**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM REDE – MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**MARCELO OMAR LIMA DE CASTRO**

# TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM CONTEXTUALIZADA

**SÃO LUÍS**
**2019**

MARCELO OMAR LIMA DE CASTRO

TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM CONTEXTUALIZADA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede – Matemática em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Arlane Manoel Silva Vieira
Doutor em Matemática

**SÃO LUÍS**

**2019**

**MARCELO OMAR LIMA DE CASTRO**

**TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM CONTEXTUALIZADA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede – Matemática em Rede Nacional, da UFMA, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 00 de julho de 2018.

**BANCA EXAMINADORA**

______________________________________

**Prof. Dr. Arlane Manoel Silva Vieira**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**

**ORIENTADOR**

______________________________________

**Prof. Dr.**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO**

______________________________________

**Prof. Dr.**

**UNIVERSIDADE**

À minha mãe, Deuselina Lima de Castro.

Ao meu pai, José Omar de Castro, “In Memorian”.

Às minhas filhas, Mariana e Marcela, razão das minhas lutas.

À minha esposa, Ana Maria Santos Anunciação, guardiã nas orações.

Aos meus tios Professores, “In Memorian”, João Pinto Lima e Rita Lima Reis.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, meu refúgio e proteção. Sem Ele nada seria possível.

A meus pais, José Omar de Castro, in memorian, e Deuselina Lima de Castro, que me mostraram desde muito cedo os valores da Educação e do trabalho.

A minhas filhas Mariana e Marcela, á minha esposa, Ana Maria e ao meu genro, Filipe Muniz: verdadeiros “anjos ao lado” sempre que eu preciso.

A meus irmãos, irmãs, tios, tias, sobrinhos e sobrinhas pelo carinho e torcida.

Aos meus professores da UFSC / UNIVIMA, em especial ao Prof. Rubens Starke, uma referência de profissional que tenho para toda vida.

Aos meus colegas e amigos da UFSC / UNIVIMA, em especial a Altenize Oliveira, uma grande incentivadora, exemplo de dedicação e luta.

Aos meus colegas das turmas PROFMAT 2013 e 2016, em especial a estes dois: Raimundo Neto, botafoguense vitorioso que me acompanha desde os tempos de UFSC / UNIVIMA, incentivando-me e ajudando-me em toda esta jornada como a um verdadeiro irmão e, também, a Ellany da Silva, mulher guerreira e de muita fé, por suas palavras de apoio e motivação.

Ao PROFMAT, pela oportunidade dada aos professores da Educação Básica de realizarem este sonho: ser Mestre em Matemática.

Aos professores do PROFMAT – UFMA pela gentileza em compartilhar tantos conhecimentos conosco.

Ao Professor Antonio José pelo meu “resgate”, quando eu já não acreditava na conclusão deste Mestrado.

Ao meu orientador, Professor Arlane Manoel, por quem tenho grande respeito, pela paciência e orientações.

E a todos que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho fosse concretizado.

Obrigado a todos vocês.

"Leia Euler, leia Euler. Ele é o mestre de todos nós."

Pierre Simon Laplace

# RESUMO

Tendo em vista que a Teoria dos Grafos propicia boas estratégias para resolução de problemas, assim como para elucidação de muitas situações do cotidiano dos alunos, pesquisa-se sobre esta teoria, a fim de propor uma abordagem contextualizada para a introdução da mesma no Ensino Médio. Para tanto, faz-se necessário apresentar os principais conceitos referentes á Teoria dos Grafos, fazer um levantamento de problemas oriundos de provas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas, do Exame Nacional do Ensino Médio, assim como de outras fontes e, apresentar sugestões de planos de aula que tenham como conteúdos a Teoria dos Grafos e a resolução dos problemas selecionados. Realiza-se, então, uma pesquisa do tipo exploratória e de natureza qualitativa. Diante disso, verifica-se que a Teoria dos Grafos pode ser aplicada em diferentes contextos e que é uma forte aliada na resolução de muitos problemas propostos aos alunos do Ensino Médio, o que impõe a constatação de que o ensino da mesma é viável neste nível e que as aulas de Matemática podem, prazerosamente, integrar as linguagens pictórica e gráfica com a linguagem matemática.

**Palavras-Chaves:** [Grafos], [Contextualização], [Ensino].

**ABSTRACT**

It is a must. It presents in a concise way the content of the text, highlighting the most important points, the objective, the methodology, the results and the conclusions of the work. It should occupy only one paragraph, giving preference to the use of the third person singular and the verb in the active voice, not to exceed 500 words. The pattern of the line spacing contained 1.5, font Arial, size 12.

**Keywords**: Control. Output input. Development. System.

O Abstract é o resumo do trabalho traduzido para o inglês (O mesmo resumo inserido na página anterior)

# LISTA DE SIGLAS

BR: Brasil;
PT: Português.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

De maneira mais informal, pode-se conceituar grafo como um "objeto" matemático formado por dois conjuntos: um chamado de conjunto dos vértices (ou nodos) e o outro chamado de conjunto das arestas (ou arcos). Cada aresta está associada a dois vértices ou, em alguns casos a um vértice só. A Teoria dos Grafos, tema central deste trabalho, tem sua origem relacionada ao problema das pontes de Königsberg. Problema este que teve uma solução apresentada em 1736 por um dos maiores gênios da humanidade: o físico e matemático suíço, Leonhard Paul Euler. Mais de 280 anos depois, permeados por algumas lagunas temporais onde nada sobre esta Teoria foi produzido, observa-se que a mesma expandiu seus "tentáculos" sobre várias áreas e contextos do conhecimento humano tais como: Engenharia, Biologia, Química, Sociologia, Informática, etc.

A Teoria dos Grafos foi recomendada como estratégia para resolução de alguns tipos de problemas de análise combinatória. Conforme BRASIL (2006, pág. 94),

> No Ensino Médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Könisberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema identificando situações em que há ou não solução, convergir para a descoberta de condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transporte ou determinar um eficiente trajeto de coleta de lixo em uma cidade. (OCEM, [1, P. 94])

Apesar desta recomendação contida nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, observa-se que ainda é muito incipiente a abordagem da Teoria dos Grafos na maioria das escolas brasileiras. Perde-se assim uma bela oportunidade de mostrar aos jovens que a Matemática faz parte do seu mundo real e que pode ajudá-lo na compreensão e resolução de problemas do seu cotidiano.

O documento Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (PCNEM), vol. 2, quando trata do "sentido do aprendizado na área", preconiza:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, **contextualizados**, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 2000, p. 6, ênfase nossa)

A contextualização grifada acima faz com que o objeto (assunto) a ser apreendido e aprendido se torne algo significativo para o aluno. Desta forma, entendemos ser a Teoria dos Grafos um campo fértil de contextualizações e é com esse princípio norteador, o da contextualização, que a mesma deve ser apresentada aos alunos do Ensino Médio.

Buscou-se, portanto, reunir conhecimentos com o propósito de responder aos seguintes problemas de pesquisa: É possível abordar de forma contextualizada o assunto Teoria dos Grafos no Ensino Médio? Há questões nos bancos de provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e, em outras fontes, que propiciem isso?

Propor uma abordagem contextualizada da Teoria dos Grafos no Ensino Médio é o objetivo geral deste trabalho. Para se chegar a este objetivo, serão apresentados os principais conceitos referentes á Teoria. Em outro momento, será realizado um levantamento das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), do Exame Nacional do Ensino Médio e de outras fontes, disponíveis em meio eletrônico ou não, a fim de identificar onde os grafos poderão ser utilizados como estratégia de solução.

Vive-se em uma sociedade que clama por um ensino contextualizado, mais próximo da realidade do aluno. O foco do ENEM, por exemplo, é a contextualização. O mundo do trabalho, mais especificamente, não abre mão disso. Este trabalho, portanto, faz-se importante devido á sua contribuição ao trabalho dos professores que almejam tornar o ensino de Matemática mais dinâmico e significativo aos alunos.

Para o desenvolvimento deste trabalho realizou-se uma pesquisa aplicada do tipo exploratória e de natureza qualitativa. O procedimento consistiu em pesquisa bibliográfica em livros, artigos científicos, documentos oficiais (legislações e banco de provas) em meios eletrônicos ou físicos. Os principais autores consultados foram: Boaventura & Jurkiewicz; Scheinerman; Lovász, Pelikán & Vesztergombi. A resolução das questões encontradas utilizando-se a Teoria dos Grafos como estratégia e a elaboração de uma proposta de planos de aula é o ponto culminante deste trabalho.

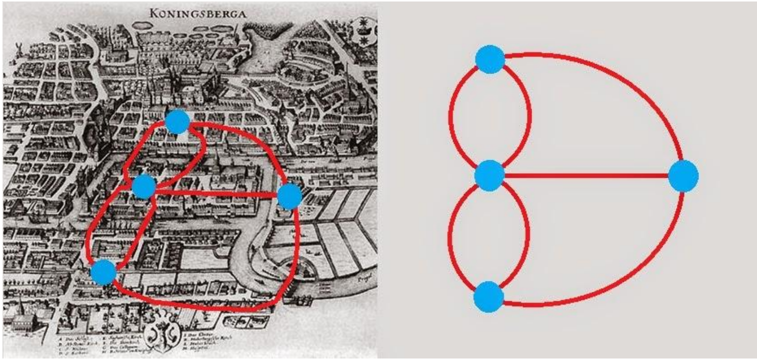
O trabalho estrutura-se em cinco capítulos, apresenta-se no primeiro um breve histórico sobre a teoria dos Grafos, alguns conceitos introdutórios, a notação, a representação e alguns tipos de Grafos. O segundo capítulo trata dos tipos de percursos em um grafo e do importante conceito de conexidade. O terceiro capítulo trata de dois importantíssimos problemas de logística: O *Problema do Carteiro Chinês* e o *Problema do Caixeiro Viajante* que estão relacionados, respectivamente, aos conceitos de grafos eulerianos e grafos hamiltonianos. O quarto capítulo aborda um tipo especial de grafo: árvore. Apresentamos os principais conceitos e as principais propriedades caracterizadoras das mesmas. No quinto capítulo, propostas de planos de aula com a resolução de alguns problemas utilizando-se a Teoria dos Grafos, conforme vista nos quatro capítulos anteriores são apresentadas aos professores. Finalmente, apresentamos as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

# 1. TEORIA DOS GRAFOS: HISTÓRICO E CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

O nascimento da Teoria dos Grafos aconteceu no século XVIII. Mais precisamente no ano de 1736 e na cidade de Königsberg ("montanha do rei"), na então Prússia Oriental. Atualmente esta cidade chama-se Kaliningrad, localiza-se entre a Polônia e Lituânia e pertence á Rússia. Na época, a cidade era um grande centro de comércio marítimo e local de moradia de diversos intelectuais conhecidos, como o filósofo Immanuel Kant, que por lá nasceu em 1724. Naquele ano de 1736 a cidade recebeu a visita do matemático, geômetra e físico suíço Leonhard Paul Euler (1707 – 1783). Lá chegando, Euler se deparou com um problema que, embora simples, ainda não tinha sido resolvido por ninguém.

A cidade é cortada pelo Rio Pregel, onde há duas ilhas que, na época, eram ligadas entre si por uma ponte. Por sua vez, as ilhas eram ligadas ás margens por mais seis pontes. O problema consistia no seguinte: seria possível, em um passeio contínuo, percorrer todas as pontes uma única vez cada e retornar ao ponto de partida? Euler provou que tal façanha seria impossível. Para analisar e resolver o problema, ele o modelou considerando cada massa de terra um ponto e cada ponte uma linha. Pontos e linhas ganham depois os nomes de vértices e arestas, respectivamente. A figura 1.1 abaixo mostra um mapa da cidade de Königsberg de 1652 com as pontes destacadas em vermelho e o esquema gráfico elaborado por Euler, primeiro modelo do que chamamos hoje de grafo.

**Figura 1.1 - Mapa de Königsberg de 1652 com pontes em vermelho e grafo criado por Euler.**




Fonte: http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/Konigsberg_colour.jpg

A solução do problema das pontes de Königsberg se perdeu por mais de cem anos no meio da imensa produção intelectual de Euler. Ninguém mais se aprofundou no estudo dos grafos ou buscou uma aplicação para os mesmos.

Após este breve relato histórico sobre a origem da Teoria, apresentaremos agora alguns conceitos básicos que serão úteis ao entendimento dos próximos capítulos. Convém ressaltar, neste momento, que a terminologia referente aos grafos é extensa. Ao longo deste trabalho outros termos serão citados e, na ocasião, os conceitos pertinentes serão apresentados.

Para Boaventura Netto e Jurkiewicz (2009, p. 10),

> Um grafo é um objeto matemático (ou uma estrutura matemática) formado por dois conjuntos. O primeiro deles, que chamaremos de V, é o conjunto de vértices. O outro é um conjunto de relações entre vértices. Diremos que ele é o conjunto de arestas e o representaremos por E. Se dois vértices v e w de V estão relacionados, diremos que entre eles existe uma aresta pertencente a E, que chamaremos (v,w) ou simplesmente vw.

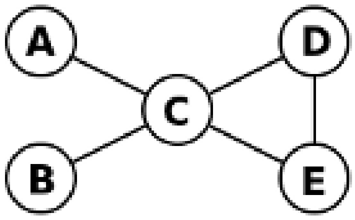
A definição de grafo acima permite utilizar-se a notação G = (V,E) para um grafo. Esta é a notação mais usual. Podemos usar outras letras, indexadas ou não, na notação de um grafo específico. Por exemplo, se tivermos três grafos poderemos representá-los por $G_1$, $G_2$ e $G_3$ ou, por G, H e I. No caso do problema das pontes de Königsberg, cada massa de terra é um vértice e cada ponte é uma aresta.

Os grafos podem ser representados por:

- Seus esquemas gráficos (desenhos);
- Por enumeração dos seus conjuntos **V** e **E;**
- Por uma lista de adjacência;
- Por uma matriz de adjacência;
- Por uma matriz de incidência.

A matriz de adjacência é uma matriz simétrica de ordem **n**, onde **n** é o número de vértices do grafo. Quando dois vértices se ligam, ou seja, são adjacentes, representamos isso com o numeral 1 na matriz; caso contrário, representamos com o numeral 0. Ou seja, o elemento na linha *i* e coluna *j* é 1 se $v_i \sim v_j$ e 0, caso contrário. A figura 1.2, abaixo, mostra um grafo com vértices rotulados e a sua matriz de adjacência.

**Figura 1.2 - Grafo com vértices rotulados.**




| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| B | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| C | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| D | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| E | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Fonte: http://teoriagrafosdcufscar2015.blogspot.com.br/

Para o grafo da figura acima, enumerando seus conjuntos **V** e **E** têm-se: $G = \{(A, B, C, D, E), ((A, C), (B, C), (C, D), (C, E), (D, E))\}$. Neste caso, $V = \{A, B, C, D, E\}$ e $E = \{(A, C), (B, C), (C, D), (C, E), (D, E)\}$. Nota-se que E é um conjunto que contém subconjuntos de dois elementos de V. A lista de adjacência para o mesmo grafo é:

| Vértice | Vértice adjacente |
|---|---|
| A | C |
| B | C |
| C | A, B, D, E |
| D | C, E |
| E | C, D |

Em alguns contextos e/ou problemas, as arestas são representadas por setas. Grafos deste tipo são chamados de grafos orientados ou digrafos (grafos dirigidos) e suas arestas são chamadas de arcos. Um *sociograma*, por exemplo, pode ser representado por um digrafo. A tabela 1.1, abaixo, mostra as preferências de escolha em um grupo de seis pessoas. O grafo correspondente e sua matriz de adjacência são mostrados na figura 1.3, abaixo.

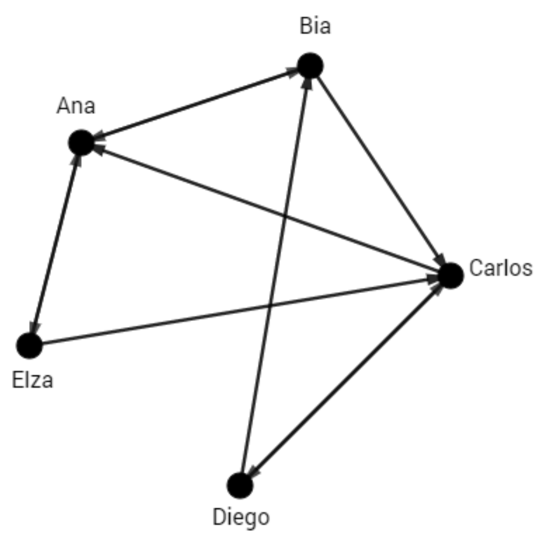
Questão: Que outros dois colegas você escolheria para formar uma equipe de trabalho?

**Tabela 1.1 – Sociograma escolar.**

| **NOMES** | ANA | BIA | CARLOS | DIEGO | ELZA |
|---|---|---|---|---|---|
| ANA | | X | | | X |
| BIA | X | | X | | |
| CARLOS | X | | | X | |
| DIEGO | | X | X | | |
| ELZA | X | | X | | |

Fonte: Elaborada pelo autor**.**

**Figura 1.3 - Sociograma escolar.**




Fonte: Elaborado pelo autor.

**Tabela 1.2 - Matriz de adjacência referente ao sociograma da figura 1.3**

| | Ana | Bia | Carlos | Diego | Elza |
|---|---|---|---|---|---|
| **Ana** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **Bia** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| **Carlos** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **Diego** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **Elza** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Fonte: Elaborada pelo autor.

A matriz de adjacência é preenchida da seguinte forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se aluno(a) "}\boldsymbol{x}\text{" escolheu aluno(a) "}\boldsymbol{y}\text{";} \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}.$$

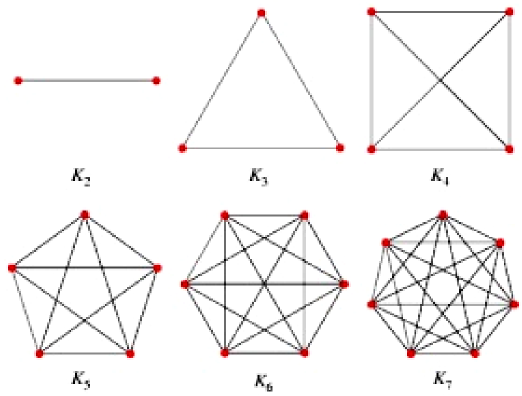
Em alguns casos, as ligações (arestas) têm um valor, como ocorre quando temos interesse na distância entre duas cidades (vértices), por exemplo. Os grafos com valores são chamados de *grafos valorados.* Escrevemos, então, estes valores na casa correspondente da matriz de adjacência.

Um grafo é dito *completo* se todos os seus vértices forem adjacentes. Ou seja, se cada par de vértices está ligado por uma aresta. Usa-se a notação $K_n$ para grafos completos com $\boldsymbol{n}$ vértices. Em um grafo completo o número de arestas é dado por:

$$|E| = \frac{n.(n-1)}{2}.$$

Quando for mais conveniente, representaremos este número por **m.** A figura 1.4, abaixo, mostra exemplos de grafos completos.

**Figura 1.4 - Grafos completos.**



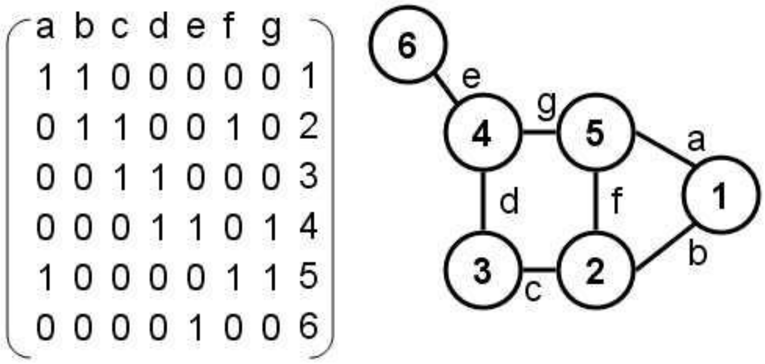

Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Grafo_completo.jpg.

A quantidade de arestas ligadas a um vértice determina o grau deste vértice e aqui representaremos este número por *d(v)*. Os grafos *regulares* são aqueles em que todos os vértices têm o mesmo grau. Os grafos mostrados na figura 1.4 são exemplos de grafos regulares.

O termo adjacência também se aplica a arestas. No grafo da figura 1.2, a aresta (A,C) é *adjacente* á aresta (C, D), pois possuem um vértice em comum, C. Diz-se também que uma aresta é incidente a um dado vértice se este for uma das extremidades dessa aresta. A aresta (A,C) da figura 1.2, por exemplo, é *incidente* aos vértices A e C. Conclui-se, então, que duas arestas adjacentes são incidentes a um vértice em comum.

Uma matriz de incidência é uma matriz de ordem *n x m*, onde *n* é o número de vértices e *m* é o número de arestas. O grafo da figura 1.5, abaixo, mostra uma *matriz de incidência* e o grafo não orientado correspondente com suas arestas rotuladas. As linhas correspondem aos vértices e as colunas, ás arestas. As arestas *b, c* e *f* , por exemplo, são incidentes ao vértice 2. Sendo assim, a matriz de incidência terá valor 1 em (2, *b)*, (2, *c)* e (2, *f)*.

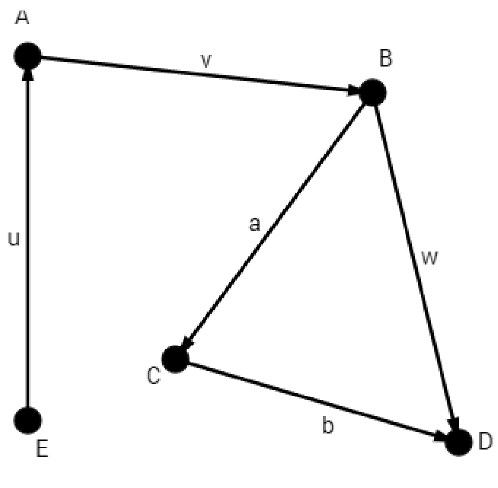
**Figura 1.5 - Matriz de incidência e grafo não orientado.**




Fonte: https://es.wikipedia.org/wiki/Matriz_de_incidencia

No caso de digrafos, a matriz receberá valor “+1” se o vértice considerado for um vértice de *saída*, receberá valor “-1” se o vértice for um vértice de *entrada* e 0 se os vértices não estiverem ligados. A figura 1.6, abaixo, mostra um digrafo e mais abaixo temos a matriz de incidência correspondente.

**Figura 1.6 - Digrafo com vértices e arestas rotulados.**




Fonte: Elaborado pelo autor

**Tabela 1.3 - Matriz de incidência.**

| | A | B | U | v | W |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 0 | - 1 | + 1 | 0 |
| B | + 1 | 0 | 0 | - 1 | + 1 |
| C | - 1 | + 1 | 0 | 0 | 0 |
| D | 0 | - 1 | 0 | 0 | - 1 |
| E | 0 | 0 | + 1 | 0 | 0 |

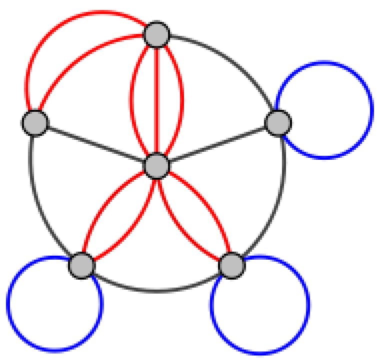
Fonte: Elaborado pelo autor

Ocasionalmente, observamos grafos com *laços* e arestas paralelas. Porém, diferentemente de outros autores, Scheinerman (2013, p. 449) nos diz que,

> ... alguns matemáticos usam a palavra *grafo* em um sentido diferente e admitem a possibilidade de um vértice ser adjacente a si mesmo; uma aresta que une um vértice a si mesmo é chamada laço. Para nós, grafos não podem ter laços. Alguns autores também admitem arestas paralelas. Novamente, para nós, grafos não podem ter arestas paralelas. O conjunto {u, v} é ou não uma aresta – não pode ser uma aresta "duas vezes".

Se um grafo possui laço(s) e/ou arestas múltiplas, ele é denominado multigrafo. Caso contrário, é um grafo simples. Na figura 1.7, abaixo se têm um exemplo de multigrafo.

**Figura 1.7 - Multigrafo com laços (em azul) e arestas paralelas (em vermelho).**



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Multigrafo.

Temos ainda que: a *ordem* de um grafo é o número de vértices que ele possui e, o seu *tamanho* é o número de arestas. Assim, no modelo de Königsberg temos um grafo:

- De ordem quatro e tamanho sete;
- Com três vértices de grau 3 e um vértice de grau 5.

É curioso notar que a soma dos graus de todos os vértices no grafo elaborado por Euler em 1736 é dado por: $\sum_{v \in V} d(v) = 3 + 3 + 3 + 5 = 14$ . Ou seja, duas vezes o número de arestas (pontes). Este fato é comum a todo grafo e nos leva ao primeiro Teorema importante da Teoria dos Grafos.

**Teorema 1.1:** *A soma dos graus de todos os vértices é duas vezes o número de arestas, ou seja:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| . \qquad \text{(Eq. 1.1)}$$

Na fórmula acima, $|E|$ representa a *cardinalidade* do conjunto das arestas de um grafo G.

**Prova:** Quando contamos os graus dos vértices, estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, contamos cada aresta duas vezes.■

Outro Teorema relacionado aos graus dos vértices é o seguinte:

**Teorema 1.2:** *Em todo grafo, o número de vértices com grau ímpar é par.*

**Prova:** Suponhamos que o número de vértices com grau ímpar seja ímpar. Neste caso, a soma dos graus dos vértices é ímpar; o que contradiz o Teorema 1.1. Portanto, o número de vértices de grau ímpar é par.■

# 2. PERCURSOS E CONEXIDADE.

## 2.1 PERCURSOS.

Para Boaventura Netto (2011, p. 22),

> Um percurso, ou intinerário, ou cadeia, é uma família de ligações sucessivamente adjacentes, cada uma tendo uma extremidade adjacente á anterior e a outra á subsequente (á exceção da primeira e da última). O percurso será *fechado* se a última ligação da sucessão for adjacente á primeira e *aberto* em caso contrário. (Um percurso aberto pode conter subpercursos fechados).

Na definição de percurso apresentada acima por Boaventura Netto, nenhuma menção é feita a respeito do grafo ser orientado (digrafo) ou não orientado. É uma definição mais genérica, que contempla os dois tipos de grafos. Os tipos de percursos apresentados abaixo são mostrados na figura 2.1.

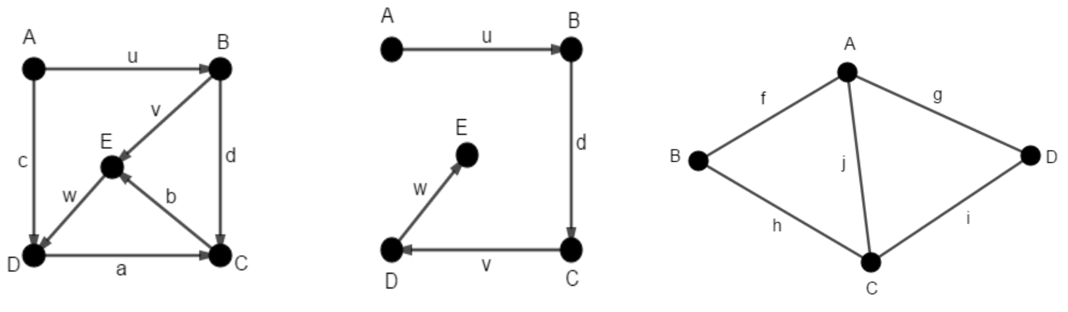
*Passeio*: é um percurso em que cada vértice é adjacente ao seguinte ((ABCADC) na **Fig. 2.1(c)**);

*Caminho*: é um passeio em que nenhum vértice é repetido (**Fig. 2.1 (b)**);

*Ciclo*: é um percurso fechado em um grafo não orientado que não repete arestas e nem vértices (com exceção do primeiro e do último, que coincidem). Ex.: qualquer percurso fechado na **Fig. 2.1 (c)**;

*Circuito*: é um ciclo orientado ((EDCE) na **Fig**. **2.1 (a)**).

**Figura 2.1**




**a)** **b)** **c)**

Fonte: elaborada pelo autor

Faz-se necessário tecer algumas considerações a respeitos das definições acima:

a) A notação dos percursos pode ser feita indicando a sucessão de vértices ou a sucessão de vértices e ligações (arestas ou arcos) de forma alternada. Por exemplo, o percurso na **Fig. 2.1 (b)** pode ser representado dessas formas: (ABCDE) ou (AuBdCvDwE);

b) O percurso (EDCE) na **Fig. 2.1 (a)** é elementar, ou seja, não repete vértices e nem arestas. A repetição do vértice E não se trata, na verdade, de uma repetição e sim de um retorno que fecha o percurso;

c) Está implícito na definição de caminho o fato de que nenhuma aresta é usada duas vezes. Portanto, um *caminho* é um percurso elementar;

d) É permitido visitarmos mais de uma vez um vértice e, portanto, mais de uma vez uma aresta em um passeio. Por exemplo: (ACDACB) na **Fig. 2.1 (c)**.

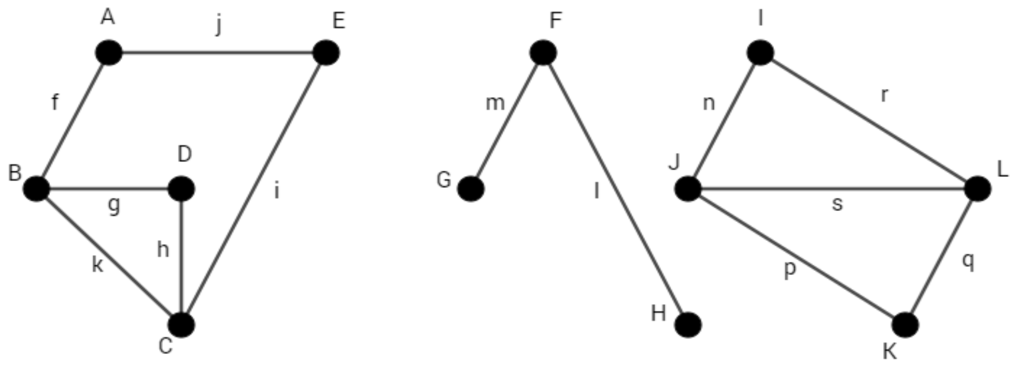
Em um grafo não valorado, o comprimento de um percurso é o número de ligações por ele utilizadas, contando-se as repetições. O comprimento do percurso (ABCDE) no grafo da Fig. 1.9(b) é $l = 4$. No caso dos valorados, leva-se em consideração os valores indicados nas ligações, que podem ser, por exemplo, distâncias ou custos.

## 2.2 CONEXIDADE.

Conexidade é a propriedade de um grafo G ser, ou não, conexo. Para Scheinerman (2013, p. 470), “Um grafo é chamado conexo se e somente se cada par de vértices no grafo está ligado por um caminho; isto é, para todos x, y $\epsilon$ V(G), existe um caminho (x, y)”.

Ao analisarmos a conexidade em um grafo, convém observar se o grafo é orientado (digrafo) ou não orientado. A figura 2.2, abaixo, mostra grafos não orientados: um conexo (**Fig. 2.2(a)**) e outro não conexo (**Fig. 2.2 (b)**), também denominado grafo desconexo.

**Figura 2.2 - Grafos conexos e desconexos.**




**(a)** **(b)**

Fonte: Elaborada pelo autor.

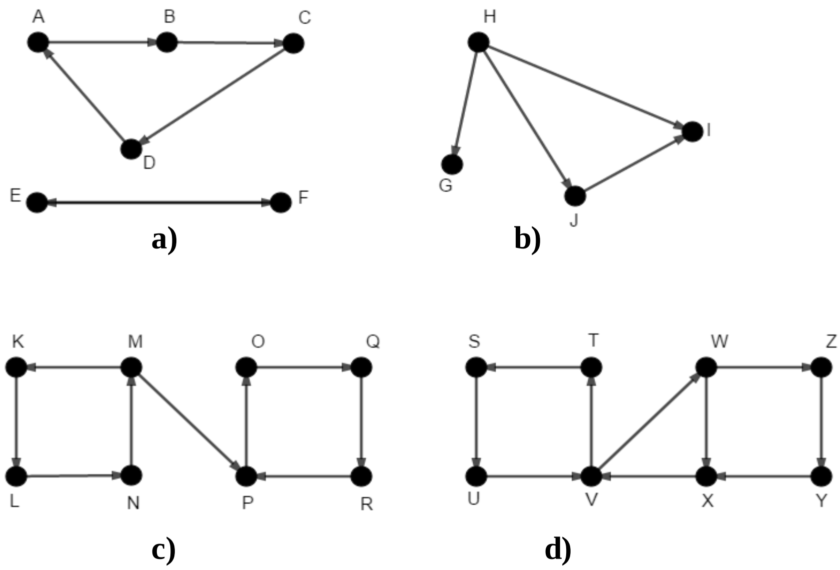
Nos dois grafos mostrados acima a rotulação dos vértices segue a ordem lexicográfica. Portanto, apesar de á primeira vista parecer que temos dois grafos na **Fig. 2.2 (b),** na verdade é um só grafo com 7 vértices.

Para uma melhor compreensão, vamos supor que cada grafo acima represente um grupo de conhecidos, onde cada vértice representa uma pessoa e as arestas representem a as possibilidades de transmissão de uma notícia no grupo. A notícia será conhecida por todos os membros do grupo da **Fig. 2.2 (a)**, independente de quem a receba primeiro, pois o grafo é conexo. Agora, se a notícia for dada a algum membro (F, G ou H) do lado esquerdo do grafo da **Fig. 2.2 (b)**, os membros do lado direito (I, J, K ou L) não tomarão conhecimento, pois o grafo correspondente é desconexo.

No caso dos digrafos, temos 4 tipos de conexidade. Estes tipos são apresentados abaixo e mostrados na figura 2.3.

1. Grafo não conexo (desconexo): Existe ao menos um par de vértices que não é ligado por um percurso (**Fig. 2.3 (a)**);
2. Grafo simplesmente conexo (s-conexo): todo par de vértices é unido por ao menos um caminho no grafo correspondente não orientado (**Fig. 2.3 (b)**);
3. Grafo semi-fortemente conexo (sf-conexo): Para todo par de vértices *u* e *v*, **ou** existe um caminho de *u* até v **ou** existe um caminho de *v* até *u* (**Fig. 2.3 (c)**);
4. Grafo fortemente conexo (f-conexo): Para todo par de vértices *u* e *v*, existe Um caminho de *u* até v **e** existe um caminho de *v* até *u* (**Fig. 2.3 (d)**).

**Figura 2.3 - Conexidade em grafos orientados**




Fonte: Elaborada pelo autor

Os rótulos das arestas foram retirados a fim de não “poluírem” muito as figuras. Utilizando a mesma analogia empregada no caso dos grafos não orientados, temos que:

- Uma notícia conhecida por qualquer elemento do grupo (A, B, C, D) na Fig. 2**.3 (a)** não poderá ser transmitida a qualquer elemento do grupo (E, F) do mesmo grafo e vice – versa, pois o grafo é desconexo;
- Desconsiderando as orientações no grafo da **Fig. 2.3 (b)**, grafo s-conexo, quaisquer dois elementos (vértices) têm ao menos um caminho entre eles. Por exemplo, o G elemento tem duas maneiras de transmitir uma notícia ao elemento I: GHI ou GHJI
- Uma notícia transmitida pelo elemento K na **Fig. 2.3 (c),** grafo sf-conexo, pode chegar até o elemento R pelo caminho KLNMPOQR, mas o caminho inverso não é possível;
- Uma notícia transmitida pelo elemento S na **Fig. 2.3 (d),** grafo f-conexo, pode chegar até o elemento Y pelo caminho SUVWZY. O caminho inverso é possível;

O Teorema seguinte pode ser utilizado na resolução de problemas interessantes relacionados á conexidade.

**Teorema 2.1:** Se um grafo não dirigido possui n vértices, cada um dos quais com grau igual a, no mínimo, $\frac{n-1}{2}$ ,então ele é conexo.

**Prova:** A prova será por contradição.

Seja G(V, A) um grafo não dirigido e de ordem $n \geq 2$, onde cada vértice v $\epsilon$ V tem grau $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$ . Vamos supor que G não seja conexo. Neste caso, G tem pelo menos duas componentes conexas, $G_1$ e $G_2$, por exemplo. Sejam os vértices $v_1 \epsilon G_1$ e $v_2 \epsilon G_2$. Obviamente, $v_1$ e $v_2$ não estão conectados. Conectados a $v_1$ têm-se $\frac{n-1}{2}$ outros vértices. O mesmo ocorre com $v_2$. O número total de vértices será no mínimo: $1 + \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2} = 2 + n - 1 = n + 1$, o que é uma contradição, pois G possui n vértices. Portanto, G é conexo.

# 3. GRAFOS EULERIANOS E HAMILTONIANOS.

## 3.1. GRAFO EULERIANO E O PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS.

Um breve histórico sobre as origens da Teoria dos Grafos foi apresentado no início do primeiro capítulo deste trabalho. A solução apresentada por Euler, figura 3.1, para o problema das pontes de Königsberg consistiu em dizer que não é possível percorrer todas as pontes uma única vez cada e retornar ao ponto de partida[2]. Na linguagem dos grafos isto significa dizer que não é possível percorrer todas as arestas (pontes) uma única vez cada e retornar ao vértice de origem (ponto de partida). Os grafos onde tal façanha é possível são chamados *grafos eulerianos*.

**Figura 3.1 – Leonhard Euler (1707 - 1783)**

Fonte: http://caminoseuler.blogspot.com.br/p/euler.html

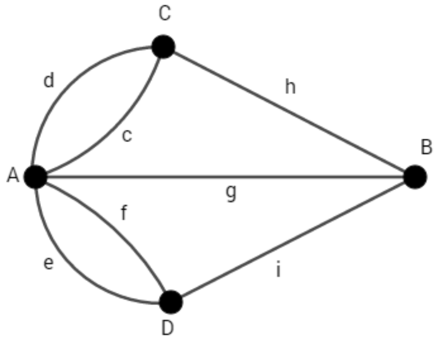
Nesta seção apresenta-se o raciocínio utilizado por Euler para o problema das pontes de Königsberg, os critérios que permitem identificar se um grafo possui um passeio euleriano ou não e o Problema do Carteiro Chinês.

A figura 3.2 abaixo mostra, novamente, o grafo elaborado por Euler em 1736 para resolver o problema das pontes. Trata-se de um grafo conexo e não dirigido. Agora, os vértices estão rotulados. O grau de cada vértice é: d(A) = 5, d(B) = 3, d(C) = 3 e d(D) = 3.

---

[2] Leonhard Euler publicou nos anais da Academia de Ciência da Rússia, em 1736, o artigo *Solutio problematic ad geometriam situs pertinentis* (Uma solução de um problema da geometria de posição) onde ele respondia o problema das pontes de Königsberg.

**Figura 3.2 - Grafo das Pontes de Königsberg com vértices e arestas rotulados**



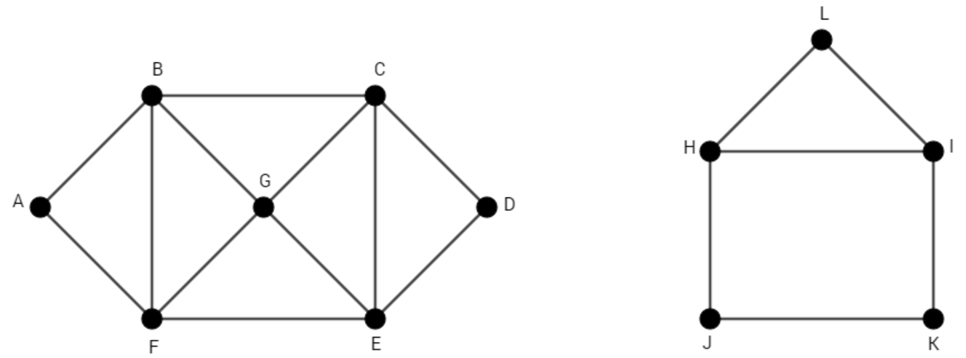

Fonte: Elaborada pelo autor.

Euler raciocinou da seguinte forma: Deve-se sair de algum lugar por uma ponte, percorrer todas as outras pontes uma única vez cada e terminar a caminhada no ponto de partida. Supondo que uma pessoa inicie a caminhada saindo de B por uma ponte. Em algum momento ela voltará a B por uma segunda ponte e, ato contínuo, sairá de B por uma terceira ponte. E não será mais possível voltar para B, pois já foram utilizadas todas as pontes ligadas a este vértice. Da mesma forma, não será possível iniciar a caminhada em C ou D, pois estes vértices também têm grau 3.

Supondo, agora, que a pessoa inicie a caminhada saindo de A por uma ponte. Antes de percorrer as outras quatro pontes ligadas a A, o caminhante estará preso em algum outro lugar. Digamos que o caminhante inicie sua jornada saindo de A e entre em B por uma ponte. Ele deverá sair de B por uma segunda ponte e, em algum outro momento, voltar a B por uma terceira ponte. Neste momento, ele não poderá mais sair de B, pois já percorreu todas as pontes ligadas a B. O mesmo aconteceria se o caminhante saísse de A e entrasse em C ou D. Logo, não é possível sair de qualquer lugar percorrer todas as pontes uma única vez cada e retornar ao ponto de partida, ou seja, o grafo da figura 3.2 não é euleriano.

A figura 3.2, acima, nos permite propor o seguinte desafio: é possível desenhá-la traçando uma única vez cada aresta e sem retirar o lápis do papel? Por analogia ao Problema das Pontes, sabemos que não. Este tipo de desafio é muito comum em publicações sobre jogos de “memória e inteligência”. As figuras 3.3(a) e 3.3(b) abaixo mostram outras duas situações desafiadoras.

**Figura 3.3 - Grafos para análise do tipo de passeio.**




**(a)** **(b)**

Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente surge a pergunta: é possível desenhar as figuras 3.3 (a) e 3.3 (b) traçando cada aresta uma única vez e sem retirar o lápis de cima do papel? Ou, em linguagem de grafos, os grafos possuem passeios eulerianos?

Percebe-se facilmente que o grafo da figura 3.3 (a) é euleriano. Por exemplo, pode-se partir do vértice A e retornar a este mesmo vértice. Uma sugestão de passeio seria:

A → B → C → D → E → F → B → G → E → C → G → F → A.

É possível realizar o desenho no caso da figura 3.3 (b), mas a percepção já não é tão imediata. Algumas tentativas e erros poderão ocorrer. O certo é que só podemos desenhar esta figura, como pede o desafio, começando pelo vértice H e terminando no vértice I ou, começando em I e terminando em H. Uma sugestão de passeio seria:

H → L → I → K → J → H → I.

Euler não tinha a terminologia de grafos (que só voltou á tona mais de um século depois), mas podemos usá-la para enunciar os critérios de Euler para que um grafo possua um passeio euleriano. Para Lovász, L. et al (2010, p. 133), estes critérios são:

> (a) Se um grafo conexo tem mais que dois nós com grau ímpar, então ele não tem passeio euleriano.
>
> (b) Se um grafo conexo tem exatamente dois nós com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano tem que começar em um desses e terminar no outro.
>
> (c) Se um grafo conexo não tem nós com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano. Todo passeio euleriano é fechado.

A prova do item (a) foi apresentada quando tratamos do Problema das Pontes de Königsberg, onde o grafo correspondente elaborado por Euler possui todos os vértices com grau ímpar. O item (c) refere-se a grafos do tipo da figura 3.3 (a), onde todos os vértices têm grau par. Neste tipo de grafo é possível entrar em um vértice por uma aresta e sair por outra e vice-versa. Assim, podemos percorrer todas as arestas uma única vez cada e retornar ao ponto de partida, qualquer que seja ele.

A figura 3.3 (b) é um exemplo de grafo a que se refere o item (b) dos critérios enunciados acima. Neste grafo, os vértices H e I têm grau ímpar. O critério diz que o passeio deve começar em um destes vértices e terminar no outro. Vamos supor que, ao invés disso, o passeio comece por um dos vértices de grau par (J, K ou L). Então, em algum momento, chega-se a um vértice de grau ímpar (H, por exemplo) por uma aresta e sai-se deste por uma segunda aresta. Em outro momento, chega-se novamente a este vértice por uma terceira aresta e o passeio termina aqui, pois todas as arestas ligadas a este vértice já teriam sido percorridas. Portanto, não é possível começar o passeio por nenhum dos vértices de grau par.

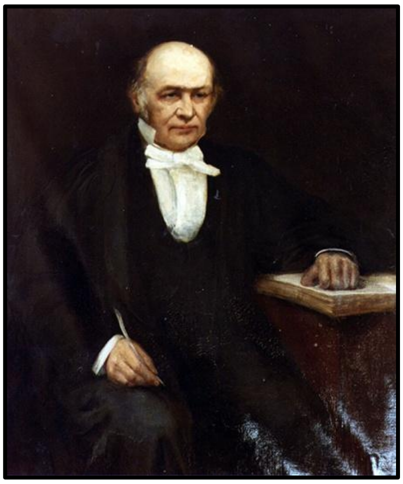
Vamos supor agora que o nosso passeio começa pelo vértice H, que tem grau ímpar. A sequência de eventos em H será: saída – entrada – saída. E em I será: entrada – saída – entrada. Já nos vértices de grau par, para cada entrada teremos uma saída. Logo, o passeio neste caso só é possível começando em um vértice de grau ímpar e terminando em outro também de grau ímpar. Os grafos deste tipo também são chamados de *grafos semi-eulerianos.*

Um problema relacionado aos grafos eulerianos é O *Problema do Carteiro Chinês (PCC)* ou *Circuito do Carteiro* ou, ainda, *Problema da Inspeção de Rotas*. Este problema foi estudado pela primeira vez pelo matemático chinês Mei-Ku Kuan em 1962 e refere-se á distribuição de correspondência. O problema consiste no seguinte: Um carteiro tem que entregar as correspondências de determinado distrito. Será que ele consegue fazer as entregas e regressar aos “Correios”, passando uma única vez em cada rua? Caso não seja possível, qual o caminho mais curto (ou que repete menos ruas)? A mesma ideia serve para solucionar problemas relacionados á coleta de lixo, medição de consumo de água, energia, gás, etc.

## 3.2 GRAFO HAMILTONIANO E O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE.

Por vezes, o interesse consiste em percorrer todos os vértices uma única vez. Esta questão foi proposta pelo matemático (e também físico e astrônomo) irlandês, William Rowan Hamilton, fig. 3.4, em 1856. Esta seção trata dos grafos hamiltonianos e do Problema do Caixeiro Viajante.

**Figura 3.4 - William Rowan Hamilton (1805 - 1865)**

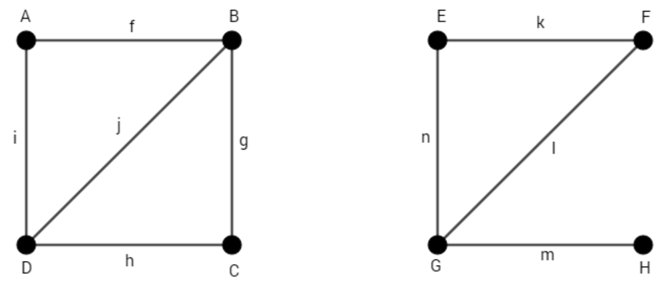


Fonte: http://www.iea.usp.br/noticias/conferencia-resgata-a-pesquisa-de-william-rowan-hamilton

Um *caminho hamiltoniano* em um grafo é um caminho onde todos os vértices são visitados exatamente uma vez. Analogamente, um *ciclo hamiltoniano* é um ciclo que contém todos os vértices do grafo exatamente uma vez, com exceção dos vértices inicial e final, que têm de coincidir. Um grafo diz-se hamiltoniano se possuir algum ciclo hamiltoniano.

A figura 3.5 (a), abaixo, mostra um grafo hamiltoniano. O grafo da figura 3.5 (b), por sua vez, não é hamiltoniano, pois não possui um ciclo hamiltoniano. Diz-se que ele é um grafo semi-hamiltoniano. Note-se que este é obtido a partir da retirada de uma aresta do grafo da figura 3.5(a).

**Figura 3.5 - Grafo e caminho hamiltoniano**




(a) (b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, pode-se afirmar que todo grafo hamiltoniano possui caminhos hamiltonianos. No entanto, a recíproca não é verdadeira.

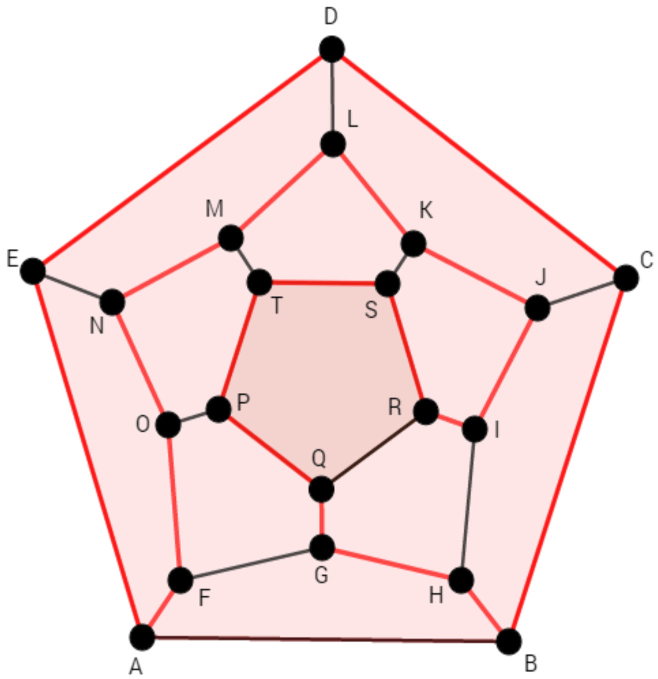
Por volta de 1857, Hamilton criou um jogo ao qual deu o nome de *jogo icosiano*, pois se referia aos 20 vértices do dodecaedro[3]. O jogo consistia no seguinte: a cada um dos vértices era atribuído o nome de uma cidade e o objetivo do jogo era, usando as arestas do dodecaedro, planejar um percurso que visitasse cada uma das cidades exatamente uma única vez e terminasse na cidade de onde se tinha partido. Procurava-se, assim, um ciclo hamiltoniano.

A figura 3.6, abaixo, mostra o desenho do tabuleiro do *jogo icosiano.* Este desenho nada mais é do que o *grafo planar* referente ao dodecaedro. Na teoria dos grafos, um grafo planar é um grafo que pode ser representado no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem.

Um ciclo hamiltoniano está representado em vermelho na figura 3.6 e corresponde á sequência de vértices: A - E – D – C – B – H – G – Q – P – T – S – R – I – J – K – L – M – N – O – F – A.

[3] O dodecaedro é qualquer poliedro que tenha doze faces. O mais conhecido é o dodecaedro regular, um poliedro de Platão é constituído de doze faces pentagonais, 20 vértices e 30 arestas. Ademais, todo sólido de Platão possui um ciclo hamiltoniano.

**Figura 3.6 - Jogo Icosiano**




Fonte: Elaborado pelo autor

Será que existe, assim como no caso dos grafos eulerianos, uma condição necessária e suficiente para verificarmos se um determinado grafo é hamiltoniano? Quem nos responde é Jurkiewicz (2009, p. 59),

> O problema de saber se um grafo é ou não hamiltoniano é um dos mais estudados da teoria dos grafos por sua aplicabilidade em comunicação, transporte e planejamento. Entretanto, até hoje, nenhuma condição necessária e suficiente elegante para que um grafo seja hamiltoniano foi encontrada.

Um problema de grande importância prática está relacionado aos grafos hamiltonianos. Chama-se *Problema do Caixeiro Viajante (PCV)* e consiste na determinação da rota de menor custo para uma pessoa que, partindo de uma cidade, tenha que visitar diversas outras uma única vez e retornar ao ponto de partida. O custo pode ser medido em termos de distância entre as cidades, tempo de viagem, etc. Portanto, a solução do problema consiste em encontrar um ciclo hamiltoniano de menor custo.

Se o grafo que representa o problema não for muito grande, ou seja, se for pequeno o número de cidades a visitar, será possível enumerar as rotas e escolher a de menor custo. Em geral, isso é impossível na prática. Vejamos um caso simples: suponhamos que um vendedor, saindo da sede de sua empresa localizada na cidade B, tenha que visitar as cidades A, C, D e E, retornando á sede depois. A matriz de adjacência, abaixo, mostra as distâncias entre as cidades em quilômetros. O grafo correspondente é um grafo fortemente conexo (f-conexo) e valorado.

**Tabela 3.1 - Matriz de adjacência.**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| **A** | 0 | 88 | 114 | 58 | 24 |
| **B** | 88 | 0 | 71 | 102 | 110 |
| **C** | 114 | 71 | 0 | 79 | 126 |
| **D** | 58 | 102 | 79 | 0 | 65 |
| **E** | 24 | 110 | 126 | 65 | 0 |

Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos supor ainda que o vendedor, saindo de B, procure a cidade mais próxima e, depois, a outra mais próxima desta segunda cidade e assim sucessivamente. A rota escolhida será esta:

$$\text{B} \xrightarrow{\mathbf{71}\ \boldsymbol{km}} \text{C} \xrightarrow{\mathbf{79}\ \boldsymbol{km}} \text{D} \xrightarrow{\mathbf{58}\ \boldsymbol{km}} \text{A} \xrightarrow{\mathbf{24}\ \boldsymbol{km}} \text{E} \xrightarrow{\mathbf{110}\ \boldsymbol{km}} \text{B}.$$

A distância total percorrida será: $71 + 79 + 58 + 24 + 110 = 342\ km.$

O método utilizado pelo vendedor para escolha da rota ótima é um dos métodos utilizados na resolução de problemas de otimização e é chamado de *método ganancioso*. Um algoritmo que utiliza este método é chamado de *algoritmo guloso*[4]. O algoritmo guloso sempre escolhe a melhor opção naquele momento com a finalidade de chegar á melhor

[4] O algoritmo guloso foi introduzido em 1926 pelo matemático tcheco, Otakar Boruvka (1899 – 1995).

solução no todo. Mas, nem sempre a solução encontrada é a solução ótima. O trajeto abaixo, que não obedece ao método ganancioso na saída de B, também é uma solução para o problema de escolha da rota:

$$\mathrm{B} \xrightarrow{\boldsymbol{88\ km}} \mathrm{A} \xrightarrow{\boldsymbol{24\ km}} \mathrm{E} \xrightarrow{\boldsymbol{65\ km}} \mathrm{D} \xrightarrow{\boldsymbol{79\ km}} \mathrm{C} \xrightarrow{\boldsymbol{71\ km}} \mathrm{B}.$$

A distância total percorrida, neste caso, será de: $88 + \mathbf{24} + \mathbf{65} + \mathbf{79} + \mathbf{71} = \boldsymbol{327\ km}$. Ou seja, 15 km a menos.

Com apenas 5 cidades, como as do exemplo, é possível enumerar todas as rotas possíveis e escolher a melhor. A Análise Combinatória nos diz que há $(\mathbf{5}-\mathbf{1})! = \mathbf{24}$ rotas para examinar ou 12, se considerarmos uma rota e seu inverso como equivalentes. Acontece que, a dificuldade aparece quando o número de cidades a visitar cresce. No caso de 10 cidades, por exemplo, o total de rotas a examinar seria igual a $\frac{(\mathbf{10}-\mathbf{1})!}{\mathbf{2}} = \mathbf{181.440}$. Se um computador levar um segundo para imprimir uma rota, levará 50 horas e 24 minutos para imprimir todas. Um tempo inviável na prática. Evidentemente, a estimativa para o tempo de resolução vai depender do computador usado, mas para *n* cidades o tempo tomado aumenta em função de *n* fatorial.

O "*santo graal"* dos problemas de otimização combinatória consiste em encontrar um algoritmo que dependa de uma potência fixa de *n*. Ou seja, um algoritmo que possa ser resolvido em tempo polinomial. Quanto menor a potência, mais rápida será a solução. Se o algoritmo para o PCV variar de acordo com $n^2$, por exemplo, teríamos, para o caso das 10 cidades, 100 rotas possíveis. E a solução seria dada em menos de dois minutos. A classe dos problemas que podem ser *resolvidos* em tempo polinomial é representada por *P*. Ainda não se sabe se o PCV é um desses, pois até hoje ninguém criou um algoritmo de tempo polinomial para ele, assim como não se conseguiu provar que tal algoritmo não existe.

Uma classe mais ampla, representada por *NP*, consiste de problemas que podem ser *verificados* em tempo polinomial. O PCV é um destes, pois a verificação de que uma determinada rota é a mais curta pode ser feita em tempo polinomial. Por exemplo, é fácil verificar que 181.440 = 9 x 20.160, mas encontrar todos os fatores de 181.440 já é mais complicado.

Será que todo problema que pode ser verificado em tempo polinomial também pode ser resolvido em tempo polinomial? Se a resposta a esta questão for sim, então $P = NP$. Este é um dos sete *Problemas do Millenium* propostos no ano de 2000 pelo *Clay Mathematics Institute*. O problema *P vesus NP* é o principal problema aberto (sem solução) da Ciência da Computação e consiste em saber se $P = NP$ ou se $P \neq NP$. O Instituto Clay oferece um prêmio de US$ 1 milhão (um milhão de dólares) para quem resolvê-lo.

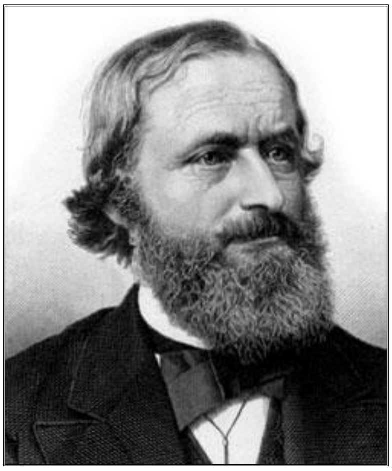
## 4. ÁRVORES.

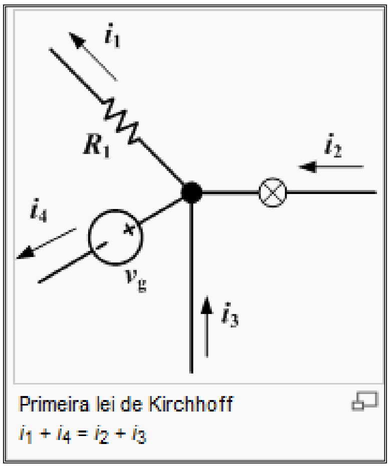
Este capítulo trata de um tipo especial de grafo: árvore. Os grafos denominados árvores têm uma grande aplicação no mundo real. São estruturas que aparecem em contextos de várias áreas do conhecimento, tais como: Química, Linguística, Computação, Biologia, Logística, cálculos de probabilidade, etc. Inicia-se o capítulo com um breve histórico, segue-se a abordagem com as definições básicas referentes a árvores, algumas propriedades das mesmas, o conceito de árvore geradora e, finaliza-se com alguns problemas de aplicação.

### 4.1 UM BREVE HISTÓRICO.

Em 1847, o físico alemão Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887), figura 4.1 (a), abaixo, que nasceu na cidade de Königsberg, utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos. Este cientista formulou as duas leis fundamentais da teoria clássica dos circuitos elétricos: as leis dos nós e das malhas (Leis de Kirchhoff). Criou, assim, uma classe de grafos muito importante: a classe das *árvores.* A primeira Lei de Kirchhoff para os circuitos elétricos, conhecida como *Lei dos Nós,*tem como enunciado: *Em qualquer nó, a soma das correntes que chegam até ele é igual à soma das correntes que o deixam.* A figura 4.1 (b), abaixo, mostra um exemplo de aplicação desta lei.

**Figura 4.1 – Gustav Robert Kirchhoff e a Lei dos Nós**





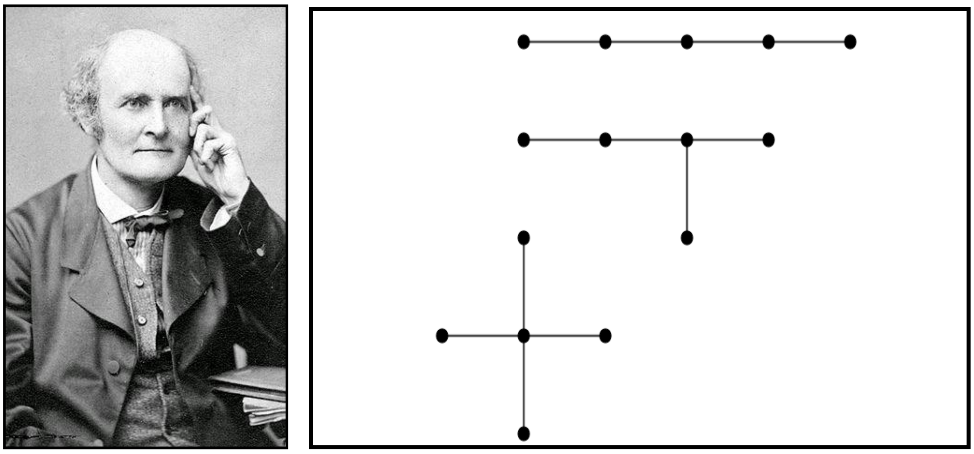

(a) (b)

Fontes: (a): http://www.explicatorium.com/biografias/gustav-kirchhoff.html;

(b): https://sites.google.com/site/curiosidadesdomundo11/lei-de-kirchhoff

Dez anos depois, em 1857, o matemático britânico Arthur Cayley (1821 – 1895), figura 4.2 (a), abaixo, se interessou pela enumeração dos *isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos*[56] e utilizou grafos para representar estes isômeros. A figura 4.2 (b), abaixo, mostra os esquemas (árvores) correspondentes aos três isômeros do *pentano* ($C_5H_{12}$). Nestes grafos, os vértices são os átomos de carbono e as arestas são as ligações entre eles. Como cada átomo de carbono pode se ligar a um máximo de 4 outros átomos, observa-se que em cada esquema há 12 posições vazias a serem ocupadas pelos átomos de hidrogênio.

**Figura 4.2 - Arthur Cayley e os isômeros do pentano.**



(a) (b)

Fontes: (a): https://pt.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley.

---

[5] Arthur Cayley publicou dois artigos sobre suas ideias: ***"On the theory of the analytical forms called trees",*** *parte I e II,* em 1857 e 1859, respectivamente.

[6] **Hidrocarbonetos alifáticos** são compostos orgânicos formados apenas por átomos de carbono e hidrogênio com fórmula geral $C_xH_y$ e, estruturados em cadeias carbônicas abertas ou acíclicas. Os **isômeros** são as moléculas que possuem a mesma fórmula molecular, mas propriedades e características estruturais diferentes.

## 4.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS REFERENTES A ÁRVORES.

As Árvores são definidas como grafos conexos que não têm ciclos. Na seção 2.1 deste trabalho afirmamos que um ciclo é um percurso fechado em um grafo não orientado que não repete arestas e nem vértices (com exceção do primeiro e do último, que coincidem). Ainda, na seção 2.2, afirmamos que um grafo é chamado conexo se e somente se cada par de vértices no grafo está ligado por um caminho. Ademais, como veremos mais adiante, este caminho é único para as árvores.

Se um grafo G é formado por árvores e estas são desconexas entre si, têm-se uma floresta. A figura 4.1, abaixo mostra uma floresta formada por quatro árvores:

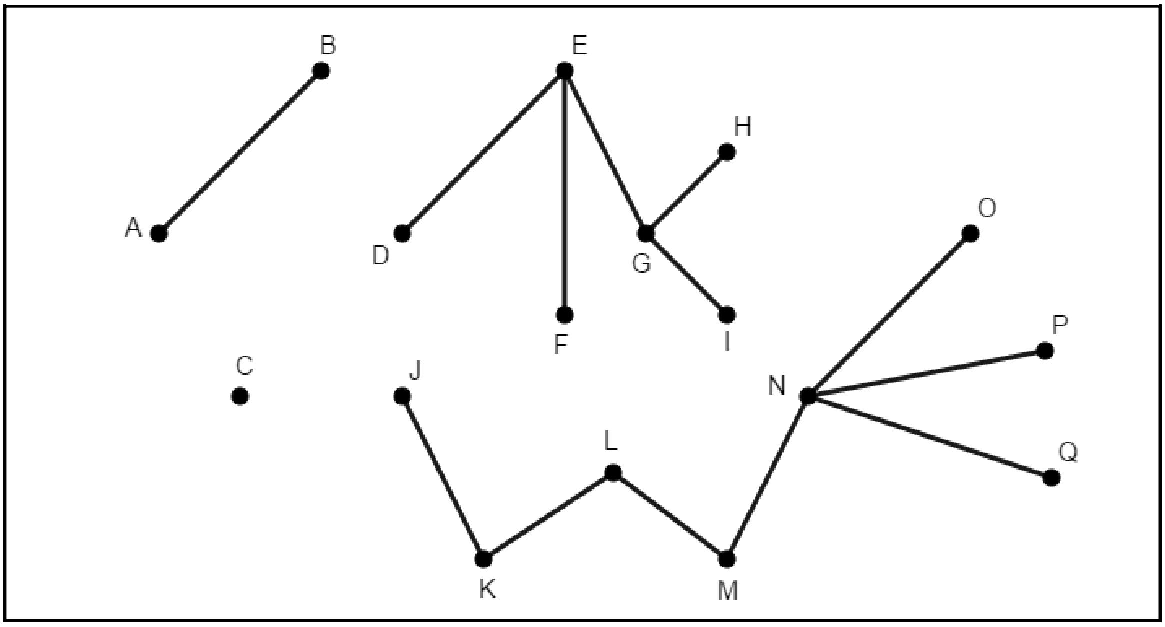
$T_1 = \{C\}$;

$T_2 = \{(A, B), (AB)\}$ ;

$T_3 = \{(D, E, F, G, H, I), \left((DE), (EF), (EG), (GH), (GI)\right)\}$ e

$T_4 = \{(J, K, L, M, N, O, P, Q), \left((JK), (KL), (LM), (MN), (NO), (NP), (NQ)\right)\}$;

**Figura 4.3 - Grafo tipo floresta com 4 árvores**



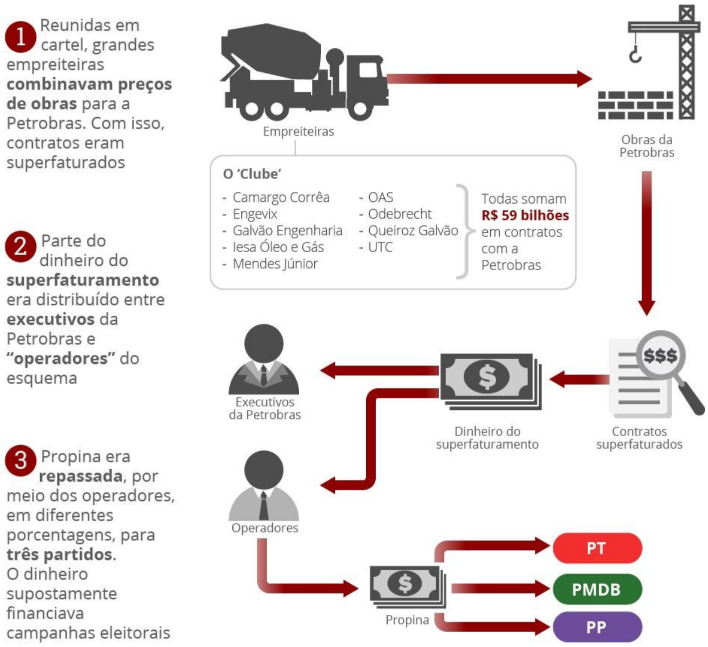

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que a árvore $T_1$, a mais simples que existe, é formada por apenas um vértice isolado. Os vértices A, B, D, F, H, I, J, O, P e Q da floresta acima têm grau 1 e, por esta razão, são chamados de *folhas*. As folhas podem ser chamadas também de *vértices pendentes* ou *vértices terminais*.

São frequentes as árvores que aparecem com um vértice especial, o qual chamamos de raiz. Dada uma árvore, podemos escolher qualquer um de seus vértices e chamá-lo de raiz. Uma árvore com uma raiz é chamada de *árvore enraizada*; já uma árvore não enraizada é chamada de *árvore livre*.

O infográfico[7] da figura 4.4 foi elaborado logo após o início da Operação da Polícia Federal denominada "Lava Jato" e mostra como funcionava o esquema de corrupção e desvio de dinheiro da Petrobrás. O grafo da figura 4.5, por sua vez, foi elaborado a partir deste infográfico, tomando como vértices somente os agentes corruptos e os agentes corruptores. Neste grafo, os empreiteiros representam o vértice raiz da árvore.

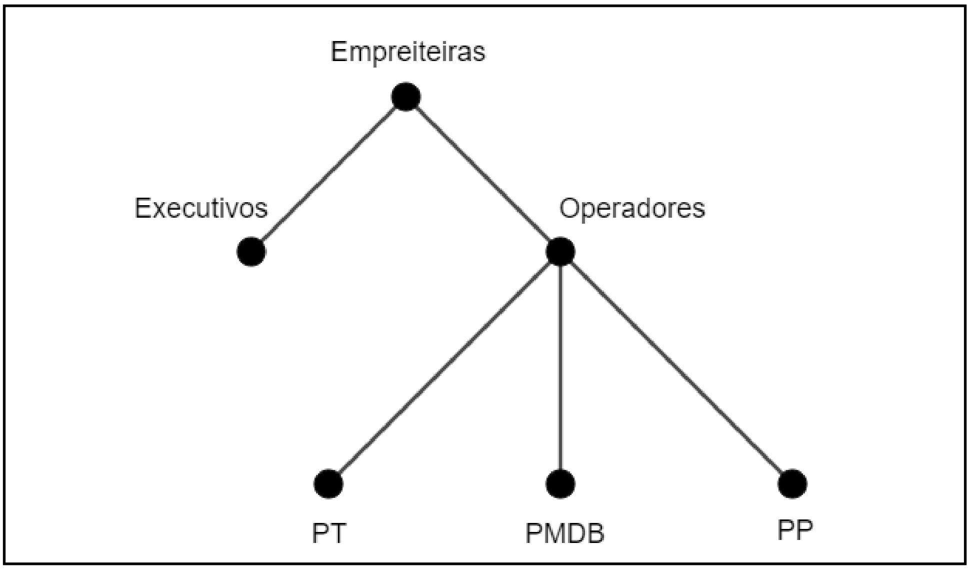
**Figura 4.4 - Esquema de desvio de dinheiro da Petrobrás.**




Fonte: http://g1.globo.com/politica/operacao-lava-jato/infografico.html

[7] Um infográfico é um desenho ou imagem que, juntamente com um texto, explica ou informa sobre assunto que não ficaria bem claro só com o uso de texto.

**Figura 4.5 – Grafo do Esquema de desvio de dinheiro da Petrobrás.**




Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.3 PROPRIEDADES DAS ÁROVRES.

As árvores gozam de várias propriedades. Os três teoremas seguintes dizem respeito a propriedades que caracterizam bem um grafo do tipo árvore.

**Teorema 4.1:** Um grafo é uma árvore se e somente se, entre dois vértices quaisquer, existe um só caminho.

Prova:

(→) Suponhamos que G seja uma árvore e sejam *u, v* ϵ V(G). Devemos provar que existe um caminho (*u, v)* e que este é único. A existência do caminho é óbvia, pois a definição de árvores nos diz que as mesmas são grafos conexos.  Para provar que o caminho (*u, v)* é único, vamos supor que exista outro caminho diferente de (*u, v)*. Ora, a existência deste outro caminho ligando os vértices *u* e *v* nos dá um ciclo; o que contradiz a definição de árvore.

(←) Devemos provar a seguinte proposição: Se entre dois vértices quaisquer existe um só caminho, então o grafo é uma árvore.

Vamos supor que o grafo G não seja uma árvore. Então, há pelo menos um par de vértices *u, v* ϵ V(G), tais que entre eles:

- Não exista um caminho (grafo desconexo) ou,

- Exista mais de um caminho (grafo com ciclo).

Portanto, para que G seja uma árvore só pode existir, no máximo, um caminho entre os vértices *u* e *v*. A recíproca é verdadeira. ■

**Teorema 4.2:** Seja G um grafo conexo. Então, G é uma árvore se e somente se toda aresta de G é uma aresta de corte.

Prova:

Uma aresta de corte, *e*, de um grafo G é uma aresta tal que o grafo G´= G – e tem mais componentes que o grafo G.

(→) Devemos provar a seguinte proposição: Se G é uma árvore, então toda aresta de G é uma aresta de corte.

Vamos realizar a prova usando a contrapositiva da proposição acima. Ou seja, se existe uma aresta ***e***, de extremos (vértices) x e y, que não seja uma aresta de corte, então G não é uma árvore. De fato, a supressão da aresta ***e*** não torna o grafo desconexo, pois existe outro caminho (aresta) diferente de ***e*** ligando x a y. A existência deste outro caminho faz com que o grafo tenha um ciclo e, portanto, não seja uma árvore.

(←) A proposição a ser provada agora é esta: se toda aresta de G é uma aresta de corte, então G é uma árvore.

Vamos supor, por contradição, que G contenha um ciclo C e, portanto não seja uma árvore. Seja ***e* = xy** uma aresta do ciclo C. Como, por hipótese, o grafo é conexo, há outro passeio que não passa por ***e*** e nos leva de x a y. Logo, por contradição, *e= xy* não é uma aresta de corte. ■

**Teorema 4.3:** Se G é uma árvore, então G não tem ciclos e tem n – 1 arestas.

Prova:

Por hipótese, G é uma árvore e, portanto, sem ciclos. Vamos supor que retiremos a aresta ***e* = xy** de G. A retirada desta aresta, por ser de corte, separa G com n vértices em um par de árvores G`e G`com n`e n`` vértices, respectivamente. Por indução, o número de arestas de G`é n´- 1 e o número de aresta de G” é n``-1. Acrescentando a aresta ***e* = xy**, conclui-se que o número total de arestas de G será: (n´- 1) + (n``-1)+1 = (n`+ n``) – 1 = n – 1. ■

## 4.4 OUTROS CONCEITOS INTERESSANTES REFERENTES A ÁRVORES.

### 4.4.1 CENTRO DE UMA ÁRVORE.

Um conceito bem interessante é o de *centro da árvore*. Para uma melhor compreensão do que seja o centro de uma árvore, faz-se necessário primeiramente, tratarmos dos seguintes conceitos referentes aos grafos de forma geral: distância entre vértices, excentricidade (ou afastamento) de um vértice, raio e diâmetro de um grafo.

Seja **G = (V, E)** um grafo valorado. A distância de um vértice **t** ϵ V a outro vértice **y** ϵ V é o comprimento do caminho mais curto entre **t** e **y.** Se estes vértices não estiverem conectados, diz-se que a distância entre eles é infinita. A função distância ***d*** possui as seguintes propriedades:

$a)\ d(s,t)\ \geq 0\ \forall\ s,t\ \in V;$

b) $d(s,t) = 0\ \leftrightarrow s = t;$

c) $d(s,t) = d(t,s)\ \forall\ s,t\ \in V;$

d) $d(s,t) \leq d(s,z) +\ d(z,t)\ \ \forall\ s,t,z\ \in V.$

É óbvio que a definição de distância dada acima, assim como as propriedades da função distância , refere-se á distância métrica. Entretanto, em problemas de logística, o termo "distância" pode dá lugar a outros termos como "tempo de percurso" ou "custo de transporte", por exemplo. No caso de grafos não valorados, admite-se o valor "1" para cada aresta.

A *excentricidade e(****v****)* de um vértice ***v ϵ V*** em um grafo **G = (V, E)** é a maior distância de ***v*** a algum outro vértice ***y*** **ϵ V.** O raio ρ**(G)** de um grafo **G = (V, E)** é a menor das excentricidades existentes no grafo. O diâmetro diam(**G),** por sua vez, é a maior das excentricidades existentes no grafo, ou seja, a maior distância.

Dito isso, o *Centro de um grafo* **G = (V, E)** é um vértice cuja excentricidade é igual ao raio. Como, em alguns grafos, há mais de um vértice com excentricidade igual ao raio, o *centro* será o conjunto dos vértices que satisfazem essa condição, ou seja, o conjunto dos vértices que têm a menor excentricidade. Neste caso, adota-se a seguinte notação:

$$C(V) =\ \{v\ \in V\mid e(v)\ \text{é}\ mínimo\},\ \ onde\ e(v) = máx_{y\,\in V}\{d(v,y)\}\,.$$

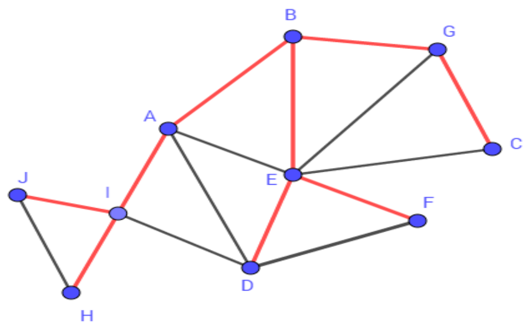
Obviamente, a notação acima se aplica também ás arvores.

O problema 9 da sessão 5.4 deste trabalho é um problema de logística. Nele, determinar o centro do grafo corresponde a encontrar a melhor localidade para construção de um hospital regional.

### 4.4.2 ÁRVORE GERADORA.

Segundo Scheinerman (2013, p. 480), “[...] Uma *árvore geradora* de G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore.” Obviamente, a árvore geradora deve possuir todos os vértices de G. No grafo da figura abaixo se observa um grafo e, em destaque (vermelho), uma de suas muitas árvores geradoras.

**Figura 4.6 – Árvore geradora destacada em vermelho**




Fonte: Elaborado pelo autor.

Muitos problemas podem ser solucionados com o auxílio de árvores. Os mais comuns são os referentes à análise combinatória ou ao cálculo de probabilidade. Alguns desses problemas são apresentados no capítulo 5.

#### 4.4.2.1 ÁRVORE GERADORA MÍNIMA.

Em problemas de logística (transporte, distribuição de energia, redes de telecomunicação, etc.) sempre interessa encontrar o “caminho” de menor custo ou o “caminho” ótimo. Dado um grafo totalmente conexo que represente, por exemplo, todas as possibilidades de trajetos aéreos entre algumas cidades, percebe-se que não é nada viável do ponto de vista econômico ter voos diretos entre cada par de cidades. É Por isso que enfrentamos as conexões aéreas até chegarmos ao nosso destino final. Portanto, encontrar um grafo conexo mínimo ou de menor custo é o que interessa e o grafo com esta característica é a árvore geradora mínima.

O problema 12, na sessão 5.4 deste trabalho, refere-se à busca de uma árvore geradora mínima. Na resolução utilizamos o *Algoritmo de Kruskal*[8].

[8] O Algoritmo de Kruskal foi publicado em 1956 pelo matemático Joseph Bernard Kruskal Jr (1928-2010). Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph_Kruskal.

# 5. PLANOS DE AULA.

Neste capítulo apresentamos sugestões de planos de aula. Nos planos, alguns problemas (e suas soluções) relacionados á teoria já vista nos capítulos anteriores serão apresentados aos professores (as) de Matemática do Ensino Médio. São problemas desafiadores e oriundos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, de outras fontes (sites especializados) e, alguns elaborados pelo autor.

Como sugestão de metodologia de trabalho em sala de aula, recomendamos a Metodologia de Resolução de Problemas, pois conforme nos ensina POLYA,

> "(...) resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado; (...) é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão; (...) é a realização específica da inteligência, e a inteligência é o dom específico do homem. Se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas do cotidiano, problemas pessoais, problemas sociais, problemas científicos, quebra-cabeças e toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os (...)" (apud MAGALHÃES, 2014, p. 21)

A citação acima, por si só, já justificaria a nossa sugestão de metodologia. Ademais, o Professor Marcelo Viana em aula inaugural do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, ao falar do objetivo deste Programa de Mestrado, nos diz que o PROFMAT

> Visa trazer o professor para o conhecimento da matéria que vai ensinar e habilitá-lo a empregar esses conhecimentos em situações da vida real e das ciências, de maneira a poder dar aos jovens a convicção de que a Matemática, além de bela e educativa, é também um instrumento poderoso para resolver problemas, elucidar situações e fornecer respostas. (VIANA, 2011, p.4)

Sendo assim, segue os planos de aula abaixo. Os mesmos poderão ser adaptados à realidade de cada professor e/ou Escola.

## 5.1 **AULA 1**: BREVE HISTÓRICO E CONCEITOS INTRODUTÓRIOS SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS.

**Objetivos:**

- Apresentar um breve histórico sobre a origem da Teoria dos Grafos;
- Apresentar os conceitos iniciais relativos á Teoria dos Grafos;
- Resolver problemas utilizando os conceitos apresentados.

**Público-alvo:** Alunos a partir do 1° ano do Ensino Médio.

**Tempo de execução:** Três horas-aula

**Conteúdo abordado:** Histórico e conceitos introdutórios referentes à Teoria dos Grafos.

**Problemas propostos:**

**PROBLEMA 1: FORMANDO COMISSÕES.** (Elaborado pelo autor)**.**

O recém-empossado prefeito do Município de Grafolândia resolveu governar através de Conselhos. Para isso criou sete Conselhos Municipais: Saúde (S), Educação (E), Administração e Finanças (AF), Produção e Abastecimento (PA), Meio Ambiente (MA), Cultura e Esporte (CE) e Turismo (T). A criação dos Conselhos obedeceu às seguintes regras

1. Todo conselheiro deve fazer parte de exatamente dois Conselhos;
2. Quaisquer dois Conselhos devem ter um único Conselheiro em comum.

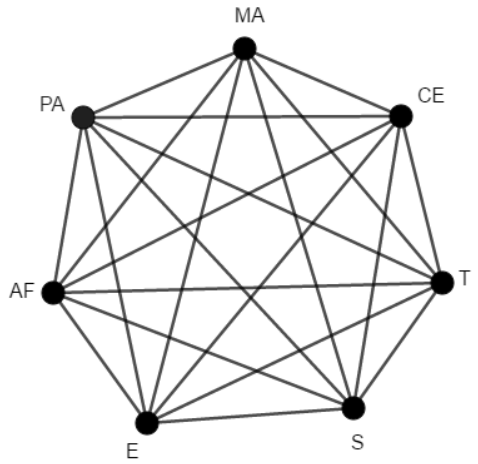
Pergunta-se:

a) Quantos conselheiros deve ter o Município de Grafolândia?
b) Quantos conselheiros deve ter cada Conselho?

*Solução:*

Para solucionar este problema vamos utilizar como modelo um grafo construído da seguinte forma: cada vértice representará um Conselho e cada aresta representará um conselheiro. Sendo assim, teremos um grafo com 7 vértices. Seguindo as regras dadas, elaboramos o grafo mostrado na figura 5.1, abaixo.

**Figura 5.1 - Grafo para o problema 1.**




Fonte: Elaborado pelo autor

O grafo elaborado é um grafo completo $K_7$. Observando-o, temos que:

- O número de conselheiros, $\boldsymbol{m}$, é igual ao número de arestas do grafo, ou seja:

$$\boldsymbol{m} = \frac{7 \times (7-1)}{2} = 21$$

Teremos, então, 21 conselheiros.

Como se trata de um grafo regular onde cada vértice tem grau 6, teremos 6 conselheiros em cada Conselho Municipal.

**PROBLEMA 2: AMIGOS QUE VOCÊ PODE CONTAR!** (OBMEP, 2011, N2Q77).

Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

a) 4 pessoas do grupo?
b) 3 pessoas do grupo?

(Admita que se A conhece B então B conhece A)

Solução:

Vamos supor que cada pessoa represente um vértice (ponto), $V_i$. Então, existe um conjunto de vértices dado por $V = \{V_1, V_2, \dots, V_{15}\}$. Vamos supor ainda que existe um conjunto de segmentos (arestas) do tipo $V_iV_j$ formado por subconjuntos de dois elementos de $V$ e que representaremos por $E = \{V_iV_j \mid V_i \sim V_j\}$; onde a relação $V_i \sim V_j$ indica que a pessoa "i" conhece a pessoa "j". Dado estes dois conjuntos, $V$ e $E$, temos um grafo que modela o problema. Iremos agora realizar a contagem do número total de graus do grafo e, o número de arestas do mesmo e confrontar os resultados com o Teorema 1.1.

a) De cada vértice do grafo saem 4 arestas. Portanto, o somatório de todos os graus é igual a 60, ou seja, $\sum_{v \in V} d(V) = 4\, x\, 15 = 60$. Têm-se também que cada ponto é extremidade de 4 arestas. Teríamos, então, 60 arestas. Porém, cada aresta foi contada duas vezes (foi contada nas duas extremidades). Portanto o número de arestas deve ser dividido por dois, ou seja, $|E| = \frac{4 \times 15}{2} = 30$ arestas. Os resultados encontrados satisfazem o Teorema 1.1. Portanto, **é possível que cada pessoa do grupo conheça outras 4 pessoas**.

b) Para esta situação, temos que o somatório dos graus dos vértices é dado por $\sum_{v \in V} d(V) = 3\, x\, 15 = 45$. Como não existe nenhum número natural que multiplicado por 2 tenha como resultado 45, o Teorema 1.1 não é satisfeito. Portanto, **não é possível que cada pessoa do grupo conheça exatamente 3 outras pessoas**.

## 5.2 **AULA 2:** VERIFICANDO A VIABILIDADE DE TRAJETOS.

**Objetivos:**

- Compreender o que são percursos e conexidade;
- Elaborar grafos para testar a viabilidade de percursos e conexões;
- Resolver problemas utilizando os conceitos apresentados.

**Público-alvo:** Alunos a partir do 1° ano do Ensino Médio

**Tempo de execução:** Três horas-aula.

**Conteúdo abordado:** Percursos e conexidade em grafos.

**Problemas propostos:**

**PROBLEMA 3: OSSOS DO OFÍCIO DE UM OFICIAL DE JUSTIÇA.**

Um Oficial de Justiça da Comarca de Mirinzal – MA planeja cumprir mandados nos seguintes povoados de sua jurisdição: Achuí, Angelim, Boa Vista, Colônia, Monte Cristo, Morada Nova, Mussuã e São Sebastião. Antes de sair do Fórum de Mirinzal, ele foi informado de que várias estradas tornaram-se intrafegáveis após as fortes chuvas que caíram na região da Baixada Ocidental Maranhense; sendo possível realizar somente os trajetos indicados na tabela 2.1, abaixo. A dúvida do Oficial é: será possível sair de Mirinzal e, utilizando os trajetos trafegáveis, chegar a Mussuã?

**Tabela 5.1 - Trajetos possíveis em povoados da Comarca de Mirinzal – MA (sede).**

| DE | PARA |
|---|---|
| Mirinzal (Mz) | Colônia (Co) |
| São Sebastião (SS) | Achuí (Ac) |
| Mirinzal (Mz) | São Sebastião (SS) |
| São Sebastião (SS) | Colônia (Co) |
| Colônia (Co) | Achuí (Ac) |
| Angelim (An) | Monte Cristo (MC) |
| Monte Cristo (MC) | Morada Nova (MN) |
| Morada Nova (MN) | Boa Vista (BV) |
| Boa Vista (BV) | Mussuã (Mu) |
| Mussuã (Mu) | Angelim (An) |

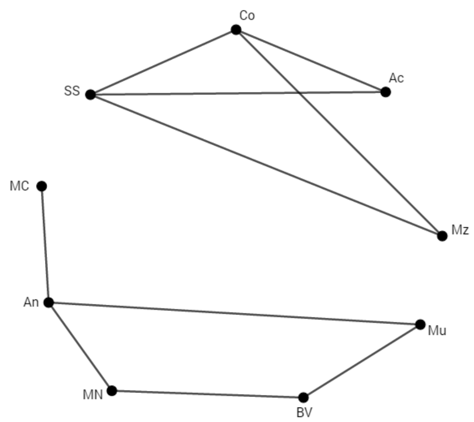
Fonte: Elaborada pelo autor**.**

*Solução:*

Considerando cada localidade como um vértice e os trajetos possíveis como arestas, têm-se um grafo não dirigido e composto de dois subgrafos conexos, conforme figura 5.2 abaixo. De imediato observarmos que o grafo é desconexo e, portanto, **não é possível realizar o trajeto de Mirinzal a Mussuã.**

Observa-se ainda, a partir do grafo da fig. 5.2, que o Oficial terá que buscar uma estrada trafegável alternativa para chegar aos povoados Monte Cristo, Angelim, Morada Nova, Boa Vista e Mussuã.

**Figura 5.2 - Grafo do problema 2.1**




Fonte: Elaborado pelo autor

**PROBLEMA 4: ERDOSLÂNDIA** (OBMEP, 2016, N1q12)

Existem 7 cidades em Erdoslândia. Queremos construir entre quaisquer duas cidades uma estrada de mão única, de modo que sempre seja possível partir de uma cidade e chegar a qualquer outra passando por no máximo mais uma cidade. Como isso pode ser feito?

*Solução:*

Na solução apresentada no Banco de Questões da OBMEP 2016 consta apenas o desenho de um grafo e a informação de que se trata de um mapa com uma possível escolha de orientações entre as cidades. Isto significa que pode haver várias soluções para este problema. Analisando o problema à luz da Teoria dos Grafos, pode-se utilizar como modelo um grafo dirigido (digrafo); onde os vértices são as cidades e os arcos são as estradas.

Como o problema exige que haja ligação entre todas as cidades, teremos um digrafo completo $K_7$. O modelo assemelha-se, a menos das orientações, ao grafo apresentado na figura do *Problema 1.1* (Figura 1.8). Sendo assim, e conforme já determinado, têm-se um grafo com 7 vértices (cidades) de grau 6 cada um e 21 arcos (estradas). O grau do vértice indica a quantidade de estradas por onde é possível chegar ou sair de cada cidade. Vamos supor que, para cada estrada de chegada a uma determinada cidade há outra de saída. Então, em cada vértice teremos 3 arcos chegando e 3 arcos saindo.

A matriz de adjacência abaixo servirá de orientação para a construção do grafo desejado. Nela, as cidades são nomeadas de: A, B, C, D, E, F e G.

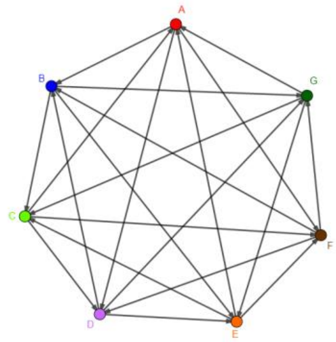
**Tabela 5.2 - Matriz de adjacência do grafo do problema 04.**

| | ***A*** | ***B*** | ***C*** | ***D*** | ***E*** | ***F*** | ***G*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***A*** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ***B*** | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ***C*** | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| ***D*** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| ***E*** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| ***F*** | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| ***G*** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Fonte: Elaborada pelo autor.

O número “1” como valor de um elemento $a_{ij}$ indica que há uma estrada saindo da cidade “i” e chegando à cidade “j”. Por exemplo, o elemento $a_{25}$ = 1 indica que há uma estrada saindo da cidade B (linha 2) e chegando á cidade E (coluna 5). A partir da matriz acima, construímos o grafo da figura 5.3 abaixo, que é uma solução para o problema.

**Figura 5.3 - Conectando cidades.**




Fonte: Elaborada pelo autor.

**Problema 5: Viajando por cidades (Extraído de [7])**

Em um país existem 15 cidades, cada uma das quais é ligada por uma estrada a no mínimo 7 outras. É possível viajar de uma cidade a qualquer outra cidade, possivelmente passando por algumas cidades intermediárias?

*Solução:*

Considerando cada cidade como um vértice e cada estrada como uma aresta, têm-se um grafo com 15 vértices; cada um com grau $d(v) \geq 7$, conforme enunciado do problema. Poder viajar de qualquer cidade a outra significa dizer que o grafo correspondente é conexo. O Teorema 2.1 nos assegura que um grafo não dirigido com *n* vértices é conexo se o grau de cada vértice é $d(v) \geq \frac{n-1}{2}$ . Como $n$ = 15, temos: $d(v) \geq \frac{15-1}{2} \rightarrow \ d(v) \geq 7$. Portanto, é possível viajar entre quaisquer duas cidades do país.

## 5.3 **AULA 3:** CAMINHANDO COM EULER E HAMILTON.

**Objetivos:**

- Compreender o que são caminhos eulerianos e hamiltonianos;
- Solucionar problemas relativos a estes tipos de caminhos.

**Público-alvo:** Alunos a partir do 1° ano do Ensino Médio

**Tempo de execução:** Quatro horas-aula.

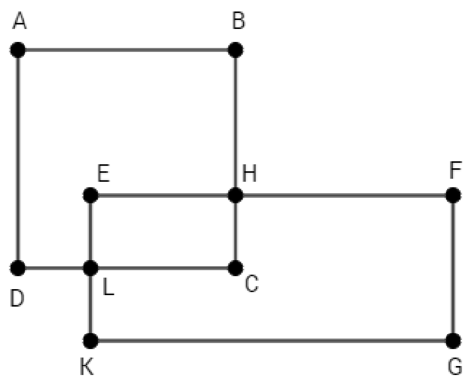
**Conteúdo abordado:** Caminhos eulerianos e hamiltonianos.

**Problemas propostos:**

**Problema 6: Desenhos bem desenhados** (OBMEP, 2013, N1Q17).

Dizemos que um desenho é bem desenhado quando pode ser feito sem tirar o lápis do papel e sem passar o lápis duas vezes por cima de uma mesma linha. Por exemplo, o desenho abaixo é bem desenhado, pois pode ser desenhado, por exemplo, seguindo a ordem dos vértices A → B → H → F → G → K → L → C → H → E → L → D → A.

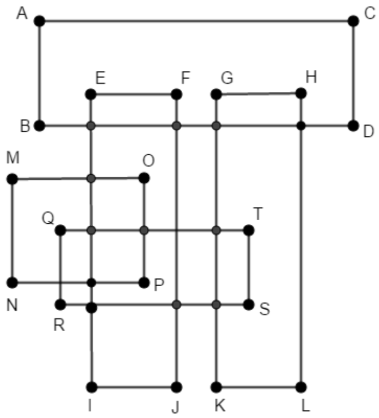
**Figura 5.4 - Desenho bem desenhado.**




Fonte: OBMEP

a) Mostre que o desenho abaixo é bem desenhado:

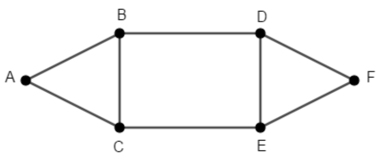
**Figura 5.5 - Desenho bem desenhado 2.**




Fonte: OBMEP

b) O desenho a seguir é bem desenhado? Justifique.

**Figura 5.6 - Desenho bem desenhado 2**




Fonte: OBMEP

***Solução:***

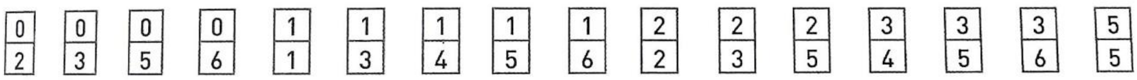
a) Dizer que o desenho apresentado é bem desenhado equivale a considerar o desenho como um grafo e, ainda, dizer que existe neste grafo um passeio euleriano. Ou seja, dizer se o grafo é *euleriano.* Se tal passeio existe, será possível, por exemplo, sair do vértice **A**, percorrer todas as arestas uma única vez cada e retornar a **A**. Analisando cada vértice do grafo em questão, observa-se que todos têm grau par (grau 2 ou 4). Logo, pelos critérios de *Euler*, o grafo é euleriano e o desenho é bem desenhado.

b) Da mesma forma como procedemos na resolução do item “a”, observa-se que os vértices **B, C, D e E** possuem grau três. Portanto, como o grafo possui mais de dois vértices (nós) de grau ímpar, pelos critérios de *Euler*, o grafo em questão não é euleriano e o desenho não é bem desenhado.

**Problema 7: Grafos e o jogo de dominó** (adaptado de [9]).

Um jogo de dominó completo possui 28 peças. Dois irmãos, Paulo e Rafael, encontraram algumas peças de um jogo de dominó há muito tempo esquecido em uma gaveta e desejam jogar. Eles encontram as 16 peças mostradas na figura 5.7, abaixo. É possível completar o jogo?

**Figura 5.7 - Dominó incompleto**




Fonte: [9], pág. 15.

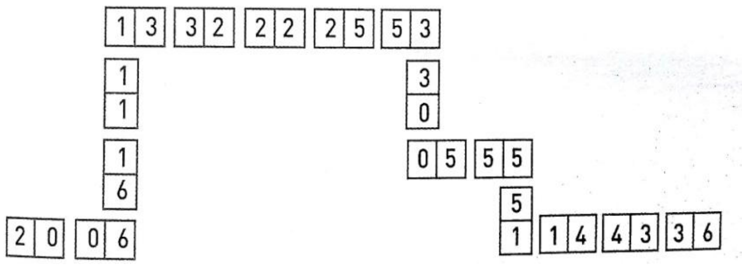
*Solução:*

A solução do problema consiste em encontrar um caminho composto por todas as peças encontradas. Considerando cada número como um vértice, $v_i$, pode-se considerar como grau deste vértice, *d(i)*, a quantidade de vezes que este número aparece. Então, têm-se os seguintes graus:

$d(0) = 4$, $d(1) = 6$, $d(2) = 5$, $d(3) = 6$, $d(4) = 2$, $d(5) = 6$ e $d(6) = 3$.

Observa-se que os vértices de número 2 e 6 possuem graus cinco e três, respectivamente. Os demais vértices possuem grau par. Então, um caminho *semi-euleriano* inicia-se com o vértice de número 2 e termina com o vértice de número 6 ou, vice-versa. Portanto, é possível completar o jogo. A figura 5.8, abaixo, mostra uma solução.

**Figura 5.8 – Uma solução possível para o problema do dominó.**

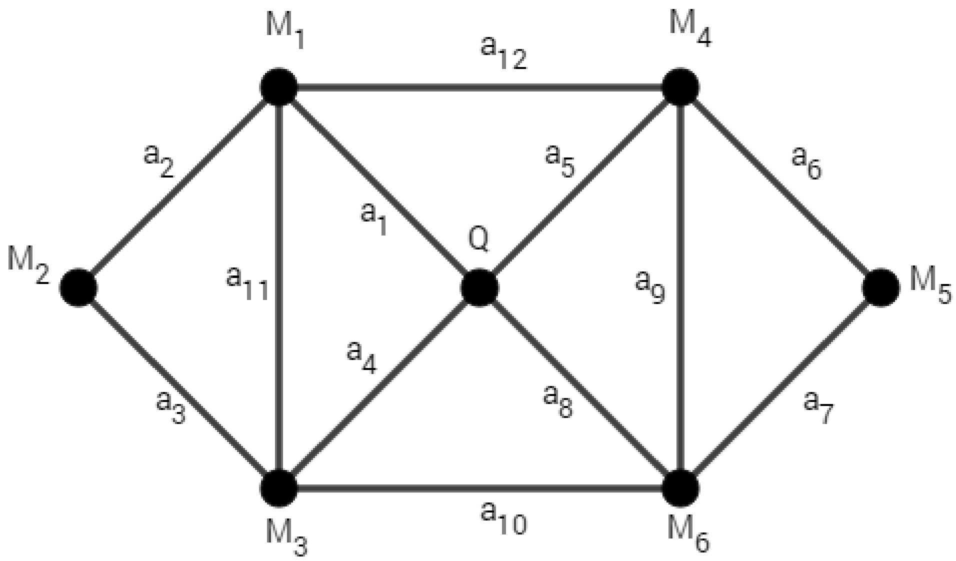



Fonte: [9], pág. 15.

**Problema 8: Euler e Hamilton na lanchonete (elaborado pelo autor)**

Uma pequena lanchonete instalada em uma praça consiste de um quiosque (Q), onde fica a área de trabalho (cozinha, despensa e caixa), e de seis mesas fixas ($M_1$, $M_2$, ... $M_6$). A partir da planta de situação da lanchonete, elabora-se o grafo mostrado na figura 5.9, abaixo. Neste, todos os segmentos de reta são alamedas ($a_1$, $a_2$, ..., $a_{12}$).

**Figura 5.9 – Grafo a partir da planta de situação da lanchonete.**




Fonte: Elaborado pelo autor.

Um funcionário da lanchonete, antes de começar o atendimento diário, tem que realizar, ordenadamente, as seguintes tarefas:

1º - Varrer todas as alamedas;

2º - Limpar e arrumar todas as mesas.

É possível otimizar o tempo de execução de cada tarefa utilizando-se a Teoria dos Grafos? Explique como.

Solução:

Sim, é possível otimizar as tarefas. Vejamos como:

1ª Tarefa - Limpeza das alamedas: para otimizar o tempo de realização desta tarefa, o funcionário deve partir do quiosque, percorrer cada alameda uma única vez e retornar ao ponto de partida para guardar o material de limpeza. Ou seja, o funcionário deve percorrer um ciclo euleriano. Como cada vértice do grafo da figura 5.9 possui grau par, pelos critérios estabelecidos por Euler, existe um ciclo euleriano. Portanto, trata-se de um grafo euleriano. Uma solução possível para um ciclo é:

$Q \rightarrow M_1 \rightarrow M_3 \rightarrow M_6 \rightarrow M_4 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow Q \rightarrow M_6 \rightarrow M_5 \rightarrow M_4 \rightarrow Q$.

2ª Tarefa – Limpeza e arrumação das mesas: para otimizar o tempo de realização desta tarefa, o funcionário deve partir do quiosque, percorrer cada mesa uma única vez e retornar ao ponto de partida para guardar o material de limpeza. Feito isto, ele terá percorrido um ciclo hamiltoniano. Portanto, o grafo também é hamiltoniano. Uma solução possível é:

$Q \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_6 \rightarrow M_5 \rightarrow M_4 \rightarrow Q$

## 5.4 **AULA 4**: ÁRVORES.

**Objetivos:**

- Compreender o que são árvores na Teoria dos Grafos, assim como suas caracterizações;
- Identificar grafos do tipo árvore;
- Solucionar problemas utilizando estes tipos de grafos.

**Público-alvo:** Alunos a partir do 1° ano do Ensino Médio

**Tempo de execução:** Quatro horas-aula.

**Conteúdo abordado:** Árvores, centro de um grafo.

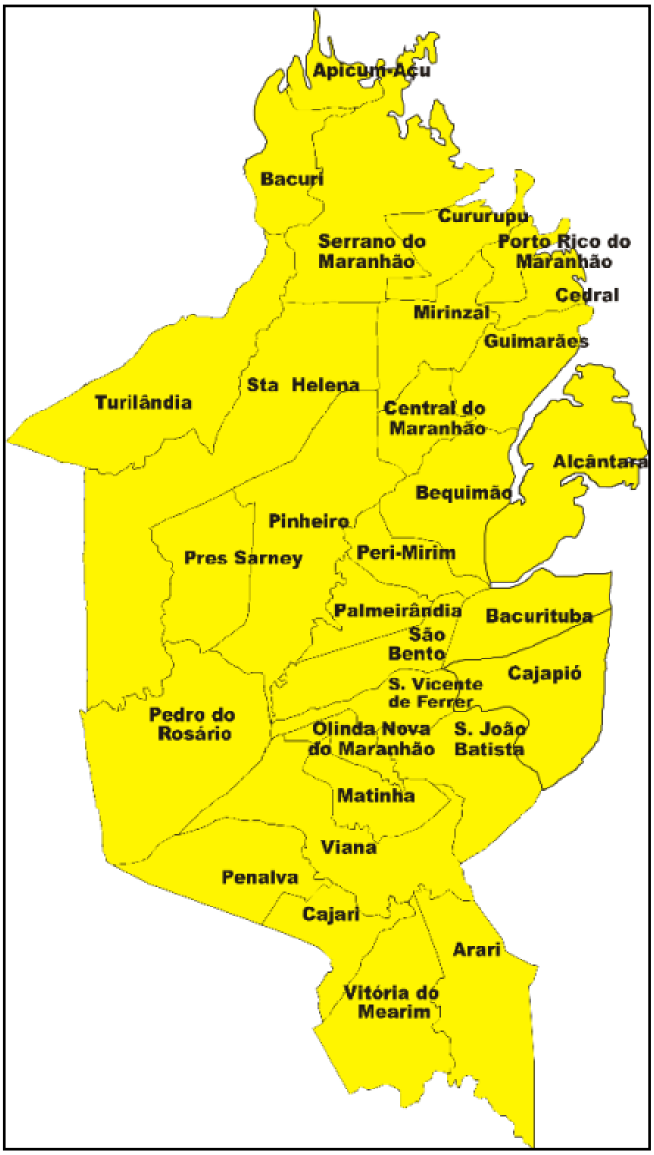
**Problemas propostos:**

**Problema 9: Localização ótima de um Hospital Regional (Elaborado pelo autor).**

A figura 5.10, abaixo, é o mapa da Microrregião da Baixada Ocidental Maranhense. Deseja-se construir hospital regional de alta e média complexidade para atender a população de nove Municípios dessa Microrregião, a saber: Central, Guimarães, Mirinzal, Cedral, Porto Rico, Cururupu, Serrano, Bacuri e Apicum-Açu. A tabela 5.3, abaixo, nos mostra as distâncias aproximadas entre os nove Municípios elencados. Pergunta-se: em qual Município o hospital regional estaria mais bem localizado?

Obs.: As distâncias foram calculadas levando em consideração os trajetos via rodovias estaduais.

**Figura 5.10 – Microrregião da Baixada Ocidental Maranhense**




Fonte: http://baixadadomaranhao.blogspot.com

**Tabela 5.3 - Distâncias aproximadas, em quilômetros (km), entre alguns Municípios da Microrregião da Baixada Ocidental Maranhense.**

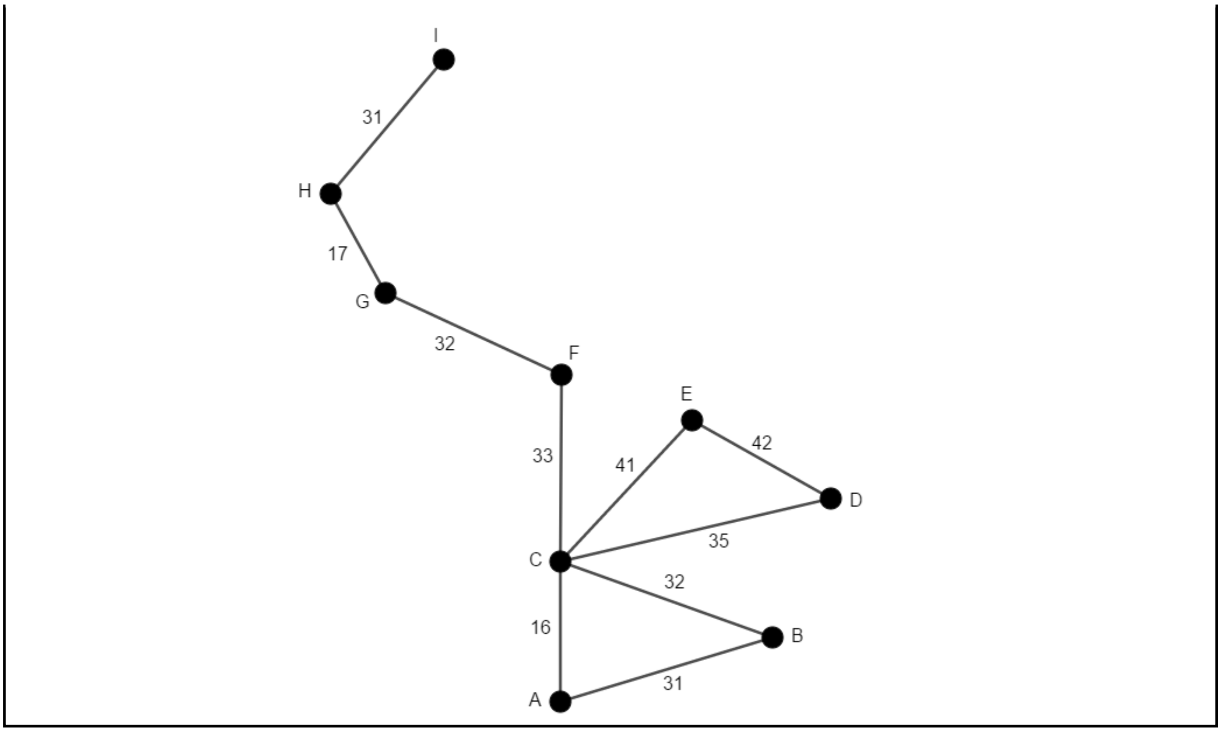
| **Municípios** | Central (A) | Guimarães (B) | Mirinzal (C) | Cedral (D) | Porto Rico (E) | Cururupu (F) | Serrano (G) | Bacuri (H) | Apicum-Açu (I) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Central (A) | 0 | 31 | 16 | 51 | 57 | 49 | 81 | 98 | 129 |
| Guimarães (B) | 31 | 0 | 32 | 67 | 73 | 65 | 97 | 114 | 145 |
| Mirinzal (C) | 16 | 32 | 0 | 35 | 41 | 33 | 65 | 82 | 113 |
| Cedral (D) | 51 | 67 | 35 | 0 | 42 | 68 | 100 | 117 | 148 |
| Porto Rico (E) | 57 | 73 | 41 | 42 | 0 | 74 | 106 | 123 | 154 |
| Cururupu (F) | 49 | 65 | 33 | 68 | 74 | 0 | 32 | 49 | 80 |
| Serrano (G) | 81 | 97 | 65 | 100 | 106 | 32 | 0 | 17 | 48 |
| Bacuri (H) | 98 | 114 | 82 | 117 | 123 | 49 | 17 | 0 | 31 |
| Apicum-Açu (I) | 129 | 145 | 113 | 148 | 154 | 80 | 48 | 31 | 0 |

Fonte: Elaborado pelo autor.

***Solução:***

O grafo da figura 5.11, abaixo, foi elaborado a partir do Mapa e da tabela de distâncias dados acima. Neste grafo representamos os Municípios por vértices, rotulados de A a I, conforme a tabela 4.1. As arestas, por sua vez, representam as rodovias estaduais e estão rotuladas com os valores das distâncias entre as cidades. Nota-se que o grafo representado abaixo não é uma árvore, pois possui ciclos. Contudo, com a retirada das arestas DE e BC, por exemplo, teremos uma das possíveis árvores geradoras do grafo.

**Figura 5.11 - Grafo Baixada Ocidental Maranhense**




Fonte: Elaborada pelo autor

A localização ótima para o hospital será aquela mais próxima de todos os outros Municípios. Determinando as excentricidades de todos os vértices (Municípios) e, escolhendo a menor delas, teremos o raio do grafo, $\rho$**(G)**. O vértice correspondente a este raio é o centro do grafo e, portanto, a melhor localização para a construção do hospital regional. Assim, têm-se:

e(A) = 129 e(B) = 145 e(C) = 113

e(D) = 148 e(E) = 154 e(F) = 80 (raio)

e(G) = 106 e(H) = 123 e(I) = 154

Dado as excentricidades acima, observa-se que ρ**(G) =** 80 km (raio do grafo) e o vértice correspondente, centro do grafo, é o vértice F. Portanto, a melhor localização para o hospital regional é o Município de Cururupu, pois este Município fica a, no máximo, 80 km de cada uma das outras elencadas. De fato, o Hospital Santa Casa em Cururupu é a unidade de saúde procurada pela população dos Municípios elencados quando se trata de casos de média complexidade.

Determinar o melhor local para a implantação de um centro de distribuição de produtos ou, ainda, a melhor localização para uma brigada de combate a incêndio são algumas das variações do problema acima.

**Problema 10: Árvores na análise combinatória** (questão 13 – prova amarela - ENEM 2014)

Conteúdo abordado: Árvores.

Público-alvo: Alunos a partir do 2º ano do Ensino Médio.

Enunciado: No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

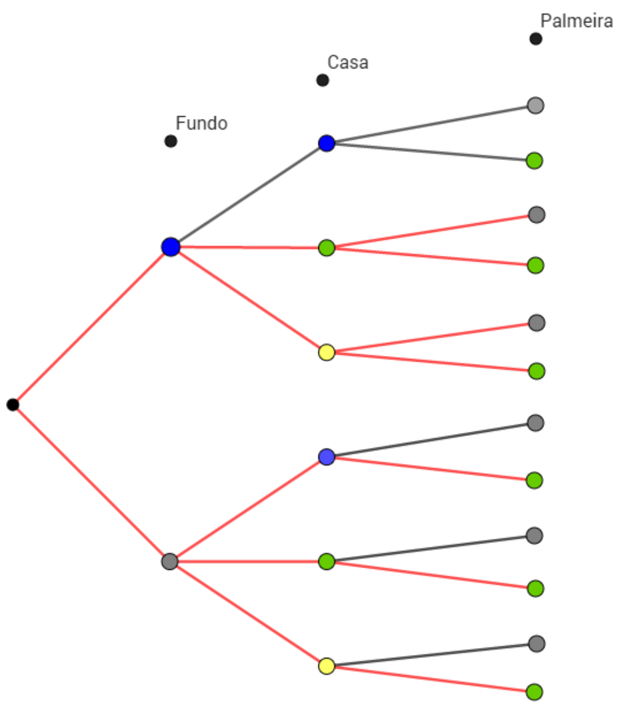
**Figura 5.12 – Figura do problema 10**


Fonte: http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos

***Solução:***

Trata-se de um problema que pode ser resolvido utilizando-se o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Para facilitar a resolução, elabora-se a árvore de possibilidades. A figura 5.13 abaixo é o grafo que representa esta árvore. Os caminhos destacados em vermelho são os caminhos possíveis (possibilidades). Observa-se que há 7 caminhos. Portanto, o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é 7 (Letra B).

**Figura 5.13 - Árvore de possibilidades para o problema 10.**




Fonte: Elaborado pelo autor.

**Problema 11: Árvores e problemas envolvendo probabilidade** (questão 145 – prova rosa - enem 2017).

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de

25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade de ocorrência de chuva nessa região.

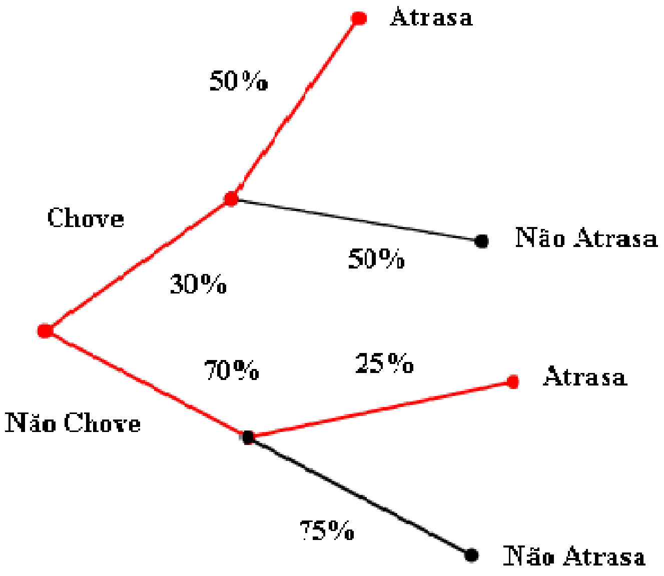
Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

a) 0,075   b) 0,150   c) 0,325   d) 0,600   e) 0,800

***Solução**:*

O grafo da figura 5.14 abaixo representa a árvore das probabilidades.

**Figura 5.14 - Árvore das probabilidades para o problema 11**




Fonte: Elaborado pelo autor

Os caminhos destacados em vermelho nos conduzirão á resposta do problema. Assim,

$$P(atrasar) = P(atrasar|chove) \ ou \ P(atrasar|não \ chove) \rightarrow$$

$$P(atrasar) = P(atrasar|chove) + P(atrasar|não \ chove) \rightarrow$$

$$P(atrasar) = \frac{30}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{70}{100} \times \frac{25}{100} \rightarrow$$

$$P(atrasar) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2,5}{10} \rightarrow$$

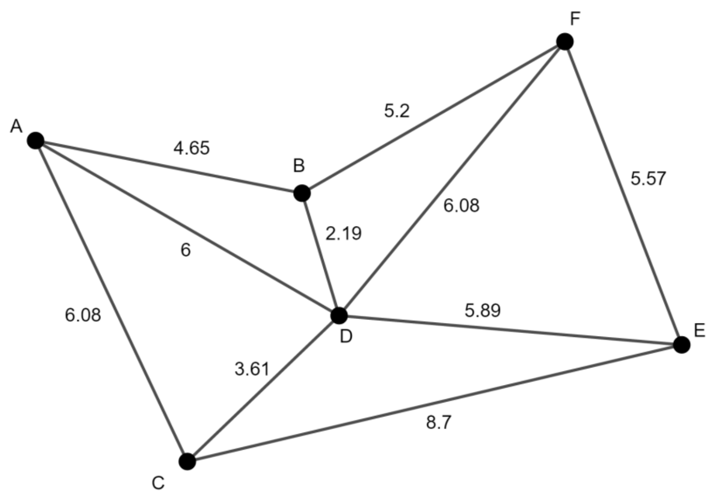
$$P(atrasar) = \frac{15}{100} + \frac{17,5}{100} = \frac{32,5}{100} = 0,325$$

Resposta: letra C.

Problema 12: Viajando em árvores de custo mínimo (elaborado pelo autor).

Uma empresa de aviação conseguiu a concessão para operar comercialmente em 6 (seis) cidades: A, B, C, D, E, F e G. O grafo da fig. 5.15 abaixo, valorado com as respectivas distâncias, em milhares de quilômetros, mostra as possibilidades de trajetos entre as mesmas. Considerando que os custos das viagens para a empresa são diretamente proporcionais à distância entre essas cidades e que conexões são realizadas, encontre a árvore geradora de custo mínimo e calcule este custo em termos de distância.

**Figura 5.15 – Aeroportos conectados**




Fonte: Elaborado pelo autor

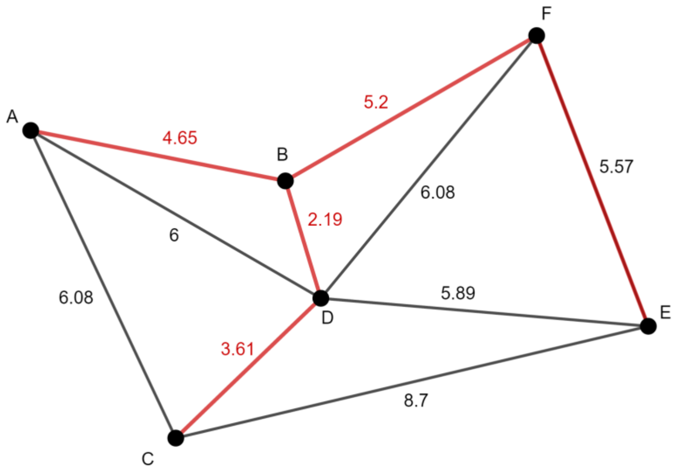
***Solução**:*

Usaremos o *Algoritmo de Kruskal*. Arbitrariamente, vamos supor que estamos partindo da cidade A (poderíamos ter partido de qualquer outra cidade). O passo a passo a ser seguido é o seguinte:

- A cidade não conectada mais próxima de A é a cidade B. Conectamos A a B;
- A cidade não conectada mais próxima de A e B é a cidade D (mais próxima de B). Conectamos B a D;
- A cidade não conectada mais próxima de A, B e D é a cidade C (mais próxima de D). Conectamos D a C;
- A cidade não conectada mais próxima de A, B, C e D é a cidade F (mais próxima de B). Conectamos B a F;
- A cidade não conectada mais próxima de A, B, C, D e F é a cidade E (mais próxima de F). Conectamos E a F.

Após as devidas conexões, encontramos o grafo da figura 5.16 abaixo. A árvore de custo mínimo está assinalada em vermelho.

**Figura 5.16 – Árvore geradora de custo mínimo**

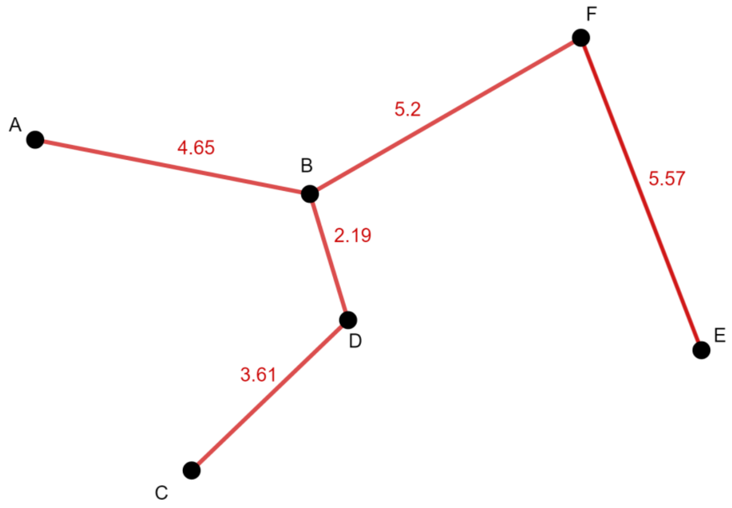



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando somente a árvore assinalada em vermelho, temos a solução para o problema mostrado na figura 5.17 abaixo. O custo total para esta árvore é:

$Custo\ total = 4{,}65 + 2{,}19 + 3{,}61 + 5{,}2 + 5{,}57 = 21{,}22$ , ou seja, 21.220 km.

**Figura 5.17 - Árvore de custo mínimo.**




Fonte: Elaborado pelo auto.

.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou compreender o quanto é interessante o uso da Teoria dos Grafos (T.G) como estratégia de resolução de vários problemas. Percebi também que é viável a introdução da T.G no Ensino Médio, ou até mesmo no Ensino Fundamental, principalmente nos anos finais (8º e 9º). O ensino da T.G, é bom frisar, pode ser "diluído" ao longo dos anos; o que dá mais liberdade ao professor. Este pode escolher trabalhar a T.G em momentos especiais como Feiras de Ciências, por exemplo. Acredito que as aulas sugeridas no capítulo 5, com as devidas adaptações à realidade de cada professor/escola, possam tornar a aprendizagem matemática mais significativa para os alunos.

A contextualização no ensino da Matemática ainda é um desafio para muitos professores de Matemática da Educação Básica. Qualquer assunto, neste nível de ensino, quando abordado de forma contextualizada, pode ser um motivador a mais para os alunos. Estes se debruçarão com mais afinco em busca das soluções para os problemas, pois perceberão que estão tratando com algo real e, até mesmo, do seu cotidiano.

Acredito que os objetivos da pesquisa foram alcançados. Descobrimos que a T.G é fascinante, que estar em pleno desenvolvimento e que muitos problemas podem ser solucionados de forma rápida utilizando-a.

Como o tema Teoria dos Grafos é pouco explorado, sugerimos:

- A realização de encontros, colóquios, etc. com a participação de pesquisadores, professores de Matemática do Ensino Médio e Fundamental e demais interessado no estudo da Teoria dos Grafos, a fim de divulgar esta teoria e suas inúmeras aplicações;

- A inclusão do tema Teoria dos Grafos na grade curricular do PROFMAT, como tópico especial (disciplina eletiva);

- A inclusão do tema Teoria dos Grafos ao longo dos anos do Ensino Médio ou em momentos especiais, como Feiras de Ciências, por exemplo;

- A criação de grupos de estudo/pesquisa multidisciplinares formados por estudantes de graduação dos Cursos de Matemática, Física, Engenharias, BC&T, Ciência da Computação, etc.;

- Produção de artigos referentes a tópicos da Teoria dos Grafos, bem como suas aplicações.

Acredito que a inclusão da Teoria dos Grafos, de forma contextualizada, ao longo do Ensino Médio permita aos professores e alunos um ensino/aprendizagem mais enriquecedor e significativo, fazendo com que o aluno tenha mais vontade de aprender e solucionar problemas.

## REFERÊNCIAS


*1.* BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. **Grafos: introdução e prática.** São Paulo: Editora Blucher, 2009.

2. BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília , DF, 2006.

3. __________L. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). Departamento de Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; vol. 2.** Brasília, DF, 2000.

4. _________. Ministério da Educação. INEP. **ENEM - Provas e Gabaritos.** Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 14 ago. 2019.

5. _________.Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). Departamento de Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias; vol. 2.** Brasília, DF, 2000.

6. _________. Ministério da Educação (MEC).

7. INTRODUÇÃO á Teoria dos Grafos – Aula 10 – Conexidade. Programa de Iniciação Científica da OBMEP. **Youtube**. 27 dez. 2016. 8min54s. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=eNE1rlXJF_o&list=PLrVGp617x0hAm90-7zQzbRsSOnN2Vbr-I&index=10. Acesso 30 jul. 2019.

8. JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos – Uma Introdução.** Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

9. LOPES, Maria Mouzinho Leite (Coord.). **Grafos: jogos e desafios.** Rio de Janeiro: UFRJ, 2010..

*10.* LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K. **Matemática Discreta: Elementar e Além.** Rio de Janeiro: SBM, 2005.

11. MAGALHÃES, Tiago Miranda de. **Grafos como Ferramenta para o Ensino de Matemática.**: PROBLEMAS, DEFINIÇÕES, MATRIZES, DIVISORES, VOOS E AFINS. ABORDAGEM PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO. 2014. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014.

*12.* SCHEINERMAN, Edward R. **Matemática Discreta: uma introdução.** São Paulo: Cengage learning, 2013.