Tabuleiros e de Outras Regiões Planas	36
5	Considerações Finais	47
	Apêndice A: Alguns Conceitos Sobre Teoria dos Grafos	48
	Apêndice B: Demonstração do Lema 3.1	53
	Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

2.1	Representação de um tabuleiro $m \times n$.	14
2.2	Tipos de triminós.	15
2.3	Regiões 2×3 e 3×2 cobertas por L-triminós.	15
2.4	Caso base da cobertura de tabuleiros $2^n \times 2^n$ com um buraco por L-triminós.	16
2.5	Coberturas das quatro regiões $2^n \times 2^n$ com um buraco por L-triminós.	16
2.6	Coberturas de um tabuleiro 5×6 sem quebras (a) e com quebras (b).	17
2.7	Coberturas sem quebras dos tabuleiros 5×6 e 6×8 .	17
2.8	Cobertura de um tabuleiro $2 \times n$ por dominós.	18
2.9	Representação das retas internas do tabuleiro $3 \times n$.	18
2.10	Regiões definidas por uma reta interna de ordem par no tabuleiro $3 \times n$.	19
2.11	Representação das retas internas do tabuleiro $4 \times n$.	20
2.12	Representação das retas internas do tabuleiro 6×6 .	20
2.13	Acréscimo de duas fileiras horizontais no tabuleiro $m \times n$.	21
2.14	Eliminação das quebras do tabuleiro $(m+2) \times n$.	22
2.15	Tipos de tetraminós.	23
2.16	Tabuleiro $n \times n$ sem as células acima de sua diagonal.	23
2.17	Coloração xadrez aplicada no tabuleiro $n \times n$ sem as células acima de sua diagonal.	24
2.18	Coloração xadrez aplicada no L-tetraminó e no Z-tetraminó.	24
2.19	Diamantes de Aztec de ordens 1, 2 e 3.	25
3.1	Tabuleiro de xadrez infinito Z .	27
3.2	Posições do dominó no plano.	28
3.3	Novas posições dos dominós em Z após a operação σ de embaralhamento.	28
3.4	Representação de blocos pretos no plano.	29
3.5	Exemplo de uma cobertura T de $AZ(6)$.	30
3.6	Cobertura T' associada à cobertura T da Figura 3.5.	30
3.7	Exemplo da cobertura T'' fora de $AZ(6)$.	31
3.8	Exemplo da cobertura T de $AZ(6)$ juntamente com a cobertura T'' .	31
3.9	Exemplo da cobertura T' de $AZ(6)$ juntamente com a cobertura T'' .	32
3.10	A operação σ aplicada na cobertura da Figura 3.9 gerou uma outra cobertura parcial reduzida de $AZ(5)$.	32
3.11	Deslocamentos dos dominós das bordas de $AZ(6)$ por quadrante com a aplicação da operação σ .	33

4.1	Jogo “Yobee Blokus Jigsaw Puzzle”	36
4.2	Jogo de “Puzzle” do “Brick Game”	37
4.3	Exemplos de tabuleiros.	37
4.4	Exemplos de poliminós.	37
4.5	Quantidades de poliminós por tipo.	38
4.6	Exemplos de coberturas de tabuleiros por dominós.	39
4.7	Retas internas do tabuleiro 5×6	39
4.8	Casos de possíveis e impossíveis de coberturas sem quebras	40
4.9	Tabuleiros 2×2 , 4×4 e 8×8 com um buraco.	41
4.10	Coberturas dos tabuleiros 2×2 , 4×4 e 8×8 com um buraco.	41
4.11	Coberturas dos tabuleiros 2×2 com um buraco.	42
4.12	Passo a passo da cobertura do tabuleiro 4×4 com um buraco.	42
4.13	Passo a passo da cobertura do tabuleiro 8×8 com um buraco.	43
4.14	Tabuleiro 8×8 sem as células acima de sua diagonal.	44
4.15	Coloração xadrez aplicada no tabuleiro 8×8 sem as células acima de sua diagonal.	45
4.16	Coberturas distintas de $AZ(1)$	45
4.17	Coberturas distintas de $AZ(2)$	46
5.1	Exemplo de um grafo finito $G = (V, E)$ com $n = 5$ e $m = 8$	48
5.2	Exemplo de um grafo regular de grau 3 ou 3-regular.	49
5.3	Grafo G e subgrafo G' de G induzido por $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$	49
5.4	Exemplo de um par de grafos isomorfos.	50
5.5	Exemplo de um grafo bipartido.	50
5.6	Exemplo de uma coloração aplicada em um grafo.	51
5.7	Representação do \mathbb{Z}^2	52
5.8	Casos de sobreposição de uma célula branca na aplicação da operação σ em T	53
5.9	Representação da relação de adjacência entre dois blocos.	54
5.10	Número de adjacências de um bloco de V e bipartição de B	54
5.11	Exemplos de blocos ricos e de blocos pobres.	55
5.12	Exemplo de aplicação da <i>coloração local</i>	55
5.13	Dois blocos pobres adjacentes de B_T	56
5.14	Coloração aplicada em dois blocos pobres adjacentes de B_T	56
5.15	Coloração local aplicada em dois blocos pobres adjacentes a um bloco rico em T	57
5.16	Dois blocos pobres adjacentes com uma célula livre c em comum.	57
5.17	Coloração local aplicada a partir de um bloco rico b_R com respeito a T e $\sigma(T)$	58

1 Introdução

Na literatura é possível encontrar vários problemas relacionados à cobertura de tabuleiros, sendo alguns mais simples e outros de maior complexidade de resolução. Muitos destes problemas se originam das mais diversas áreas de pesquisa, como as engenharias, química, física, dentre outras, sendo possível presenciar várias aplicações dos conteúdos estudados, como na construção civil, design de peças, jogos e desafios olímpicos matemáticos, etc. Nestes problemas, a aplicação de coberturas por poliminós trazem situações bastante interessantes onde são realizadas análises riquíssimas de propriedades matemáticas.

Em [11], Fisher tratou de um problema da Física a partir do qual surgiu a solução de um problema de cobertura de tabuleiros, tal que o objetivo do trabalho apresentado neste texto é determinar a quantidade de configurações distintas de uma rede quadrada de dímeros, onde cada dímero ocupa duas posições vizinhas da rede, sendo possível realizar a modelagem deste problema a partir da determinação do número de coberturas distintas possíveis de serem feitas em um tabuleiro quadrado por dominós.

Algumas considerações sobre o estudo dos poliminós e problemas de coberturas de tabuleiros são feitas em [8] por Guttmann, sendo citados trabalhos desenvolvidos durante o século XX, como é o caso da obra [9] de H. E. Dudeney, que data do início deste século, e do texto [7] de G. E. Martin, que data do final deste século. Outra bibliografia citada foi o texto [10] de S. W. Golomb, autor de grande importância para o embasamento teórico desta pesquisa no que se refere à poliminós e à problemas de coberturas de tabuleiros. Um caso particular de problemas mais complexos sobre cobertura por poliminós e que foi tratado por Aigner em [2] será o foco deste trabalho, cuja discussão é sobre as possibilidades de coberturas do diamante de Aztec por peças de dominós.

No segundo capítulo deste texto serão discutidos e solucionados alguns exemplos de problemas tratados na literatura sobre coberturas de tabuleiros por poliminós de diferentes tipos. No terceiro capítulo será proposto e analisado o problema principal a ser tratado nesta pesquisa, sendo este referente ao número de coberturas distintas do diamante de Aztec por dominós. O quarto capítulo traz uma proposta de plano de aula sobre coberturas de tabuleiros e de outras regiões planas, sendo este seguido das considerações finais no quinto capítulo. O Apêndice A faz uma introdução de alguns conceitos relacionados à Teoria dos Grafos relevantes para

o desenvolvimento deste trabalho e o Apêndice B traz a demonstração de alguns resultados utilizados na resolução do problema principal.

2 Os Problemas de Coberturas de Tabuleiros por Poliminós

Neste texto, um tabuleiro $m \times n$ é uma região plana retangular subdividida por retas horizontais e verticais em quadrados unitários (de dimensão 1×1) composto por m fileiras horizontais e n fileiras verticais, como visto na Figura 2.1.

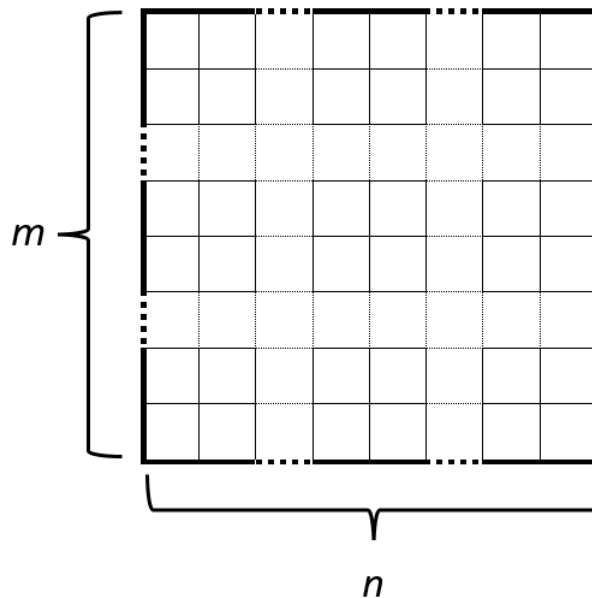


Figura 2.1: Representação de um tabuleiro $m \times n$.

Cada subdivisão do tabuleiro dada por um quadrado unitário será chamada de *célula*. Como definido por Golomb em [1], *poliminós* são peças conexas compostas por uma quantidade de quadrados unitários conectados um ao outro por pelo menos um de seus lados. Considere-se uma cobertura de um tabuleiro, ou de qualquer região plana, quando toda a sua área é completamente ocupada por poliminós sem a ocorrência de sobreposições, devendo as peças utilizadas na cobertura estarem inteiramente contidas na região a ser coberta. Na próxima seção serão discutidos alguns exemplos de problemas tratados na literatura sobre coberturas de tabuleiros por poliminós.

2.1 Alguns Exemplos de Problemas de Coberturas de Tabuleiros por Poliminós

2.1.1 Coberturas de Tabuleiros $2^n \times 2^n$ por L-triminós

Um *triminó* ou *trominó*, poliminó formado pela união de três quadrados unitários, pode ser de dois tipos, salvo de rotações e reflexões, que são o *triminó reto* e o *L-triminó*, como podem ser vistos na Figura 2.2, tal que somente o segundo será utilizado na abordagem do problema desta seção.

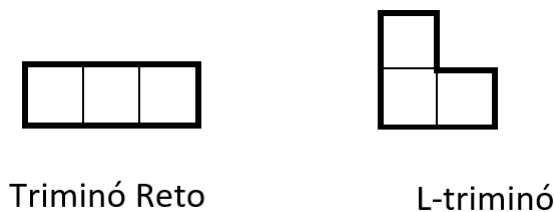


Figura 2.2: Tipos de triminós.

Baseando-se na Figura 2.3, é fácil ver que qualquer tabuleiro $3 \times n$, com n par, pode ser coberto por peças de L-triminós.

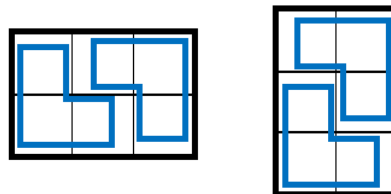


Figura 2.3: Regiões 2×3 e 3×2 cobertas por L-triminós.

Tabuleiros $2^n \times 2^n$ podem ser cobertos por L-triminós? Também é uma pergunta fácil de ser respondida, visto que este tabuleiro tem 2^{2n} células, o que não é divisível por três, descartando a possibilidade de cobertura desses tabuleiros por L-triminós. Mas se for deixado um buraco no tabuleiro, isto é, uma célula não coberta, será possível cobri-lo utilizando apenas L-triminós? E em quais posições do tabuleiro poderá ser deixado o buraco? Observe que $2^n \cdot 2^n - 1 = (2^2)^n - 1 = 4^n - 1 \equiv 0 \pmod{3}$, logo, tem-se que a quantidade de células de um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com um buraco é sempre um valor múltiplo de 3. As respostas destas perguntas são dadas pelo teorema descrito na sequência.

Teorema 2.1. *Todo tabuleiro $2^n \times 2^n$ com um buraco pode ser coberto por L-triminós, independente da posição do buraco no tabuleiro.*

Demonstração. A demonstração se dará pelo método de indução matemática em n . Considere, inicialmente, o caso base para $n = 1$, no qual tem-se um tabuleiro 2×2 , cuja cobertura é feita por um único L-triminós, como mostrado na Figura 2.4, sendo que as demais coberturas deste tabuleiro, considerando as diferentes posições do buraco neste, podem ser obtidas por rotações da cobertura ali determinada.

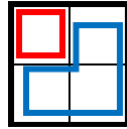


Figura 2.4: Caso base da cobertura de tabuleiros $2^n \times 2^n$ com um buraco por L-triminós.

Agora, suponha, por hipótese de indução, que todo tabuleiro $2^n \times 2^n$ com um buraco pode ser coberto por L-triminós, independente da posição do buraco no tabuleiro (H.I.). Considerando um tabuleiro $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ com um buraco, é possível ver que este pode ser subdividido em quatro regiões retangulares de dimensões $2^n \times 2^n$ tal que o buraco ficará disposto em uma delas. Sem perda de generalidade, considere que o buraco está disposto na região retangular de dimensões $2^n \times 2^n$ da parte superior esquerda do tabuleiro. Por hipótese de indução (H.I.), o quadrante superior esquerdo (onde está o buraco) pode ser coberto por L-triminós. Para cada um dos três quadrantes restantes, considere um buraco fixado como mostrado na Figura 2.5.

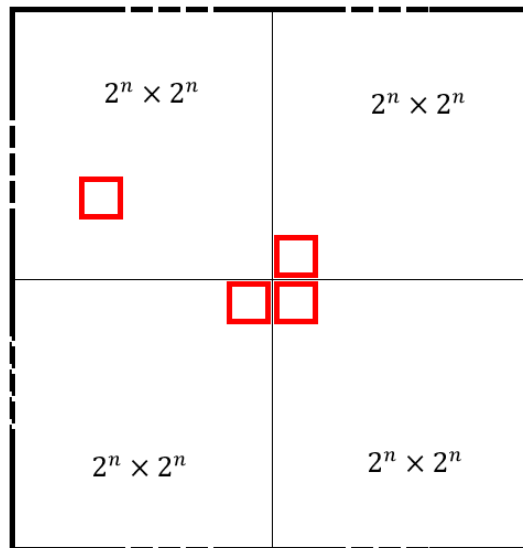


Figura 2.5: Coberturas das quatro regiões $2^n \times 2^n$ com um buraco por L-triminós.

Novamente, por hipótese de indução (H.I.), cada um desses quadrantes pode ser coberto por L-triminós. A região correspondente aos três buracos pode ser coberta por um único L-triminós, o que garante a cobertura do tabuleiro $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ com um buraco por L-triminós. \square

2.1.2 Coberturas Sem Quebras de Tabuleiros por Dominós

Considere um tabuleiro $m \times n$ e uma cobertura deste por dominós (poliminós formados por dois quadrados unitários). Serão denominadas *retas internas* as retas que subdividem o tabuleiro. Uma cobertura do tabuleiro é dita *sem quebras* se toda reta interna do tabuleiro corta pelo menos uma das peças aplicadas para cobri-lo, ou seja, é uma cobertura que não permite que o tabuleiro seja subdividido em dois tabuleiros cobertos por dominós, como pode ser visto na Figura 2.6.

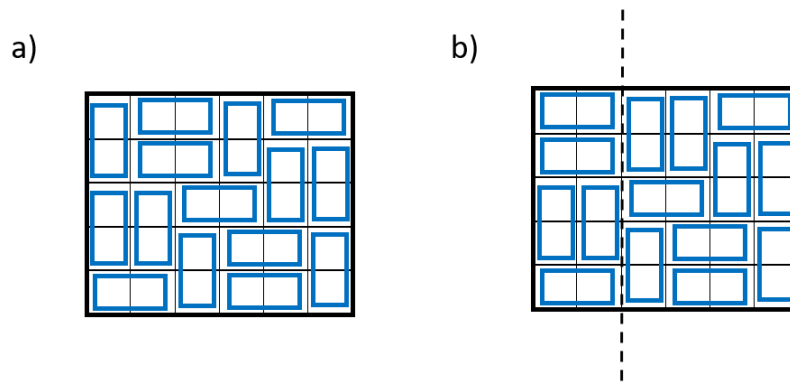


Figura 2.6: Coberturas de um tabuleiro 5×6 sem quebras (a) e com quebras (b).

Sendo assim, serão analisadas algumas questões propostas por Campos e Shine em [5] que abordam situações de coberturas sem quebras de tabuleiros por dominós. De fato, para que um tabuleiro $m \times n$ admita cobertura por dominós é necessário que ele tenha uma quantidade par de células, ou seja, que $m \cdot n$ seja par, o que acontece somente se m ou n for par. Segue a exploração de alguns casos:

1. Coberturas sem quebras dos tabuleiros 5×6 e 6×8 .

Sendo tabuleiros de dimensões razoavelmente pequenas, é possível obter tais coberturas por inspeção sem muito esforço. Segue na Figura 2.7 uma solução de cobertura sem quebras por dominós para os tabuleiros 5×6 e 6×8 . Esses exemplos serão particularmente importantes no que segue.

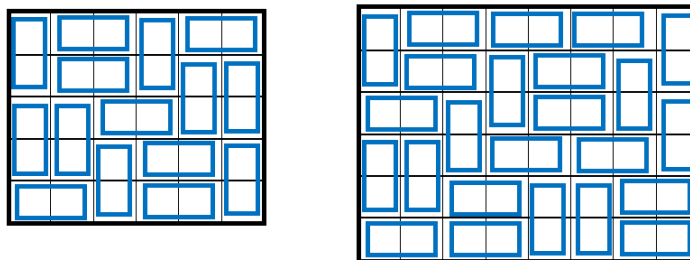


Figura 2.7: Coberturas sem quebras dos tabuleiros 5×6 e 6×8 .

2. Não é possível obter uma cobertura sem quebras de um tabuleiro $2 \times n$.

Demonstração. Para efetuar uma cobertura sem quebras em qualquer tabuleiro $2 \times n$ é necessário que se tenha pelo menos um dominó posicionado verticalmente para eliminar a possível quebra provocada por sua reta interna horizontal. Mas esse dominó obrigatoriamente irá gerar uma quebra, como pode ser visto na Figura 2.8.

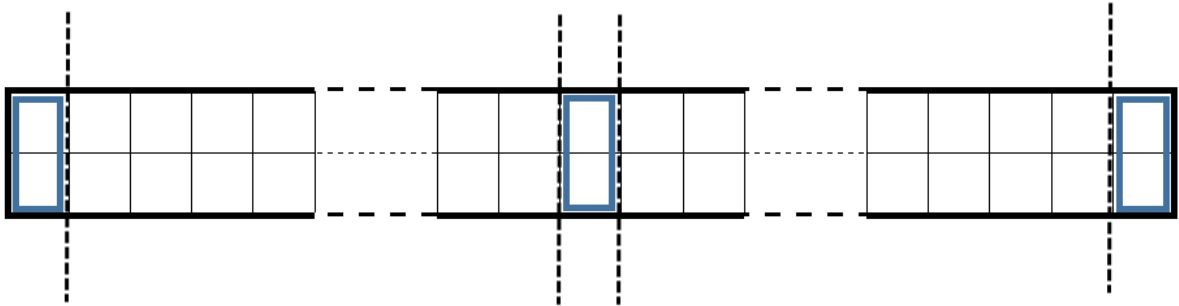


Figura 2.8: Cobertura de um tabuleiro $2 \times n$ por dominós.

□

3. Não é possível obter uma cobertura sem quebras de um tabuleiro $3 \times n$.

Demonstração. Em um tabuleiro $3 \times n$ haverá $n - 1$ retas internas verticais ($V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}$) e 2 retas internas horizontais (H_1, H_2), totalizando $n + 1$ retas internas, como pode ser visto na Figura 2.9.

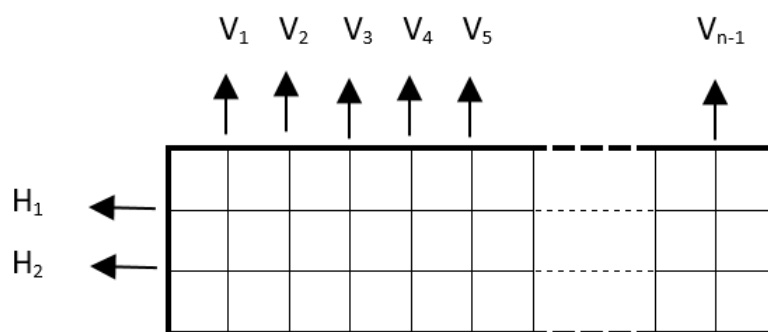


Figura 2.9: Representação das retas internas do tabuleiro $3 \times n$.

Claramente, um tabuleiro $3 \times n$ admite cobertura somente se n for par. Sabe-se que um dominó neutraliza a possibilidade de quebra de apenas uma reta interna e que, para cobrir as $3n$ células do tabuleiro, serão utilizados exatamente $\frac{3n}{2}$ dominós. Sendo n par, verifica-se que existem $\left(\frac{n-2}{2}\right)$ retas verticais internas de ordem par e mais $\left(\frac{n-2}{2} + 1\right)$ retas

verticais internas de ordem ímpar. Supondo que ocorra uma cobertura sem quebras, então, cada reta interna deve cortar pelo menos um dominó. Mas, verifica-se que toda reta interna vertical V_r de ordem par do tabuleiro o subdivide em duas regiões com quantidades pares de células dadas por $3r$ e $3(n-r)$. Logo, caso V_r corte um único dominó, isso fará com que o restante das duas regiões definidas por esta tenham quantidades ímpares de células ($3r-1$ e $3(n-r)-1$) a serem cobertas, como pode ser visto na Figura 2.10, impossibilitando a conclusão da cobertura.

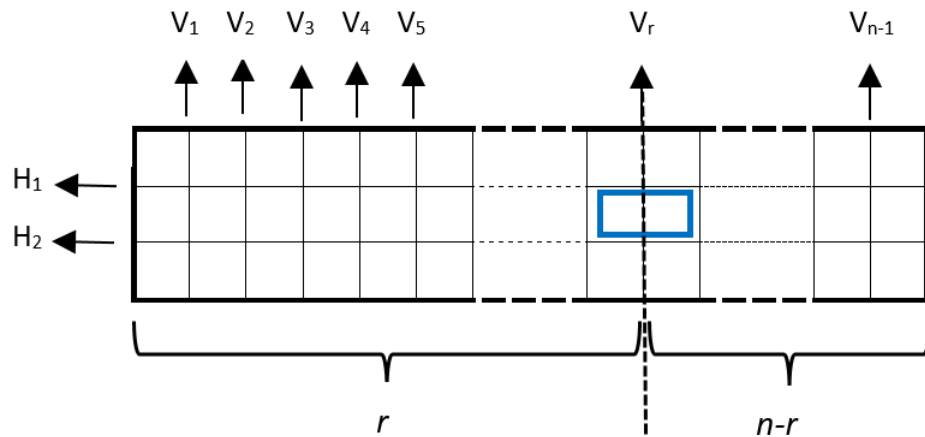


Figura 2.10: Regiões definidas por uma reta interna de ordem par no tabuleiro $3 \times n$.

Por esse motivo, cada reta interna vertical de ordem par do tabuleiro deverá necessariamente cortar, no mínimo, dois dominós para garantir a possibilidade de cobrir o tabuleiro completamente. Analogamente, observa-se a necessidade de cada reta interna horizontal cortar pelo menos dois dominós para que seja possível completar a cobertura. Com isso, tem-se que a quantidade mínima de dominós aplicada na cobertura do tabuleiro é dada por

$$\left[2 \cdot \left(\frac{n-2}{2} \right) \right] + \left[\frac{n-2}{2} + 1 \right] + [4] = \frac{3n}{2} + 2 > \frac{3n}{2}.$$

Isso é um absurdo, pois a quantidade mínima de dominós para que ocorra a cobertura do tabuleiro é maior do que a quantidade total de dominós comportada pelo tabuleiro. Logo, conclui-se que não é possível realizar a cobertura do tabuleiro sem a ocorrência de quebras. \square

4. Não é possível obter uma cobertura sem quebras de um tabuleiro $4 \times n$.

Demonstração. Considerando um tabuleiro $4 \times n$, tem-se que este possui $n-1$ retas internas verticais ($V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}$) e 3 retas internas horizontais (H_1, H_2, H_3), num total de $n+2$ retas internas, como mostrado na Figura 2.11, sendo $2n$ a quantidade necessária de dominós para cobrir todo o tabuleiro.

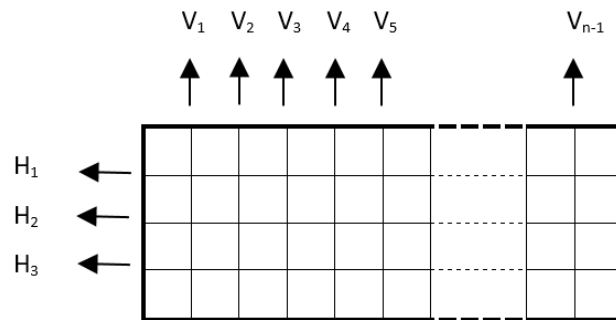


Figura 2.11: Representação das retas internas do tabuleiro $4 \times n$.

Suponha uma cobertura sem quebras desse tabuleiro. Usando argumento análogo ao caso $3 \times n$, pode-se verificar que cada reta interna vertical divide o tabuleiro em duas regiões com quantidades pares de células, fazendo com que seja necessário que cada uma delas corte, no mínimo, dois dominós para possibilitar a conclusão da cobertura. Também tem-se a necessidade de que cada uma das três retas internas horizontais do tabuleiro corte pelo menos um dominó para neutralizar a possibilidade de quebra destas. Sendo assim, a quantidade mínima de dominós utilizada para cobrir o tabuleiro foi

$$[2 \cdot (n - 1)] + [3] = 2n + 1 > 2n,$$

o que é um absurdo, dado que a quantidade mínima de dominós para efetuar a cobertura do tabuleiro é superior à quantidade máxima de dominós suportada pelo tabuleiro. Portanto, é inviável a cobertura do tabuleiro $4 \times n$ sem a ocorrência de quebras. \square

5. Não é possível obter uma cobertura sem quebras de um tabuleiro 6×6 .

Demonstração. O tabuleiro 6×6 apresenta 10 retas internas, 5 verticais (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5) e 5 horizontais (H_1, H_2, H_3, H_4, H_5), sendo necessários 18 dominós para a sua cobertura total, como visto na Figura 2.12.

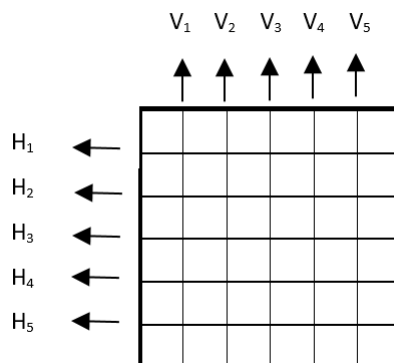


Figura 2.12: Representação das retas internas do tabuleiro 6×6 .

Considere uma cobertura sem quebras desse tabuleiro. Da mesma forma que observado nos casos $3 \times n$ e $4 \times n$, será necessário que cada uma de suas retas internas, tanto as verticais quanto as horizontais, cortem pelo menos dois dominós para que se mantenha a viabilidade da cobertura total do tabuleiro. Então, o número mínimo de dominós usados na cobertura desse tabuleiro corresponde a $2 \cdot 10 = 20$ dominós, quantidade que é maior do que o número máximo de dominós que o tabuleiro comporta, absurdo. Logo, não é possível obter uma cobertura sem quebras desse tabuleiro. \square

Os resultados apresentados anteriormente permitem concluir que:

Se um tabuleiro $m \times n$ admite uma cobertura sem quebras por dominós, então $m \cdot n$ é par, sendo $m \geq 5$, $n \geq 5$ e não ocorre o caso em que $m = n = 6$.

Mas será que a recíproca é verdadeira? Isto é, dado um tabuleiro $m \times n$ com $m \cdot n$ par, sendo $m \geq 5$, $n \geq 5$ e com a exceção do caso em que $m = n = 6$, é possível encontrar uma cobertura sem quebras? Será mostrado na sequência que isso é possível.

Para isso, considere um tabuleiro $m \times n$, com $m \cdot n$ par, sendo $m \geq 5$, $n \geq 5$, desconsiderando o caso em que $m = n = 6$. Supondo que ele possua uma cobertura sem quebras, será mostrado que é possível obter uma cobertura sem quebras dos tabuleiros $(m+2) \times n$ e $m \times (n+2)$.

Seja um tabuleiro $m \times n$ nas condições citadas acima possuindo uma cobertura sem quebras. Fazendo o acréscimo de duas fileiras horizontais no tabuleiro $m \times n$ será gerado um novo tabuleiro $(m+2) \times n$ com apenas duas novas retas internas horizontais (H_1 e H_2), como visto na Figura 2.13. Observe que esse acréscimo não cria novas retas internas verticais.

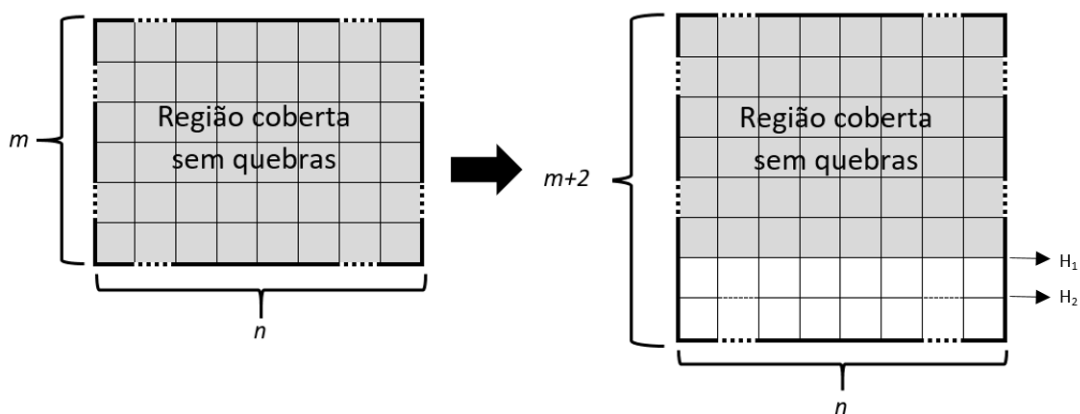


Figura 2.13: Acréscimo de duas fileiras horizontais no tabuleiro $m \times n$.

Como o tabuleiro $m \times n$ não apresenta quebras, tem-se que existe pelo menos um dominó horizontal na sua fileira inferior. A cobertura do tabuleiro $(m+2) \times n$ será dada da seguinte maneira: utilizando a parte já coberta do tabuleiro $m \times n$ excluindo o dominó horizontal da fileira inferior e acrescentando dois dominós verticais e um horizontal abaixo destes. O restante da cobertura

pode ser completado com dominós verticais, como mostrado na Figura 2.14.

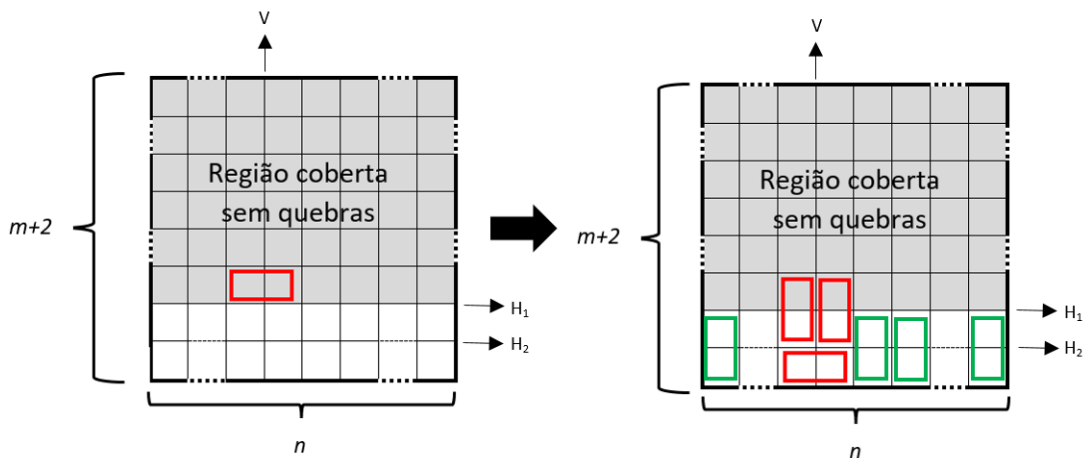


Figura 2.14: Eliminação das quebras do tabuleiro $(m+2) \times n$.

Observe que as retas H_1 , H_2 não podem ser retas de quebra, pois os dominós verticais inseridos são cortados por H_1 e por H_2 . Observe também que a reta V poderia se tornar uma reta de quebra devido a retirada do dominó horizontal, mas isso não acontece devido ao novo dominó horizontal inserido. Logo, a cobertura assim construída do tabuleiro $(m+2) \times n$ não possui retas de quebra.

De maneira análoga é possível obter uma outra cobertura sem quebras do tabuleiro $m \times (n+2)$, dentro das condições fixadas na hipótese.

Iniciando com uma cobertura sem quebras do tabuleiro 5×6 e repetindo algumas vezes o procedimento anterior, é possível obter uma cobertura sem quebras de tabuleiros de dimensões $(5+2k) \times (6+2l)$, para $k, l \in \mathbb{N}$. De maneira análoga, iniciando com uma cobertura sem quebras do tabuleiro 6×8 e repetindo algumas vezes o procedimento anterior, é possível obter uma cobertura sem quebras de tabuleiros de dimensões $(6+2k) \times (8+2l)$, para $k, l \in \mathbb{N}$.

Considerando um tabuleiro $m \times n$ com $m \cdot n$ é par, sendo $m \geq 5$, $n \geq 5$ e não ocorrendo o caso em que $m = n = 6$, suponha sem perda de generalidade que n é par. Desse modo, existem $k, l \in \mathbb{N}$ tal que o tabuleiro $m \times n$ é da forma $(5+2k) \times (6+2l)$ ou $(6+2k) \times (8+2l)$, assim, o tabuleiro admite uma cobertura sem quebras.

Logo, tem-se estabelecido o resultado descrito no teorema na sequência:

Teorema 2.2. *Um tabuleiro $m \times n$ admite uma cobertura sem quebras por dominós se, e somente se, $m \cdot n$ é par, sendo $m \geq 5$, $n \geq 5$ e não ocorre o caso em que $m = n = 6$.*

2.1.3 Coberturas de Tabuleiros por Tetraminós

De maneira análoga aos triminós, um *tetraminó* é definido como um poliminó formado pela união de quatro quadrados unitários, podendo ser de cinco tipos distintos, salvo de rotações e reflexões, que são o *tetraminó reto*, o *tetraminó quadrado*, o *L-tetraminó*, o *T-tetraminó* e o *Z-tetraminó*, como mostrado na Figura 2.15.

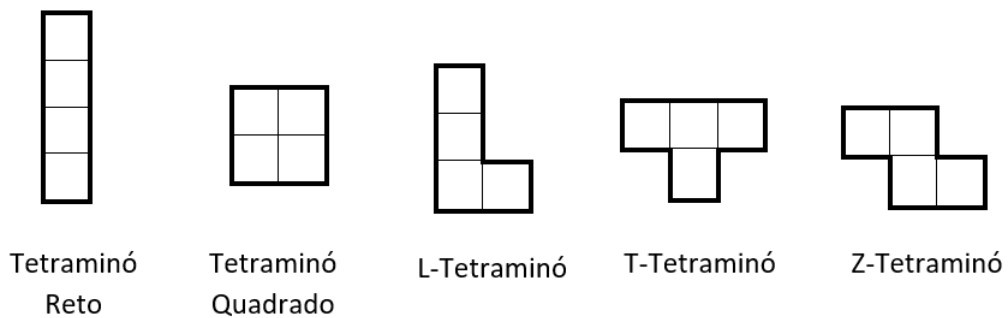


Figura 2.15: Tipos de tetraminós.

O texto [4] de J. A. B. Filho discute alguns casos de coberturas por tetraminós. Na sequência, será feita a análise de um problema particular que envolve apenas dois tipos de tetraminós, não descartando o alto potencial de abordagem de problemas com os demais tipos de tetraminós.

Considere um tabuleiro $n \times n$ em que foram removidas todas as células acima da sua diagonal principal, como mostrado na Figura 2.16. É possível cobrir tal região apenas com L-tetraminós e Z-tetraminós?

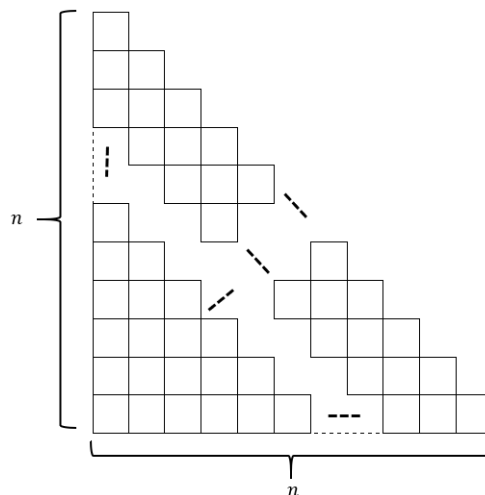


Figura 2.16: Tabuleiro $n \times n$ sem as células acima de sua diagonal.

Para solucionar esse problema, basta aplicar no tabuleiro um tipo específico de coloração, co-

nhecida como *coloração xadrez*, em que são utilizadas duas cores distintas tal que diagonais adjacentes não recebem as mesmas cores. Considere, sem perda de generalidade, que n é um valor par. Logo, aplicando-se uma coloração xadrez no tabuleiro com as cores preto e branco de tal forma que a diagonal principal seja colorida de preto, tem-se que a configuração após feita a coloração ficará como mostrado na Figura 2.17.

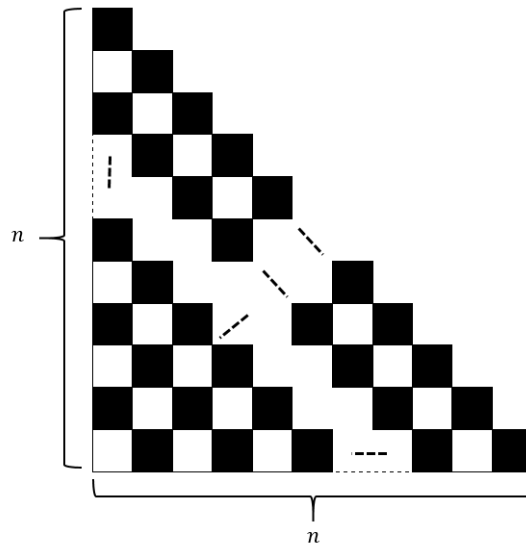


Figura 2.17: Coloração xadrez aplicada no tabuleiro $n \times n$ sem as células acima de sua diagonal.

Aplicando o mesmo tipo de coloração no L-tetraminó e também no Z-tetraminó, verifica-se que ambos ficarão com duas células brancas e com duas células pretas, de acordo com a Figura 2.18.



Figura 2.18: Coloração xadrez aplicada no L-tetraminó e no Z-tetraminó.

Após a aplicação da coloração xadrez no tabuleiro, é possível ver que as quantidades totais de células brancas e de células pretas do tabuleiro a serem cobertas são dadas pelas somas de duas sequências numéricas, uma composta pela sequência dos números ímpares variando de 1 a $n - 1$, e a outra composta pela sequência dos números pares variando de 2 a n , caracterizando somas de progressões aritméticas, cujas expressões podem ser dadas por

$$1 + 3 + 5 + \dots + (n - 1) = \frac{[1 + (n - 1)] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + n = \frac{[2 + n] \cdot \left(\frac{n}{2}\right)}{2} = \frac{n^2 + 2n}{4}.$$

E, sendo n um número inteiro positivo, conclui-se que $\frac{n^2}{4} < \frac{n^2 + 2n}{4}$, o que permite afirmar que a quantidade total de células de cor preta do tabuleiro será sempre maior do que a quantidade total de células brancas. Mas, como mostrado na Figura 2.18, tanto o L-tetraminó quanto o Z-tetraminó sempre irão cobrir as mesmas quantidades de células brancas e de células pretas do tabuleiro, independente das posições em que são dispostos neste. Logo, fica demonstrado que é impossível cobrir completamente tal tabuleiro apenas com L-tetraminós e Z-tetraminós.

2.2 O Problema da Cobertura do Diamante de Aztec por Dominós

O *diamante de Aztec*, representado por $AZ(n)$, é uma Figura plana gerada pela reflexão em torno do eixo OX (eixo horizontal) de uma escada formada por n fileiras horizontais com 2, 4, 6, ..., $2n$ células dispostas uma sobre a outra. A Figura 2.19 mostra os diamantes de Aztec para $n = 1, 2, 3$.

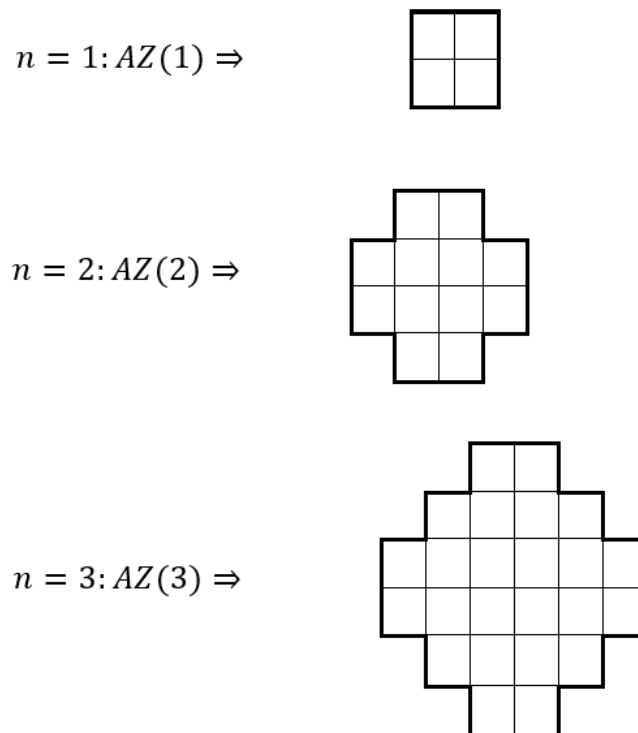


Figura 2.19: Diamantes de Aztec de ordens 1, 2 e 3.

Uma cobertura por dominós do diamante de Aztec é bastante simples de ser feita, dado que cada fileira vertical ou horizontal deste sempre poderá ser coberta por dominós, pelo fato de apresentarem quantidades pares de células, o que garante a cobertura de todo o diamante.

Já a determinação da quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas no diamante de Aztec por dominós é bem mais complexa de ser analisada. O objetivo principal que será buscado na sequência deste texto é solucionar o problema:

“De quantas maneiras distintas pode ser realizada a cobertura do diamante de Aztec por dominós?”

Seja $A(n)$ a quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas em $AZ(n)$. É fácil ver, por inspeção, que $A(1) = 2^1$ e que $A(2) = 2^3$. A solução para o caso geral será dada no próximo capítulo.

3 Número de Coberturas por Dominós do Diamante de Aztec

Neste capítulo será feita a demonstração do problema principal que se refere ao número de cobertura distintas por dominós que podem ser feitas no diamante de Aztec. As referências principais são os textos [12] e [13] de Elkies, Kuperberg, Larsen e Propp, que trazem quatro demonstrações desse resultado, uma dessas será feita neste texto, devido a sua simplicidade e elegância.

Para tratar esse problema, o plano será subdividido em células unitárias e com a aplicação de uma coloração xadrez. Com isso, o plano assumirá a forma de um tabuleiro de xadrez infinito $Z = \mathbb{Z}^2$, como mostrado na Figura 3.1.

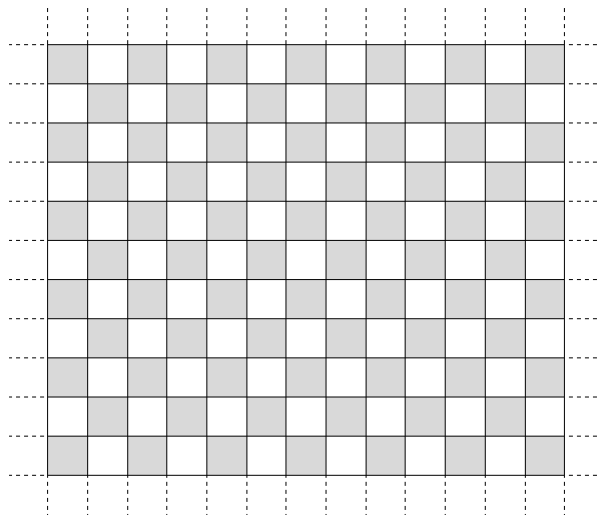


Figura 3.1: Tabuleiro de xadrez infinito Z .

Em Z , cada dominó irá sempre cobrir uma célula branca e uma célula preta. Existe somente um tipo de dominó, podendo este ser disposto no plano de duas maneiras distintas, verticalmente ou horizontalmente, como visto na Figura 3.2.

T é dita uma *cobertura parcial* de Z , por dominós, se T cobre uma parte de Z (possivelmente todo o Z). As células não cobertas são chamadas *células livres*. A parte não coberta é denominada *região livre*.

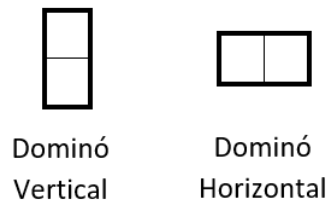


Figura 3.2: Posições do dominó no plano.

Dada uma cobertura parcial de Z , a operação σ de *embaralhamento* consiste na realização de translações das peças de dominós em Z de acordo com a regra abaixo:

- (i) se for um dominó vertical cobrindo uma célula preta na parte superior, este desloca uma unidade para a direita;
- (ii) se for um dominó vertical cobrindo uma célula preta na parte inferior, este desloca uma unidade para a esquerda;
- (iii) se for um dominó horizontal cobrindo uma célula preta na parte direita, este desloca uma unidade para a cima;
- (iv) se for um dominó horizontal cobrindo uma célula preta na parte esquerda, este desloca uma unidade para a baixo.

A Figura 3.3 mostra a direção dos deslocamentos dos dominós em Z provocados pela operação σ de embaralhamento. Aplicando a operação σ de embaralhamento a todos os dominós de T obtém-se uma nova configuração $\sigma(T)$.

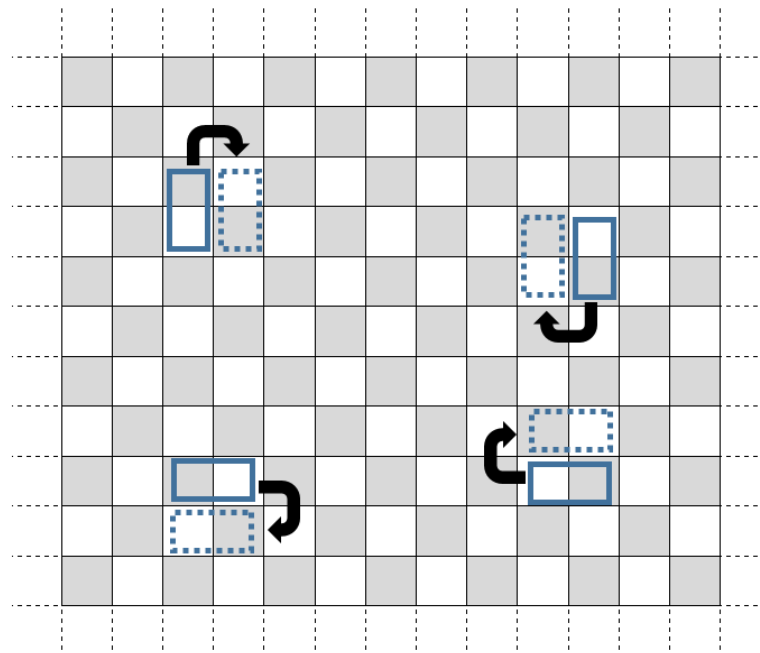


Figura 3.3: Novas posições dos dominós em Z após a operação σ de embaralhamento.

Um quadrado 2×2 coberto por dois dominós, cuja célula superior esquerda apresenta coloração preta, é dito um *bloco preto*, como mostrado na Figura 3.4. Um bloco preto apresenta a propriedade de ser invariante pela operação de embaralhamento.

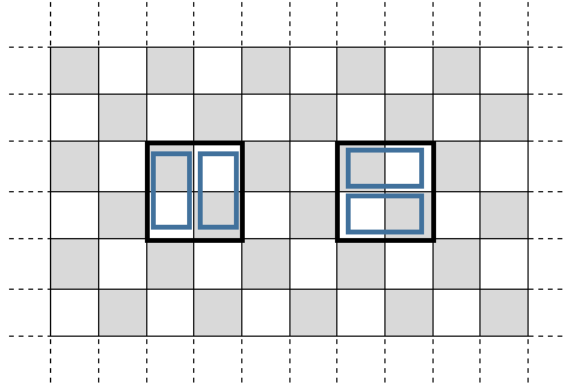


Figura 3.4: Representação de blocos pretos no plano.

Definição: Uma cobertura parcial T do plano é dita *reduzida* se:

- (i) T não possui blocos pretos;
- (ii) a região livre de T pode ser coberta por blocos pretos disjuntos.

De fato, pode-se garantir que não ocorrerão sobreposições em $\sigma(T)$ desde que T seja uma cobertura parcial reduzida, o que será mostrado no Apêndice B. Denote por C o conjunto das coberturas parciais reduzidas de Z . Para a solução do problema proposto neste capítulo, será assumido o resultado descrito no lema a seguir cuja demonstração será dada no Apêndice B.

Lema 3.1. *Se $T \in C$, então $\sigma(T) \in C$, ou seja, a aplicação da operação σ de embaralhamento em uma cobertura parcial reduzida gera uma cobertura parcial reduzida. Ainda $\sigma : C \mapsto C$ é idempotente, isto é, $\sigma^2 = I$.*

3.1 Demonstração do Problema Principal

O teorema a seguir traz a resposta do problema principal deste trabalho, que é referente ao número de coberturas distintas de $AZ(n)$.

Teorema 3.1. *O número de coberturas distintas de $AZ(n)$ é igual a $2^{\binom{n+1}{2}}$.*

Demonstração. A posição de $AZ(n)$ em Z será dada de modo que a sua célula superior esquerda seja preta. Considere T uma cobertura de $AZ(n)$ (a Figura 3.5 mostra, como exemplo, uma cobertura T de $AZ(6)$).

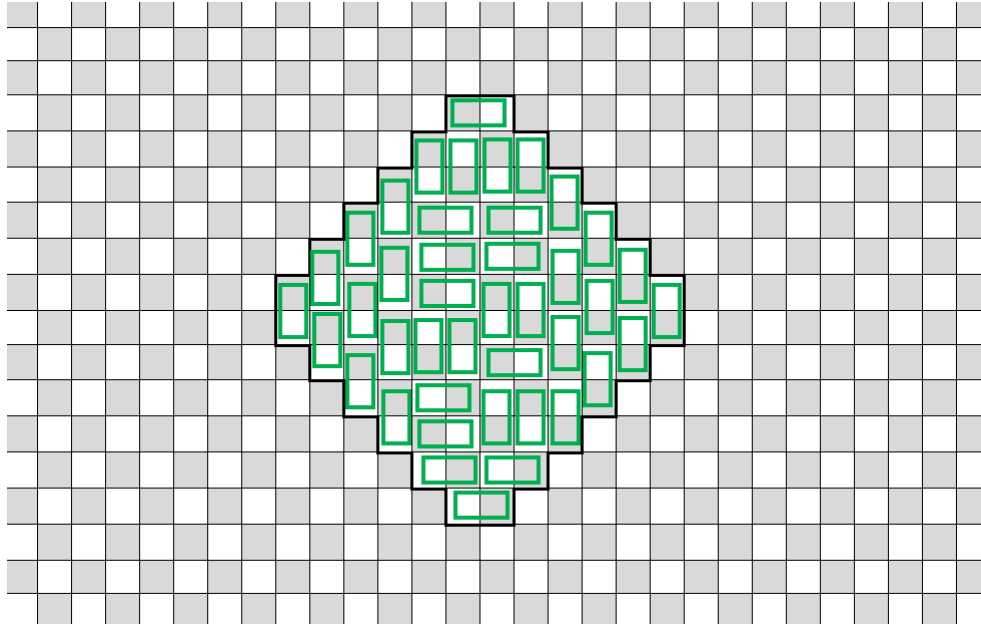


Figura 3.5: Exemplo de uma cobertura T de $AZ(6)$.

Seja T' a cobertura obtida de T eliminando os blocos pretos (a Figura 3.6 mostra a cobertura T' associada à cobertura T da Figura 3.5). Neste caso, T' será dita uma cobertura parcial reduzida de $AZ(n)$.

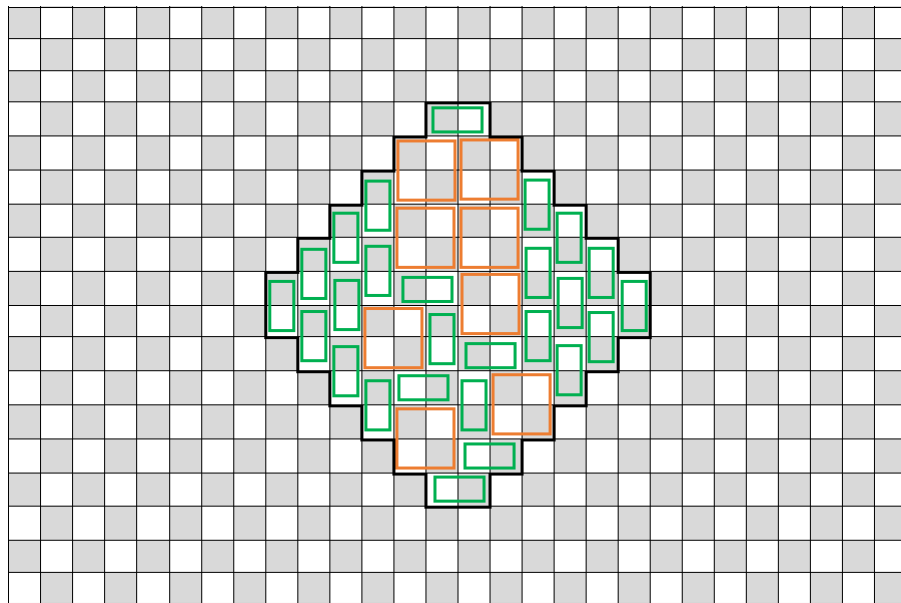


Figura 3.6: Cobertura T' associada à cobertura T da Figura 3.5.

Seja T'' uma cobertura parcial reduzida aplicada fora de $AZ(n)$ de como mostrado na Figura 3.7 (a Figura 3.7 mostra a cobertura T'' fora de $AZ(6)$).

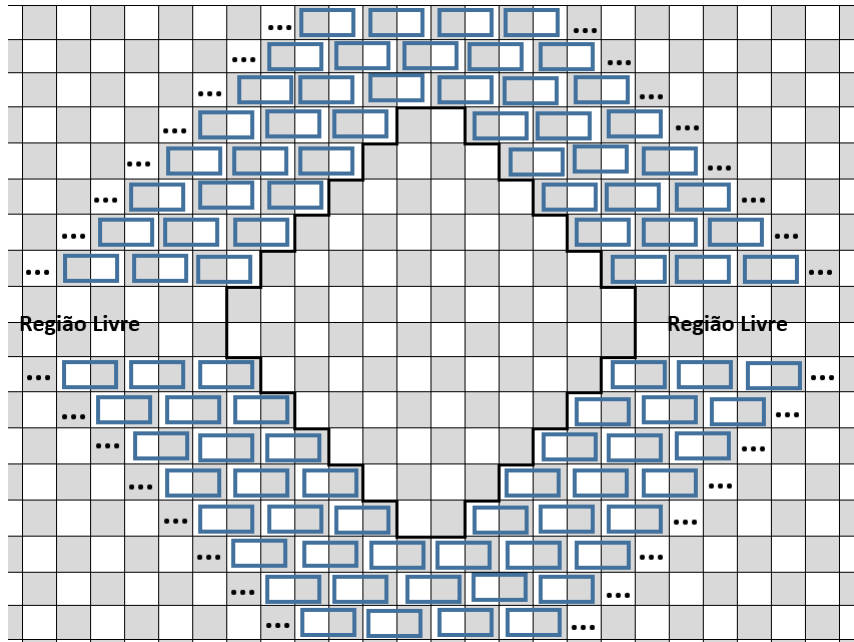


Figura 3.7: Exemplo da cobertura T'' fora de $AZ(6)$.

A cobertura T'' é completa exceto por $AZ(n)$ e as duas faixas (à esquerda e à direita) de altura 2. Observe que T'' não contém blocos pretos e a região livre fora de $AZ(n)$ pode ser preenchida por blocos pretos disjuntos. Verifica-se que $T' \cup T''$ é uma cobertura parcial reduzida de $T \cup T''$. As Figuras 3.8 e 3.9 mostram os exemplos das coberturas $T \cup T''$ e $T' \cup T''$ em $AZ(6)$, respectivamente.

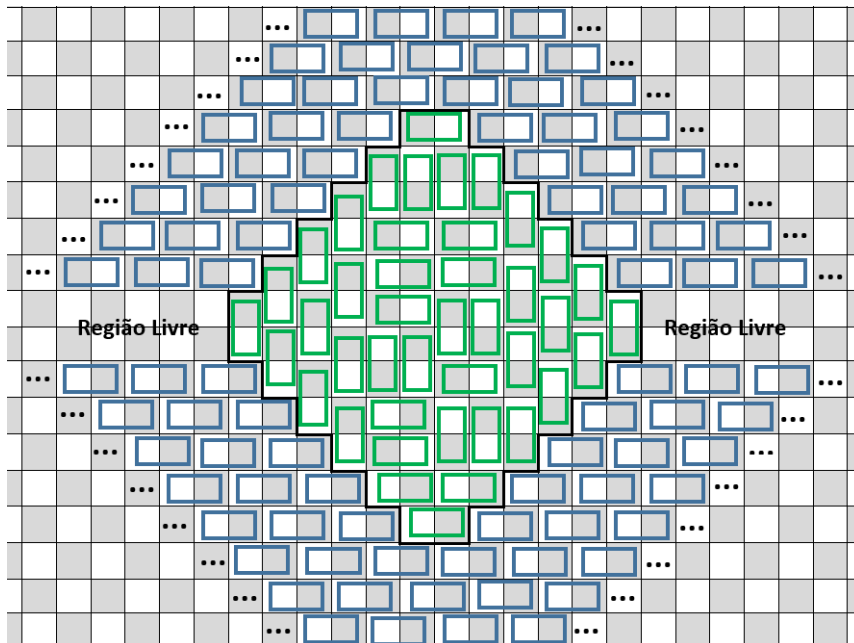


Figura 3.8: Exemplo da cobertura T de $AZ(6)$ juntamente com a cobertura T'' .

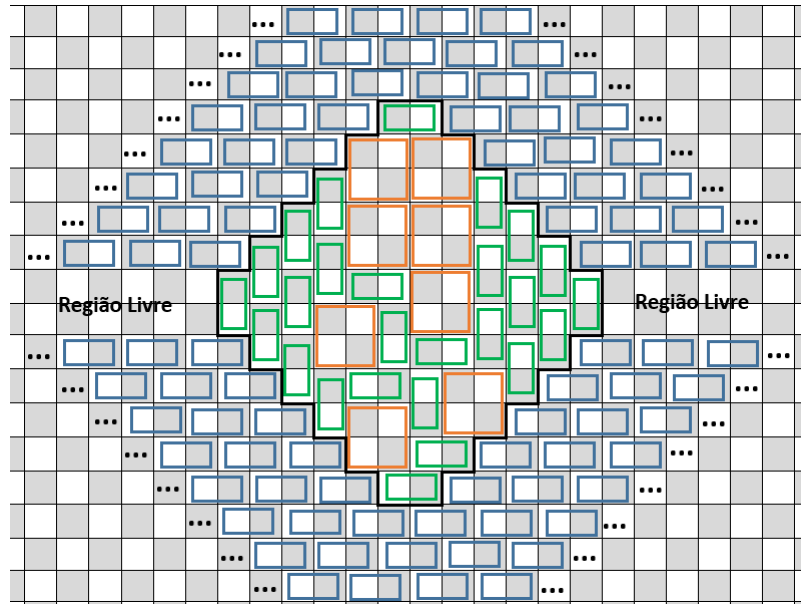


Figura 3.9: Exemplo da cobertura T' de $AZ(6)$ juntamente com a cobertura T'' .

Aplicando a operação σ de embaralhamento em $T' \cup T''$ tem-se que

$$\sigma(T' \cup T'') = \sigma(T') \cup \sigma(T'').$$

Essa igualdade é verificada considerando que é indiferente aplicar a operação σ em toda a cobertura de uma região do plano ou em cada uma das partes que a compõe separadamente, visto que essa operação modifica individualmente a posição de cada dominó utilizado na cobertura. Logo, pelo Lema 3.1, tem-se que $\sigma(T' \cup T'')$ também é uma cobertura parcial reduzida (a Figura 3.10 mostra que a operação σ aplicada na cobertura da Figura 3.9 gerou uma outra cobertura parcial reduzida de $AZ(5)$).

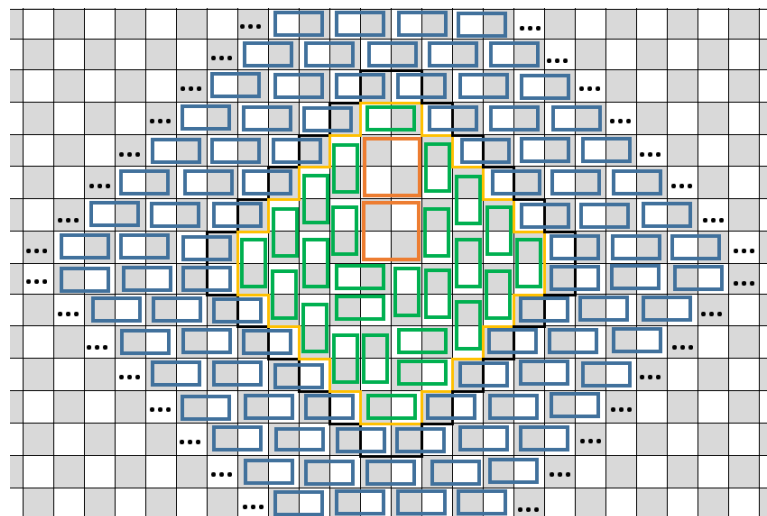


Figura 3.10: A operação σ aplicada na cobertura da Figura 3.9 gerou uma outra cobertura parcial reduzida de $AZ(5)$.

Da maneira em que $AZ(n)$ foi construído no tabuleiro, a aplicação da operação σ de embaralhamento em uma cobertura parcial reduzida T' qualquer sempre irá gerar uma nova cobertura parcial reduzida de $AZ(n-1)$. Para comprovar esse fato, considere os dois eixos de simetria de $AZ(n)$ que o subdivide em 4 quadrantes. Qualquer dominó que esteja disposto na borda de $AZ(n)$ no primeiro quadrante poderá se deslocar somente uma célula para baixo ou para a esquerda, devido à coloração branca das células dessa diagonal. Isso fará com que a todos os dominós se desloquem para a região de $AZ(n-1)$, mantendo a borda de $AZ(n)$ livre para que os dominós da cobertura T'' possam ocupá-la. Também verifica-se que os dominós fora das bordas de $AZ(n)$ não poderão ocupar as células de sua borda após a aplicação da operação σ de embaralhamento, pois, caso isso ocorresse, haveriam sobreposições pelo fato de estas serem ocupadas pelos dominós da cobertura T'' , contradizendo o Lema 3.1. O mesmo fato é observado para os outros três quadrantes, que também terão todos os dominós de suas bordas deslocados para a região de $AZ(n-1)$, como exemplificado na Figura 3.11 no caso de $AZ(6)$.

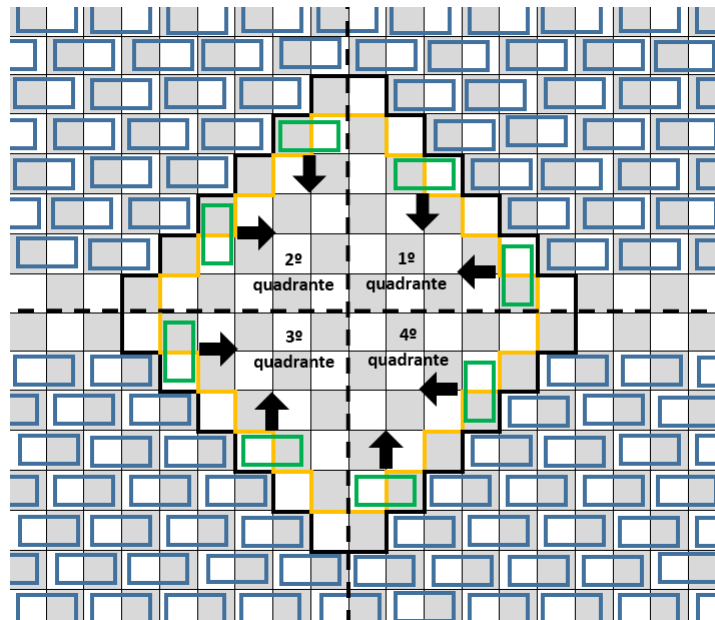


Figura 3.11: Deslocamentos dos dominós das bordas de $AZ(6)$ por quadrante com a aplicação da operação σ .

Denote por $C(n)$ o conjunto das coberturas parciais reduzidas de $AZ(n)$. Duas coberturas T_i e T_j de $AZ(n)$ são ditas *equivalentes* se $T_i' = T_j'$, sendo T_i' e T_j' coberturas parciais reduzidas associadas a T_i e T_j , respectivamente. Essa é uma relação de equivalência no conjunto das coberturas de $AZ(n)$. Denote B_1, B_2, \dots, B_r as classes de equivalência no conjunto das coberturas de $AZ(n)$. Sendo assim, o número de coberturas de $AZ(n)$ é dado por

$$A(n) = \sum_{j=1}^r \#B_j.$$

Dado uma cobertura T de $AZ(n)$, considere T' (T excluindo os blocos pretos) e T'' como definido anteriormente. Foi visto que $T' \cup T''$ é cobertura parcial reduzida e pelo Lema 3.1

$\sigma(T' \cup T'') = \sigma(T') \cup \sigma(T'')$ é cobertura parcial reduzida com $T' \subset AZ(n)$, sendo $\sigma(T')$ uma cobertura parcial reduzida de $AZ(n-1)$. Como $\sigma^2 = I$, tem-se que

$$\begin{aligned} \sigma : C(n) &\longrightarrow C(n-1) \\ T' &\longmapsto \sigma(T') \end{aligned}$$

é uma bijeção entre $C(n)$ e $C(n-1)$.

Tomando T_i um representante de B_i , tem-se que $C(n) = \{T'_1, \dots, T'_r\}$, logo $C(n-1) = \{\sigma(T'_1), \dots, \sigma(T'_r)\}$, ou seja, denote \widehat{B}_i a classe de equivalência no conjunto das coberturas de $AZ(n-1)$ com o representante $\sigma(T'_i)$, tem-se que

$$A(n-1) = \sum_{j=1}^r \#\widehat{B}_j,$$

como mostrado no esquema a seguir.

$$\begin{aligned} B_i \subset AZ(n) &\xrightarrow{\text{Eliminar os blocos pretos}} T'_i \in C(n) \xrightarrow{\text{Aplicar a operação } \sigma \text{ de embaralhamento}} \\ &\sigma(T'_i) \in C(n-1) \xrightarrow{\text{Cobrir os blocos pretos}} \widehat{B}_i \subset AZ(n-1). \end{aligned}$$

Seja um *buraco preto* um quadrado 2×2 de Z que pode ser coberto por um bloco preto. Suponha que T'_i contém t dominós e x buracos pretos. Dado que a operação σ de embaralhamento aplicada em T'_i conserva a quantidade de dominós então $\sigma(T'_i)$ possui t dominós e y buracos pretos. Tem-se que o número de células de $AZ(n)$ e de $AZ(n-1)$, representados por $|AZ(n)|$ e por $|AZ(n-1)|$, são dados por

$$|AZ(n)| = 2 \cdot (2 + 4 + 6 + \dots + 2n) = 2 \cdot \left[\frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} \right] = 2n(n+1)$$

e

$$|AZ(n-1)| = 2n(n-1).$$

Com isso, sendo as quantidades de células cobertas de T'_i e $\sigma(T'_i)$ iguais e correspondentes ao dobro de suas quantidades de dominós, pode-se relacionar estas quantidades com as quantidades totais de células de $AZ(n)$ e de $AZ(n-1)$ efetuando a subtração das células correspondentes às regiões livres dadas por seus buracos pretos, isto é,

$$2t = 2n(n+1) - 4x$$

e

$$2t = 2n(n-1) - 4y$$

$$\Rightarrow 2n(n+1) - 4x = 2n(n-1) - 4y$$

$$\Rightarrow 2n^2 + 2n - 4x = 2n^2 - 2n - 4y$$

$$\Rightarrow 4n = 4x - 4y$$

$$\Rightarrow n = x - y.$$

Sendo assim, como T_i' possui x buracos pretos e cada buraco preto pode ser coberto de duas maneiras distintas por dominós, tem-se que $\#B_i = 2^x$. De maneira análoga, como $\sigma(T_i')$ possui y buracos pretos, tem-se que $\#\widehat{B}_i = 2^y$.

Então, pode-se afirmar que

$$\#B_i = 2^x = 2^{n+y} = 2^n \cdot 2^y = 2^n \cdot (\#\widehat{B}_i).$$

Logo, verifica-se as igualdades

$$A(n) = \sum_{j=1}^r (\#B_j) = \sum_{j=1}^r 2^n \cdot (\#\widehat{B}_j) = 2^n \cdot \sum_{j=1}^r (\#\widehat{B}_j) = 2^n \cdot A(n-1).$$

Desse resultado obtém-se a relação de recorrência

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^n \cdot A(n-1) \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot A(n-2) \\ &= 2^n \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot 2^{n-3} \cdot \dots \cdot 2^2 \cdot 2 \\ &= 2^{\binom{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Portanto, fica estabelecido que a quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas em $AZ(n)$ é dada por $2^{\binom{n+1}{2}}$. □

4 Proposta de Aula Sobre Coberturas de Tabuleiros e de Outras Regiões Planas

Neste capítulo será apresentada uma proposta de plano de aula com atividades que abordam os conceitos de poliminós e coberturas de tabuleiros tratados neste texto. O objetivo é introduzir noções iniciais de resolução de problemas de coberturas de tabuleiros e demais regiões planas a partir dos problemas que foram solucionados neste trabalho. A descrição do plano de aula será dada na sequência.

- **Público alvo:** Alunos dos anos finais do Ensino Fundamental ou grau de escolaridade superior. É recomendável trabalhar com pequenos grupos (máximo de 10 alunos) para que as discussões sobre os conteúdos e o monitoramento das atividades sejam realizadas de forma mais eficaz.
- **Materiais necessários:** Para os estudantes serão necessários alguns tabuleiros impressos em folhas de papel, uma caixa de dominós ou material de formato semelhante para realizar as coberturas das regiões planas, lápis e borracha. Para o professor será necessário a utilização de apresentação de slides projetada em um quadro branco e pincel para quadro branco.
- **Etapas da aplicação:**
 - **Primeira etapa:** No primeiro momento recomenda-se, como forma de incentivo e apresentação do tema da aula, fazer uma introdução sobre cobertura de tabuleiros por peças de poliminós, discutindo algumas aplicações vistas no cotidiano, como é o caso de jogos de quebra-cabeças, como mostrado nas Figuras 4.2 e 4.1.

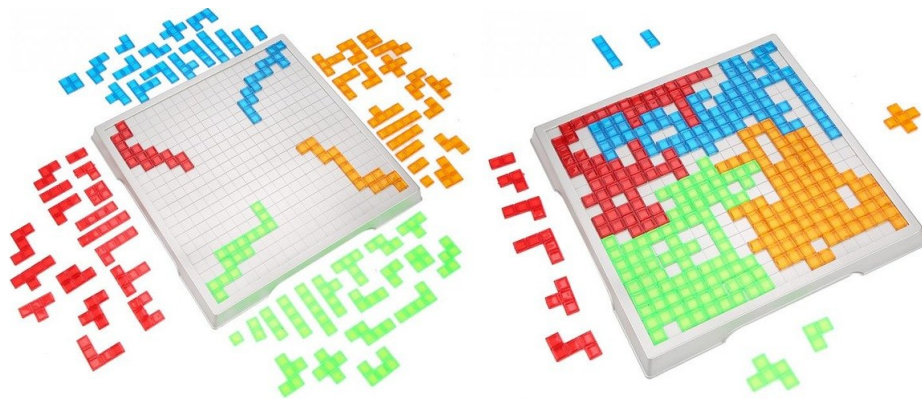


Figura 4.1: Jogo “Yobee Blokus Jigsaw Puzzle”.

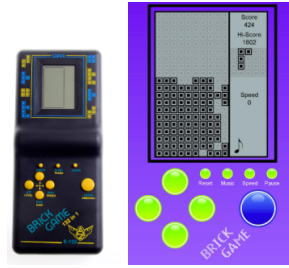


Figura 4.2: Jogo de “Puzzle” do “Brick Game”.

- **Segunda etapa:** Após feita a introdução do tema da aula será preciso apresentar algumas definições necessárias para o tratamento dos problemas de coberturas que serão trabalhados no decorrer da aula, respondendo às seguintes questões.

- * O que é um tabuleiro?
- * O que são poliminós?
- * O que é uma cobertura de um tabuleiro ou de demais regiões planas?

Mostrar alguns casos particulares de tabuleiros e de poliminós, como exemplificado nas Figuras 4.3 e 4.4, é recomendável para que, a partir destes, sejam introduzidos os conceitos gerais.

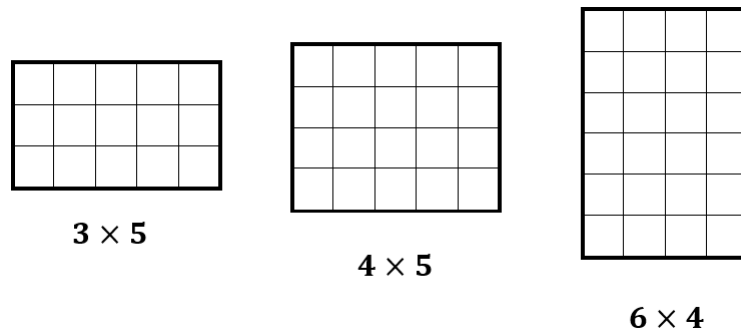


Figura 4.3: Exemplos de tabuleiros.

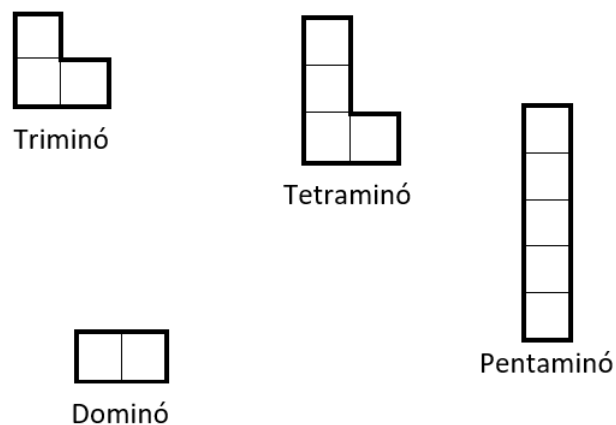


Figura 4.4: Exemplos de poliminós.

Além disso, deve-se citar quais são as condições para que ocorra uma cobertura de um tabuleiro e demais regiões planas, da mesma forma como definido anteriormente neste capítulo. Também é importante ressaltar a variação de poliminós de mesmo tipo e como as quantidades aumentam consideravelmente a partir de uma certa ordem, como visto na Figura 4.5.

TIPO DE POLIMINÓ	NÚMERO DE CÉLULAS	QUANTIDADE
Monominó	1	1
Dominó	2	1
Triminó	3	2
Tetraminó	4	5
Pentaminó	5	12
Hexaminó	6	35
Heptaminó	7	108
Octaminó	8	369
Nonominó	9	1285
Decaminó	10	4655

Figura 4.5: Quantidades de poliminós por tipo.

- **Terceira etapa:** Depois de os alunos terem compreendido os conceitos de tabuleiros, poliminós e coberturas, serão aplicados os três problemas que foram discutidos no Capítulo 2 de maneira mais prática, desenvolvendo as ideias a partir do tratamento de casos particulares, como será proposto a seguir.
 - **Problema 1: “Coberturas Sem Quebras de Tabuleiros por Dominós”**
 Inicialmente, será lançada a seguinte questão: “Qual é a condição para que um tabuleiro possa ser coberto por dominós?”. Para que os alunos cheguem à resposta, pode-se fornecer tabuleiros com as duas dimensões ímpares, com uma dimensão ímpar e a outra par, e com as duas dimensões pares, podendo ser os mesmos mostrados na Figura 4.3, para que estes achem possíveis coberturas e concluam a necessidade do número par de células no tabuleiro para que ocorra a cobertura, ou seja, a necessidade da área do tabuleiro ser divisível pela área da peça (no caso, dominós de área 2). A Figura 4.6 mostra a verificação desse fato.

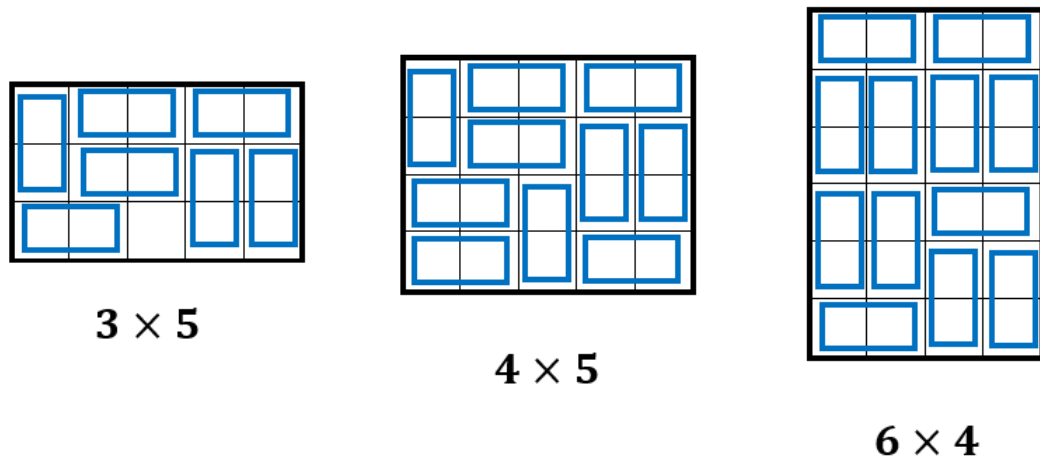


Figura 4.6: Exemplos de coberturas de tabuleiros por dominós.

Na sequência, deve-se introduzir o conceito de *retas internas*, podendo ser apresentado um exemplo de um tabuleiro particular para facilitar a compreensão, como visto na Figura 4.7.

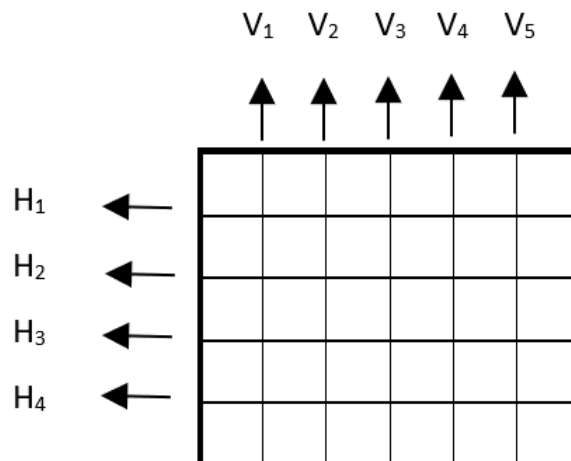


Figura 4.7: Retas internas do tabuleiro 5×6 .

Com isso, faz-se a definição de cobertura sem quebras, vindo então a solicitar a determinação de possíveis coberturas sem quebras para alguns casos particulares, incluindo os casos sem solução (tabuleiros com dimensões $2 \times k$, $3 \times k$, $4 \times k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e o 6×6) e os casos iniciais com solução (tabuleiros 5×6 e 6×8) lançando a seguinte questão: “É possível determinar uma cobertura sem quebras para os tabuleiros 2×6 , 3×4 , 4×6 , 5×6 , 6×6 e 6×8 ?” Após ceder um período de tempo para que os alunos tentem determinar as possíveis coberturas, faz-se a revelação dos casos possíveis e impossíveis de coberturas sem quebras, como mostrado na Figura 4.8, instigando os alunos a refletirem sobre as causas da impossibilidade de cobertura dos casos verificados.

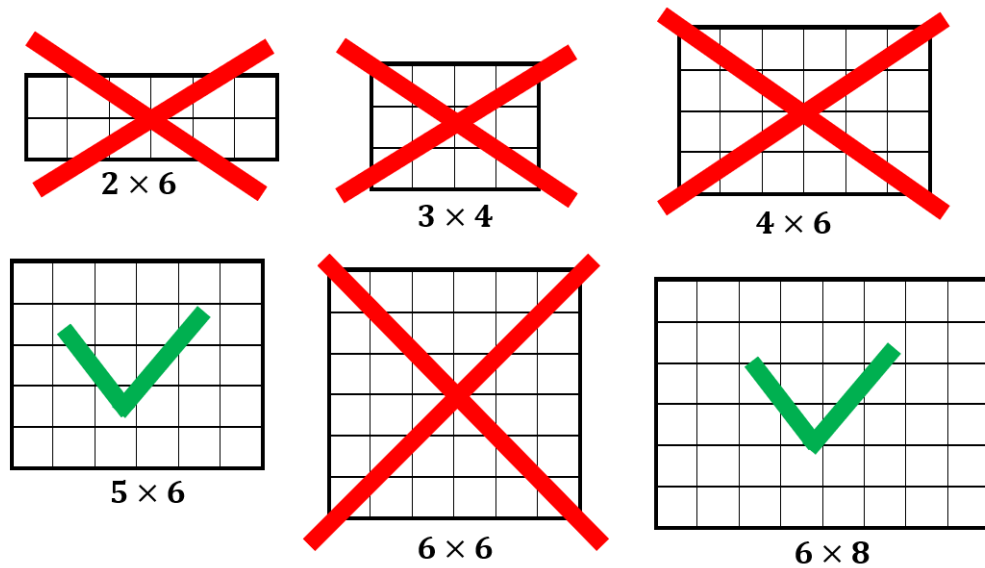


Figura 4.8: Casos de possíveis e impossíveis de coberturas sem quebras .

Para finalizar essa problema, pode-se mostrar uma cobertura para cada um dos casos afirmativos, como feito na Figura 2.7, e, em seguida, justificar a impossibilidade dos casos que não apresentam coberturas sem quebras a partir do argumento que descreve a necessidade de que as retas internas que subdividem o tabuleiro em duas regiões com quantidades pares de células devem cortar no mínimo dois dominós para que as regiões definidas por elas possam ser cobertas por dominós, sendo necessária de uma quantidade de dominós superior à suportada pelo tabuleiro para que a cobertura sem quebras ocorra. A partir disso, faz-se a generalização do resultado, apontando que um tabuleiro admite uma cobertura sem quebras se, e somente se, este possuir uma quantidade par de células e suas dimensões forem maiores ou iguais a 5, com exceção do caso 6×6 . Pode-se destacar a obtenção das coberturas sem quebras dos demais tabuleiros a partir do acréscimo de duas fileiras horizontais ou verticais nos tabuleiros 5×6 e 6×8 com o mesmo raciocínio construído na Subseção 2.1.2.

○ **Problema 2: “Coberturas de Tabuleiros $2^n \times 2^n$ por L-triminós”**

Esta atividade pode ser iniciada mostrando os diferentes tipos de triminós, como apresentado na Figura 2.2, fazendo em seguida o questionamento: “*Quais tabuleiros podem ser cobertos por L-triminós?*”. A Figura 2.3 pode ser mostrada para auxiliar os estudantes na obtenção da resposta, ou seja, que qualquer tabuleiro $3 \times n$, sendo n um número natural par, pode ser coberto por L-triminós.

Após verificado tal fato, serão lançadas as próximas questões para análise: “*Quais outros tipos de tabuleiros podem ser cobertos por L-triminós? Tabuleiros $2^n \times 2^n$ podem ser cobertos por L-triminós?*” Os três tabuleiros $2^n \times 2^n$ de ordens menores (2×2 , 4×4 e 8×8) podem ser fornecidos para ajudar os alunos nas verificações. A partir destes, não será difícil que os alunos concluam a impossibilidade de cobertura devido ao fato da não divisi-

bilidade das áreas dos tabuleiros pela área do L-triminó. Na sequência, será apresentada uma nova questão: “Mas se for deixado um buraco no tabuleiro, isto é, uma célula não coberta, será possível cobri-lo utilizando apenas L-triminós?” Para fazer a análise, deve ser fornecido os tabuleiros 2×2 , 4×4 e 8×8 impressos em uma folha de papel para cada um dos alunos. As tentativas de coberturas destes tabuleiros poderão ser feitas utilizando lápis e borracha. Com isso, os alunos serão orientados a escolherem uma célula no tabuleiro a não ser coberta (posição do buraco) em cada um dos três tabuleiros e tentarem cobrir a região restante destes, como exemplificado na Figura 4.9.

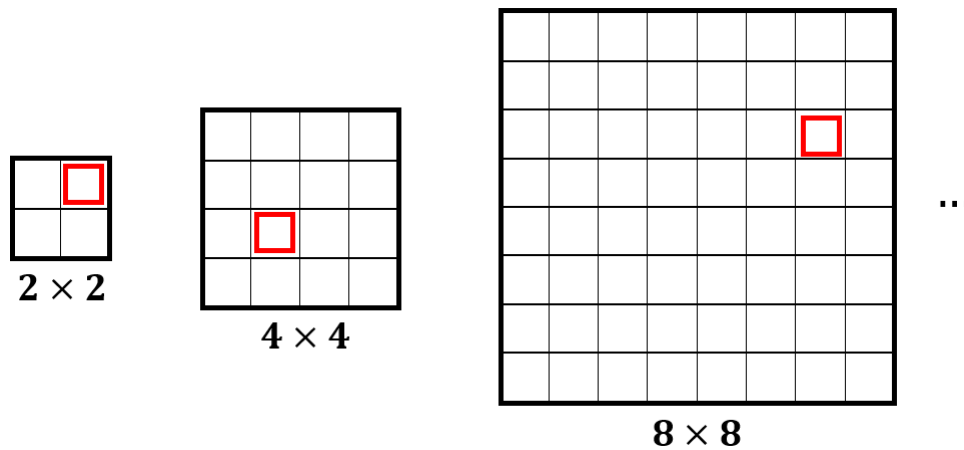


Figura 4.9: Tabuleiros 2×2 , 4×4 e 8×8 com um buraco.

Depois de passado um período de tempo suficiente para que os estudantes determinem as coberturas, será mostrada uma solução particular de coberturas para os exemplos fixados na Figura 4.9, como pode ser visto na Figura 4.10, afirmando o caso geral de que é sempre possível obter uma cobertura por L-triminós de um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com um buraco, independente da posição do buraco no tabuleiro.

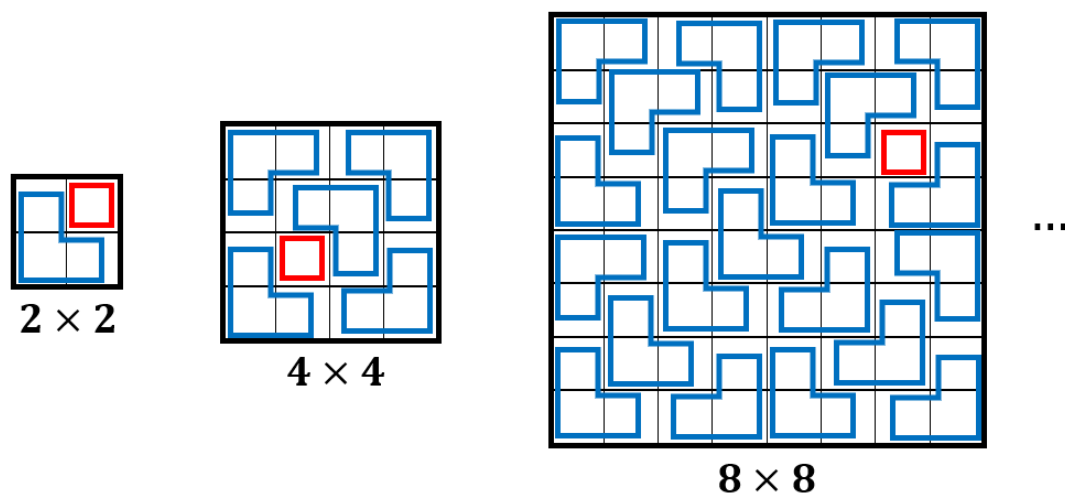


Figura 4.10: Coberturas dos tabuleiros 2×2 , 4×4 e 8×8 com um buraco.

A finalização do tratamento deste problema será feita mostrando aos alunos como obter

uma cobertura de um tabuleiro $2^n \times 2^n$ com um buraco sempre partindo do caso $2^{n-1} \times 2^{n-1}$.

Primeiro será mostrado as coberturas do caso 2×2 , de acordo com a Figura 4.11.

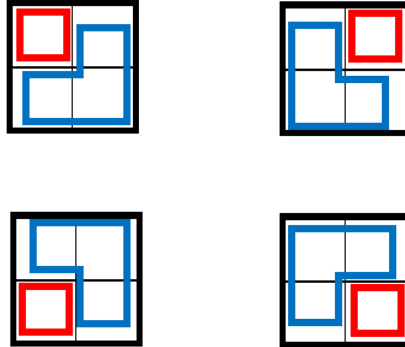


Figura 4.11: Coberturas dos tabuleiros 2×2 com um buraco.

Depois será feita a cobertura do tabuleiro 4×4 a partir das coberturas dos tabuleiros 2×2 seguindo os passos:

- * Divida o tabuleiro em quatro regiões 2×2 disjuntas;
- * Cubra a região 2×2 onde se encontra o buraco;
- * Escolha os buracos das outras três regiões 2×2 conexos no centro do tabuleiro 4×4 e faça a cobertura das três regiões com os buracos separadamente utilizando L-triminós;
- * Complete a cobertura do tabuleiro 4×4 acrescentando um L-triminó na região correspondente aos três buracos conexos do centro do tabuleiro.

A Figura 4.12 mostra as etapas da construção desta cobertura.

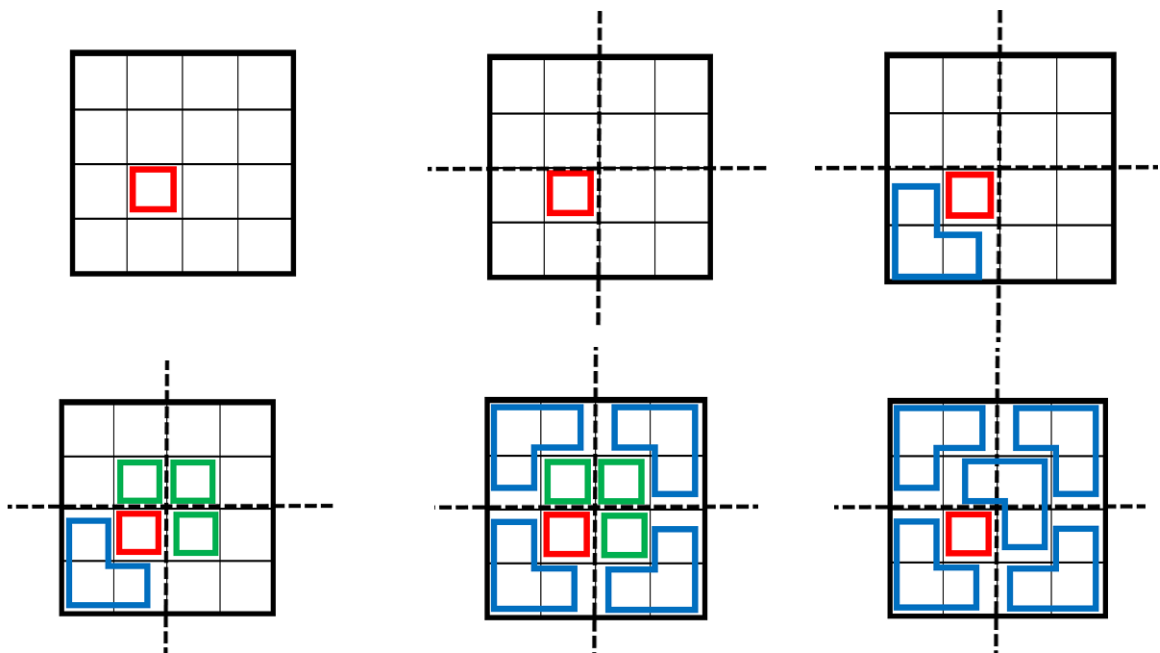


Figura 4.12: Passo a passo da cobertura do tabuleiro 4×4 com um buraco.

Analogamente, faz-se a cobertura do tabuleiro do tabuleiro 8×8 com um buraco subdividindo este em quatro regiões 4×4 disjuntas, como mostrado na Figura 4.13.

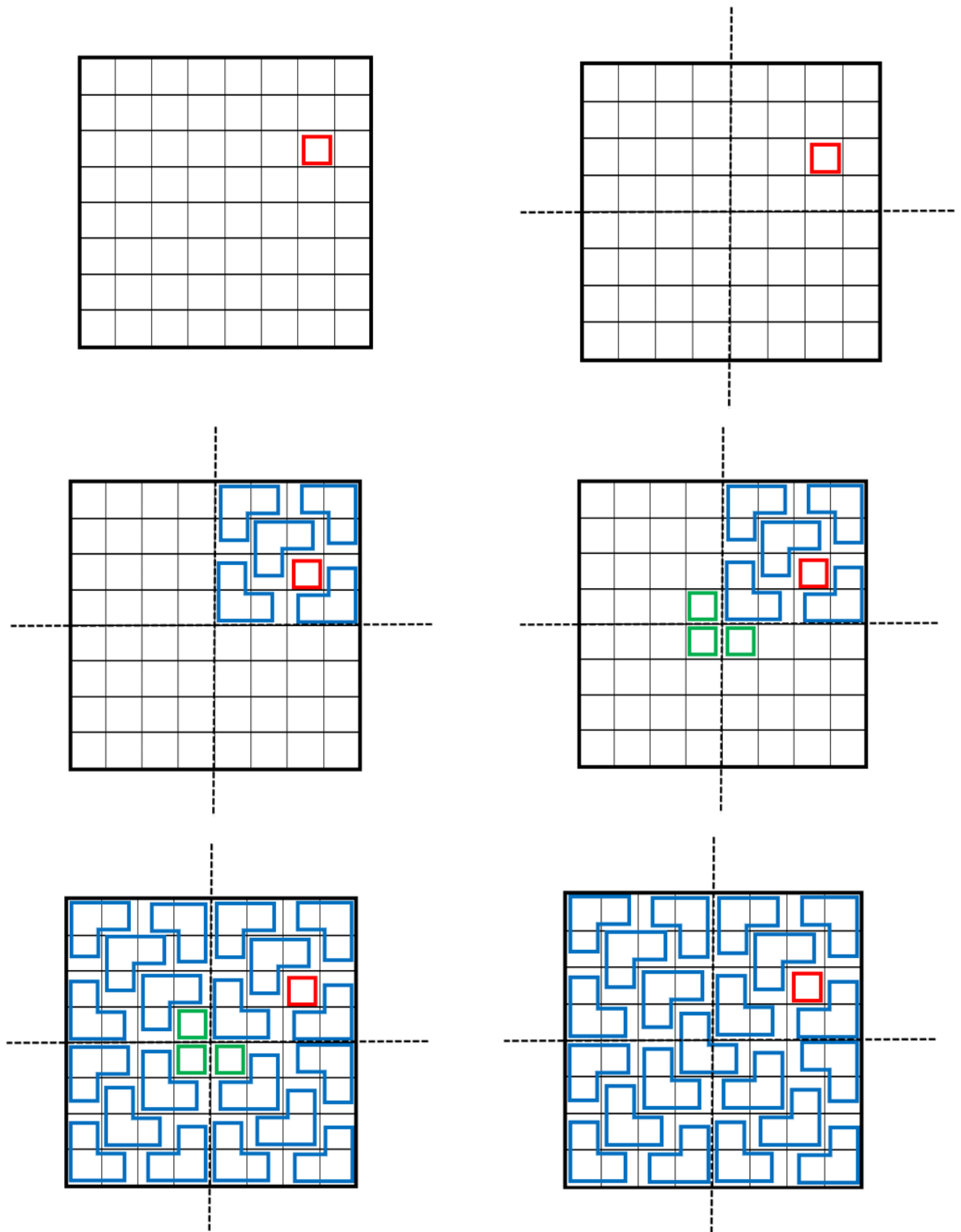


Figura 4.13: Passo a passo da cobertura do tabuleiro 8×8 com um buraco.

Com isso, afirma-se que todo tabuleiro quadrado com um buraco cujas dimensões são potências de base 2 podem ser cobertos por L-triminós, independente da posição do buraco no tabuleiro.

○ **Problema 3: “Coberturas de Tabuleiros por Tetraminós”**

Da mesma forma como foi feito no tratamento do problema anterior, esta atividade pode ser iniciada apresentando os diferentes tipos de tetraminós por meio da Figura 2.15. Em seguida, propõe-se a seguinte questão para análise: *“Considere um tabuleiro 8×8 em que foram removidas todas as suas células acima de uma de suas diagonais, como mostrado na Figura 4.14. É possível cobrir essa região somente com L-tetraminós e Z-tetraminós?”*

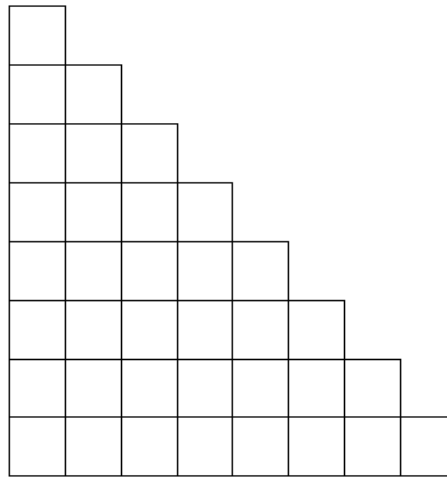


Figura 4.14: Tabuleiro 8×8 sem as células acima de sua diagonal.

Pode ser verificado que o argumento da divisibilidade da área da região a ser coberta pela área da peça utilizada na cobertura não descarta a possibilidade de cobertura, visto que tal região possui área 36 que é divisível por 4 (área dos tetraminós). Logo, deve ser proposto aos alunos tentarem configurações possíveis para verificar se existe ou não uma cobertura da região por L-tetraminós e Z-tetraminós.

Como feito na atividade anterior, cada aluno receberá a região impressa em uma folha de papel para que tentem determinar as possíveis coberturas utilizando lápis e borracha. Após passado um certo período de tempo suficiente para a realização das tentativas de cobertura da região pelos alunos, deve-se fornecer as seguintes dicas para que estes cheguem na conclusão da impossibilidade de cobertura da região:

- * Considere a coloração xadrez aplicada nesta região do tabuleiro como mostrado na Figura 4.15;

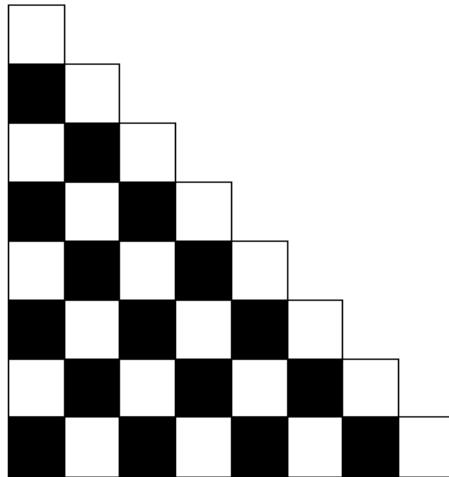


Figura 4.15: Coloração xadrez aplicada no tabuleiro 8×8 sem as células acima de sua diagonal.

- * Quantas células brancas e quantas células pretas a região possui?
- * Considere a coloração xadrez aplicada no L-tetraminó e no Z-tetraminó, de acordo com a Figura 2.18;
- * Quantas células brancas e quantas células pretas do tabuleiro cada L-tetraminó e cada Z-tetraminó pode cobrir?

A partir da análise destas questões, os alunos poderão chegar a conclusão de que cada L-tetraminó ou Z-tetraminó cobre sempre a mesma quantidade de células brancas e de células pretas, descartando a possibilidade de cobertura da região devido à diferença entre as suas quantidade de células brancas e de células pretas. Com isso, pode ser generalizado que a região de um tabuleiro $n \times n$, com $n \in \mathbb{N}$ obtida removendo-se todas as células acima de uma de suas diagonais não pode ser totalmente coberta somente com L-tetraminó e Z-tetraminó, podendo ser feita sua demonstração formal de forma análoga ao realizado na Subseção 2.1.3 caso os estudantes tenham conhecimento do conteúdo de somas de sequências numéricas(soma dos termos de uma progressão aritmética).

- **Quarta etapa:** Nesta última etapa do plano de aula será apresentado aos alunos o diamante de Aztec, destacando ser uma região plana que possui cobertura por dominós. Com isso, será fornecido aos alunos o resultado apontado no Teorema 3.1 que descreve a quantidade de coberturas distintas possíveis de serem feitas no diamante de Aztec por dominós, mas sem apresentar a demonstração, devido a sua complexidade. Sendo assim, as diferentes coberturas de $AZ(1)$ e $AZ(2)$ podem ser mostradas, como feito nas Figuras 4.16 e 4.17.

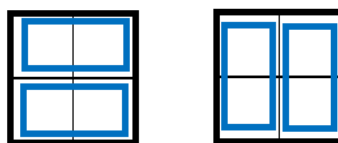


Figura 4.16: Coberturas distintas de $AZ(1)$.

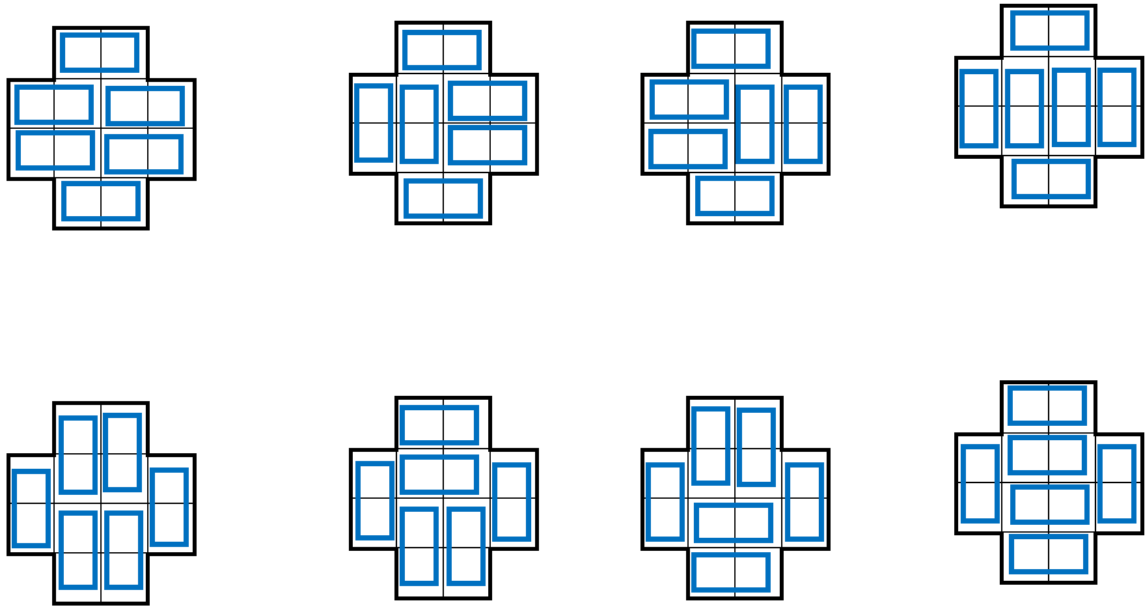


Figura 4.17: Coberturas distintas de $AZ(2)$.

Pelo elevado número de coberturas distintas apresentadas pelos diamantes de Aztec de ordens superiores, pode-se fazer a apresentação somente das quantidades a partir da aplicação da expressão do Teorema 3.1 sem necessariamente construir as coberturas, como mostrado a seguir. Caso os alunos desconheçam os conceitos de Números Binomiais, será necessário fazer uma pequena introdução deste conteúdo para que eles compreendam a aplicação do resultado.

$$\text{Coberturas de } AZ(1): 2^{\binom{1+1}{2}} = 2^{\binom{2}{2}} = 2^1 = 2$$

$$\text{Coberturas de } AZ(2): 2^{\binom{2+1}{2}} = 2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$$

$$\text{Coberturas de } AZ(3): 2^{\binom{3+1}{2}} = 2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$$

$$\text{Coberturas de } AZ(4): 2^{\binom{4+1}{2}} = 2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = 1024$$

$$\text{Coberturas de } AZ(5): 2^{\binom{5+1}{2}} = 2^{\binom{6}{2}} = 2^{15} = 32768$$

$$\text{Coberturas de } AZ(6): 2^{\binom{6+1}{2}} = 2^{\binom{7}{2}} = 2^{21} = 2097152$$

...

$$\text{Coberturas de } AZ(n): 2^{\binom{n+1}{2}}$$

O presente plano de aula foi aplicado em uma escola estadual de ensino básico para um grupo de seis alunos convidados apresentando resultados favoráveis, o que foi proporcionado principalmente por ser uma atividade não obrigatória curricular, sendo de livre e espontânea vontade a participação nesta, e também pela dinâmica das discussões sobre as atividades e trocas de ideias entre o grupo de alunos envolvidos. Fatores como pequena quantidade de alunos e boa gestão do tempo de aplicação foram de grande relevância para o sucesso da aula. Durante a aplicação das atividades não ocorreram muitas dúvidas e nem dificuldades de execução por parte dos alunos participantes devido à simplicidade das tarefas, o que também facilitou na compreensão das demonstrações dos resultados por parte destes de modo geral.

5 Considerações Finais

O estudo de coberturas de tabuleiros e de outras regiões planas, como pôde ser visto ao longo do desenvolvimento deste trabalho, fornece análises riquíssimas de propriedades matemáticas que envolvem conceitos tanto geométricos quanto combinatórios. No caso específico da cobertura do diamante de Aztec, a engenhosidade da modelagem do problema a partir da introdução de conceitos da Teoria dos Grafos e da definição de operações específicas, como a operação σ de embaralhamento, foram de fundamental importância para resolver o problema proposto como objetivo principal deste trabalho.

O estabelecimento da relação de recorrência escrevendo $A(n)$ em função de $A(n - 1)$ foi uma estratégia essencial e que permitiu alcançar o resultado final, dado pelo número de coberturas distintas possíveis de serem feitas em $AZ(n)$. Alguns conceitos matemáticos mais básicos, como soma de sequências numéricas, princípio multiplicativo, números binomiais, por exemplo, serviram de suporte para concluir tal demonstração.

A resolução dos problemas iniciais mais simples sobre coberturas de tabuleiros e sobre grafos foi bastante relevante para o amadurecimento de ideias relacionadas a esses conceitos, possibilitando uma abordagem mais eficiente do problema do número de coberturas do diamante de Aztec.

De fato, fica comprovado mais uma vez a partir deste trabalho que problemas de coberturas de tabuleiros e de outras regiões planas representam um tópico de enorme potencial para ser tratado em projetos de pesquisas em grupos de estudos sobre matemática, considerando sua eficácia no desenvolvimento do raciocínio lógico dos estudantes envolvidos. Tal eficiência pode ser justificada visto que a condução das soluções dos problemas propostos são dadas a partir da interação de conceitos de diferentes eixos da matemática.

Verifica-se, também, que os estudos desse tema podem ser mais dinâmicos e estimulantes devido à possibilidade de utilização de materiais, como tabuleiros e peças, durante as oficinas de estudos, auxiliando a compreensão por meio da relação entre o concreto e o abstrato, sem contar a variedade de problemas cotidianos relacionados à cobertura de tabuleiros. Recursos computacionais, como softwares geométricos e de desenho, também podem ser aliados potenciais nos estudos de problemas de coberturas de tabuleiros.

Apêndice A: Alguns Conceitos Sobre Teoria dos Grafos

A *Teoria dos Grafos* é uma área de conhecimento bastante aplicada na modelagem e resolução de variados problemas matemáticos. O texto [6] de J. P. Santos, M. P. Mello e I. T. C. Murari, e o texto [3] de S. Jurkiewicz fazem uma introdução dos principais conceitos relacionados a grafos. A seguir, serão citados alguns conceitos dessa teoria que serão usados durante o texto.

Um *grafo* $G = (V, E)$ é um objeto formado por um conjunto V de vértices e um conjunto E de elos ou arestas, podendo G ser um grafo finito ou infinito. Sendo $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e com m arestas formado pelos conjuntos $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, sendo $e_k = (v_i; v_j)$ a aresta incidente aos vértices v_i e v_j , com $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dois vértices que possuem uma mesma aresta de incidência são ditos *adjacentes* (ou vizinhos). A Figura 5.1 mostra o exemplo de um grafo finito $G = (V, E)$ com $n = 5$ e $m = 8$, sendo

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

e

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} = \{(v_1; v_2), (v_1; v_3), (v_1; v_4), (v_1; v_5), (v_2; v_3), (v_2; v_5), (v_3; v_4), (v_3; v_5)\}.$$

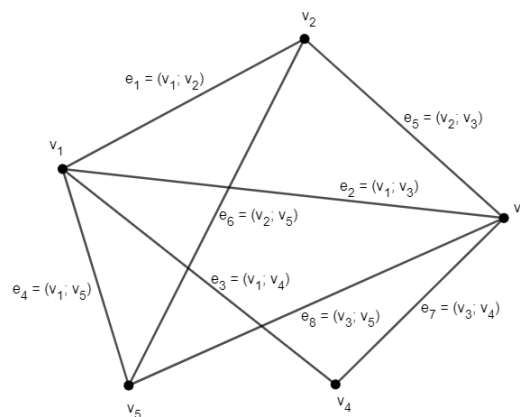


Figura 5.1: Exemplo de um grafo finito $G = (V, E)$ com $n = 5$ e $m = 8$.

O *grau* de um vértice consiste no número de arestas incidentes a ele. Um *grafo regular* é um grafo em que todos os seus vértices tem o mesmo grau $k \in \mathbb{N}$. Este é dito *grafo regular de grau k* ou *grafo k -regular*. A Figura 5.2 mostra o exemplo de um grafo regular de grau 3 ou 3-regular.

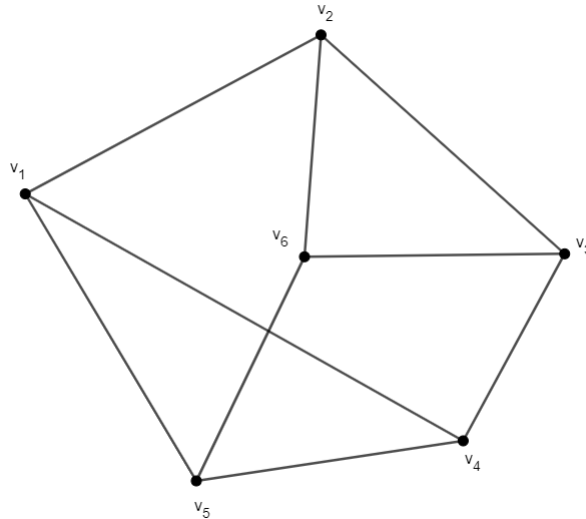


Figura 5.2: Exemplo de um grafo regular de grau 3 ou 3-regular.

O grafo $G' = (V', E')$ é dito um *subgrafo* de $G = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, ou seja, se todos os vértices e arestas que formam G' também fazem parte de G . O grafo G' é um subgrafo *induzido* pelo conjunto de vértices $V' \subseteq V$ se $G' = (V', E')$, onde E' é o conjunto das arestas de G incidentes a somente vértices de V' . A Figura 5.3 mostra um subgrafo G' de G e o subgrafo G'' induzido pelo conjunto de vértices $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ que está contido no conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ de G .

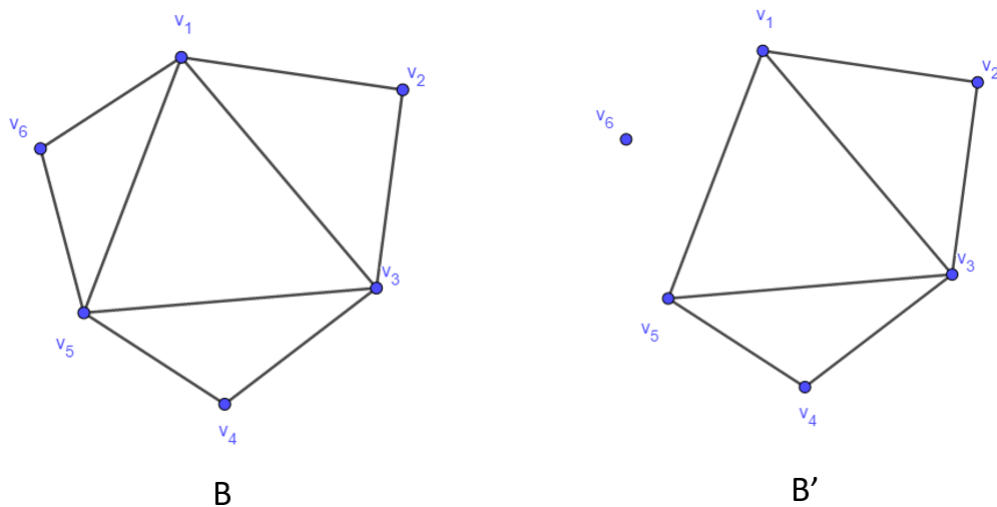


Figura 5.3: Grafo G e subgrafo G' de G induzido por $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

Dois grafos são ditos *isomorfos* quando existe uma bijeção entre os seus conjuntos de vértices que preserva as adjacências, podendo estes representar a mesma situação. A Figura 5.4 mostra um exemplo de um par de grafos isomorfos, tal que sua correspondência de vértices é dada por: $a \rightarrow g$, $b \rightarrow h$, $c \rightarrow l$, $d \rightarrow i$, $e \rightarrow j$ e $f \rightarrow k$.

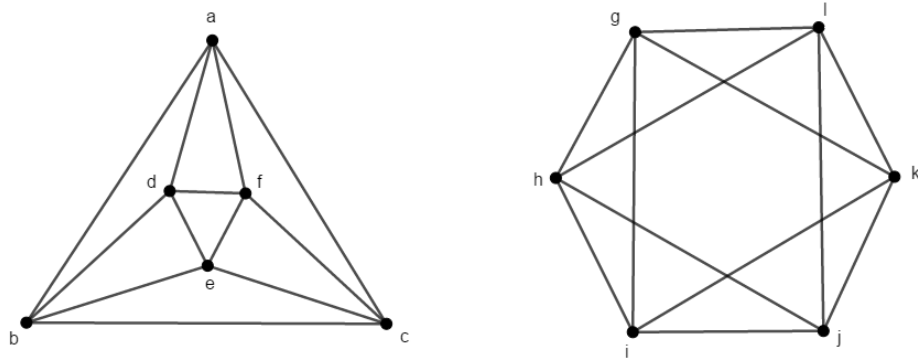


Figura 5.4: Exemplo de um par de grafos isomorfos.

Grafos bipartidos são grafos $G = (V, E)$ em que o seu conjunto de vértices V é subdividido em dois conjuntos disjuntos de vértices V_1 e V_2 em que não existe relações de adjacência entre os vértices pertencentes a um mesmo conjunto. A Figura 5.5 mostra o exemplo de um grafo bipartido $G = (V, E)$ em que $V = V_1 \cup V_2$, com $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$. O subconjunto V_1 (analogamente V_2) é um subconjunto *independente* de vértices de G , ou seja, não ocorre adjacências entre seus vértices.

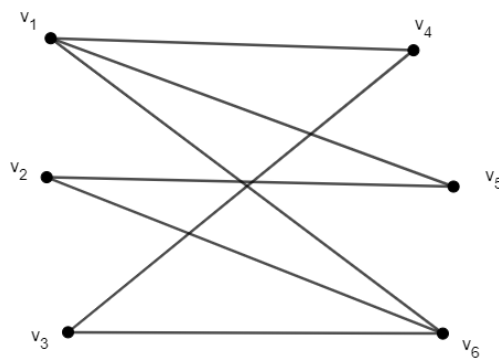


Figura 5.5: Exemplo de um grafo bipartido.

A *coloração de grafos* é um procedimento utilizado para subdividir o seu conjunto de vértice na menor quantidade de subconjuntos independentes, tal que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Nesse procedimento, cada conjunto independente recebe uma cor diferente para ser aplicada em seus vértices. Essa quantidade mínima de subconjuntos independentes de um grafo $G = (V, E)$ é chamada de *número cromático* de G . A Figura 5.6 mostra o exemplo de uma coloração aplicada em um grafo $G = (V, E)$, a qual definiu três conjuntos independentes

$V_1 = \{v_1\}$, $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ e $V_3 = \{v_3, v_5\}$, cujo número cromático é 3, sendo $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$.

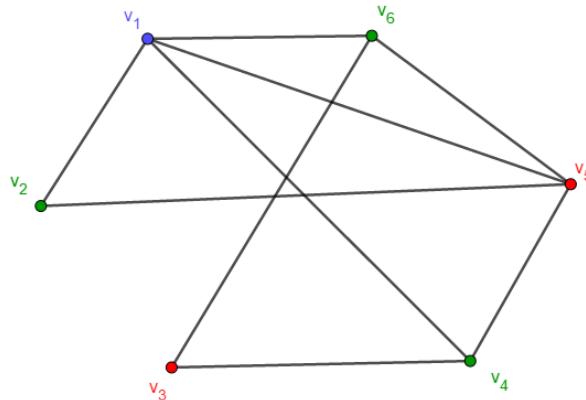


Figura 5.6: Exemplo de uma coloração aplicada em um grafo.

O número cromático de um grafo bipartido qualquer é sempre igual a 2. Para ver isso, basta colorir cada um dos dois conjuntos independentes de vértices do grafo com uma cor diferente, dado que todo grafo bipartido pode ter seu conjunto de vértices subdividido em dois conjuntos independentes. Os grafos cujos números cromáticos são iguais a 2 são denotados *2-coloridos* ou *bicoloridos*.

Considere o grafo \mathbb{Z}^2 cujo conjunto V de vértices é $V = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Com isso, dados dois pontos $X = (x, y)$ e $Y = (z, w)$ pertencentes a Z , tem-se que X e Y são vizinhos ou adjacentes se a “distância” entre eles é igual a 1, em outras palavras, se

$$|x - z| + |y - w| = 1.$$

Logo, verifica-se que esse grafo 4-regular bipartido e, portanto, bicolorido, como mostrado na Figura 5.7.

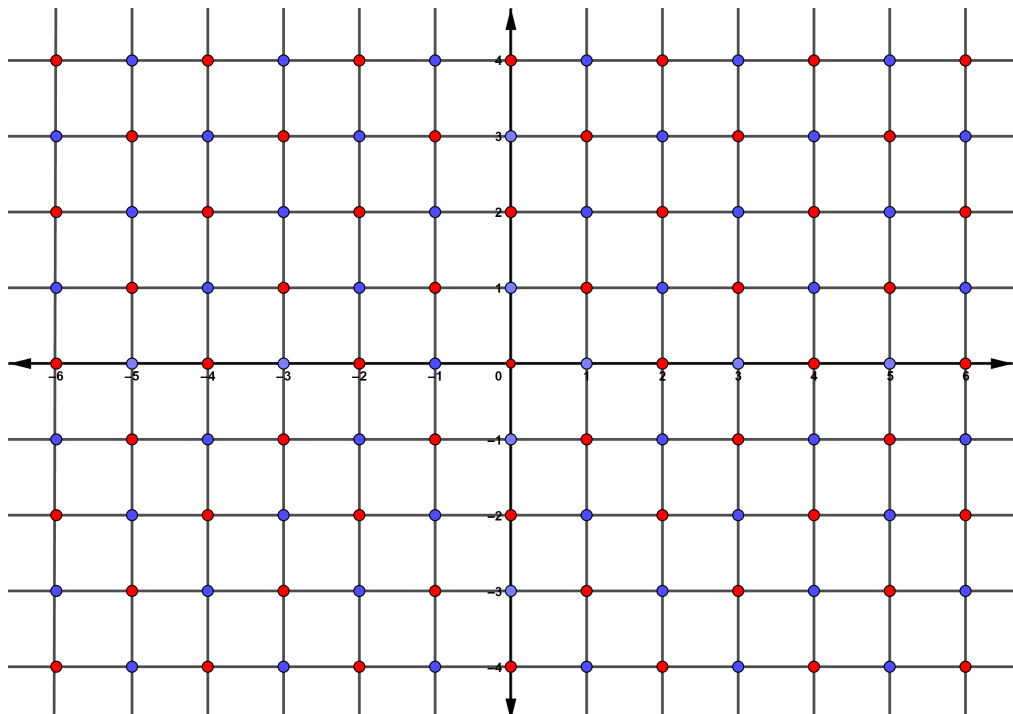


Figura 5.7: Representação do \mathbb{Z}^2 .

Apêndice B: Demonstração do Lema 3.1

Neste apêndice será feita a demonstração do Lema 3.1 que diz que dada uma cobertura parcial reduzida T de Z então $\sigma(T)$ também é uma cobertura parcial reduzida de Z . Considerando T uma cobertura parcial reduzida de Z , deverá ser demonstrado que:

- (i) $\sigma(T)$ é uma cobertura parcial;
- (ii) $\sigma(T)$ não contém blocos pretos;
- (iii) $\sigma(\sigma(T)) = T$;
- (iv) a região livre de $\sigma(T)$ pode ser coberta por blocos pretos disjuntos.

Inicialmente será demonstrado o item (i), ou seja, que a operação σ de embaralhamento aplicada em uma cobertura parcial reduzida não provoca sobreposições. Uma região 2×2 cuja célula superior esquerda é preta será denominada *bloco*. Para isso, suponha, por contradição, que após a aplicação da operação σ de embaralhamento ocorre sobreposição em uma célula c de Z . Considere que c é uma célula branca (o caso em que c é uma célula preta é análogo). Então, tem-se em T uma das duas situações mostradas na Figura 5.8.

Pela Figura 5.8 é possível ver que c é uma célula livre, pois, se c fosse coberta teria a ocor-

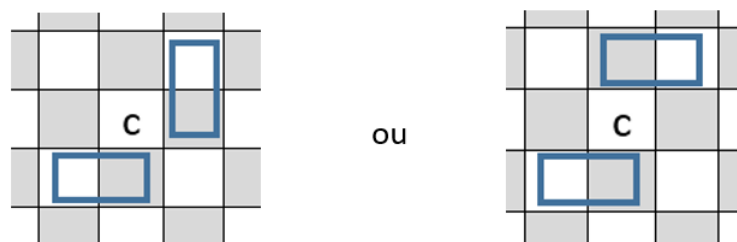


Figura 5.8: Casos de sobreposição de uma célula branca na aplicação da operação σ em T .

rência de um bloco preto em T' , contrariando o fato de T' ser uma cobertura parcial reduzida. Mas, como T' é uma cobertura parcial reduzida, c deveria pertencer a um bloco da região livre, o que não acontece em nenhuma das duas situações possíveis de sobreposição mostradas na Figura 5.8, pois os dois blocos que contém c apresentam células cobertas. Logo, não ocorre sobreposição de nenhuma célula branca em $\sigma(T')$.

O item (ii) pode ser comprovado lembrando que os blocos pretos são invariantes por σ , logo, um bloco preto só pode ser formado a partir da aplicação da operação σ de embaralhamento

se esta for aplicada em outro bloco preto. E, como T' não possui blocos pretos, por ser uma cobertura parcial reduzida, verifica-se a impossibilidade de ocorrência de blocos pretos em $\sigma(T')$. O item (iii) segue diretamente da definição de σ .

Para demonstrar o item (iv) serão feitas algumas definições. Considere o tabuleiro de xadrez infinito Z . Considere agora o grafo infinito $B = (V, E)$ onde o conjunto de vértices V é formado pelos blocos, e dois blocos b_i e b_j serão adjacentes se compartilharem uma célula c , como mostrado na Figura 5.9.

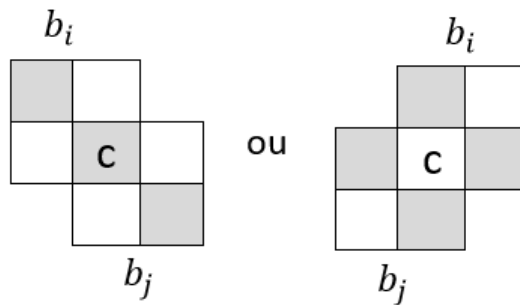


Figura 5.9: Representação da relação de adjacência entre dois blocos.

Com isso, pode-se ver que o grafo B é isomorfo a \mathbb{Z}^2 . Logo, tem-se que B é bipartido (logo, é bicolorido) e 4-regular, pois todo bloco b_i de V é adjacente a exatamente 4 outros blocos de V , como mostrado na Figura 5.10.

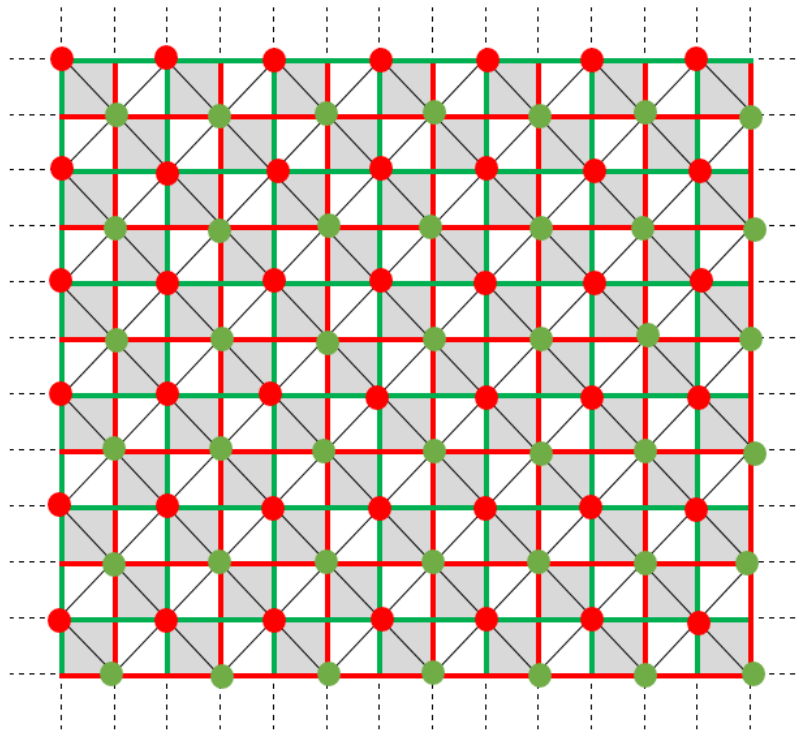


Figura 5.10: Número de adjacências de um bloco de V e bipartição de B .

Considere uma cobertura parcial T de Z sem blocos pretos. Com isso, um bloco $b_i \in B$ será classificado como:

- *rico* (com respeito a T), se b_i tem somente um dominó completo de T (e neste caso contém apenas um dominó, pois T não possui blocos pretos);
- *pobre* (com respeito a T), caso contrário, como exemplificado na Figura 5.11.

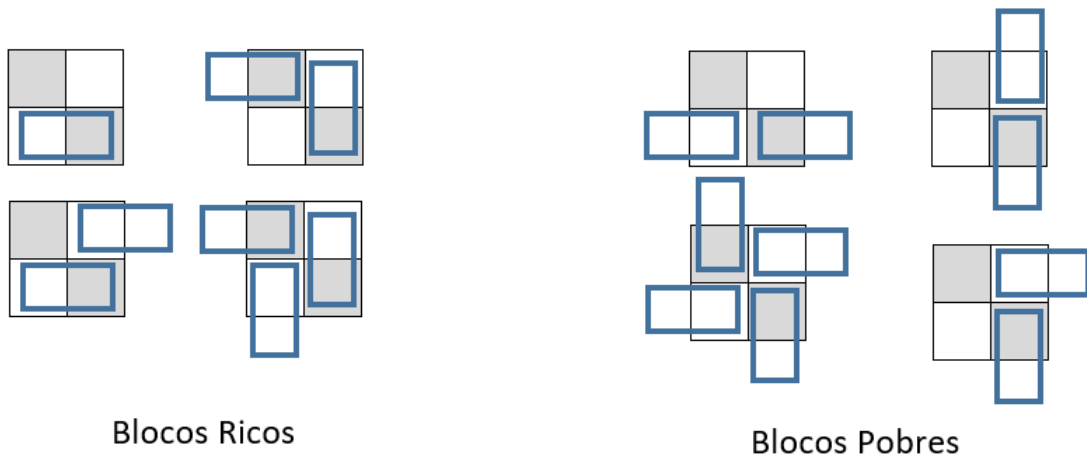


Figura 5.11: Exemplos de blocos ricos e de blocos pobres.

É evidente que todo bloco completamente descoberto é classificado como pobre.

Seja $B_T = (V_T, E_T)$ o subgrafo induzido de B onde V_T é o conjunto de todos os blocos pobres de B . E, por ser subgrafo de B , conseqüentemente B_T também é bipartido e, portanto, bicolorido, como qualquer grafo bipartido. Dado um bloco rico b_R pertencente a B , considere a *coloração local* aplicada nos blocos pobres adjacentes a este como definido na sequência:

- b_k receberá cor vermelha, se contém a metade do dominó pertencente a b_R ;
- b_k receberá cor verde, caso contrário, como exemplificado na Figura 5.12.

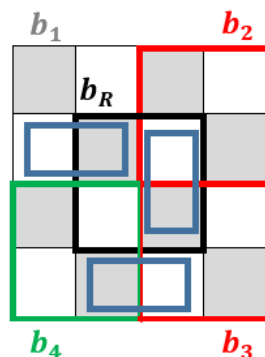


Figura 5.12: Exemplo de aplicação da *coloração local*.

Observe que b_1 é vizinho rico de b_R , logo não recebe cor.

A conclusão do item (iv) decorre da proposição citada a seguir.

Proposição 5.1. *Seja T uma cobertura parcial de Z sem blocos pretos. Então, T é reduzida se, e somente se:*

- (a) $\sigma(T)$ é uma cobertura parcial;
- (b) existe uma bicoloração de B_T que coincide com a coloração local de todos os blocos ricos de T .

Demonstração. (\Rightarrow) Seja T uma cobertura parcial reduzida. Já foi visto que o item (a) é satisfeito. Seja G o conjunto dos blocos livres disjuntos que compõem a região livre de T e R o conjunto de blocos pobres que não estão em G . Logo, considerando os grafos $B = (V, E)$ e $B_T = (V_T, E_T)$ definidos anteriormente, tem-se que $V_T = G \cup R$. Sendo assim, considere a bicoloração em que os elementos de G são coloridos de verde e os elementos de R de vermelho. Será mostrado que esta é uma bicoloração admissível. Sejam b_1 e b_2 dois blocos pobres adjacentes pertencentes a P_T com uma célula c em comum, como visto na Figura 5.13.

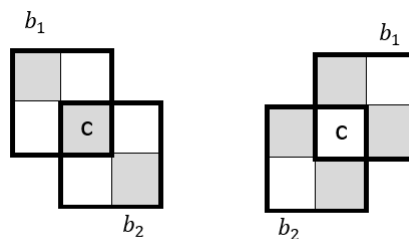


Figura 5.13: Dois blocos pobres adjacentes de B_T .

Logo, como b_1 e b_2 são dois blocos pobres, tem-se que c não pode ser coberta, pois, caso fosse, haveria um dominó completo pertencente a b_1 ou a b_2 . Então, sendo c descoberta e pertencente à região livre de T , um dos blocos que a contém necessita ser livre devido ao fato da cobertura T ser reduzida. Com isso, conclui-se que um dos blocos que contém c está em G e o outro necessariamente precisa estar em R , pois, não podem haver blocos livres adjacentes em G . Portanto, tem-se que um dos blocos pobres b_1 ou b_2 assumirá cor verde e o outro cor vermelha, como mostrado na Figura 5.14.

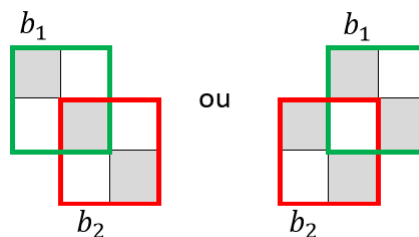


Figura 5.14: Coloração aplicada em dois blocos pobres adjacentes de B_T .

Resta mostrar que a coloração definida anteriormente coincide com a coloração local induzida pelos blocos ricos. Agora, considere os dois blocos pobres b_1 e b_2 adjacentes ao bloco rico b_R , de acordo com a Figura 5.15, ou seja, b_1 é verde na coloração local e b_2 é vermelho na coloração local.

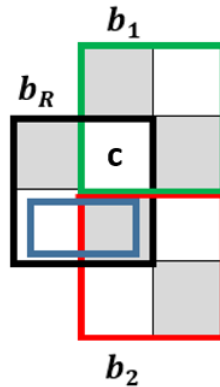


Figura 5.15: Coloração local aplicada em dois blocos pobres adjacentes a um bloco rico em T .

Como T é uma cobertura parcial reduzida, tem-se que a célula c é livre, pois, caso contrário, iria ocorrer uma das três situações: ou b_R seria um bloco preto, ou b_1 seria bloco rico, ou T não seria uma cobertura parcial. Sendo c livre e pertencente somente aos blocos b_R (que é rico) e b_1 , conclui-se que b_1 é um bloco livre, logo pertencente a G , ou seja, é verde na coloração de B_T . Sendo b_2 um bloco pobre com pelo menos uma célula coberta, conclui-se que b_2 pertence a R , logo terá cor vermelha na coloração de B_T .

(\Leftarrow) Agora, seja T uma cobertura parcial de Z sem blocos pretos e considere os itens (a) e (b) válidos. Seja o grafo $B_T = (V_T, E_T)$ com $V_T = G \cup R$ apresentando a coloração de B_T do item (b). Como os blocos em G são da mesma cor, então não são adjacentes, logo são disjuntos. Com isso, basta demonstrar que G ocupa toda a região livre de T , ou seja, que toda célula livre de T pertence a um bloco de G .

Seja c uma célula livre em T pertencente a dois blocos adjacentes, b_1 e b_2 . Logo, ocorre uma das duas situações mostradas na Figura 5.16.

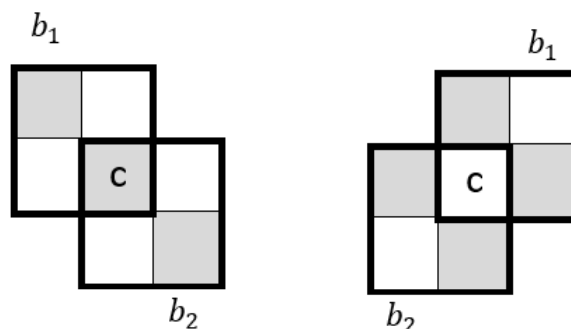


Figura 5.16: Dois blocos pobres adjacentes com uma célula livre c em comum.

Com isso, verifica-se que se b_1 e b_2 forem ambos blocos ricos causará sobreposição de c em $\sigma(T)$, o que levaria à contradição do item (a). Se b_1 e b_2 forem ambos blocos pobres, então, tem-se que um deles está em G e o outro em R como visto anteriormente, afirmando que c pertence a um bloco de G . Por fim, sendo b_1 um bloco pobre e b_2 um bloco rico, a bicoloração local aplicada a partir de b_2 fará com que b_1 seja pertencente a G . Portanto, conclui-se que toda célula livre de T pertence a um bloco livre de G . Além disso, sendo todos os blocos de G disjuntos devido à bicoloração aplicada em B_T , tem-se que nenhuma célula livre de T pertence a dois blocos livres disjuntos. Também é possível afirmar que nenhuma célula coberta de T pertence a G , dado que G possui apenas blocos livres.

Então, conclui-se que todos os blocos de G estão contidos na região livre de T e que não há ocorrência de sobreposições, permitindo afirmar que T é uma cobertura parcial reduzida. \square

Agora, com a Proposição 5.1 demonstrada, é possível concluir a demonstração do item (iv) do Lema 3.1.

Seja T uma cobertura parcial reduzida de Z . Então, $\sigma(T)$ não possui blocos pretos. Dado um bloco rico b_R com respeito a T , tem-se que b_R também é rico com respeito a $\sigma(T)$, e vice-versa, considerando que $\sigma(\sigma(T)) = T$. Com isso, conclui-se que tanto os blocos ricos quanto os blocos pobres de T e $\sigma(T)$ são os mesmos, ou seja, que $B_T = B_{\sigma(T)}$. Verifica-se, também, que a operação σ de embaralhamento apenas alterna as cores aplicadas na coloração local dos grafos B_T e $B_{\sigma(T)}$ na transição de T para $\sigma(T)$, como observado na Figura 5.17.

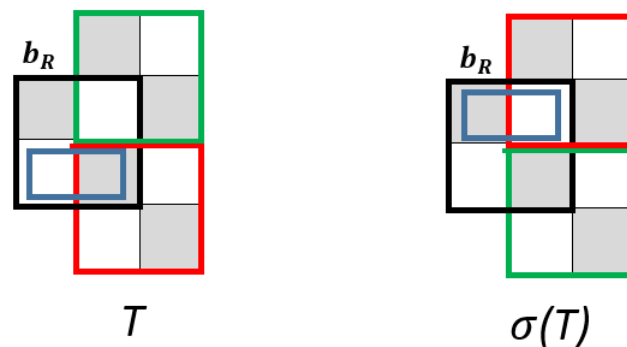


Figura 5.17: Coloração local aplicada a partir de um bloco rico b_R com respeito a T e $\sigma(T)$.

Definindo a coloração de $B_{\sigma(T)}$ simplesmente trocando as cores dos blocos de B_T , tem-se que essa coloração de $B_{\sigma(T)}$ coincide com a coloração local dada pelos blocos ricos de $B_{\sigma(T)}$. Sendo assim, tem-se que são satisfeitos os itens (a) e (b) do lema anterior para $B_{\sigma(T)}$, permitindo concluir que $\sigma(T)$ também é uma cobertura parcial reduzida.

Bibliografia

- [1] Golomb, Solomon W. ***Polyominoes: puzzles, patterns, problems, and packings***. Volume 16, Princeton University Press, 1996.
- [2] Aigner, Martin. ***A course in enumeration***. Volume 238, Springer Science & Business Media, 2007.
- [3] Jurkiewicz, Samuel. ***Grafos - Uma introdução***. OBMEP, 2009.
- [4] Filho, José Armando Barbosa. ***Como cobrir tabuleiros***. OBM, 2012.
- [5] Campos, Onofre e Shine, Carlos. ***Poliminós e o tabuleiro de xadrez***. OBM, 2004.
- [6] Santos, José Plínio O. e Mello, Margarida P. e Murari, Idani T. C. ***Introdução à Análise Combinatória***. isbn: 9788573936346, Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.
- [7] Martin, George. ***Polyominoes: A guide to puzzles and problems in tiling***. Cambridge University Press, 1991.
- [8] Guttmann, Anthony J. ***History and introduction to polygon models, polyominoes and polyhedra***. 2008.
- [9] Dudeney, H. E. ***The Canterbury Puzzles (and Other Curious Problems)***. EP Dutton, New York, 1908.
- [10] Golomb, Solomon W. ***Checker boards e polyominoes***. The American Mathematical Monthly, Volume 61, Número 10, Páginas: 675-682, Taylor & Francis, 1954.
- [11] Fisher, Michael E. ***Statistical mechanics of dimers on a plane lattice***. Physical Review, APS, Volume 124, Número 6, Página: 1664, 1961.
- [12] Elkies, Noam e Kuperberg, Greg e Larsen, Michael e Propp, James. ***Alternating-sign matrices and domino tilings (Part I)***. Journal of Algebraic Combinatorics, Springer, Volume 1, Número 2, Páginas: 111-132, 1992.
- [13] Elkies, Noam e Kuperberg, Greg e Larsen, Michael e Propp, James. ***Alternating-sign matrices and domino tilings (Part II)***. Journal of Algebraic Combinatorics, Springer, Volume 1, Número 3, Páginas: 219-234, 1992.