

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Diego Lemos Teixeira

Notas Sobre Fractais e Espirais

Rio de Janeiro
2019



Diego Lemos Teixeira

Notas Sobre Fractais e Espirais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Dr^a. Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa

Rio de Janeiro
2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

T266	<p>Diego Lemos Teixeira Notas sobre fractais e espirais / Diego Lemos Teixeira. – Rio de Janeiro, 2019. 166 f.</p> <p>Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Orientador: Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa.</p> <p>1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Fractais. 3. Polígonos. I. Costa, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. II. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 510</p>
------	--

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves da Silva – CRB7 5692.

Diego Lemos Teixeira

Notas Sobre Fractais e Espirais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: ____/____/____.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. Liliana Manuela Gaspar Cerveira
da Costa
PROFMAT - Colégio Pedro II

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Diego de Souza Nicodemos
PROFMAT - Colégio Pedro II

Prof^a Dr^a. Patrícia Erthal de Moraes
PROFMAT - Colégio Pedro II

Rio de Janeiro
2019

Este trabalho é dedicado a todos que estudam e amam as Geometrias, seus objetos e propriedades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por mais esta conquista. Em segundo lugar aos meus pais, Ivan Ribeiro Teixeira e Izabel Lemos, que me transmitiram o valor da educação e determinação para sempre buscar novos desafios. À eles, aos meus irmãos, familiares e principalmente minha esposa, Maryani Rodrigues da Rosa Palhares, pela compreensão e apoio em todas as horas, para que eu pudesse realizar esse trabalho.

À professora Liliana Manuela Gaspar Cerveira da Costa, pelo auxílio ao aceitar o tema proposto até a conclusão desta dissertação. Por acreditar em mim e pela condução desse trabalho com muita dedicação, incentivo, paciência e carinho.

Ao apoio e interesse dos alunos do Colégio AlfaCem que, assim como eu, se apaixonaram pela Geometria Fractal e passaram a ver o mundo com novos olhos e a matemática com uma nova roupagem, e realizaram, com minha supervisão, suas próprias pesquisas sobre as aplicações dos Fractais em nosso dia-a-dia. Agradeço ao coordenador de área, Marcelo Ciancio, por incentivar e acreditar em aulas não tradicionais e por me mostrar que os alunos também são pesquisadores. Também devo agradecer a professora Beatriz Mamede que participou ao meu lado das atividades e palestras desenvolvidas e apresentadas durante a pesquisa.

Aos professores do PROFMAT que contribuíram com meu crescimento acadêmico e aos colegas de turma que estiveram presentes durante a realização do curso.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, participaram direta ou indiretamente no desenvolvimento e conclusão desta dissertação.

“Cem vezes todos os dias lembro a mim mesmo que minha vida interior e exterior, depende dos trabalhos de outros homens, vivos ou mortos, e que devo esforçar-me a fim de devolver na mesma medida que recebi”.

(Albert Einstein)

RESUMO

Teixeira, Diego Lemos. *Notas Sobre Fractais e Espirais*. 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Geometria Fractal é a geometria que estuda formas geométricas obtidas através de processos recursivos, iterativos ou processos aleatórios, tais objetos são frequentemente encontrados na natureza, pode-se tomar como exemplo, o limite de algum litoral ou os galhos de uma árvore. Ela é a geometria do acaso, das autossemelhanças e da dimensão fracionária. Muitos dos elementos da geometria Fractal podem ser obtidos a partir de objetos da geometria Euclidiana, por exemplo, de polígonos e círculos. Este trabalho apresenta alguns dos principais fractais gerados a partir de polígonos regulares, a biografia dos matemáticos envolvidos em suas descobertas e seus processos recursivos, além de propriedades geométricas e algébricas dos mesmos. Por fim será apresentada uma série de atividades para sala de aula, realizadas com auxílio do software GeoGebra, nas quais se encontram maneiras de apresentar a geometria Fractal e de introduzir a pesquisa matemática junto dos alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Fractal; Polígonos Regulares; Função Iterativa; Autossemelhança.

ABSTRACT

Teixeira, Diego Lemos. *Notas Sobre Fractais e Espirais*. 2019. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós- Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Fractal Geometry is the geometry that studies geometric shapes obtained through recursive, iterative or random processes, such objects are often found in nature, one can take as an example the boundary of some coastline or the branches of a tree. It is the geometry of chance, self-similarity, and the fractional dimension. Many of the elements of Fractal geometry can be obtained from Euclidean geometry objects, for example polygons and circles. This paper presents some of the main fractals generated from regular polygons, the biography of the mathematicians involved in their discoveries and their recursive processes, as well as their geometric and algebraic properties. Finally, a series of classroom activities will be presented, carried out with the aid of GeoGebra software, in which there are ways to present Fractal geometry and introduce mathematical research to high school students.

Keywords: Fractal; Regular Polygons; Iterative Function; Self Similarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Processo recursivo	20
Figura 2 – Conjunto de Cantor	21
Figura 3 – Imagem de satélite do rio Nilo (Egito)	22
Figura 4 – Passos iniciais da construção da curva do Dragão	23
Figura 5 – Curva do Dragão de Harter-Heighway	23
Figura 6 – Conjunto de Mandelbrot	24
Figura 7 – Ampliações no conjunto de Mandelbrot	24
Figura 8 – Conjunto de Julia	25
Figura 9 – Folha seca	25
Figura 10 – Cobertura sobre uma linha	27
Figura 11 – Divisão de um segmento de reta em 4 partes congruentes	27
Figura 12 – Divisão de um quadrado em 4 quadrados congruentes	28
Figura 13 – Cubo dividido em 8 cubos congruentes	29
Figura 14 – Esponja de Menger	29
Figura 15 – Tecido bucal saudável x Tecido bucal com neoplasia	30
Figura 16 – Antena com padrão da curva de Koch	31
Figura 17 – Antena de celular com padrão do Tapete de Sierpinski	31
Figura 18 – Primeiros passos da construção da curva de Koch	33
Figura 19 – Curva de Koch	34
Figura 20 – Função de Weierstrass	34
Figura 21 – Construção do floco de neve de Koch	35
Figura 22 – Flocos de neve	35
Figura 23 – Mosaico do floco de neve de Koch	36
Figura 24 – Construção da Anti-snowflake	37
Figura 25 – Anti-snowflake	37
Figura 26 – Pentaflake	38
Figura 27 – Sequência de Triângulos	39
Figura 28 – Espiral de Padovan e ampliação da região central	39
Figura 29 – Gráficos das funções polinomiais	41
Figura 30 – Espiral tripla de Padovan	42
Figura 31 – Triângulo de Sierpinski	42
Figura 32 – Basílica de São Clemente, Roma (séc XI)	43
Figura 33 – Catedral Civita Castellana, Civita Castellana (séc X)	43
Figura 34 – Triângulo de Pascal	44
Figura 35 – Números ímpares no Triângulo de Pascal	44
Figura 36 – Múltiplos de 3 no triângulo de Pascal	45

Figura 37 – Múltiplos de 4 no triângulo de Pascal	45
Figura 38 – Múltiplos de 5 no triângulo de Pascal	45
Figura 39 – Primeiros passos do Jogo do Caos	46
Figura 40 – Triângulo de Sierpinski pelo Jogo do Caos	47
Figura 41 – Construção do triângulo de Sierpinski	48
Figura 42 – Circunferências formando o triângulo de Sierpinski	49
Figura 43 – Ampliações no triângulo de Sierpinski	49
Figura 44 – Espiral de Teodoro	50
Figura 45 – Arcos sobre hipotenusas	51
Figura 46 – Caracol Nautilus	51
Figura 47 – Triângulo áureo	52
Figura 48 – Pentágono e suas diagonais	52
Figura 49 – Pentagrama regular	53
Figura 50 – Bissetrizes dos ângulos	54
Figura 51 – Sequência de triângulo áureos	54
Figura 52 – Ponto de convergência dos triângulos áureos	55
Figura 53 – Espiral sobre triângulos áureos	55
Figura 54 – Primeiro mapeamento da curva de Peano	56
Figura 55 – Segundo mapeamento da curva de Peano	57
Figura 56 – Curva de Peano	57
Figura 57 – Primeiro, segundo e terceiro mapeamentos da curva de Hilbert	58
Figura 58 – Curva de Hilbert	58
Figura 59 – Primeiros passos da construção da curva de Sierpinski	59
Figura 60 – Primeiro passo da construção do tapete de Sierpinski	59
Figura 61 – Primeiros passos da construção do tapete de Sierpinski	60
Figura 62 – Tapete de Sierpinski	61
Figura 63 – Primeiros passos da construção da árvore de Pitágoras	62
Figura 64 – Árvore de Pitágoras	62
Figura 65 – Áreas dos quadrados na árvore de Pitágoras	63
Figura 66 – Árvore de Pitágoras 3-4-5	64
Figura 67 – Árvore de Pitágoras variação 1	64
Figura 68 – Árvore de Pitágoras variação 2	64
Figura 69 – Sequência de quadrados	65
Figura 70 – Medidas das diagonais	66
Figura 71 – Espirais do dobro da área	67
Figura 72 – Espirais tendendo ao centro	67
Figura 73 – Esquematização dos coelhos	68
Figura 74 – Representação geométrica da sequência de Fibonacci	69
Figura 75 – Espiral Áurea	70

Figura 76 – Mona Lisa (da Vinci - 1503)	70
Figura 77 – Passos iniciais da Fibonacci word	71
Figura 78 – Relação entre f_n e F_n	72
Figura 79 – Autossemelhança da curva	72
Figura 80 – Fibonacci word fractal	72
Figura 81 – Proporções do Fibonacci word	73
Figura 82 – Fibonacci snowflakes	73
Figura 83 – Heptaflake, octaflake e eneaflake	74
Figura 84 – Fibonacci word fractal em octógonos	74
Figura 85 – Padrão de Sierpinski no pentágono regular	75
Figura 86 – Curva de Peano - Gosper	75
Figura 87 – Fractal Monkey’s Tree curve	76
Figura 88 – Fractal Snowflake Sweeps	76
Figura 89 – Passo inicial da construção da sequência de quadrados	77
Figura 90 – Vértices dos quadrados sobre espirais	78
Figura 91 – Modificação das distâncias entre vértices	78
Figura 92 – Passo inicial da construção da sequência de pentágonos	79
Figura 93 – Segundo passo da construção da sequência de pentágonos	79
Figura 94 – Terceiro passo da construção da sequência de pentágonos	80
Figura 95 – Passos avançados da construção da sequência de pentágonos	80
Figura 96 – Espiral interna do pentágono	81
Figura 97 – Espiral interna do pentágono, $a = 2, 2$	81
Figura 98 – Vértices sobre pontos médios	82
Figura 99 – Ferramenta Polígono Regular	82
Figura 100 – Espirais internas do hexágono e heptágono	83
Figura 101 – Espirais internas do octógono e eneágono	83
Figura 102 – Suculenta e cone de Pinheiro	84
Figura 103 – Sequência de circunferências	84
Figura 104 – Circunferências tendem aos pontos A e B $a = 0$	85
Figura 105 – Sequência de circunferências primeiras variações	85
Figura 106 – Interseção entre as circunferências	86
Figura 107 – Entrelaçamento fractal $a = 5.6$	86
Figura 108 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 5.6$	87
Figura 109 – Entrelaçamento fractal $a = 6.3$	87
Figura 110 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 6, 3$	88
Figura 111 – Entrelaçamento fractal $a = 6.5$	88
Figura 112 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 6.5$	88
Figura 113 – Entrelaçamento fractal $a = 6.7$	89
Figura 114 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 6.7$	89

Figura 115–Entrelaçamento fractal $a = 6.8$	90
Figura 116–Entrelaçamento fractal $a = 6.9$	90
Figura 117–Estágio final $a = 7$	91
Figura 118–Espirais de circunferências $n = 3$ e $a = 1.3$	91
Figura 119–Entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 3.3$	91
Figura 120–Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 3.3$	92
Figura 121–Entrelaçamento fractal $a = 4,2$ e $n = 3$	92
Figura 122–Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 4.2$	92
Figura 123–Entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 5.7$	93
Figura 124–Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 5.7$	93
Figura 125–Entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 6.7$	93
Figura 126–Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 6.7$	94
Figura 127–Estágio final $n = 3$ e $a = 6.9$	94
Figura 128–Triângulo de Releaux	95
Figura 129–Centro do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 6.9$	95
Figura 130–Triângulo de Releaux no centro do entrelaçamento $n = 3$ e $a = 7$. . .	95
Figura 131–Centro do Entrelaçamento fractal $n = 4$ e $a = 6.9$	96
Figura 132–Quadrado de Reuleaux no centro do entrelaçamento $n = 4$ e $a = 7$. . .	96
Figura 133–Centro do entrelaçamento fractal $n = 5$ e $a = 6.9$	96
Figura 134–Pentágono de Reuleaux no centro do entrelaçamento $n = 5$ e $a = 7$. .	97
Figura 135–Centro do Entrelaçamento fractal $n = 6$ e $a = 6,9$	97
Figura 136–Ampliação do centro do Entrelaçamento fractal $n = 7$ e $a = 6,9$	98
Figura 137–Centro do entrelaçamento fractal $n = 7$ e $a = 6.9$	98
Figura 138–Centro do entrelaçamento fractal $n = 8$ e $a = 6.9$	99
Figura 139–Centro do entrelaçamento fractal $n = 9$ e $a = 6.9$	99
Figura 140–Primeiro passo da autossemelhança do pentágono regular	100
Figura 141–Transformações do pentágono regular	100
Figura 142–Autossemelhança interna do pentágono	101
Figura 143–Passo inicial da autossemelhança do hexágono regular	101
Figura 144–Autossemelhança do hexágono regular	102
Figura 145–Padrão de autossemelhança do heptágono e do octógono regular	102
Figura 146–Padrão de autossemelhança do eneágono e do decágono regular	103
Figura 147–Diagonais do heptágono regular	103
Figura 148–Diagonais distintas do decágono regular	104
Figura 149–Interseções das diagonais do decágono regular	104
Figura 150–Caixa de texto: explicação de uso	106
Figura 151–Controle Deslizante	107
Figura 152–Configurações do Controle Deslizante	107
Figura 153–Aba Animação	108

Figura 154– Objeto Controle	108
Figura 155– Ferramentas Segmento e Segmento com Comprimento Fixo	108
Figura 156– Segmento AB	109
Figura 157– Comprimento do Segmento	109
Figura 158– Ferramenta Ponto Médio ou Centro	110
Figura 159– Explicações de uso Ponto Médio ou Centro	110
Figura 160– Ferramenta Polígono Regular	110
Figura 161– Ferramentas Círculo dados Centro e Raio e Compasso	111
Figura 162– Medida do Raio	111
Figura 163– Criar uma Nova Ferramenta	112
Figura 164– Ferramenta Polígono Regular	113
Figura 165– Ferramenta Segmento	113
Figura 166– Diagonais do pentágono	114
Figura 167– Objetos selecionados	114
Figura 168– Opção Criar Nova Ferramenta	115
Figura 169– Aba Objetos Finais	115
Figura 170– Aba Objetos Iniciais	116
Figura 171– Aba Nome e Ícone	116
Figura 172– Ícone da nova ferramenta	116
Figura 173– Curva de Koch - Primeiro passo	117
Figura 174– Ferramenta Interseção de Dois Objetos	117
Figura 175– Curva de Koch - Segundo passo da construção	118
Figura 176– Opção Exibir Objeto	118
Figura 177– Objetos ocultos	119
Figura 178– Opção Propriedades	119
Figura 179– Propriedades do segmento CD	119
Figura 180– Objetos selecionados	120
Figura 181– Opção Criar uma Nova Ferramenta	121
Figura 182– Nome e Ícone da Ferramenta	121
Figura 183– Nova ferramenta	122
Figura 184– Ferramenta aplicada sobre AC	122
Figura 185– Ferramenta aplicada sobre os demais segmentos	122
Figura 186– Nova ferramenta Koch 2	123
Figura 187– Segmento antes da aplicação da ferramenta Koch 2	123
Figura 188– Segmento depois de aplicada a ferramenta Koch 2	124
Figura 189– Representação gráfica da curva de Koch Primeira aplicação	124
Figura 190– Representação gráfica da curva de Koch segunda aplicação	124
Figura 191– Pontos ocultos (ampliação da parte superior da curva)	125
Figura 192– Representação gráfica da curva de Koch no GeoGebra	125

Figura 193 – Vértices selecionados	126
Figura 194 – Ferramenta Koch 2 aplicada sobre os lados do triângulo equilátero . . .	126
Figura 195 – Representação gráfica do floco de neve de Koch	127
Figura 196 – Floco de neve de Koch inscrito na circunferência	128
Figura 197 – Selecionando os vértices da esquerda para a direita	129
Figura 198 – Linha poligonal interna ao triângulo	129
Figura 199 – Primeira aplicação da ferramenta	130
Figura 200 – Aplicação da ferramenta em alguns segmentos	130
Figura 201 – Koch antisnowflake segundo passo concluído	131
Figura 202 – Koch antisnowflake	131
Figura 203 – Ferramenta aplicada em quadrados	132
Figura 204 – Ferramenta aplicada em pentágonos	132
Figura 205 – Ferramenta aplicada em hexágonos	133
Figura 206 – Triângulo equilátero inscrito no hexágono regular	133
Figura 207 – Espiral de Padovan	134
Figura 208 – Ferramenta Texto	135
Figura 209 – Janela de Texto	135
Figura 210 – Texto	136
Figura 211 – Propriedades da caixa de texto	136
Figura 212 – Plano de fundo com cor modificada	137
Figura 213 – Sequência de triângulos primeiro passo	137
Figura 214 – Sequência de triângulos segundo passo	138
Figura 215 – Sequência de triângulos quatro primeiros termos	138
Figura 216 – Sete primeiros termos dispostos em espiral	138
Figura 217 – Triângulos coloridos em espiral	139
Figura 218 – Exibir planilha	140
Figura 219 – Planilha do GeoGebra	141
Figura 220 – Comando na planilha	141
Figura 221 – Resultado do comando	142
Figura 222 – Coluna selecionada	142
Figura 223 – Valor da célula A8	142
Figura 224 – Comando na célula B4	143
Figura 225 – Coluna B com termos da sequência de Padovan	143
Figura 226 – Sequência das razões	144
Figura 227 – Sequência das inversos	145
Figura 228 – Distância entre curva e pontos	146
Figura 229 – Função $a = 1$	147
Figura 230 – Função $a = 0.7$	148
Figura 231 – Ponto fora do gráfico escala modificada	148

Figura 232–Triângulo equilátero e pontos médios dos lados	149
Figura 233–Triângulo equilátero inscrito	150
Figura 234–Propriedades do polígono 2	150
Figura 235–Triângulo com região central vazia	151
Figura 236–Utilizando a ferramenta Sierpinski	151
Figura 237–Ferramenta Sierpinski aplicada	152
Figura 238–Ferramenta Sierpinski 2 aplicada	152
Figura 239–Representação gráfica do triângulo de Sierpinski no Geogebra	152
Figura 240–Triângulo de lado unitário	154
Figura 241–Ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro	154
Figura 242–Segundo passo da construção	155
Figura 243–Segmento com fator de redução $1/3$	156
Figura 244–Quadrado com fator de redução $1/2$	157
Figura 245–Cubo com fator de redução $1/3$	157
Figura 246–Medidas dos segmentos	158
Figura 247–Terceiro passo da construção	158
Figura 248–Quarto passo da construção	159
Figura 249–Representação gráfica do tapete de Sierpinski no Geogebra	160
Figura 250–Quadrado dividido em 9 quadrado congruentes	161
Figura 251–Quadrado sem região central	161
Figura 252–Aplicação da nova ferramenta	161

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	FRACTAIS: NOÇÕES BÁSICAS	20
2.1	Exemplo de Fractais	22
2.1.1	Curva do Dragão De Harter-Heighway	22
2.1.2	Conjunto de Mandelbrot	24
2.1.3	Fractais na Natureza	25
2.2	Dimensão Fractal	26
3	FRACTAIS: TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS E QUADRADOS	33
3.1	Triângulos Equiláteros	33
3.1.1	Curva de Koch	33
3.1.2	Sequência de Padovan	38
3.1.3	Triângulo de Sierpinski	42
3.1.3.1	Jogo do Caos	46
3.1.3.2	Triângulo de Sierpinski: Processo Recursivo e Propriedades	47
3.2	Espirais de Triângulos	50
3.2.1	Espiral de Teodoro	50
3.2.2	Espiral do Triângulo Áureo	52
3.3	Quadrado	56
3.3.1	Curva de Hilbert e Curva de Peano	56
3.3.2	Tapete de Sierpinski	59
3.3.3	Árvore de Pitágoras	61
3.4	Espirais de Quadrados	65
3.4.1	Espiral do Dobro da Área	65
3.4.2	Espiral de Fibonacci	68
3.4.3	Fractal Fibonacci Word	71
4	FRACTAIS EM POLÍGONOS REGULARES	74
4.1	Espirais Internas de um Polígono Regular	77
4.2	Entrelaçamento Fractal	84
4.3	Autossemelhança Sobre as Diagonais	99
5	ATIVIDADES PARA SALA DE AULA	106
5.1	Ferramentas do GeoGebra	106
5.2	Construções e Atividades	112
5.2.1	Utilizando a Opção Criar Nova Ferramenta	113

5.2.2	Construção da curva de Koch	117
5.2.3	Construção do floco de neve de Koch	126
5.2.3.1	Atividades Relacionadas ao floco de neve de Koch	128
5.2.4	Construção da Sequência e da Espiral de Padovan	134
5.2.4.1	Construção da sequência de Padovan no GeoGebra	134
5.2.4.2	Atividade com a sequência de Padovan	140
5.2.5	Construção do Triângulo de Sierpinski	149
5.2.5.1	Atividade com Triângulo de Sierpinski	153
5.2.6	Construção e Atividade com Tapete de Sierpinski	160
6	CONCLUSÃO	163
	REFERÊNCIAS	164

1 INTRODUÇÃO

A geometria fractal envolve objetos matemáticos de grande complexidade, assim é oportuno questionar: Porque falar em fractais no Ensino Básico? Em que medida esta temática está contemplada nos documentos oficiais que norteiam a educação brasileira? Tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM) como a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) referem o recurso aos fractais no EM, e nesses encontram-se as seguintes passagens:

São apresentados, a seguir, tópicos que podem servir muito bem aos propósitos das feiras e dos clubes de ciências, ou para atividades em laboratórios de Matemática, ou ainda para compor, de forma interdisciplinar, a parte diversificada do currículo. Alguns desses tópicos também servem para trabalhar as aplicações matemáticas. Em outros tópicos, tem-se o aspecto artístico e lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos. (BRASIL, 1998, p. 92)

(...) Na direção de valorização da Matemática, no seu aspecto estético, existem alguns vídeos que podem servir como ponto de partida de discussão de assuntos tais como simetrias, fractais, o número de ouro, etc. (BRASIL, 1998, p. 93)

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral. (BRASIL, 2016, p. 532)

Habilidade (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). (BRASIL, 2016, p. 533)

É comum encontrar estruturas fractais em exercícios que abordam progressões geométricas, utilizando as fórmulas apropriadas os alunos resolvem as questões e não percebem a natureza e as propriedades da estrutura fractal que ali se encontra. Seria este o momento de apresentar aos alunos essa “outra geometria”? Apresentando, deste modo, outras vertentes da matemática, aguçando sua curiosidade e abrindo horizontes a possíveis jovens pesquisadores. No primeiro capítulo do livro “Fractals Everywhere”, do matemático britânico Michael Barnsley (1946) pode encontrar-se a seguinte afirmação:

A geometria fractal fará com que você veja as coisas (de modo) diferente. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma. (BARNSELEY, 1993, p. 1)

A associação da matemática a cálculos fastidiosos e à manipulação de expressões algébricas extensas sem um objetivo expresso, provoca o desinteresse e a desmotivação por

parte de muitos alunos. Por outro lado, é pouco habitual o professor deter-se e promover a curiosidade do aluno pela descoberta do processo que conduz até uma fórmula, das justificativas que permitem uma construção geométrica ou da explicação que o funcionamento de uma ferramenta encerra. Na realidade, os estudantes não reconhecem o uso da matemática no dia a dia e não sabem como ela se encontra na natureza.

Questionado uma vez por um aluno, que gostaria de saber se a matemática realmente existia na natureza, ou era fruto da mente humana, a fim de sanar a dúvida desse aluno apresentei para a turma os fractais encontrados na natureza, como rios e árvores, e a resposta dessa turma foi positiva em relação a esses novos objetos até então desconhecidos, e eles me perguntaram como esses objetos tinham sido descobertos e estudados. A partir desse momento iniciei uma trajetória que inclui a busca pela história dos fractais, suas propriedades e possíveis aplicações no dia a dia.

Durante essa busca surgiu um grupo específico de fractais que são obtidos através de processos iterativos aplicados em polígonos regulares. Sendo os polígonos regulares um assunto presente na geometria estudada no ensino médio, pareceu oportuno focar a atenção na forma de apresentar a construção e o estudo desses fractais aos alunos. Utilizando o software GeoGebra é possível construir os mais diversos fractais de maneira simples e rápida. A escolha do GeoGebra se deu por ser de livre acesso, e pela facilidade de utilização e aprendizagem de suas principais funções e ferramentas, aspecto que é fundamental em uma atividade em sala de aula, já que por muitas vezes o tempo de trabalho é curto.

Neste trabalho serão apresentadas a história, propriedades e construções dos mais importantes fractais obtidos a partir de polígonos regulares, iniciando pelo triângulo equilátero, seguindo para fractais obtidos a partir de quadrados e continuando, depois, para os demais polígonos regulares, com um número de lados superior a 4. Também serão estudadas as espirais associadas a esses polígonos já que elas são curvas que aparecem frequentemente associadas aos fractais.

No capítulo 2, apresentam-se as noções básicas de processo recursivo e processo iterativo, ferramentas fundamentais na construção de um fractal. Também serão apresentados tipos diferentes de autossimilaridade, que é uma das principais características dos fractais, e isso será feito a partir da apresentação de exemplos.

Ao decorrer dos capítulos 3 e 4 serão apresentados os fractais que podem ser gerados a partir de polígonos regulares, além de um estudo sobre espirais associadas a esses polígonos, apontando suas características, propriedades e história.

No capítulo 5 tem-se o passo a passo da utilização das ferramentas do GeoGebra e a construção de alguns dos fractais apresentados no capítulo 3. Ainda no capítulo 5 são apresentadas propostas de atividades para sala de aula, envolvendo construções no GeoGebra, cálculo de áreas e o limite da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica.

2 FRACTAIS: NOÇÕES BÁSICAS

Fractal é um objeto que pode ser obtido através de relações de recorrência ou de uma função iterada ou por padrões aleatórios. Essas construções são denominadas **processos recursivos**, que são repetições de imagens ou de algum algoritmo predeterminado. Um exemplo de processo recursivo é a sequência de Fibonacci, onde são dados dois termos iniciais e a partir desses cada termo é a soma dos dois termos anteriores:

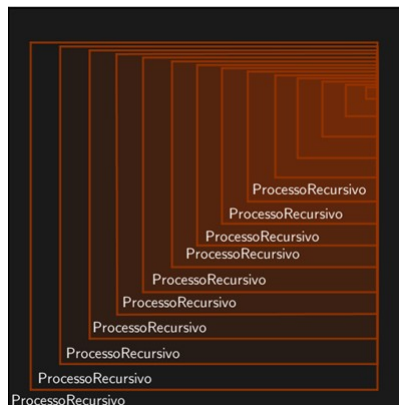
$$F_1 = 1; F_2 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$$

ou seja, é a sequência

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

É comum encontrar construções obtidas por processos recursivos em artes gráficas (Figura 1).

Figura 1 – Processo recursivo



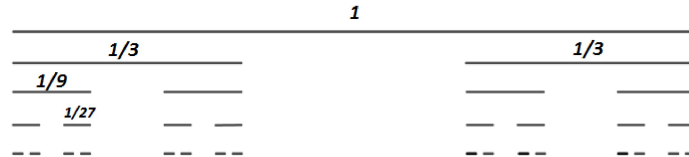
Fonte: O autor, 2019

Como é possível observar na Figura 1, independente do número de vezes que a imagem seja ampliada sempre haverá partes idênticas ou similares ao todo (estrutura completa do objeto), isto traduz uma consequência do processo de construção recursivo e que se relaciona com a principal característica dos fractais, sua autossimilaridade. Um objeto, ou figura, é dito autossimilar quando apresenta, em diferentes escalas, o mesmo aspecto visual, ou seja, quando uma determinada parte do objeto é semelhante ao todo. Segundo Nunes (2006) a *autossimilaridade* de um objeto pode ser classificada de duas maneiras: autossimilaridade exata e autossimilaridade estatística.

A autossimilaridade exata está presente em objetos gerados a partir de um processo iterativo, tais objetos são formados por cópias perfeitas do todo, por exemplo, o conjunto

de Cantor (Figura 2). Nesse tipo de construção tem-se um objeto inicial e sobre este aplica-se uma regra fixa de substituição gerando novos objetos semelhantes ao inicial, e sobre esses novos objetos repete-se o processo indefinidamente.

Figura 2 – Conjunto de Cantor



Fonte:O autor, 2019

O Conjunto de Cantor é um fractal gerado por infinitas partições do intervalo $[0, 1]$. Definido pelo matemático alemão Georg Cantor (1845 - 1918), como o limite do seguinte processo: Toma-se o conjunto inicial $A_0 = [0, 1]$, ao dividir esse intervalo em 3 partes iguais e retirando o terço central, um intervalo aberto denominado terço médio, obtêm-se o subconjunto:

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Agora basta repetir o processo nos intervalos que compõem o subconjunto acima, obtendo o subconjunto A_2 definido da seguinte forma:

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

O processo pode ser repetido sucessivamente, o que define a construção por uma função iterada (uma regra fixa de substituição), assim no n -ésimo passo da construção o subconjunto A_n é formado pela divisão de cada um dos intervalos que foram gerados no passo anterior em três partes iguais e excluindo o terço médio de cada um deles. A cada nova etapa da iteração, cada intervalo é substituído por 2 intervalos, ou seja, o número de intervalos duplica em cada iteração, logo o subconjunto A_n é formado por 2^n intervalos fechados. Perceba que ao retirar intervalos abertos, os extremos de cada intervalo pertencem à iteração seguinte, assim pode pensar-se na interseção de todos os subconjuntos A_0, A_1, \dots, A_n que vão sendo sucessivamente obtidos. Desta forma se obtém o conjunto de Cantor, que é definido pela interseção infinita dos subconjuntos que são gerados pelo processo iterativo.

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

Também é possível encontrar autossimilaridade nas formas geométricas da natureza, por exemplo, o curso de um rio, um raio, as nuvens, etc. Tais objetos são obtidos por processos estocásticos, ou seja, são gerados por uma coleção de variáveis aleatórias que representam a evolução de um sistema, e são, por isso, denominados Fractais Aleatórios. Estes apresentam autossimilaridade estatística, onde o objeto apresenta medidas estatísticas¹, ou numéricas, que se preservam em diferentes escalas.

Para estas formas da natureza, a noção de auto-similaridade deve ser vista cuidadosamente e deve ser encarada como auto-similaridade aproximada (ou estatística), uma vez que, partes destas figuras têm a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica mas não são réplicas exatas destas.(NUNES, 2006, p. 32).

Figura 3 – Imagem de satélite do rio Nilo (Egito)



Fonte: <<http://cienciahoje.tumblr.com/page/22>> Acesso em dez. 2018

Estes objetos possuem aparência e características semelhantes por possuírem o mesmo processo de construção, um ramo principal que se divide em ramificações cada vez menores mantendo uma autossimilaridade estatística entre ramos consecutivos.

2.1 Exemplo de Fractais

O estudo de fractais ajuda no entendimento de algumas estruturas encontradas na natureza e como utilizá-las a nosso favor, além de revelar uma matemática que diverge das equações e expressões dos exercícios rotineiros. Os fractais apresentam a “arte” que existe na matemática e objetos que atraem a atenção de alunos, de qualquer segmento, até mesmo de pessoas leigas em matemática. A seguir tem-se alguns exemplos de fractais e seus processos de construção.

2.1.1 Curva do Dragão De Harter-Heighway

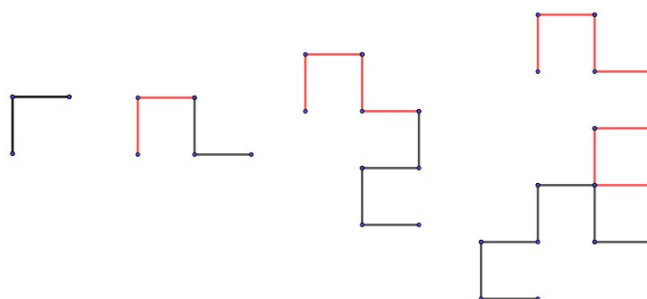
Definida na década de 60 pelos pesquisadores da NASA Jonh Heigway, Bruce Banks, William Harter e apresentada pelo matemático Martin Gardner (1914 - 2010)

¹ Estas podem ser obtidas por probabilidades ou tendências

em sua coluna “Mathematical Games” na revista Scientific American em 1967. Segundo Dalpiaz (2016) A curva do Dragão pode ser obtida, repetindo o seguinte processo².

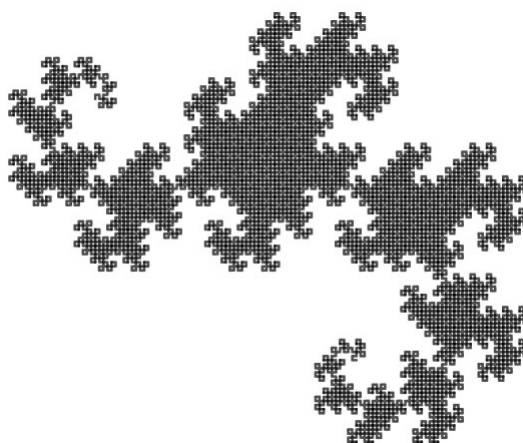
- i. Trace um segmento de reta e em um de seus extremos trace o segmento que se obtém ao rodá-lo 90° , no sentido anti-horário;
- ii. No extremo do último segmento de reta, represente os segmentos obtidos no 1º passo, aplicando uma rotação de 90° , no sentido anti-horário;
- iii. Repita o 2º passo indefinidamente.

Figura 4 – Passos iniciais da construção da curva do Dragão



Fonte: O autor, 2019

Figura 5 – Curva do Dragão de Harter-Heighway



Fonte: O autor, 2019

² Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/wups2hht>>

2.1.2 Conjunto de Mandelbrot

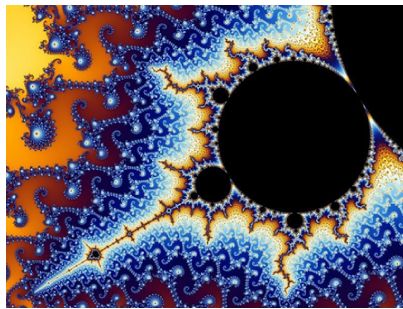
O conjunto de Mandelbrot foi um dos primeiros fractais “abstratos” a ser apresentado ao mundo, o que, aliado à sua beleza, fez com que se tornasse bastante popular fora da matemática. Ele é uma coleção de todos os possíveis conjuntos de Julia (Figura 8) e é definido no corpo complexo pela seguinte relação de recorrência.

$$z_0 = (0, 0) = 0$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \text{ com } c \in \mathbb{C}$$

Ao agrupar, no plano complexo, os afixos dos z_n obtidos pela recorrência anterior, para cada c fixo temos a representação gráfica do conjunto de Mandelbrot, porém só é possível observar essa representação quando a recorrência que define o conjunto é aplicada em um número suficientemente grande de pontos do plano complexo.

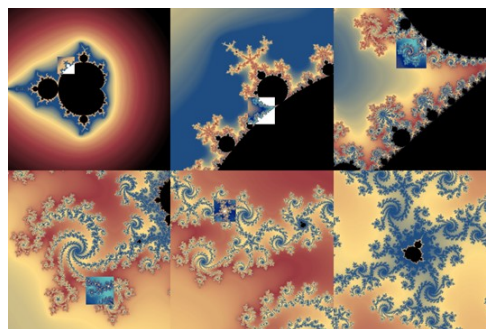
Figura 6 – Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Wolfgan Beyer. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set> Acesso em dez. 2018

Este fractal possui uma estrutura bem abstrata, a autossimilaridade é observável ao ampliar determinadas regiões do fractal e ao encontrar estruturas semelhantes ao todo (Figura 7).

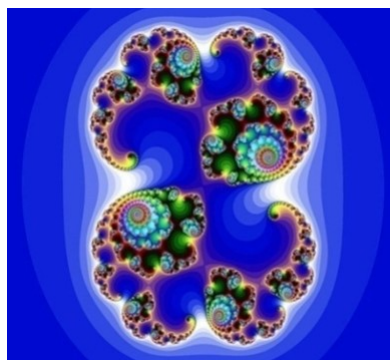
Figura 7 – Ampliações no conjunto de Mandelbrot



Fonte: <<http://www.malinc.se/m/Mandelbrot.php>> Acesso em dez. 2018

Como dito anteriormente, o conjunto de Mandelbrot é uma coleção de todos os possíveis conjuntos de Julia, fractal apresentado pelo matemático francês Gaston Maurice Julia (1893 - 1978) no artigo “Mémoire sur l’itération des Fonctions Rationnelles” publicado em 1918 no “Journal de Mathématiques Pures et Appliquées”.

Figura 8 – Conjunto de Julia



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Julia> Acesso dez. 2018

Para uma explicação mais detalhada sugere-se a leitura de Nunes (2006) e Mandelbrot (1977).

2.1.3 Fractais na Natureza

Na natureza, é possível encontrar os mais belos exemplos de construções e padrões fractais, e tais padrões podem ser observados do macro ao micro, de forma espetacular, nos relâmpagos, rios, litorais, corpo humano, galáxias, folhas (Figura 9), etc. Esses fractais são autoafins, ou seja, cópias distorcidas e reduzidas do todo e sua autossemelhança só é percebida estatisticamente.

Figura 9 – Folha seca



Fonte: <<http://aumagic.blogspot.com/2018/10/29-padroes-fractais-hipnotizantes.html>> Acesso em dez. 2018

2.2 Dimensão Fractal

A palavra **Fractal** foi utilizada pelo matemático francês Benoit B. Mandelbrot (1924 - 2010) em 1975 na primeira edição de seu livro “**The Fractal Geometry of Nature**”, o termo tem origem no adjetivo “fractus” que deriva do verbo “frangere” do latim cujo significado é quebrar, produzir pedaços irregulares. A ideia inicial de Mandelbrot surgiu quando ele se colocou a observar as formas geométricas encontradas na natureza, que não se assemelham em nada com as formas geométricas da geometria Euclidiana. Ao estudar a geometria da natureza, Mandelbrot descreveu os padrões irregulares e fragmentados dessa “nova geometria”, desenvolvendo teorias completas e apresentando aplicações. Mandelbrot (1977) definiu os fractais da seguinte forma: “**Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff excede, estritamente, a dimensão topológica**”³. Todo conjunto cuja dimensão de Hausdorff é um número não inteiro é um fractal”.

Segundo Mucheroni (2017), a dimensão segundo a geometria euclidiana se dá de modo intuitivo, por exemplo, zero para o ponto, um para a reta, dois para o plano, etc. Em “**Os Elementos – Livro I**” de Euclides (2009) (Matemático grego que viveu no século III a.c, as informações sobre sua vida pessoal são poucas e incertas, não se sabe ao certo os anos de seu nascimento e morte assim como sua cidade natal), encontram-se as seguintes definições:

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.;
2. Linha é comprimento sem largura;
3. Extremidades de uma linha são pontos;
4. Linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
5. Superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.

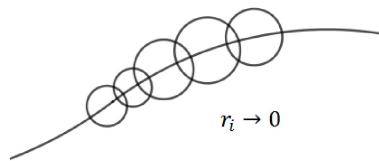
Na definição 1 Euclides define Ponto, elemento primordial da geometria, como um elemento que não possui partes, ou seja, que não é possível dividir em partes menores. A partir dessa definição associamos ao ponto a dimensão zero. Em seguida tem-se a definição de linha, sendo um objeto que possui somente comprimento, ou seja, à linha se associa apenas uma medida. Assim, a sua dimensão é igual a 1. A dimensão da superfície será 2, visto que um plano pode ser medido de duas maneiras diferentes, comprimento e largura. A “dimensão” aqui referida é a dimensão topológica.

Segundo Nunes (2006), a dimensão topológica de um objeto está relacionada com a forma que esse tende a ocupar o espaço, e uma maneira de se obter o valor numérico dessa

³ A dimensão de Hausdorff, conhecida por dimensão fractal, e a dimensão topológica serão apresentadas no decorrer dessa seção

dimensão é a partir de coberturas⁴. Para entender melhor esse conceito podemos pensar em um conjunto X com uma cobertura de circunferências, cujos raios tendem a zero, tal que existam $n + 1$ interseções entre essas circunferências, assim a dimensão de X é igual a n . Tomando como exemplo uma linha com uma cobertura de circunferências cujos raios tendem a zero (Figura 10), nessa cobertura, duas circunferências vizinhas possuem duas interseções, logo a dimensão topológica da linha é dada por $d_T = 2 - 1 = 1$. Para uma análise mais detalhada do assunto sugere-se a leitura de Nunes (2006, p.37).

Figura 10 – Cobertura sobre uma linha



Fonte: O autor, 2019

A dimensão de Hausdorff⁵ (d), ou dimensão fractal, é uma dimensão que pode tomar valores não inteiros maiores ou iguais à dimensão topológica. Segundo Nunes (2006) a dimensão fractal de um objeto pode ser obtida pela análise de uma partição desse mesmo objeto ao aplicar um fator de redução r , sobre o objeto a ser estudado. Com a aplicação do fator r obtém-se um número N de objetos semelhantes ao inicial (não distorcidos ou não rotacionados), por exemplo, o segmento de reta \overline{AB} (Figura 11), ao aplicar sobre este segmento um fator de redução igual a $1/4$, divide-se este em partes iguais, ou seja, obtém-se 4 novos segmentos semelhantes ao inicial.

Figura 11 – Divisão de um segmento de reta em 4 partes congruentes



Fonte: O autor, 2019

Pode escrever-se uma relação entre o fator de redução e o número de novos objetos obtidos:

$$\text{Fator de redução } r = \frac{1}{4} \text{ e o número de objetos } N = 4$$

Observe que N e r são grandezas inversamente proporcionais, assim tem-se que:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^1, \text{ ou seja, } 4 = \left(\frac{1}{1/4}\right)^1$$

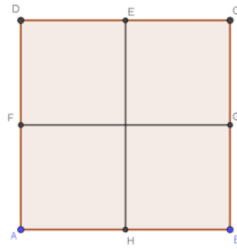
⁴ Por definição, cobertura de um conjunto X no plano ou no espaço é uma coleção A de bolas abertas de raio positivo tais que a sua união cobre X . (NUNES, 2006)

⁵ Nome dado em homenagem ao matemático alemão Feliz Hausdorff (1868-1942) (MUCHERONI, 2017, p. 45)

A dimensão de Hausdorff, de um segmento é igual a 1.

O mesmo processo pode ser utilizado em um objeto que possua alguma superfície plana, por exemplo, um quadrado. Aplica-se sobre os lados de um quadrado um fator de redução e analisa-se a quantidade de quadrados semelhantes ao inicial obtidos. Tomando como exemplo o quadrado $ABCD$ a seguir (Figura 12), aplicando sobre seus lados um fator $r = 1/2$ obtêm-se em seu interior 4 novos quadrados congruentes.

Figura 12 – Divisão de um quadrado em 4 quadrados congruentes



Fonte: O autor, 2019

Ao escrever a relação entre o fator de redução e o número de quadrados obtidos após a aplicação de tal fator percebe-se uma variação no expoente, visto que neste caso N é inversamente proporcional ao quadrado de r .

Fator de redução $r = \frac{1}{2}$ e o número de objetos $N = 4$

$$N = \frac{1}{r^2}, \text{ ou seja, } 4 = \left(\frac{1}{1/2}\right)^2$$

A dimensão de Hausdorff de um quadrado é igual a 2.

Generalizando o processo acima para um objeto qualquer, tem-se que a relação entre o número N de objetos semelhantes ao inicial, obtidos na primeira iteração e o fator de redução r indicará o valor da dimensão d do objeto, ou seja,

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^d$$

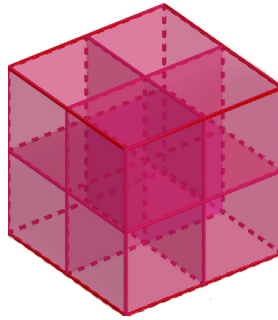
d é a dimensão fractal do objeto. A partir da equação anterior determina-se a dimensão fractal de qualquer objeto, para tal, basta calcular o expoente d .

$$\log(N) = \log\left(\frac{1}{r}\right)^d \Leftrightarrow \log(N) = d \cdot \log\left(\frac{1}{r}\right) \Leftrightarrow d = \frac{\log(N)}{\log(1/r)}$$

A relação acima permite o cálculo da dimensão fractal de qualquer objeto, por exemplo, um cubo. Dividindo-se as arestas de um cubo em 2 partes congruentes (fator de redução $1/2$), obtêm-se 8 cubos em seu interior (Figura 13), ou seja,

$$d = \frac{\log(8)}{\log(1/2)} = \frac{\log(2^3)}{\log(2)} = \frac{3 \cdot \log(2)}{\log(2)} \Leftrightarrow d_{cubo} = 3.$$

Figura 13 – Cubo dividido em 8 cubos congruentes



Fonte: O autor, 2019

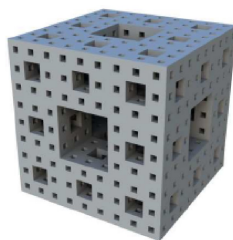
Utilizando-se a fórmula para calcular a dimensão dos fractais, por exemplo, o Conjunto de Cantor (apresentado anteriormente) cuja dimensão topológica é zero, já que o mesmo é formado por uma infinidade de pontos isolados de um segmento de reta. Observando o processo de construção do conjunto de Cantor tem-se inicialmente um segmento unitário que é dividido em 3 partes congruentes (fator de redução $1/3$), porém descarta-se o terço central restando dois novos segmentos semelhantes ao inicial ($N = 2$), substituindo na fórmula da dimensão obtêm-se:

$$d = \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{1/3})} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0,63092975\dots$$

O Conjunto de Cantor é um objeto cuja dimensão fractal é um número não inteiro entre zero e um. Muitos fractais possuem dimensão não inteira, tomando como exemplo a esponja Menger, um fractal tridimensional obtido da aplicação de um fator $r = \frac{1}{3}$ sobre as arestas de um cubo, obtendo em seu interior 27 cubos congruentes, porém retiram-se os cubos no centro de cada face e o cubo no centro do cubo inicial obtendo-se $N = 27 - 7 = 20$ cubos semelhantes, assim sua dimensão fractal é dada por.

$$d = \frac{\log(20)}{\log(\frac{1}{1/3})} = \frac{\log(20)}{\log(3)} = 2,726833028\dots$$

Figura 14 – Esponja de Menger

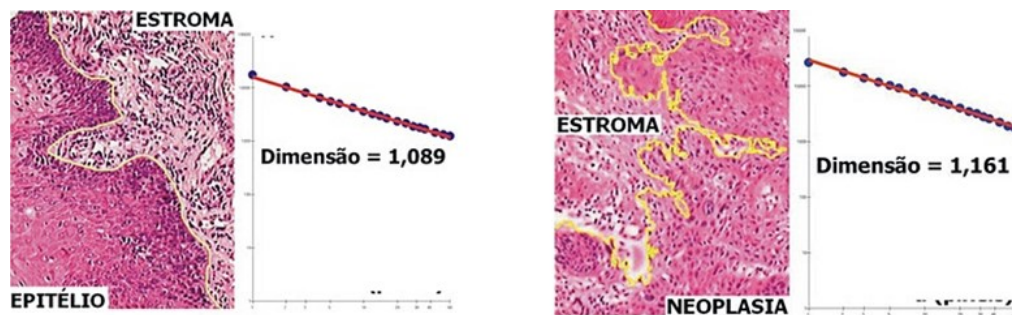


Fonte: Nunes, Raquel Sofia Rebelo. Geometria Fractal e Aplicações (2006) p. 19

A noção, ou definição, de dimensão pode mudar de acordo com a área de estudo, por exemplo, em um espaço vetorial a dimensão é dada pelo número de vetores que compõem uma base⁶; na geometria euclidiana a dimensão possui outro significado (como visto anteriormente). Qual será o significado da dimensão fractal? A dimensão desempenha um papel muito importante para o estudo dos fractais, pois nem sempre é possível associar aos fractais equações simples, mas é sempre possível calcular suas dimensões.

O estudo da dimensão fractal possibilitou o entendimento de tais objetos e como utilizá-los no nosso dia a dia, pode tomar-se como exemplo a utilização da dimensão fractal para detectar um possível câncer. Um grupo de médicos percebeu que o tecido que compõe o corpo humano é um fractal (encontram-se diferentes fractais para cada parte ou órgão do corpo humano) e o estudo da variação da dimensão desses fractais possibilita a identificação de patologias. Foi observado que um tecido saudável tem determinada dimensão fractal e que o aumento do valor dessa dimensão corresponderia a ser mais provável o surgimento de um câncer naquele local.

Figura 15 – Tecido bucal saudável x Tecido bucal com neoplasia



Fonte: <<http://parquedaciencia.blogspot.com/2011/09/fractais-matematica-ajudando-salvar.html>> Acesso em dez. 2018

Como pode observar-se nas imagens acima (Figura 15), o tecido com maior dimensão fractal apresenta uma neoplasia⁷ o que justifica a irregularidade do estroma⁸. Um estudo mais detalhado do assunto pode ser encontrado no artigo “**Lung cancer—a fractal viewpoint**” de Lennon e Cipriani (2015).

Outra aplicação do uso de fractais e suas dimensões, foi apresentada pelo rádio astrônomo Nathan Cohen (1962). Ele percebeu o incrível potencial de otimização dos fractais e construiu antenas que seguiam os padrões da curva Koch⁹ (Figura 16). Ao construir antenas utilizando padrões fractais Cohen constatou que as mesmas podiam ser menores e captar um maior número de frequências distintas (antena de banda larga).

⁶ Conjunto de vetores linearmente independentes que geram todos os vetores do espaço em questão, para maiores informações sobre assunto indica-se a leitura de ??)

⁷ Crescimento celular descontrolado

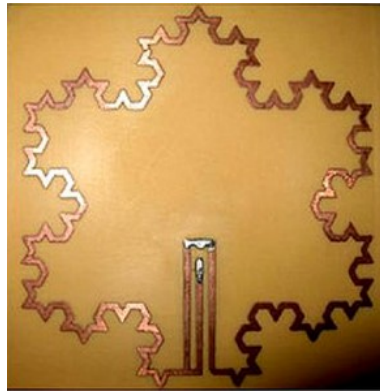
⁸ Tecido conjuntivo de sustentação de um órgão

⁹ Esse fractal será apresentado no capítulo 3

Em seu artigo “**Self-similarity and the Geometric Requirements for Frequency Independence in Antennae**”, Cohen e Hohlfeld (1998) mostram que para uma antena funcionar captando uma vasta gama de frequências é necessário haver autossimilaridade em sua estrutura, ou seja, é necessário que a antena seja construída com um padrão fractal. No mesmo artigo Cohen mostra a unicidade dessa construção, ou seja, uma antena só será do tipo banda larga, se for construída como um fractal.

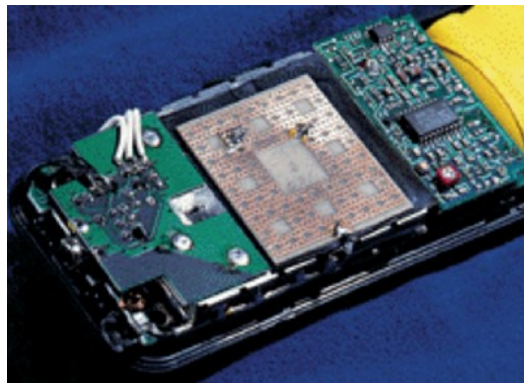
Essas novas antenas possibilitaram o avanço das tecnologias móveis, como os celulares e notebooks (Figura 17). A antena de celular construída como um fractal é capaz de captar e transmitir frequências de ondas diversas como wifi, infravermelho, bluetooth, além da própria frequência de micro-ondas que permite as ligações.

Figura 16 – Antena com padrão da curva de Koch



Fonte: <<http://haciaespacio.aem.gob.mx/revistadigital/articul.php?interior=197>> Acesso em dez. 2018

Figura 17 – Antena de celular com padrão do Tapete de Sierpinski



Fonte: <<http://haciaespacio.aem.gob.mx/revistadigital/articul.php?interior=197>> Acesso em dez. 2018

Nos próximos capítulos deste trabalho iremos deter-nos em fractais gerados a partir de polígonos regulares, apontando fatos históricos, propriedades e suas relações com espirais.

3 FRACTAIS: TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS E QUADRADOS

Este capítulo será iniciado pelo estudo dos fractais gerados a partir de triângulos equiláteros seguindo para os fractais gerados a partir de um quadrado. Tais fractais possuem uma grande importância histórica, além de propriedades que podem ser utilizadas em outros polígonos e, principalmente, por serem peças fundamentais em diversos avanços matemáticos em diferentes áreas de pesquisa.

3.1 Triângulos Equiláteros

Existem variados tipos de fractais obtidos a partir de um triângulo equilátero, neste capítulo serão apresentados 3 desses fractais, a curva de Koch juntamente com o floco de neve de Koch, a sequência e espiral de Padovan e o triângulo de Sierpinski (ou Cesta de Sierpinski).

3.1.1 Curva de Koch

Apresentada pelo matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924), a curva de Koch é um fractal obtido através de transformações aplicadas em um segmento de reta, descritas pelo seguinte processo¹

- i. Desenhe um segmento de reta;
- ii. Divida o segmento em três partes congruentes;
- iii. Construa um triângulo equilátero tomando para base a parte central;
- iv. Apague a base do triângulo representado no passo anterior;
- v. Repita os passos *ii*, *iii* e *iv* em cada um dos novos segmentos
- vi. Repita o processo indefinidamente.

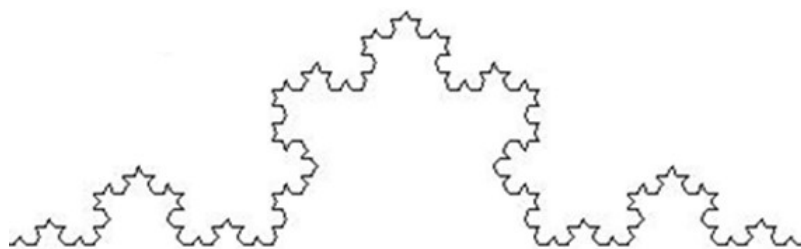
Figura 18 – Primeiros passos da construção da curva de Koch



Fonte: O autor, 2019

¹ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/u3cxhuva>>

Figura 19 – Curva de Koch



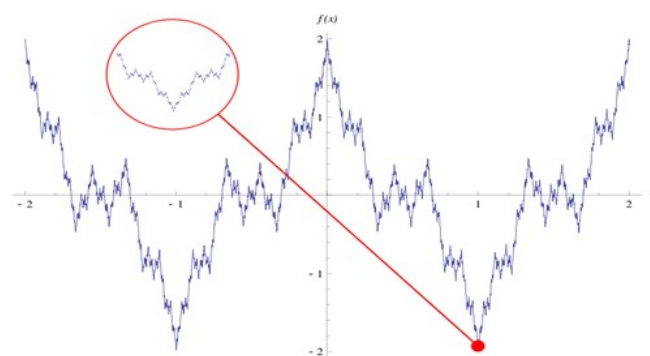
Fonte: O autor, 2019

O objetivo de Koch ao desenvolver essa curva era apresentar uma curva contínua e não diferenciável, ou seja, uma curva que não possui derivada em nenhum ponto de seu domínio. A curva foi apresentada em seu trabalho **“Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire”**, publicado em 1904. Outra curva contínua e não diferenciável já havia sido apresentada pelo matemático alemão Karl Weierstrass (1815 - 1897), denominada função de Weierstrass (Figura 20) e definida pela série de Fourier.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \text{ com } 0 < a < 1, b \text{ é um número natural ímpar e } a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

Essa função foi apresentada em 1872 sendo passo inicial para a busca de outras curvas contínuas não diferenciáveis².

Figura 20 – Função de Weierstrass



Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function> Acesso em dez. 2018

O processo da construção da curva de Koch pode ser aplicado sobre os lados de um triângulo equilátero obtendo o fractal conhecido por **floco de neve de Koch** ou **ilha de**

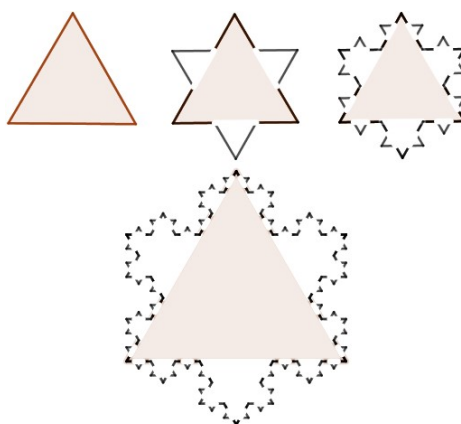
² Fonte:(ARAÚJO; FÁVARO, 2009, p. 5) e (JANOS, 2008, p. 31)

Koch. Essa curva é considerada um floco de neve perfeito devido à sua simetria em relação ao eixo central. Para construir tal fractal deve-se seguir o seguinte processo iterativo³:

- i. Desenhe um triângulo equilátero;
- ii. Divida cada um dos lados do polígono em três partes congruentes;
- iii. Sobre o terço central, de cada um dos segmentos, construa um triângulo equilátero e retire a base do mesmo;
- iv. Repita os passos iniciais em todos os lados da figura obtida no passo anterior;
- v. Repita os passos *i*, *ii* e *iii* indefinidamente.

O floco de neve é o limite do processo quando executado infinitas vezes.

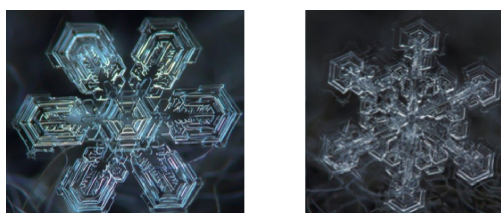
Figura 21 – Construção do floco de neve de Koch



Fonte: O autor, 2019

Analisando-se a estrutura do floco de neve do Koch, nota-se sua semelhança com flocos de neve reais, que muitas vezes possuem o formato de estruturas hexagonais.

Figura 22 – Flocos de neve

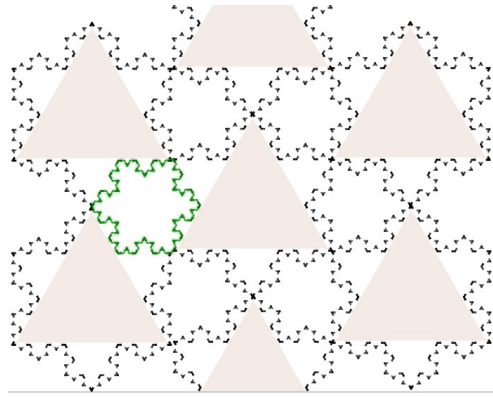


Fonte: <<https://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30190>> Acesso em dez. 2018

³ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/akw8btzx>>

Por seguir um padrão hexagonal pode utilizar-se o floco de neve de Koch para preencher uma área plana criando um mosaico⁴ com flocos de neve de Koch de tamanhos diferentes.

Figura 23 – Mosaico do floco de neve de Koch



Fonte: O autor, 2019

É possível determinar a área do fractal floco de neve, e essa área depende do comprimento do lado do triângulo equilátero que lhe deu origem. Para calcular sua área toma-se como objeto inicial um triângulo equilátero de lado L . Observando o processo de construção do fractal percebe-se que os lados dos diferentes triângulos equiláteros que o compõem formam a seguinte sequência:

$$\left(L, \frac{L}{3}, \frac{L}{9}, \frac{L}{27}, \dots \right)$$

e o número de triângulos com lado igual a cada um dos termos desta sequência formam a sequência $(1, 3, 12, 48, \dots)$. Assim, somando as áreas dos triângulos obtidos em cada etapa do processo tem-se:

$$A_{Koch} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 12 \cdot \frac{\left(\frac{L}{9}\right)^2\sqrt{3}}{4} + \dots = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{12}{81} + \frac{48}{729} + \dots\right)$$

A sequência $\left(\frac{3}{9}, \frac{12}{81}, \frac{48}{729}, \dots\right)$ é uma progressão geométrica decrescente de razão $\frac{4}{9}$, cuja soma de todos os seus termos é:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \Leftrightarrow S = \frac{\frac{3}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} \text{ então } A_{Koch} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{5}$$

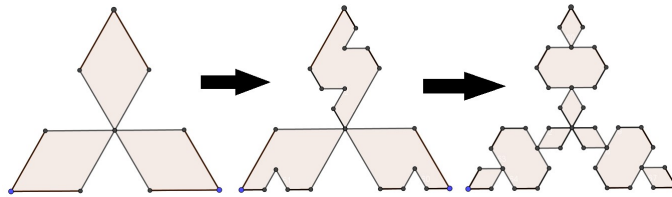
$$A_{Koch} = \frac{2L^2\sqrt{3}}{5}$$

⁴ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/wcyhqxuc>>

De maneira análoga mostra-se que o perímetro do floco de neve é infinito. O fato de termos uma região de área finita delimitada por uma linha de comprimento infinito é um dos aspectos interessantes deste tipo de objeto.

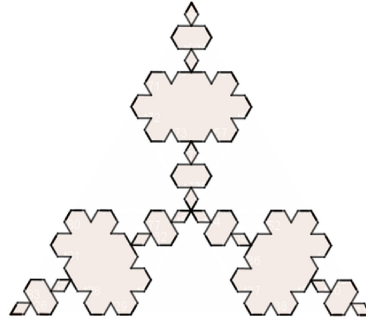
Ao fazer tal construção, os novos triângulos podem ser posicionados para o exterior do polígono inicial ou para o seu interior, dando origem a fractais que possuem o mesmo perímetro mas cujas áreas são diferentes (Figura 25)⁵.

Figura 24 – Construção da Anti-snowflake



Fonte: O autor 2019

Figura 25 – Anti-snowflake

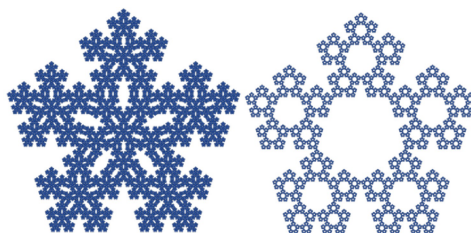


Fonte: O autor 2019

Existem maneiras distintas de se aplicar o processo de construção da curva de Koch em um polígono, por exemplo, a aplicação do processo nos demais polígonos regulares gera tipos diferentes de flocos de neve. Esse conjunto de objetos é denominado **n-flake**.

⁵ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/e2y2qcnf>>

Figura 26 – Pentaflake



Fonte: <<https://en.wikipedia.org/wiki/N-flake>> Acesso em dez. 2018

3.1.2 Sequência de Padovan

A sequência de Padovan é uma sequência de números naturais definida de forma similar à da sequência de Fibonacci, onde cada termo é obtido pela soma de termos anteriores. Segue a recorrência da sequência de Padovan e seus primeiros termos:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1$$

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$$

$$(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, \dots)$$

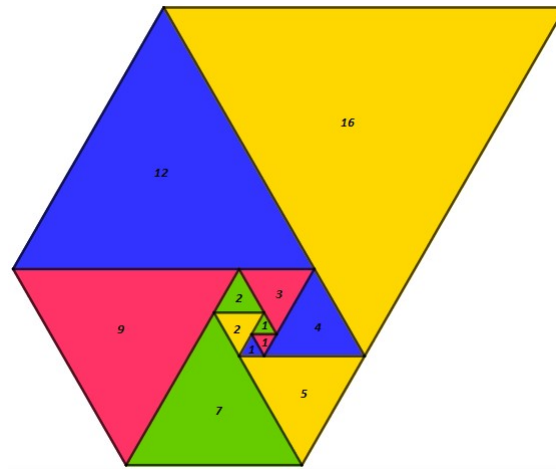
Batizada pelo matemático inglês Ian Stewart (1945) em homenagem ao arquiteto Richard Padovan (1935), o primeiro a descrever a sequência. Stewart (2005) apresentou a sequência de Padovan em sua coluna “**Mathematical Recreations**”, na edição de junho de 1996 da revista “**Scientific American**” e descrita com mais detalhes em seu livro “**Mania de Matemática**”⁶.

Assim como a sequência de Fibonacci, a sequência de Padovan também pode ser representada geometricamente. No lugar dos quadrados, associados aos termos da sequência de Fibonacci, tem-se uma sequência de triângulos equiláteros adjacentes que se organizam em formato espiralado e em que as medidas dos lados acompanham os números da sequência (Figura 27)⁷.

⁶ Título em Inglês: Math Hysteria

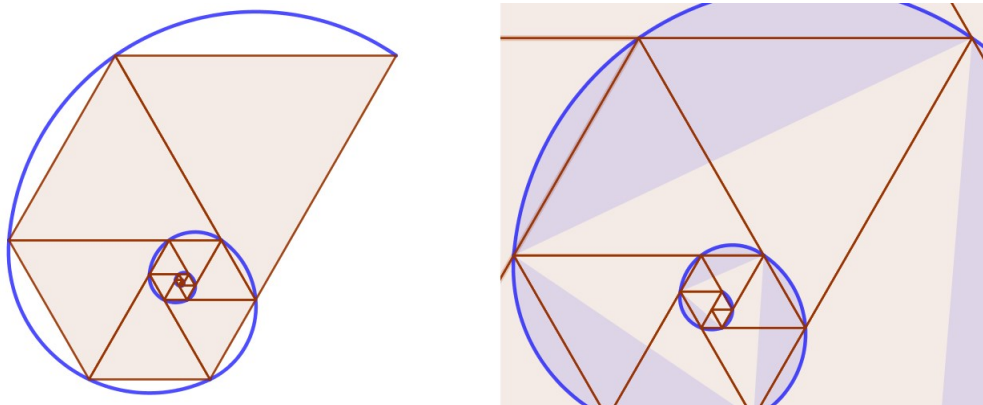
⁷ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/uz8fbctm>>

Figura 27 – Sequência de Triângulos



Fonte: O autor,2019

Figura 28 – Espiral de Padovan e ampliação da região central



Fonte: O autor,2019

Ao observar o padrão geométrico da Figura 24⁸, percebe-se que triângulos de mesma cor possuem lados adjacentes ao mesmo triângulo, por exemplo, o 1° e o 5° triângulos da sequência possuem lados adjacentes ao 6° triângulo, ou seja, o lado do 6° triângulo (P_5 da sequência numérica) possui medida igual a soma das medidas dos lados do 5° triângulo e do 1° triângulo, associando aos termos $P_5 = P_4 + P_0$. Generalizando, tem-se que a sequência de Padovan satisfaz, também, a seguinte relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, P_3 = P_4 = 2$$

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-5}, \forall n \in \mathbb{N}, n > 4$$

⁸ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/yaws4sv9>>

Outra propriedade similar com a da sequência de Fibonacci, envolve o limite da razão entre dois termos consecutivos, em que na sequência de Fibonacci é denominada razão áurea (cujo valor irracional aproximado é 1,618) e que nesse caso é denominado número plástico (p), que possui valor irracional aproximado por 1,324718. Segundo Ferreira (2015), ao solucionar as relações de recorrência obtêm-se os seguintes polinômios característicos $x^3 - x - 1 = 0$ e $x^5 - x^4 - 1 = 0$ que possuem uma única raiz real, o número plástico. Vejamos, que o número plástico é solução destas duas equações polinomiais. Começando por calcular a razão entre termos consecutivos da sequência de Padovan obtemos: .

$$\frac{3}{2} = 1,5; \frac{4}{3} = 1,333\dots; \frac{5}{4} = 1,25; \frac{7}{5} = 1,4; \frac{9}{7} = 1,285\dots; \frac{12}{9} = 1,333\dots; \dots;$$

$$\frac{65}{49} = 1,3265; \frac{86}{65} = 1,3230\dots; \frac{114}{86} = 1,325581\dots; \frac{151}{114} = 1,324561\dots$$

Observando os valores obtidos percebe-se que esses formam uma sequência numérica de termos positivos que oscila em torno de um número. Seja (p_n) a sequência dessas razões e admita-se que esta sequência é convergente para um número p . Assim,

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}, \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$$

Utilizando a primeira recorrência pode escrever-se $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ e $P_{n-1} = P_{n-3} + P_{n-4}$, substituindo em p_n vem

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{P_{n-2} + P_{n-3}}{P_{n-1}} = \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-1}} = \left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right)^{-1} + \left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-3}}\right)^{-1} = \\ &= (p_{n-1})^{-1} + \left(\frac{P_{n-3} + P_{n-4}}{P_{n-3}}\right)^{-1} = (p_{n-1})^{-1} + \left(1 + \left(\frac{P_{n-3}}{P_{n-4}}\right)^{-1}\right)^{-1} = \\ &= (p_{n-1})^{-1} + \left(1 + (p_{n-3})^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{p_{n-1}} + \left(1 + \frac{1}{p_{n-3}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

aplicando limite para n tendendo ao infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p_{n-1}} + \left(1 + \frac{1}{p_{n-3}}\right)^{-1}$$

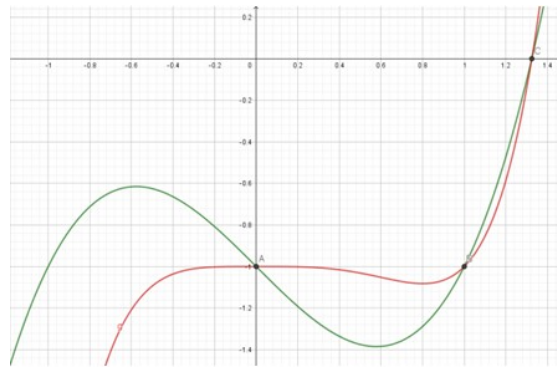
$$\text{como } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1},$$

$$p = \frac{1}{p} + \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{p} + \left(\frac{p+1}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{p} + \frac{p}{p+1} = \frac{p+1+p^2}{p(p+1)}$$

$$p(p(p+1)) = p+1+p^2 \Leftrightarrow p^3+p^2 = p+1+p^2 \Leftrightarrow p^3-p-1=0$$

Procedendo de maneira análoga, mas utilizando a recorrência $P_n = P_{n-1} + P_{n-5}$, obtêm-se o polinômio e $p^5 - p^4 - 1 = 0$. Os polinômios obtidos são os polinômios característicos das recorrências dadas. A seguir tem-se os gráficos das funções polinomiais associadas aos polinômios característicos, cada uma delas possui um único zero que é $p = 1.32471795667458\dots$.

Figura 29 – Gráficos das funções polinomiais



Fonte: O autor, 2019

Uma outra maneira de mostrar que o número plástico é raiz da equação cúbica $x^3 - x - 1 = 0$ é solucionar a mesma utilizando a fórmula de Cardano que permite determinar a raiz real de equação cúbicas do tipo $x^3 + mx + n = 0$, e esta raiz é dada por $x = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{m^3}{27}}}$. Na equação $x^3 - x - 1 = 0$, $m = -1$ e $n = -1$.

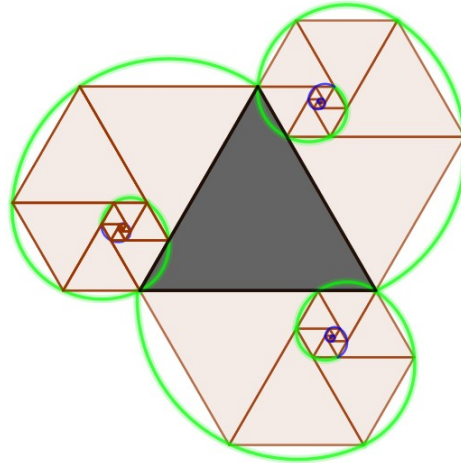
$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} = 1.32471795667458\dots = p$$

Existem muitas propriedades algébricas associadas ao número plástico, por exemplo, ao manipular a equação $p^3 - p - 1 = 0$ encontra-se uma forma de calcular o quadrado do número plástico que pode ser obtido pela seguinte expressão $p^2 = 1 + \frac{1}{p}$, além de suas propriedades geométricas. O Arquiteto holandês Hans van der Laan (1904 - 1991) construiu um sistema de medidas baseado no número plástico. Hans van der Laan mostrou a relação entre o número plástico e objetos tridimensionais. Uma análise mais detalhada sobre o assunto pode ser encontrada no texto “Números Mórficos” de Ferreira (2015).

Como o triângulo resultante, em cada etapa, é equilátero, podemos pensar em colocar em cada um dos lados a sequência de triângulos que o originou e as respectivas espirais, obtendo uma espiral tripla (Figura 30).

Figura 30 – Espiral tripla de Padovan

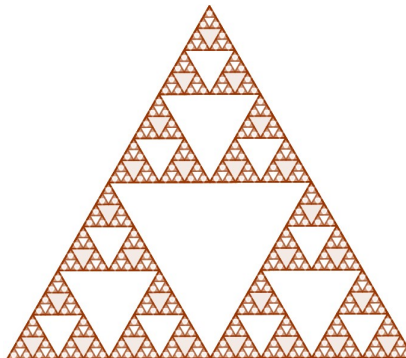


Fonte: O autor,2019

3.1.3 Triângulo de Sierpinski

Provavelmente este seja um dos fractais mais conhecidos fora do universo matemático. É comumente encontrado em exercícios de matemática, logotipos de empresas, jogos de vídeo games, etc. Triângulo de Sierpinski ou cesta de Sierpinski (Figura 31) recebeu esse nome em homenagem ao matemático polonês **Waclaw Sierpinski** (1882 - 1969), a primeira pessoa a descrever as propriedades de tal objeto (sua construção será abordada na seção 3.1.3.2).

Figura 31 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor,2019

Apesar de só ter sido estudado em 1915, esteve presente na decoração de igrejas romanas medievais construídas entre os séculos XI e XIII, como mostra o trabalho “**Sierpinsky Triangles in Stone, on Medieval Floors in Rome**” de Elisa Conversano e Laura Tedeschini-Lalli

Figura 32 – Basílica de São Clemente, Roma (séc XI)



Fonte: Conversano e Lalli (2011)

Figura 33 – Catedral Civita Castellana, Civita Castellana (séc X)

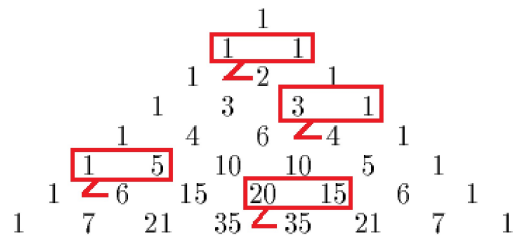


Fonte: Conversano e Lalli (2011)

Ao destacar os números ímpares do triângulo de Pascal surge a forma do triângulo de Sierpinski (Figura 35). O triângulo de Pascal é um triângulo formado por infinitos números binomiais $\binom{n}{k}$ ⁹, onde n indica a linha e k a coluna em que se encontra o número binomial em questão ($n = 0$ e $k = 0$ indicam linha e coluna iniciais). Segundo Rosadas (2016), as propriedades do triângulo foram estudadas por Blaise Pascal (1623 - 1662) em seu trabalho “**Traité du triangle arithmétique**”, publicado em 1655. No triângulo de Pascal, a primeira e a última entrada de cada linha são sempre ocupadas pelo número 1 e os demais números podem ser obtidos pela adição dos dois números diretamente acima (Figura 34).

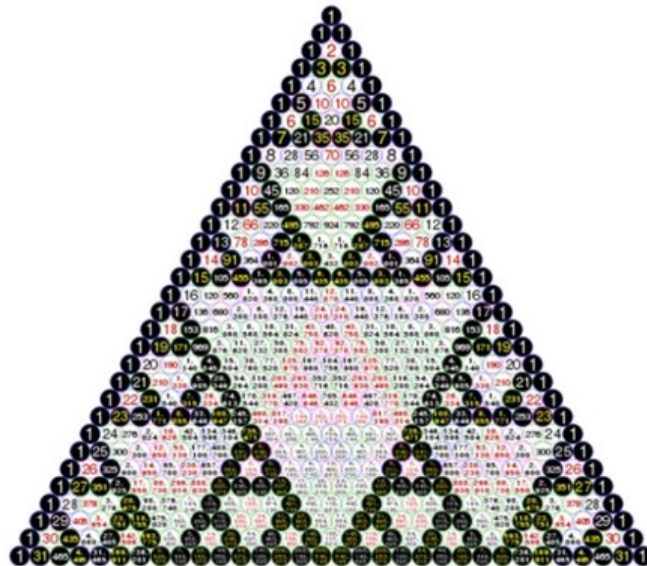
⁹ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Figura 34 – Triângulo de Pascal



Fonte: O autor, 2019

Figura 35 – Números ímpares no Triângulo de Pascal

Fonte: <[https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%\\$%\\$27s__triangle](https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%$%$27s__triangle)> Acesso em jan. 2019

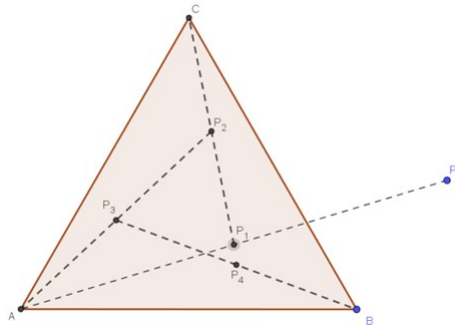
Os números pares (múltiplos de 2) se agrupam em triângulos, ressaltando o triângulo de Sierpinski dentro do triângulo de Pascal. Padrões similares ocorrem quando são destacados os múltiplos de 3, os múltiplos de 4, os múltiplos de 5, etc. Tais fractais são denominados triângulo de Pascal mod(n), poderemos observar tais padrões nas figuras a seguir (Figura 36 a Figura 38).

3.1.3.1 Jogo do Caos

O “**Jogo do Caos**”, é uma construção que envolve conhecimentos de desenho geométrico e probabilidade. Para construir o jogo do caos é necessário um par de esquadros, compasso e seguir os seguintes passos¹⁰

- i. Em uma folha de papel construa um triângulo equilátero ABC e marque um ponto inicial P_0 , em qualquer lugar do papel;
- ii. Atribuir a cada vértice do triângulo dois números de um dado (não viciado) de 6 lados, por exemplo, ao vértice A atribuímos os números 1 e 2, 3 e 4 para o vértice B e ao vértice C os números 5 e 6;
- iii. Jogue o dado, observe o número que saiu, ligue P_0 com o vértice atribuído ao respectivo número, no ponto médio desse segmento marque o ponto P_1 ;
- iv. Jogue o dado novamente, ligue P_1 ao vértice atribuído ao número que aparecer na face superior do dado e marque P_2 no ponto médio desse novo segmento;
- v. Repita o processo diversas vezes sempre marcando os pontos P_i , pontos médios de cada segmento gerado durante o processo.

Figura 39 – Primeiros passos do Jogo do Caos

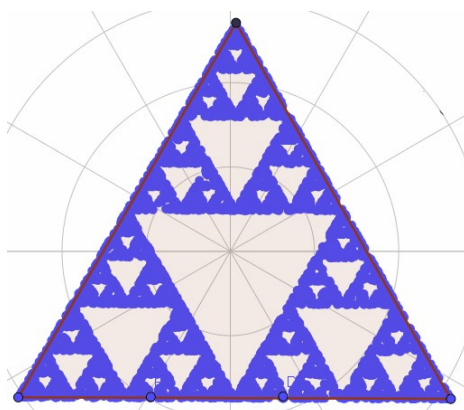


Fonte: O autor, 2019

Ao jogar este jogo um número suficientemente grande de vezes, os pontos marcados começam a dar origem à forma do Triângulo de Sierpinski (Figura 40)

¹⁰ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/jgfjmuqb>>

Figura 40 – Triângulo de Sierpinski pelo Jogo do Caos



Fonte: O autor, 2019

No jogo do caos, todos os vértices possuem a mesma probabilidade de serem escolhidos ao caso e após obtermos um primeiro ponto P_i no interior do triângulo, todos os pontos P_n , com $n > i$, serão pontos interiores ao triângulo. O jogo do caos é um excelente exemplo de que é possível obter uma estrutura ordenada construída por um processo caótico e aleatório.

Esse processo de construção pode ser um pouco exaustivo, já que só é possível perceber o triângulo de Sierpinski após um grande número de repetições, porém com auxílio do software GeoGebra essa construção se torna mais simples.

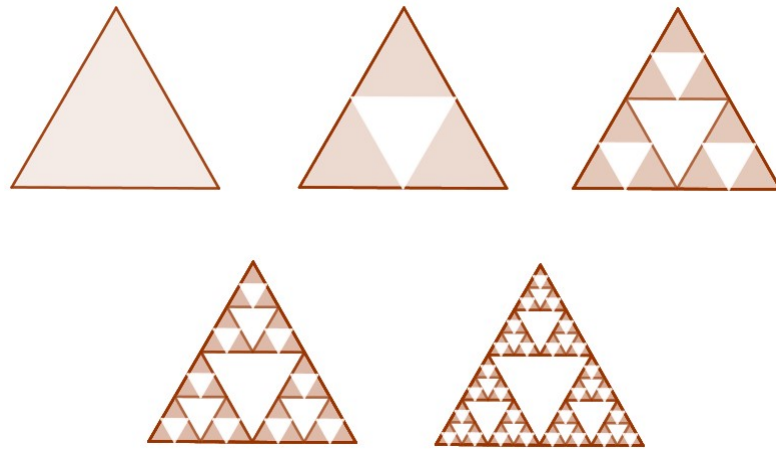
3.1.3.2 Triângulo de Sierpinski: Processo Recursivo e Propriedades

Utilizando somente elementos e conceitos geométricos constrói-se o triângulo de Sierpinski seguindo os seguintes passos¹¹

- i. Construa um triângulo equilátero;
- ii. Ligue os pontos médios de cada lado, obtendo 4 novos triângulos;
- iii. Elimine o triângulo central e repita o segundo passo com os demais triângulos;
- iv. Repita o terceiro passo um número indefinido de vezes.

¹¹ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/e7ax6g2h>>

Figura 41 – Construção do triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor, 2019

Seguindo esse processo de construção tem-se a intuição de que a área desse fractal tende a ficar cada vez menor, já que em cada passo do processo retiram-se partes do triângulo inicial. Tal fato pode ser comprovado utilizando a soma de todos os termos de uma progressão geométrica, para tal considera-se a sequência cujos termos são dados pelas áreas retiradas em cada passo do processo. Tomando A como área do triângulo inicial tem-se:

$$\left(\frac{A}{4}, \frac{3A}{16}, \frac{9A}{64}, \frac{27A}{256}, \dots \right)$$

Observando a sequência acima percebe-se que as áreas retiradas estão reduzindo na razão $q = \frac{3}{4}$. Calculando a soma infinita de todos os seus termos:

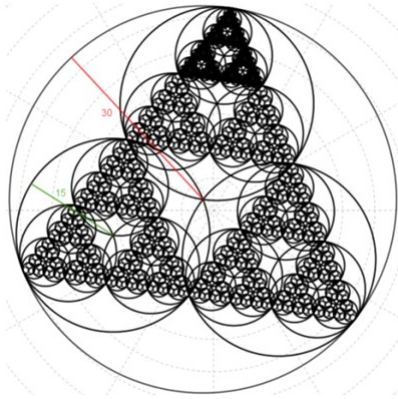
$$S = \frac{A/4}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{A/4}{1/4} = \frac{A}{4} \cdot \frac{4}{1} = A$$

O resultado indica que ao repetindo o processo infinitamente a soma de todas as áreas retiradas é igual à área inicial, ou seja, o triângulo de Sierpinski possui área igual a zero. Isto está relacionado com a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski que vai assumir valor entre 1 e 2, já que ao aplicar um fator de redução de $1/2$, são obtidos 3 novos triângulos semelhantes ao inicial, assim $r = \frac{1}{2}$ e $N = 3$, pelo que sua dimensão fractal é dada por:

$$d_{T.Sierp} = \frac{\log(3)}{\log(\frac{1}{1/2})} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,584$$

O valor obtido indica que o triângulo de Sierpinski não possui dimensão suficiente para possuir área e mesmo não tendo área alguma, esse fractal, não pode estar contido em uma reta, pois possui dimensão maior que 1. As figuras a seguir apresentam o triângulo de Sierpinski obtido a partir de circunferências organizadas sobre os vértices de triângulos equiláteros, o fator de redução aplicado nessa construção é igual a $\frac{1}{2}$.

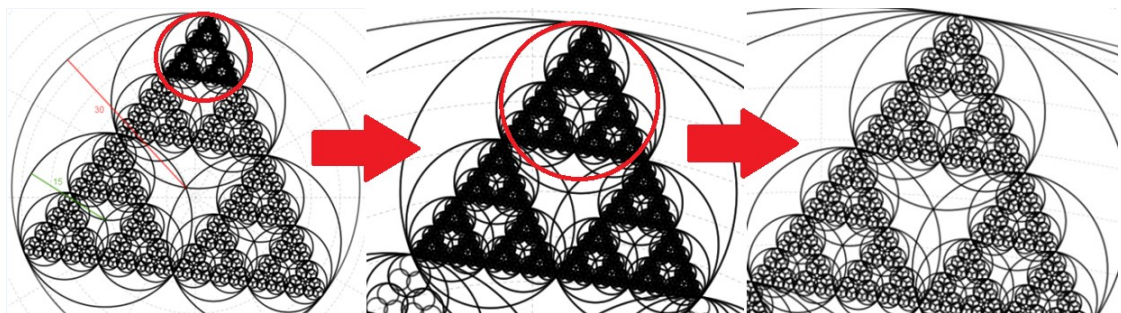
Figura 42 – Circunferências formando o triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor, 2019

Analisando a parte superior da imagem anterior (Figura 42)¹² parece existir uma região do plano preenchida, ou seja, uma área calculável. Porém ao modificar a escala da imagem percebe-se que não existem regiões preenchidas.

Figura 43 – Ampliações no triângulo de Sierpinski



Fonte: O autor, 2019

Essa construção é uma prova visual que podem existir objetos que ocupam uma determinada região de um plano mas que não possuem área, ou seja, eles não preenchem a região ocupada, já que para tal necessitariam de possuir dimensão igual a dois.

¹² <<https://www.geogebra.org/m/wmr4tsb>>

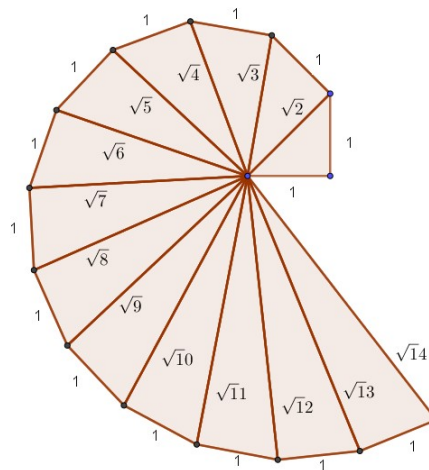
3.2 Espirais de Triângulos

Não há como não falar de fractais em triângulos sem mencionar as espirais geradas a partir de tais figuras, Já vimos a espiral de Padovan, relacionada com o triângulo equilátero iremos ver mais duas espirais, uma relacionada com o triângulo retângulo e outra com o triângulo isósceles, são elas a **espiral de Teodoro** e a **espiral do triângulo áureo**.

3.2.1 Espiral de Teodoro

A espiral de Teodoro (Figura 44) é uma espiral apresentada por *Theodorus de Cirene* (465 a.c - 398 a.c), matemático e filósofo grego nascido em Cirena. Esta espiral é formada por uma sequência de triângulos retângulos adjacentes, iniciada por um triângulo retângulo isósceles de catetos medindo uma unidade e, conseqüentemente, hipotenusa com medida igual a $\sqrt{2}$. Esta serve de cateto para o próximo triângulo, que possui o outro de cateto com medida unitária e, conseqüentemente, hipotenusa com medida igual a $\sqrt{3}$. Em resumo, a espiral é formada por uma sequência infinita de triângulos retângulos adjacente com pelo menos um dos catetos unitário, e a hipotenusa de cada triângulo é cateto do triângulo sucessor.

Figura 44 – Espiral de Teodoro



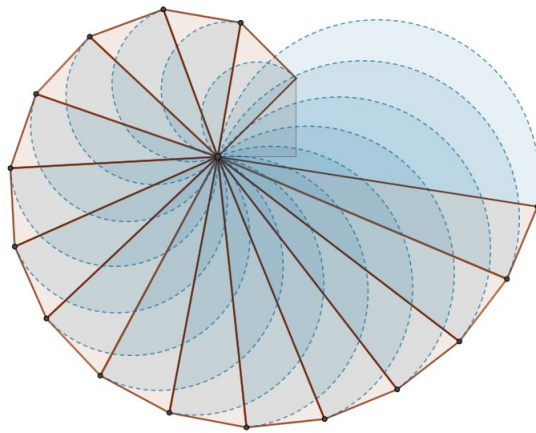
Fonte: O autor, 2019

A espiral de Teodoro possui grande importância matemática visto que a medida da hipotenusa, de cada triângulo retângulo da sequência, é igual à raiz quadrada de número natural, ou seja, a hipotenusa do primeiro triângulo possui medida igual a $\sqrt{2}$, o segundo triângulo possui hipotenusa de medida $\sqrt{3}$ e assim por diante, ou seja, a espiral de Teodoro apresenta uma maneira simples de representar em segmentos os valores correspondentes às raízes quadradas dos números naturais.

Por mais simples que seja sua construção, com régua e compasso, Teodoro (ou Theodorus) só desenvolveu sua construção até ao segmento de medida $\sqrt{17}$, não se sabe ao certo o motivo do abandono. Segundo Junior (2015), acredita-se que o abandono da construção esta relacionado com o fato de a espiral não fechar e $\sqrt{18}$ se sobrepor no primeiro triângulo dando peso ao pensamento filosófico dos matemáticos gregos de que os números irracionais não possuíam forma e assim deviam ser deixados de lado.

Ao traçar arcos de circunferências cujos centros são os pontos médios das hipotenusas da espiral (Figura 45)¹³, obtém-se uma figura similar à seção de uma concha.

Figura 45 – Arcos sobre hipotenusas



Fonte: O autor, 2019

O raio de arco é dado por $r_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$ para $n \geq 2$ e seus comprimentos são iguais a $c_n = \pi \cdot \sqrt{n}$. Esta estrutura é similar ao caracol Nautilus, porém este segue as proporções da sequência da Fibonacci e da razão áurea.

Figura 46 – Caracol Nautilus



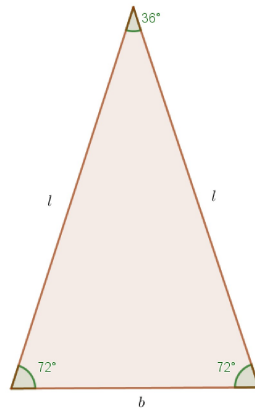
Fonte: <<https://www.hipercultura.com/sequencia-fibonacci/>> Acesso em jan. 2019

¹³ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/dxnf9thp>>

3.2.2 Espiral do Triângulo Áureo

O triângulo áureo (Figura 47) é um triângulo isósceles tal que a razão entre um dos lados congruentes e a base do triângulo é igual ao número de ouro ($\phi = 1,618\dots$).

Figura 47 – Triângulo áureo

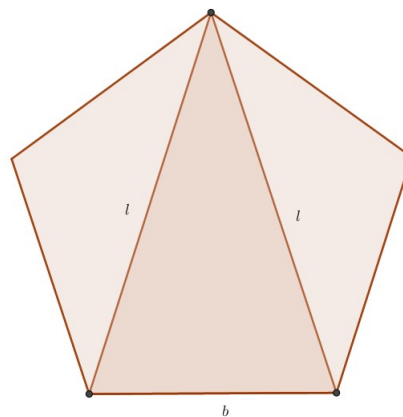


Fonte: O autor, 2019

A razão áurea é o limite da razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci e geometricamente esse valor está associado ao pentágono regular e suas medidas, lados e diagonais. A apresentação e estudo da sequência de Fibonacci serão dados na seção destinada aos quadrados, já que essa possui uma relação direta com tais objetos.

Pode obter-se o triângulo áureo a partir de um dos lados do pentágono regular e as suas diagonais, por exemplo, os lados congruentes l do triângulo áureo são dados pelas diagonais de um pentágono regular e sua base b é o lado do pentágono, como se pode observar na figura a seguir (Figura 48).

Figura 48 – Pentágono e suas diagonais



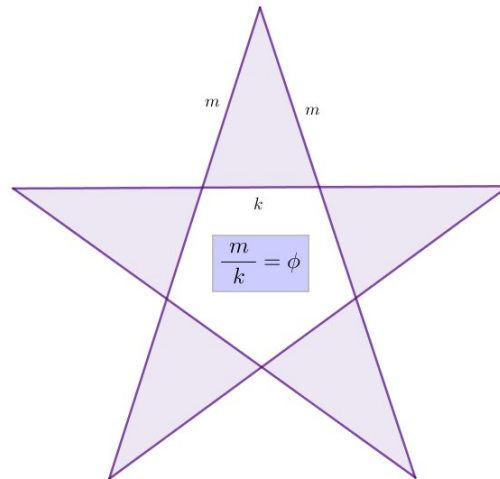
Fonte: O autor, 2019

Tem-se que:

$$\frac{l}{b} = \phi = 1,618\dots$$

O triângulo áureo também pode ser encontrado nas pontas de um pentagrama regular, como mostra a figura a seguir.

Figura 49 – Pentagrama regular



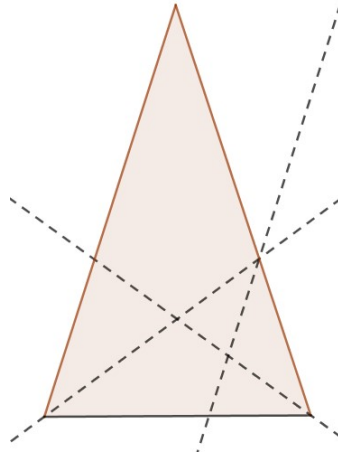
Fonte: O autor, 2019

A partir de um triângulo áureo pode construir-se uma sequência de triângulos semelhantes, todos triângulos áureos, cujos vértices estão sobre a curva de uma espiral. Para construir tal sequência devem seguir-se os seguintes passos:

- i. Construir um triângulo áureo¹⁴;
- ii. Traçar a bissetriz de um dos ângulos adjacentes à base do triângulo, formando um novo triângulo áureo que possui a base do primeiro triângulo como um dos lados congruentes;
- iii. Destacar o segundo triângulo áureo, contido no primeiro, e repetir o processo do item *ii*;
- iii. Repetir o processo em cada novo triângulo obtido.

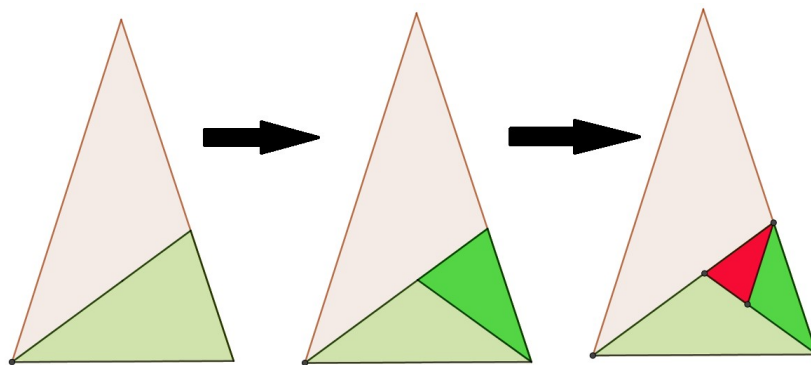
¹⁴ Triângulo isósceles cujos ângulos congruentes são iguais a 72°

Figura 50 – Bissetrizes dos ângulos



Fonte: O autor, 2019

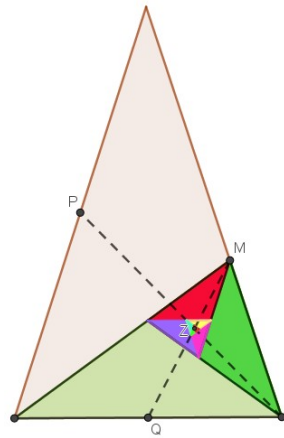
Figura 51 – Sequência de triângulo áureos



Fonte: O autor, 2019

Nesta sequência de triângulos tem-se que cada segmento está sendo reduzido por um fator igual a $1/\phi$ e as áreas dos triângulos estão sendo reduzidas por $1/\phi^2$. Além disso os triângulos da sequência tendem para o ponto Z (Figura 52), e esse é o ponto de encontro das medianas de dois triângulos consecutivos.

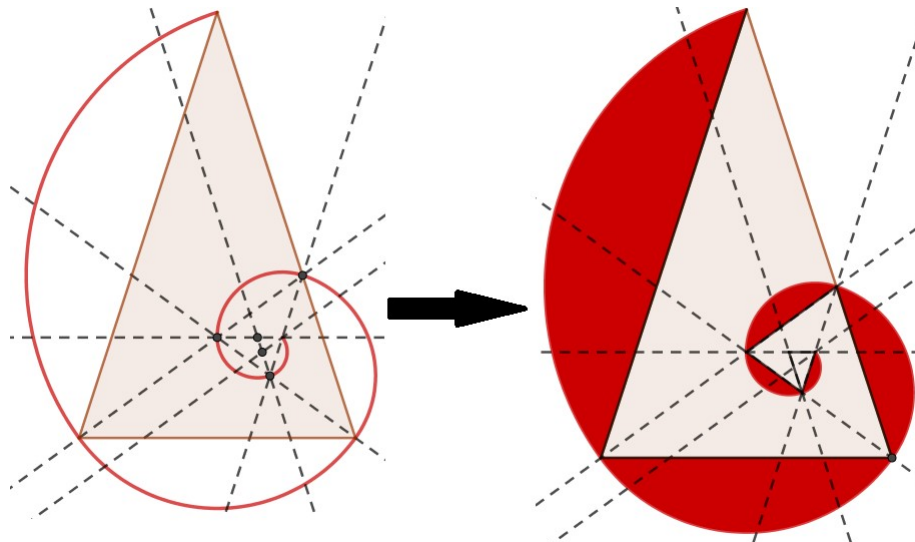
Figura 52 – Ponto de convergência dos triângulos áureos



Fonte: O autor, 2019

Para traçar a espiral primeiro devem destacar-se os pontos de encontro entre as bissetrizes (utilizadas na construção da sequência) e os lados dos triângulos, esses serão centros dos arcos que definem a espiral. Na figura a seguir (Figura 53)¹⁵ as bissetrizes são indicadas pelas retas tracejadas, e os pontos representam os centros de cada arco da espiral. Preenchendo a área entre os triângulos e a espiral destacam-se os triângulos da sequência e sua relação com a espiral.

Figura 53 – Espiral sobre triângulos áureos



Fonte: O autor, 2019

¹⁵ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/jrczns5g>>

3.3 Quadrado

Para iniciar o estudo dos principais fractais gerados a partir de um quadrado, serão apresentados fractais que preenchem uma determinada região do plano, tais fractais são denominados curvas de preenchimento espacial e as mais conhecidas são: curva de Hilbert e curva de Peano.

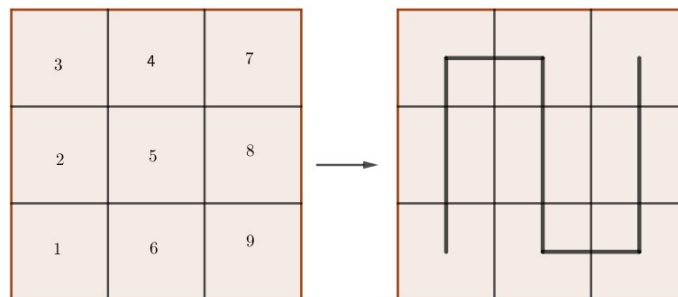
3.3.1 Curva de Hilbert e Curva de Peano

As curvas de Hilbert e de Peano foram apresentadas quase simultaneamente, sendo a curva de Hilbert, descrita em 1891 pelo matemático alemão David Hilbert (1862 - 1943), uma variação da curva de Peano que foi descrita em 1890 por Giuseppe Peano (1858 - 1932), matemático italiano.

Segundo Sagan (1994), a curva de Peano é uma curva plana, contínua que não possui autointerseções e seu traço preenche por completo a área de um quadrado, o mesmo ocorre com a curva de Hilbert, que também é conhecida como curva de preenchimento do espaço de Hilbert. O matemático David Hilbert difundiu o campo de estudos de curvas de preenchimento espacial, abrindo espaço para outros matemáticos apresentarem variações de curvas de preenchimento.

A curva de Peano é construída no interior de um quadrado dividido em nove quadrados congruentes numerados de 1 a 9, indicando o início e direção da curva, esse processo é denominado “mapeamento da curva”, como se pode observar a seguir (Figura 54).

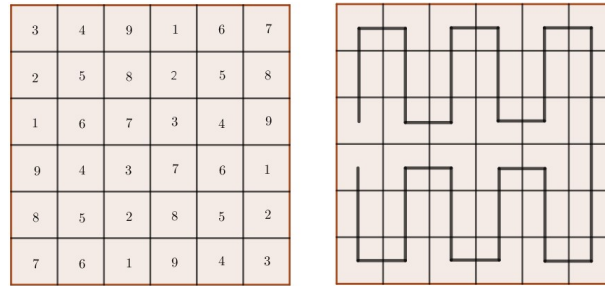
Figura 54 – Primeiro mapeamento da curva de Peano



Fonte: O autor, 2019

Nesse mapeamento aplica-se um fator de redução igual a $1/2$, obtendo 36 quadrados congruentes que são numerados em grupos de nove quadrados, e em cada grupo repete-se o primeiro mapeamento da curva de Peano.

Figura 55 – Segundo mapeamento da curva de Peano



Fonte: O autor, 2019

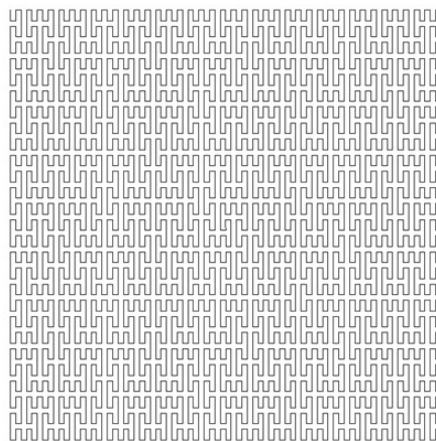
Com os dados obtidos nos dois primeiros passos do processo é possível calcular a dimensão da curva de Peano. Ao se aplicar uma redução de fator $1/2$, obtêm-se quatro novas curvas semelhantes a curva inicial, ou seja, $r = \frac{1}{2}$, $N = 4$ e

$$d_{Peano} = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = \frac{2\log(2)}{\log(2)} \rightarrow d_{Peano} = 2,$$

ou seja, a curva de Peano possui dimensão suficiente para preencher uma determinada região do plano, nesse caso o quadrado que contém a curva.

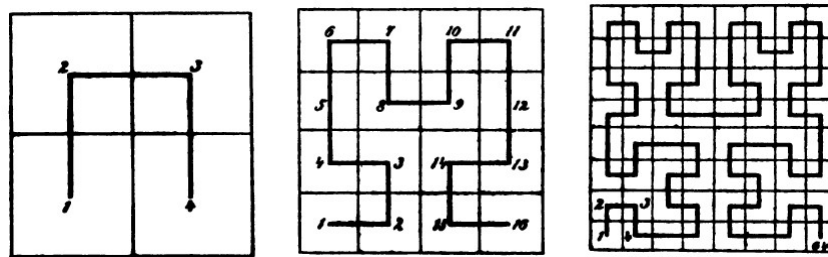
O preenchimento de uma região pela curva de Peano só pode ser observado quando o processo de construção é repetido um número suficientemente grande de vezes, ou seja, quando o número de iterações tende ao infinito. A imagem a seguir mostra um passo avançado da construção da curva e do preenchimento da região interna do quadrado que contém a mesma.

Figura 56 – Curva de Peano

Fonte: <<http://paulbourke.net/fractals/lsys/>> Acesso em jan. 2019

De maneira similar pode construir-se a curva de Hilbert (Figura 58). A construção se inicia com um quadrado dividido em quatro quadrados iguais, numerados segundo o sentido horário e cujos centros são unidos por segmentos de reta. No segundo passo, o quadrado é dividido em dezesseis quadrados congruentes numerados de 1 a 16, cujos centros são unidos por segmentos de reta. A cada passo aplica-se uma redução de $1/2$, obtendo o grupo de quadrados seguinte, nos quais se deve repetir o processo.

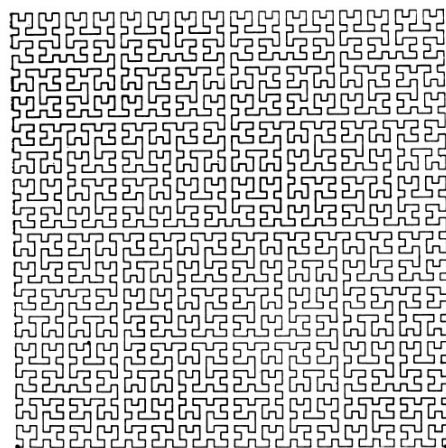
Figura 57 – Primeiro, segundo e terceiro mapeamentos da curva de Hilbert



Fonte: Sagan, Hans. Space-Filling Curves (1994) p. 10

A curva de Hilbert também possui dimensão igual a dois, ou seja, assim como a curva de Peano a curva de Hilbert preenche a área do quadrado onde ela está contida, porém só é possível observar esse preenchimento quando o processo de construção é repetido infinitamente. A imagem a seguir mostra a curva em um passo avançado da sua construção.

Figura 58 – Curva de Hilbert

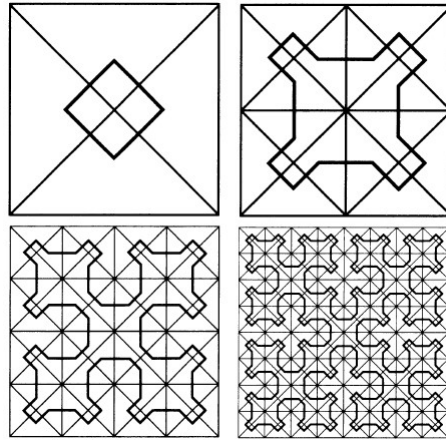


Fonte: <<http://paulbourke.net/fractals/lsys/>> último acesso 2019

Em 1912, Sierpinski apresentou uma curva de preenchimento mostrando que existe uma função f que descreve uma curva que é o limite de um sequência de polígonos

uniformemente convergente. A curva de Sierpinski pode ser definida implicitamente por um sistema de equações.

Figura 59 – Primeiros passos da construção da curva de Sierpinski



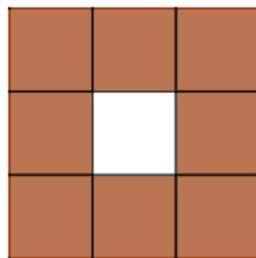
Fonte: Sagan, Hans. Space-Filling Curves (1994) p. 51

A curva de Sierpinski é uma curva fechada, se diferenciando das curvas de Peano e Hilbert que são abertas. No livro Space-Filling Curves (1994), do autor Sagan (1994), encontra-se uma análise detalhada das curvas de preenchimento espacial.

3.3.2 Tapete de Sierpinski

Este fractal possui um processo iterativo semelhante ao do triângulo de Sierpinski, é obtido ao se dividir um quadrado em nove quadrados congruentes, e retirando o quadrado central (Figura 60). O processo é repetido nos quadrados restantes. Ao dividir um quadrado em nove partes congruentes aplica-se sobre seus lados um fator de redução igual a $\frac{1}{3}$, dividindo cada lado em três partes congruentes e apenas se obtêm 8 quadrados semelhantes ao inicial, já que o quadrado central é retirado.

Figura 60 – Primeiro passo da construção do tapete de Sierpinski



Fonte: O autor, 2019

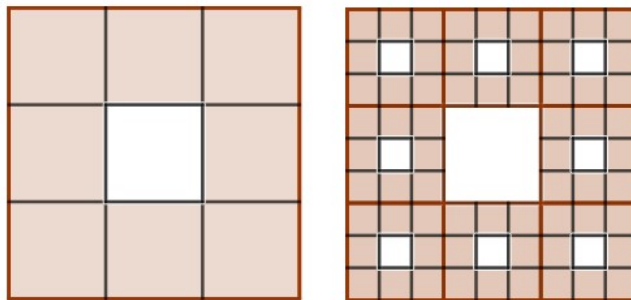
A dimensão do tapete é dada por:

$$d_{Tap.Sierp} = \frac{\log(8)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1,8928$$

Assim como o triângulo de Sierpinski, a área do tapete tende a zero quando o processo é repetido infinitamente, porém o mesmo não pode estar contido em uma curva unidimensional. O processo iterativo de sua construção geométrica pode ser descrito pelos seguintes passos¹⁶:

- i. Construa um quadrado de lado L ;
- ii. Divida os lados em 3 segmentos congruentes;
- iii. Ligue os extremos de segmentos opostos dividindo o quadrado em 9 quadrados congruentes;
- iv. Retire o quadrado central;
- v. Repita os passos *ii* a *iv* em cada um dos quadrados restantes;
- vi. Repita o processo infinitamente.

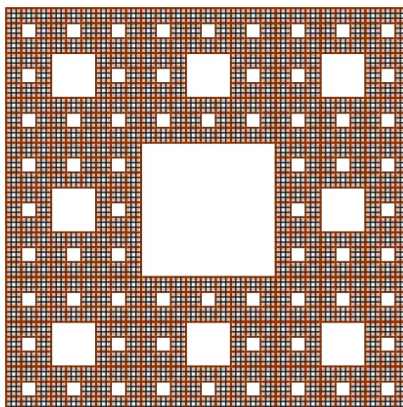
Figura 61 – Primeiros passos da construção do tapete de Sierpinski



Fonte: O autor, 2019

¹⁶ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/rxguwccn>>

Figura 62 – Tapete de Sierpinski



Fonte: O autor, 2019

O tapete de Sierpinski também pode ser obtido por um jogo probabilístico idêntico ao jogo do caos, utilizado para construir o triângulo de Sierpinski. Como cada vértice deve possuir a mesma probabilidade de ser escolhido deve-se usar um dado com um número de faces múltiplo de 4, por exemplo, com formato de tetraedro regular, associando cada vértice do quadrado a uma face do dado, ou com formato de octaedro regular sendo cada vértice do quadrado associado a duas faces do dado, sendo que vértices distintos não podem estar associados a uma mesma faces.

3.3.3 Árvore de Pitágoras

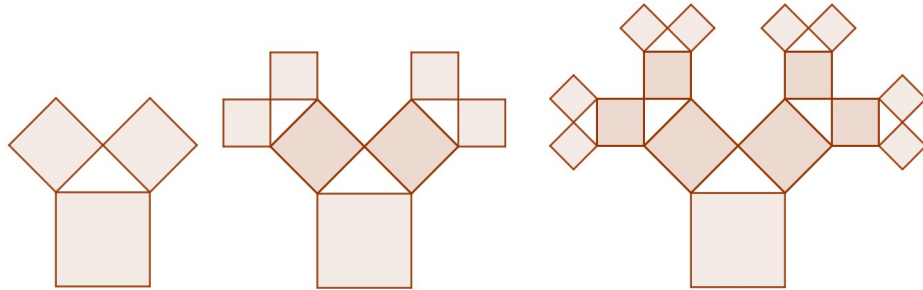
Fractal que recebe o nome do matemático grego Pitágoras (571a.C - 497a.C) pois decorre da visualização da utilização do teorema de Pitágoras. Construído a partir de quadrados que se unem formando triângulos retângulos isósceles e que vão sendo reduzidos com fator igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quando o processo de construção é repetido muitas vezes percebe-se que a imagem gerada tem o aspecto de uma árvore, sendo visível a autossemelhança (Figura 64). Segundo Reis (2015), a árvore de Pitágoras pode ser construída seguindo os passos do seguinte processo¹⁷.

- i. Construa um quadrado de lado L, e no lado superior construa um triângulo retângulo isósceles de tal forma que a hipotenusa coincida com o lado do quadrado;
- ii. Em cada cateto do triângulo construa um quadrado com o lado coincidindo com o cateto do triângulo;
- iii. Repetir o processo em cada novo quadrado;
- iv. Repetir o processo indefinidamente.

¹⁷ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/jz3yjsap>>

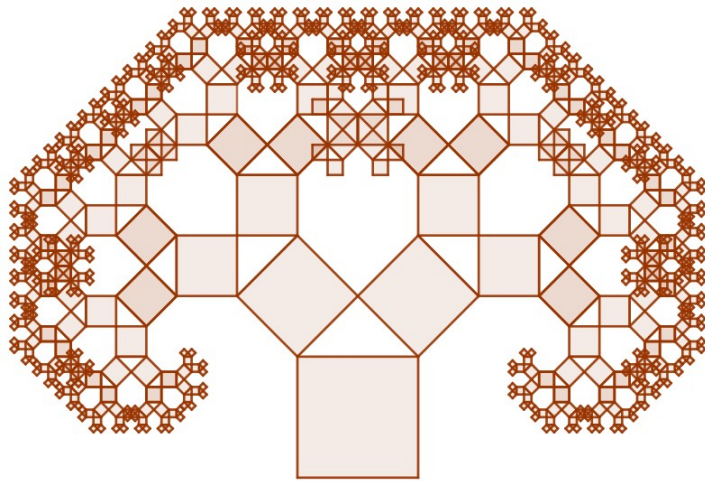
As imagens a seguir (Figura 63) mostram os primeiros passos da construção da árvore.

Figura 63 – Primeiros passos da construção da árvore de Pitágoras



Fonte: O autor, 2019

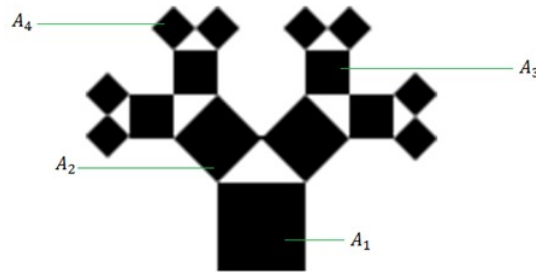
Figura 64 – Árvore de Pitágoras



Fonte: O autor, 2019

Um fato interessante sobre a árvore de Pitágoras é que a soma das áreas dos quadrados obtidos em cada passo do processo de construção, é sempre igual à área do quadrado inicial. Utilizar um fator de redução igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ para reduzir os lados dos quadrados implica que o fator de redução das áreas é igual a $(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Observando a figura a seguir (Figura 65) pode constatar-se tal fato.

Figura 65 – Áreas dos quadrados na árvore de Pitágoras



Fonte: O autor, 2019

Como cada quadrado origina, na etapa seguinte, dois novos quadrados, o número de quadrados obtidos em cada passo da construção duplica o número de quadrados do passo anterior, tem-se

$$A_1 = L^2 \text{ e } A_2 = \frac{L^2}{2} \text{ temos } 2 \text{ áreas } A_2, \text{ ou seja, } 2 \cdot A_2 = A_1$$

$$A_3 = \frac{L^2}{4} \Rightarrow 4 \cdot A_3 = A_1$$

$$A_4 = \frac{L^2}{8} \Rightarrow 8 \cdot A_4 = A_1$$

Generalizando

$$A_n = \frac{L^2}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} \cdot A_n = A_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 0$$

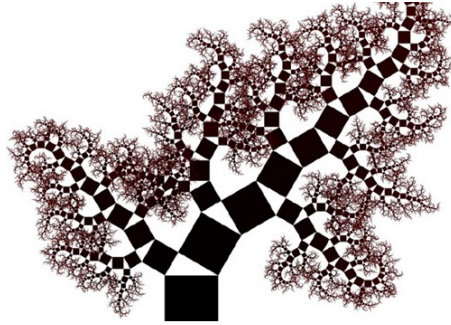
Ao somar as áreas de todos os quadrados obtidos no processo iterativo de construção da árvore obtém-se

$$A_1 \cdot (2^n - 1)$$

Quando n tende ao infinito, a soma é também infinita

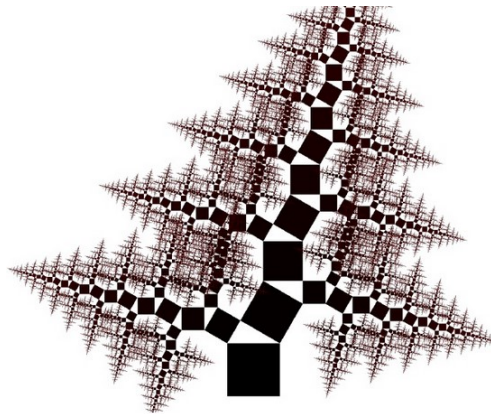
Uma variação da árvore de Pitágoras se dá quando se trocam os triângulos por triângulos de lados 3 - 4 - 5 (Figura 66). No primeiro passo do processo iterativo constrói-se um quadrado com lado medindo 5 unidades cujo lado superior vai ser a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos medindo 3 e 4 unidades. Durante o processo pode mudar-se aleatoriamente a orientação dos triângulos retângulos, o que resulta em uma mudança aleatória no crescimento do fractal, tornando-o mais parecido com uma árvore real. Para mais detalhes sobre o assunto, recomenda-se o artigo “**Anatomy of the Pythagoras’ Tree**” de Teia (2016). As figuras a seguir (Figuras 66 a 68) apresentam variações desse fractal.

Figura 66 – Árvore de Pitágoras 3-4-5



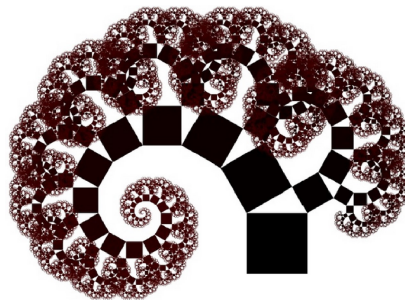
Fonte: <<https://semsofismos.wordpress.com/2014/09/29/trabalho-i-matematica-e-arvores/>>
Acesso em jan. 2019

Figura 67 – Árvore de Pitágoras variação 1



Fonte: <<https://semsofismos.wordpress.com/2014/09/29/trabalho-i-matematica-e-arvores/>>
Acesso em jan. 2019

Figura 68 – Árvore de Pitágoras variação 2



Fonte: <<https://semsofismos.wordpress.com/2014/09/29/trabalho-i-matematica-e-arvores/>>
Acesso em jan. 2019

3.4 Espirais de Quadrados

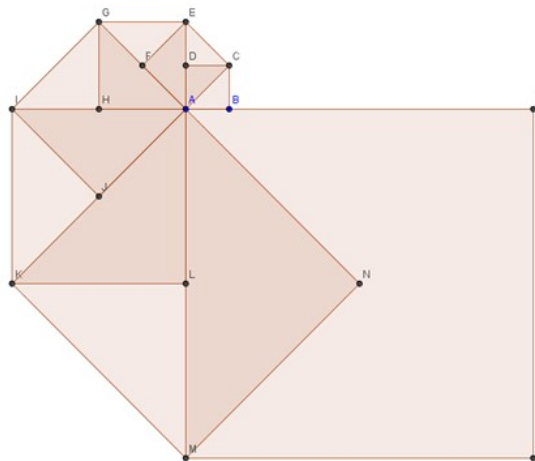
Ao associar espirais e quadrados, é comum surgir em nossa mente a espiral de Fibonacci. Porém, essa não é a única espiral que se pode associar a quadrados. Nesta seção serão apresentadas dois tipos de espirais com quadrados são elas a espiral do dobro da área seguindo e a espiral de Fibonacci.

3.4.1 Espiral do Dobro da Área

A espiral do dobro da área é uma espiral obtida por construção de uma sequência de quadrados cujos lados são as diagonais dos seus antecessores (Figura 69), desta forma, a área de cada novo quadrado é o dobro da área do quadrado anterior. Um dos problemas clássicos da Grécia Antiga é o da duplicação do cubo, que consiste em construir, utilizando apenas régua e compasso, um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um cubo dado. Esse problema teve origem em outro, solucionado pelos Pitagóricos, no qual se pedia para construir um quadrado com o dobro da área de um quadrado dado, a solução para tal problema consiste em usar a diagonal como lado do novo quadrado, ou seja, construir o novo quadrado sobre a diagonal do quadrado dado.

Este problema foi descrito por Platão (2001)¹⁸ no seu diálogo “**Ménon**”. Nesse diálogo, Sócrates e um escravo dialogavam sobre a virtude, em determinado momento do diálogo Sócrates compara a virtude com as características geométricas de dois objetos. No desenvolvimento do diálogo Sócrates acaba por ensinar como duplicar a área de um quadrado utilizando a sua diagonal.

Figura 69 – Sequência de quadrados



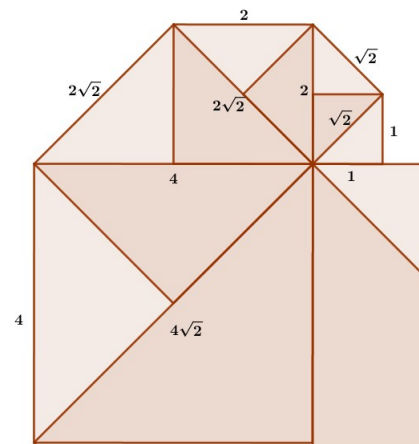
Fonte: O autor, 2019

¹⁸ Filósofo e matemática grego, viveu entre os anos 428 a.c até 348 a.c

Vários argumentos podem ser usados para justificar que a relação das áreas dos quadrados consecutivos desta espiral. Repare-se que a diagonal de cada quadrado divide-o em dois triângulos congruentes. O quadrado construído sobre essa mesma diagonal é formado por quatro desses triângulos, assim a área do primeiro quadrado é duplicada. Na figura acima o quadrado $ABCD$, de lado unitário, é o primeiro quadrado da sequência e o quadrado $ACEF$, construído sobre a diagonal AC possui lado com medida $\sqrt{2}$ e área igual a 2 u.a. , ou seja, o dobro da área do quadrado inicial.

Esse processo pode ser repetido infinitamente, gerando quadrados cada vez maiores. Esta sequência, também, pode ser obtida por recurso a duas transformações, uma rotação de 45° e uma dilatação de fator igual a $\sqrt{2}$, e tal como a espiral de Teodoro, a espiral do dobro da área possui uma relação com os números irracionais, em especial com a raiz quadrada do número dois (Figura 70). Esse fato decorre da relação entre a medida da diagonal do quadrado e a medida do lado L , $d = L \cdot \sqrt{2}$.

Figura 70 – Medidas das diagonais

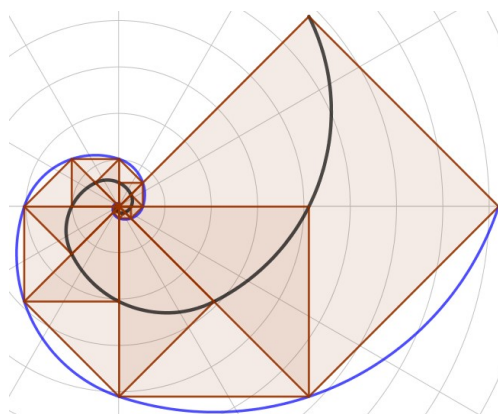


Fonte: O autor, 2019

Ao continuar a construção, diferente do que ocorria com a espiral de Teodoro, a espiral de quadrados possui segmentos que se sobrepõem, visto que todos os quadrados da sequência são obtidos rodando o seu antecessor 45° . Quando a quantidade de repetições do processo de construção tende para um número muito grande, nota-se que os centros dos quadrados, assim como seus vértices, estão sobre as curva de espirais, que são denominadas espirais do dobro da área, e ambas tendem para o mesmo ponto, o vértice A do primeiro quadrado da sequência¹⁹.

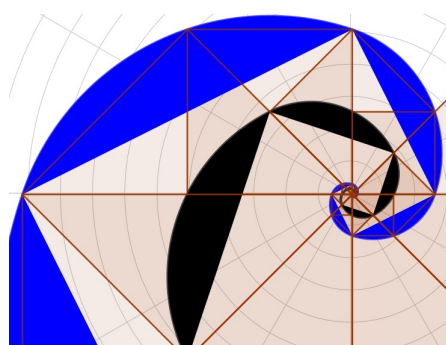
¹⁹ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/r6m3mubw>>

Figura 71 – Espirais do dobro da área



Fonte: O autor, 2019

Figura 72 – Espirais tendendo ao centro



Fonte: O autor, 2019

Essa sequência possui grande importância histórica na matemática. Segundo Gonçalves e Possani (2009), acredita-se que a diagonal do quadrado e seu lado, assim como a diagonal e o lado de um pentágono regular, foram os primeiros pares de segmentos incomensuráveis descobertos e estudados pelos pitagóricos. Esses segmentos “abriram” as portas para o estudo dos números irracionais, no entanto, Pitágoras considerava que números como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{5}$ (irracionais) “maculavam” a perfeição dos números conhecidos (os números racionais) e, portanto não poderiam existir. Mas ele não conseguiu refutar os argumentos lógicos que comprovavam a existência de tais números.

A partir daí os números irracionais entraram na obscuridade, e foi somente com Eudoxo de Cnido (408 a.C - 355 a.C), matemático grego, que eles voltaram a ser estudados. O décimo livro da série “**Os Elementos**” de Euclides (2009) (século III a.c – morte desconhecida) é dedicado à classificação de números irracionais, mas só em 1872 que o

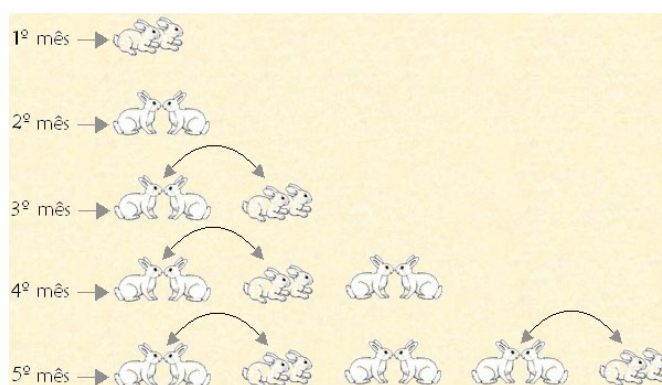
matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916) fundamentou, em termos rigorosos, a existência dos números irracionais que a geometria sugerira havia mais de vinte séculos.

3.4.2 Espiral de Fibonacci

A espiral de Fibonacci está diretamente ligada à sequência de Fibonacci e à razão áurea, sendo esta definida como o limite da razão entre dois termos consecutivos da sequência. O primeiro exemplo da sequência foi apresentado por Leonardo Fibonacci (1175-1250) na obra “**Liber Abaci**” publicada em 1202, nesse trabalho Fibonacci apresenta o exemplo da reprodução de coelhos.

Fibonacci considerou um casal de coelhos imaturos que só estariam aptos a se reproduzirem após completarem um mês de vida, e depois desse período dariam origem, mensalmente, a um novo casal de coelhos (deve-se ter em mente que a gestação dos coelhos possui duração de 31 dias aproximadamente). Cada novo casal passaria pelo mesmo processo, ou seja, lavaria um mês para amadurecer e ser capazes de se reproduzir, originando um novo casal. Nesse problema considera-se que cada coelho só se reproduz com seu par, nascido da mesma fêmea e no mesmo mês, a tabela a seguir apresenta a esquematização dos primeiros meses.

Figura 73 – Esquematização dos coelhos



Fonte: O<<https://matematicamentecontando.blogspot.com/2015/05/os-coelhos-de-fibonacci.html>> Acesso em set. 2019

Analisando as informações e dados do problema, percebe-se que a partir do segundo mês a quantidade de casais de coelhos é dada pela soma das quantidades dos dois meses que o antecedem. Ao escrever os números obtidos em cada mês, Fibonacci percebeu que estes formavam um sequência de números naturais com propriedades bem peculiares. A seguir listam-se os primeiros termos da sequência.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 521, ...

Denotando por F_n o termo de posição n da sequência, tem-se a relação de recorrência que permite obter os termos desta sequência

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

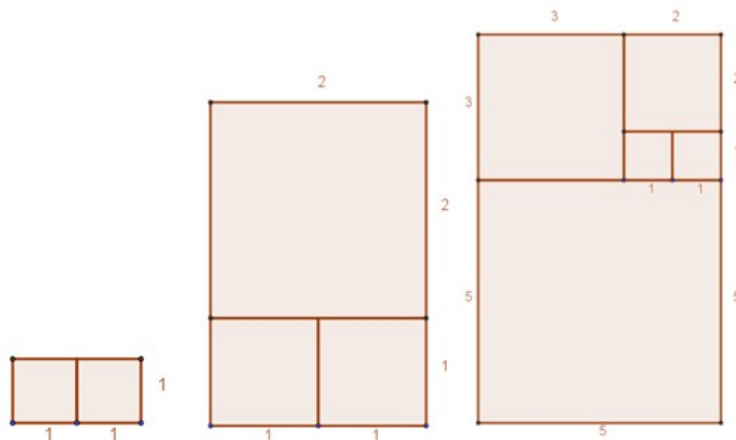
O limite da razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci assume valor irracional 1,61803398875... que é a razão áurea (número de ouro). Denotada por ϕ (phi), a razão áurea possui propriedades algébricas bem peculiares, por exemplo, seu quadrado e seu inverso podem ser obtidos das seguintes maneiras:

$$\phi^2 = \phi + 1 = 2,61803398875... \text{ e } \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = 0,61803398875...$$

O verdadeiro potencial da sequência de Fibonacci e da razão áurea podem ser observados ao se construir objetos que satisfazem às suas propriedades e proporções, por exemplo, se considerarmos a sequência de quadrados adjacentes cujos lados têm medidas que seguem os números da sequência, justaposição desses quadrados dá origem a retângulos denominados retângulos áureos (Figura 74), já que a razão entre seus lados maior e menor nessa ordem, tende para ϕ . No interior dessa sequência de quadrados surge a espiral de Fibonacci (Figura 75).

O primeiro passo para determinar esta sequência é a construção de dois quadrados adjacentes, de lado unitário, representando os primeiros dois termos da sequência de Fibonacci, em seguida constrói-se um novo quadrado, adjacente aos iniciais, cujo lado é dado pela soma dos lados dos quadrados anteriores. Procede-se da mesma forma com esse novo quadrado e em seguida repete-se com todos os demais quadrados que vão sendo obtidos.

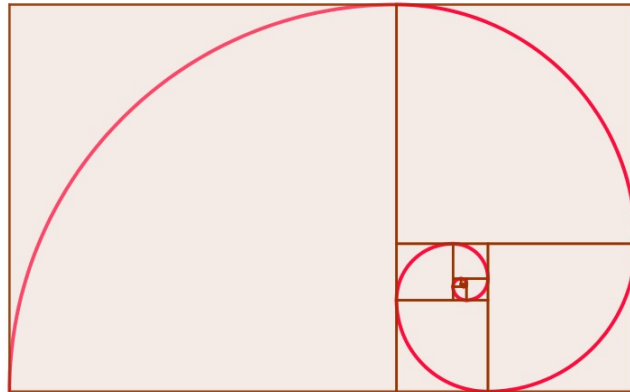
Figura 74 – Representação geométrica da sequência de Fibonacci



Fonte: O autor, 2019

Inscrita na sequência de quadrados tem-se a espiral de Fibonacci, formada pela união de arcos de $1/4$ de circunferência cujos centros são vértices dos quadrados situados para o interior do retângulo.

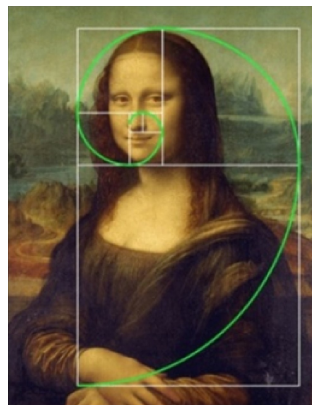
Figura 75 – Espiral Áurea



Fonte: O autor, 2019

Os retângulos áureos e a espiral de Fibonacci são comumente encontrados em obras de arte, construções, corpo humano, plantas, animais, etc. Esse fato a torna uma das sequências mais conhecidas do mundo. Algumas das obras de arte mais admiradas apresentam dimensões e proporções que se aproximam da razão áurea, pode tomar-se como exemplo o quadro da Mona Lisa²⁰ de Leonardo da Vinci (1452-1519).

Figura 76 – Mona Lisa (da Vinci - 1503)

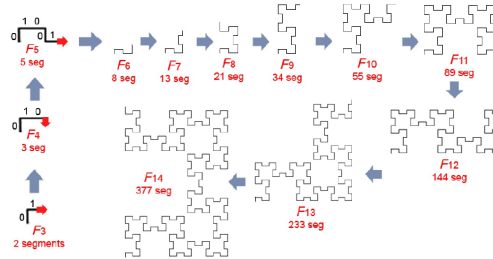


Fonte: <<https://www.chiefdesign.com.br/proporcao-aurea/>> Acesso em jan. 2019

²⁰ Existe uma grande dúvida sobre a utilização das proporções áureas por Leonardo da Vinci, já que o mesmo não deixou nenhum documento que comprove tal fato

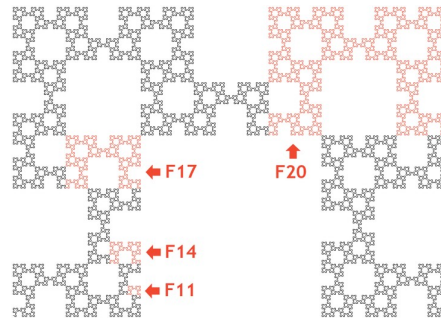
sequência de Fibonacci. No esquema a seguir (Figura 78) tem-se as imagens, de f_3 até f_{14} , representadas pela sequência de segmentos.

Figura 78 – Relação entre f_n e F_n



Fonte: Dumaine, Alex. The Fibonacci word Fractal p.2, 2009

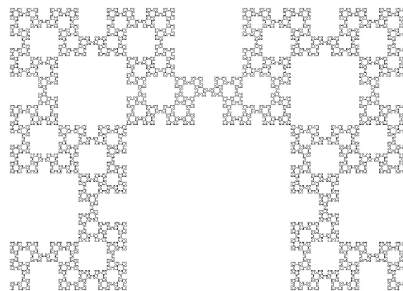
Figura 79 – Autossemelhança da curva



Fonte: Dumaine, Alex. The Fibonacci word Fractal p. 7, 2009

Quando o processo de construção é repetido infinitas vezes, ou seja, quando a imagem f_n , para n tendendo ao infinito, é associada a uma sequência de segmentos, obtêm-se a seguinte estrutura fractal

Figura 80 – Fibonacci word fractal

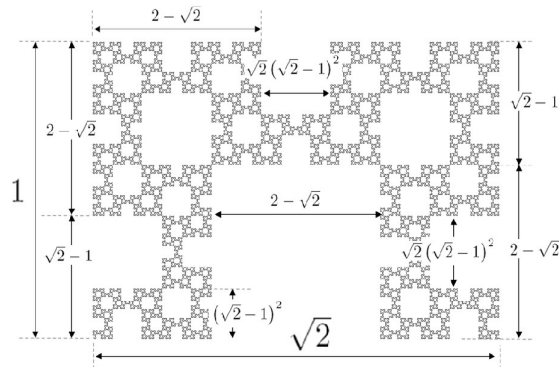


Fonte: Dumaine, Alex. The Fibonacci word Fractal p. 1, 2009

Mostra-se que o fator de redução aplicado em cada etapa do processo é igual a $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ e a dimensão fractal é dada por:

$$d = 3 \cdot \frac{\log(\phi)}{\log(1 + \sqrt{2})} = 1,6379\dots$$

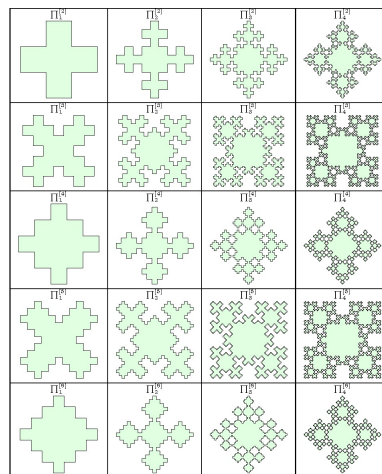
Figura 81 – Proporções do Fibonacci word



Fonte: Dumaine, Alex. The Fibonacci word Fractal p. 8, 2009

O fractal Fibonacci word possui algumas variações denominadas Fibonacci snowflakes (flocos de neve de Fibonacci), que são obtidas ao se modificar o ângulo de rotação entre segmentos consecutivos. A figura a seguir apresenta algumas dessas variações (Figura 82).

Figura 82 – Fibonacci snowflakes

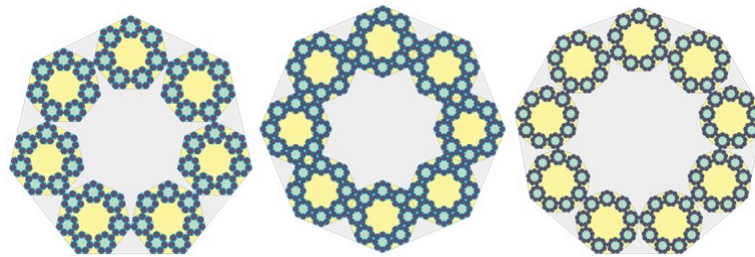


Fonte: <<http://www.abovetopsecret.com/forum/thread1239697/pg3>> Acesso em jul. 2019

4 FRACTAIS EM POLÍGONOS REGULARES

Algum dos padrões fractais apresentados no capítulo anterior podem ser aplicados aos demais polígonos regulares, por exemplo, o padrão de construção do floco de neve de Koch, que ao ser aplicado em um polígono com n lados resulta em fractais denominados $n - flakes$. No capítulo anterior foram apresentados o pentaflake e o hexaflake, a seguir (Figura 83) tem-se outros exemplos de flocos de neves.

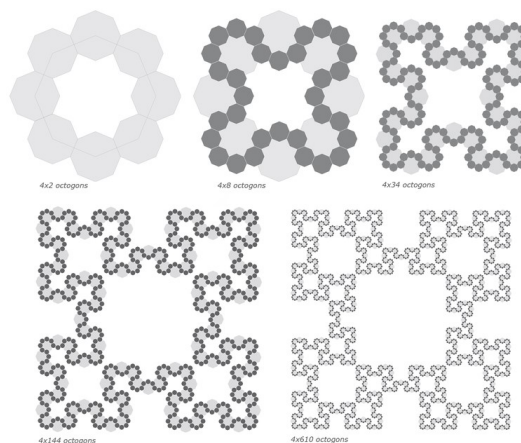
Figura 83 – Heptaflake, octaflake e eneaflake



Fonte: <<https://en.wikipedia.org/wiki/N-flake>> Acesso em jan. 2019

Até mesmo o fractal Fibonacci word pode ser obtido a partir de octógonos regulares, como mostra a figura a seguir.

Figura 84 – Fibonacci word fractal em octógonos

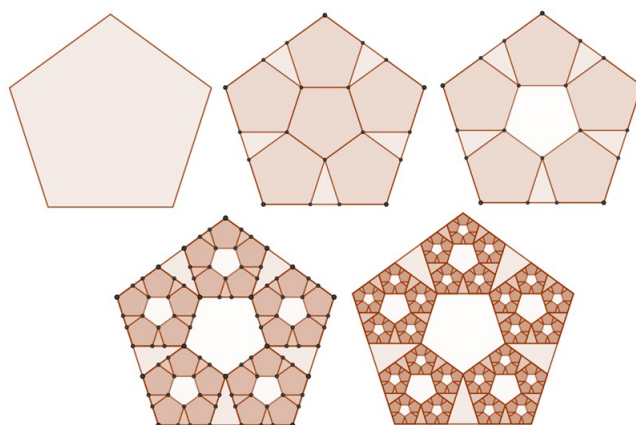


Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_word_fractal> Acesso em jul. 2019

Também se pode tomar como exemplo o padrão de construção do triângulo de Sierpinski, que pode ser aplicado em quadrados (Tapete de Sierpinski), pentágonos, hexágonos e assim por diante. Nesse padrão de construção divide-se o polígono, no qual se

quer aplicar o processo iterativo, no maior número de polígonos congruentes e semelhantes ao inicial (reduzidos por um fator de escala r) sem que existam sobreposições. Em seguida, retira-se o polígono central e repete-se o processo com os demais polígonos, como no exemplo a seguir¹.

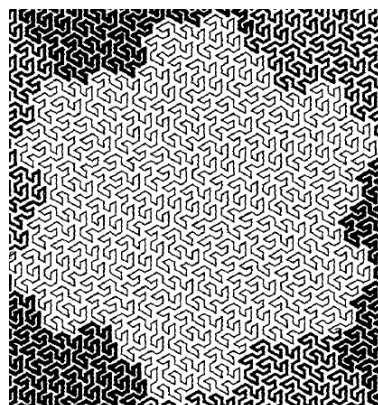
Figura 85 – Padrão de Sierpinski no pentágono regular



Fonte: O autor, 2019

Existem os mais variados tipos de fractais em polígonos regulares, desde as curvas de preenchimento espacial até às curvas mais irregulares. Por exemplo, a **curva de Peano – Gosper** (Figura 86), originalmente conhecida como “**flowsnake**” estudada por Mandelbrot.

Figura 86 – Curva de Peano - Gosper

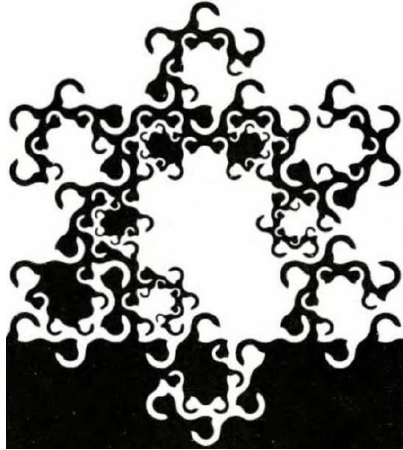


Fonte: Mandelbrot, Benoit. The Fractal Geometry of Nature p. 47, 1977

¹ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/acrxqj8f>>

Outro de exemplo de fractal em polígonos regulares (com mais do que 5 lados) é a **curva da árvore de macacos** (Figura 87), mais conhecida como “**Monkey’s Tree curve**”.

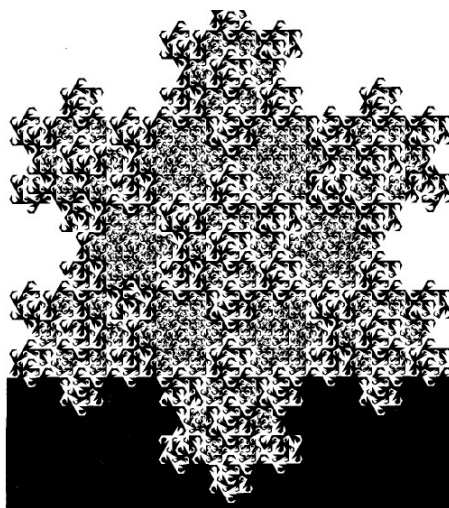
Figura 87 – Fractal Monkey’s Tree curve



Fonte: Mandelbrot, Benoit. The Fractal Geometry of Nature p. 31, 1977

Uma variação da curva “Monkey’s Tree curve”, é a “**Snowflake Sweeps**” (Figura 88), que possui dimensão fractal igual a 2, ou seja, trata-se de uma curva de preenchimento espacial.

Figura 88 – Fractal Snowflake Sweeps



Fonte: Mandelbrot, Benoit. The Fractal Geometry of Nature p. 68, 1977

Prosseguiremos o capítulo estudando padrões fractais gerados pelas diagonais de um polígono regular de n lados e suas interseções, além das espirais internas de um polígono,

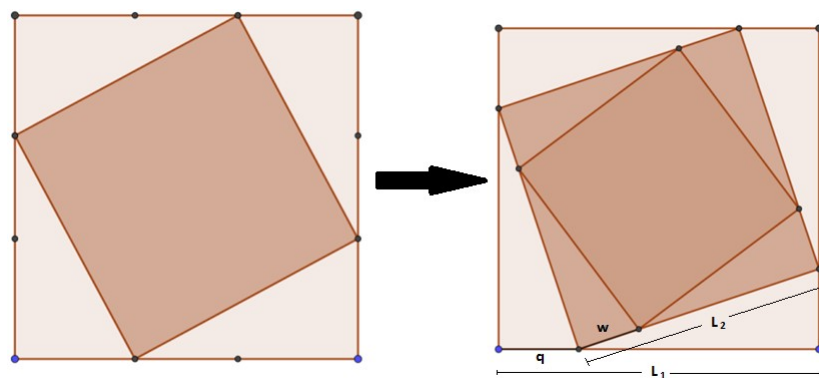
obtidas a partir de polígonos semelhantes. Tais estruturas possuem propriedades geométricas muito peculiares e associação com objetos da natureza.

4.1 Espirais Internas de um Polígono Regular

Dados um quadrado fixo e um quadrado nele inscrito, pode perguntar-se: Qual a área mínima do quadrado inscrito? Neste caso qual a menor distância entre dois vértices, tomados nos dois quadrados? A resposta à primeira questão leva a pensar nas possíveis posições que o quadrado inscrito pode ir assumindo até que os seus vértices se situem sobre os pontos médios dos lados do quadrado inicial, e isto conduz a nova pergunta: O que ocorre se o processo de construção de quadrados inscritos for infinito?

Para se ter uma noção do comportamento de uma sequência de quadrados inscritos e algumas das suas propriedades geométricas é necessário proceder à sua construção, mas isso pode se tornar bem exaustivo quando realizado manualmente, com régua e compasso porém, essas construções podem ser facilmente executadas e analisadas, ao se utilizar as ferramentas do GeoGebra. Para tal deve-se considerar, inicialmente, um quadrado construído com a ferramenta **Polígono Regular**². Sobre os lados desse quadrado define-se uma distância, que pode ser variável, para determinar os vértices do quadrado inscrito. No interior desse novo quadrado repete-se o processo, mantendo a proporção das distâncias entre vértices consecutivos de dois quadrados, como indicado na figura a seguir.

Figura 89 – Passo inicial da construção da sequência de quadrados



Fonte: O autor, 2019

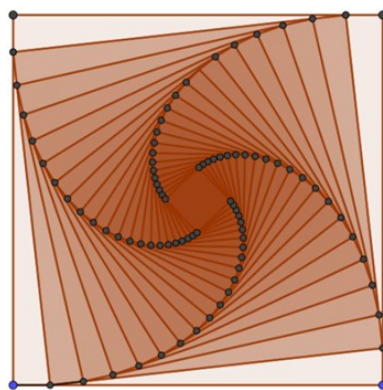
Como as proporções são mantidas, tem-se:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{q}{w}$$

² O passo a passo da utilização das ferramentas necessárias para a construção de uma estrutura fractal será apresentado no capítulo 5

Repetindo o processo indefinidamente obtêm-se uma sequência de quadrados, cujos vértices se encontram sobre as curvas de quatro espirais que tendem para o mesmo ponto, o centro do quadrado inicial (Figura 90)³.

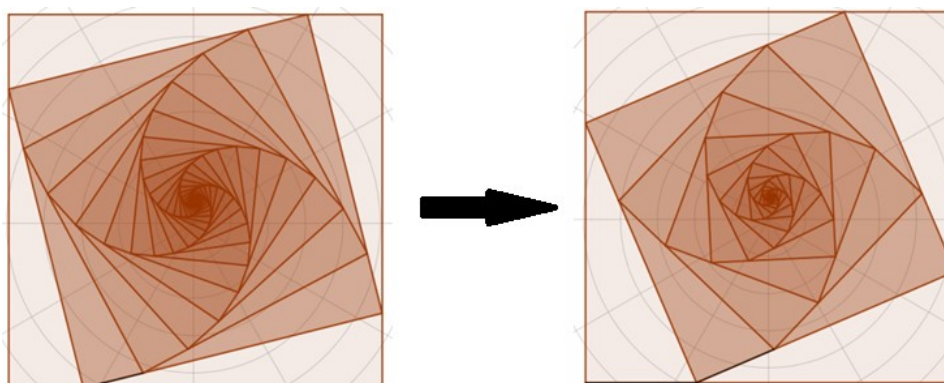
Figura 90 – Vértices dos quadrados sobre espirais



Fonte: O autor, 2019

Mesmo modificando a distância inicial entre vértices as proporções são mantidas e os vértices permanecem sobre as espirais (Figura 91).

Figura 91 – Modificação das distâncias entre vértices



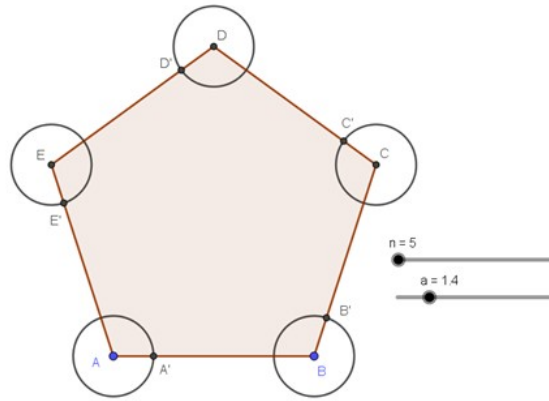
Fonte: O autor, 2019

Esse processo iterativo pode ser aplicado sobre qualquer polígono regular, por exemplo, um pentágono regular com pentágonos semelhantes uns inscritos aos outros. Toma-se como objeto inicial um pentágono regular $ABCDE$, e sobre seus lados tomam-se os pontos A' , B' , C' , D' e E' cuja menor distância até os vértices do pentágono inicial é dada por a , um valor real positivo e não nulo, associado ao controle deslizante de mesmo

³ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/sbyt7juk>>

nome. Na imagem a seguir (Figura 92) essa distância é dada pelos raios das circunferências de centros A , B , C , D , E .

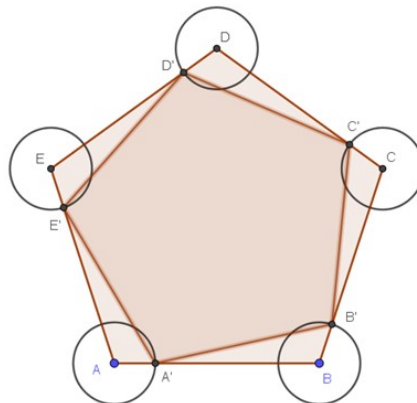
Figura 92 – Passo inicial da construção da sequência de pentágonos



Fonte: O autor, 2019

Os controles deslizantes indicados por n e a indicam, respectivamente, o número de vértices do polígono e a distância entre os pontos A e A' , B e B' , até E e E' , e essa pode variar de zero até o comprimento do lado do pentágono. Sobre os pontos A' , B' , C' , D' e E' constrói-se um novo pentágono regular (Figura 93).

Figura 93 – Segundo passo da construção da sequência de pentágonos



Fonte: O autor, 2019

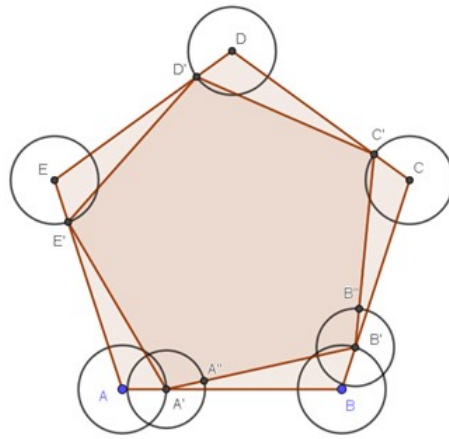
Sobre os lados deste novo pentágono repete-se o processo, ou seja, utilizando uma nova distância proporcional a “ a ” determinam-se os vértices do terceiro pentágono da sequência. Para determinar a constante de proporcionalidade entre os lados e distâncias calcula-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = k, k \in \mathbb{R}_*^+$$

para determinar a medida de $\overline{A'A''}$, raio da circunferência de centro em A' (Figura 94), tem-se a seguinte proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'A''}} = k \text{ pelo que } \overline{A'A''} = \frac{\overline{AA'}}{k}$$

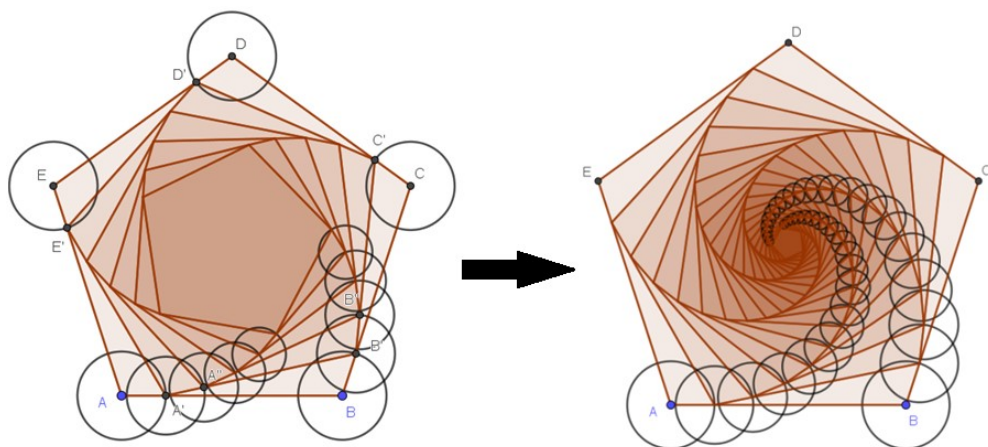
Figura 94 – Terceiro passo da construção da sequência de pentágonos



Fonte: O autor, 2019

Os raios das circunferências (Figura 95)⁴ que definem as distâncias entre vértices de polígonos consecutivos são termos de uma progressão geométrica decrescente de razão $1/k$.

Figura 95 – Passos avançados da construção da sequência de pentágonos

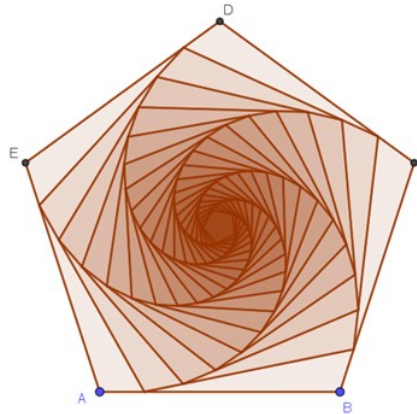


Fonte: O autor, 2019

⁴ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/d7vapnpj>>

Ao ocultar circunferências pode observar-se com clareza que os vértices de todos os pentágonos se situam sobre as curvas de espirais que tendem para o centro do polígono (Figura 96), análogo ao padrão observado na sequência de quadrados (Figura 90).

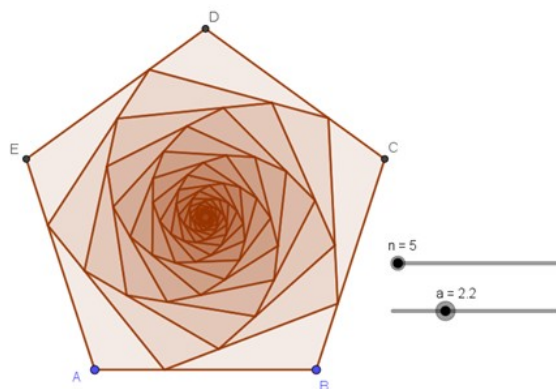
Figura 96 – Espiral interna do pentágono



Fonte: O autor, 2019

Ao alterar a distância entre vértices de pentágonos consecutivos, usando um controle deslizante, as espirais são mantidas e continuam a tender para o centro do polígono. A seguir (Figura 97) tem-se a sequência de pentágonos com distância entre vértices igual a 2, 2.

Figura 97 – Espiral interna do pentágono, $a = 2, 2$

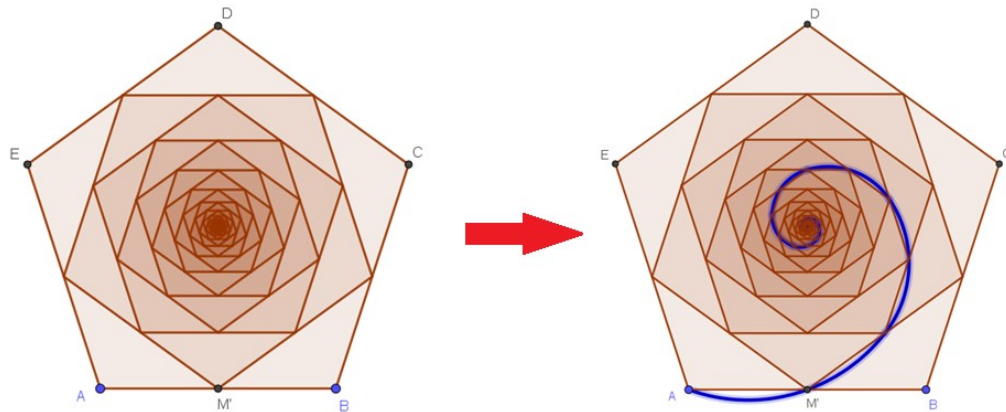


Fonte: O autor, 2019

Para $a = 3, 5$, metade da medida do comprimento de \overline{AB} , os vértices dos pentágonos permanecem sobre as curvas das espirais, embora estas não sejam tão perceptíveis (Figura 98)⁵.

⁵ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/jkysjea7>>

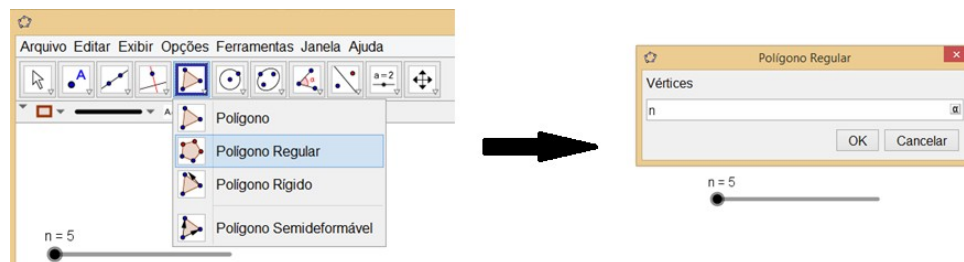
Figura 98 – Vértices sobre pontos médios



Fonte: O autor, 2019

O padrão descrito é observável em todos os tipos de polígonos regulares. Para facilitar a construção desse padrão nos demais polígonos pode-se utilizar, no GeoGebra, as ferramentas **Polígono Regular**, na qual ao informar o número de vértices que o polígono deverá usar-se ferramenta **Controle Deslizante**. Como não se quer fixar a quantidade de vértices do polígono, cria-se um controle deslizante n (Figura 99), que deve variar de 3 até 20 (podem utilizar-se valores maiores) e incremento 1.

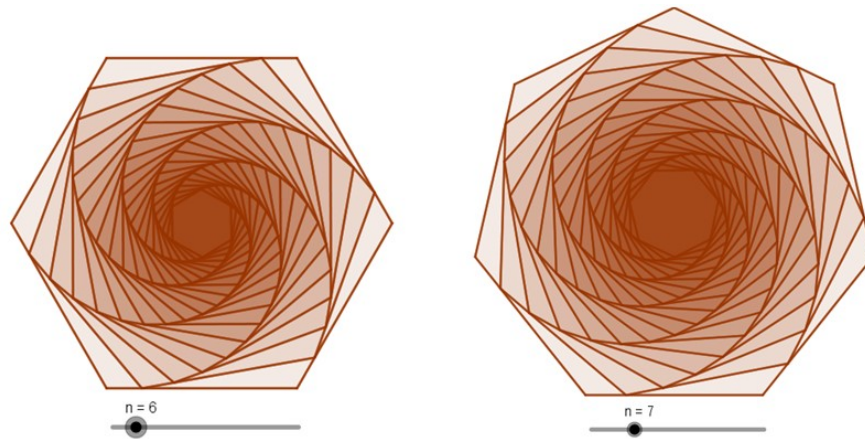
Figura 99 – Ferramenta Polígono Regular



Fonte: O autor, 2019

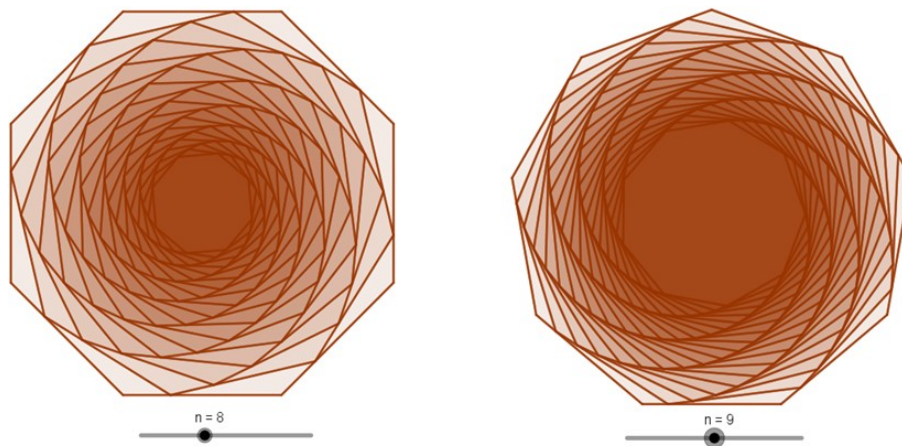
Para qualquer valor de n , os vértices dos polígonos estão sobre as curvas de espirais internas ao polígono inicial e essas sempre tendem para o centro do polígono. Quanto maior o número de lados do polígono, mais preenchida as espirais tende a ficar (Figuras 100 e 101). As imagens a seguir mostram o padrão em hexágonos, heptágonos, octógonos e eneágonos.

Figura 100 – Espirais internas do hexágono e heptágono



Fonte: O autor, 2019

Figura 101 – Espirais internas do octógono e eneágono



Fonte: O autor, 2019

Esse padrão em espiral também pode ser encontrado na natureza, por exemplo, em plantas do tipo Suculentas, cujo nome científico é *Aloe polyphylla* ou nome popular Babosa Espiral, em sementes de girassóis e em cones de pinheiros, pinhas ou no abacaxi.

Figura 102 – Suculenta e cone de Pinheiro

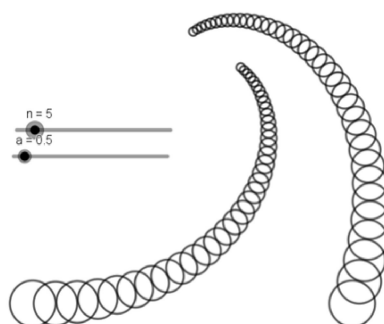


Fonte: <<https://www.jardineiro.net/plantas/babosa-espiral-aloe-polyphylla.html>> Acesso em jul. 2019

4.2 Entrelaçamento Fractal

Existe um segundo padrão escondido nas espirais internas dos polígonos regulares e esse é formado pelas circunferências utilizadas no processo de construção da sequência de polígonos da seção anterior. No software GeoGebra, existe a possibilidade de ocultar ou tornar visível um determinado objeto que foi utilizado durante a construção. No caso das espirais internas, foram ocultadas as circunferências descritas no terceiro passo da construção, agora podem voltar a ser visíveis, ocultando os polígonos da sequência (Figura 103). A imagem a seguir apresenta o caso para $n = 5$, onde é possível observar duas sequências de circunferências com raios cada vez menores.

Figura 103 – Sequência de circunferências



Fonte: O autor, 2019

Como as circunferências foram utilizadas para determinar a localização dos vértices dos polígonos que, por sua vez, pertencem às espirais, tem-se então duas sequências de circunferências cujos centros se situam sobre as espirais. O fato de haver apenas duas

sequências de circunferências deve-se ao uso da ferramenta Polígono Regular que precisa apenas dois vértices construir um novo polígono.

Ocorre, agora, averiguar qual o impacto que a variação do raio das circunferências vai gerar nestas “espirais”. Ora o raio é controlado por um controle deslizante, a , quando este assume o valor zero (Figura 104), os raios das circunferências da sequência também assumem valor igual a zero e pontos iniciais da construção, A e B .

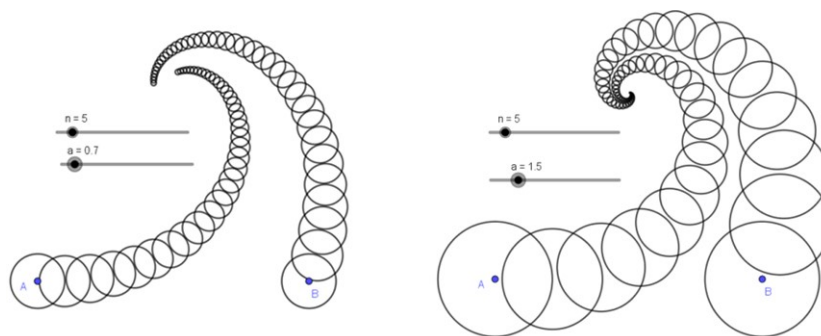
Figura 104 – Circunferências tendem aos pontos A e B $a = 0$



Fonte: O autor, 2019

Por outro lado, quando o controle deslizante começa a assumir valores cada vez maiores (Figura 105), tendendo ao seu valor máximo, ou seja, a assumindo valores cada vez mais próximos do comprimento de \overline{AB} ($AB = 7$), os raios das circunferências ficando maiores e as circunferências agrupam de maneira inesperada (Figura 106). Para valores de a no intervalo $[0; 1.5]$ (valores iniciais) os raios das circunferências aumentam todos na mesma proporção, isso resulta em uma aproximação dos centros das circunferências de espirais distintas, e a estrutura das espirais permanece intacta se tornando mais nítida.

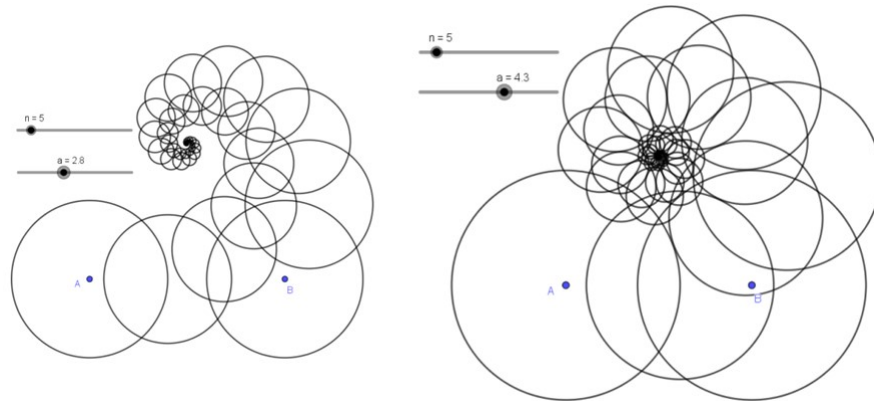
Figura 105 – Sequência de circunferências primeiras variações



Fonte: O autor, 2019

Quando a assume valores entre 1.5 e 4.3 (valores intermediários)(Figura 106) as circunferências, de espirais distintas, apresentam pontos de interseção.

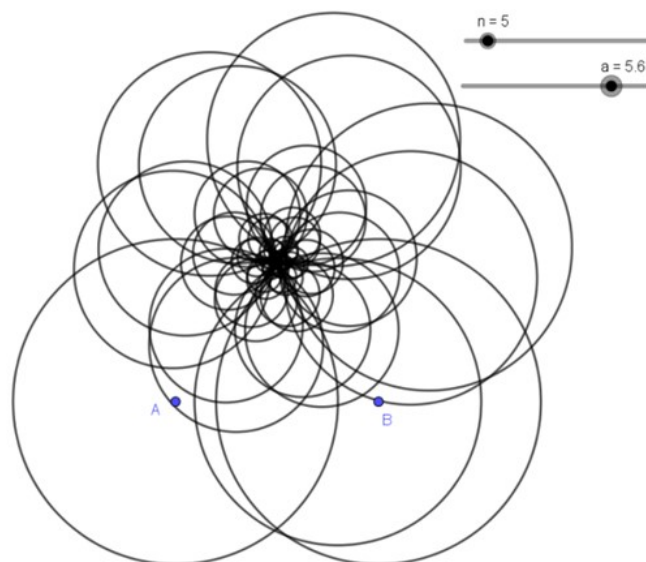
Figura 106 – Interseção entre as circunferências



Fonte: O autor, 2019

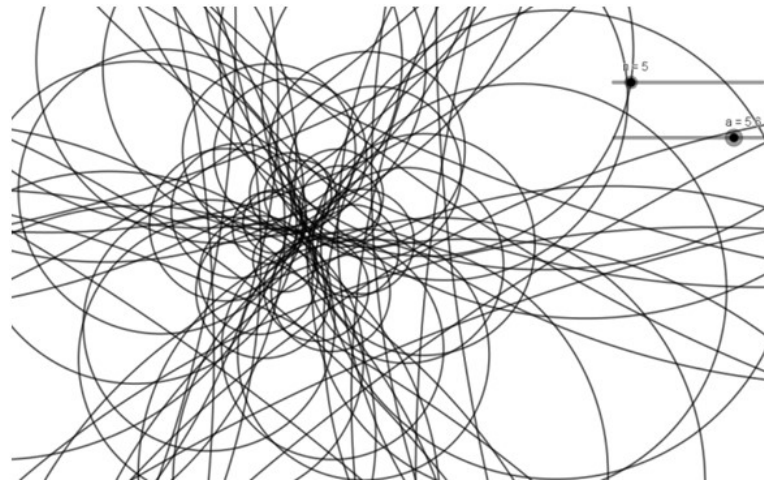
A partir desse momento se inicia um entrelaçamento e este apresenta características fractais, por exemplo, autossemelhança.

As características fractais ficam cada vez mais evidentes à medida que a assume valores cada vez maiores. As figuras 107 e 108 apresentam o momento “crítico” do entrelaçamento ($a = 5.6$), ou seja, quando esse se apresenta de maneira mais desorganizada e seu centro aparenta ser completamente caótico.

Figura 107 – Entrelaçamento fractal $a = 5.6$ 

Fonte: O autor, 2019

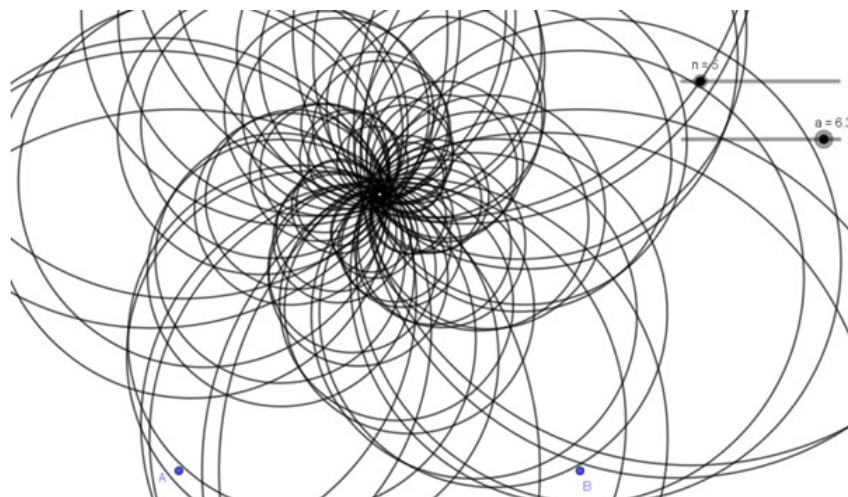
Figura 108 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 5.6$



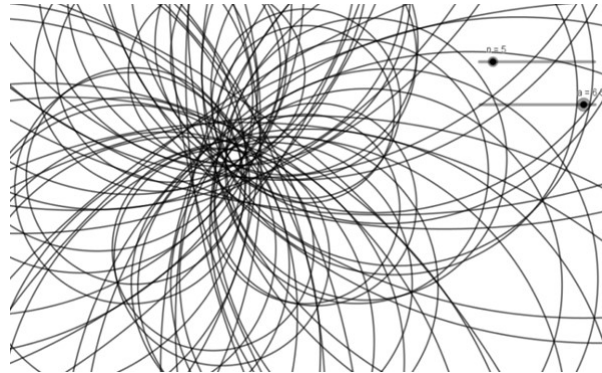
Fonte: O autor, 2019

Quando a assume valores maiores que 5.6, as circunferências tendem a um entrelaçamento menos irregular, ou seja, nesse momento o fractal se comporta como um conjunto de curvas suaves deixando suas características mais evidentes, e sua autossimilaridade pode ser percebida com mais facilidade. Nas próximas imagens são apresentados os “maiores” valores que a pode assumir e a ampliação de suas regiões centrais.

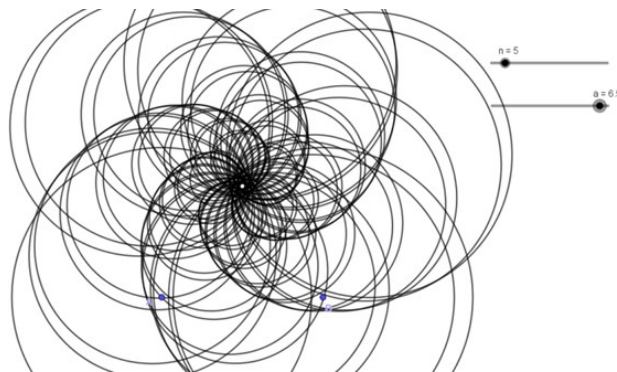
Figura 109 – Entrelaçamento fractal $a = 6.3$



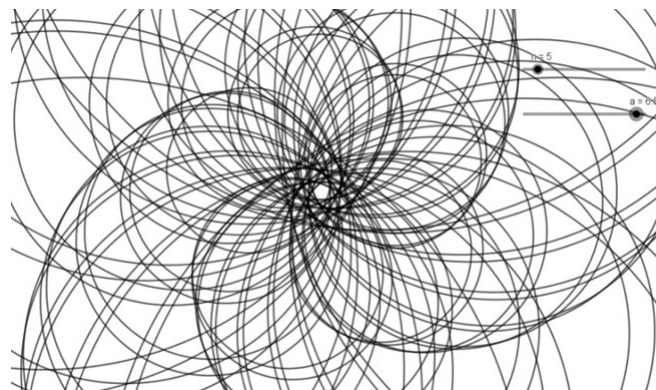
Fonte: O autor, 2019

Figura 110 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 6,3$ 

Fonte: O autor, 2019

Figura 111 – Entrelaçamento fractal $a = 6.5$ 

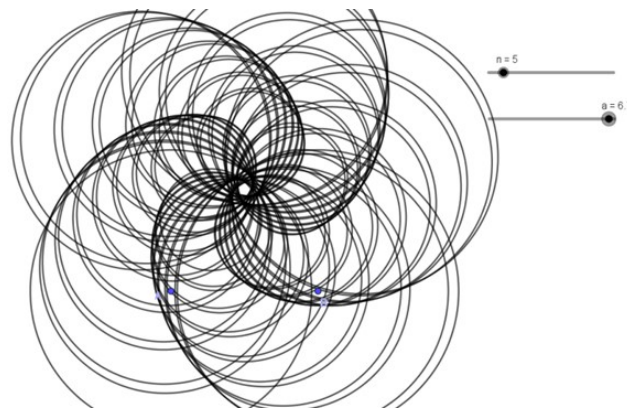
Fonte: O autor, 2019

Figura 112 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 6.5$ 

Fonte: O autor, 2019

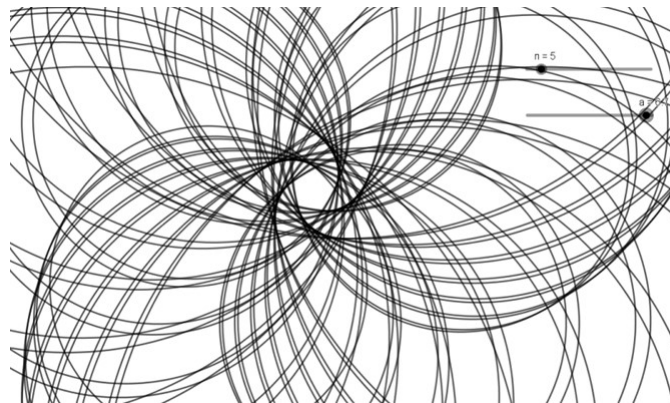
Nos três valores finais de a , a estrutura apresenta uma tendência de auto-organização, ou seja, quanto mais próximo a se encontra de valor máximo, no intervalo entre 6.7 e 7, as circunferências tendem a se unir cada vez mais, apresentando estrutura fractal semelhante a mandalas.

Figura 113 – Entrelaçamento fractal $a = 6.7$

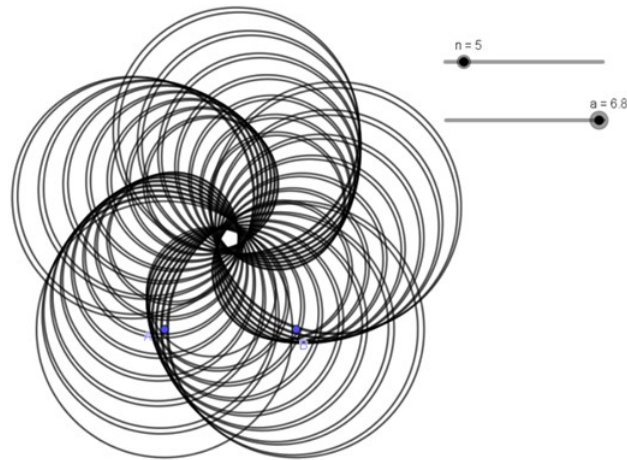


Fonte: O autor, 2019

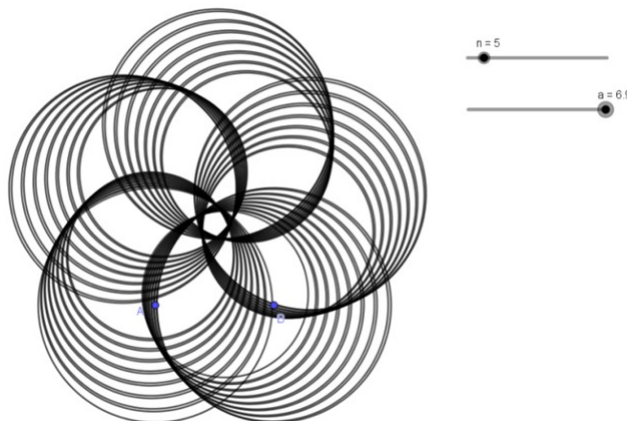
Figura 114 – Ampliação do entrelaçamento fractal $a = 6.7$



Fonte: O autor, 2019

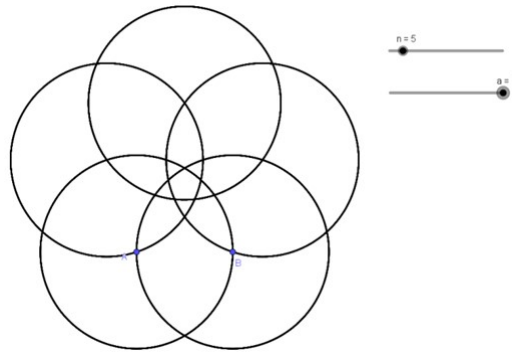
Figura 115 – Entrelaçamento fractal $a = 6.8$ 

Fonte: O autor, 2019

Figura 116 – Entrelaçamento fractal $a = 6.9$ 

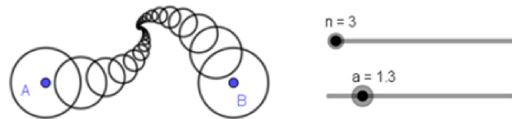
Fonte: O autor, 2019

Nesse estágio final (Figura 117), o fractal não apresenta mais o padrão irregular do início do processo, as circunferências e suas interseções possuem comportamento suave e ordenado. Quando a assume seu valor máximo, as circunferências coincidem em 5 circunferências distintas, de mesmo raio, cujos centros são os vértices do pentágono inicial. Isso ocorre, pois a tem valor igual ao comprimento de \overline{AB} , fazendo com que o vértice de todos os pentágonos da sequência de polígonos inscritos coincidam sobre os vértices do primeiro pentágono, ou seja, todos os pentágonos da sequência se sobrepõem.

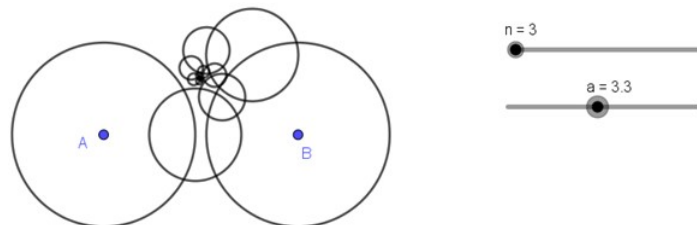
Figura 117 – Estágio final $a = 7$ 

Fonte: O autor, 2019

A variedade de entrelaçamentos apresentados acima, em um pentágono regular, pode ser observada em todos os polígonos regulares, e cada um deles apresenta determinados padrões com particularidades e características próprias. A sequência de imagens a seguir apresentam o padrão para $n = 3$, com algumas variações do valor de a e suas respectivas ampliações.

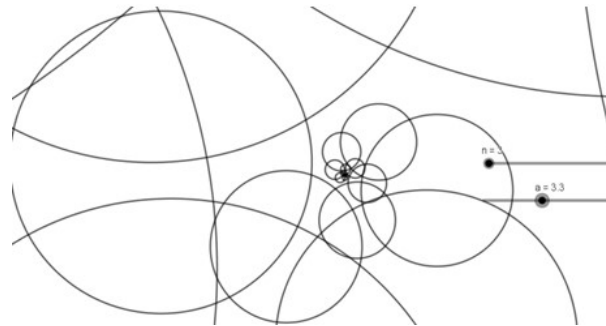
Figura 118 – Espirais de circunferências $n = 3$ e $a = 1.3$ 

Fonte: O autor, 2019

Figura 119 – Entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 3.3$ 

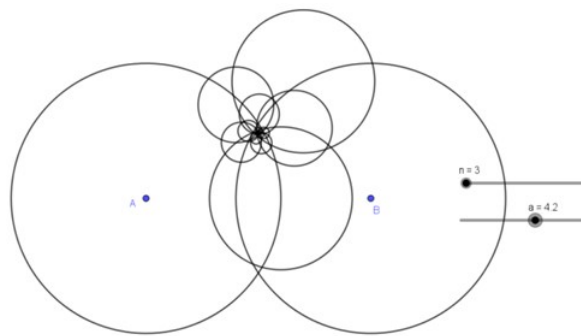
Fonte: O autor, 2019

Figura 120 – Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 3.3$



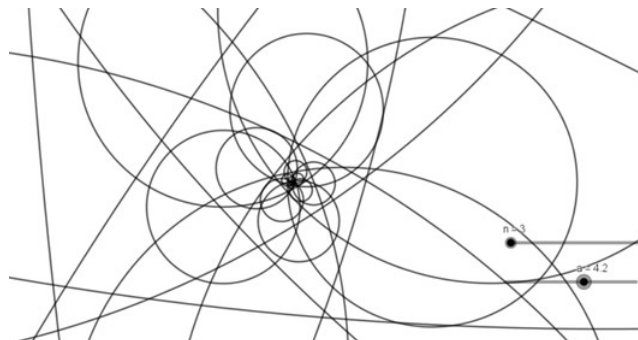
Fonte: O autor, 2019

Figura 121 – Entrelaçamento fractal $a = 4,2$ e $n = 3$



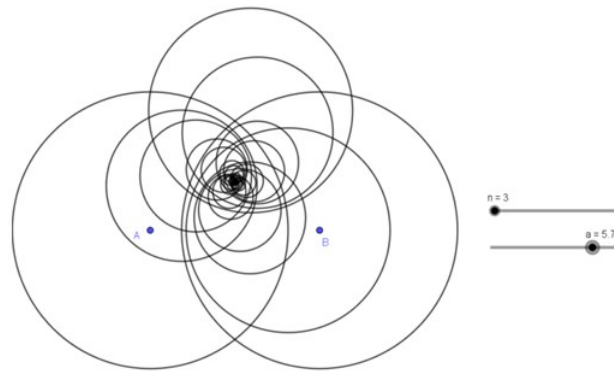
Fonte: O autor, 2019

Figura 122 – Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 4.2$



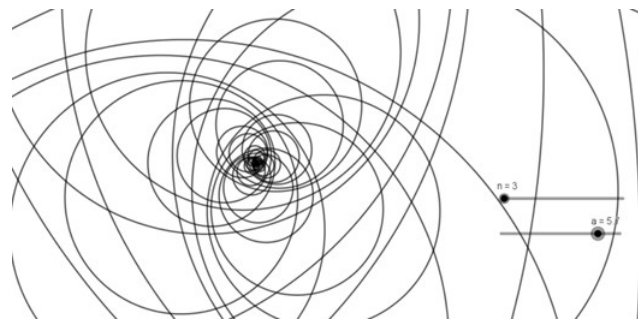
Fonte: O autor, 2019

Figura 123 – Entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 5.7$



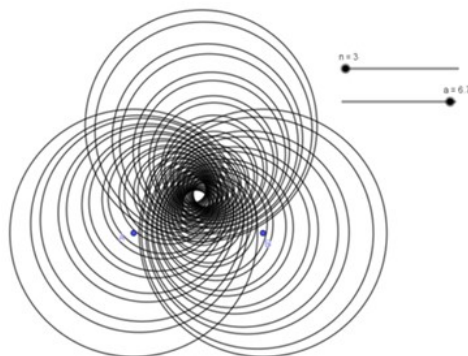
Fonte: O autor, 2019

Figura 124 – Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 5.7$



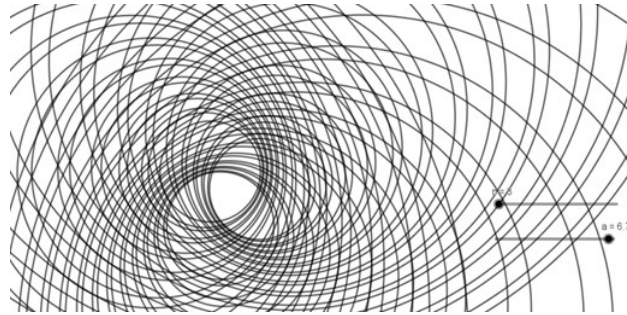
Fonte: O autor, 2019

Figura 125 – Entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 6.7$



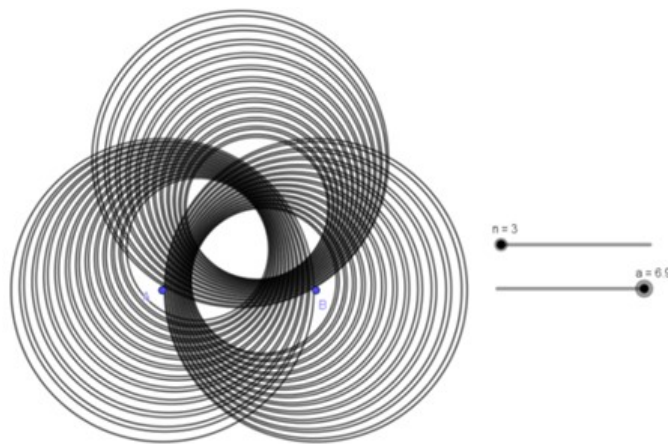
Fonte: O autor, 2019

Figura 126 – Ampliação do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 6.7$



Fonte: O autor, 2019

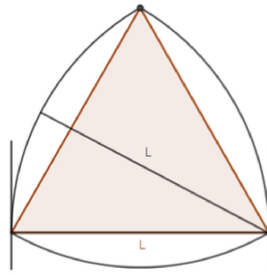
Figura 127 – Estágio final $n = 3$ e $a = 6.9$



Fonte: O autor, 2019

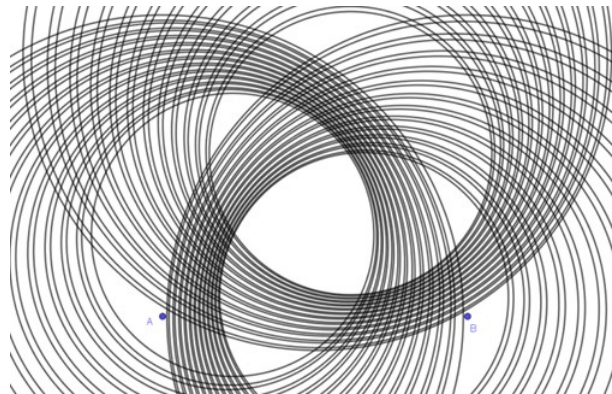
Algo bem interessante pode ser observado na parte central dos entrelaçamentos, em seus estágios finais, para valores diferentes de n . Para $n = 3$, no centro do entrelaçamento há uma região triangular limitada por arcos de circunferências, essa região triangular se assemelha ao triângulo de Reuleaux (Figura 128). Desenvolvido pelo engenheiro mecânico Franz Reuleaux (1829 – 1905), o triângulo de Reuleaux é construído da seguinte forma, sobre os lados do triângulo traçam-se arcos com centros sobre os vértices do triângulo e raios de medidas iguais, e esses possuem comprimento igual ao lado do triângulo (para um estudo aprofundado sobre os polígonos de Reuleaux aconselha-se a leitura de Rodrigues (2015)).

Figura 128 – Triângulo de Reuleaux

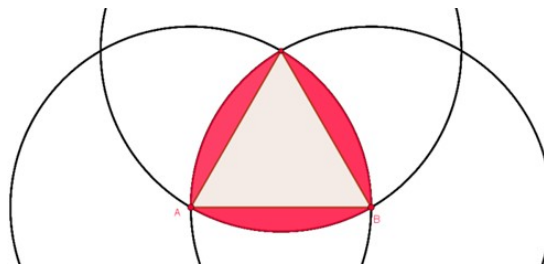


Fonte: O autor, 2019

Para $n = 3$, $a = 6.9$ e $a = 7$, o triângulo de Reuleaux surge no centro do entrelaçamento, com seus vértices sobre as interseções das últimas circunferências da sequência.

Figura 129 – Centro do entrelaçamento fractal $n = 3$ e $a = 6.9$ 

Fonte: O autor, 2019

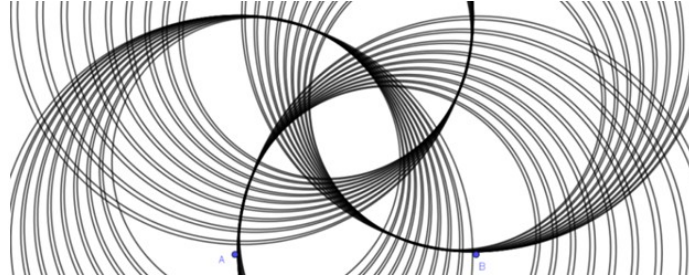
Figura 130 – Triângulo de Reuleaux no centro do entrelaçamento $n = 3$ e $a = 7$ 

Fonte: O autor, 2019

Algo semelhante ocorre para $n = 4$, mas neste caso surge no centro do entrelaçamento um quadrado de Reuleaux. Para $n = 5$ em seu centro tem-se um pentágono de

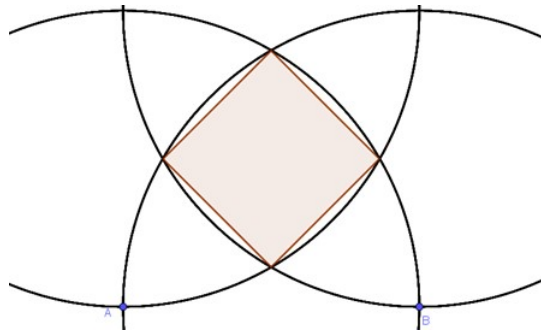
Reuleaux, como se pode observar nas figuras a seguir.

Figura 131 – Centro do Entrelaçamento fractal $n = 4$ e $a = 6.9$



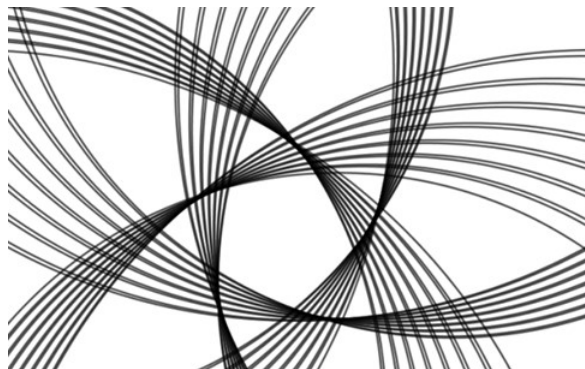
Fonte: O autor, 2019

Figura 132 – Quadrado de Reuleaux no centro do entrelaçamento $n = 4$ e $a = 7$



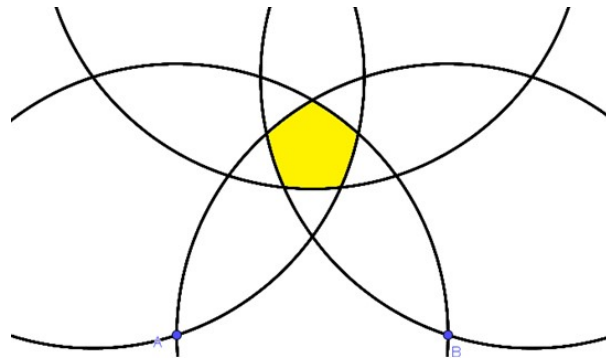
Fonte: O autor, 2019

Figura 133 – Centro do entrelaçamento fractal $n = 5$ e $a = 6.9$



Fonte: O autor, 2019

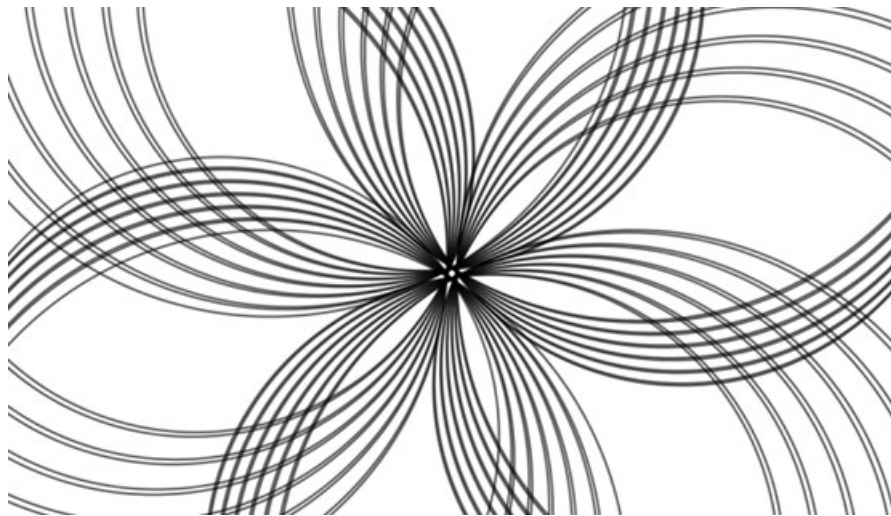
Figura 134 – Pentágono de Reuleaux no centro do entrelaçamento $n = 5$ e $a = 7$



Fonte: O autor, 2019

Quando se altera o valor de n para 6 não há mais um polígono de Reuleaux e sim um entrelaçamento que se assemelha a uma mandala.

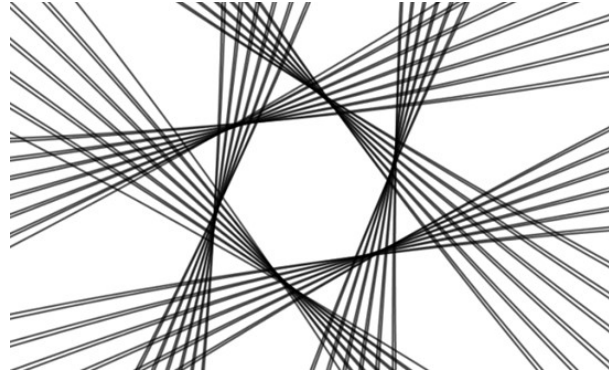
Figura 135 – Centro do Entrelaçamento fractal $n = 6$ e $a = 6,9$



Fonte: O autor, 2019

Ampliando cada vez mais o centro do entrelaçamento se encontra uma estrutura semelhante a um hexágono regular formada pelas interseções das circunferências que constituem o fractal.

Figura 136 – Ampliação do centro do Entrelaçamento fractal $n = 7$ e $a = 6,9$

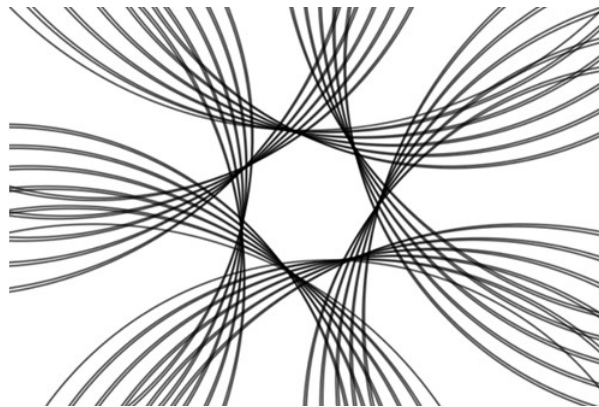


Fonte: O autor, 2019

Na imagem acima tem-se uma região hexagonal cujos limites aparentam ser retos, ou linhas com curvatura que tende a zero, porém isso é uma “ilusão visual” provocada pela escala da ampliação, já que os mesmos são obtidos a partir de circunferências. O fato que se segue é que ao ampliar a imagem perde-se a noção de curvatura das circunferências, ou seja, os arcos possuem curvatura quase que imperceptível.

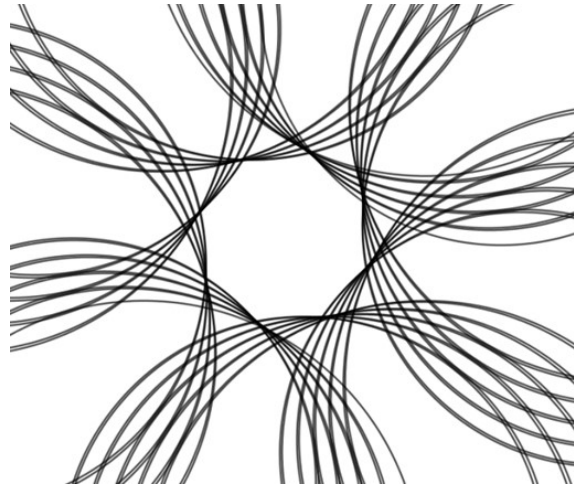
Para valores de n maiores que 6, as curvaturas que definem a região central do entrelaçamento mudam de positivas para negativas (em relação ao centro do fractal), ou seja, se para n variando de 3 até 6 as regiões centrais dos entrelaçamentos são delimitadas por arcos de curvatura positiva, em relação ao centro, para valor de n maiores que 6 os arcos possuem curvatura negativa, logo tendem para o centro da região. As imagens a seguir apresentam os centros dos entrelaçamentos para $n = 7$, $n = 8$ e $n = 9$, nelas é possível perceber que as regiões poligonais centrais são delimitadas por arcos que tendem para o centro da região.

Figura 137 – Centro do entrelaçamento fractal $n = 7$ e $a = 6.9$



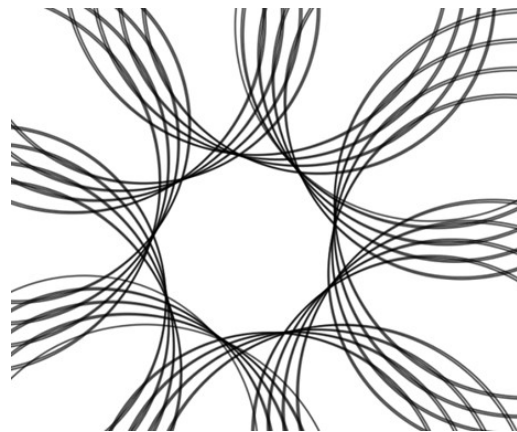
Fonte: O autor, 2019

Figura 138 – Centro do entrelaçamento fractal $n = 8$ e $a = 6.9$



Fonte: O autor, 2019

Figura 139 – Centro do entrelaçamento fractal $n = 9$ e $a = 6.9$



Fonte: O autor, 2019

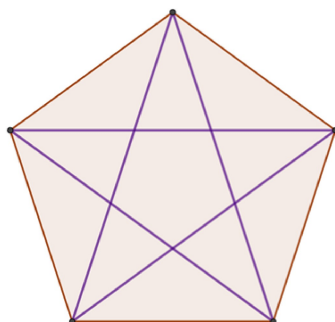
4.3 Autossemelhança Sobre as Diagonais

Nesta seção será apresentado um padrão de autossemelhança que se pode obter ao traçar as diagonais de um polígono regular (com um número de lados maior que 5) e destacar suas interseções, deve-se ter em mente que as diagonais que passam pelo centro do polígono, no caso de um número par de lados, não serão analisadas já que estas possuem todas a mesma interseção que é o próprio centro do polígono.

Ao se traçar as diagonais de um polígono de n lados ($n > 4$) e observar a região formada pela interseção das mesmas, duas a duas, nos deparamos com um polígono regular semelhante ao inicial em que é possível repetir o processo, ou seja, traçam-se novamente

as diagonais obtendo um novo polígono regular semelhante ao inicial. A figura a seguir apresenta um pentágono regular e suas diagonais, na região central do polígono há um outro pentágono regular cujos vértices são os pontos de interseção das diagonais.

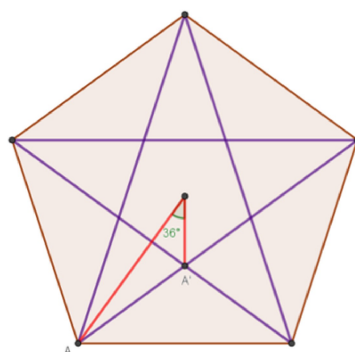
Figura 140 – Primeiro passo da autossimilaridade do pentágono regular



Fonte: O autor, 2019

As diagonais de um pentágono regular que partem de um mesmo vértice dividem o ângulo interno (do mesmo vértice) em 3 ângulos congruentes. Como o ângulo interno do pentágono mede 108° , tem-se que cada um dos três ângulos congruentes mede 36° . O ângulo de 36° pode ser utilizado para verificar o tipo de transformação que foi aplicada sobre o pentágono inicial para determinar o segundo pentágono, assim tem-se a intuição de que há um processo iterativo no padrão apresentado (Figura 141). O vértice A , do pentágono inicial, sofreu uma rotação de 36° e cada lado, uma redução de fator $1/\phi^2$.

Figura 141 – Transformações do pentágono regular

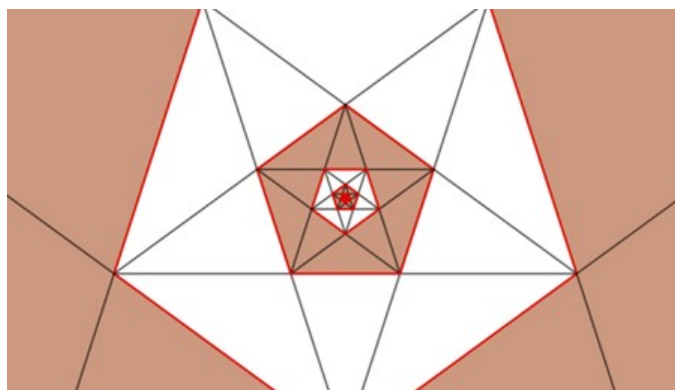


Fonte: O autor, 2019

Ao novo pentágono regular, pode aplicar-se novamente o processo descrito, rotação seguida de redução,, gerando assim um novo pentágono no qual se pode reaplicar o processo e assim por diante, infinitamente⁶.

⁶ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/z5wa8cth>>

Figura 142 – Autossemelhança interna do pentágono

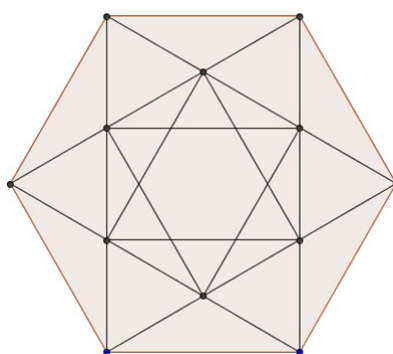


Fonte: O autor, 2019

A estrutura apresentada na figura anterior pode ser ampliada infinitamente e haverá sempre um novo pentágono onde será possível traçar, novamente suas diagonais e repetir o processo. A construção e visualização de um objeto com tais características só é possível recorrendo a softwares de geometria dinâmica.

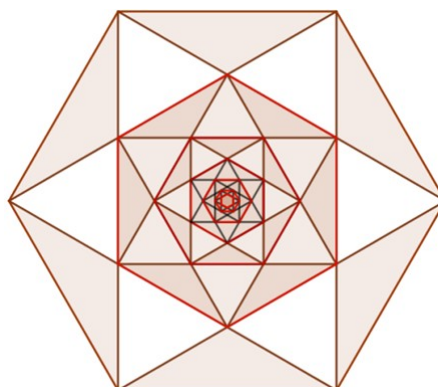
A autossemelhança interna também pode ser observada em um hexágono regular, ou seja, quando traçamos suas diagonais (sem considerar as diagonais que passam por seu centro) é possível obter, em seu interior, um novo hexágono regular, semelhante ao inicial que foi reduzido e rotacionado. O mesmo ocorre para heptágonos, octógonos, eneágonos, etc, com a condição que sejam polígonos regulares.

Figura 143 – Passo inicial da autossemelhança do hexágono regular



Fonte: O autor, 2019

Figura 144 – Autossemelhança do hexágono regular



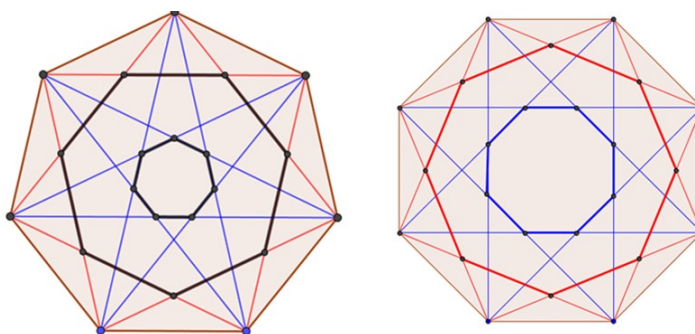
Fonte: O autor, 2019

Como não se consideram as diagonais que passam pelo centro do polígono, tem-se que, assim como o pentágono, o hexágono regular⁷ utilizado na construção (Figura 143), possui duas diagonais que partem de cada vértice e elas geram um único novo polígono a cada passo da iteração.

Quando o número de lados do polígono regular é superior a 6, de cada vértice parte um número par (maior que 2) de diagonais que não passam pelo centro do polígono. Ocorre averiguar se existe alguma relação entre o número de lados do polígono inicial e a quantidade novos polígonos gerados a cada passo do processo. Para isso, deve analisar-se um maior número de casos de autossemelhança interna.

O heptágono e no octógono apresentam, cada um, partindo de cada vértice quatro diagonais nas condições referidas, e ao traçar todas as diagonais desse polígonos, é possível perceber a cada um gera dois novos polígonos a cada passo do processo iterativo.

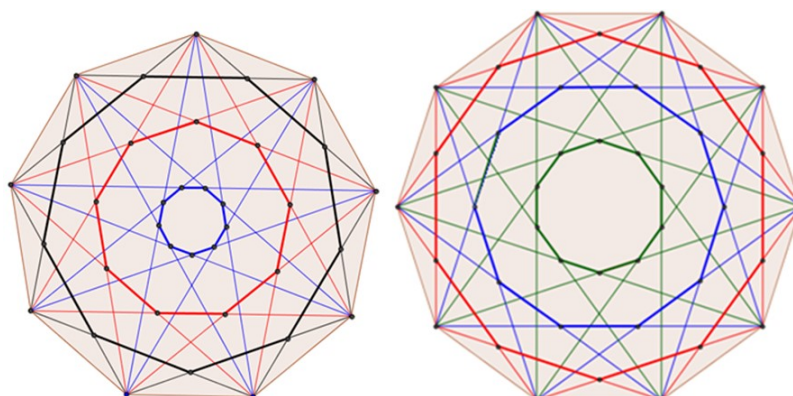
Figura 145 – Padrão de autossemelhança do heptágono e do octógono regular



Fonte: O autor, 2019

⁷ Disponível em <<https://www.geogebra.org/m/msfzxfch>>

Figura 146 – Padrão de autossimilaridade do eneágono e do decágono regular

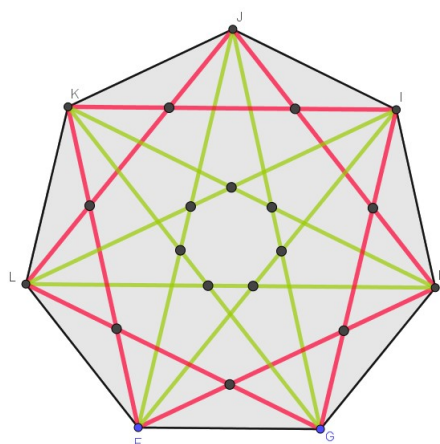


Fonte: O autor, 2019

No caso de $n = 9$ e $n = 10$ há 6 diagonais que, ao ser consideradas duas a duas, vão originar 3 novos polígonos semelhantes ao inicial (Figura 146).

De cada vértice do heptágono regular partem 2 pares de diagonais, congruentes duas a duas (Figura 147).

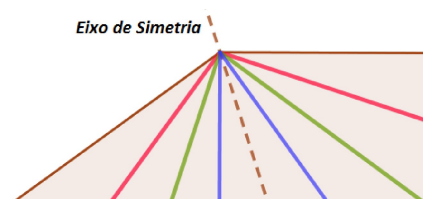
Figura 147 – Diagonais do heptágono regular



Fonte: O autor, 2019

O mesmo ocorre para os demais polígonos, por exemplo, de cada vértice do decágono regular, partem $10 - 4 = 6$ diagonais que não passam pelo centro, e considerando a diagonal que passa pelo centro como eixo de simetria entre elas (Figura 148) pode concluir-se que o decágono regular possui 3 pares de diagonais congruentes distintas, que irão originar 3 polígonos semelhantes em cada passo do processo iterativo (Figura 146).

Figura 148 – Diagonais distintas do decágono regular



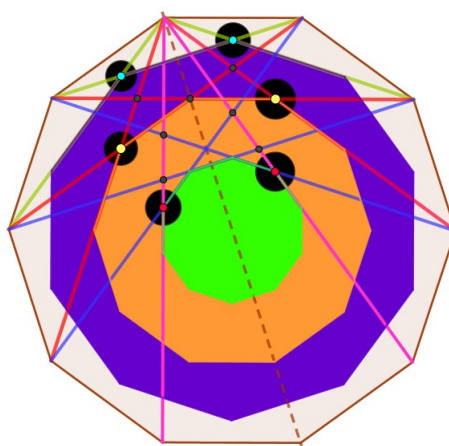
Fonte: O autor, 2019

Essa análise pode ser repetida com todos os polígonos regulares com mais de 4 lados. Assim, se o número de lados é $n = 2k$ ou $n = 2k - 1$, (para cada k natural maior que 2) partindo de cada vértice, existem $k - 2$ pares de diagonais congruentes duas a duas. Considerando, em todos os vértices, os n pares de diagonais congruentes entre si, e suas interseções duas a duas, vamos obter um polígono semelhante ao inicial. Como isso é feito com cada um dos $k - 2$ pares, iremos ter $k - 2$ polígonos semelhantes ao inicial. Sendo I_n o número de novos polígonos regulares obtidos em cada iteração, tem-se que:

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-4}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

O estudo sobre as diagonais de um polígono regular, em busca de suas interseções que geram polígonos semelhantes, também fornece quais são as interseções que vão gerar o novo polígono. Quanto maior o ângulo formado pelo par de diagonais congruentes, menor o fator de redução do polígono por elas gerado (Figura 149).

Figura 149 – Interseções das diagonais do decágono regular



Fonte: O autor, 2019

Na figura acima as interseções entre diagonais congruentes, que geram novos polígonos regulares, estão circuladas pelos círculos negros e é possível perceber o padrão de interseções.

5 ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

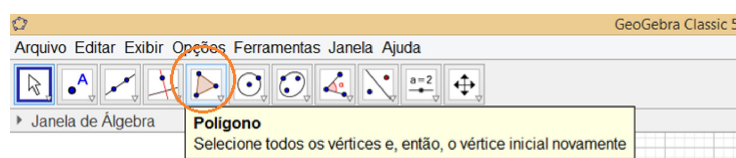
Neste capítulo serão apresentadas as construção de alguns fractais gerados a partir de polígonos regulares e atividades para sala de aula, envolvendo tais objetos. O objetivo dessas atividades é a utilização dos fractais como ferramenta motivacional para o estudo da matemática, recorrendo à utilização do software GeoGebra em sala de aula (ou laboratórios de informática) para análise de padrões geométricos e resolução de exercícios.

Na seção a seguir são apresentadas as principais ferramentas do GeoGebra que podem ser utilizadas nas construções dos fractais que serão apresentados nas atividades, mostrando passo a passo do funcionamento de utilização de cada ferramenta.

5.1 Ferramentas do GeoGebra

Será utilizado o software GeoGebra Clássico (Classic) 5.0. O GeoGebra é um software gratuito de utilização simples devido à sua função autoexplicativa, ou seja, ao deixar o cursor (mouse) sobre o ícone de uma determinada ferramenta, aparece abaixo desse ícone uma caixa de texto com explicações de uso de tal ferramenta. Na imagem a seguir (Figura 150) tem-se o cursor sobre a ferramenta Polígono e abaixo desta a caixa de texto explicando com utilizar esta ferramenta.

Figura 150 – Caixa de texto: explicação de uso



Fonte:O autor, 2019

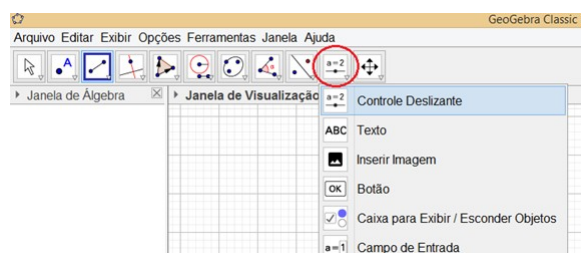
No caso da ferramenta Polígono devem selecionar-se pontos sobre a área de trabalho da Janela de Visualização, pontos esses que serão os vértices do polígono, após selecionar a quantidade de vértices desejada seleciona-se novamente o ponto inicial para assim fechar a linha poligonal criada, e obter o polígono. Com essa ferramenta podem construir-se polígonos côncavos ou convexos.

Na figura 150 é possível observar que todos os ícones de ferramentas possuem no canto inferior direito uma seta com sentido para baixo, ao clicar nessa seta abre-se uma lista com outras ferramentas, por exemplo, ao expandir a ferramenta Polígono é possível ter acesso a outras ferramentas relacionadas aos polígonos como a Polígono Regular, e a Rígido que pode ser utilizada para construir um polígono qualquer que não altera comprimentos nem ângulos ao mexer em seus vértices.

A seguir descrevem-se algumas ferramentas utilizadas nas construções dos fractais das atividades propostas, apresentando seus ícones, localização na barra das ferramentas e como utilizá-las.

Controle Deslizante

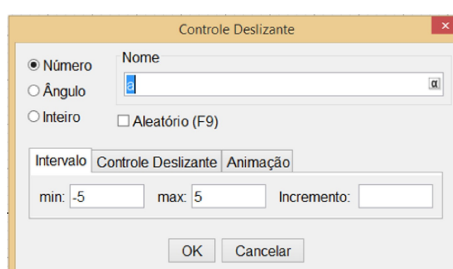
Figura 151 – Controle Deslizante



Fonte:O autor, 2019

Permite criar uma grandeza variável que pode ser modificada a partir de um deslizador. É possível associar essa grandeza à medida de um segmento, raio ou à quantidade de vértices de um polígono, além de outras opções. Para utilizar esta ferramenta, basta selecioná-la e em seguida clicar sobre a superfície de trabalho da Janela de Visualização para ter acesso às configurações do deslizador (Figura 152).

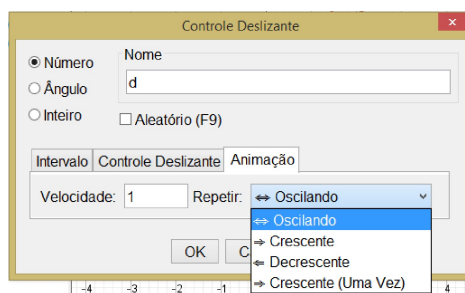
Figura 152 – Configurações do Controle Deslizante



Fonte:O autor, 2019

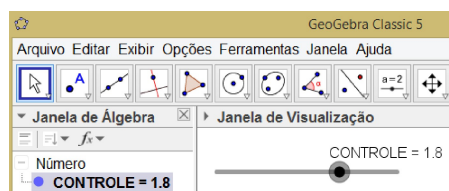
Nas configurações informa-se o tipo de grandeza que se quer trabalhar: número real, ângulo ou número inteiro, assim como seus valores mínimo e máximo e seu incremento (variação do controle). Na aba Controle Deslizante é possível informar a posição relativa do controle (horizontal ou vertical) e na aba Animação pode-se criar um controle deslizante animado, ou seja, o valor da grandeza se altera sozinho com velocidade predeterminada.

Figura 153 – Aba Animação



Fonte:O autor, 2019

Figura 154 – Objeto Controle

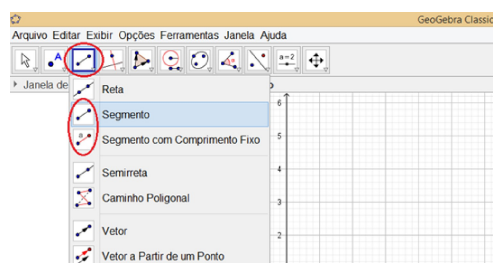


Fonte:O autor, 2019

Ao criar um controle deslizante, a que chamámos **CONTROLE**, o seu nome aparece na Janela de Álgebra¹ na classificação de Número, já que o controle criado representa um número racional do intervalo $[-5, 5]$.

Segmento e Segmento com Comprimento Fixo

Figura 155 – Ferramentas Segmento e Segmento com Comprimento Fixo

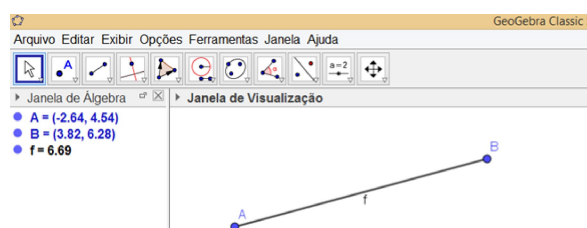


Fonte:O autor, 2019

¹ Janela que apresenta a lista de todos objetos criados durante uma construção

Como os seus nomes sugerem, estas ferramentas possibilitam a criação de segmentos sejam eles de comprimento fixo ou variável. Para construir um segmento (de comprimento variável) deve clicar-se, ou seleccionar, dois pontos quaisquer sobre a superfície de trabalho.

Figura 156 – Segmento AB

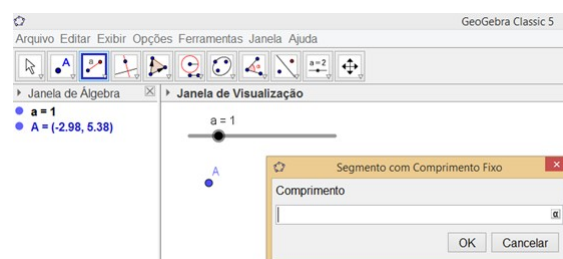


Fonte:O autor, 2019

É possível modificar a posição, direção e tamanho do segmento \overline{AB} , para tal basta seleccionarmos a ferramenta Mover (primeira ferramenta da barra de ferramentas, indica por uma seta branca) e pressionando o botão esquerdo do mouse sobre os pontos A ou B , modifica-se o tamanho e direção do segmento. Fazendo o mesmo sobre o segmento, ou seja, pressionando o botão esquerdo do mouse sobre o segmento é possível modificar sua posição sem alterar seu tamanho e direção.

A ferramenta Segmento com Comprimento Fixo funciona de modo similar, mas agora só é preciso seleccionar, sobre a superfície de trabalho, a origem do segmento que se deseja construir e ao fazê-lo surge uma janela onde se deve informar o comprimento desejado, e esse pode ser indicado por número real positivo ou por um controle deslizante. Na imagem a seguir temos a origem do segmento no ponto A e controle deslizante a .

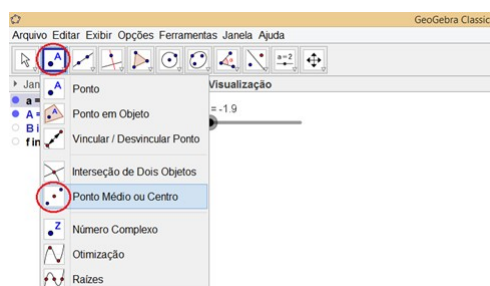
Figura 157 – Comprimento do Segmento



Fonte:O autor, 2019

Ponto Médio ou Centro

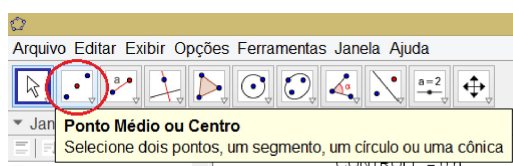
Figura 158 – Ferramenta Ponto Médio ou Centro



Fonte:O autor, 2019

Esta ferramenta fornece o ponto médio de um segmento, ou o ponto médio entre dois pontos, clicando apenas sobre o segmento, ou nos dois pontos. Esta ferramenta permite determinar o centro de um polígono regular, círculo ou região poligonal. Para utilizar essa ferramenta basta clicar sobre os pontos, para obter o ponto médio, ou região cujo centro deseja determinar.

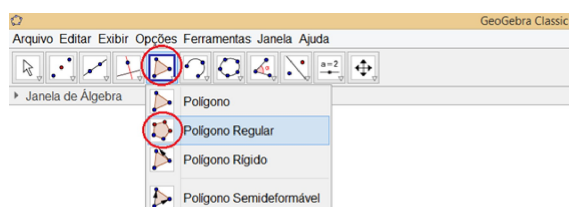
Figura 159 – Explicações de uso Ponto Médio ou Centro



Fonte:O autor, 2019

Polígono Regular

Figura 160 – Ferramenta Polígono Regular



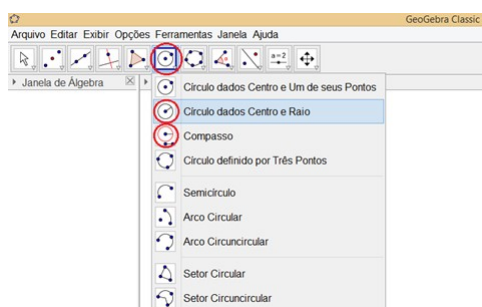
Fonte:O autor, 2019

Esta ferramenta permite a construção de um polígono regular ao selecionar dois pontos quaisquer sobre a Janela de Visualização que serão dois vértices consecutivos,

e a distância entre esses pontos define a medida do lado do polígono a ser construído. Após selecionar os dois pontos que definem o lado do polígono surge uma janela onde se deve informar a quantidade de vértices que o polígono terá e essa quantidade pode estar associada a um controle deslizante.

Círculo dados Centro e Raio e Compasso

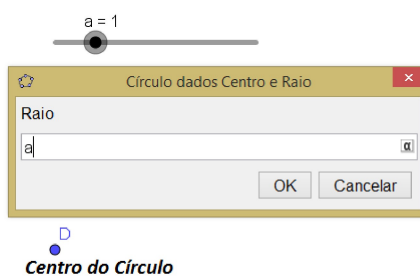
Figura 161 – Ferramentas Círculo dados Centro e Raio e Compasso



Fonte:O autor, 2019

Essas duas ferramentas podem ser utilizadas para construir círculos, determinar ou transportar medidas de segmentos. A ferramenta Círculo dados Centro e Raio possui um raio de medida fixa e essa deve ser informada na janela de configuração da ferramenta (Figura 162), também é possível associar essa medida a um controle deslizante.

Figura 162 – Medida do Raio

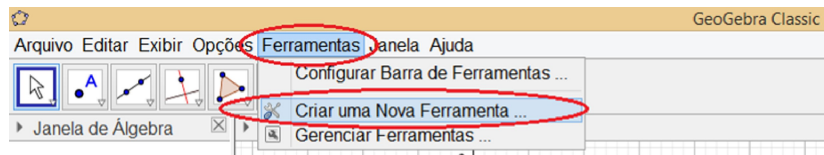


Fonte:O autor, 2019

A ferramenta Compasso pode ser utilizada para transportar a medida de um determinado segmento ou construir círculos cujo raio tem a mesma medida de algum segmento já construído. A utilização desta ferramenta se inicia selecionando-se dois pontos, ou um segmento, para indicar a medida do raio, em seguida deve-se selecionar o centro da circunferência.

Criar uma Nova Ferramenta

Figura 163 – Criar uma Nova Ferramenta



Fonte: O autor, 2019

Essa é uma das funções mais importantes do GeoGebra para as construções de fractais. Ela permite a criação de uma nova ferramenta a partir de uma construção já iniciada. O Funcionamento detalhado dessa ferramenta será apresentado posteriormente no decorrer de uma atividade.

As seis ferramentas listadas acima são as ferramentas mais utilizadas no processo de construção dos fractais apresentados nesse trabalho, em alguns fractais será necessária a utilização de ferramentas diferentes ou ferramentas mais avançadas, quando isso ocorrer as mesmas serão apresentadas junto das suas instruções de uso. É importante ressaltar que nas atividades não serão fixadas as medidas de segmentos, mas recomenda-se que quando as atividade propostas forem aplicadas em sala de aula deve ser pedido aos alunos que utilizem valores inteiros para as medidas dos segmentos, assim evitam-se as equações e expressões literais.

5.2 Construções e Atividades

Iremos apresentar as construções dos principais fractais apresentados nos capítulos 3 e 4, na ordem em que estes são apresentados. Vamos iniciar com a construção do padrão de autossemelhança interna do pentágono regular, apresentado no capítulo 4 (Figura 139). Esta construção tem como objetivo ensinar como se cria uma nova ferramenta que acelere o processo de construção de um determinado objeto, na sequência será apresentada a construção do fractal curva de Koch, seguida da construção do floco de neve de Koch e algumas possíveis variações, seguindo até o fractal tapete de Sierpinski.

Todas as construções apresentadas a seguir podem ser realizadas em sala de aula, pelos alunos. Na sequência de tais construções podem aplicar-se propriedades geométricas e algébricas aprendidas em sala de aula.

5.2.1 Utilizando a Opção Criar Nova Ferramenta

Como dito anteriormente, esta é uma das principais vantagens de se usar um software de geometria dinâmica para construir fractais. A opção Criar Nova Ferramenta, possibilita acelerar um processo de construção que necessite de repetições excessivas de determinados passos. Para ensinar o uso desta opção aos alunos pode tomar-se como exemplo a construção da autossimilaridade interna de um pentágono regular (apresentada no capítulo 4) e os passos dessa construção são dados a seguir.

- i. Construir um pentágono regular, de lado AB (qualquer medida) utilizando a ferramenta **Polígono Regular**;

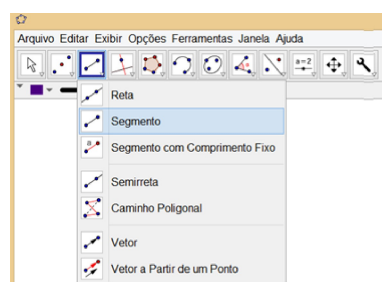
Figura 164 – Ferramenta Polígono Regular



Fonte: O autor, 2019

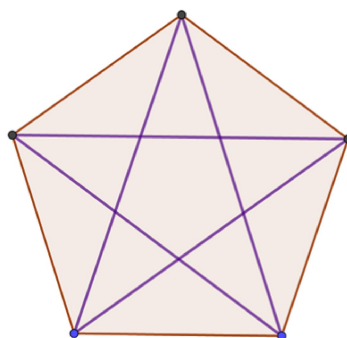
- ii. No pentágono construído traçam-se suas diagonais utilizando a ferramenta **Segmento**;

Figura 165 – Ferramenta Segmento



Fonte: O autor, 2019

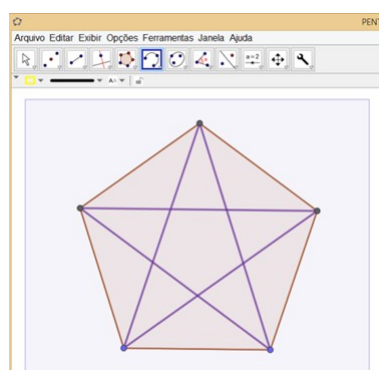
Figura 166 – Diagonais do pentágono



Fonte: O autor, 2019

- iii. Ao traçar as diagonais deve criar-se uma nova ferramenta, para isso basta pressionar o botão direito do cursor (mouse) sobre o fundo branco da Janela de Visualização e selecionar todos os objetos já construídos, nesse caso o pentágono e suas diagonais;

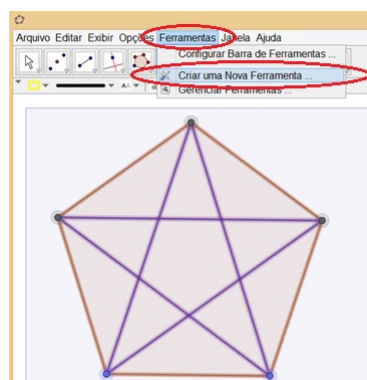
Figura 167 – Objetos selecionados



Fonte: O autor, 2019

- iv. Com os objetos selecionados, seleciona-se em **Ferramentas**, na Barra de Menu do software, a opção **Criar uma Nova Ferramenta**;

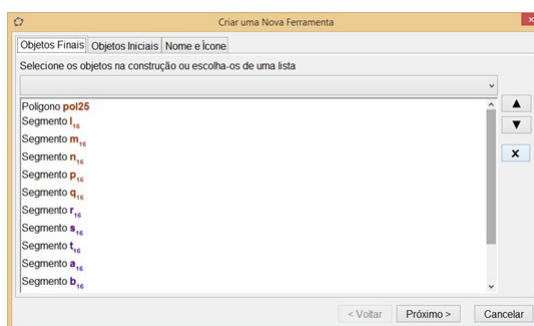
Figura 168 – Opção Criar Nova Ferramenta



Fonte: O autor, 2019

Ao selecionar essa opção abrirá uma janela com três abas, a primeira indica os objetos que serão criados com nova ferramenta, a segunda apresenta uma lista de objetos necessários para usar a ferramenta, e a última contém as configurações da ferramenta que está sendo criada, por exemplo, o nome da ferramenta. No caso da ferramenta que está sendo criada para a sequência de pentágonos tem-se que os objetos que serão criados são um pentágono regular e suas diagonais, com indica a figura a seguir.

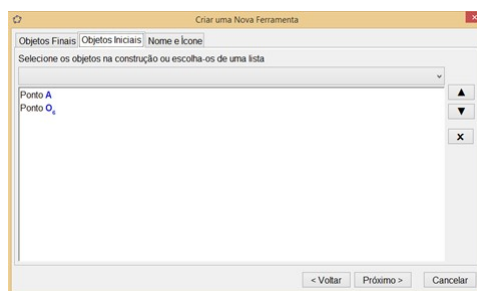
Figura 169 – Aba Objetos Finais



Fonte: O autor, 2019

Para utilizar tal ferramenta serão necessários dois objetos, os pontos A e B , vértices iniciais do pentágono que será criado.

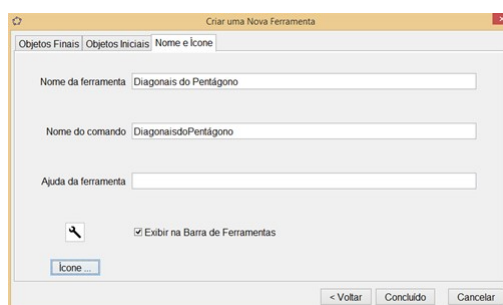
Figura 170 – Aba Objetos Iniciais



Fonte: O autor, 2019

E por fim, pode nomear-se a nova ferramenta. Neste trabalho, será adotado o nome **Diagonais do Pentágono**.

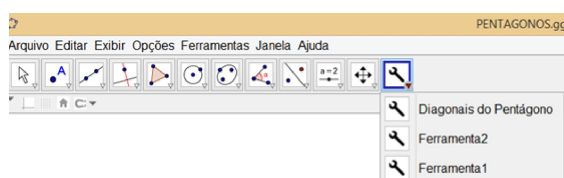
Figura 171 – Aba Nome e Ícone



Fonte: O autor, 2019

Para utilizar a nova ferramenta basta procurar o ícone da “chave de rosca”² da imagem acima na barra de ferramentas do software, como indicado na figura a seguir.

Figura 172 – Ícone da nova ferramenta



Fonte: O autor, 2019

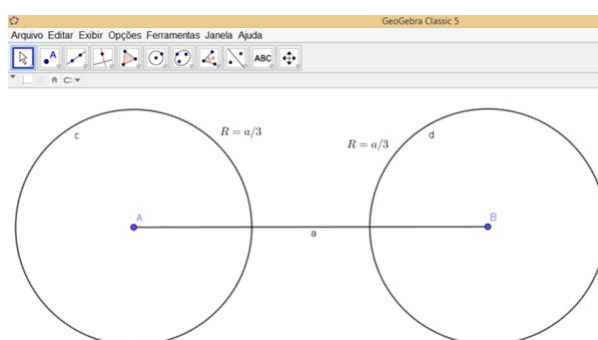
² Esse ícone pode ser modificado

Agora basta selecionar dois pontos quaisquer para que sobre eles sejam construídos um pentágono e suas diagonais. Essa ferramenta acelera o processo de construção da autossemelhança interna, se tornando peça fundamental em seu processo de construção.

5.2.2 Construção da curva de Koch

Usando a ferramenta Segmento com Comprimento fixo, represente um segmento $\overline{AB} = a$ e em seguida, usando a ferramenta Círculo dados Centro e Raio, construa duas circunferências de centros A e B e de raios de medida igual a $\frac{a}{3}$ (Figura 173).

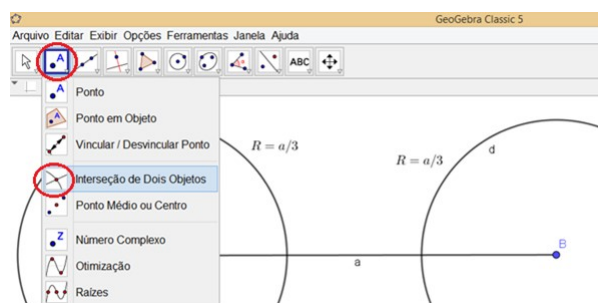
Figura 173 – Curva de Koch - Primeiro passo



Fonte:O autor, 2019

Agora devem determinar-se os pontos de interseção entre as circunferências e o segmento \overline{AB} , para isso utiliza-se a ferramenta Interseção de Dois Objetos, como mostra a imagem a seguir.

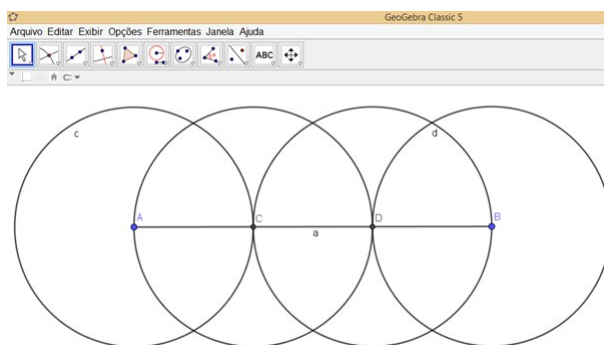
Figura 174 – Ferramenta Interseção de Dois Objetos



Fonte:O autor, 2019

Para determinar a interseção entre dois objetos seleciona-se a ferramenta e em seguida selecionam-se dois objetos a fim de obter a interseção entre eles. Com centro sobre esses pontos de interseções, construa duas circunferências congruentes, com raios de medida $\frac{a}{3}$.

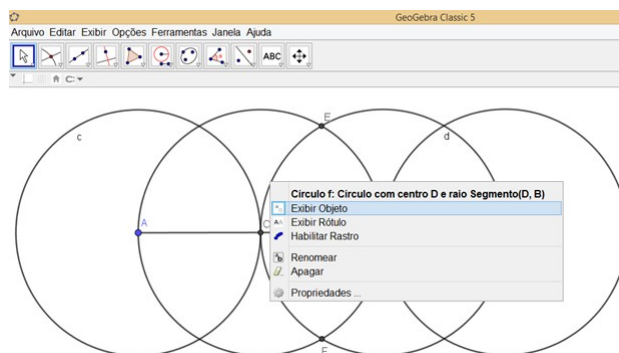
Figura 175 – Curva de Koch - Segundo passo da construção



Fonte:O autor, 2019

Agora determinam-se as interseções entre as circunferências de centros em C e D , os pontos E e F , considera-se somente o ponto que está na região superior do segmento \overline{AB} , ou seja, o ponto E . Torne ocultas todas as circunferências utilizadas na construção, pois as mesmas não serão mais necessárias. Para ocultar um objeto basta clicar sobre ele com o botão direito do curso e selecionar a opção Exibir Objeto, essa opção já vai estar marcada, basta então desmarca-la.

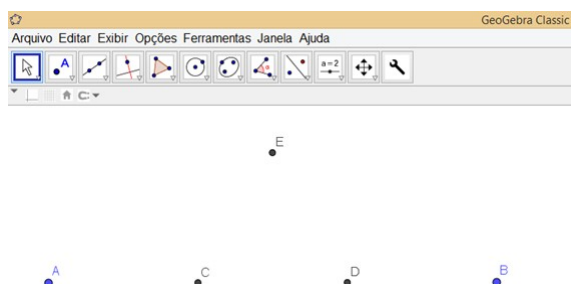
Figura 176 – Opção Exibir Objeto



Fonte:O autor, 2019

Ao desmarcar essa opção Exibir Objetos, os mesmos ficam ocultos mas não são apagados da lista de objetos construídos. Faça o mesmo com o ponto F e com o próprio segmento \overline{AB} , esses objetos não serão mais utilizados. Ao ocultar tais objetos tem-se a seguinte imagem na Janela de Visualização.

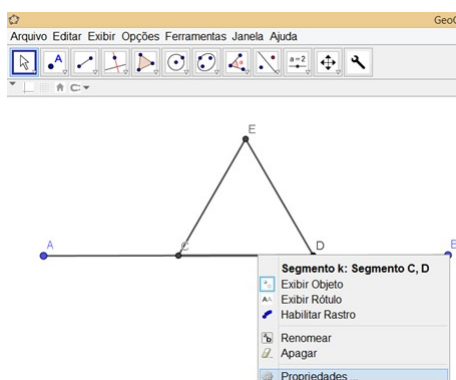
Figura 177 – Objetos ocultos



Fonte:O autor, 2019

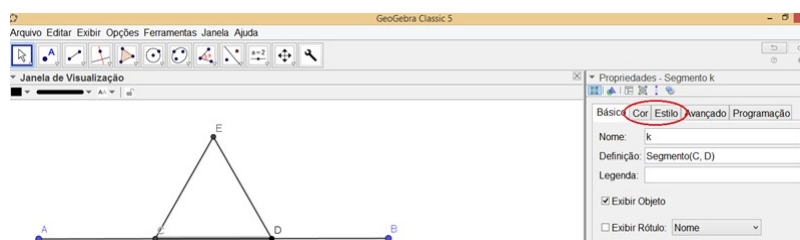
Agora trace os segmentos \overline{AC} , \overline{CE} , \overline{ED} , \overline{DB} e um segmento \overline{CD} este último deve ter cor branca, espessura da linha e opacidade do traço no máximo. Esses fatores podem ser alterados nas Propriedades do objeto, que acesso a aba de propriedades basta clicar sobre o objeto com o botão direito do cursor e escolher a opção Propriedades.

Figura 178 – Opção Propriedades



Fonte:O autor, 2019

Figura 179 – Propriedades do segmento CD



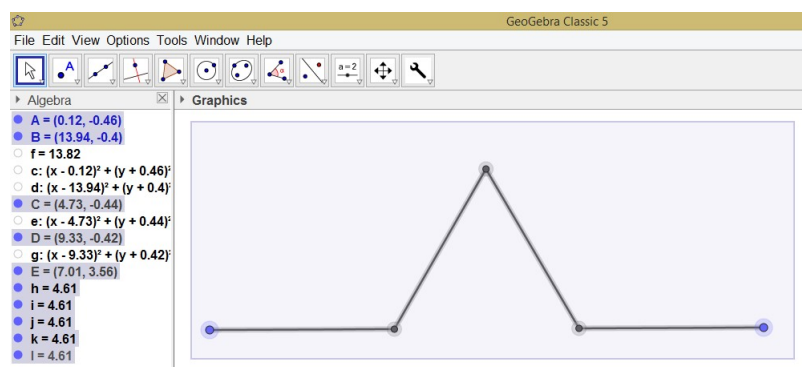
Fonte:O autor, 2019

Nas abas Cor e Estilo é possível alterar, respectivamente, a cor e o tipo de traço do segmento, a cor será branca a espessura e a opacidade do traço devem estar em seu nível máximo, essas configurações irão garantir que a ferramenta que será criada a partir desses objetos oculte por completo o terço central dos segmentos onde a mesma será aplicada. Perceba que com tais configurações o segmento \overline{CD} deixa de ser visível, mas ainda está no objeto. Este passo não pode ser substituído pela não construção do segmento ou por sua ocultação, pois quando o processo de construção do fractal for aplicado sobre novos objetos, esse segmento branco será fundamental na criação de novos “buracos” sobre outros segmentos.

Em seguida, repete-se todo o processo sobre os segmentos \overline{AC} , \overline{CE} , \overline{ED} , \overline{DB} , gerando novos segmentos nos quais se pode repetir o processo e assim sucessivamente, mas este processo torna-se fastidioso, para o agilizar pode criar-se uma nova ferramenta, que irá reconstruir todos os objetos da construção sobre segmentos pré selecionados. Nomeie a nova ferramenta com o nome Curva Koch³.

Para isso basta pressionar o botão direito do cursor (mouse) sobre o fundo branco da Janela de Visualização e selecionar todos os objetos já construídos, neste caso os segmentos;

Figura 180 – Objetos selecionados

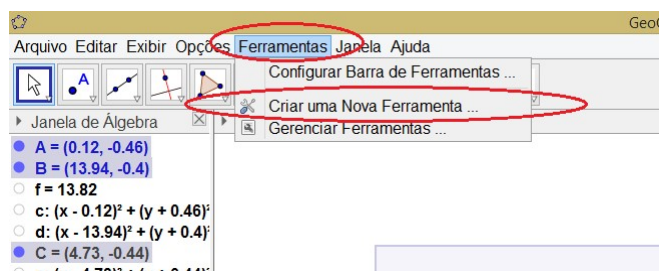


Fonte: O autor, 2019

Com os objetos selecionados, seleciona-se em Ferramentas, na Barra de Menu do software, a opção Criar uma Nova Ferramenta;

³ O nome do comando CurvaKoch pode ser utilizado no campo de Entrada

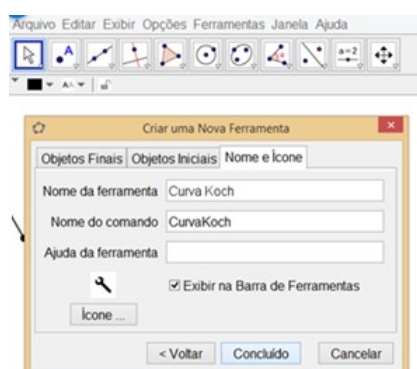
Figura 181 – Opção Criar uma Nova Ferramenta



Fonte:O autor, 2019

Ao selecionar esse opção surge uma janela com três abas, a primeira indica os objetos que serão criados com nova ferramenta, a segunda apresenta uma lista de objetos necessários para usar a ferramenta, e a última contém as configurações da ferramenta que está sendo criada, por exemplo, o nome da ferramenta. No caso da ferramenta que está sendo criada para a curva de Koch

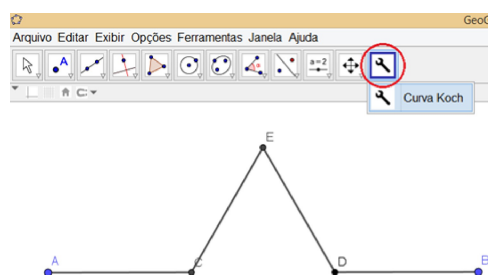
Figura 182 – Nome e Ícone da Ferramenta



Fonte:O autor, 2019

Ao finalizar a criação da nova ferramenta surge na Barra de Ferramentas um novo ícone, uma chave de rosca, esse é o ícone de novas ferramentas, ou seja, todas as ferramentas criadas durante o processo de construção de um determinado objeto estarão listadas nesse local.

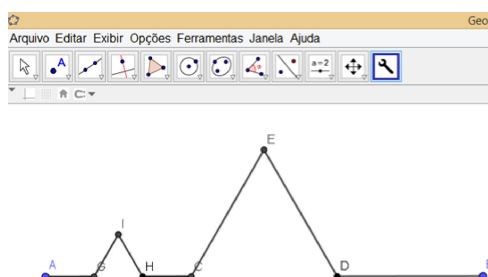
Figura 183 – Nova ferramenta



Fonte:O autor, 2019

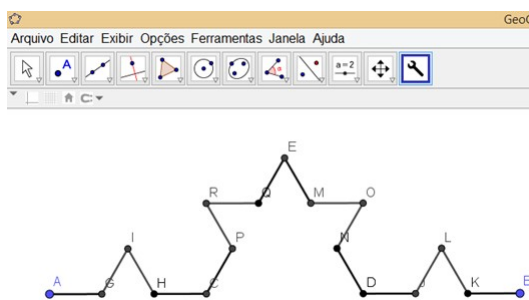
Para utilizar a nova ferramenta basta selecionar dois pontos, por exemplo, os pontos A e C , e sobre o segmento \overline{AC} será aplicada a ferramenta recém criada. As imagens a seguir mostram o funcionamento da ferramenta Curva Koch sobre o segmento \overline{AC} e em seguida sobre os segmentos \overline{CE} , \overline{ED} e \overline{DB} .

Figura 184 – Ferramenta aplicada sobre AC



Fonte:O autor, 2019

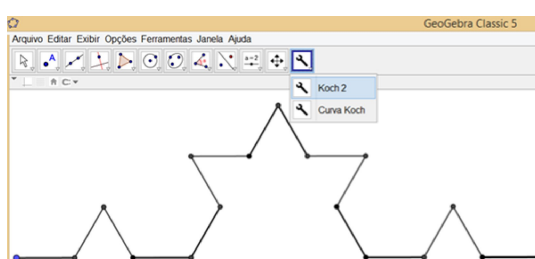
Figura 185 – Ferramenta aplicada sobre os demais segmentos



Fonte:O autor, 2019

Mesmo com a criação dessa nova ferramenta o processo de construção do fractal pode se tornar exaustivo e demorado, para acelerar ainda mais o processo iterativo que resulta na curva de Koch se pode criar outra ferramenta. Na imagem anterior percebe-se que a estrutura que caracteriza a curva, já está aparente na linha poligonal, assim é possível criar uma nova ferramenta que ao ser utilizada cria uma nova estrutura semelhante à linha poligonal apresentada na figura anterior. Para criar essa nova ferramenta deve repetir-se o processo de criação de uma nova ferramenta e essa segunda ferramenta criada será nomeada Koch 2.

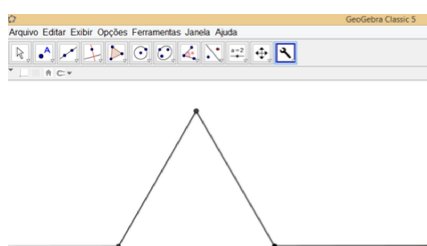
Figura 186 – Nova ferramenta Koch 2



Fonte:O autor, 2019

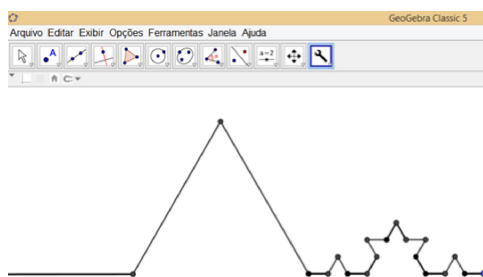
Na figura acima tem-se as duas ferramentas criadas podem ser acessadas no mesmo ícone (chave de rosca), perceba que para criar a ferramenta Koch 2 é aconselhável ocultar os nomes de todos os objetos, assim todos novos objetos que serão criados pela ferramenta terão, automaticamente, os nomes ocultos. As imagens a seguir apresentam a aplicação da ferramenta Koch 2 sobre o último segmento da linha poligonal (da esquerda para direita).

Figura 187 – Segmento antes da aplicação da ferramenta Koch 2



Fonte:O autor, 2019

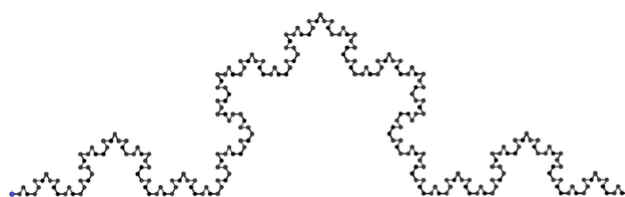
Figura 188 – Segmento depois de aplicada a ferramenta Koch 2



Fonte:O autor, 2019

Agora basta aplicar a ferramenta Koch 2 sobre todos os segmentos da linha poligonal obtendo a seguinte representação gráfica da curva de Koch.

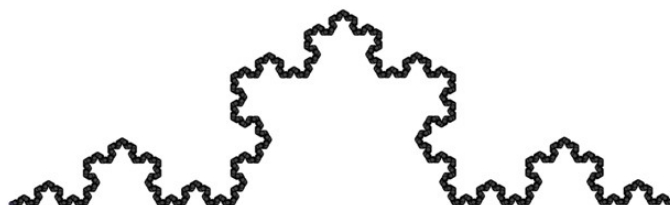
Figura 189 – Representação gráfica da curva de Koch Primeira aplicação



Fonte:O autor, 2019

Ao continuar aplicando a ferramenta Koch 2 nos novos segmentos gerados na primeira aplicação, a linha poligonal começa a ser mais próxima da curva de Koch. Porém, um fato que ocorre ao utilizar a ferramenta é o aumento da quantidade de pontos e essa tende a crescer cada vez, a cada utilização da ferramenta. Os pontos são fundamentais para determinar, com precisão, onde a ferramenta será aplicada, porém os mesmo tendem a “poluir” a construção quando o processo iterativo é repetido um número grande de vezes, como se pode observar na imagem a seguir.

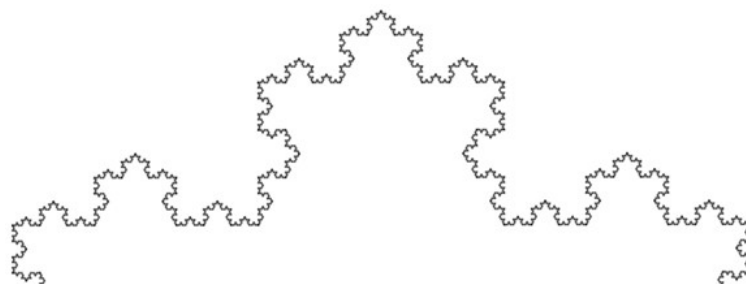
Figura 190 – Representação gráfica da curva de Koch segunda aplicação



Fonte:O autor, 2019

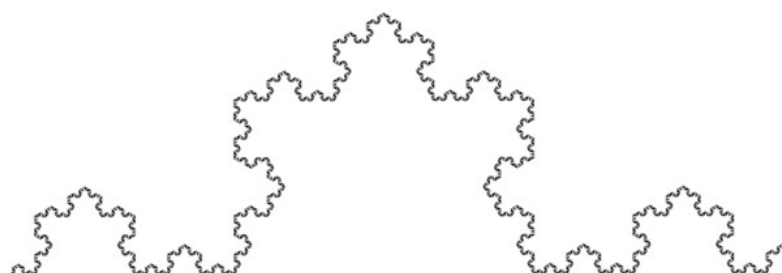
Para “limpar” a imagem, ocultando os pontos, pode-se recorrer à lista de objetos presente na Janela de Álgebra. Selecionando, com o botão direito do mouse, a lista de Pontos, para assim abrir uma janela de opções da lista de Pontos. Nessa janela deve-se selecionar a opção Exibir Objeto, esta fará com que todos os pontos da construção fiquem ocultos.

Figura 191 – Pontos ocultos (ampliação da parte superior da curva)



Fonte:O autor, 2019

Figura 192 – Representação gráfica da curva de Koch no GeoGebra



Fonte:O autor, 2019

Muitos dos passos utilizados no processo de construção da curva de Koch serão utilizados nos fractais que serão apresentados a seguir, principalmente a criação de uma nova ferramenta que repita os passos anteriores sem a necessidade de construções complexas e repetitivas. Em geral, as próximas construções serão baseadas em construir uma estrutura inicial, que possua a característica principal do fractal a ser construído, e dessa estrutura cria-se uma primeira ferramenta que deve ser aplicada na própria estrutura inicial, obtendo uma estrutura mais complexa do que a inicial. Deste novo objeto cria-se uma segunda ferramenta que faz com que o processo de construção do fractal fique mais dinâmico.

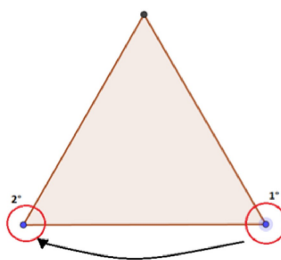
O próxima construção é relativa ao floco de neve de Koch. Para construir este fractal se utilizará o mesmo arquivo e as mesmas ferramentas da curva de Koch, apresentada acima, já que esses dois fractais possuem processos de construção idênticos, sendo seus objetos iniciais as únicas coisas que os diferem.

5.2.3 Construção do floco de neve de Koch

Essa seção será destinada à construção do floco de neve de Koch e suas possíveis variações, bem como suas propriedades geométrica e algébricas, que podem ser apresentadas aos alunos como uma atividade de observação de padrões geométricos.

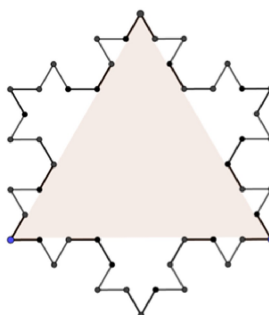
O primeiro passo da construção do floco de neve de Koch é dado pela construção um triângulo equilátero, utilizando para isso a ferramenta Polígono Regular. Sobre seus lados aplique a ferramenta Koch 2, criada durante o processo de construção da curva de Koch. Para aplicar tal ferramental, selecionam-se os vértices do triângulo da esquerda para a direita (Figura 193) para que a nova estrutura a ser criada surja na parte externa do triângulo, caso contrário a linha poligonal criada pela ferramenta ficará na região interna do triângulo.

Figura 193 – Vértices selecionados



Fonte:O autor, 2019

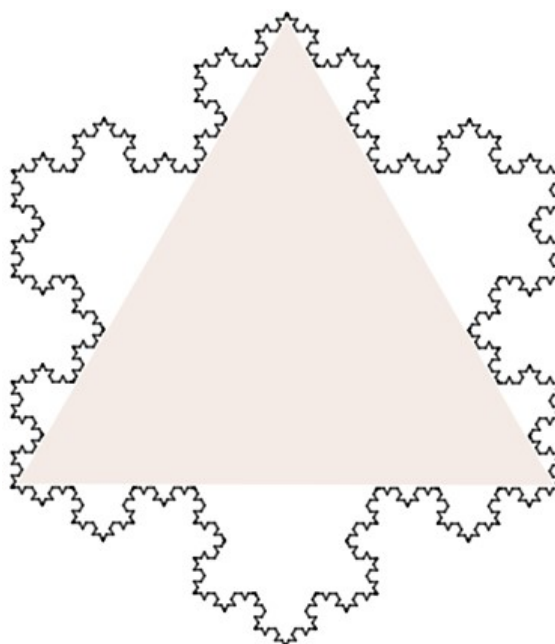
Figura 194 – Ferramenta Koch 2 aplicada sobre os lados do triângulo equilátero



Fonte:O autor, 2019

Agora deve-se aplicar novamente a mesma ferramenta sobre cada um dos novos segmentos obtidos, sempre selecionando os vértices no da direita para a esquerda. Para uma melhor visualização do fractal todos os pontos foram ocultados (Figura 195).

Figura 195 – Representação gráfica do floco de neve de Koch

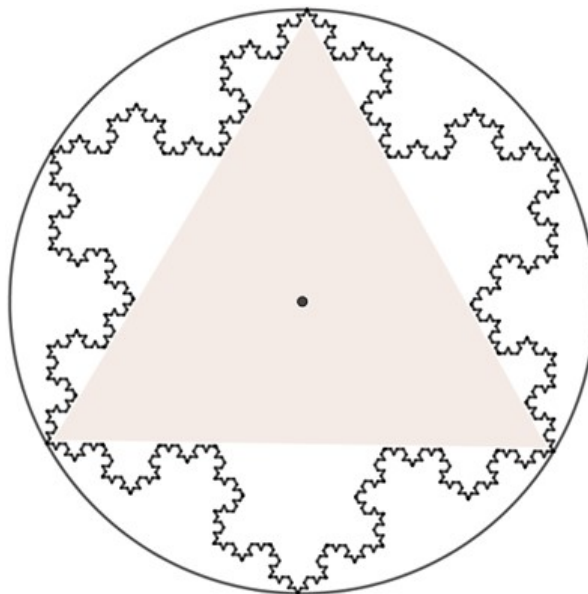


Fonte:O autor, 2019

A construção do floco de neve de Koch em sala de aula junto aos alunos, utilizando o software GeoGebra, pode facilitar a compreensão da soma de todos os termos de uma progressão geométrica infinita. Durante o processo de construção deste fractal, os alunos podem visualizar que área do floco de neve de Koch possui um aumento contínuo, porém os valores somados a cada etapa estão cada vez menores, em relação aos das etapas anteriores, e esta área tende para um valor real que depende área do triângulo equilátero que originou o fractal.

Uma maneira de se mostrar aos alunos que soma de infinitas áreas, cujo resultado é a área do floco de neve de Koch, é um número real e não infinito, é construindo uma circunferência circunscrita ao triângulo equilátero inicial. Os alunos perceberão que independente do número de vezes que a ferramenta é aplicada, a região preenchida pelo fractal permanecerá interna à circunferência, como indicado nas imagens a seguir. Desta forma, os alunos veem não só que a área é finita mas ficam a conhecer uma cota superior do seu valor.

Figura 196 – Floco de neve de Koch inscrito na circunferência



Fonte:O autor, 2019

Para circunscrever uma circunferência no triângulo equilátero pode utilizar-se a ferramenta Ponto Médio ou Centro e assim determinar o centro do triângulo, que será o centro da circunferência circunscrita.

Uma atividade que está associada ao floco de neve de Koch é a construção de variações de flocos de neve, por exemplo, pedir aos alunos que apliquem as ferramentas do fractal em outros tipos de polígonos e observar os padrões que ocorrem ao modificarem o sentido da utilização das ferramentas a fim de construir um floco de neve diferente. A seguir temos algumas atividades que podem ser propostas aos alunos.

5.2.3.1 Atividades Relacionadas ao floco de neve de Koch

O floco de neve de Koch é um fractal que apresenta muitas propriedades geométricas e algébricas, assim é possível criar uma grande variedade de atividades relacionadas a tal objeto e duas dessas serão apresentadas a seguir. Para realizar as atividades é aconselhável a utilização de 1 computador, com o software GeoGebra, para cada alunos (ou um computador para cada aluno) e esses devem estar familiarizados com as ferramentas básicas listadas no início desse capítulo.

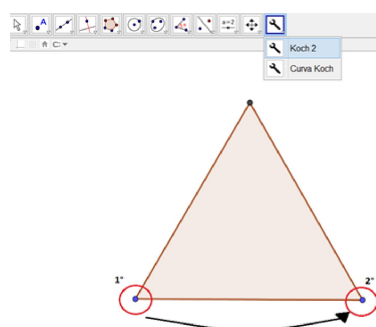
As atividades propostas a seguir podem ser aplicadas em aulas que abordem os seguintes assuntos: **Progressão geométrica, polígonos regulares e área de figuras planas**, ou seja, esses assuntos são pré-requisitos para realizar as atividades. Em geral, esses dois assuntos são abordados nas turmas do primeiro ano do ensino médio, mas isso pode variar de uma escola para outra. A primeira atividade proposta é a construção do

floco de neve Koch, aplicando-se a ferramenta na região interna do triângulo equilátero.

Atividade 1: Aplicação das Ferramentas na região interna do triângulo

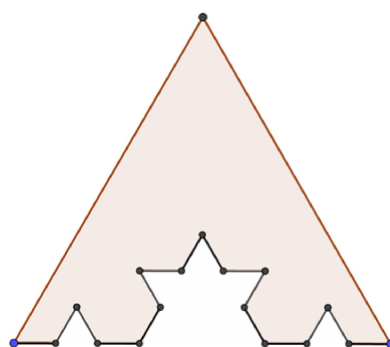
Na construção do floco de neve de Koch as ferramentas foram aplicadas selecionando-se os vértices no sentido direita para esquerda criando um linha poligonal na parte externa do triângulo equilátero, fazendo com que sua aumente cada vez mais. Nessa atividade propõe-se aos alunos que apliquem as mesmas ferramentas, mas agora no sentido esquerda para direita, como indicado na figura a seguir.

Figura 197 – Selecionando os vértices da esquerda para a direita



Fonte:O autor, 2019

Figura 198 – Linha poligonal interna ao triângulo



Fonte:O autor, 2019

O objeto acima foi obtido aplicando-se 5 vezes a ferramenta “Curva Koch”, sendo a primeira aplicação sobre o lado do triângulo e as demais sobre os novos segmentos gerados (como indicado nas figuras). Aplicando a ferramenta da esquerda para a direita obtêm-se uma linha poligonal no interior do triângulo, com isso a área se reduz a cada passo da iteração. Algumas questões que podem ser levantadas aos alunos:

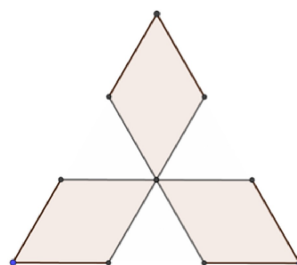
- i. **As áreas que estão sendo retiradas a cada passo do processo possuem algum tipo de padrão?**

- ii. Se sim, indique-o, e refira suas características.
- iii. O padrão encontrado forma alguma sequência numérica?
- iv. É possível escrever os primeiros termos dessa sequência?
- v. Com as informações obtidas, pode-se calcular a área desse novo objeto? Como?
- vi. E o seu perímetro? também é possível de se calcular?

Não se deve mostrar aos alunos que as áreas e os perímetros obtidos em cada passo da iteração formam progressões geométricas, deve permitir-se que eles analisem o objeto e utilizem seus conhecimentos para realizarem suas próprias “pesquisas”, elaborar conjecturas e retirar conclusões. Assim os alunos tendem a apresentar as mais diversas soluções e padrões.

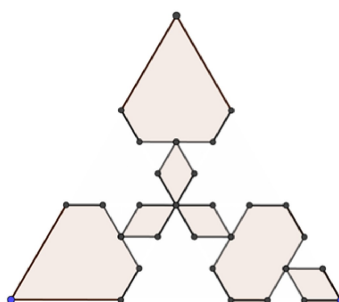
O objetivo da atividade, é aumentar a capacidade interpretativa de análise dos alunos, capacitando os mesmos em solucionar problemas que envolvam padrões, além de se familiarizarem com sequências infinitas. A seguir tem-se os passos da construção desse novo fractal denominado **Koch antisnowflake**.

Figura 199 – Primeira aplicação da ferramenta



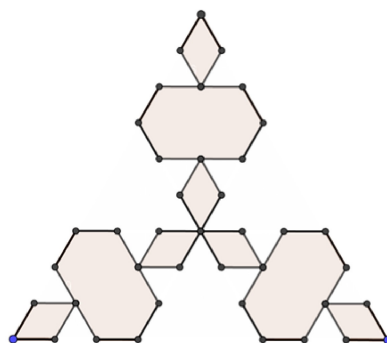
Fonte:O autor, 2019

Figura 200 – Aplicação da ferramenta em alguns segmentos



Fonte:O autor, 2019

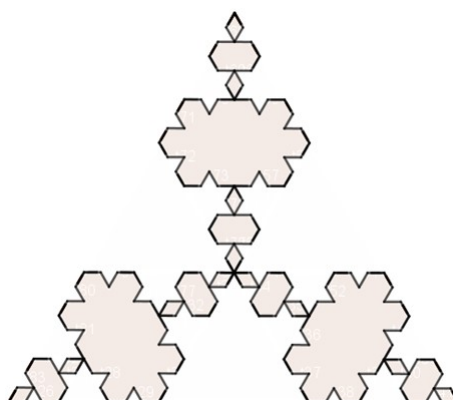
Figura 201 – Koch antisnowflake segundo passo concluído



Fonte:O autor, 2019

Alguns alunos podem levantar a seguinte questão: Por que não utilizar a ferramenta Koch 2 para agilizar a construção? O professor pode responder que tem como objetivo analisar, em cada passo da construção, o valor das áreas retiradas.

Figura 202 – Koch antisnowflake



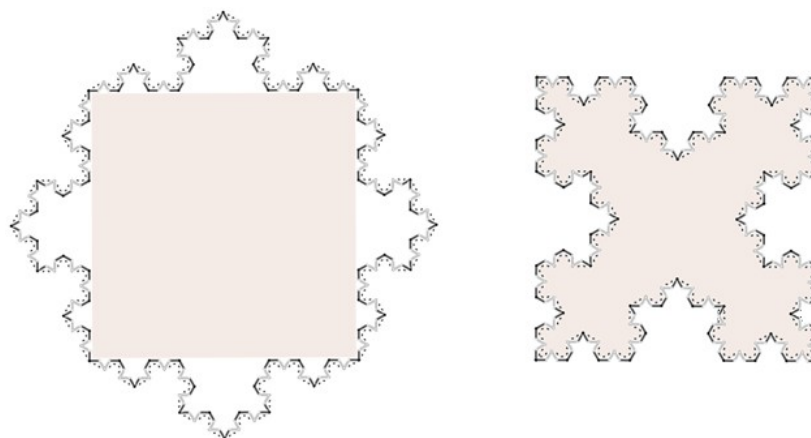
Fonte:O autor, 2019

Atividade 2: Aplicação das Ferramentas em Outros Polígonos

Essa atividade é uma continuação da atividade 1. Para iniciar a atividade deve questionar-se aos alunos o que aconteceria se as ferramentas Curva Koch e Koch 2 fossem aplicadas sobre os lados de outros polígonos regulares, em ambos os sentidos apresentados.

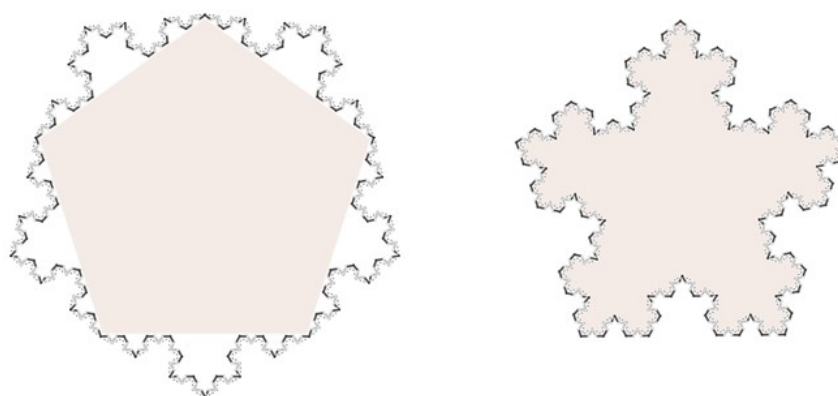
Solicite aos alunos que construam alguns polígonos regulares com diferentes números de vértices, e que em seguida apliquem sobre os seus lados a ferramenta Koch 2 da direita para a esquerda, para obter uma linha poligonal externa ao polígono, ou da esquerda para a direita a fim de criar uma linha poligonal interna ao polígono.

Figura 203 – Ferramenta aplicada em quadrados



Fonte:O autor, 2019

Figura 204 – Ferramenta aplicada em pentágonos

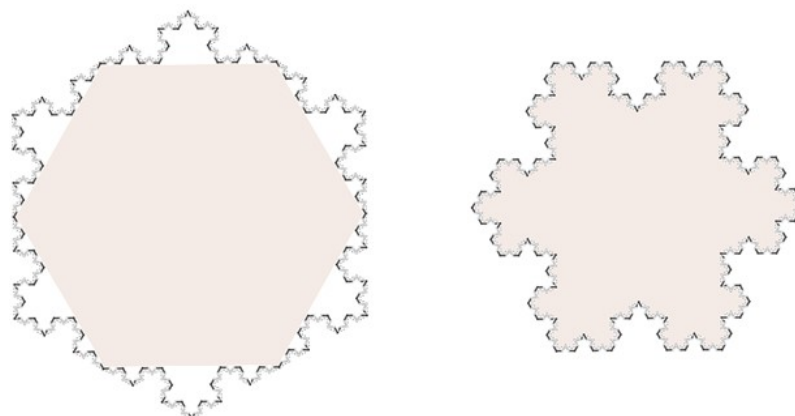


Fonte:O autor, 2019

A partir dessas construções podem colocar-se as seguintes questões:

- Os objetos construídos possuem estruturas semelhantes à dos fractais?
- É possível calcular suas áreas e perímetros em função da medida do lado do polígono?
- Qual objeto se obtêm quando a ferramenta Koch 2 é aplicado sobre os lados de um hexágono regular (em ambos os sentidos)?
- Explique os padrões observados nos padrões obtidos no hexágono regular.

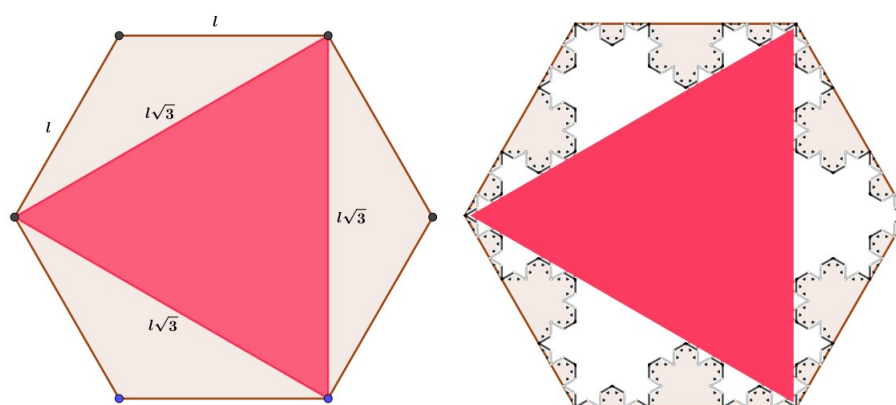
Figura 205 – Ferramenta aplicada em hexágonos



Fonte:O autor, 2019

Como se pode observar na figura anterior, ao aplicar a ferramenta Koch 2, no sentido da esquerda para a direita, sobre os lados de um hexágono regular, obtêm-se um floco de neve com estrutura similar ao floco de neve de Koch. A explicação para tal fato está na relação geométrica entre o triângulo equilátero e o hexágono regular, isto é, o hexágono regular contém um triângulo equilátero formado por suas diagonais de menor medida (Figura 206). Ao apresentar tal fato aos alunos, pode solicitar-se que eles comparem a área do floco de neve obtido a partir do triângulo equilátero com a área do floco de neve obtido a partir do hexágono regular.

Figura 206 – Triângulo equilátero inscrito no hexágono regular



Fonte:O autor, 2019

Na imagem acima é possível observar a aplicação da ferramenta na região interna do hexágono regular e a aplicação externa no triângulo equilátero, as duas resultam em flocos, no entanto não são semelhantes devido ao sentido do recorte.

5.2.4 Construção da Sequência e da Espiral de Padovan

Apresentada no capítulo 3, a sequência de Padovan pode ser definida pela relação de recorrência:

$$P_0 = 1, P_1 = 1, P_2 = 1$$

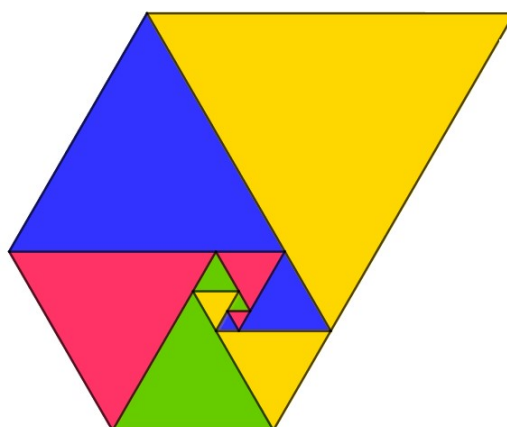
$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 2$$

cujos primeiros termos são:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \dots$$

A sequência de Padovan pode ser representada geometricamente através de uma espiral de triângulos equiláteros cujas medidas dos lados acompanham os números da sequência.

Figura 207 – Espiral de Padovan

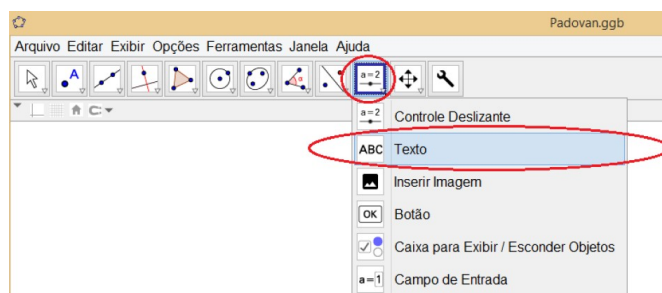


Fonte: O autor, 2019

5.2.4.1 Construção da sequência de Padovan no GeoGebra

A utilização do software GeoGebra para a construção da sequência de triângulos equiláteros cujos lados possuem comprimentos iguais aos valores da sequência de Padovan é bastante simples, visto que a única ferramenta que será utilizada é a ferramenta Polígono Regular. Por outro lado, as atividades associadas a esta sequência se mostram bem variadas pois estabelecem conexões entre vários ramos da matemática, abordando planilhas, análise de dados e funções. O primeiro passo da atividade é a criação de uma Caixa de Texto, ferramenta que se encontra junto da ferramenta Controle Deslizante (Figura 208).

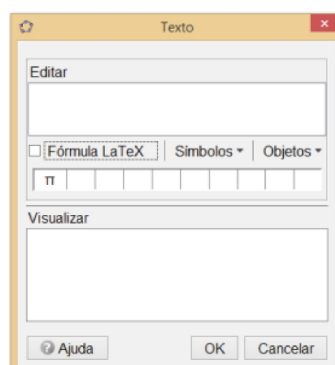
Figura 208 – Ferramenta Texto



Fonte:O autor, 2019

Ao seleccionar esta ferramenta e clicar sobre a superfície de trabalho (Janela de Visualização), surge uma nova janela onde se pode escrever um texto, utilizando simbologia matemática, e que ficará exposto na superfície de trabalho.

Figura 209 – Janela de Texto



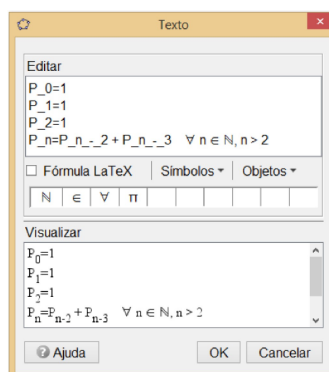
Fonte:O autor, 2019

Na parte destinada para edição escreve-se o seguinte texto:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1 \\
 P_1 &= 1 \\
 P_2 &= 1 \\
 P_n &= P_{(n-2)} + P_{(n-3)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 2
 \end{aligned}$$

obtém-se como output o texto que aparece no campo Visualizar (Figura 210). Note que os símbolos \forall , \in e \mathbb{N} estão na aba Símbolos da janela de texto.

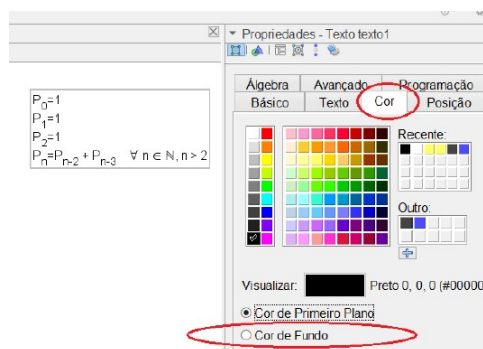
Figura 210 – Texto



Fonte:O autor, 2019

Verifique se o texto está correto e aperte OK. O texto escrito aparecerá na Janela de Visualização, porém com o fundo branco, para destacá-lo em relação ao fundo basta clicar com o botão direito do cursor sobre o texto, acessar suas propriedades, e modificar a cor de seu plano de fundo.

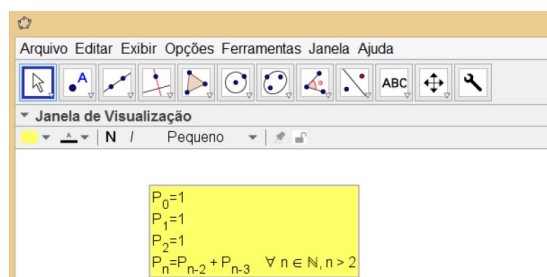
Figura 211 – Propriedades da caixa de texto



Fonte:O autor, 2019

Na parte inferior da paleta de cores temos duas opções sendo a primeira Cor de Primeiro Plano que permite modificar a cor do texto, e a segunda opção 'Cor de Fundo' permite modificar a cor da região interna da caixa de texto, neste caso será usada a cor amarelo.

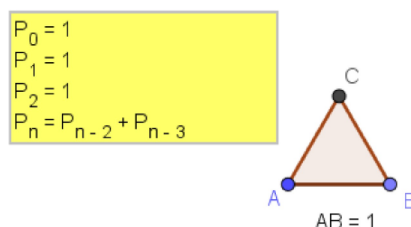
Figura 212 – Plano de fundo com cor modificada



Fonte: O autor, 2019

A caixa de texto tem como objetivo deixar presente os valores iniciais da sequência e sua relação de recorrência. Deste modo, qualquer pessoa que acesse a este arquivo terá a informação de como a sequência dos lados dos triângulos da espiral foi obtida. A seguir vai se apresentar o processo de construção da sequência de triângulos equiláteros que se obtém a partir dos termos da sequência. Inicie a construção com um segmento de medida fixa igual a 1 unidade, para construí-lo utilize a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo. Em seguida, sobre esse segmento construa um triângulo equilátero com auxílio da ferramenta Polígono Regular.

Figura 213 – Sequência de triângulos primeiro passo



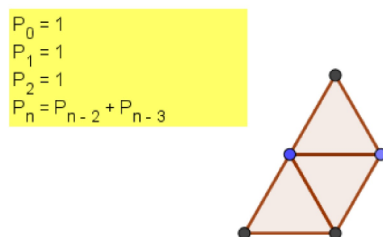
Fonte: O autor, 2019

Deve-se ter em mente que se busca uma estrutura com formato em espiral, ou seja, os triângulos devem ser organizados de forma a obter tal estrutura, lembrando que as medidas dos lados dos triângulos devem seguir os valores dos termos da sequência.

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, \dots$$

Assim os próximos triângulos da sequência, ambos de lado de medida unitária, devem ser construídos como indicado na figura a seguir.

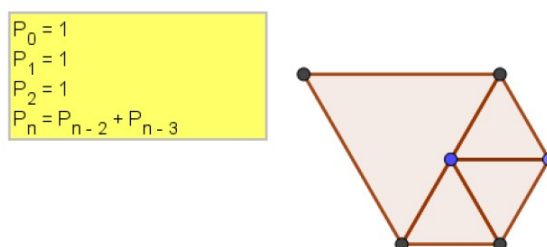
Figura 214 – Sequência de triângulos segundo passo



Fonte:O autor, 2019

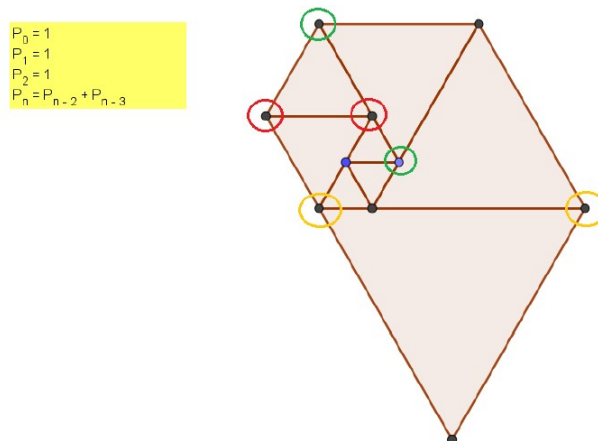
Sobre os lados do primeiro e terceiro triângulos da sequência, constrói-se um triângulo equilátero cujo lado possui medida igual a 2 unidades, correspondente ao termo P_3 da sequência de Padovan, e a partir dele constroem-se os demais triângulos, sempre criando um formato espiral.

Figura 215 – Sequência de triângulos quatro primeiros termos



Fonte:O autor, 2019

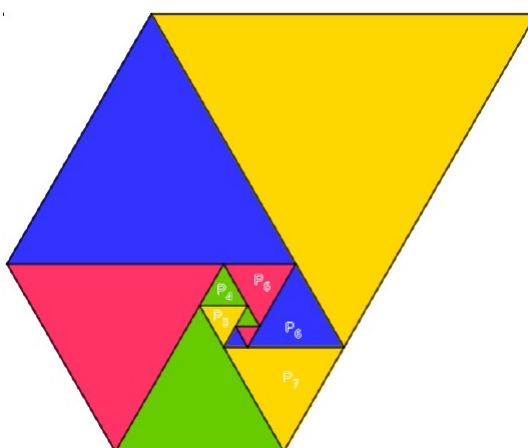
Figura 216 – Sete primeiros termos dispostos em espiral



Fonte:O autor, 2019

Os triângulos equiláteros, presentes na Figura 216, foram construídos, com a ferramenta Polígono Regular, selecionando-se, no sentido horário, os vértices assinalados com a mesma cor. Como a sequência é crescente, não será utilizada uma ferramenta que acelere o processo de construção. Não utilizar uma nova ferramenta permite que o alunos façam uma análise de todas as propriedades geométricas da sequência, por exemplo, se as cores dos triângulos forem modificadas, atribuindo cores diferentes aos 4 primeiros triângulos desenhados, como na imagem a seguir (Figura 217) onde foram utilizadas as cores verde, rosa, azul e amarelo, e repetir essas mesmas cores na mesma ordem, observa-se que, a partir do sexto triângulo, cada novo triângulo está construído sobre os lados de dois triângulos de mesma cor. Para realizar a modificação de cor de um objeto, basta acessar suas propriedades, como foi feito para modificar a cor do plano de fundo da caixa de texto.

Figura 217 – Triângulos coloridos em espiral



Fonte:O autor, 2019

Ao analisar a Figura 217, pode ver-se com clareza que:

$$P_0 + P_4 = P_5, \quad P_1 + P_5 = P_6 \quad e \quad P_2 + P_6 = P_7$$

o que leva a conjectura que a sequência de Padovan pode ser definida por outra relação de recorrência:

$$P_0 = P_1 = P_2 = 1, \quad P_3 = P_4 = 2 \quad e$$

$$P_n = P_{n-1} + P_{n-5}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 4$$

5.2.4.2 Atividade com a sequência de Padovan

A seguir será apresentada uma atividade que envolve a sequência de Padovan, cujo enfoque será a construção da sequência a partir da planilha de dados do GeoGebra. Essa atividade pode ser aplicada em qualquer uma das três séries do ensino médio desde que os alunos possuam os pré-requisitos apresentados a seguir.

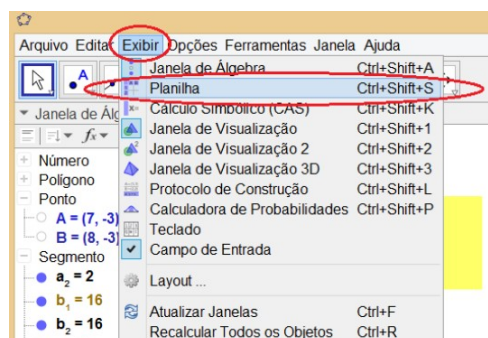
Pré-requisitos: Sequências, progressão geométrica, gráficos de funções e função exponencial;

Objetivos: Utilizar a planilha do GeoGebra para gerar listas; analisar a razão entre termos consecutivos de uma sequência; discutir a possível convergência de uma sequência a partir de uma análise de dados; determinar uma lei que aproxime os valores de uma função aos valores dos termos da sequência, partir da análise de possíveis transformações em seu gráfico.

Construção da Planilha com os Termos da Sequência de Padovan

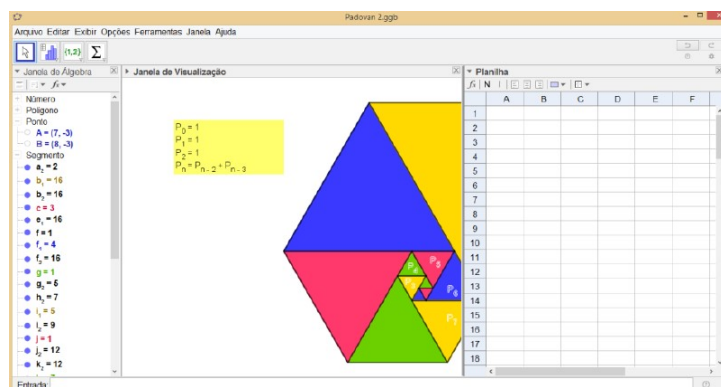
Para acessar a planilha do GeoGebra seleciona-se, na Barra de Menu do software, a opção Exibir e aí, a opção Planilha (Figura 218). Automaticamente surgirá, no canto direito da tela, uma planilha de dados (Figura 219). Outra maneira de acessar a planilha do GeoGebra é apertando simultaneamente as teclas *Ctrl*, *Shift* e *S*.

Figura 218 – Exibir planilha



Fonte: O autor, 2019

Figura 219 – Planilha do GeoGebra

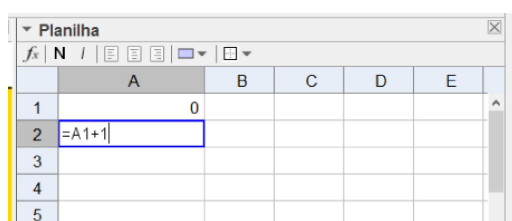


Fonte:O autor, 2019

A primeira coluna da planilha indicará a ordem de cada termo da sequência, ou seja, começará com o zero, seguido dos números 1, 2, 3, até à ordem que desejar. Considere os termos até à ordem 50, ou seja, a planilha terá 51 linhas. Para construir a primeira coluna da planilha seguem-se os seguintes passos:

- 1°. No espaço destinado (célula) ao A1 (Linha 1 e coluna A) entre com o número 0;
- 2°. Na célula A2, entre com o seguinte comando $= A1 + 1$ (em seguida apertar a tecla enter).

Figura 220 – Comando na planilha



Fonte:O autor, 2019

Ao apertar a tecla enter, aparecerá o resultado da operação descrita, ou seja, na célula A2 deve surgir o número $0 + 1 = 1$ (Figura 221).

Figura 221 – Resultado do comando

	A	B	C	D	E
1	0				
2	1				
3					
4					

Fonte:O autor, 2019

3°. Clicar sobre a célula A2 e pressionando o quadrado azul, no canto inferior direito da célula, arrastá-lo para baixo até a linha desejada, no caso, linha 51.

Figura 222 – Coluna selecionada

	A	B	C	D	E
1	0				
2	1				
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

Fonte:O autor, 2019

Ao executar essa ação, replica-se o comando da célula A2 para as demais células selecionadas. Automaticamente o software faz a adequação do comando, ou seja, o valor de cada célula é dado pela soma do valor da célula anterior, que se encontra acima, com o número 1, pode-se tomar como exemplo a célula A8 cujo valor é dado pela soma $A7 + 1$.

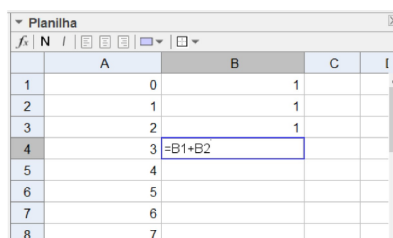
Figura 223 – Valor da célula A8

	A	B	C	D	E
1	0				
2	1				
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				
7	6				
8	=A7 + 1				
9	8				
10	9				

Fonte:O autor, 2019

Para construir a segunda coluna da planilha procede-se de modo análogo, mas usando a recorrência de Padovan. A coluna B se inicia com os primeiros valores da sequência de Padovan, ou seja, $B_1 = P_0 = 1$, $B_2 = P_1 = 1$, $B_3 = P_2 = 1$ e na célula B4 aplica-se o seguinte comando = B1 + B2. Note que o comando referente à célula B4 é a relação de recorrência da sequência de Padovan para $n = 3$, ou seja, $P_3 = P_0 + P_1$ (Figura 224).

Figura 224 – Comando na célula B4

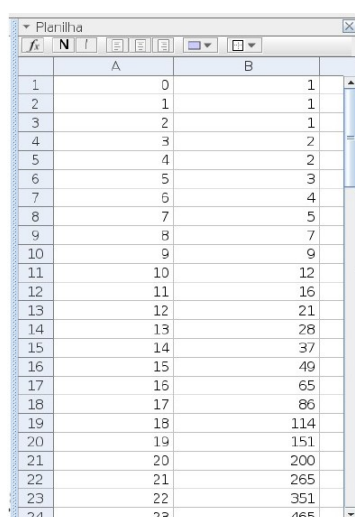


	A	B	C	I
1	0	1		
2	1	1		
3	2	1		
4	3	=B1+B2		
5	4			
6	5			
7	6			
8	7			

Fonte:O autor, 2019

Apertando a tecla **enter** tem-se o 4º termo da sequência de Padovan, ou seja, $1+1 = 2$. Agora repete-se o processo aplicado na coluna A, ou seja, selecionar o quadrado no canto inferior direito da célula B4 e arrastá-lo até a linha 51. Ao executar esse procedimento tem-se que o valor de cada célula da coluna B será dado pelos termos da sequência de Padovan (Figura 225).

Figura 225 – Coluna B com termos da sequência de Padovan



	A	B
1	0	1
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	4	2
6	5	3
7	6	4
8	7	5
9	8	7
10	9	9
11	10	12
12	11	16
13	12	21
14	13	28
15	14	37
16	15	49
17	16	65
18	17	86
19	18	114
20	19	151
21	20	200
22	21	265
23	22	351
24	23	465

Fonte:O autor, 2019

Agora, basta aplicar o mesmo procedimento para criar na coluna C, a qual deve conter os valores de uma nova sequência, onde cada termo é dado pela razão entre termos

consecutivos da sequência de Padovan, ou seja, $R_n = P_n/P_{n-1}$. Essa nova sequência terá como termo inicial $R_1 = P_1/P_0$, logo seus termos serão apresentados a partir da segunda linha da coluna C , onde se deve inserir o seguinte comando: $=B2/B1$. Depois de determinar o valor da célula $C2$, repete-se o processo de arrastar o quadrado do canto inferior da célula até a linha 51, obtendo assim uma sequência cujos termos são dados pela razão de termos consecutivos da sequência de Padovan (Figura 226). Ao analisar os valores de cada termo dessa nova sequência percebe-se que os mesmos parecem tender para o mesmo valor 1,3247... .

Figura 226 – Sequência das razões

	A	B	C
1	0	1	
2	1	1	=B2/B1
3	2	1	1
4	3	2	2
5	4	2	1
6	5	3	1.5
7	6	4	1.33333333333333
8	7	5	1.25
9	8	7	1.4
10	9	9	1.28571428571429
11	10	12	1.33333333333333
12	11	16	1.33333333333333
13	12	21	1.3125
14	13	28	1.33333333333333
15	14	37	1.32142857142857
16	15	49	1.32432432432432
17	16	65	1.32653061224489
18	17	86	1.32307692307692
19	18	114	1.32558139534883
20	19	151	1.32456140350877
21	20	200	1.32450331125827
22	21	265	1.325
23	22	351	1.32452830188679
24	23	465	1.32476632478632

Fonte:O autor, 2019

Pode ocorrer que os valores apresentados na planilha tenham apenas 2 ou 3 casas decimais, nesse caso deve selecionar-se em Opções, na Barra de Menu, a opção de **Arredondamento** e colocá-la em 15 casas decimais. Com 15 casas decimais os arredondamentos por truncamento são evitados e pode observar o valor numérico da razão entre os termos.

Na coluna D será criada uma sequência semelhante à da coluna C , porém com os valores dos inversos dos termos da sequência anterior, ou seja, $I_n = 1/R_n$ ou $I_n = P_{n-1}/P_n$. Para criar tal sequência peça aos alunos que entrem com o seguinte comando na célula $D2$: $=1/C2$ ou $=B1/B2$. Como na sequência anterior, a coluna D apresentará uma nova sequência cujos termos se aproximam de um mesmo valor 0,754... .

Figura 227 – Sequência das inversos

	B	C	D
1	0	1	
2	1	1	1
3	2	1	1
4	3	2	0.5
5	4	2	1
6	5	3	0.666666666666667
7	6	4	0.75
8	7	5	0.8
9	8	7	0.714285714285714
10	9	9	0.777777777777778
11	10	12	0.75
12	11	16	0.75
13	12	21	0.761904761904762
14	13	28	0.75
15	14	37	0.756756756756757
16	15	49	0.755102040816326
17	16	65	0.753846153846154
18	17	86	0.755813953488372
19	18	114	0.754385964912281
20	19	151	0.754965887417219
21	20	200	0.755
22	21	265	0.754715581132076
23	22	351	0.754985754985755
24	23	465	0.754838209672119

Fonte: O autor, 2019

Após construir a planilha, os valores presentes em cada coluna irão ser usados para criar uma lista de pares ordenados para cada sequência construída, o que permitirá analisar o comportamento gráfico de cada uma delas. Os pares ordenados pertencentes às listas aparecerão como pontos no plano cartesiano. O primeiro passo para criar uma lista de pontos consiste em selecionar duas colunas, a primeira será referente ao eixo das abscissas e a segunda ao eixo das ordenadas. A coluna *A* será usada para representar os valores associados ao eixo das abscissas em todas as listas, e as colunas *B*, *C* e *D* indicaram os valores das respectivas imagens de cada lista.

Selecione as colunas *A* e *B*, nessa ordem, e na aba das Ferramentas selecione a ferramenta Lista e nesta deve-se escolher a segunda ferramenta, denominada Lista de Pontos. Ao selecionar a ferramenta surgirá uma janela onde é possível nomear a lista e modificar algumas de suas configurações, utilize o nome Padovan. Ao executar essa ferramenta aparecerá na Janela de Álgebra uma lista onde cada elemento é um par ordenado do tipo (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$. Simultaneamente o software criará uma coleção de pontos sobre a Janela de Visualização, nesse momento, caso os eixos coordenados não estejam visíveis, convém exibi-los (para tal, basta clicar com o botão esquerdo do cursor sobre a área de trabalho e selecionar a opção Eixos). A criação das lista referentes às colunas *C* e *D* são opcionais, estas lista têm como objetivo apresentar graficamente a convergência das sequências criadas em cada coluna.

Analisando a lista de pontos percebe-se que os mesmos se organizam sobre a curva de uma função, a partir de uma certa ordem. É o momento de colocar algumas questões.

- i. **Que tipo de função apresenta tal comportamento?**
- ii. **Qual a lei que define essa curva?**
- iii. **Será fácil indicar a lei ou terá que se recorrer a uma curva que aproxime os pontos dados?**

- iv. **Como se pode obter a lei que melhor aproxima a sequência dada, conhecida uma outra aproximação?**

Atendendo ao processo de construção da coluna C, e ao conhecimento de sequências onde a razão entre termos consecutivos é constante, pode sugerir-se que estes pontos sejam aproximados por uma progressão geométrica.

- v. **Qual o termo geral de uma progressão geométrica de razão igual a 1,324...?**
- vi. **E quais são os seus primeiros termos?**

Para as questões acima podem ser sugeridas respostas distintas, por exemplo, uma para o valor inicial P_0 , e a outra sendo o valor inicial da sequência quando P_1 ou assumindo primeiro termo igual a 1 ou igual a 2. Assim as leis de termo geral, apresentadas a seguir, poderão ser dadas como resposta.

$$a_n = (1.324717956674582)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0;$$

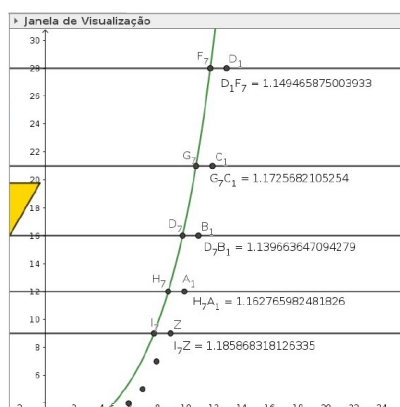
$$a_n = (1.324717956674582)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1;$$

$$a_n = 2(1.324717956674582)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0;$$

$$a_n = 2(1.324717956674582)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

As soluções desse tipo não satisfazem as condições iniciais da sequência de Padovan (Figura 228), e é grande o erro que se comete ao serem usados os seus valores para aproximações dos termos da mesma ordem da sequência em estudo. No entanto, partindo delas e de algumas modificações resultantes da soma (ou diferença) de constantes, estas funções poderão ser melhoradas.

Figura 228 – Distância entre curva e pontos



Fonte: O autor, 2019

Para melhorar a aproximação dos valores obtidos pelas funções aos valores da seqüência de Padovan deve-se trabalhar com a translação dos gráficos das funções. É importante ressaltar aos alunos as seguintes propriedades:

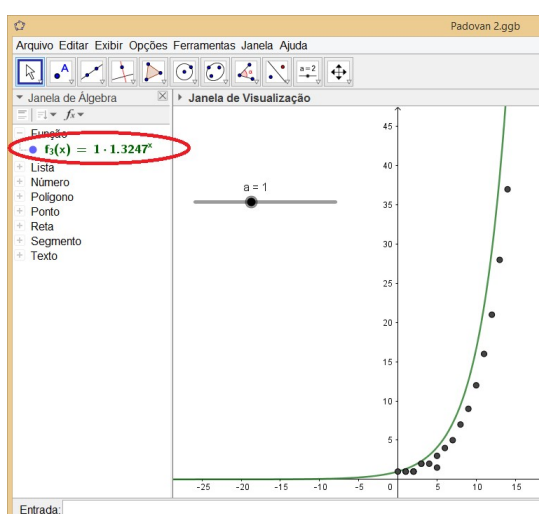
- Ao somar um número real a função o gráfico é deslocado verticalmente $g(x) = f(x) + k$, translação segundo o vetor $(0, k)$
- A composição com uma função do tipo $y = x + c$, faz com que o gráfico seja deslocado na horizontal $g(x) = f(x + c)$, translação segundo o vetor $(-c, 0)$:
- A multiplicação por um número real m , não nulo, pode ocasionar em uma contração ou expansão $g(x) = mf(x)$, expansão ou contração de fator m na direção do eixo Y.

Para verificar as possíveis translações poderá ser conveniente utilizar a ferramenta Controle Deslizante, que permite verificar um número maior de possíveis aproximações. Crie um controle definindo seus valores mínimo, máximo e incremento, sugerem-se os valores -10 e 10 para mínimo e máximo, respectivamente, e incremento igual a 0.001 . Agora escreva funções, na caixa de entrada, com as seguintes leis:

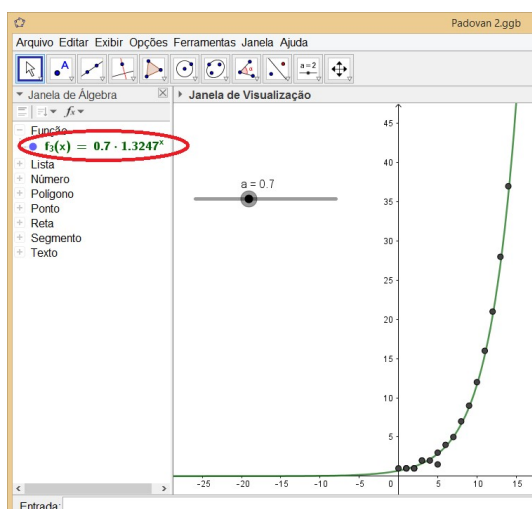
$$y = a(1.3247)^x \quad \text{ou} \quad y = a(1.3247)^{x-1}$$

Poderia ter sido usado o valor 1.324717956674582 como base das funções exponenciais. Das funções acima, têm gráficos que podem ser transladados, ou modificados, com a variação do valor do Controle Deslizante variar (Figuras 229 e 230).

Figura 229 – Função $a = 1$



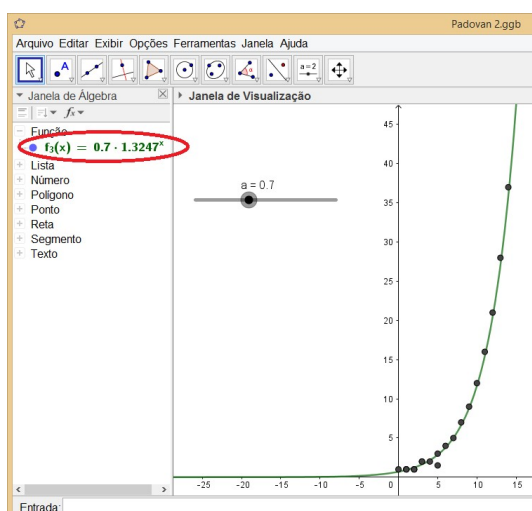
Fonte: O autor, 2019

Figura 230 – Função $a = 0.7$ 

Fonte: O autor, 2019

A função $y = 0.7(1.3247)^x$ apresenta uma “boa” aproximação dos valores da sequência de Padovan. Porém, ao modificar a escala da Janela de Visualização pode perceber-se que alguns pontos se encontram fora do gráfico da função (Figura 232), assim deve modificar-se o valor do Controle Deslizante para obter uma aproximação cada vez mais precisa.

Figura 231 – Ponto fora do gráfico escala modificada



Fonte: O autor, 2019

Observação: A função $y = (1.324717956674582)^{x-1}$, pode ser considerada uma aproximação da lista de pontos, ao ampliar a imagem, modificando a escala, percebemos que

alguns pontos da lista continuam fora da curva.

Nesta atividade os alunos fornecem as mais diversas soluções mas a maioria é do tipo $y = k(1,3247)^x - c$, onde k e $c \in \mathbb{R}$. Esta solução poderá vir acompanhada da seguinte explicação: **A lei foi obtida utilizando a fórmula do termo geral de uma P.G.** O motivo dessa associação decorrerá da análise que $\frac{P_n}{P_{n-1}} = 1,3247\dots$, então $P_n = (1,3247\dots) \cdot P_{n-1}$, ou seja, é possível criar uma progressão geométrica cujos termos se aproximem dos termos da sequência de Padovan.

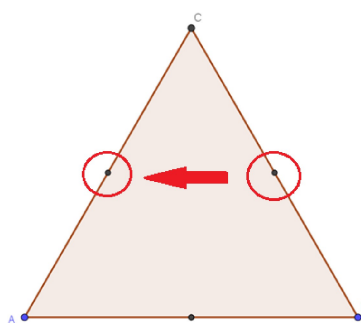
No final da atividade pode sugerir-se aos alunos, como atividade complementar, que repitam a atividade acima com a sequência de Fibonacci.

5.2.5 Construção do Triângulo de Sierpinski

O processo de construção desse fractal é semelhante ao do floco de neve de Koch, particularmente é um dos fractais mais simples de construir como o GeoGebra, sendo utilizadas a ferramenta Polígono Regular e opção de Criar uma Nova Ferramenta. Mas o, que se torna interessante são as formas variadas de construção do fractal.

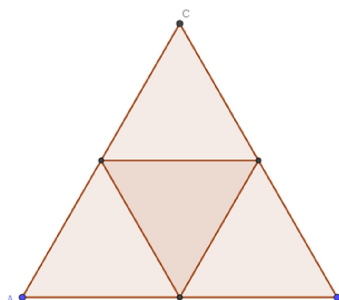
Inicie a construção com um triângulo equilátero qualquer, obtido com a ferramenta Polígono Regular. Utilizando a ferramenta Ponto Médio ou Centro determine os pontos médios de cada lado, estes serão utilizados para construir novos triângulos equiláteros, para tal utilize novamente a ferramenta Polígono Regular e selecionamos dois dos pontos médios dos lados oblíquos da direita para esquerda, construindo assim um triângulo equilátero inscrito no triângulo inicial.

Figura 232 – Triângulo equilátero e pontos médios dos lados



Fonte: O autor, 2019

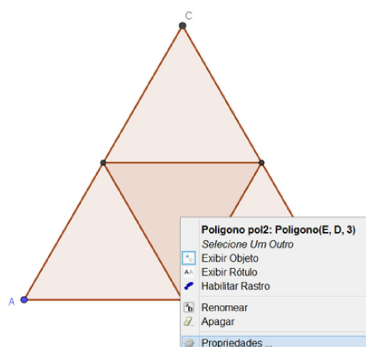
Figura 233 – Triângulo equilátero inscrito



Fonte:O autor, 2019

Agora deve-se modificar a cor desse novo triângulo para obter um espaço vazio no interior do triângulo inicial. Para modificar a cor do triângulo basta acessar suas Propriedades (confirme se o objeto selecionado possui o nome do triângulo inscrito) que nesse caso deve estar com o nome de polígono 2, como indicado a seguir.

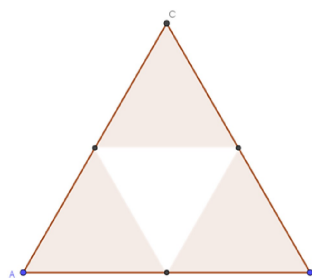
Figura 234 – Propriedades do polígono 2



Fonte:O autor, 2019

Acessando a aba Cor modifique a cor do polígono para branco, o procedimento para modificar a cor de um objeto foi descrito com maiores detalhes em construções anteriores.

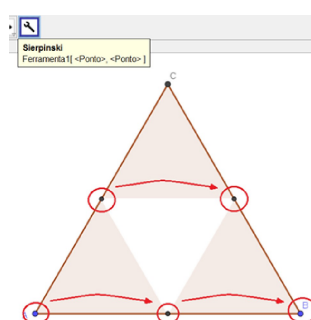
Figura 235 – Triângulo com região central vazia



Fonte:O autor, 2019

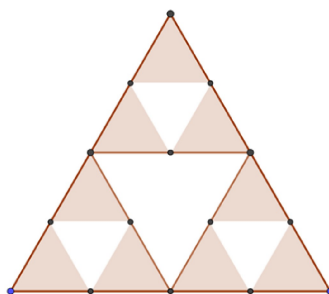
Ao analisar o processo iterativo de construção do triângulo de Sierpinski conclui-se que a construção descrita acima deve ser repetida nos três triângulos equiláteros que restaram do triângulo inicial, para acelerar esse processo pode criar-se uma nova ferramenta, ou seja, uma ferramenta que repita toda construção de maneira simples. Selecione todos os objetos construídos e crie uma nova ferramenta, denominada Sierpinski. Ao selecionarmos essa nova ferramenta e clicar em dois pontos quaisquer, será reproduzida a estrutura construída até agora, assim essa nova ferramenta será aplicada nos três triângulos equiláteros que restaram do triângulo inicial, selecionado seus vértices como indicado na figura a seguir.

Figura 236 – Utilizando a ferramenta Sierpinski



Fonte:O autor, 2019

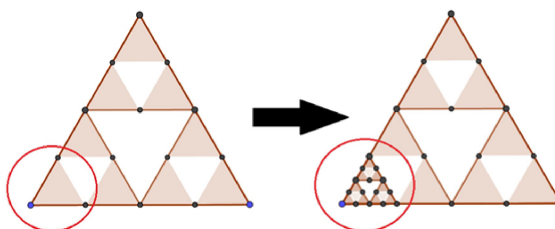
Figura 237 – Ferramenta Sierpinski aplicada



Fonte:O autor, 2019

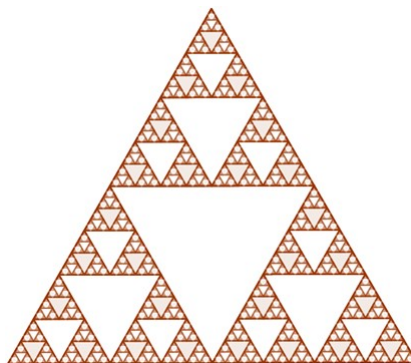
Depois de utilizar a ferramenta nos três triângulos, pode criar-se outra ferramenta que tornará o processo de construção ainda mais rápido, análogo ao que foi feito no floco de neve de Koch. Selecione novamente todos os objetos construídos e crie outra ferramenta com nome de Sierpinski 2. Utilizando a ferramenta Sierpinski 2 podemos continuar a construção do fractal, sempre selecionando os vértices da esquerda para a direita.

Figura 238 – Ferramenta Sierpinski 2 aplicada



Fonte:O autor, 2019

Figura 239 – Representação gráfica do triângulo de Sierpinski no Geogebra



Fonte:O autor, 2019

Perceba que todos os pontos utilizados durante a construção do fractal foram ocultados, com isso a imagem fica mais limpa.

Como dito anteriormente, o triângulo de Sierpinski é um dos fractais mais simples de se construir no GeoGebra e a simplicidade desse processo de construção permite que o mesmo seja utilizado para verificar muitas propriedades atribuídas aos fractais, por exemplo, sua dimensão e o significado de seu valor não inteiro. Estas propriedades podem ser apresentadas em forma de atividade.

5.2.5.1 Atividade com Triângulo de Sierpinski

Na seção **3.1.3.1**, do capítulo 3, foi apresentada uma representação gráfica do triângulo de Sierpinski obtida a partir de círculos com centros sobre os vértices de um triângulo equilátero, essa representação foi utilizada para entender o significado geométrico de uma dimensão não inteira. Nesta atividade será feita a construção do triângulo de Sierpinski e calculando a cada passo a área retirada do triângulo inicial e o número de triângulo semelhantes que são obtidos em cada iteração, com objetivo de apresentar aos alunos objetos geométricos cuja dimensão não é representada por um número inteiro e qual o significado geométrico desse valor.

Pré-requisitos: Limite da soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, logaritmo.

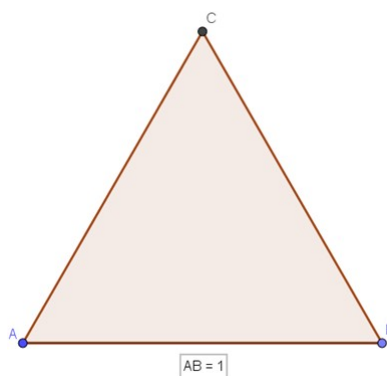
Objetivos: Apresentar aos alunos o significado geométrico de dimensão.

Esta atividade deve ser iniciada ao mesmo tempo que a construção do triângulo de Sierpinski. Para a construção desse fractal pede-se aos alunos que utilizem um triângulo equilátero de lado unitário, como objeto inicial e que calculem a área e o perímetro desse triângulo, denominando-os de A_0 e P_0 .

$$A_0 = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ u.a.} \quad \text{e} \quad P_0 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ u.c}$$

Para construir o triângulo com lado unitário utilize a ferramenta Segmento com Comprimento Fixo para construir um segmento de medida 1 unidade e sobre ele construir o triângulo equilátero com a ferramenta Polígono Regular.

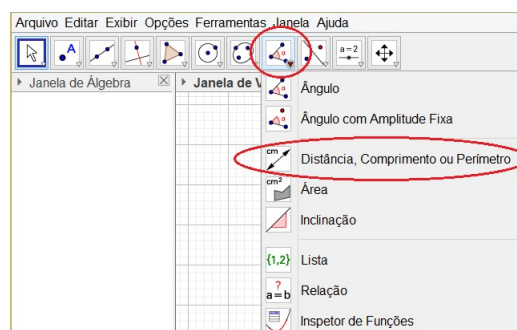
Figura 240 – Triângulo de lado unitário



Fonte:O autor, 2019

A medida do segmento, apresentada na caixa de texto da figura acima, é obtida com a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro, esta é um subferramenta da ferramenta Ângulo. Para utilizá-la basta clicar sobre o segmento que se quer obter a medida.

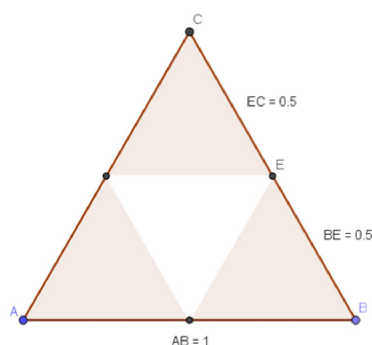
Figura 241 – Ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro



Fonte:O autor, 2019

Inicie juntos aos alunos a construção do triângulo de Sierpinski sempre solicitando que eles apresentem as medidas dos novos segmentos.

Figura 242 – Segundo passo da construção



Fonte: O autor, 2019

Ao executar o segundo passo da construção, na qual se retira o triângulo central, deve questionar-se aos alunos:

- i. **Quantos triângulos semelhantes ao triângulo inicial se obtêm no segundo passo da construção?**
- ii. **Qual o fator de redução aplicado sobre o triângulos inicial para obter os novos triângulos?**

Com as informações acima é possível apresentar aos alunos a fórmula que fornece o valor da dimensão de Hausdorff⁴ de um objeto geométrico.

$$d = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)}$$

onde N indica o número de objetos semelhantes ao inicial e r o fator de redução linear aplicado sobre o objeto inicial. Após apresentar a fórmula acima, peça aos alunos para calcular a dimensão de Hausdorff do triângulo de Sierpinski, eles devem obter o seguinte valor:

$$N = 3 \text{ e } r = \frac{1}{2} \text{ (respostas das questões levantadas)} \rightarrow d = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,57.$$

Perceba que na relação acima se utilizam valores aproximados para os logaritmos decimais de 3 e 2.

Ao encontrar esse valor para a dimensão do triângulo de Sierpinski, deve colocar-se aos alunos a seguinte pergunta:

⁴ É importante fornecer uma pequena explicação sobre a diferença entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão Euclidiana, como apresentada no capítulo 2

i. **Qual o significado geométrico da dimensão?**

Peça aos alunos que escrevam os valores das dimensões de alguns objetos da geometria euclidiana, por exemplo, do ponto, de um segmento, de um quadrado, de um cubo e em seguida faça a seguinte pergunta aos alunos:

ii. **Dentre comprimentos, áreas e volumes, que medidas podemos calcular de cada um desses objetos?**

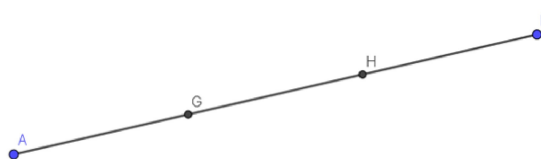
Deve-se dar um tempo para que eles cheguem as suas próprias conclusões, em seguida monta-se a seguinte tabela junto aos alunos:

Tabela 1 – Objetos e Dimensão

Objeto	Dimensão	O que é possível calcular?
Ponto	$d = 0$	Nenhuma
Segmento (linha)	$d = 1$	Comprimento
Quadrado	$d = 2$	Comprimento dos lados e Área
Cubo	$d = 3$	Comprimento das arestas, Área das faces e Volume

Solicite ao alunos que tentem calcular as dimensões dos objetos acima, com exceção do ponto, utilizando a fórmula da dimensão de Hausdorff, ou seja, deve pedir-se que os alunos repitam o processo realizado no triângulo de Sierpinski, utilizando o mesmo fator de redução ou não, como nos exemplos a seguir.

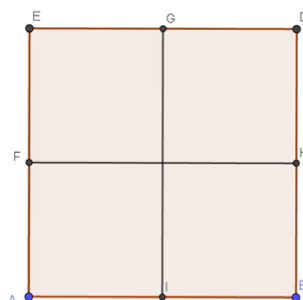
Figura 243 – Segmento com fator de redução 1/3



Fonte:O autor, 2019

$$N = 3 \text{ e } r = \frac{1}{3} \rightarrow d = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log(3)}{\log(3)} = 1$$

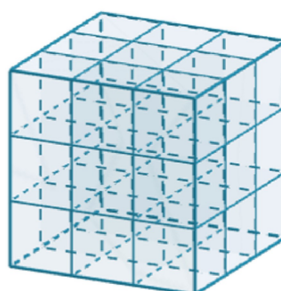
Figura 244 – Quadrado com fator de redução 1/2



Fonte:O autor, 2019

$$N = 4 \text{ e } r = \frac{1}{2} \rightarrow d = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} = \frac{2\log(2)}{\log(2)} = 2$$

Figura 245 – Cubo com fator de redução 1/3



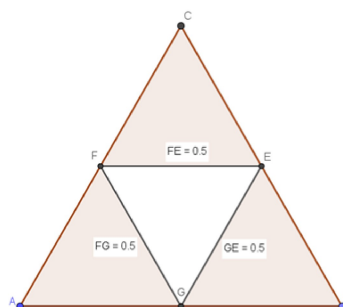
Fonte:O autor, 2019

$$N = 27 \text{ e } r = \frac{1}{3} \rightarrow d = \frac{\log(27)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} = \frac{3\log(3)}{\log(3)} = 3$$

Depois de os alunos apresentarem seus resultados, deve-se informar que a dimensão de um objeto está diretamente relacionada com a quantidade de grandezas que se podem calcular nele, como apresentado na tabela. Com base nessa informação é oportuno colocar a seguinte questão: **Que medidas é possível calcular no triângulo de Sierpinski? Seu comprimento? Sua área? E essas medidas são diferentes de zero?**

Para realizar o cálculo do perímetro e da área do triângulo de Sierpinski solicite aos alunos que construam duas sequências, uma com as áreas que estão sendo retiradas a cada etapa da construção e outra com a soma dos novos segmentos gerados em cada etapa, sempre utilizando como parâmetro a área A_0 e o perímetro P_0 do triângulo inicial, como no exemplo a seguir.

Figura 246 – Medidas dos segmentos



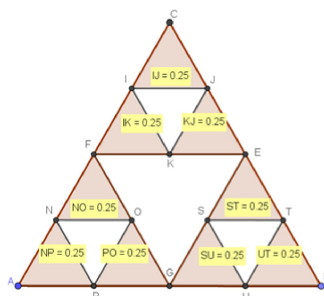
Fonte:O autor, 2019

$$A_1 = \frac{1}{4} \cdot A_0 = \frac{\sqrt{3}}{16} \quad e \quad P_1 = \frac{1}{2} \cdot P_0 = 3 \cdot 0,5 = 1,5 = \frac{3}{2}$$

Para que não haja dúvidas, informe aos alunos que o perímetro P_1 é dado pela soma dos segmentos \overline{GE} , \overline{FE} e \overline{FG} , que foram gerados após a retirada do triângulo central.

Repetindo o processo nos três triângulos restantes obteremos o segundo termo de cada sequência.

Figura 247 – Terceiro passo da construção

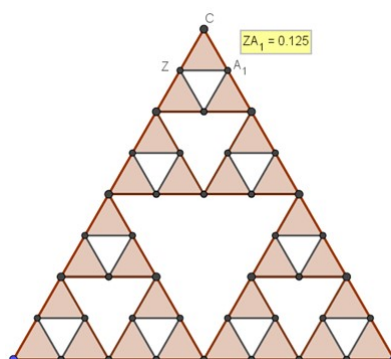


Fonte:O autor, 2019

Agora tem-se:

$$A_2 = \frac{3}{16} \cdot A_0 = \frac{3\sqrt{3}}{64} \quad e \quad P_2 = \frac{3}{4} \cdot P_0 = 9 \cdot 0,25 = 2,25 = \frac{9}{4}$$

Figura 248 – Quarto passo da construção



Fonte: O autor, 2019

$$A_3 = \frac{9}{64} \cdot A_0 = \frac{9\sqrt{3}}{256} \quad \text{e} \quad P_3 = \frac{9}{8} \cdot P_0 = 27 \cdot 0,125 = 3,375 = \frac{27}{8}$$

Provavelmente poucos alunos apresentarão as áreas retiradas ou os perímetros na forma de fração, formato que facilita a visualização que tais valores são termos de uma progressão geométrica. Reforce essa informação junto aos alunos para que as análises futuras sejam mais simples. Solicite aos alunos que escrevam em ordem os valores obtidos e questione se há algum tipo de padrão na sequência numérica.

$$\left(\frac{1}{4} \cdot A_0, \frac{3}{16} \cdot A_0, \frac{9}{64} \cdot A_0, \dots \right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{64}, \frac{9\sqrt{3}}{256}, \dots \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot P_0, \frac{3}{4} \cdot P_0, \frac{9}{8} \cdot P_0, \dots \right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \dots \right)$$

A partir da análise desses dados os alunos deverão dizer se é possível reconhecer algum padrão, e se é possível classificar as sequências, indicando se são crescentes ou decrescentes e qual é o valor de sua razão. Deseja-se obter as seguintes respostas: A sequência das áreas é uma progressão geométrica decrescente de razão $\frac{3}{4}$ e a sequência dos perímetros é uma progressão geométrica crescente de razão $\frac{3}{2}$. Nesse momento, explica-se aos alunos que o triângulo de Sierpinski possui um processo de construção infinito, ou seja, o processo de retirar triângulos pode continuar infinitamente, e solicita-se que calculem os limites das somas infinitas das duas sequências e que comparem os resultados.

Para obter a soma das infinitas áreas retiradas os alunos devem utilizar a fórmula do limite da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica.

$$S_{\text{áreas}} = \frac{A_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4} \cdot A_0}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot A_0}{\frac{1}{4}} = A_0 \quad \text{ou} \quad S_{\text{áreas}} = \frac{A_1}{1 - q} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} = A_0$$

Esta soma dá-nos a soma de todas as áreas retiradas, assim a área do triângulo de Sierpinski é a diferença entre a área do triângulo inicial e o resultado da soma acima.

$$A_{sierp} = A_0 - S_{\text{áreas}} = 0 \text{ u.a.}$$

A soma dos perímetros deve ser obtido pela fórmula da soma de todos os termos de uma progressão geométrica, ou seja,

$$S_{\text{perím}} = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$$

Solicite aos alunos que escrevam a soma termo a termo, como indicado acima, assim se torna visual a análise de que se trata de uma soma cujas parcelas estão ficando cada vez maiores, logo a mesma tende para infinito, ou seja, o perímetro é infinito.

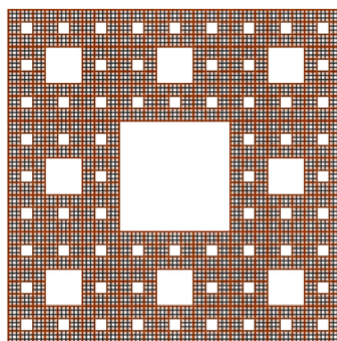
$$S_{\text{perím}} = \infty$$

Com base nos resultados acima, pode explicar-se aos alunos que os valores encontrados estão relacionados com a dimensão não inteira ($d \approx 1,57$) do triângulo de Sierpinski. Como sua dimensão é maior que 1, a soma de todos seus segmentos tende para o infinito. O mesmo ocorre com a sua área, o triângulo de Sierpinski não possui dimensão suficiente para possuir uma área, logo a mesma é zero. A próxima atividade é complementar a essa.

5.2.6 Construção e Atividade com Tapete de Sierpinski

Essa atividade é uma continuação da atividade anterior. Deve pedir-se aos alunos que repitam o processo de construção e análise de dados realizada com triângulo de Sierpinski em um quadrado. Para tal, apresente o tapete de Sierpinski e os primeiros passos da construção.

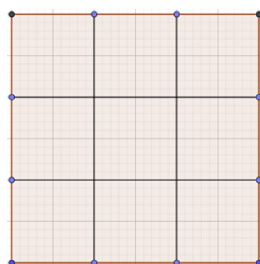
Figura 249 – Representação gráfica do tapete de Sierpinski no Geogebra



Fonte: O autor, 2019

A construção do tapete de Sierpinski no GeoGebra é dada de maneira análoga ao triângulo de Sierpinski, porém agora o objeto inicial é um quadrado que deve ser dividido em 9 quadrados congruentes e retirado o quadrado central.

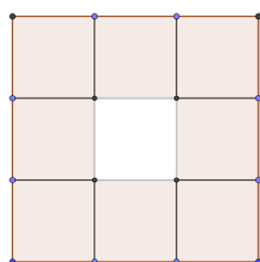
Figura 250 – Quadrado dividido em 9 quadrado congruentes



Fonte:O autor, 2019

Repare que foi utilizada a malha quadriculada para facilitar a divisão dos lados do quadrado. Agora retira-se o quadrado central e cria-se uma nova ferramenta, idêntico ao processo descrito na construção do triângulo de Sierpinski.

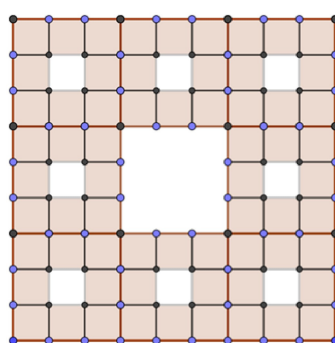
Figura 251 – Quadrado sem região central



Fonte:O autor, 2019

Com a nova ferramenta criada, basta aplicá-la sobre os demais quadrados e assim por diante.

Figura 252 – Aplicação da nova ferramenta



Fonte:O autor, 2019

A partir da análise de cada passo da construção peça aos alunos que repitam a atividade anterior, ou seja, calculem a dimensão de Hausdorff do tapete de Sierpinski, escrevam as sequências das áreas retiradas e dos perímetros e analisem a soma de seus infinitos termos a fim de determinar a área e o perímetro do fractal para verificar a relação entre o valor da dimensão e suas medidas.

6 CONCLUSÃO

A matemática pode ir muito além de contas, expressões e fórmulas. Ela é ferramenta para analisar informações e padrões, sejam esses algébricos ou geométricos. Os fractais vêm se mostrando importantes instrumentos para motivar e aguçar a curiosidade dos alunos de todas as idades.

A associação da geometria fractal com as formas geométricas encontradas na natureza facilita a compreensão, por partes dos alunos, que a matemática e suas propriedades não existem somente nas mentes de pensadores e estudiosos, esta está presente em cada detalhe do mundo que nos cerca.

Ao apresentar os fractais e seus padrões aos meus alunos, eles apresentaram muitas dúvidas, por exemplo, onde e como esses padrões podiam ser utilizados. Neste exato momento percebi as diversas atividades que poderiam ser realizadas juntos aos alunos. Solicitei aos alunos que fizessem pesquisas e eles me apresentaram aplicações da geometria fractal em artes, designer gráfico, tecnologias.

Com auxílio do software GeoGebra, construí junto aos alunos os fractais clássicos e até mesmo produzir seus próprios fractais. As atividades descritas no último capítulo foram aplicadas em turmas do ensino médio de duas escolas da rede privada de ensino do Rio de Janeiro, e em ambas foram poucos os alunos que não se adaptaram à utilização das ferramentas do software.

Uma outra proposta utilizada para motivar os alunos em relação aos conteúdos a serem abordados em sala de aula, foi a parte histórica da matemática relacionada aos conteúdos. Pode tomar-se como exemplo a própria história dos fractais e seus pesquisadores. Apresentar a história de cada conteúdo é uma maneira de mostrar que a matemática vai muito além das contas de um problema.

Em relação ao estudo dos padrões fractais obtidos a partir de uma sequência de polígonos inscritos, uns nos outros, esta foi utilizada para despertar nos alunos a curiosidade em como fazer pesquisas nas mais diversas áreas da matemática.

Em um estudo futuro desejo analisar o padrão fractal obtido pelo entrelaçamentos das circunferências (apresentados no capítulo 4) utilizando equações diferenciais e sistemas dinâmicos, a fim de determinar se esses padrões podem ser descritos por equações ou números complexos e qual seria a dimensão de Hausdorff associada. As construções apresentadas nesse trabalho, assim como outras estão disponíveis em <<https://www.geogebra.org/u/diego.lemos.524596>>.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, M. A.; FÁVARO, V. V. Um estudo sobre funções contínuas que não são diferenciáveis em nenhum ponto. *FAMAT em Revista*, Uberlândia, v. 1, n. 13, p. 5, dez 2009. Citado na página 34.
- BARNSELEY, M. F. *Fractals Everywhere*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1993. 1 p. Citado na página 18.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Citado na página 18.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEF, 2016. Citado na página 18.
- COHEN, N.; HOHLFELD, R. G. Hilbert-type space-filling curves. *Fractals*, Boston, v. 7, n. 1, p. 79 – 84, dec 1998. Citado na página 31.
- CONVERSANO, E.; LALLI, L. T. Sierpinski triangles in stone, on medieval floors in rome. *Journal of Applied Mathematics*, Bratislava, v. 4, n. 4, p. 113–121, dez 2011. Citado na página 43.
- DALPIAZ, M. R. *Um Estudo Sobre Fractais: Origem e Proposta Didática Para Aplicação em Aula*. 39-41 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba, Curitiba, 2016. Citado na página 23.
- EUCLIDES. *Os Elementos - Tradução brasileira*. São Paulo: UNESP, 2009. 97 p. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 67.
- FERREIRA, R. de C. *Números Mórficos*. 47-660 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba. Centro de Ciências Exatas e da Natureza. Departamento de Matemática, João Pessoa, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- GONÇALVES, C. H. B.; POSSANI, C. Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na grécia antiga. *Matemática Universitária - SBM*, n. 47, p. 16–24, dez 2009. Citado na página 67.
- JANOS, M. *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Moderna, 2008. 29-89 p. Citado na página 34.
- JUNIOR, E. M. G. *Aspectos Computacionais na Geometria da Espiral de Teodoro*. 3-11 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Citado na página 51.
- LENNON, F. E.; CIPRIANI, N. A. Lung cancer—a fractal viewpoint. *NATURE REVIEWS*, North Carolina, p. 3 and 7, aug 2015. Citado na página 30.
- MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H FREEMAN AND COMPANY, 1977. 15, 31-32, 44-47, and 68-71 p. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

- MONNEROT-DUMAINE, A. The fibonacci word fractal. *HAL: Archives-ouvertes.fr*, Villeurbanne, p. 1–9, mar 2009. Citado na página 71.
- MUCHERONI, L. F. *Dimensão de Hausdorff e Algumas Aplicações*. 33 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- NUNES, R. S. R. *Geometria Fractal e Aplicações*. 29-46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 20, 22, 25, 26 e 27.
- PLATÃO. *Mênon*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2001. 33-39 p. Citado na página 65.
- REIS, J. N. da C. Uma Árvore de pitágoras: Explorando os fractais no ensino médio. *Ciência e Natura*, Bratislava, v. 37, n. 1, p. 411–418, jan 2015. Citado na página 61.
- RODRIGUES, A. S. *Polígonos de Reuleaux*. 20-25 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015. Citado na página 94.
- ROSADAS, V. D. S. *Triângulo de Pascal: Curiosidades e Aplicações na Escola Básica*. 23 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Pontifícia Universidade Católica do rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Citado na página 43.
- SAGAN, H. *Space-Filling Curves*. New York: Board, 1994. 10-11 and 43-51 p. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 59.
- STEWART, I. *Mania de Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar, 2005. 80-86 p. Citado na página 38.
- TEIA, L. Anatomy of the pythagoras' tree. *Australian Senior Mathematics Journal*, Adelaide, v. 30, n. 2, p. 38–47, nov 2016. Citado na página 63.