Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Rene Torres

Matemática e Tecnologia no Esporte Orientação

Juiz de Fora

2019

Rene Torres

Matemática e Tecnologia no Esporte Orientação

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Jair Koiller

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Torres, Rene.
Matemática e Tecnologia no Esporte Orientação / Rene Torres. – 2019.
99 f. : il.

Orientador: Jair Koiller
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2019.

1. Esporte Orientação 2. Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) 3. Global Positioning System (GPS) e GoogleEarth 4. Cartografia 5.Otimização de percursos I. Koiller, Jair, orient. II. Título.

Rene Torres

Matemática e Tecnologia no Esporte Orientação

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 29 de agosto de 2019

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jair Koiller - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Nelson Dantas Louza Junior
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Maria Helena Cautiero Horta Jardim
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, meu ajudador e conselheiro. Aos meus pais, "In Memoriam", minha esposa Jaqueline, minhas filhas Brenna, Fernanda e Camila que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me fortalecer e me permitir ter acesso a Ele, renovando - me de Esperança e de um Futuro.

A minha esposa Jaqueline, pela paciência e por suportar algumas ausências durante o período do curso, devido às atividades e trabalhos de estudo por meio da plataforma e aulas presenciais, soma-se a isso o meu trabalho, que no ano de 2018 e 2019 tive que ficar por longas datas ausentes do meu lar devido à dedicação exclusiva que o trabalho exige.

As minhas filhas Brenna, Fernanda e Camila pela compreensão das minhas ausências que, por vezes, impedia de realizarmos os momentos de lazeres nos finais de semana.

Aos meus pais, por tudo que fizeram por mim.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jair Koiller, pela atenção, paciência, apoio, orientação na escrita dessa dissertação e, mais do que isso, ter aberto a sua casa para que pudesse dar continuidade no meu trabalho de conclusão do curso, algo aparentemente utópico nos dias atuais, demonstrando confiança e camaradagem. Como aluno, agradeço pelas orientações e estímulos durante a disciplina de Verão para a realização do Exame de Qualificação, onde me senti mais seguro pelo seu apoio.

Aos Professores do PROFMAT/UFJF - 2017/2018, pela paciência e pelas orientações de maneira competente e objetiva nas suas disciplinas. Em especial, agradeço aos professores do primeiro ano que proporcionou as melhores condições, conhecimento e habilidades para que pudesse ser aprovado no Exame Nacional de Qualificação.

Muito Obrigado!

Ao Coordenador e Professor Crocco, pela paciência nas diversas decisões diante de situações embaraçosas. à secretária Flavia, pela maneira educada e atenciosa que sempre me atendeu desde a pré-matrícula do curso e pela celeridade nos diversos documentos solicitados por mim.

Meu eterno obrigado!

Meu muito obrigado a todos os colegas da turma 2017, especialmente Lucas, Arthur, Thiago e Flávia pelo companheirismo, camaradagem, lealdade e amizade, pela ajuda nos estudos e apoio moral e pelos excelentes momentos de confraternização durante o almoço nos restaurantes ou nos bandejões.

Momentos inesquecíveis!

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização e conclusão deste curso.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo motivar a aprendizagem de Matemática pelo esporte. Escolhemos o desporto de Orientação, que usa a Natureza como o seu campo de jogo.

Tendo em vista que os "smartphones" e os chamados "weareables" estão tendo menor custo a cada dia e já são presentes na vida cotidiana, focamos nos aplicativos de GPS e no GOOGLE EARTH para a realização de diversas atividades de Orientação, utilizando especialmente os recursos disponíveis online pelo INPE. Aplicando o método de Ensino Híbrido, propomos usar, em parceria com os professores de Educação Física, as práticas desportivas como instrumento complementar de ensino/aprendizagem em matemática.

O objetivo é provocar o interesse aos alunos na busca do conhecimento cientifico, rompendo com o velhos preconceito de que "matemática é sòmente para os matemáticos". O trabalho pretende servir como um material de referência para professores, em diversos níveis de conteúdo, a partir do início do Ensino Fundamental até o término do Ensino Médio. Apresentamos assim alguns tópicos que podem ser de interesse aos alunos nos dois anos finais que desejam escolher áreas exatas ou tecnológicas.

Incluimos três capítulos mais avançados: um sobre cartografia e funções complexas, outro sobre GPS e, por fim mas não menos importante, um sobre problemas de logística motivados pelo Esporte Orientação.

PALAVRAS-CHAVE: Esporte. TICs. GPS. Cartografia. Logística.

ABSTRACT

This dissertation aims to motivate students to learning mathematics by way of sports. We chose the Orienteering, a sport that uses Nature as its playing field.

Given that smartphones and the so-called weareables become cheaper every day and are present in everyday life, we focus on GPS apps and GOOGLE EARTH for various Orienteering activities, using especially the resources available online by INPE. Applying the Hybrid Teaching method, we propose to use, in partnership with the Physical Education teachers, sports practices as a complementary tool for teaching/learning in mathematics.

The aim is to provoke interest in students in the pursuit of scientific knowledge, breaking with the old prejudice that “mathematics is only for mathematicians”. This work intends to serve as a reference material for teachers, at various levels of content, from the beginning of elementary school to the end of high school. Ssome topics may be of interest to students in the final two years who wish to choose exact or technological areas.

We have included three more advanced chapters, one one cartography and complex variables, another on GPS and last, but not the least, a chapter on logistic problems motivated by the Orienteering sport.

KEYWORDS: Sports. ICT. GPS. Cartography Logistics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ATIVIDADES/EXERCÍCIOS E TAREFAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Inicio esta monografia apresentando minha motivação pessoal e profissional, para combinar o Esporte Orientação com a Matemática. Além da minha licenciatura em Matemática na UFRJ, que cursei no período noturno de 2003 a 2008, fiz a Escola de Educação Física do Exército (EsEFEx)[1] de janeiro a julho de 1998.

O esporte Orientação faz parte do currículo da EsEFEx e também da Escola de Educação Física e Desportos da UFRJ (EEFD). Como professor e militar, tenho tido em minha experiência profissional trabalhado com jovens de famílias de baixa renda. Pretendo futuramente dedicar-me a ações sociais, combinando Matemática e Esporte. Sobre isto voltaremos com referências concretas no parágrafo final da monografia[2].

O desporto Orientação é uma “moderna modalidade esportiva que usa a própria Natureza como campo de jogo”. Requer cálculos matemáticos mentais frequentes e que precisam ser feitos rápidamente, em situações onde o cansaço físico pode causar desorientação (trocadilho proposital). Estes cálculos não são feitos apenas para avaliar o tempo de um percurso, ou fazer a soma de pontos já realizados. São feitos principalmente para a tomada de decisões. A análise do mapa e das correspondências das convenções requer conhecimentos técnicos, para o planejamento do esforço em cada etapa. A altitude em relação ao nível do mar de cada localização pode ser inferida. Utiliza-se a bússola com grande frequência. Não há orientista que não goste de Matemática!

Em relação aos objetivos deste TCC: procuramos mostrar neste trabalho que a iniciação deste esporte nas crianças e adolescentes pode propiciar um bom uso de novas Tecnologias da Informação e Comunicação (conhecidas como TIC’s[3]).

Os *smartphones* estão universalmente disseminados. Vieram para ficar, não adianta proibi-los nas escolas. Acreditamos que podem ser usados de forma positiva junto com novas técnicas pedagógicas, especialmente a *sala de aula invertida.*

Sendo assim, nesta monografia, voltada à relação da matemática com as tecnologias, focaremos no aplicativo Google Earth e no GPS na iniciação ao Esporte Orientação.

Apresentamos também alguns temas de matemática que podem ser trabalhados concomitantemente em sala de aula, e alguns temas atuais de pesquisa com aplicações civis e militares. O esporte Orientação é fonte de inspiração para problemas interessantes e atuais da Teoria dos Grafos e de Otimização (capítulo 7)[4].

---

1 Curso ali conhecido carinhosamente como “calção preto“.

2 Aqui escreve o orientador deste TCC: saúde permitindo, estarei junto!

3 `https://en.unesco.org/themes/ict-education`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Information_and_communications_technology`

4 Este livro acaba de ser publicado: “Orienteering Problems: Models and Algorithms for Vehicle Routing Problems with Profits” [1].

1.1 ESPORTE, CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Matemática e Física, as Engenharias, e as Ciências da Vida e Medicina são utilizadas de forma cada vez mais intensiva nas mais diversas modalidades desportivas. São muitos os exemplos, como a mecânica clássica nas duas primeiras; engenheiros produzem aparelhagens e equipamentos atléticos dos mais variados tipos; nutrição, medicina esportiva e fisiologia são indispensáveis aos atletas de alto rendimento.

Esporte e Ciência andam assim de mãos dadas. Porém o Esporte atual requer muito mais do que o desenvolvimento físico do corpo e das habilidades individuais. O atleta precisa raciocinar e se comunicar, ter liderança. A Psicologia é fundamental. Nos desportos coletivos, a Matemática permite aperfeiçoar as táticas e estratégias da equipe técnica. Os atletas precisam cada vez mais ter uma formação escolar bem acompanhada.

O filme "Jogada de Risco (Moneybal)", baseado em fatos reais [2], retrata as primeiras experiências do uso da *A*nálise Estatística no Beisebol[5].Em recentes Olimpíadas, como a do Brasil em 2016, ocorreu uma certa igualdade nos esportes coletivos, entre times ditos "novatos" e os ditos "cabeças de chave". A *Ciência dos Dados* tornou-se indispensável no planejamento de estratégias[6]. Vide o 7 $\times$1. Foi utilizada pela seleção feminina de futebol dos EUA para analisar os pontos fortes e fracos das adversárias[7].

A matemática e a tecnologia digital trazem uma nova possibilidade muito mais precisa de localização, e que já faz parte do cotidiano: o GPS (Sistema de Posicionamento Global) e o aplicativo GOOGLE EARTH.

O GPS também é um grande aliado no mundo dos esportes. É adotado para monitorar o posicionamento e o rendimento dos atletas. Nos Rally (automobilismo), como navegador em trilhas off-road. Em esportes de aventura, como auxílio em voos de asa-delta e no montanhismo. Inclui-se neste rol, atividades voltadas para o lazer, como o trekking, caminhadas, ou corridas. Chega a ser usado para documentar as chegadas ao topo do Everest, sem falar em auxílio quando ocorrem imprevistos ou emergências.

A visualização por meio do software GOOGLE EARTH, também pode melhorar a aprendizagem dos alunos. Os alunos poderão entender melhor o meio onde vivem, ou o seu país, países vizinhas e distantes. Passam a encarar os recursos tecnológicos como algo útil no cotidiano, antes visto apenas como diversão e entretenimento, compreendendo entre outros fatores, os inúmeros aspectos naturais e humanos constituintes do espaço físico.

---

[5] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Moneyball`

[6] Ver por exemplo `https://kinexon.com/blog/sports-analytics-change-the-game`
`https://www.sporttechie.com/series/stats-analytics/`
`https://koresoftware.com`

[7] `https://www.sporttechie.com/us-soccer-opta-womens-world-cup-alex-morgan-megan-rapinoe-jill-ellis/`. Megan, que ganhou o prêmio FIFA 2019, exemplifica as boas atitudes que os esportistas tem tomado em assuntos de interesse público.

1.2 ORIENTAÇÃO NO MUNDO E NO BRASIL

A Orientação surgiu em finais do século XIX (1850) nos países escandinavos. Suas raízes estão diretamente relacionadas com a vertente militar. As tropas realizavam entre si pequenos exercícios de Orientação que tinham como objetivo principal o reforço dos elos de camaradagem entre todos os elementos e o fortalecimento do espírito de grupo.

Como desporto a Orientação iniciou-se em 1912, pelo sueco Major Ernst Killander, considerado o pai da Orientação. Na época, o Major chamou a atenção de todos os jovens que praticavam corrida e atletismo (as principais competições da época) para esta "nova forma de correr". Em 25 Março de 1919, deu-se a primeira competição oficial de Orientação, na denominada "Corrida de Estocolmo". A prova ocorreu perto de Saltsjöbaden, reuniu mais de 200 participantes e foi organizada pela Federação de Desportos de Estocolmo. A competição tinha uma extensão de 12 quilômetros e apenas 3 pontos de controle. A partir deste momento, a Orientação não mais parou de crescer como desporto.

Já no Brasil, a Orientação iniciou-se em 1971 pela mão do Coronel Tolentino Paz. Ele que também foi o responsável pela organização das primeiras competições militares de Orientação no Brasil. Em 1974, este desporto foi incluído como disciplina obrigatória na Escola de Educação Física do Exército (EsEFEx) pelo Ministério de Educação e Cultura (MEC), visto como uma modalidade que disciplinava o corpo e a mente.

Nos anos seguintes, a competição de Orientação foi divulgada a outras organizações civis e militares e, principalmente no Sul do País, desde então, sucederam-se várias demonstrações, torneios e campeonatos que fizeram com que este desporto, inicialmente militar, crescesse para um patamar de excelência e reconhecimento nacional.

No dia 11 de Janeiro de 1999, foi fundada a Confederação Brasileira de Orientação (CBO), sendo eleito como primeiro presidente o Sr. José Otavio Franco Dornelles. A CBO ficou assim responsável por administrar o desporto Orientação no Brasil e, desde então, que a popularidade desta atividade não mais parou de crescer.

Atualmente, existem várias escolas, universidades e instituições que implementaram esse desporto como práticas para o desenvolvimento social, recreativo e lazer. Como exemplo, temos a Orientação também como disciplina na grade curricular da Escola de Educação Física da UFRJ, a qual também possui um Clube de Orientação bastante atuante na Federação de Orientação do RJ, como podemos verificar nas organizações das Etapas do campeonato de Orientação do Estado do Rio de Janeiro. Informações adicionais podem ser encontradas em [3].

2 O ESPORTE ORIENTAÇÃO

2.1 O QUE É O ESPORTE ORIENTAÇÃO?

Todo orientista se torna consciente da importância de preservar o nosso meio ambiente para as futuras gerações. Reiterando o que escrevemos na introdução, o desporto Orientação é uma modalidade esportiva que usa a própria Natureza como campo de jogo.

O livro de Raul Friedmann [4] é uma excelente referência em português: "um livro sobre GPS, bússolas e mapas para aventureiros radicais e moderados, civis e militares"[1].

A Orientação pode ser praticada como um esporte individual ou em times. Tem como objetivo percorrer no menor tempo possível uma determinada distância em terreno variado e desconhecido, obrigando os atletas a passarem por pontos prefixados neste terreno. Cada orientista é auxiliado apenas por um mapa e por uma bússola, distribuídos a todos no início da prova.

O professor pode organizar visita a Escola de um membro da Federação de Orientação de seu Estado. Para fazer propaganda da palestra, pode consultar prèviamente algumas páginas web com os alunos, como por exemplo (entre outras porventura mais recentes):

`https://cop.org.br/o-que-e-orientacao/`

`http://www.rumbanarota.com.br/orientacao.php`

`http://www.jobis.org.br/regulamento-tecnico-corrida`

Em tempo: na semana de 13 a 19 de maio de 2020 serão realizadas, mundialmente, um grande múmero de atividades de orientacção:

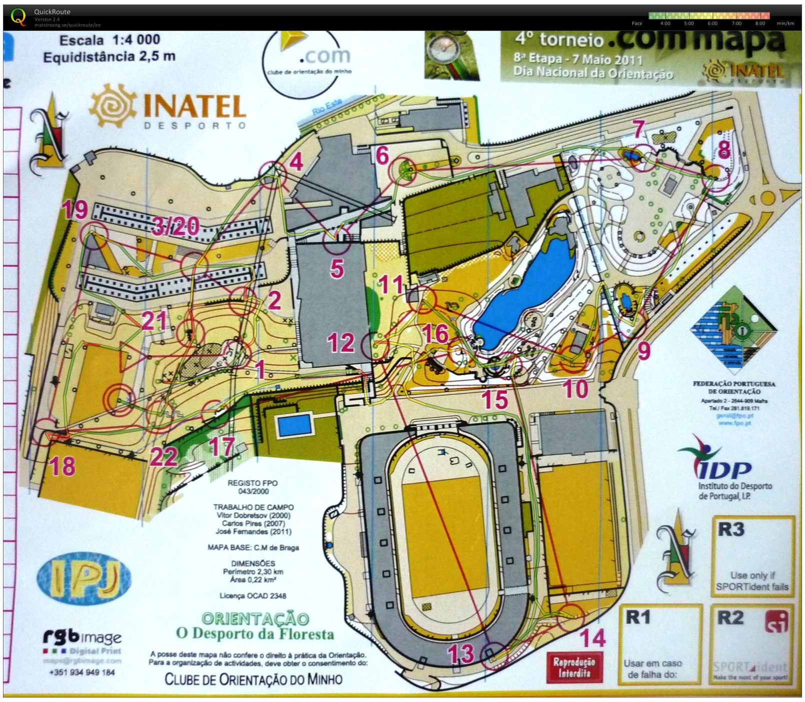
`https://worldorienteeringday.com`

Atividade/Tarefa 1: Orientação no Brasil

O Mapa de Orientação (a Figura 1 é um exemplo é a representação gráfica em escala e detalhada, de todo o terreno no qual será percorrido um determinado trajeto. Nele encontramos algumas informações sobre o relevo, edificações, tipos de vegetação, trilhas e outros aspectos relevantes, além dos pontos de controle pelos quais deve-se passar. As bússolas (Figura 2) consistem em agulhas magnetizadas flutuando dentro de caixinhas transparentes, com uma das extremidades pintada de vermelho, a que aponta para o Norte. A bússula funciona como um ímã que se orienta segundo o campo magnético da Terra.

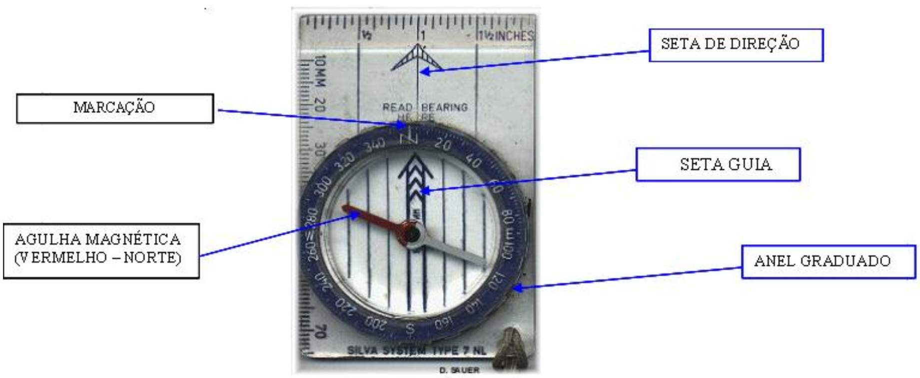
[1] `www.fundamentosdaorientacao.com.br`

Figura 1 – Mapa de Orientação



Fonte: `http://mapas.joaquimsousa.com/show_map.php?user=jsousa&map=224`

Figura 2 – Bússola

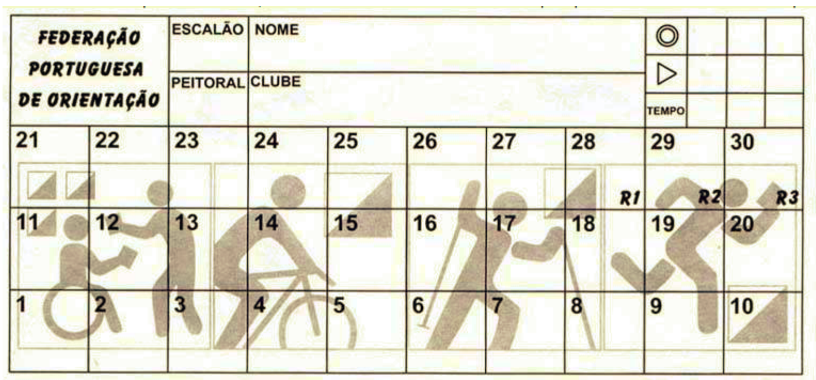


Fonte: `http://www.cmsm.eb.mil.br/index.php/gremios/orientacao`

Figura 3 – Prisma de Orientação

Fonte: `https://www.orientista.com.br/produto/38-prisma-oficial-para-orientacao`

Figura 4 – Cartão de Controle



Fonte: `http://www.cpoc.pt`

A atividade que sugerimos agora pode ser feita em conjunto com os professoes de Física, Geografia e História.

A biblioteca da Escola seria o local de trabalho ideal. Em buscas na internet, o professor deve explicar como melhor procurar informações, evitando páginas de baixa qualidade. Há páginas muito boas contendo também informações históricas.

- O que é o magnetismo? Era conhecido nas antigas civilizações? Quando surgiu a bússola?
  Sugestão: `https://en.wikipedia.org/wiki/Magnetism`
- Existem bactérias magnatotáticas?
  Sugestão: ler o artigo de revisão de pesquisadores brasileiros [5]
- Certas aves tem sensores magnéticos?
  Sugestão `http://www.ks.uiuc.edu/Research/cryptochrome/`

Atividade/Tarefa 2: Como a bússula funciona?

Voltando ao Esporte Orientação: quando um percurso é montado, vários pontos de controle são distribuídos no terreno por meio de Prismas (Figura 3), nas cores laranja e branca, que geralmente são pendurados a uma altura de 1,20 metros em relação ao solo. A largada de cada atleta é realizada num intervalo de tempo predeterminado. Os praticantes devem passar por todos estes pontos pré-estabelecidos. A ordem do trajeto que irá seguir entre um ponto e outro fica a cargo do orientista, porém a passagem pelos pontos de controles é obrigatória.

O cartão de controle (Figura 4) é um impresso onde consta a identificação do atleta. É através dele que a organização de uma prova verifica o término correto do percurso, uma vez que, encontrado o ponto indicado no cartão de designação, o orientista "picota" o cartão comprovando sua passagem por ele ou realiza anotações que constam no Prisma, ou ainda através de um controle eletrônico mais moderno.

A decisão do melhor itinerário é muito importante para o resultado. Na Figura 1, observa-se o desenho de uma pista com a saída no triângulo preto, vinte e dois pontos de controle (círculos em vermelhos) e a chegada (círculos concêntricos em vermelho). A bússola servirá para orientar o mapa com o norte magnético. As linhas traçadas em vermelho indicam a menor distância entre os pontos, mas normalmente esta informação não é indicada.

Utilizando a bússola, o orientista pode traçar o ângulo formado entre a direção Norte e a direção considerada (azimute) que varia de 0°a 360°. De posse dos equipamentos e no seu ponto de partida (triângulo em preto), o aluno vai decidir o melhor caminho a percorrer para atingir o próximo ponto, conforme o estabelecido no mapa de Orientação.

O tempo gasto para percorrer o trajeto depende da capacidade física do orientista, da habilidade de ler o mapa e da rapidez de se orientar utilizando técnicas estabelecidas, assim como das suas capacidades de adaptação ao terreno e da escolha correta dos itinerários. As características do terreno são bem diversificadas: areia, relevos mais ou menos acidentados, florestas mais ou menos densas, parques e, até mesmo, áreas urbanas.

Os percursos também são sempre variados e o grau de dificuldade varia de acordo com a categoria dos atletas, desde iniciante até elite, e conforme sua idade, entre 10 e 80 anos (ou mais!) Para que possamos medir a distância, aproximada, a ser percorrida pelo atleta entre os pontos no mapa de Orientação, usamos a Escala do mapa. Isto motiva a seguinte atividade.

> A Escala, como se sabe, é a razão da distância d entre os pontos na carta (em centímetros) pela Distância Real D no terreno ($E = d/D$).
>
> Olhar vários mapas e observar as suas escalas. Duas ótima fontes são o Atlas Geográfico Escolar do IBGE e o Atlas Nacional Digital
>
> `https://atlasescolar.ibge.gov.br`
>
> `https://www.ibge.gov.br/apps/atlas_nacional`
>
> Boa ocasião para uma colaboração com os professores de Geografia!
>
> Atividade/Tarefa 3: Escala do mapa

É um bom momento para discutir com os alunos porque não se pode esquecer de usar as mesmas unidades. O fracasso de uma missão não tripulada para Marte é um bom exemplo de que isto pode acontecer mesmo nas melhores famílias[2] .

2.2 BENEFÍCIOS PSICOLÓGICOS

A prática do desporto Orientação implica em identificar os problemas, buscar as melhores soluçẽs e agir. Este esporte exige a utilização contínua de raciocínios, produzindo efeitos psicosomáticos que melhoram o desempenho cerebral, ocasionada inclusive pela maior oxigenação do cérebro no momento de intensa movimentação corporal.

Soma-se ao fato que nas atividades esportivas e lúdicas a mente está mais receptiva ao aprendizado. A Orientação ambém exercita a capacidade de memorização.

São cinco fatores os fatores que devem ser levados em conta: o caminho, o terreno, as estações e o clima, a liderança e a gestão (ideia básica de Sun Tzu[3]).

A partir de um mapa a ser interpretado e um itinerário a ser imaginado, cada um é o senhor de si para decidir e resolver problemas, com a missão de chegar ao destino mais rapidamente que os demais e vencer. Assim estaria desenvolvendo a capacidade de defender, atacar, decidir, lùdicamente, contra supostos inimigos.

---

[2] `http://edition.cnn.com/TECH/space/9909/30/mars.metric.02/`
`https://www.latimes.com/archives/la-xpm-1999-oct-01-mn-17288-story.html`

[3] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Sun_Tzu`

Porém o melhor de tudo é que esta boa luta é principalmente contra si mesmo.

A Orientação é uma boa atividade esportiva também nos aspectos psicológicos: além de trabalhar com o raciocínio promove a manutenção do equilíbrio emocional. Estimula os alunos a aprenderem por si mesmos as técnicas necessárias a fim de enfrentar de forma eficiente os desafios diários.

É o próprio aluno quem vai tomar as decisões durante a sua busca ao prisma, fazendo uso racionalmente dos objetos (bússola e o mapa), das condições físicas do seu corpo e das condições do terreno natural. É uma maneira de fazer com que o aluno perceba que a melhor maneira de obter conhecimento é 'brincando".

A Orientação, como atividade, pode ter vários níveis. O professor deve estabelecer os seus objetivos mediante as condições físicas e técnicas, a idade e a meta a ser atingida. A publicação na Revista de Educação Física/EsEFEx sobre avaliação Física e Psicológica em atletas de Orientação Desportiva, vem corroborar com as ideias citadas, a saber:

> "Os índices referentes às Peculiaridades Tipológicas do Sistema Nervoso encontrados em atletas de Orientação são diferentes e mais elevados, quando comparados com os índices das Peculiaridades Tipológicas do sistema Nervoso, verificados em homens não-atletas. Também podemos verificar que o grupo de atletas em estudo possui grande semelhança a outros grupos de atletas de elite de diferentes modalidades esportivas. Quanto aos traços de Personalidade, os atletas de Orientação possuem tendência à extroversão e à estabilidade emocional, caracterizando-se, desta maneira, como indivíduos menos permeáveis ao medo do que pessoas não desportistas. Os valores encontrados nesta avaliação também são semelhantes aos resultados obtidos por atletas de elite de outras modalidades' [6].

Além dos diversos fatores elencados acima sobre a Orientação individual, podemos destacar os fatores cognitivos e afetivos na Orientação, ma modalidade coletiva. Numa equipe de Orientação se tem um homem-gerente, por um homem-bússola, um homem-ponto e dois homem-passo[4], podendo variar os quantitativos dentro destas funções. É praticada como um Grupo de Trabalho em busca de um objetivo comum.

Observa-se já na composição da equipe uma necessidade de trabalho em conjunto, sendo assim, pode ser aplicado também para as séries iniciais. Também podemos complementar essa composição de equipe, incluindo os alunos das séries mais avançados como homem-gerente, a fim de monitorar as atividades durante todo o percurso de Orientação, além de instruir os alunos mais novos nos primeiros percursos de Orientação.

A importância dos esportes na socialização das crianças é um fato mais que conhecido (ver [7] para um estudo quantitativo), fato que ratifica as ideias de Vigotski sobre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores na criança:

[4] É preciso no futuro mudar esta nomenclatura, deixando livre a identificação de gênero. Pedindo desculpas pelo sentido duplo, não seria melhor deixar livre declarar a "orientação"?

> Primeiro no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior da criança (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos [8].

O Esporte Orientação, como todos os esportes, é também um meio de inclusão social. Vale ilustrar com um fato ocorrido, nessa vertente, na iniciação de prática corporal no projeto "Aventura Orientação" realizado no Instituto Presbiteriano Álvaro Reis de Assistência à Criança e ao Adolescente (INPAR) - Projeto SOrriA (Serviços Orientados em Atividades Físicas e Esportivas):

> 'Um exemplo refere-se a uma aluna que ingressou no Projeto aos sete anos, e hoje é integrante da equipe de Orientação e professora do Projeto. Assim, em relação á transformação social, o Projeto SOrriA vem possibilitando aquisição e manutenção de saúde, na vertente de qualidade de vida, resgate įdadania, inclusão social, combate ǐolência e do crescimento da escolaridade, sem distinção de gênero, cor/raça/etnia, e considerando as pessoas com deficiência. Conclusão: Apesar da evidência empregada no Esporte Orientação, da proporção e importância que o esporte ocupou na vida dos alunos, e dentro do INPAR, vale ressaltar que o Projeto SOrriA diligencia em ampliar saberes, aumentar o repertório e vivências motoras, e estimular outras maneiras de fazer e pensar sobre o mesmo tema. E por meio da prática pedagógica empregada, estimular a autonomia dos alunos em suas práticas corporais, tornando-os sujeitos em meio ás manifestações da cultura corporal, e no que concerne á prática do Esporte Orientação, reforçar esta proposta de Educação Física crítica/democrática/cultural e contemporânea, seja nas aulas ou nas competições, valorizando a participação e desenvoltura dos alunos, e ampliando conhecimentos no propósito de dizimar (sic) a exclusão social' [9].

Em suma: a Orientação é um esporte completo, não só para a fase escolar, mas também para a vida. A prática desse esporte ensina os jovens a tomarem decisões e assumirem os riscos por elas causados.

A prática da Orientação ensina os jovens a se conduzirem na vida, já que é uma maneira de perceber a importância de avaliar e planejar antes de agir. É um esporte que não tem relação com o "mercado".

A este respeito, uma pergunta que não quer calar: e a nossa obsessão pelo futebol? Gonçalves Soares et. al. levantaram dados concretos sobre uma indústria das chamadas escolinhas de futebol [10]. Vale a pena ler e refletir sobre a adventência que fazem no final:

"O que os filhos das camadas populares perdem com o investimento no futebol?"

O Esporte Orientação não compete com a escolarização dos jovens.

Pelo contrário: os estimula a avançar nos estudos!

2.3 ORIENTAÇÃO E O ENSINO DA MATEMÁTICA

Tomamos como uma obviedade[5] o fato de que os alunos conseguem aprender de maneira mais eficiente e agradável quando notam a utilidade dos conceitos que estão sendo apresentados, através de aplicação concretas.

Para isso é interessante elaborar atividades práticas, e quando possível lúdicas, para facilitar a assimilação e o desenvolvimento dos temas e técnicas da Matemática.

Nesse sentido, apontamos a convergência deste TCC com os objetivos norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais [11], especificamente na parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Linguagens:

> "À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.
> [...] É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e Tecnologia."

Nossa idéia de aliar a Matemática com o desporto Orientação surge neste contexto.

O esporte Orientação está associado a vários conteúdos já presentes no Ensino Fundamental, tais como: *distâncias*, para saber quanto andar de um ponto até outro; *escalas*, para saber quantos centímetros no mapa correspondem á realidade; *ângulos*, noção intuitiva aos alunos, para determinar a direção correta a seguir. Entre um ponto e outro o atleta mirim poderá encontrar um ângulo agudo, reto ou obtuso.

Neste TC nos propomos a dar prosseguimento a algumas dissertações, artigos e relatórios que encontramos na nossa busca bibliográfica. Tomando estes trabalhos como ponto de partida, acrescentamos aqui o uso dos novos recursos tecnológicos, como o Google Earth.

As práticas que propomos podem ser iniciadas, com a devida simplicidade, já no Ensino Fundamental. No segundo ciclo, motivam o estudo da Geometria Euclidiana e, para os alunos mais talentosos, a Geometria Esférica e (uma introdução elementar) à Geometria Diferencial através da Cartografia.

Num plano mais concreto: a intenção desta monografia é possibilitar que os alunos utilizem várias TIC's, especialmente o Google Earth, através do esporte Orientação identificando e fixando os conceitos matemáticos utilizados. Acreditamos que a nossa proposta está em consonância com as tendências atuais em tentar tornar o ensino de Matemática mais atraente e motivador, podendo ser elaborado de maneira integrada com outras disciplinas, como a Educação Física, a Geografia, a Biologia e a Física.

[5] Infelizmente muitas vezes esquecida ou propositalmente negligenciada.

Segue uma breve revisão de dois trabalhos envolvendo o esporte Orientação. Na dissertação de mestrado de Adriana Hartmann [12] sobre atividades que realizou com alunos do 7°Ano no Colégio Militar de Brasília (CMB), seu relato sobre o dia em que foram levados a campo por uma primeira vez noa chamou muito a atenção. As seguintes atividades foram realizadas:

1. Aferição do Passo Duplo
2. Medindo Distâncias e Escalas
3. Pontos Cardeais e Rosa dos Ventos
4. Medindo Ângulos e tirando Azimutes
5. Regra de Três e Média Aritmética.

Segundo o relato, os alunos realizaram a aferição do passo duplo com bastante entusiasmo[6]. Alguns, inclusive, queriam fazer ràpidamente, para acabar antes dos colegas, como se fosse uma competição. Estes foram orientados pela professora a fazer em com calma, pois o objetivo era a precisão dos passos e não o menor tempo de execução.

Porém, no momento do cálculo da média aritmética, observou-se um fato que não foi previsto quando da elaboração da atividade: os alunos estavam com dificuldades na divisão de números decimais, conteúdo já visto na série anterior (6°ano). Este fato levou a professora a fazer uma breve retomada do conteúdo para posterior prosseguimento da atividade ([12], p.39). Uma proposta de inserção no currículo escolar foi aventada em [3].

O trabalho de Dandara Queiroga [13] relata a experiência com oito aulas no IFRN, no Campus Parnamirim, em uma turma do segundo ano do ensino médio integrado (33 estudantes, mista, idades de 15 a 21 anos), no período de setembro a outubro de 2013. Em relação ao conteúdo, um aspecto que nos pareceu muito interessante foi a preparação pelos alunos de representações cartográficas baseadas no manual ISOM (International Specification for Orienteering Maps).

[6] Esta afericção consiste em contar quantas vezes o pé direito toca o solo em uma determinada distância (conhecida), em geral até 100 metros

3 GOOGLE EARTH E GPS

Para dar início ao nosso projeto, é necessário conhecer um pouco sobre o aplicativo Google Earth. Além de estar disponível gratuitamente para computadores, também está disponível para *smartphones*. Basta baixá-lo do site

`https://www.google.com.br/intl/pt-BR/earth/`

Para o celular, o Google faz a facilitação dos seus aplicativos através do Google Play (`https://play.google.com/store/`). Vale a pena instalar também o Maps.

Uma vez que o Google Earth tenha sido carregado, uma tela semelhante a que é mostrada na Figura 5. *Esta inserção tecnológica (em lugar da bússola e dos mapas de Orientação) nos parece uma favorece boa ferramenta de aprendizagem nas aulas de Matemática, principalmente para o Ensino Médio.*

Posteriormente os alunos começarão também a trabalhar intuitivamente com o GPS a partir de atividades de Orientação desportivas no terreno urbano em torno da escola. *Com certeza vários se tornarão adeptos do Esporte, voltando a usar a bússola e mapas em papel nos treinos e competições sem o uso dos Apps.*

Apostamos que os alunos terão bastante interesse nestas atividades práticas envolvendo tecnologia. Terão inúmeras aplicações, muito além da desportiva que focamos nesta monografia. Para o uso do Google Earth em geografia, encontramos a referência [**?**].

Figura 5 – Tela inicial do Apps Google Earth

Fonte: Próprio autor

Os aplicativos serão usados para montar um *mapa de situação* na seção 3.3. Não precisaremos utilizar técnicas elaboradas ou programas comerciais específicos, onde há necessidade de maiores conhecimentos técnicos[a].

Os controles de navegação do aplicativo podem ser apresentados de maneira progressiva aos alunos por meio de um projetor, para que eles possam acompanhar e aprendez a utilizar de maneira prática nos seus celulares. Caso existam alunos que não os possuam, ou a critério do professor, as atividades podem ser realizados em grupos.

Torna-se uma possibilidade que não requer grandes recursos, bastando a instituição disponibilizar o sinal do Wi-fi.

Atividade/Tarefa 4: Instalação dos aplicativos

[a] Como no software Autocad, que possui ferramentas para elaboração de desenhos e mapas.

3.1 CARACTERÍSTICAS DO GOOGLE EARTH

Na elaboração dos mapas fotográficos no Google Earth são utilizadas três fontes: imagens de satélite, de avião e fotos tomadas em carros. A grande inovação do sofware é que a montagem dessas diferentes fontes de imagens possibilita ao usuário do programa aproximar-se ou distanciar-se do local pretendido. Deste modo, o aplicativo promove subsídios para uma análise mais profunda do local estudado e das dinâmicas naturais, sociais, econômicas e ambientais. Ou seja: possibilita o aluno realizar tanto o reconhecimento mais próximo dos locais que estão ao seu redor quanto conhecer de perto os lugares mais distantes do planeta!

A visualização destes locais tão distantes, por meio do software, também pode melhorar a aprendizagem dos alunos, pois permite que as aulas possam ir muito além da descrição e explicação teórica da organização espacial de um país. Sendo assim os alunos poderão entender melhor o meio onde vivem, ou o meio estudado, passarem a utilizar os recursos tecnológicos como algo útil no cotidiano, antes visto pelos alunos apenas como diversão e entretenimento.

A versão Pro do Google Earth possui recursos mais avançados e é mais adequada para fins profissionais e comerciais. E a versão Enterprise é uma solução totalmente corporativa, que pode rodar independentemente da internet, sob o Firewall das empresas. Portanto, ao se familiarizar com o Google Earth básico, o aluno toma conhecimento de ferramentas que estão sendo difundidas no Mercado de Trabalho.

> "O aplicativo Google Earth atual permite que você viaje pelo mundo por meio de um globo virtual e visualize imagens, mapas, terrenos, construções em 3D e muito mais via satélite. Com o rico conteúdo geográfico do Google Earth, você pode ter uma experiência muito mais realista de visualização do mundo. Você pode voar até o seu lugar favorito, procurar empresas e até mesmo navegar pelas rotas tanto em 2D ou 3D[1].

3.2 O INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) criou uma ferramenta de visualização baseada no Google Earth Para imagens do território brasileiro.

`http://satelite.cptec.inpe.br/googleimg/`
`http://satelite.cptec.inpe.br/home/index.jsp`

bastando o usuário fazer um cadastro inicial. O INPE disponibiliza gratuitamente para todos os interessados dados e produtos meteorológicos gerados a partir das fotos de satélites. Façamos uma rápida digressão sobre este Instituto.

O INPE foi criado em 1961 com o objetivo de capacitar o país nas pesquisas cientificas relacionadas com as tecnologias espaciais. Ao longo dos anos, suas atividades tornaram-se mais extensas. O interesse dos estudos atualmente vão desde questões astrofísicas, com a origem do Universo à utilização de diversas ciências de maneira multidisciplinar nas questões de desflorestamento por queimadas e atividade madeireira.

O Instituto é um Centro de Excelência, referência internacional em pesquisas de ciências spaciais e atmosféricas, engenharia espacial, meteorologia, observação da Terra por imagens de satélite e estudos de mudanças climáticas.

No início dos anos 1970, com a ampliação das atividades do Projeto SERE, o Brasil era o terceiro país no mundo a receber imagens do satélite LANDSAT-1. Essa iniciativa precursora abriu caminho para investimentos nos anos 1980, que permitiram a recepção de dados dos satélites das séries Satellite Pour l'Observation de La Terre (SPOT) e Earth Resource Satellite (ERS-1).

Em 2004, o INPE lançou o sistema de Detecção de Desmatamento em Tempo Real (DETER), também voltado para a região amazônica, que mapeia diariamente as áreas de corte raso e de processo progressivo de desmatamento por degradação florestal. Trata-se de um levantamento mais ágil, que permite identificar áreas para ações rápidas de fiscalização e controle do desmatamento.

Um marco importante para a história do Brasil no combate ao desmatamento ilegal e na política de preservação da vegetação no país foi o lançamento, pelo Ministério do Meio Ambiente, em 27/11/2015 (Portaria 365), do Programa de Monitoramento Ambiental dos Biomas Brasileiros, usando a tecnologia de satélite.

[1] Esta citação é parte integrante da Central de Ajuda ao Google Earth publicada na internet.

Esse programa tem o objetivo de mapear e monitorar a vegetação de todos os biomas nos mesmos moldes do que já é feito para a região da Amazônia. A abrangência do programa envolve, além do bioma Amazônia, os biomas Caatinga, Cerrado, Mata Atlântica, Pampa e Pantanal.

Percebe-se importância dos dados do INPE para a sustentabilidade do Meio ambiente, tendo como consequência, enorme influência nas decisões políticas baseadas nos seus relatórios[2].

O Brasil, sendo um país grande e diverso, enfrenta um grande número de questões relacionadas com o uso sustentável de seus recursos naturais. O geoprocessamento é essencial para o monitoramento de tais recursos. Investimentos significativos têm sido feitos para o desenvolvimento e a utilização de tecnologias de sensoriamento remoto e geoprocessamento, principalmente no Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Assim como podemos perceber por meio do seu Plano Diretor 2016-2019:

> A sociedade brasileira se beneficia dos resultados das pesquisas em sensoriamento remoto e geoinformática por meio do acesso às informações e produtos gerados no contexto dos programas e projetos apoiados pelo INPE, acesso aos softwares livres para tratamento de informação geográfica e processamento de imagens, sua capacitação no uso das metodologias e softwares produzidos e até mesmo pela absorção de conhecimento e sua transformação na produção de novos negócios no setor privado. ([14], 2016, p.69)

Imagens de satélite do INPE

Atualmente as imagens são capturadas pelo satélite Landsat 8, da NASA (National Aeronautics and Space Administration) e processada no Brasil pelo INPE, que distribui de forma gratuita. O satélite atual destaca-se dos anteriores pela alta resolução da imagem, pois as fotos selecionadas não têm interferências de nuvens na paisagem, o que deixa o mapeamento com cores mais vivas e com melhor qualidade. Como mencionamos, existe uma parceria do INPE com o Google Earth, para visualização de forma iterativa.

O Landsat 8 está na órbita da terra desde 2013 e integra o mais recente equipamento do "Landset Program", comandado pela NASA e a USGS (United States Geological Survey) órgãos do Governo dos Estados Unidos. Cabe ressaltar que a Divisão de Geração de Imagens (DIDGI), da Coordenação-Geral de Observação da Terra (CGOBT), do INPE, é responsável pela recepção, processamento, armazenamento e distribuição de imagens de sensoriamento remoto, meteorológicos e ambientais adquiridas por satélites.

---

[2] Em decorrência dos fatos amplamente noticiados a partir do dia 19 de julho de 2019, há grande preocupação da Academia Brasileira de Ciências e da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência quanto à salvaguarda da transparência dos seus estudos e resultados, especialmente sobre o meio ambiente (nota de responsabilidade do Orientador).

Sugestão para trabalho de grupo. A atividade deveria ser feita em conjunto com professores de outras disciplinas, Seguem algumas páginas apenas como sugestão. Os alunos devem procurar noticias mais atualizadas.

`https://g1.globo.com/natureza/noticia/2019/07/23/entenda-como-o-inpe-monitora-a-amazonia.ghtml`

`https://globoplay.globo.com/v/7787943/`

`http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes`

`http://www.obt.inpe.br/prodes/dashboard/prodes-rates.html`

`http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/deter`

`http://www.inpe.br/noticias/noticia.php?Cod_Noticia=5138`

`http://www.dpi.inpe.br/prodesdigital/prodesmunicipal.php`

`http://www.obt.inpe.br/cerrado/`

Para visualização no Google Earth:

`http://queimadas.dgi.inpe.br/queimadas/portal/videoaulas`

A fototeca se encontra em

`http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/fototeca/fototeca-google-earth`

Atividade/Tarefa 5: Desmatamento e Queimadas na Amazônia - dados do INPE

3.3 UMA AULA SOBRE O O GOOGLE EARTH

Os menus que permitem o acesso às funcionalidades essenciais do Google Earth estão nas três barras horizontais[3]. A versão que usamos contém as seguintes opções: viajantes, meus lugares, estilo do mapa, fotos, conFigurações, feedback, ajuda, tutorial, termos de serviços, política de privacidade e licença de código aberto.

A *lupa* serve para pesquisar Lugares, que permitem a localização dos locais nos quais você deseja obter imagens. O *leme* visualiza os itinerários de vários lugares realizados por turistas, expositores e dentre outros, ou seja, viajar pelo mundo sem sair de casa.

O *dado* irá apresentar uma relação de cidades turísticas. A *régua*, que iremos utilizar bastante com os alunos, produz a distância entre os pontos selecionados.

Os três pontos verticais contém as seguintes opções: *meu local, compartilhar link e criar cartão postal.* Na parte de baixo da tela: o boneco que após o clique sobre este ícone mostra as ruas que você pode navegar em 3D e a bússola.

[3] Não haverá pressa aqui: serão dadas quantas aulas forem necessário. Mas nossa experiência com a “geração Z” é que dominarão (se já não sabem) todas as funcionalidades do Google Earth muito ràpidamente, sem nenhuma necessidade de maiores explicações. Portanto esta seção é destinada mais ao professor. Principalmente para que aponte aos alunos a importância de procurar entender o que está “debaixo do capô”.

Posteriormente, colocando o *meu local* a ser pesquisado, vamos visualizar na tela, conforme Figura 6, a opção *imagens capturadas* para visualização em 3D, a bússola e o *boneco*. Também notamos que todas podem ser dimensionadas com toque na tela, assim como acompanhar o itinerário. Basta rolar a tela do celular.

Cabe ressaltar o *voo 3D*, conforme as Figuras 7 e 8, uma das ferramentas mais interessantes para conhecer detalhes do mundo. Além de visualizar o lugar do alto, a função possui mais de uma dimensão a fim de renderizar visuais muito realistas das regiões. Ao pesquisar o Estádio do Maracanã, por exemplo, é possível observar o monumento de vários ângulos e perceber até mesmo a textura das superfícies, para os olhos mais detalhistas.

A utilização desses recursos tecnológicos permite aos alunos uma melhor identificação de fatores relacionados ao estudo do meio, permite definir o caminho a ser trilhado antecipadamente, com a possibilidade de criar sua própria estratégia de ação.

O Google Earth permite visualizar os locais antes de chegar fisicamente, com riquezas de detalhes. Seria possível conceber um jogo em que os participantes fariam uma corrida de Orientação virtual?

Veja-se por exemplo o software descrito em
`https://lab.rekimoto.org/projects/jackinairsoft/` ([15]).

Posteriormente, numa competição real entre times, alunos com deficiência motora poderiam inclusive desempenhar a função de pessoa-líder.

Atividade/Tarefa 6: Jogo “Orientação”

USANDO O GOOGLE EARTH

Ao clicar no “meu local’, o aplicativo vai buscar o ponto que o celular se encontra neste instante, apresentando um círculo azul na tela do celular. Se for este o ponto que queira encontrar a coordenadas (latitude, longitude), basta manter pressionada a tela do celular no círculo azul até “alfinetar“ o ponto indicado, conforme aparece nas Figuras 9 e 10, a fim de encontrar a *latitude e longitude* do ponto locado.

Muitos (se não todos) alunos não saberiam bem o que significa latitude e longitude. O professor assim os motivará para a aula que dará sobre cartografia (seção 4.4) e para o cálculo de distâncias (seção 4.3). A seu critério, poderá intercalar os temas.

Figura 6 – Imagem do Maracanã, visto de cima

Fonte: Próprio autor

Figura 7 – Imagem Maracanã, perspectiva

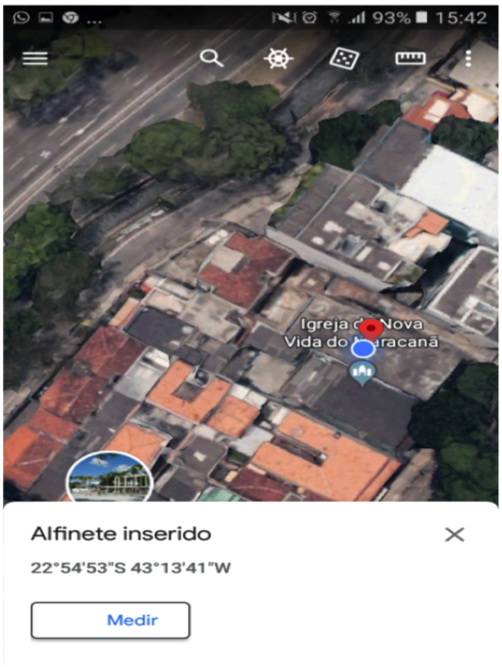
Fonte: Próprio autor

Figura 8 – Imagem 3D AvenidaMaracanã

Fonte: Próprio autor

Depois de locados os dois pontos, será apresentada na tela do celular a distância entre os dois pontos (A e B), conforme a Figura 11. Para reconfirmar os resultados obtidos no Apps Google Earth, que são realizados em *coordenadas geográficas* podemos por exemplo acessar o site do INPE `http://www.dpi.inpe.br/calcula/`, e colocar os dados da latitude e longitude das Figuras 9 e 10 conforme a Figura 12.

Figura 9 – Ponto definido A



Fonte: Próprio autor

Figura 10 – Ponto definido B

Fonte: Próprio autor

Calculadora geográfica do INPE e pelas projeções UTM

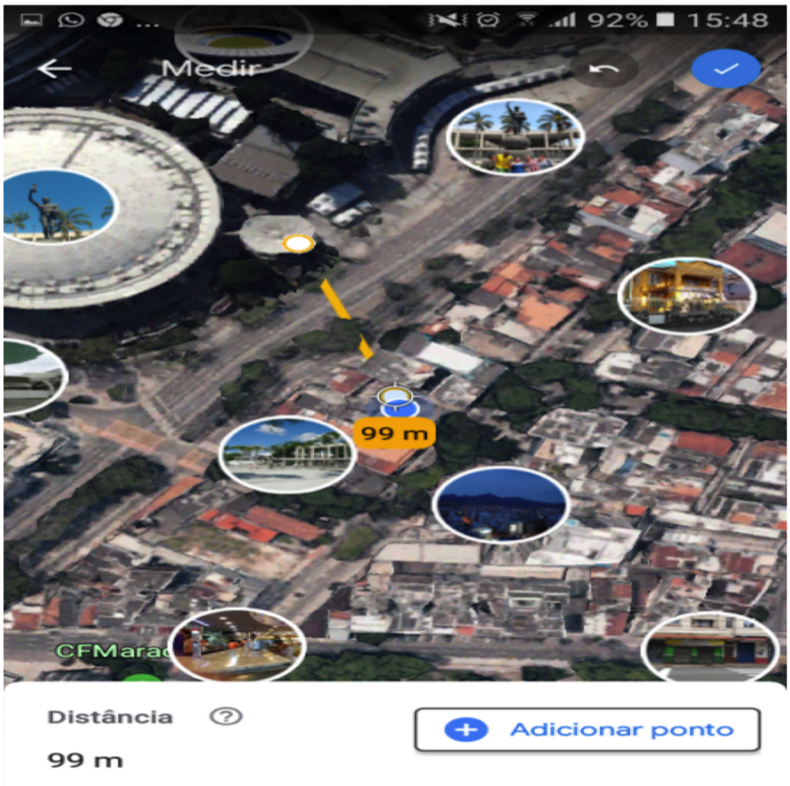
O professor deve aproveitar a oportunidade para explicar algumas das opções da calculadora geográfica do INPE[a]. Poderia contar aos alunos como se fazia antes da era da internet. Por exemplo, havia um tal guia Rex, com mapas de ruas, mostrando pequenos pedaços da cidade em cada página. As distâncias podiam então ser estimadas com uma régua, usando a escala.

Será portanto interessante comparar o calculo de distância, feito através de uma carta, por exemplo as projeções UTM. Esta atividade está descrita na seção 4.5. Numa região não muito extensa, o êrro ao usar a régua e a escala do mapa seria aceitável ao estimar a distância entre cidades no Brasil. Um bom momento também para recordar o teorema de Pitágoras e chegar a fórmula da distância em coordenadas.

Atividade/Tarefa 7: Calculadora geográfica do INPE e pelas projeções UTM

[a] O orientador confessa que não as conhecia, mas o candidato lhe explicou.

Figura 11 – Distância entre os pontos definidos



Fonte: Próprio autor

3.4 UMA PRÁTICA DESPORTIVA NA ESCOLA

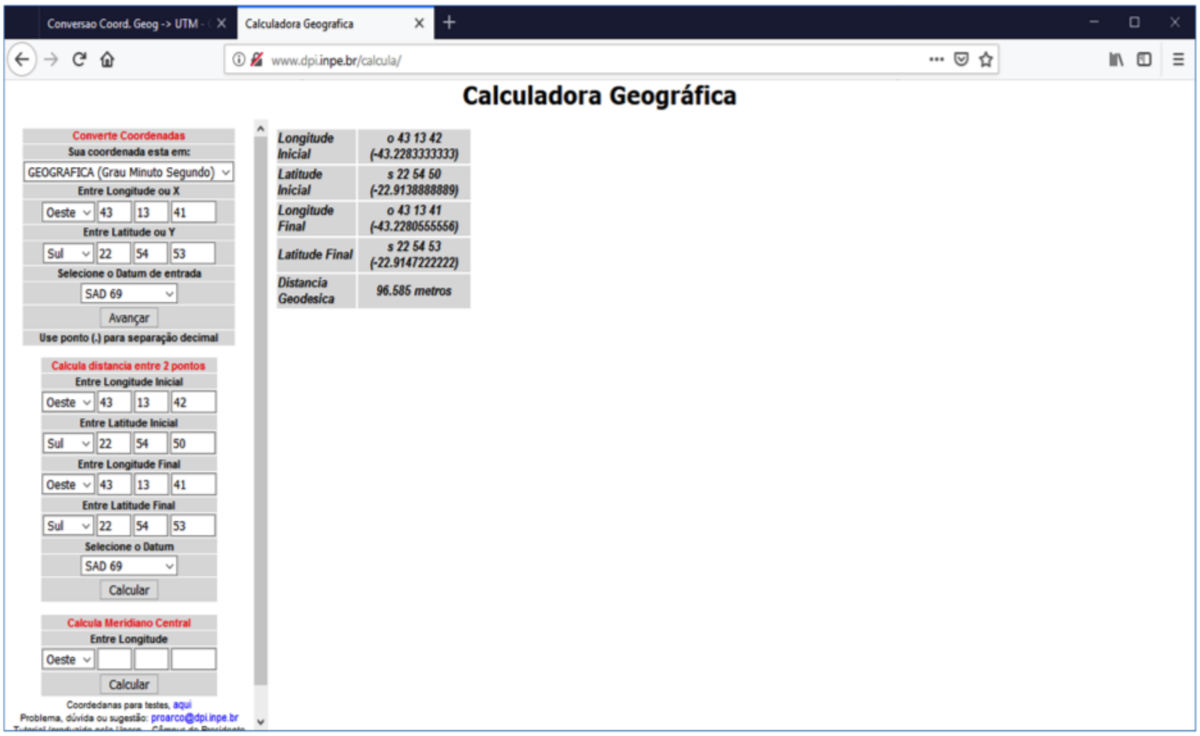
Como podemos criar atividades desportivas utilizando os recursos tecnológicos para introduzir a Orientação desportiva aos alunos? Segue uma proposta. Vamos montar um percurso a ser desbravado e os pontos a serem definidos. Primeiro, o professor junto com seus alunos escolhem o local para construir o *mapa de situaçao*. Suponhamos que seja o entorno do local escolar.

Clicando no ícone '*régua*, vai aparecer na tela um círculo para definir qual será o ponto escolhido. Basta arrastar o local pré-definido sob o círculo. Verifica-se que na parte de baixo da tela do celular aparece *adicionar ponto*. Clicando sobre este ícone, vai ser definido o ponto "zero".

Para definir qualquer outro ponto, basta arrastar novamente a tela sob o círculo, que inclusive já apresenta a distância real entre os pontos. Cllicando sobre o "adicionar ponto", nota-se que a linha entre os pontos apresenta-se "amarelada", indicando que o ponto foi fixado no mapa de situação.

Daí em diante, basta repetir essas ações. Desejamos que a Pista montada seja elaborada em circuito fechado, ou seja, o ponto inicial e o último ponto sejam coincidentes.

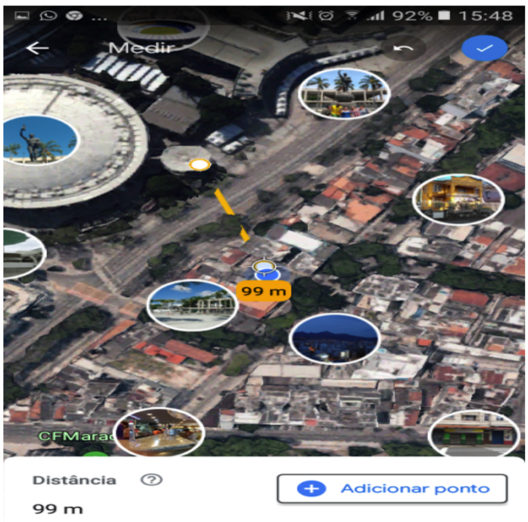
Figura 12 – Imagem da tela do aplicativo do INPE para distâncias



Fonte: Próprio autor

Para isto usa-se a opção: *fechar forma* conforme Figura 10, resultando a pista montada com o seu perímetro. Finalizando, faz-se um print screen da tela. Atualmente basta apertar e manter pressionado, ao mesmo tempo, o botão de desligar do aparelho e também o do botão para diminuir o volume, armazenando assim na memória do celular o o mapa de situação com o percurso.

Figura 13 – Marcação do ponto inicial



Fonte: Próprio autor

Vamos dividir ou selecionar os grupos de Orientação conforme os aparelhos celulares que estão disponíveis na turma de aluno, desde que com as devidas autorizações dos pais, se forem o caso. O professor deverá enviar o “mapa de situação“ por meio dos celulares (e-mail ou bluettooth) somente no ponto de partida inicial ou marco “zero“, ou melhor, no momento de largada de cada grupo definido. Isto a a fim de evitar troca de conhecimentos do percurso, antes de iniciar a marcação do cronômetro.

Cada grupo de Orientação, quando estiver de posse do mapa de situação e do cartão de controle, conforme Figuras 11 e 12, fará a sua largada no ponto definido pelo professor. O grupo vai usar os recursos do Google Earth apps, que já foi exposto pelo professor conforme citado acima na seção 3.3.

Será vitoriosa ou campeã aquela equipe que realizar o percurso no menor tempo possível. Além de enviar a imagem da pista situação para o aluno, o professor irá construir um cartão de controle simples, por exemplo conforme a Figura 11.

Uma atividade que pode ser de muito bom proveito é pontuar as anotações feitas dos diversos problemas bem conhecidos nas zonas urbanas (lixo, vazamentos de esgoto, sinais desligados, etc.).

Para isso é fundamental ter na área no entorno da pista de Orientação uma supervisião. É muito importante conseguir a autorização e o apoio das autoridades..

Atividade/Tarefa 8: Atividade externa

O propósito da descrição abaixo dos pontos de controle (Figura 15) é dar aos alunos maior precisão das características dos pontos dados pelo mapa de situação e a localização do prisma.

Caracteristicas do Cartão Controle

Coluna (1) - Número do ponto de controle.

A numeração dos pontos é na sequência em que eles devem ser visitados, a menos que seja para uma modelo “livre“.

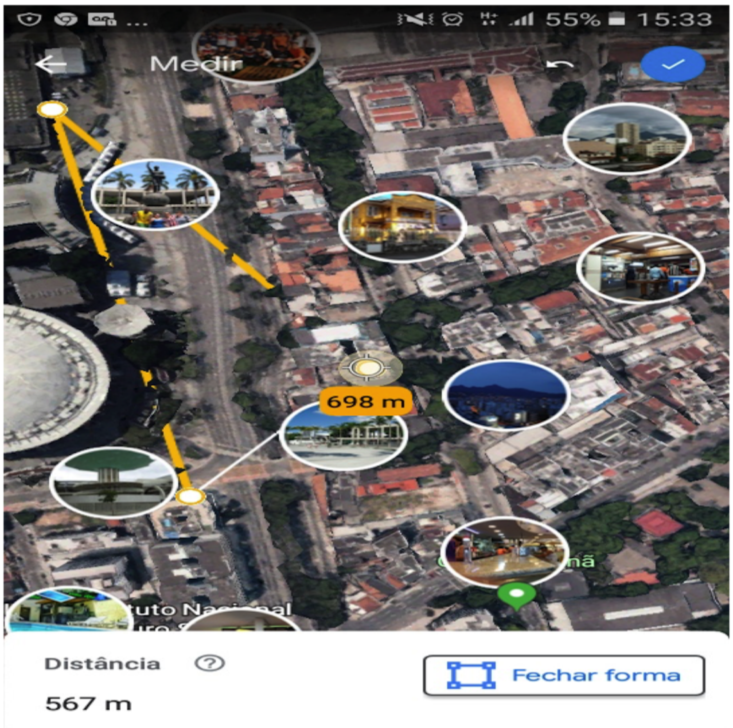
Coluna (2) - Objeto do ponto de controle.

O objeto, como mostrado no mapa, na intersecção dos segmento linear define a área do ponto de controle.

Coluna (3) - Identifica de maneira mais precisa o local do prisma.

Coluna (4) - Após encontrar o ponto, o aluno escreve a palavra encontrada no ponto ou picota.

Figura 14 – Marcação dos pontos



Fonte: Próprio autor

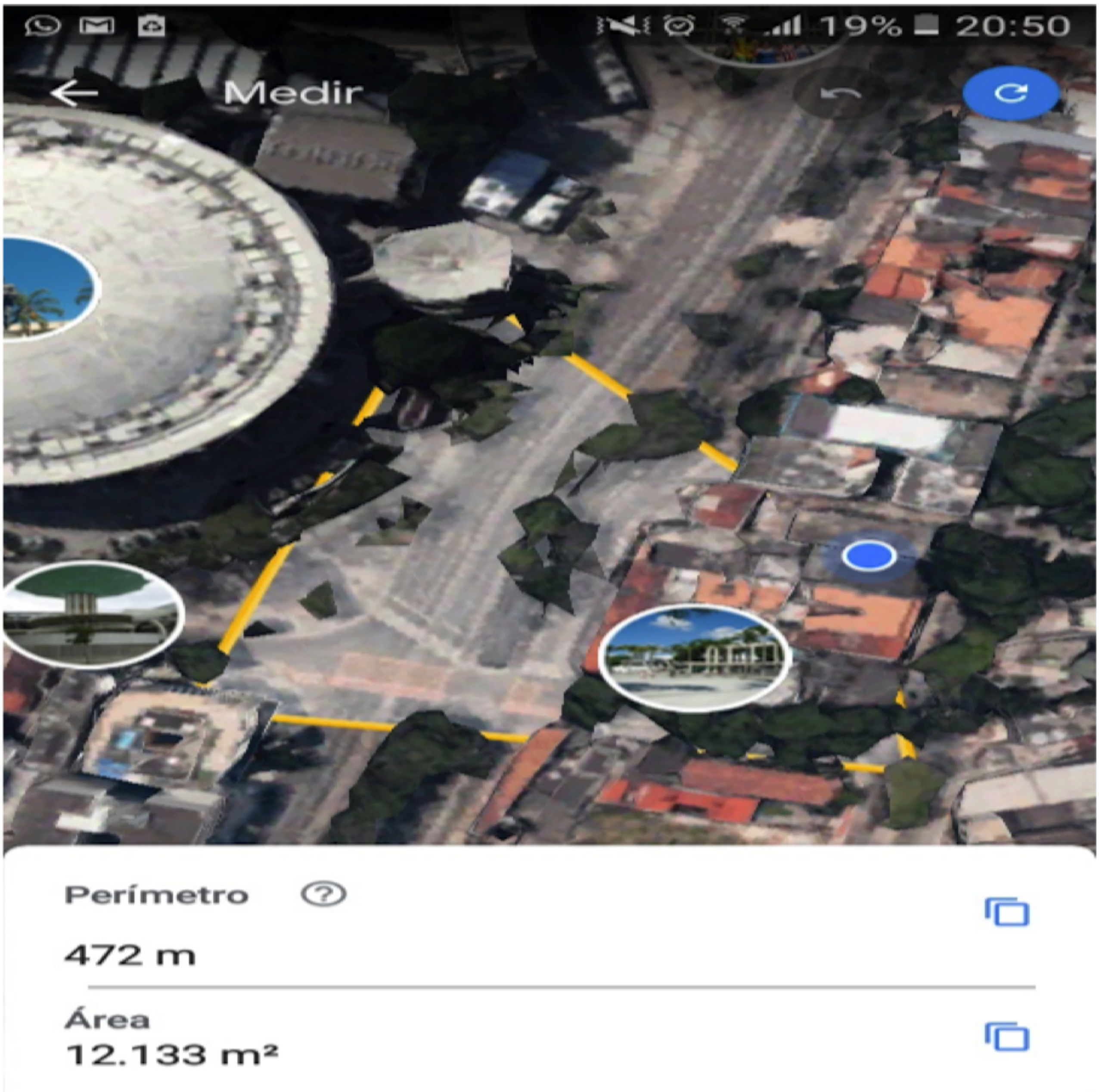
Figura 15 – Modelo de Descrição dos Pontos de Controle

Pontos (1)	Objeto (2)	Descrição do objeto (3)	palavras de controle (4)
A	Igreja	Na parte Sul	
B	Obeliche	Próximo ao muro na parte inferior	
C	Instituição de caridade	Na grade inferior, do lado norte	
D	Arbusto	No lado sul do tronco	
E	Igreja	No Muro lateral oeste	

Fonte: Próprio autor

Sugerimos que cada ponto importante no terreno definido no mapa de situação seja identificado por algo visível (prisma de Orientação). Uma idéia: pode ser feito por etiquetas contendo palavras que juntas com outros pontos formem uma frase. Exemplo: Ponto 1 - Matemática, Ponto 2 - Orientação, ponto 3: e Tecnologia, ponto 4: de mãos, ponto 5: Dadas.

Figura 16 – Mapa de situação final



Fonte: Próprio autor

4 TÓPICOS PARA A SALA DE AULA

4.1 LATITUDE E LONGITUDE

Uma das primeiras questões que podemos provocar nos alunos, *ainda nas séries iniciais,* é a seguinte: como é calculada a distância entre os pontos que aparece automaticamente na tela do celular, como a que apareceu no mapa de situação no entorno do Maracanã? Por exemplo no perímetro da pista (Figura 16).

Podemos usar um mapa da cidade em escala e medir com um régua. Aqui o "terraplanismo" não faz mal $\cdots$ Mas o que devemos fazer quando queremos medir distância entre cidades distantes no país ou de países diferentes?

Para isto, recisamos abordar (ou reforçar), os conceitos de longitude (θ) e latitude (ϕ). O mais difícil será ensinar as letras gregas. Imaginamos o planeta Terra como se fosse uma esfera perfeita. Por cada ponto passam duas linhas virtuais, chamadas meridianos e paralelos. Os meridianos são linhas que "cortam" o planeta do Polo Sul ao Polo Norte. O meridiano base é o de Greenwich. Por sua vez, os paralelos são linhas círculos que "cortam" o planeta paralelamente ao equador, cada vez menores a medida que nos aproximamos dos polos. A Linha do Equador divide o planeta em dois hemisférios[1].

A latitude ϕ é a distância angular de um ponto qualquer do planeta em relação á linha do Equador. Os alunos devem perceber que a latitude ϕ varia de -90 a 90 graus. Se quisermos evitar o sinal de menos, um ponto localizado na parte Norte é indicado com N (do inglês north). Um ponto localizado no sul é indicado com S (do inglês south).

A longitude θ é a distância angular de um ponto qualquer da Terra em relação ao meridiano de Greenwich. Em valor absoluto variam $180 graus$ dos dois lados deste meridiano. Pontos localizados no lado leste são indicados com E (do inglês east), enquanto que os pontos no lado oeste são indicados com W (do inglês west).

Sendo assim, para se obter a localização de um determinado ponto na Terra depende da intersecção dos dados de latitude e longitude. Cabe ressaltar que são fornecidos, por padrão, em graus (°), minutos (') e segundos (").

O Google Earth apresenta os seguintes dados para o Maracanã: 22°55'04"S, 43°14'01"W e 353m.

---

[1] Poderiam discuti-los entre eles mesmos. É importante motivar os alunos a trocar ideías entre si. Aqueles que se interessarem certamente podem ir mais longe e ajudar os colegas. Os educadores discutem bastante a taxionomia de Bloom. Em palavras cruas, significa aprender "de baixo para cima'. Nos perguntamos se, em vez disso, poderiam êles começar em qualquer lugar (até mesmo pelo fim) e descer ao mais básico quando precisassem de algum conhecimento sobre um tópico? Como diz Bergman e Sams: "Descobrimos que ambas as abordagens funcionam; isso depende apenas do aluno e do objetivo de aprendizado" [16].

Os alunos podem ser desafiados a pensar: porque normalmente o hemisfério norte é representado nos mapas pela parte de cima e o lado sul pela parte de baixo? Isto é discutido aqui:

`https://en.wikipedia.org/wiki/South-up_map_orientation`

A Figura 18 é uma famosa foto tirada pelos autronautas da Apollo 17. Posteriormente a NASA virou a foto de cabeça para baixo.

Aqui também é um bom momento para desafiar os alunos a pensarem no sistema solar, na rotação da Terra em torno de si mesma e em torno do Sol. Uma sugestão: dizer aos alunos para fingir que pudessem pilotar uma espaçonave rapidissima e olhar o sistema solar "de cima" (isto é, " vendo" o polo Norte).

A volta ao mundo em 80 dias.

Qual o motivo para a convenção E e W para a longitude? Tem relação com o movimento aparente do Sol? Como fica o leste e o oeste, o sul e o norte na Figura 13?

Um bom filme para ser mostrado, é *Volta ao Mundo em 80 Dias*, filme de 1956. Não sabemos se a refilmagem em 2004 vale a pena, pois a de 1956 ganhou tudo: Oscar de melhor filme, melhor roteiro adaptado, melhor montagem, melhor fotografia, e melhor trilha sonora. Cantinflas, ganhou o Globo de Ouro como melhor ator.

Phileas Fogg (David Niven), Passepartout (Cantinflas) e a princesa Auda (Shirley MacLane), depois de completarem o percurso e e retornarem a Londres sempre na direção sempr na direção leste tinham pensado que perderam a aposta por uma dia.

O subdesenvolvido Passepartout percebeu o que tinha acontecido. O fleumático britânico pode chegar no clube ao soar o último "strike" do Big Ben!

Atividade/Tarefa 9: A volta ao mundo em 80 dias

Figura 17 – Planisfério. Faz sentido ou não achar que está de cabeça para baixo?

Fonte: `http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=56288`

4.2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Como a posição na superfície da Terra é identificada? São utilizados sistemas de referência Terrestres ou Geodésicos. O nosso planeta não é uma esfera perfeita. Assim, na geodesia considera-se uma superfície que aproxima a forma da Terra, e sobre a qual são desenvolvidos todos os cálculos das suas coordenadas. Três superfícies são consideradas: Física, Geóide e Elipsóide:

• Superfície física: A superfície física da Terra (superfície topográfica ou superfície real) é uma superfície entre as massas sólidas ou fluídas e a atmosfera. Esta superfície contendo os continentes e o fundo do mar é irregular e é portanto impossível representa-la por uma fórmula matemática.

• Superfície geoidal: O modelo geoidal é definido teoricamente como sendo o nível médio dos mares em repouso, prolongado através dos continentes (`https://pt.wikipedia.org/wiki/Geoide`). É um modelo intermediário.

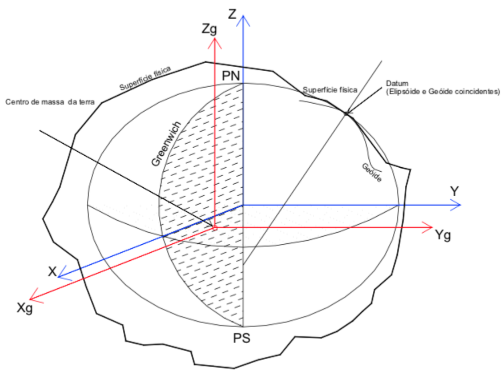
• Superfície elipsoidal: é o mais usual de todos os modelos. Nele, a Terra é representada por uma superfície gerada a partir de um elipsóide de revolução. Dado que a Terra é ligeiramente achatada nos pólos e se alarga mais no equador, a Figura geométrica regular usada em Geodésia e que mais se aproxima de sua verdadeira forma é o elipsóide de revolução oblato. Este elipsóide de revolução é a Figura que se obtém ao se rodar uma elipse em torno de seu eixo menor. Assim, um elipsóide de revolução fica definido por meio de dois parâmetros, os semi-eixos a (maior) e b (menor).

Figura 18 – “Blue-Marble”: foto tirada da Apollo 17

Fonte: `https://pt.wikipedia.org/wiki/The_Blue_Marble`

Sendo assim, as *coordenadas geodésicas* de um ponto sobre o elipsóide ficam assim definidas. *Latitude Geodesica ou Geográfica*: ângulo que a normal forma com sua projeção no plano do equador, sendo positiva para o Norte e negativa para o Sul. *Longitude Geografica* : ângulo diedro formado pelo meridiano geodésico de Greenwich (origem) e do ponto P, sendo positivo para Leste e negativo para Oeste. No Brasil, o atual Sistema Geodésico Brasileiro (SIRGAS2000 - Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas) adota o elipsóide de revolução GRS80 (Global Reference System 1980). A origem do sistema cartesiano no espaço é geralmente tomada no centro de massas da Terra (geocentro), as coordenadas são denominadas de *geocêntricas*, usualmente utilizadas no posicionamento de satélites, como é o caso do WGS84, SIRGAS 2000 e SAD69.

Figura 19 – Representação física e ideal da terra



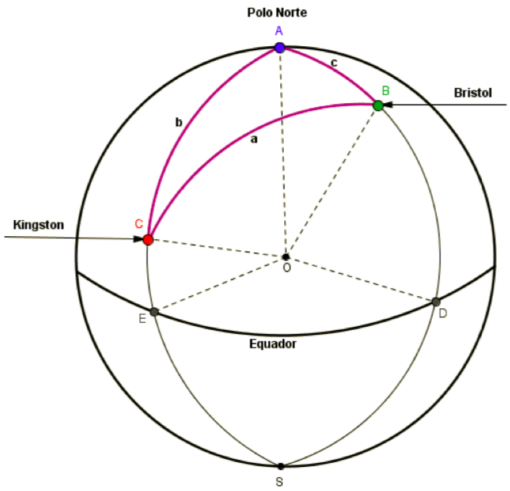
Fonte: [17]

4.3 DISTÂNCIA NA GEOMETRIA ESFÉRICA

Que tipo de curva desenhada numa esfera daria a menor distância entre dois pontos? Certamente os alunos vão saber responder. Sugerimos desenhar numa bola de basquete ou de voleibol (e depois irmos jogar na quadra). Na geometria Euclidiana a distância é o comprimento de um segmento de reta que une os entre dois pontos. Na Esférica é o comprimento do arco do grande círculo que os conecta.

Não entraremos em detalhes, pois o tema já foi tratado em outras monografias do Profmat, por exemplo, [18], [19], [20], [21]. Concordamos com os colegas: é um tópico que certamente pode atrair muito interesse dos alunos. Seria muito bom que a discussão pudesse ser acompanhada com o professor de História, para um estudo sobre a Astronomia desde a Antiguidade às grandes navegações. Umaa boa referência seria um clássico livro de divulgação da Matemática, infelizmente um tanto esquecido: Lancelot Hogben, *Mathematics for the Million* [22][2].

Figura 20 – Distância entre dois pontos



Fonte: Zanella, [19]

[2] Disponível online em `https://archive.org/details/HogbenMathematicsForTheMillion`. Existe uma tradução publicada em 1946 pela Editora Globo [23], que talvez possa se ainda encontrada na Estante Virtual.

Se andarmos 31 metros na superfície da terra teremos caminhado um segundo de arco. Um grau nos faz andar 111,3 quilômetros. Então a circunferência da Terra é 111,3 x 360, o que dá aproximadamente 40 mil quilômetros. Um carro roda fàcilmente esta distância num ano.

Sejam P_1 e P_2 dois pontos em uma esfera de raio R. Se não são antípodas, existe um único arco de grande círculo que produz a menor distância entre ele. O comprimento é dado por $R\Phi$, onde Φ é o angulo entre os segmentos OP_1 e OP_2. Se conhecermos as latitudes e longitudes destes pontos, como calcular Φ?

Várias monografias do Profmat comtém apresentações sobre este tópico, e não há necessidade de reapresentá-lo em nosso TCC. Um pequeno esforço mental, através da figura 21, conduz à chamada *fórmula fundamental da trigonometria esférica.*

A dedução envolve apenas algumas semelhanças de triângulos.

$$\cos a = \cos b \, \cos c + \sin b \, \sin c \, \cos \hat{A} \tag{4.1}$$

Repetindo a pergunta: conhecendo as coordenadas geográficas das duas cidades, como aplicar esta fórmula para calcular as distância? Os alunos poderão comparar os seus resultados com os que foram fornecido pelos aplicativos, como vimos anteriormente.

Uma sugestão: podemos supor que o raio da esfera é 1, assim tudo fica adimensional. Tomamos o ponto A como o polo norte. Então b e c são as co-latitudes (90°- latitude) dos pontos $P_1 = B$ e $P_2 = C$, portanto são valores conhecidos. Obervamos que $\hat{A}$ é a diferença das longitudes destes pontos. Podemos assim obter o angulo:

$$\Phi = a.$$

Porém... podemos aproveitar para introduzir o conceito de *produto escalar de vetores*. Então o valor de $\cos \Phi$ pode ser calculado diretamente pelas coordenadas cartesianas de P_1 e P_2:

$$\cos \Phi = OP_1 \cdot OP_2 / R^2.$$

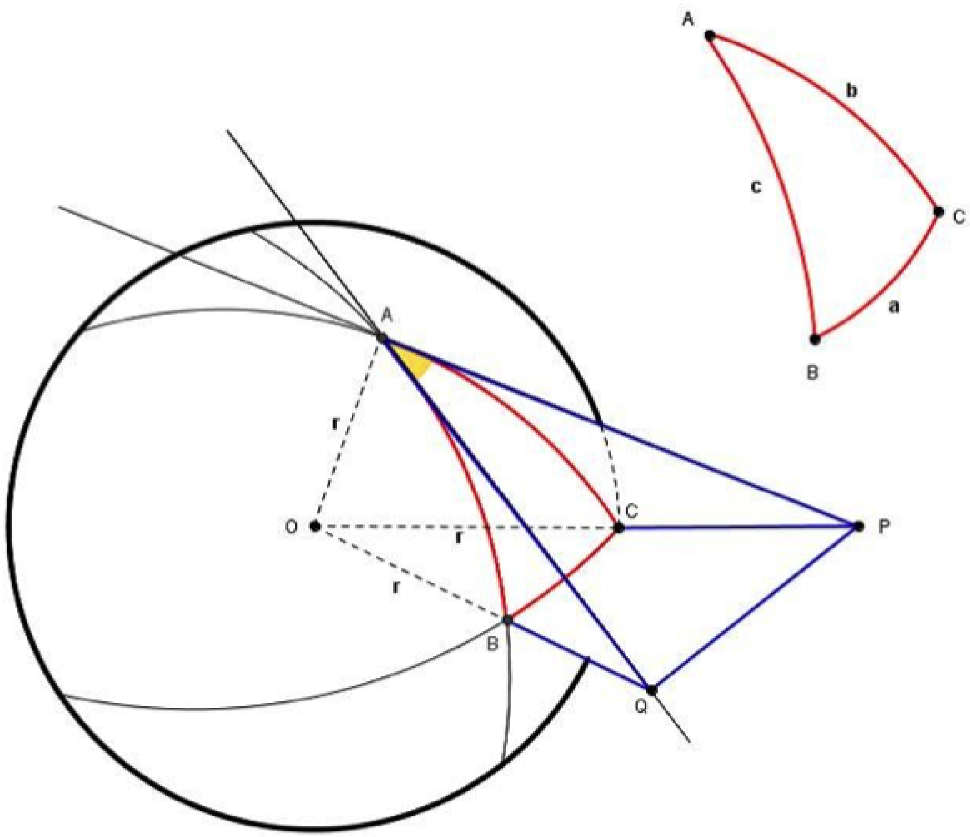
Curiosamente, no Google Earth, a Trigonometria Esférica estaria sendo usada mesmo para calcular a distância entre locais próximos.

Atividade/Tarefa 10: Geometria esférica: Distância entre cidades do planeta

A Figura 20 ilustra um exemplo usado nas monografias do Profmat [19], [20], [21]: Kingston na Jamaica e Bristol, na Inglaterra. Mas porque estas duas? Temos um palpite[3].

O professor pode aproveitar as facilidades do Google Earth e calcular a distância entre vários pares de cidades do mundo. Seria interessante fazer uma parceria novamente com os professores de história e geografia: quais cidades o alunos ouviram falar no rádio ou TV? Onde fica Buenos Aires, Santiago, Bogotá, etc.? O que sabem sobre elas?

Figura 21 – $\cos a = \cos b \, \cos c + \sin b \, \sin c \, \cos \hat{A}$



Fonte: Zanella, [19] (secundária: a figura original está em [22], Fig. 117, p. 318)

[3] Estas duas cidades foram as usadas por Hogben como exemplo ...

4.4 CARTOGRAFIA: ALGUNS MATERIAIS DIDÁTICOS

Nos sistemas de referência terrestres são utilizados muitos tipos de mapas criadas pelos cartógrafos desde a Antiguidade. Sobre o tema foram escritas várias monografias (do Profmat e outros programas). Em [24] e [25] a projeção de Mercator é apresentada em detalhes. Várias outras são descritas em [26]. Algumas informações históricas podem ser encontradas também em [27] e [28]. Atividades de iniciação são descritas em [29] e [30].

Apenas complementando estas fontes, para a preparação de aulas sobre cartografia a nível do Ensino Médio, sugerimos estes materiais:

Desde 2000, o INPE tem organizado vários cursos sobre sensoriamento remoto para professores e alunos do Ensino Fundamental, com ênfase no estudo do meio ambiente.

`http://www3.inpe.br/unidades/cep/atividadescep/educasere/`

`http://mtc-m12.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/sergio/2005/06.14.13.17/doc/CAP10_PCGAlbuquerque.pdf`

`http://www3.inpe.br/unidades/cep/atividadescep/educasere/gurgel.htm`

`http://www.dsr.inpe.br/DSR/educacao/uso-escolar-sensoriamento-remoto/uso-escolar-informacoes`

`http://www.dsr.inpe.br/DSR/educacao/uso-escolar-sensoriamento-remoto/material-didatico-anos-anteriores`

`http://www.dsr.inpe.br/DSR/educacao/uso-escolar-sensoriamento-remoto/material-didatico-anos-anteriores/arquivos/5-cartografia_e_gps.pdf`

O IBGE tamém produz materiais muito interessantes, como o Atlas Geográfico Escolar[a] [31]

`https://ww2.ibge.gov.br/home/geociencias/cartografia/manual_nocoes/indice.htm`

`http://www.cartografica.ufpr.br/portal/wp-content/uploads/2013/09/Nocoes-Basicas-Cartografia.pdf`

`https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv44152_cap2.pdf`

O ITC, International Institute for Geo-Information Science and Earth Observation, sediado na Holanda, tem materiais muito bons:

`https://kartoweb.itc.nl`

`https://kartoweb.itc.nl/geometrics/Introduction/introduction.html`

Atividade/Tarefa 11: Materiais didáticos

[a] Disponivel online https://biblioteca.ibge.gov.br/, numero chamada 912-A881a .

Novamente, vale muito fazer o estudo junto com os professores de história e geografia, em consonância com as novas diretrizes da BNCC[4].

[4] `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/Parecer_9_GE_Helena_Copetti_Callai.pdf`, `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/relatorios-analiticos/Amelia_Regina_Batista_Nogueira.pdf`

O projeto "História da Cartografia"

Este é um trabalho de referência monumental, em vários volumes, com o objetivo de examinar a produção social e o consumo dos mapas através das culturas desde as origens pré-históricas até o século 20.

`https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Cartography_Project`

Os fundadores do projeto:

`https://en.wikipedia.org/wiki/David_Woodward`

`https://en.wikipedia.org/wiki/John_Brian_Harley`

O acesso online ao site e aos volumes é livre.

`https://geography.wisc.edu/histcart/`

`https://geography.wisc.edu/histcart/free-online-access/`

`https://www.press.uchicago.edu/books/HOC/index.html`

Os editores atuais estão em

`https://geography.wisc.edu/histcart/editors/`

Atividade/Tarefa 12: O projeto "História da Cartografia"

4.5 CONVERSÃO DE COORDENADAS GEOGRÁFICAS PARA UTM

No próximo capítulo discutiremos em mais detalhe a projeção UTM (Mercator Universal Transversa). Como motivação mostraremos agora o uso do aplicativo.

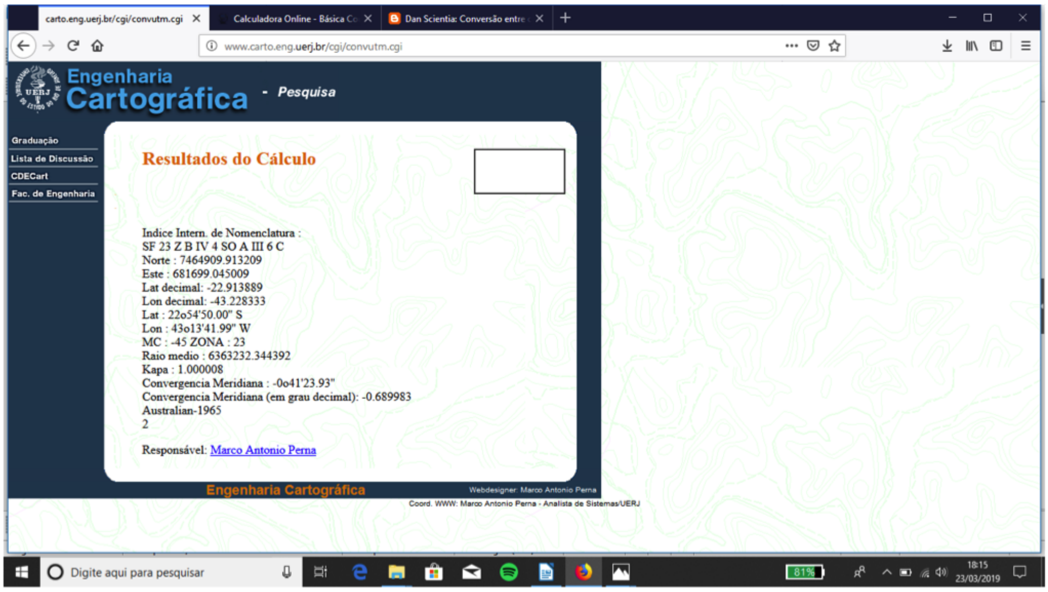
No aplicativo do INPE para o cálculo de distâncias (Figura 12) são apresentadas várias opções de sistema de referência para calcular a distância. No exemplo em tela foi usado o SAD 69.

Nesse momento, é uma grande oportunidade para constatar que há variações nos resultados dependendo do sistema de referência. Observamos que ocorre uma variação da distância entre o valor no Apps Google Earth (99 metros) e a do site indicado do INPE (96.585 metros).

Na escala de cidades, achamos que seja mais por diferenças nas fontes dos dados, da forma em que as posições são registradas, ou por diferenças de implementação. Diferenças no tipo de projeção cartográfica não devem se manifestar nesta escala de tamanhos.

Portanto podemos calcular distância entre pontos num mapa local usando a Geometria Euclidiana, pois a distorção é desprezível. É conveniente transformar as coordenadas geográficas para coordenadas UTM, que como vimos cobrem quase todo o planeta em trechos de 6°.

Figura 22 – Tela inicial



Fonte: Próprio autor.

Existem uma série de fórmulas que convertem uma coordenada do sistema de coordenadas geográficas para o sistema de coordenadas UTM e vice-versa. As fórmulas são baseadas nas propriedades do mapeamento do elipsoide de revolução, que serve como referência no posicionamento geodésico. Isto está além do escopo dessa dissertação.

Mas podemos realizar as mudanças de coordenadas acessando os diversos sites que realizam os cálculos on-line. Por exemplo vamos realizar acessando o site do Departamento de Engenharia Cartográfica da UERJ

`http://www.carto.eng.uerj.br/cgi/index.cgi?x=geo2utm`

e ir preenchendo conforme as instruções contidas na página (Figura 22).

Nota-se que as coordenadas Geodésicas foram convertidas para as coordenadas UTM dos pontos:

A (Norte: 7464817.28997, Este: 681726.428258) .

B (Norte: 7464909.913209, Este: 681699.045009) .

Substituindo os valores na fórmula d distância euclidiana, temos que

$$d_{AB} = 95,75400566033778.$$

Percebe-se que os cálculos realizados apresentam variações em relação os valores encontrados nos outros sites. Isso se deve aos vários fatores elencados acima.

Figura 23 – Resultado do cálculo

Fonte: Póprio autor.

5 CARTOGRAFIA E FUNÇÕES COMPLEXAS

Iniciamos neste capítulo os temas em nível universitário. Foram precisamente seus trabalhos em geodésia e cartografia que motivaram Gauss para realizar estudos sobre superfícies curvas, publicados em 1827[1]. O principal conceito introduzido por Gauss foi o de *curvatura* num ponto da superfície (denominada atualmente curvatura Gaussiana, e denotada por K). Uma superfície pode ser planificada perfeitamente se e somente se sua curvatura Gaussiana se anula em todos os pontos. Para introduções informais estes livros são clássicos: Hilbert-Cohn Vossen [33] e Courant-Robbins [34].

Em outras dissertações do Profmat são introduzidos noções de *geometria diferencial de curvas e superfícies*, que podem ser usados para caracterizar diversas projeções. Nesta monografia vamos focar nos *mapeamentos conformes*, que servem como motivação para o estudo das funções de variável complexa. Robert Osserman, um matemático importante, já falecido, fez uma introdução à cartografia matemática, acessível a alunos de graduação. com este ponto de vista: *Mathematical Mapping from Mercator to the Millennium* [35][2].

5.1 MERCATOR: UMA TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Faremos algumas considerações sobre a *projeção de Mercator transversa*, que é a mais utilizada no GPS, complementando as aprentações em outras monografias do Profmat já citadas. Em 1569 o cartógrafo flamengo Gerardus Mercator produziu o mapa reproduzido na Figura 24.

Mercator criou uma carta muito desejada pelos navegantes: nela, as linhas de rumo são representadas por segmentos de retas. Seguindo uma linha de rumo, a bússola não se mexe, ou seja, o ângulo da trajetória com os meridianos é constante (Figura 25).

Mantendo sempre bússola no mesmo rumo, o que vai acontecer ao navegante ao se aproximar de um dos polos? A resposta está na figura 26: É por causa disso que as linhas de rumo, vistas na esfera são também chamadas de *loxodrômicas*.

Este mapa obviamente manterá o espaçamento uniforme entre os meridianos, mas “espicha” a coordenada vertical na direção dos polos. Os polos irão para o infinito.

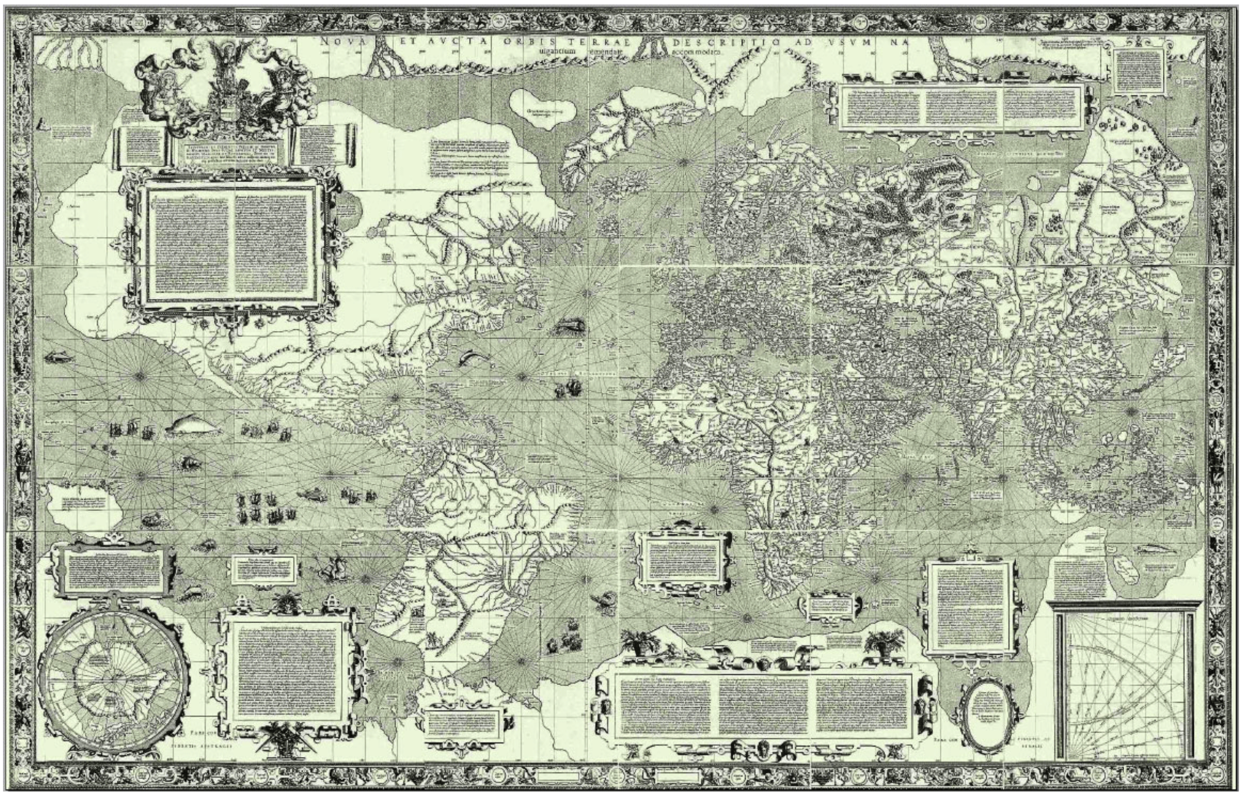
Por causa disso, a distorção aumenta cada vez mais, e fica enorme a partir da latitude de 60°. Um dos problemas da projeção de Mercator é que as geodésicas (arco de grande círculo no globo) são representadas de maneira não muito adequada quando as latitudes aumentam.

---

1 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. A tradução em inglês pode ser baixada de `http://www.gutenberg.org/ebooks/36856`. Para informações históricas, ver [32].

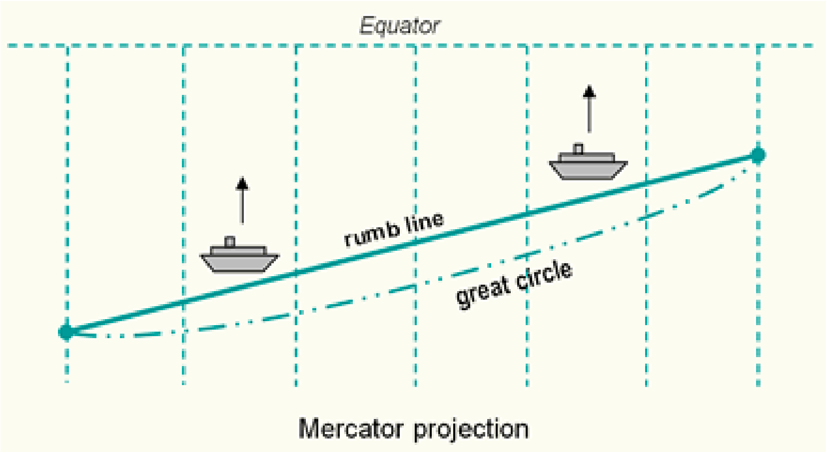
2 `https://www.msri.org/people/staff/osserman/papers/ROssermanPart_V.pdf`
`http://www.msri.org/m/people/staff/osserman/`.

Figura 24 – Mapa de Mercator (1569)



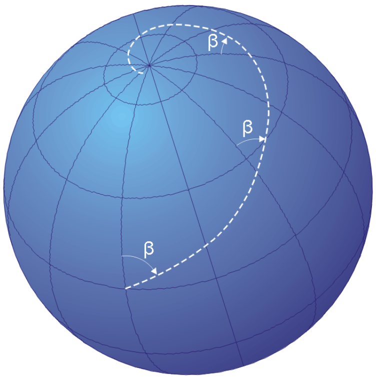
Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_1569_world_map`

Figura 25 – O que desejavam os navegantes



Fonte: `https://kartoweb.itc.nl`

Figura 26 – Linha de rumo no Globo



Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Rhumb_line`

Preconceitos mentais

A Groenlândia é cerca de oito vezes menor que a América do Sul, mas aparece maior na Figura 28. Por esta razão, o mapa de Mercator recebe algumas críticas quanto ao seu uso nas escolas.

A controvérsia as vezes se torna hilária.

`https://360.here.com/2015/05/25/problem-projections/`

`https://youtu.be/vVX-PrBRtTY`

`https://www.nationalgeographic.com/culture/2018/11/all-over-the-map-mental-mapping-misconceptions/`

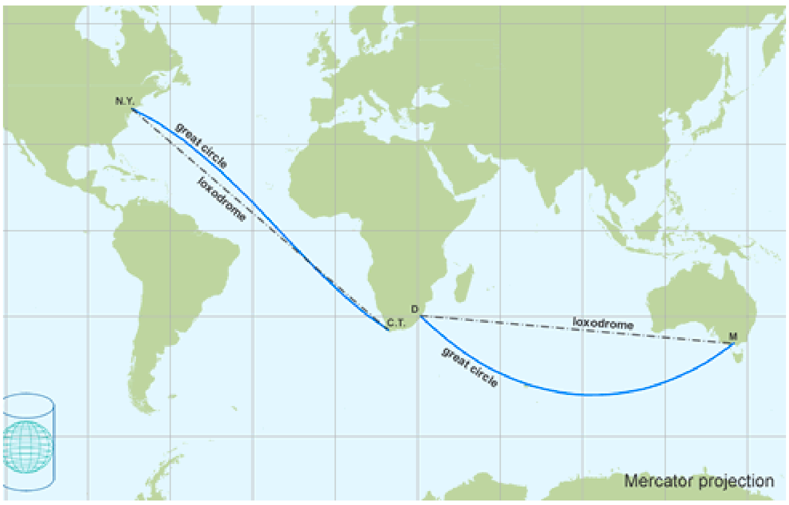
`https://www.businessinsider.com/the-mercator-projection-distorts-countries-2017-6`

`https://www.gislounge.com/look-mercator-projection/amp/`

`https://www.thoughtco.com/peters-projection-and-the-mercator-map-4068412`

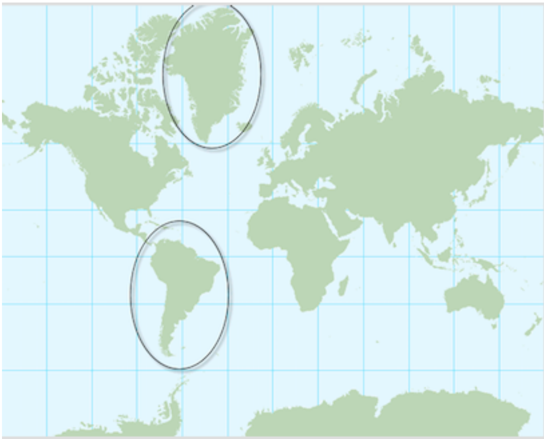
Atividade/Tarefa 13: Preconceitos mentais

Figura 27 – Loxodrômicas x Geodésicas



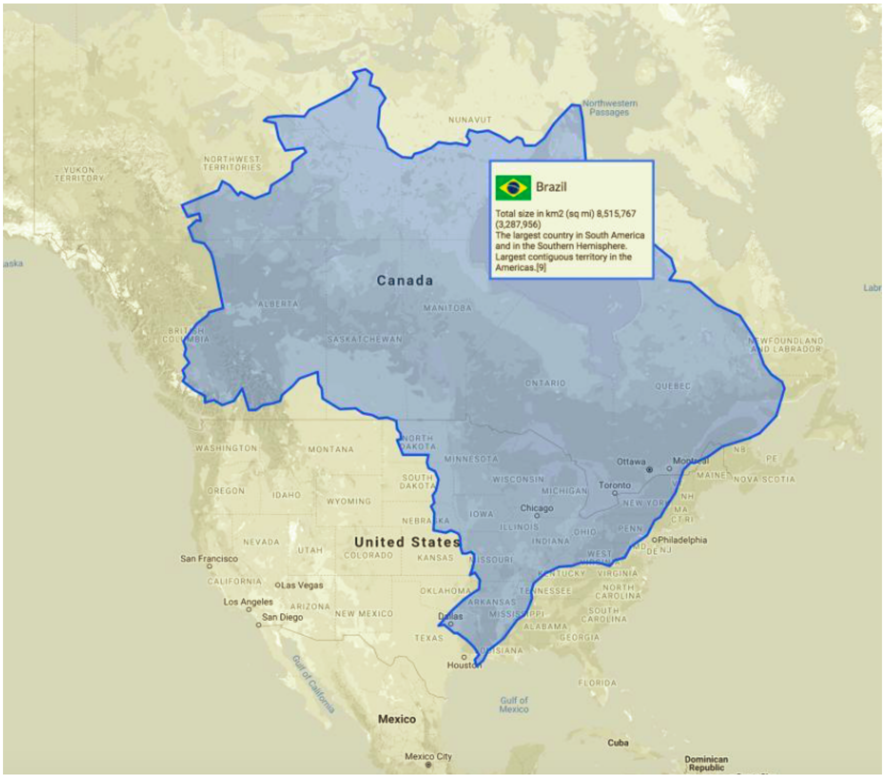
Fonte: `https://kartoweb.itc.nl`

Figura 28 – Distorção de área no mapa de Mercator



Fonte: `https://kartoweb.itc.nl`

Figura 29 – O tamanho verdadeiro do Brasil



Fonte: `https://www.nationalgeographic.com/culture/2018/11/all-over-the-map-mental-mapping-misconceptions/`

5.2 VARIÁVEIS COMPLEXAS

Em compensação devido ao fato que no mapa as linhas de rumo são retas fazendo o mesmo ângulo com os meridianos, temos uma belíssima consequência:

Se duas curvas no globo se intersectam, elas mantém o mesmo ângulo na sua representação no mapa.

Este tipo de mapeamentos entre regiões (do plano ou em superfícies curvas) são chamadas de *transformações conformes*. Seu estudo deu origem a uma área extremamente importante da matemática, as *funções de variável complexa,* que são ferramentas indispensáveis na matemática física e na engenharia.

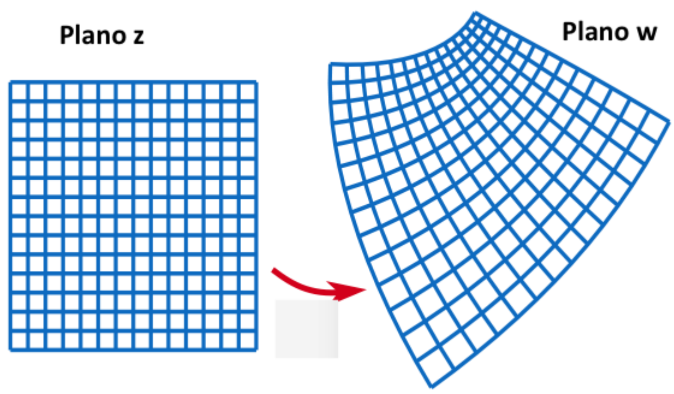
Os alunos no final do Ensino Médio estão tendo os primeiros contatos com os números complexos. Seria possível tentar ir um pouco além do usual? Em [36] os autores relatam uma experiência no Brasil de ensino de funções de variável complexa.

Apontam para ferramentas iterativas, disponíveis em

`http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/numeros_complexos/` .

A visualização de funções complexas, tradicionalmente, envolve fazer duas figuras separadas, uma para o plano complexo z (domiínio) e outra para o plano imagem $w = f(z)$[3]

Figura 30 – Função conforme: w = f(z)



Fonte: Próprio autor

[3] Um ótimo texto (em nível universitário) chama-se *Visual Complex Analysis* [37]. Numa resenha sobre este livro, foi proposta uma outra forma interessante de visualização `https://www.maa.org/visualizing-complex-valued-functions-in-the-plane.` . mas que não tem sido muito explorada.

Não é dificil explicar que transformações lineares preservando ângulos entre vetores são da forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

O fator linear de escala dos comprimentos é $\sigma = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Na primeira metade do século 19 os matemáticos perceberam que seria útil pensar nas transformações conformes de um plano $z = (x, y)$ para o plano $w = (u, v)$ em notação de números complexos:

$$w = u + iv,\ z = x + iy, \quad u = u(x, y), v = v(x, y).$$

Se em cada ponto z do domínio a matriz que representa a linearizaçõ em torno de z é do tipo (5.1), seguem as condições de Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\partial u/\partial x = \partial v/\partial y\ \ ,\ \ \partial v/\partial x = -\partial u/\partial y} \tag{5.2}$$

Se estas funções possuem mais uma derivada contínua, segue de (5.2) que ambas u e v são *harmônicas*. Isto significa que elas satisfazem a equação de Laplace

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \mu(x, y) = 0\,.} \tag{5.3}$$

Dizemos que u, v são harmônicas conjugadas. Os gradientes de u e v tem o mesmo tamanho (que dá o fator de escala local) e são ortogonais.

Atividade/Tarefa 14: Funções complexas

Entre uma imensidão de resultados maravilhosos sobre as funções complexas, um fato básico decorre da existência de uma primeira derivada complexa

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} (f(z + h) - f(z))/h$$

(h é um número complexo e portanto a divisão por h é a dos números complexos) em todos os z do domínio. *Isto implicará que f tem derivadas contínuas de todas as ordens!* Mais ainda, que existe um raio de convergência não nulo para a expansão de Taylor em torno de cada z. As funções complexas são por esta razão também chamadas de *funções analíticas.*

O termo linear da expansão,

$$f(z_o + h) = f(z_o) + A.h + \cdots\ , \quad A = f'(z_o)$$

já explica a conformalidade do mapeamento do plano z para o plano w. A multiplicação do vetor h por $A = |A| \exp(i\theta)$ consiste em multiplicar $|h|$ por $|A|$ e rodá-lo por $\theta = \ \arg\ A$.

Funções complexas para adolescentes?

O livro texto *Abel's Theorem in Problems and Solutions* [38] é baseado em notas de aulas de um curso (supostamente) para adolescentes do importante matemático (já falecido) V. I. Arnold . Entre outros temas, discute a prova de Niels Abel da impossibilidade de resolver equações do quinto grau por radicais. Preferimos não traduzir:

> "... In the 1960's I taught group theory to Moscow schoolchildren. Avoiding all the axiomatics and staying as close as possible to physics, in half a year I got to the Abel theorem on the unsolvability of a general equation of degree five in radicals (having on the way taught the pupils complex numbers, Riemann surfaces, fundamental groups and monodromy groups of algebraic functions) '
> (V. I. Arnold, On teaching mathematics [39]).

O resumo do livro, descrito por Alekseev:

> "In high school algebraic equations in one unknown of first and second degree are studied in detail. One learns that for solving these equations there exist general formulae expressing their roots in terms of the coefficients by means of arithmetic operations and of radicals. But very few students know whether similar formulae do exist for solving algebraic equations of higher order. In fact, such formulae also exist for equations of the third and fourth degree. We shall illustrate the methods for solving these equations in the introduction. Nevertheless, if one considers the generic equation in one unknown of degree higher than four one finds that it is not solvable by radicals: there exist no formulae expressing the roots of these equations in terms of their coefficients by means of arithmetic operations and of radicals. This is exactly the statement of the Abel theorem.
>
> One of the aims of this book is to make known this theorem. Here we will not consider in detail the results obtained a bit later by the French mathematician Évariste Galois. He considered some special algebraic equation, i.e., having particular numbers as coefficients, and for these equations found the conditions under which the roots are representable in terms of the coefficients by means of algebraic equations and radicals.
>
> From the general Galois results one can, in particular, also deduce the Abel theorem. But in this book we proceed in the opposite direction: this will allow the reader to learn two very important branches of modern mathematics: group theory and the theory of functions of one complex variable. The reader will be told what is a group (in mathematics), a field, and which properties they possess. He will also learn what the complex numbers are and why they are defined in such a manner and not otherwise. He will learn what a Riemann surface is and of what the 'basic theorem of the complex numbers algebra' consists.

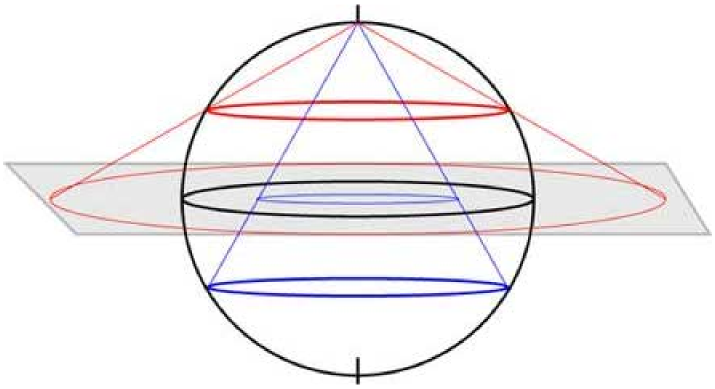
Atividade/Tarefa 15: Funções complexas para adolescentes?

5.3 EXPRESSÃO MATEMÁTICA DA PROJEÇÃO DE MERCATOR

Esta seção é mais básica, pode ser apresentada aos alunos que tenham visto um pouco de Cálculo. De fato, é suficiente saber que $d/dx \ln x = 1/x$.

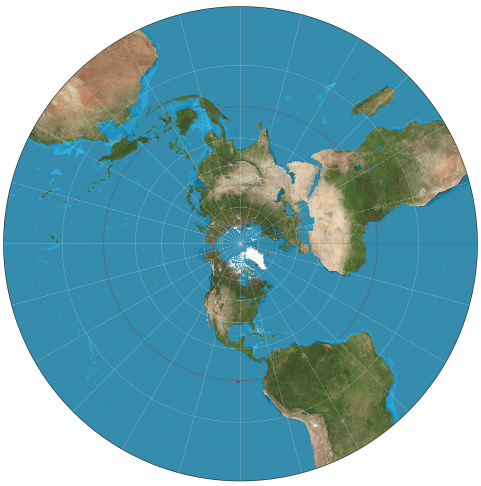
Os números complexos são representados também numa esfera, a *esfera de Riemann*. Consideremos uma esfera de raio 1, e tomamos para o plano complexo o plano equatorial. A projeção neste plano dos pontos da esfera por raios a partir do polo norte se chama *projeção estereográfica*. Provaremos, sem conta nenhuma (ver logo adiante) que é conforme.

Figura 31 – Projeção estereográfica a partir do polo Norte



Fonte: `https://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/montero/math309project.html`

Figura 32 – Projeção estereográfica a partir do polo Sul



Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`

A imagem dos meridianos pela projeção estereográfica S são as semiretas passando pela origem no plano complexo $w = u + iv$. Onde fica neste plano a imagem de um ponto de coordenadas geográficas (θ, ϕ) ?

O hemisfério sul é mapeado no interior do disco unitário, e o hemisfério norte no exterior. Se o meridiano de Greenwich corresponder ao eixo dos u positivo, o lado E corresponderá ao semiplano $v > 0$, e o lado oeste ao semiplano $v < 0$. Se tomarmos coordenadas polares, $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, teremos de fato o mesmo ângulo θ das longitudes, e por uma simples semelhança de triângulos (fazer a figura!) obtemos

$$r = r(\phi) = \frac{\cos\phi}{1-\sin\phi} = \frac{\sqrt{1+\sin\phi}}{\sqrt{1+\sin\phi}}. \tag{5.4}$$

Este mapeamento leva o equador da esfera ($\phi = 0$) em si mesmo, ou seja, no circulo $r = 1$, o polo sul ($\phi = -\pi/2$) se torna a origem do plano, e o polo norte, como esperado, é jogado no infinito (Figura 31).

Vamos fazer agora uma transformação conforme T do plano complexo $w = u + iv$, com

$$u = r\cos\theta \ \ , v = r\sin\theta \tag{5.5}$$

para outro plano complexo $z = x + iy$ através das funções:

$$T : x = \theta \ , \ y = \ln r \ . \tag{5.6}$$

A origem do plano se transforma para $y = -\infty$ e o círculo de raio infinito $r = \infty$ numa linha horizontal "no infinito" $y = +\infty$.

Porque T é conforme?

No plano de partida, as variações infinitesimais são $rd\theta$ e dr. As correspondentes variações, no plano de chegada, são respectivamente $d\theta$ e $\frac{1}{r}\,dr$.

Fica claro que um pequeno retângulo infinitesimal mantém as proporções. O fator de ampliação (ou redução local) de T é $1/r$.

A composição $T \circ S$ produz o mapa de Mercator:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \theta \\ y = \ln(\frac{\sqrt{1+\sin\phi}}{\sqrt{1+\sin\phi}}) = \frac{1}{2}\ \ln(\frac{1+\sin\phi}{1+\sin\phi}) = \log(\tan\phi + \sec\phi) \end{array}} \tag{5.7}$$

Os alunos que já gostarem funções complexas reconhecerão o logaritmo complexo:

$$z = r\exp(i\theta)\,, \ w = \ln r + i\theta = \ln z\,. \tag{5.8}$$

A projeção estereográfica é conforme (sem contas!)

O seguinte argumento é atribuido ao matemático Caratheodory[a].

Imaginemos duas linhas no plano complexo (o plano que é tangente ao polo sul da esfera de Riemann), que se encontram no ponto z. Pinte uma, L_1 de vermelho e a outra, L_2, de verde. A imagem inversa destas linhas, são dois circulos iguais, um vermelho (C_1) e outro (C_1) verde.

Estes circulos e se intersectam no polo norte e num ponto p, que é mapeado em z.

Pelo polo norte passe duas linhas horizontais (de novo uma vermelha, L'_1 e outra verde, $L'2$) paralelas às do plano, tangentes aos respectivos circulos. Seja α o ângulo entre estas retas. Não é preciso saber muita Geometria Euclidiana para perceber o fato evidente que este é o mesmo angulo entre as duas linhas $L1$ e L_2 no plano,aao se encontrarem em z.

Ora, α é também o ângulo entre os dois circulos, *o mesmo valor nos dois pontos de interseção.*

Consideremos agora um terceiro par de retas, tangentes aos dois circulos mas agora pelo ponto p (não vamos chama-las de nada). Elas também fazem o ângulo α e são mapeadas pela transformação conforme nas retas L_1 e L_2.

Concluimos que a projeção esterográfica é conforme!

Pedimos aos alunos que tenham algum familiaridade com o Geogebra: fariam o desenho?

Além disso, a projeção esterográfica mapeia circulos na esfera em circulos (ou retas) no plano. Sugerimos estes links;

`https://www.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/Stereographic.pdf`

`https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`

`http://www.isallaboutmath.com/proof.aspx`

`https://sites.math.washington.edu/~king/coursedir/m445w03/class/01-31-stereoprop.html`

Atividade/Tarefa 16: A projeção estereográfica é conforme (por geometria sintética)

[a] `https://people.eecs.berkeley.edu/~wkahan/Math185/Cnfrml.pdf`

5.4 A PROJEÇÃO DE MERCATOR TRANSVERSA (UTM)

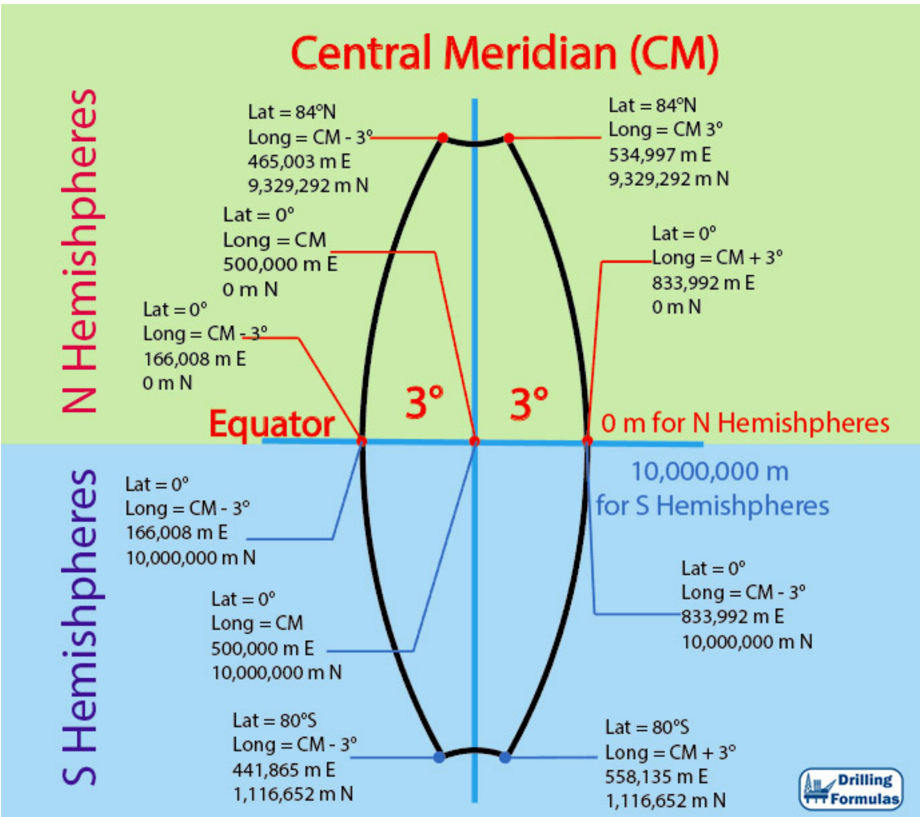
A projeção estereográfica a partir do polo norte tem pouca distorção quando restrita a uma região pequena em torno do polo sul. O mesmo para a projeção de Mercator numa estreita faixa de latitudes em volta do equador. Pode-se dizer que em “em cima” de cada ponto do equador, não há distorção alguma.

A projeção de Mercator transversa toma como circulo base um meridiano, em vez do equador. Daí o nome *transversa*. Portanto, são usadas as fórmulas matemáticas (5.7) da seção anterior. A distorção aumenta a medida que nos afastamos do meridiano central. O que fazer, então?

Para uso no GPS e no Google Earth, a Terra é dividido em 60 regiões, onde cada um se estende por 6°de longitude, chamadas de *fusos*. Os fusos são numerados de um a sessenta começando no fuso 180°a 174°W Gr. e continuando para leste. Cada um destes fusos é gerado a partir de uma rotação de forma que seu *semi-meridiano central* divide o fuso em duas partes iguais de 3°de amplitude (Figuras 33, 26, 35).

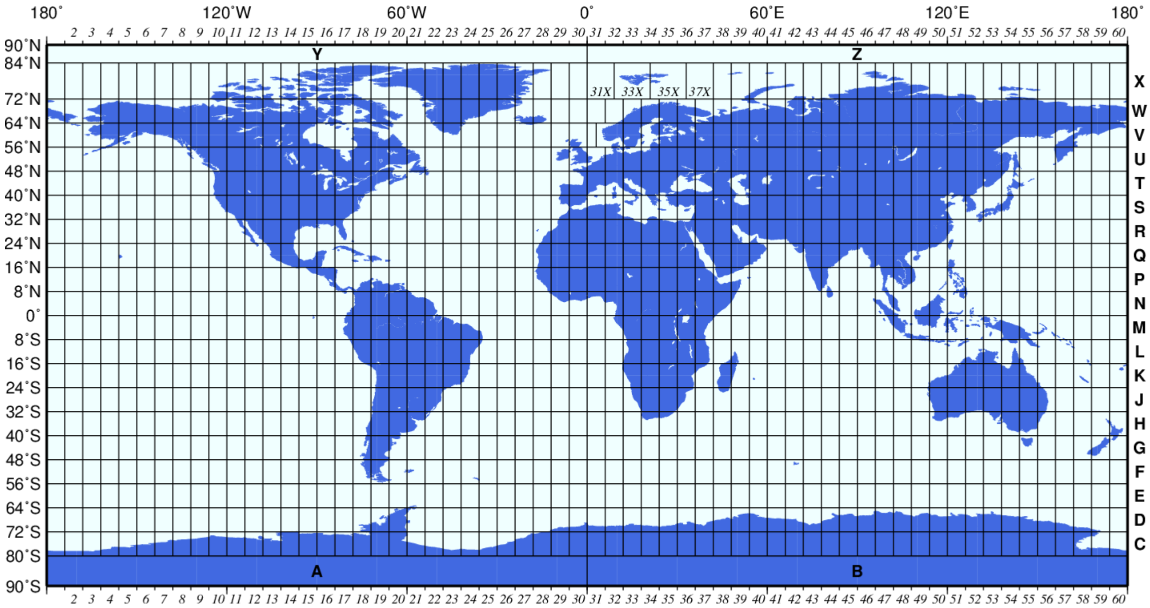
Cuidado: na figura rodada, os meridianos *não* correspondem a paralelos na projeção de Mercator usual. Olhe a figura 33.

Figura 33 – Fusos no UTM



Fonte: http://www.drillingformulas.com/universal-transverse-mercator-application-in-directional-drilling/

Figura 34 – Os 60 fusos no mundo



Fonte: `GMT_utm_zones.png`

Figura 35 – Os fusos do Brasil

Fonte: Manual do IBGE [40]

Para maiores informações, pode-se olhar:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_Transverse_Mercator_coordinate_systemoff`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_Transverse_Mercator_coordinate_system`
`https://gisgeography.com/utm-universal-transverse-mercator-projection/`
`http://geokov.com/education/utm.aspx`

5.5 DISTORÇÃO (SEGUNDO MILNOR). CRITÉRIO DE CHEBYSHEV

Esta seção é um pouco mais elaborada. Discutimos o conceito de *distorção* de um mapa apresentado por John Milnor[4], no artigo *A problem in cartography* [41], publicado no American Mathematical Monthly, da Mathematical Association of America. Este jornal é voltado a professores.

Encontramos também um artigo divulgatório de Anasthaze Papadopoulos, que acaba de ser publicado em Notices da American Mathematical Society [42]. É bastante accessível. Entre muitos temas ali discutidos, conecta o conceito de distorção de Milnor nos homeomorfismos de Lipshitz com áreas da matemática pura (a métrica de Thurston por exemplo) e com várias aplicações, até mesmo em neurociência.

Seja U uma região fechada da esfera com bordo suave por partes. Formalmente, um mapa é uma função contínua e 1-1 f de U numa região do plano. Milnor introduz conceito de escala de um mapa com respeito a um par de pontos $x \neq y \in U$: é o quociente

$$e(x, y) = d_E(f(x), f(y)/d_S(x, y),$$

onde d_S é a distância na esfera e d_E no plano. Quando $x = y$ temos $0/0$. A ambiguidade pode ser resolvida considerando as expressões quadráticas das duas métricas. Num mesmo sistema de coordenadas, para esfera e para o plano, teremos um problema tradicional de álgebra linear. A escala infinitesimal dependerá da direção tomada. Os valores máximo e mínimo são as raizes quadradas dos dois autovalores.

Mais geralmente, podemos considerar o infimo σ_1 e o supremo σ_2 de $e(x, y)$ em todo o domínio $U \times U$. Milnor define a distorção do par (U, f) como

$$\delta = \log(\sigma_2/\sigma_1), \ 0 \leq \delta \leq \infty. \tag{5.9}$$

Assumindo que δ é um número finito, pode-se interpretar que σ_1, σ_2 como sendo as *melhores possíveis escolhas das constantes de Lipschitz* satisfazendo

$$\sigma_1 \, d_S(x, y) \leq d_E(f(x), f(y)) \leq \sigma_1 \, d_S(x, y), \ x, y \in U \tag{5.10}$$

e portanto f é um homeomorfismo.

A pergunta que não quer calar: entre todos os mapas conformes de uma região U de uma superfície para o plano, qual tem a menor distorção?

No Apêndice A do artigo Milnor prova que sempre existe um mapa ótimo[5].

Milnor apresenta a resposta para regiões limitadas por um círculo na esfera (por exemplo, um mapa com centro no polo norte até o circulo polar ártico). O mapa ótimo é exatamente o que os cartógrafos chamam de *projeção azimutal equidistante*.

[4] Importante matemático, medalhista Fields em 1962.

[5] É um problema de otimização, diferente dos usualmente encontrados no cálculo das variações.

Em geometria diferencial é chamado de *exponencial* (ou melhor, o seu inverso). Este mapa leva arcos de grande circulo emanando do polo, nos raios emanando da origem do plano, preservando o comprimento de arco (tudo em escala, portanto podemos supor que a esfera é unitária).

O termo equidistante significa que os ângulos em torno do polo e em torno da origem do plano são os mesmos. Portanto, se (ϕ, θ) são a colatitude (ângulo a partir do polo norte) e a longitude, as coordenadas polares da imagem mantém o ângulo θ e teremos simplesmente $r = \phi$ (a menos de um fator de escala).

A prova de que este mapa é o de menor distorção não é imediata, mas pode ser "destrinchada". Deixamos como um desafio. Além disso, Milnor mostra que para uma calota $0 \leq \phi \leq \alpha,\ \alpha < \pi$, a distorção deste mapa é dada por

$$\delta = \log(\alpha / \sin \alpha). \tag{5.11}$$

Não é difícil intuir porque. O ínfimo deve ocorrer no centro da calota (digamos, o polo norte). Deslocando-se infinitesimalmente na direçõ de um meridiano, obtemos

$$\sigma_1 = 1.$$

O supremo, intuitivamente, deverá ocorrer tomando um ponto na borda $\phi = \alpha$, deslocando-se infinitesimalmente na direção deste paralelo. Entao σ_2 será precisamente a razão dos comprimentos dos circulos. No plano $2\pi\alpha$, na esfera $2\pi \sin \alpha$. Portanto

$$\sigma_2 = \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

O apêndice B trata da otimização restrita à classe das transformações conformes, o que nos interessa mais de perto. Neste caso, o fator de escala local não depende da direção tomada,

$$\sigma(x) = \lim_{y \to x} d_E(f(x), f(y) / d_S(x, y)\,. \tag{5.12}$$

Um primeiro resultado já é algo surpreendente. Se ambos os domínios U e $f(U)$ são (geodesicamente) convexos e f biunívoca, entao σ_2 e σ_1 podem ser calculados usando apenas a função $\sigma(x)$. Ou seja, o conhecimento da escala infinitesimal é suficiente para o cálculo da distorção δ.

Milnor termina o artigo apresentando a demonstração de um belo teorema do matemático russo Pafnuty L. Chebyshev ([43], 1856). Este teorema afirma que o mapa conforme ótimo é caracterizado pela seguinte propriedade:

Critério de Chebyshev: a escala infinitesimal $\sigma(x)$ é constante ao longo do bordo de U.

Em regiões multiconexas as constantes são em geral diferentes. Veremos no final destaa seção que encontrar σ em todo o domínio U se reduz a um problema de Poisson da teoria do potencial, com analogias na teoria do calor, da hidrostática, ou da eletrostática.

No mapa de Mercator,

$$\sigma = \sec(\pi/2 - \phi) = \sec(\text{ latitude}\, x) \tag{5.13}$$

Como esperado, esta escala local σ diverge nos polos[6], coerente com o fato de que o mapa de Mercator os manda para o infinito.

Portanto o mapeamento UTM não é ótimo, pois o fator de escala não é constante nos meridianos distantes $\pm\theta_o$ do meridiano tomado como central, que formam o fuso.

Para ver isto, basta fazer mentalmente uma figura rodada, em que o meridiano central passa a ser um semicírculo do equador. O fuso esférico de abertura $2\theta_o$ está contido entre os dois paralelos $\pm\theta_o$. A distorção nestes paralelos é dada por $\delta = \ln(\sec(\theta_o))$. Nos fusos do GPS, $\theta_o = \pi/60$, o que dá

$$\delta = 0.00137, \tag{5.14}$$

uma distorção pequena, que parece ser bem razoável.

Sobre o teorema de Chebyshev, Milnor observa:

> "This result has been available for more than a hundred years, but to my knowledge it has never been used by actual map makers".

Não sabemos se foi por sua influência ou não, mas encontramos alguns artigos posteriores utilizando o critério de Chebyshev, ver por exemplo a tese de doutorado [44], os artigos [45], [46], [47], [48], e referências neles citadas.

Um artigo mencionado em [45] chamam a atenção. G. W. Hill [49], matemático e astrônomo norte-americano, já havia aplicado o critério de Chebyshev em regiões limitadas por meridianos e paralelos num elipsoide oblato de revolução.

As extensas bibliografias [50], [51] contém diversas referências ao método, bem anteriores a Milnor. O livro de Frank Canters [52] foca nos conceitos de distorção e em métodos para a construção de mapas.

Para mais informações históricas sobre Chebyshev, ver Anasthaze Papadopoulos [53], que também comenta sobre seu interesse num problema indiretamente relacionado à cartografia, o da "alfaiateria matemática" [54]; em [55] e [56] este historiador discorre sobre a influência da cartografia nas origens da teoria dos *mapeamentos quaseconformes.*

O teorema de Chebyshev foi revisitado em 1911, independentemente, por Gaston Darboux [57][7], e por Dmitry Gravé [58], aluno de Chebyshev[8].

---

[6] Isto tem uma razão proveniente da *teoria do potencial*, que também foge a nosso escopo.

[7] Darboux minimiza $\int_U \operatorname{grad} \log \sigma \, dS$, também obtendo o mesmo critério de Chebyshev.

[8] Chebyshev faleceu em 1894; em seu artigo Gravé se queixa amargamente de Darboux, observando que já em 1895 havia comunicado o seu resultado num congresso na França.

Este tópico tem como pré-requisito Geometria Diferencial ao nível de Manfredo do Carmo [59] e Métodos Matemáticos da Física.

Quando se muda uma métrica conformemente, os operadores de Laplace-Beltrami se relacionam da seguinte forma (ver por exemplo [60]):

$$g_\lambda = \exp(2\lambda)\, g \;\Rightarrow\; \Delta_{g_\lambda} = \exp(-2\lambda)\, \Delta_g \tag{5.15}$$

As curvaturas das duas métricas se relacionam por

$$K_{g_\lambda} = \exp(-2\lambda)(-\Delta_g \lambda + K_g) \tag{5.16}$$

A busca de um mapeamento conforme de uma região simplesmente conexa U numa superfície S para o plano conduz à equação de Poisson

$$\Delta_g \lambda = K_g\,. \tag{5.17}$$

Como nos diz Chebyshev, o fator conforme do mapa ótimo tem como condição de fronteira

$$\lambda_{|U} = \text{const.} \tag{5.18}$$

Em muitos casos podemos simplificar o tratamento, se já tivermos a nossa disposição, de inicio, um mapeamento conforme f_o da região $U \subset S$ para uma região simplesmente conexa R no plano $z = x + iy$, podendo ser, como garantido pelo teorema do mapeamento de Riemann, o disco unitário D. Um retângulo, ou um domínio geometricamente não muito complicado também nos servirão a contento. O que nos importa é que o seu fator conforme $\sigma_o > 0$ é uma função conhecida. Na realidade usaremos apenas os valores no bordo de U.

Queremos encontrar agora um mapeamento conforme $f_1 : w = w(z)$ de $z \in R$ para uma outra região no plano complexo $w = u + iv$ para ajustar o mapeanto f_o ao critério de Chebyshev. Será conveniente buscar primeiro a função complexa $\log f_1'$ cuja parte real é $\mu(x, y) = \log |dw/dz|$. Será portanto uma função harmônica:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \mu(x, y) = 0\,, \quad (x, y) \in R. \tag{5.19}$$

Obtemos um problema de Dirichlet terá como condição de fronteira

$$\mu_{|\partial R} = -\log \sigma_{o|f_o(\partial U)} \tag{5.20}$$

Como sabemos isto? Queremos que o fator conforme de $f_1 \circ f_o$ de $U \subset S$ para $f_1(R)$ no plano w seja constante no bordo. Os fatores conformes se multiplicam e seus logaritmos se somam.

Métodos para resolver a equação de Dirichlet não faltam. Se R é um retângulo podemos usar séries de Fourier. Se $R = D$ é o disco unitário no plano z, podemos usar a fórmula integral de Poisson.

Atividade/Tarefa 17: Mapa ótimo de Chebyshev via um problema de Dirichlet

Aqui mostramos como reconstruir a função f_1. Uma vez encontrada a função harmônica $\mu(x, y)$, é possível construir sua conjugada, que denotamos $\theta(x, y)$, formando a função complexa $\log f_1'$ (que pode ser multivaluada). Então

$$f_1' = dw/dz = \exp(\mu). \exp(i\theta) \tag{5.21}$$

(deixa de ser multivaluada). O mapeamento f_1 resultará de fazermos uma integração indefinida complexa.

Pode-se também atacar o problema diretamente - de forma heroica - apelando ao teorema de aproximação de Runge, um resultado importante das funções complexas.

No caso de um dominio simplesmente conexo R, toma-se uma aproximação polinomial [61]. Em dominios multiconexos pode-se tomar uma aproximação por funções racionais. Comparando coeficientes poderemos encontrar uma boa aproximação numérica diretamente para a função f_1, sem passar pela etapa intermediária da obtenção de $\mu(x, y)$.

Atividade/Tarefa 18: Obtendo mapeamento a partir da função de escala

Que mapa conforme de um fuso esférico terá a menor distorção?

Para a esfera, encontrar f_o quando U é um fuso completo (incluindo os polos) não é dificil. Colocando o centro do fuso no polo sul, a projeção estereográfica a partir do polo norte leva o fuso para a região do plano limitada por dois círculos de mesmo raio, fazendo ângulo $2\theta_o$ nos pontos de interseção (formato de pétala).

É facil encontrar uma transformação conforme da pétala no disco unitário: basta elevar a conhecida expressão de uma transformação de Moebius a uma potência conveniente ([34], pg. 21; em inglês, esta região em forma de pétala se chama uma “lune”.).

Deixamos o desafio de resolver o problema de Dirichlet no disco D com a condição de fronteira correspondente a este exemplo.

Atividade/Tarefa 19: Que mapa conforme de um fuso esférico é ótimo?

6 GPS: PARA ESTUDOS MAIS AVANÇADOS

Havendo interesse, discussões sobre aspectos mais avançados sobre GPS podem ser feitas em palestras divulgatórias na Escola. São tópicos para os alunos interessados em Ciências e Tecnologia, apropriados para o final do segundo grau, quando estiverem buscando o rumo para a Universidade. Começamos com fontes básicas, e a seguir faremos uma resenha de alguns artigos e livros apenas para a apreciação do professor.

6.1 FONTES BÁSICAS

Um artigo bem simples, datado de 1998 foi publicado no Mathematics Magazine da Mathematical Association of America [62]. Não tem grandes informações, mas o mérito consiste em explicar as fontes de degradação nas coordenadas (algumas propositais para uso civil).

A página web do professor J. Khoury, da Universidade de Ottawa, no Canadá[1], . encontra-se uma boa apresentação do tópico dos códicos PRN ("pseudo random noise") que permitem ao aparelho identificar qual é o satélite que origina o sinal. Faz uma apresentação bem pedagógica da aritmética modular, dos conceitos de grupos e corpos, com aplicação para a codificação que permite identificar o satélite (*linear feedback registers*).

Data de 1991 o artigo mais antigo que encontramos *The mathematics of GPS*, do Prof. Richard Langley[2] [63], que edita regularmente até hoje a coluna "Innovation" do *GPS Word*. Os principais conceitos já estão ali discutidos de maneira muito clara[3]. Outro artigo interessante, mais recente: *GPS by the Numbers: A Sideways Look at How the Global Positioning System Works* [64]. Langley também participou da elaboração do *Guide for GPS positioning* ([65], 1986) que ainda pode ser muito útil.

É possivel registrar-se gratuitament no site GPS World para poder ler a revista publicada online

`https://www.gpsworld.com/resources/archives/`

O catálogo até 2010 pode ser encontrado em

`https://www2.unb.ca/gge/Resources/InnovationCatalog.pdf`

Atividade/Tarefa 20: GPS World. Coluna "Innovation"

1 `http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/GPS.pdf`

2 Richard Langley é professor no Departamento de Geodésia e Engenharia Geomática da Universidade de New Brunswick (UNB), no Canadá. Após obter seu doutorado, passou dois anos no Departamento de Ciências da Terra e Planetárias do MIT. Em 2007 recebeu o Prêmio Johannes Kepler do Institute of Navigation.

3 `http://gauss.gge.unb.ca/gpsworld/EarlyInnovationColumns/Innov.1991.07-08.pdf`

6.2 ALGUNS TEMAS MOTIVADOS PELO GPS

Após o surgimento do sistema GPS, a geodésia passou a ser feita por satélites. Em agosto de 2019 são 31 em funcionamento[4]. O receptor (no nosso caso o smartphone) recebe e decodifica os sinais emitidos pelos satélites, fornecendo a sua localização[5].

As coordenadas geocêntricas cartesianas tridimensionais são as naturais para o sistema GPS. Fórmulas padronizadas transformam essas coordenadas cartesianas em coordenadas elipsoidais (latitude, longitude e altura elipsoidal) e, também, caso haja interesse, em coordenadas planas, tais como a projeção Universal Transversa de Mercator (UTM) a qual, como acabamos de ver, é bastante difundida.

Mentirosos no Everest (apenas como curiosidade $\cdots$)

`https://www.reuters.com/article/us-nepal-everest/gps-device-to-prevent-false-everest-claims-by-climbers-idUSKBN16R16Z`

`http://www.everest3d.de/services`

`https://www.vice.com/en_us/article/4xa4zp/when-the-internet-came-to-everest`

`http://www.spacedaily.com/reports/Everest_Gets_GPS_Station.html`

`https://www.dailymail.co.uk/sciencetech/article-4333556/Everest-climbers-GPS-proof-reaching-summit.html`

Atividade/Tarefa 21: Mentirosos no Everest

O professor deve observar que para o tratamento matemático do GPS são necessárias técnicas sofisticadas, como veremos no Capítulo 6. Portanto, o professor deverá ler bem mais além do que aquilo que faria com os alunos. Valerá a pena elaborar algumas atividades em classe sobre o GPS[6].

Já se pode encontrar uma boa quantidade de materiais didáticos em português explicando como o GPS funciona. Evidentemente, a matemática envolvida é apresentada de maneira muito simplificada. É importante "peneirar". Na busca o que aparece na frente nem sempre é o melhor, e nem sempre os alunos sabem discernir a qualidade.

Recomendamos por exemplo a série de seis videoaulas (com textos para o professor) *As aventuras do Geodetetive* produzida pelo IME-UNICAMP[7].

---

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_GPS_satellites`

[5] Seria interessante se o professor de física também fale sobre ondas eletromagnéticas, e o de biologia sobre a ecolocalização, que é empregada por vários mamíferos, desde golfinhos até os morcegos.

[6] Para informações básicas, ver por exemplo `https://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System`, `https://en.wikipedia.org/wiki/Multilateration`, `https://www.gps.gov`.

[7] `https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1102`

Para estas atividades, mencionamos alguns trabalhos apropriados para o Ensino Médio. Nos atemos apenas a monografias do Profmat e publicações da SBM.

- Matemática e Atualidade, Textos Profmat [66]
- Davi Dantas Lima, Desvendando a Matemática do GPS, TCC Profmat, 2013, [67]
- Expedito Henrique Ulisses Pereira, A Matemática do GPS, TCC Profmat, 2014 [68]
- Murilo Cezar Ducatti, Explorando a Memática do Posicionamento Geográfico, TCC Profmat, 2014 [69]
- Nadjara Silva Paixão de Deus, Equações Diofantinas Lineares e o GPS: nova conexão curricular, 2017 [70]
- Marcelo Cardoso de Moraes, O funcionamento do GPS e a matemática do Ensino Médio, 2015 [71]
- Ricardo Lagreca Salema, Das cordas ao GPS: um estudo sobre a Geometria Esférica, 2018 [18]
- Sérgio Alves, A matemática do GPS. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, v. 59, p. 17-19, 2006.
  `https://bdpi.usp.br/item/001514809`

Apresentaremos algumas atividades complementando o material destas monografias. A primeira consiste num exercício de geometria analítica no plano. Apesar de simples, leva a perguntas interessantes.

Interseção de dois círculos (figura 36)

Suponhamos ser possivel receber informações r_1 e r_2 sobre as distâncias de um local P a dois pontos bem determinados, A_1 e A_2 (digamos, duas torres de rádio). Os alunos notarão que se $d(A_1, A_2) > r_1 + r_2$, há alguma informação errada.

Suponhamos que as localizações de A_1 e A_2 e as distâncias r_1, r_2 sejam conhecidas precisamente. É possivel determinar P? Os alunos logo perceberão que há duas possibilidades. Os círculos são daoos por duas expressões quadráticas começando com $x^2 + y^2$. Podemos tomar a diferença, ficando com a equação de uma reta. De fato, é a reta que passa pelos dois pontos. Podemos expressar, digamos, y em função de x e jogar num dos círculos, obtendo uma equação do segundo grau em x.

Atividade/Tarefa 22: Interseção de dois círculos

Podemos determinar qual destes dois pontos é o correto com a informação vinda de uma terceira torre A_3. Não ocorrendo êrros nas localizações das torres e nas medições das distâncias, teriamos uma situação que os matemáticos chamam de “não genérica”: três circulos se encontrando num único ponto P (figura 37)[8].

A mesma idéia vale em três dimensões. Duas esferas ao se intersectar produzem um círculo. Se este círculo fura uma terceira esfera em algum lugar, digamos de fora para dentro, ter’a depois de sair, portanto teremos de novo dois pontos de interseção. A quarta esfera permite definir o ponto de interesse entre os dois possíveis e sua localização *exata*, se não tivessemos erros de medição.

Figura 36 – Interseção de duas circunferências

Fonte: [72]

Figura 37 – Interseção não genérica de três

Fonte: [72]

Voltando à figura 37, como verificar quando três circulos têm um ponto em comum? E que neste caso, esta solução é única? Subtraindo as equações duas as duas, obtemos um sistema de três equações lineares em duas incógnitas.

Ou seja, são equações para três retas. Um critério para a existência de soluções deste sistem é que o se anule o determinante da matriz 3×3 formada pelos coeficientes de x e y, junto com os termos independentes. Neste caso, duas situações podem ocorrer. Se o posto for dois, temos uma única solução, que é o que desejamos Mas se o posto for um, as três retas coincidem, e os dois pontos permanecem em igualdade de status. É fácil ver que neste caso os centros dos círculos estão alinhados numa mesma reta. Faz sentido: para triangular precisamos de um triângulo ...

Na realidade sempre há êrros nas medições. Imaginamos assim que existe uma pequena região onde P está localizado.

8 Quando três circulos tem uma única interseção produz-se uma bela geometria `http://mathworld.wolfram.com/Circle-CircleIntersection.html`

Trilateração em duas dimensões

Este seria um pequeno projeto de pesquisa usando Geogebra: desenhar esta região (incerteza de P). Os dados do problema são:

1. localizações dos pontos $A_i : (x_i, y_i)$ para $i = 1, 2, 3$.
2. incertezas nessas localizações: pequenos círculos de raios ϵ.
3. incerteza nas medições das distâncias de P às torres: $d_i \pm \delta$.

Pensamos que a solução é a interseção de três anéis, cada um deles centrado no ponto A_i correspondente, com raio médio d_i e espessura $\epsilon + \delta$. Estamos certos?

Atividade/Tarefa 23: Trilateração em duas dimensões

Imagens de círculos na esfera pela projeção UTM

As figuras 36 e 37 foram obtidas de uma aula no Portal do Professor do MEC ("Matemática na Prática: GPS", [72])

Com os conhecimentos que já adquirimos sobre mapas, perguntamos: estas figuras estão corretas?

Que projeção levaria círculos na esfera nos círculos desenhados no mapa? A escala de tamanho das distâncias se manteria?

Atividade/Tarefa 24: As figuras 36 e 37 estão corretas?

Em tempo: os links para a NASA sugeridos em [72] estão quebrados.
Sugerimos estes (esperando que não quebrem ràpidamente) :

`https://spinoff.nasa.gov/Spinoff2019/ps_1.html`

`https://www.nasa.gov/directorates/heo/scan/communications/policy/GPS.html`

`https://spaceplace.nasa.gov/gps-pizza/en/`

`https://spaceplace.nasa.gov/gps/en/` .

A seguinte tarefa elabora sobre isso. Qual é a imagem no plano de um círculo na esfera pela projeção de Mercator? Ver a Figura 38.

Figura 38 – Circulos de 2 mil e 3 mil km em torno da cidade de Maribor, na Eslovênia

Fonte: `https://braincrunch.tumblr.com/post/23672142073/mercators-egg`.

Imagens de círculos na esfera pela projeção UTM

As projeções tipo Mercator resultam da composição de uma projeção estereográfica S com a transformação T dada por (5.6). Como a projeçõ estereográfica leva circulos na esfera em circulos no plano, basta então olharmos como são as curvas imagens por T dos circulos

$$u = u_o + A\cos t\ ,\ \ v = v_o + A\sin t$$

Uma conta rápida nos dará

$$x = \arctan\left(\frac{v_o + A\sin t}{u_o + A\cos t}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(A^2 + u_o^2 + v_o^2 + 2A(u_o\cos t + v_o\sin t\right).$$

Estas curvas são bonitas. Seria interessante usar um software para desenha-las. A Figura 38 representa circulos de 2 mil e 3 mil km em torno da cidade de Maribor, na Eslovênia.

Atividade/Tarefa 25: Imagens de círculos na esfera pela projeção UTM

O que se faz quando há uma abundância de informações? Imaginemos que chegam dados fornecendo a distância a mais de três torres, e não queremos deixar de usar a informação de nenhuma delas. Para fixar idéias vamos ignorar as incertezas nas medições.

Aqui são duas incógnitas, as coordenadas (x, y) de P, e somos informados desde cedo na escola que um sistema contendo mais equações do que incógnitas é em geral um sistema impossível. O que fazer?

O método dos mínimos quadrados, criado por Gauss, resolve este "paradoxo da riqueza excessiva". Não é do escopo desta monografia entrar neste tema. Já foram produzidas várias dissertações do Profmat introduzindo mínimos quadrados no currículo do ensino médio, por exemplo [73], [74], [75], [76].

Façamos apenas algumas considerações para nosso problema. Se tivermos N torres, nosso sistema consiste em N equações do segundo grau em duas variáveis, todas começando com $x^2 + y^2$.

Uma possivel idéia: primeirmente usamos (e depois descartamos) a equação correspondente à última torre, digamos, aquela usada para fazer a discriminação. Subtraindo esta equação das demais, obtemos $N - 1$ equações lineares em x, y.

Se tivermos três torres, ficamos com duas equações lineares em duas incógnitas, e este sistema é resolvido muito fàcilmente.

Se tivermos $N \geq 4$ torres, o método dos minimos quadrados poderá ser aplicado, ao sistema de $N - 1$ equações lineares em duas incógnitas. Na verdade nos parece que fica mais robusto combinar as N equações duas a duas. Para $N = 3$ são três equações em duas incógnitas. Para $N = 4$ seriam 6 equações lineares a serem trabalhadas. O software Excel ou equivalentes tem "caixas pretas" para os mínimos quadrados em sistemas lineares. A monografia [77] pode ser consultada.

Para três dimensões podemos fazer o mesmo. Quando duas esferas se intersectam, elas têm um círculo em comum. Se este círculo "fura" uma terceira esfera, terá depois de sair. Vemos assim que, quando ocorre a interseção de três esferas, são também dois pontos.

Para obter o posicionamento de uma espaçonave, a informação de uma quarta esfera permitirá discriminar, anàlogamente ao caso planar, qual das duas é a solução correta.

Para a localização de um ponto na superfície da Terra, em princípio a informação vinda de dois satélites seria suficiente.

Novamente, existem diversas fontes de êrros e outras considerações em jogo. A monografia [78] trata do problema em três dimensões.

Atividade/Tarefa 26: Sistemas super determinados: mínimos quadrados

6.3 EFEITOS RELATIVISTICOS

Recomendamos de início o artigo de Marcelo Viana, *“Sem descobertas inúteis de Einstein o GPS não existiria”* , em sua coluna da Folha de São Paulo em 27/3/2019[9].

Recomendamos o artigo divulgatório de Neil Ashby [79] accessível a estudantes universitários. Para uma apresentação mais técnica, ver [80]. Neil Ashby[a], é membro da *Time and Frequency Division* do National Institute for Standards and Technology (NIST), o instituto metrológico dos EUA. Um primeiro artigo de divulgação foi publicado na revista Physics Today em 2002 Ashby ministrou um minicurso no workshop “Teaching General Relativity to Undergraduates”, promovido pela American Association of Physics Teachers. O material está disponível em [81]. Fazemos aqui apenas uma tradução (editada) da introdução:

“O Sistema de Posicionamento Global (GPS) oferece uma excelente oportunidade para introduzir conceitos de relatividade para estudantes de graduação, incluindo os que não cursam física. A familiaridade com as inúmeras aplicações do GPS motiva os alunos a entender a relatividade. Basta introduzir alguns princípios fundamentais: os postulados da relatividade especial e a universalidade da queda livre. Então, uma série de experimentos mentais leva ao colapso da simultaneidade, ao efeito Sagnac, ao efeito Doppler de primeira ordem, às mudanças de frequência gravitacionais e a dilatação do tempo.

Entre os importante efeitos relativísticos nos relógios dos satélite GPS incluem mudança de frequência devido aos efeitos gravitacionalis e a dilatação do tempo. Estes efeitos são tão grandes que, se não forem contabilizados, o sistema não seria eficaz para navegação. Relógios de referência na Terra são similarmente influenciados pela dilatação do tempo (devido à rotação da Terra) e mudanças de frequência gravitacional, em relação a um relógio “no infinito”. As diferenças de frequência entre relógios em órbita e relógios de referência na superfície da Terra, são muito importantes no GPS. A constância da velocidade da luz é essencial para a navegação usando GPS.

Este princípio também leva diretamente á relatividade da simultaneidade e ao efeito Sagnac, que deve ser contabilizado ao sincronizar relógios na vizinhança de Terra ou comparando relógios que estão a milhares de quilômetros de distância na superfície da Terra, mas que têm um ou mais satélites GPS á vista ao mesmo tempo. A relatividade da simultaneidade, a a constância de c, e o efeito Doppler de primeira ordem estão intimamente relacionados.’

Atividade/Tarefa 27: Efeitos Relativísticos

[a] `https://www.nist.gov/people/neil-ashby`

[9] https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2019/03/sem-descobertas-inuteis-de-einstein-gps-nao-existiria.shtml

6.4 LIVRO DE ALAN OXLEY

Esta referência [82] é acessível a um estudante universitário na graduação. Na introdução do livro, Oxley descreve bem a diferença de tecnologia entre um posicionamento por sistema satélite e um sistema de posicionamento terrestre. Nas discussões com o orientador, ele me apontou já desde o início algumas imprecisões. De fato, a resenha publicada na Mathematical Association on America foi boa, mas na realidade não foi entusiástica[10]. Seguem alguns trechos desta resenha, que descreve bem o conteúdo do livro.

"O Sistema de Posicionamento Global (GPS) agora está tão amplamente disponível que pode ser difícil lembrar como (relativamente) novo é e como é notável. Sinto certa aversão ao revisar um livro cujo título começa com a palavra "incertezas'. Foi a notável acurácia e precisão que me impressionaram desde a primeira vez.

No entanto, existem incertezas, e o livro descreve o que são e como surgem. Mas o título é um pouco enganador, porque o livro é realmente uma introdução técnica ao GPS com detalhes matemáticos e de engenharia. Primeiramente, o autor fornece algumas informações básicas sobre o problema de posicionamento, e como ele foi abordado em sistemas anteriores de navegação. Ele introduz o GPS nesse contexto e descreve algumas das maneiras pelas quais ele está sendo usado. Não são tão óbvias as aplicações para esportes, geofísica e gestão da vida selvagem, sem mencionar o uso como referência mundial para a hora. O GPS também claramente desempenha um papel no transporte da aviação civil para sistemas de transporte inteligentes e serviços de emergência.

O sistema GPS de linha de base possui 24 satélites em seis planos orbitais terrestres. Cada plano orbital possui quatro satélites e pelo menos um sobressalente. Os satélites transmitem um sinal que permite que um receptor calcule os valores do tempo de transmissão de quatro satélites e, assim, encontre sua posição em três dimensões. Embora a geometria do cálculo não seja complicada, a sincronização de tempo é complexa e começa com um código de sinal pseudo-aleatório de transmissão que é comparado e acertado com o relógio do próprio receptor e usado para calcular a hora de chegada de cada sinal. Correções por causa de efeitos relativísticos são incorporadas para lidar com as diferentes taxas no satélite e no receptor. O autor descreve os elementos básicos desse processo e fornece alguns exemplos de cálculos de GPS para problemas idealizados.

As incertezas no GPS ocorrem principalmente devido a erros de medição ou erros de interpolação relacionados às taxas de amostragem. Os erros surgem porque: efeitos

[10] `https://www.maa.org/press/maa-reviews/uncertainties-in-gps-positioning`. "Embora o autor ofereça uma grande quantidade de informações sobre o sistema GPS e seus usos, o tratamento é bastante instável e não particularmente bem integrado. O nível de detalhe também varia consideravelmente. Quase tudo o que um leitor pode querer saber está aqui, mas pode levar muito trabalho para juntar as peças."

ionosféricos causam um atraso de propagação, os relógios a bordo do satélite oscilam, erros de efemérides ocorrem para que as órbitas dos satélites sejam conhecidas imprecisamente, a geometria do satélite é desfavorável, a propagação de caminhos múltiplos ocorre com a reflexão de objetos terrestres e ocorrem erros de hardware. Uma variedade de remédios estão disponíveis e eles dependem da aplicação. Embora o GPS seja adequado em muitas circunstâncias, não é bom o suficiente para guiar os navios que entram ou saem de um porto ou para o pouso de uma aeronave. O autor descreve alguns aprimoramentos do GPS que podem torná-los possíveis futuramente.

Uma queixa atual sobre o GPS vem de corredores que observaram que o GPS superestima constantemente as distâncias que correm. As estatísticas de medição - não o próprio GPS - são responsáveis[11].

6.5 LIVRO DE GILBERT STRANG E KAI BORRE

> *"Measurements are all around us, today and tomorrow. The goal is to extract the maximum information from those measurements." [84]*

"O livro tem três partes intimamente ligadas. O primeiro é Álgebra Linear, que é a ferramenta fundamental no posicionamento de cálculos. O segundo é Geodésia, que inclui as ponderações corretas para erros de observação e o desenvolvimento de mínimos quadrados. O terceiro é o GPS, que descrevemos em detalhes em vários níveis: primeiro a estrutura básica do sistema GPS, depois os algoritmos que produzem posições precisas de pseudo-intervalos imprecisos, e, finalmente, a filtragem Kalman (e filtragem 'Bayes') que oferecem precisão no pós-processamento de uma longa série de observações."[12]

A resenha de Charles R. Schwarz, do National Geodetic Survey, foi muito boa:

"Este livro tem muitos pontos fortes. O primeiro é a variedade de pontos de vista que oferece. Se você não gostou de álgebra linear e mínimos quadrados antes, tente este livro. Se você já gosta desses assuntos, você também deve tentar este livro. Outra força é que o leitor vê muito material tratado com notação e em um estilo bastante consistentes. Uma terceira força é a grande riqueza de material que este livro inclui. Mesmo que o material sobre GPS venha no fim de um livro longo, contém a maior parte do encontrado em outros livros. Alguns tópicos, como o efeito da incerteza do controle e do método LAMBDA para estimar observações de GPS, aparecem em forma de livro pela primeira vez."

Recomendamos um passar de olhos no prefácio. Contém um artigo publicado originalmente no SIAM news de junho de 1997 (*The mathematics of GPS*), e os Caps. 14 e 15, com um detalhamento. Segue o parágrafo inicial do capítulo 14.

---

[11] O artigo *Why GPS makes distances bigger than they are* [83] descreve os problemas estatísticos que surgem fornece uma fórmula que estima o tamanho do erro.

[12] `http://www-math.mit.edu/~gs/books/gps.htm`

“A precisão inerente de um receptor GPS pode ser melhorada ou degradada. Ele é aprimorado pelo processamento cuidadoso, e é degradado ao aceitar (em vez de tentar eliminar) fontes significativas de erro. Começamos listando três técnicas críticas para alcançar precisão centimétrica e mesmo milimétrica no posicionamento:

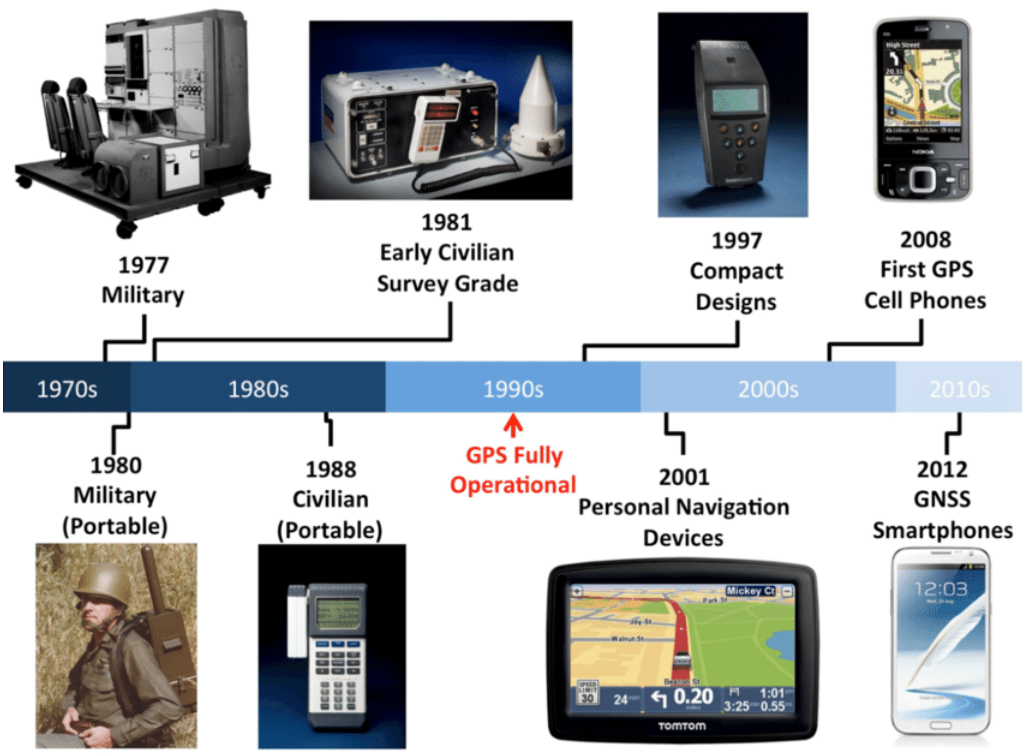
1. Trabalhar com dois ou mais receptores. A ideia chave do GPS diferencial (DGPS) é calcular diferenças de posição em vez de posição absoluta. Erros que são compartilhados pelos receptores serão cancelados quando formarmos diferenças.

2. Repetir as medições. Uma seq̀uência de observações tem uma variância significativamente menor do que uma única observação. Se o receptor estiver em movimento, o uso do *filtro de Kalman*[13] pode explicar mudanças de estado e novas observações.

3. Estimar cada fonte de erro nas observações.”

Finalmente, mencionamos uma tese de doutorado recente *Orbital Diversity for Global Navigation Stellite Systems* [85], bastante fácil de ler, contendo detalhada descrição da evolução[14] do GPS, de onde obtivemos a figura 39.

Figura 39 – A evolução do GPS



Fonte: [85]

[13] Técnica linear importante muito bem apresentada no livro.
[14] Ver também `https://tedium.co/2018/01/11/gps-history-evolution/`

7 PESQUISA: OTIMIZAÇÃO DE ITINERÁRIOS

O objetivo deste capítulo é apresentar uma área de pesquisa cuja motivação se relaciona com o esporte Orientação. Faremos inicialmente uma brevissima introdução łinguagem usada na *teoria dos grafos*.

7.1 TEORIA DOS GRAFOS

Temos facilidade de construir pontos bem definidos em vários locais por meio do google Earth, especialmente nas áreas urbanas, onde existem vários obstáculos construidos a serem ultrapassados ou transbordados. Por causa isso, o jovem orientista imaginará várias formas de montar o Mapa de Situações, a fim de construir as várias possibilidades de realizar o percurso. Como passar o mínimo de vezes pelas ruas, pelas pontes, pelas praças, pelos prédios, dentre outros obstáculos?

Podemos considerar cada local como um *vértice* e os caminhos permitidos entre os pontos como *arestas*. Podemos inclusive atribuir *pesos* a cada destas arestas, e inclusive introduzir nelas o sentido de percurso, de acordo com o grau de dificuldade, com por exemplo ladeira acima ou abaixo. Fica assim mais fácil pensar abstratamente nas diversas possibilidades de realizar o percurso.

Recordemos o problema que é comsiderado o exemplo fundador da teoria dos grafos, o problema das sete pontes de Königsberg. Na época de Euler havia sete pontes atravessando vários ramais do rio Pregel, que atravessa a cidade[1]. Como é muito bem descrito em várias monografias do Profmat, não detalharemos. Ver [86] para uma apresentação adequada a alunos do Ensino Médio.

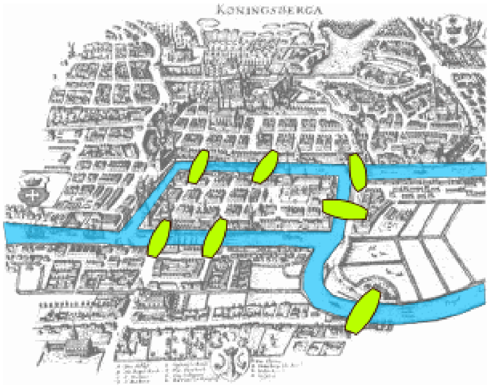
Os cidadãos de Königsberg gostavam de passear pela cidade e, mais especificamente, cruzando as pontes. Eles queriam começar em algum local da cidade, atravessar cada ponte exatamente uma vez, retornando ao local inicial. Você acha que isso pode ser feito?

Euler resolveu este problema em 1736, quando tinha 29 anos. Utilizou uma representação do problema através de um grafo. Com a ajuda de este modelo, ele foi capaz de responder a pergunta negativamente. Um grafo é algo muito simples, um desenho no qual temos alguns pontos e linhas ligando pares de pontos. No caso do problema das pontes, o grafo de Euler tinha tinha quatro pontos e sete linhas, que representavam as pontes. O desafio era fazer um passeio pelo grafo que partisse de um dos quatro pontos, percorresse cada uma das sete linhas uma única vez e voltasse ao ponto de partida.

Euler raciocinou provavelmente da seguinte maneira: ao passar por cada ponto, são "gastos" exatamente duas linhas, uma para entrar no ponto e outra para sair. Conclusão, cada vértice deve ter grau par de linhas.

[1] Depois da segunda guerra sobraram cinco, e a cidade agora se chama Kaliningrad, na Russia.

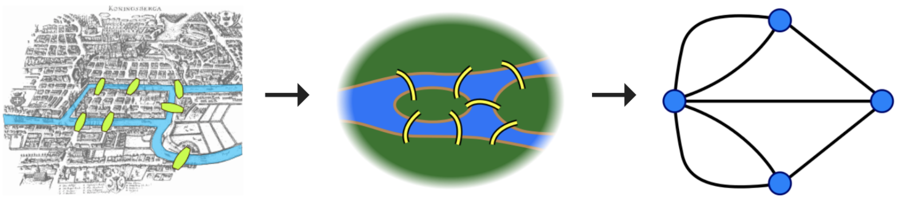
Figura 40 – As sete pontes de Königsberg



Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg`

Acontece que o grafo das pontes de Königsberg tem pontos de grau ímpar e, portanto, o problema não pode ter solução. Parece que atualmente, o problema das cinco pontes tem solução ...

Figura 41 – A idéia de Euler



Fonte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg`

Qual foi a importância da resolução desse problema para a matemática? O problema das pontes de Königsberg em si não tinha tanta relevância, mas já o raciocínio que Euler empregou teve sim muita importância para a resolução de outros problemas usando o mesmo tipo de lógica. Euler não só provou que o enigma das pontes não tinha solução, como deu um critério para verificar se qualquer outro problema semelhante tem solução, ou não. Ou seja, podemos utilizar a técnica dos grafos e aplicar em outra cidade, com um número diferente de pontes, com outras ligações, e adotar o mesmo raciocínio.

Como utilizar os grafos para a nossa realidade? A ideia de grafos serve de modelo para uma enorme quantidade de problemas práticos. Um deles tem a ver com o desafio enfrentado pelos carteiros. O carteiro parte da sede dos correios, percorre as ruas para fazer as entregas e volta ao seu posto de trabalho. Ele realiza um percurso diariamente para entregar as cartas e é útil que sempre que possível, evite passar por uma rua mais de uma vez. Essa situação é um problema prático de certa importância. Na coleta de lixo temos, praticamente, o mesmo problema. Como veremos a seguir, a prática do Esporte Orientação tem motivado inúmeras aplicações em logística.

7.2 O PROBLEMA DA ORIENTAÇÃO

De fato, o Esporte Orientação fornece inspiração para uma importante e atual área de pesquisa, que podemos chamar de *otimização de percursos*. Ela é relacionada com o clássico *problema do caixeiro viajante*[2]. São muitas as possibilidades de aplicação em logística, para uso civil e militar. Mencionamos como fonte básica um tratado que acaba de ser publicado [1], *Orienteering Problems: Models and Algorithms for Vehicle Routing Problems with Profits*. Os autores são dos mais ativos pesquisadores no tema.

Percebemos também que já há alguns trabalhos utilizando estas técnicas numa área de grande importñcia humanitária: prevenção e mitigação de desastres naturais. Apontamos as recem lançadas coletâneas [87], *Handbook of Disaster Risk Reduction & Management* and [88] *Towards Mathematics, Computers and Environment: A Disasters Perspective* e em particular os capítulos [89], na primeira e [90], na segunda. Faremos logo adiante uma descrição do artigo [91] em que o problema de orientação é usado em equipes de resgate.

Formulação matemática do OP básico

Como a distância e o tempo de viagem entre qualquer par de pontos de controle são determinados pela geografia, são quantidades conhecidas. Assim, uma versão básica do problema da orientação pode ser formulada da seguinte maneira:

> (OP) Dados n nós no plano euclidiano, cada um com uma pontuação $s(i) \geq 0$ com $s(1) = s(n) = 0$, encontre uma rota de pontuação máxima por esses nós, começando em 1 e terminando em n, de comprimento (ou duração) não superior a T_{max}.

Assim o o problema de orientação é uma generalização do problema do vendedor ambulante, e o denotaremos por GTSP.

O TRATADO DE VANSTEEWEGEN E GUNAWAN [1]

Segue uma tradução editada do prefácio. "Quando empresas de logística ou comércio eletrônico distribuem todos os tipos de produtos para seus clientes, eles querem minimizar seus custos de distribuição. Isso geralmente é obtido resolvendo os chamados problemas de roteamento de veículos, onde o objetivo é minimizar o custo total, a distância ou o tempo necessário para visitar todos os clientes.

---

[2] Para informações básicas sobre o famoso problema do vendedor ambulante, denotado TSP (em inglês, "travelling salesman problem") ver por exemplo `https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem`.

Este tutorial apresenta aos leitores *problemas de roteamento com lucros.* Nesses problemas, cada cliente produz um certo lucro mas nem todos os clientes precisam ser visitado. O chamado *problema da orientação* (OP) é de longe o problema mais estudado nesta categoria de problemas de roteamento, o OP é o foco principal deste livro, e outros problemas são apresentados como variantes do OP, e apontamos as semelhanças e diferenças entre essas variantes. O objetivo do OP é determinar o melhor subconjunto de clientes a visitar e em qual ordem, para que o total o lucro é maximizado e um determinado tempo não é excedido.

Este livro explica e ilustra claramente, para acadêmicos e profissionais, as definições e modelos matemáticos disponíveis para esses problemas de roteamento com lucros e introduz oportunidades de pesquisa. Este livro mostra aos leitores que muitos problemas práticos podem ser modelados de maneira apropriada como um problema de roteamento com lucros, e não como um problema de roteamento regular. Além disso, o livro apresenta diferentes técnicas científicas de solução rigorosa para algumas variantes. Para entender melhor os problemas e sua relevância, este tutorial também discute uma variedade de aplicações em diferentes áreas, como logística, turismo e "crowdsourcing".

Este livro discute o OP, o OP da equipe, o OP (equipe) com janelas de tempo, o problema da turnê rentável, e o problema da coleta de prêmios do vendedor ambulante. Outras variantes (com restrições de capacidade, dependência no tempo, otimização estocástica, etc.) são discutidos mais brevemente.

Limitamos ainda um pouco mais este livro ao chamado 'problemas de roteamento localizados', em que os clientes têm um determinado local e não consideramos os 'problemas de roteamento em segmentos, onde dirigir por uma rua inteira é considerado como um único cliente.

O livro visa principalmente estudantes de pós-graduação (mestrado, MBA ou doutorado) em engenharia, economia ou matemática aplicada e, obviamente, pesquisa operacional. Também é adequado para estudantes em final de graduação com alguma experiência em pesquisa operacional".

A seguir faremos um breve apanhado sobre alguns artigos entre os que encontramos em nossas buscas. Evidentemente apenas tocamos uma pequena porcentagem da literatura já existente. Os apresentamos em ordem cronológica:

7.3 BREVE APANHADO DA LITERATURA

Tsiligirides [92]

Este é o artigo mais antigo que encontramos na literatura. Por este motivo, achamos que vale a pena fazer uma tradução (editada) de um trecho da introdução. A motivação é apresentada de maneira clara e convincente!

“Orientação é um esporte: uma mistura de corrida de cross-country e navegação através de uma floresta, usando um mapa e uma bússola. Os concorrentes começam em intervalos de, digamos, um minuto e têm como objetivo encontrar vários ’pontos de controle’ que foram colocados na floresta e cujas localizações estão marcadas nos mapas dos concorrentes. A forma mais comum de orientação é o evento de orientação (OE), no qual o competidor deve visitar todos os pontos de controle na ordem dada e o vencedor consegue isso no tempo mínimo. Há também uma segunda forma desse esporte, conhecida como evento de orientação de pontuação (S.O.E.), em que os concorrentes não precisam visitar todos os controles. Cada ponto de controle possui uma pontuação ou número de pontos alocados, e o objetivo do competidor é maximizar sua pontuação total dentro de um determinado prazo.

Além dos requisitos de aptidão física e boa capacidade de navegação para a forma padrão de evento, S.O.E. exige que o competidor execute um problema de otimização, que perceba suas limitações quanto a quais e quantos pontos de controle ele deve alcançar e, a partir do conhecimento das pontuações atribuídas a cada controle, planeje sua rota para usar quase todo o tempo disponível. Pontos de penalidade severa são cobrados aos competidores que retornarem depois do prazo. Pontuações mais baixas geralmente são alocadas para os pontos de controle próximos à área de início e fim e pontuações maiores para aqueles mais distantes, embora também sejam levados em consideração o quão difícil o controle é encontrar e o quão distante o controle está de outros controles.

Um bom concorrente deve ter uma idéia muito boa da distância total que ele pode percorrer no tempo disponível. Portanto, estudando cuidadosamente as posições e pontuações de controle, ele deve planejar sua rota de acordo. Sua própria escolha deve ser ficar perto do começo e do fim e pegue muitos controles de baixa pontuação ou se aventurar na direção da borda do mapear e pegar um número menor de controles com pontuação mais alta. Tendo decidido sua estratégia geral, ele pode precisar revisá-la à medida que sua corrida avança, observando o tempo restante, sua posição atual e as posições dos controles não visitados. Um orientador sabe o tempo necessário para correr entre dois pontos de controle. Portanto, esses intervalos de tempo são completamente conhecidos.

O mesmo modelo matemático poderia ter sido produzido a partir de um problema físico diferente. Considere, por exemplo, o problema em que um vendedor ambulante tem várias cidades que ele poderia visitar, mas, diferentemente do problema do vendedor ambulante (TSP), ele não precisa visitar cada um deles. Ele sabe o número de vendas que pode esperar realizar em cada cidade e, portanto, deseja planejar sua rota para maximizar seu número total de vendas, mantendo o comprimento total de sua rota à distância que ele pode percorrer em um dia (ou semana). Essa formulação pode ser referida como um problema generalizado de vendedores ambulantes (GTSP), no qual as cidades assumem o papel de pontos de controle e o número de vendas substitui as pontuações.”

Golden et al. [93]

Este é o primeiro artigo, entre os que encontramos, mencionando o fato de que os problemas inspirados pelo Esporte Orientação são do tipo “NP-hard”. Este jargão é muito conhecido na teoria da complexidade dos algoritmos. O tema foge ao nosso escopo, apenas mencionamos uma referência antiga, mas ainda básica [94]. Em termos um pouco esotéricos a leigos como nós somos, colocamos apenas para dar uma idéia: um problema é *NP-hard* se a existência de um algoritmo polinomialmente limitado para ele implica a existência de um algoritmo polinomialmente limitado para todos os problemas ditos *NP-completos* (vai ser preciso ver a definição destes[3]...). O GTSP claramente se enquadra na classe de problemas NP-hard, pois contém o problema do vendedor ambulante (TSP) como um caso especial. E este é sabidamente conhecido com sendo NP-hard.

De modo que na maioria dos casos as soluções são sub-otimais e heuristicas, como veremos a seguir. Assim, a otimização destes problemas envolve muito de arte para balizar a metodologia, nunca são técnicas definitivas.

Laporte e Martello [95]

Os autores mostram a equivalencia do GTSP (eles chamam de STSP, ”selective”) com um problema de programação linear inteira. A idéia é bem interessante. Seja C^* o conjunto ordenado de vértices no circuito ideal. O problema pode ser formulado buscando os valores de uma variável binária x_{ij} assumindo o valor 1 se e somente se i e j forem dois vértices consecutivos de C^* (o primeiro vértice é assumido como sendo consecutivo ao último).

Chao, Golden e Wasil [96]

Na sua heurística, os autores decompõem o problema em dois níveis. No primeiro, definem um subconjunto de pontos de controle para visitar. No segundo nível, consideram o problema de vendedor ambulante (TSP) ou o problema de caminho Hamiltoniano mais curto sobre o subconjunto selecionado de pontos de controle. Os concorrentes podem começar e terminar em locais diferentes. Os dois níveis desse problema estão intimamente relacionados. Se o caminho obtido a partir da solução do TSP de segundo nível não for viável, precisaremos remover alguns pontos do subconjunto de pontos selecionados. Se o caminho é viável, então, para maximizar a pontuação total, tentam adicionar pontos que não foram selecionados no primeiro nível. Cada TSP pode ser pensado como um caso especial em que T_{max} é muito grande e os locais inicial e final coincidem.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems`

Feillet, Dejax, e Gendreau [97]

Este é o primeiro artigo de revisaão que encontramos. A nomenclatura utilizada para o GTSP é “problemas do vendedor ambulante com lucros”. Um lucro é associado a cada vértice. O objetivo geral é a otimização simultânea do lucro coletado e dos custos de viagem. Esses dois critérios de otimização aparecem na função objetivo ou como uma restrição. Neste artigo, é proposta uma classificação de TSPs com lucro e a literatura existente é comparada. Diferentes classes de abordagens para a modelagem e técnicas de solução são identificadas e comparadas. As conclusões enfatizam o interesse dessa classe de problemas, tanto em relação às aplicações quanto aos resultados teóricos.

Vansteenwegen, Souffriau e Van Oudheusden [98]

Este também é um artigo de revisão. Muitas variantes relevantes sãio apresentadas. Todas as abordagens exatas de soluções publicadas e (meta) heurísticas são discutidas e comparadas. Interessantes problemas abertos de pesquisa concluem este artigo.

Chekuri, Korula, Nitish e Martin [99]

Este artigo tem interesse para os que trabalham na complexidade de algoritmos. Os autores considerem algoritmos aproximados para o problema de orientação (e algumas variantes). Afirmam que a estimativas teóricas que conseguiram são melhores que as obtidas por outros autores.

Ekici e Retharekar [100]

Estudam o problema com múltiplos agentes com recompensas dependentes do tempo (acrônimo MAMCP). É um problema de equipe. Existem vários agentes para coletar recompensas decrescentes linearmente ao longo do tempo. O objetivo é maximizar o excedente total (recompensa total coletada menos o custo total da viagem) encaminhando vários agentes provenientes de um depósito central.

Archetti, Bianchessi e Speranza [101]

Os autores consideram um Problema de Orientação em Equipe (que designam por TOP, T significando ”team”). Uma frota de veículos estádisponível para atender um conjunto de clientes. Um lucro é associado a cada cliente. O objetivo é encontrar o subconjunto de clientes a servir para maximizar o lucro total coletado. Um limite de tempo é imposto à duração máxima de cada rota. Há também a versão capacitada do TOP (acrônimio CTOP). Neste, uma demanda está associada a cada cliente e as rotas dos veículos precisam satisfazer os limites de tempo e capacidade. Outra variante é o do passeio rentável capacitado (CPTP), onde o objetivo é maximizar a diferença entre o lucro coletado e o custo da viagem, enquanto as rotas estão sujeitas apenas a restrições de capacidade.

Angelelli, Archetti e Vindigni [102]

Aqui, o acrônimo é COP. Os clientes são agrupados em agrergados (“clusters”). Um lucro é associado a cada agregado, mas é obtido apenas se todos os clientes pertencentes ao mesmo agregado forem atendidos.

Cura [103]

Este estudo aborda o chamado *problema de orientação de equipe com janelas de tempo* (TOPTW) , que pertence a uma classe bem conhecida de problemas de roteamento de veículos. Segundo o autor, seu estudo propõe uma técnica relativamente nova, chamada *abordagem de colônia artificial de abelhas* (ABC) para resolver o TOPTW.

O interessante aqui é como o autor formula o algoritmo inspirado na divisão de tarefas em uma colonia de abelhas. Vale a pena chamar o professor de biologia para uma discussão conjunta!

As abelhas estã o entre os insetos sociais mais estudados. Seu comportamento de forrageamento, aprendizado, memorizaçã o e características de compartilhamento de informações foram recentemente uma das áreas de pesquisa mais interessantes em inteligência coletiva.

Gunawan, Lau e Yuan [104]

Os autores estudam o Problema de Orientação Dependente do Tempo (TDOP). Em certas redes, o tempo sa rota entre dois nós realmente depende das propriedades da rede, como níveis de congestionamento, zona de construção em determinados segmentos etc., o que afetará o tempo de viagem entre dois nós. Nossa aplicação alvo deste trabalho é fornecer orientação automática aos visitantes dos parques temáticos, levando em consideração que o tempo de espera de um parque temático varia com o tempo. O objetivo é maximizar a utilidade geral das atrações visitadas dentro do período de visitas disponíveis do turista. Formulam o problema como um modelo de programação linear inteira (ILP). Em seguida, desenvolvem várias heurísticas.

Verbeeck, Sörensen, Aghezzaf and Vansteenwegen [105]

Este artigo traz uma solução, que dizem ser rápida, para o TDOP (ver o artigo anterior). Segundo os autores, permite resolver problemas com ate’ 100 nós em alguns segundos. A heurística se baseia uma analogia com a observação de colonias de formigas.

Bock e Sanita [106]

O foco deste artigo está em uma generalização natural do problema de orientação, no qual também consideramos que a chegada de um nó para o consecutivo exige o consumo de uma capacidade. O objetivo é encontrar um caminho cuja demanda total não excede uma capacidade C. O acrônimo utilizado para se referir a esta variante é COP.

Gunawan, Lau e Vansteenwegen [107]

Este é o artigo de revisão mais recente (2016) que encontramos. Os autores discutem diversas variantes do problema de Orientação: em equipe, com janelas de tempo, com dependência de tempo, problema estocástico, em segmentos, multiagentes, em agrupamentos, e vários outros. Além da descrição dasa heurísticas, várias linhas promissoras são apontadas para pesquisa futura.

Kara, Bicakci e Derya [108]

Esta é uma comunicação curta num congresso recente (3rd Global Conference on Business, Economics, Management and Tourism, Roma, 2015).

Afirmam ter encontrado duas formulações polinomiais para OP (na verdade parecem ser apenas para subproblemas pois o OP como vimos é NP-hard). O desempenho das formulações propostas é testado em “benchmarks” da literatura. Afirmam que são capazes de resolver todas as instâncias de referência que foram resolvidas usando outras heurísticas aé agora, e que “a maioria das soluções mais conhecidas está longe dos valores ideais.” É bom desconfiar quando os “deliverables” parecem exagerados.

Mei, Salim e Li [109]

Os autores introduzem uma variante nem um pouco modesta: uma generalização levando em conta, ao mesmo tempo, múltiplos objetivos e custos/benefícios dependentes do tempo em cada nó. O acrônimo é MOTDOP. A heurtística é, mis uma vez, inspirada biomimeticamente - uma colônia de formigas.

Verbeeck, Vansteenwegen e Aghezzaf [110]

Este artigo apresenta uma versão estocástica do problema de orientação dependente do tempo e com janelas de tempo. O tempo de viagem entre dois locais é uma função estocástica que depende do horário de partida no primeiro local. A principal contribuição deste artigo está no design de um algoritmo rápido e eficaz para resolver esse problema desafiador. Para validar o desempenho e a relevância prática desse algoritmo proposto, vários experimentos foram realizados em instâncias de benchmark realistas, com tamanho e propriedades variados.

Angelelli, Archetti, Filippi e Vindigni [111]

Recentemente, versões probabilsticas do problema de orientação tem sido propostas, como no arrtigo anterior. Neste, a ideía é assumir cada nó estaria disponível apenas com certa probabilidade. Os autores descrevem uma formulação como um problema de programação linear inteira estocástica.

Dolinskaya, Shi e Smilowitz [91]

Este trabalho é motivado por operações de busca e salvamento (SAR) em um cenário pós-desastre, como o enfrentado pelas equipes de SAR após um terremoto, forte tempestade ou inundação. O objetivo de cada equipe é procurar estruturas danificadas ou desmoronadas na área afetada para resgatar o maior número possível de sobreviventes dentro de um prazo especificado (geralmente 48 a 72 h em tais locais). As equipes de SAR podem se comprometer com um conjunto de estruturas para pesquisar no início do horizonte de tempo para garantir a cobertura da área e evitar redundância e ineficiência.

Neste artigo, examinam as decisões de uma única equipe de SAR. Consideram uma rede em que alguns dos nós são nós de recompensa, correspondendo a prédios desmoronados com sobreviventes em potencial e os nós restantes correspondem a cruzamentos de estradas. Além disso, como imediatamente após um desastre, como um terremoto, poucas informações sobre a infraestrutura de transporte podem ser conhecidas, os tempos de viagem na borda são frequentemente estocásticos. Assim, é preciso viajar pela rede para aprender a rede e pode se beneficiar do ajuste dinâmico dos caminhos em resposta às informações aprendidas.

Os autores avaliam até que ponto podem aumentar a probabilidade de coletar maior recompensa nestes problema de orientação com tempos de viagem estocásticos, adaptando caminhos entre nós de recompensa conforme os tempos de viagem são revelados. Avaliam se essa adaptabilidade afeta as opções para os nós de recompensa a serem visitados, em um cenário em que o agente deve se comprometer em recompensar os nós antes de iniciando operações. Exploram portanto os desafios computacionais de adicionar considerações adaptativas na seleção de nós de recompensa.

Lu, Benlic e Wu [112]

Nesta variante do Problema de Orientação, chamado *Visitas Obrigatórias e Restrições Exclusivas* (OPMVEC) é visitar um conjunto de nós obrigatórios sendo os demais nós opcionais, respeitando a restrição de compatibilidade entre os nós e a restrição máxima do orçamento de tempo total. É uma variação do problema clássico de orientação que se origina de várias aplicações da vida real.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos nesta monografia atividades concretas relacionadas ao Esporte Orientação e Matemática, tanto em sala de aula quanto fora da Escola. Apresentamos também tópicos de estudos para os professores interessados, envolvendo a matemática do GPS e problemas de otimização de percursos conhecidos como "o problema da Orientação".

Procuramos demonstrar neste trabalho que a iniciação deste esporte nas crianças e adolescentes promove o bom uso das TICS. Estamos convictos que a Orientação, um esporte da Natureza, contribui para contrabalançar alguns dos aspectos negativos da internet. Concluimos com algumas breves considerações sobre a novo milênio, a era da internet, apenas mencionando alguns aspectos socio-econômicos e psicológicos, que não haviamos tocado no texto.

Educadores e neurocientistas tem estudado o impacto da internet no comportamento dos jovens, por exemplo no tempo de atenção, com a disseminação dos computadores, tablets e smartphones, tanto em sala de aula quanto no dia a dia [113], [114]. Poderemos sugerir estes links como ponto de partida[1].

Também estão impactando na sociedade como um todo a avalanche de informações[2], e pior, o envio proposital de "fake news" por robôs[3]. Vale a pena ler uma entrevista de Jimmy Wales, o idealizador da Wikipedia[4]. *Recomendamos o uso criterioso das TICs.* No Vale do Silício muitos pais tem limitado o acesso a internet a seus filhos[5].

A forma de pensar e o comportamento dos jovens da "geração do Milênio" e da "geração Z" tem recebido também muitos estudos. Uma pesquisa recente foi realizada no Brasil[6] sobre a geração Z, mas o estudo não envolveu os "nem-nem" de baixa renda, um quarto de nossa juventude. Como motivá-los?

E para os jovens talentosos das famílias de baixa renda, muitos deles superdotados? O Brasil precisa deles! Como protegê-los e oferecer-lhes as oportunidades que tanto merecem? Concluimos nossa monografia sugerindo estas leituras [115], [116], [117], [118] (e outras). É preciso fazer contactos com ONGs como a Acerta[7] para direcionar os alunos e alunas que os professores notam serem diferenciados dos demais.

---

[1] `https://www.scientificamerican.com/article/are-digital-devices-altering-our-brains/` `https://qz.com/1699489/experts-disagree-on-the-effects-of-technology-on-children/` .

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Information_overload`

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Fake_news`

[4] https://medium.com/@jonathanwich/wikipedia-founder-jimmy-wales-talks-clickbait-fake-news-the-information-wars-and-how-to-fix-a-d50ee91e1f26

[5] https://www.businessinsider.com/silicon-valley-parents-raising-their-kids-tech-free-red-flag-2018-2 https://www.bbc.com/news/av/world-us-canada-48533999/silicon-valley-parents-banning-tech-for-their-kids

[6] `https://www.mckinsey.com/industries/consumer-packaged-goods/our-insights/true-gen-generation-z-and-its-implications-for-companies`

[7] `https://www.facebook.com/AcertaSuperdotados/`

A APENDICES

A.1 DISCIPLINA ORIENTAÇÃO NA UFRJ

Uma disciplina *F*undamentos do Esporte Orientação consta na grade curricular do curso de Licenciatura em Educação Física da UFRJ. Duas turmas estão sendo oferecidas em 2019/2, /EFA e EFB, ministradas, respectivamente, pelos professores José Maria Pereira da Silva e Thiago Azevedo de Arruda[1] .

Estes professores criaram um projeto para implementar o Esporte Orientação noâmbito escolar a alunos do ensino público, aproveitando a interdisciplinaridade contida no mesmo como auxílio no aprendizado de outras disciplinas regulares. A principio no município do Rio de Janeiro, podendo o projeto se estender por outros municípios, desenvolvendo metodologias de aplicação lúdicas e inovadoras [119], [120].

Corroborando no fato que o Esporte Orientação é uma ferramenta rica e valorosa, pretendendo fazer com que os alunos aprendam a conviver com a natureza de uma forma divertida, saudável e educativa, visando à preservação e utilização consciente do meio ambiente. O projeto pretende também capacitar professores de Educação Física, que não tenham cursado a disciplina EFC-350 - Fundamentos do Desporto Orientação e demais que não sejam oriundos da UFRJ e os docentes de outras disciplinas afins, a trabalhar com o Esporte.

Figura 42 – UFRJ/EEFD referência nacional em Corridas de Orientação

Fonte: `https://www.eefd.ufrj.br/conhecendo-a-eefd/1260`

[1] `https://www.siga.ufrj.br/sira/inscricao/GradeHoraria.jsp?distribuicaoCurricular_oid=FD563FE6-92A4-F799-3D56-CCE6543B7571`

A.2 TICs NA EDUCAÇÃO

Encontramos muitos artigos no site da ASCD (Association for Supervision and Curriculum Development), que reune educadores de mais de 120 paises. Sobre STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics: `http://www.ascd.org/research-a-topic/stem-resources.aspx`

Segue uma lista de volumes disponiveis online na revista *Educational Leadership*

`http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/archived-issues.aspx`

July 2019 : High-Powered Teams

June 2017 : Gearing Up for Change

December 2015/January 2016 : Co-Teaching: Making It Work

March 2013 : Technology-Rich Learning

September 2009 : Teaching for the 21st

Summer 2006 : Helping All Students Succeed (online only)

May 2006 : Challenging the Status Quo

December 2005/January 2006 : Learning in the Digital Age

February 2004 : Improving Achievement in Math and Science

December 2003/January 2004 : New Needs, New Curriculum

February 1999 : Integrating Technology into the Curriculum

October 1990 : Learning Styles and the Brain

December 1989/January 1990 : Cooperative Learning

February 1988 : Restructuring Schools to Match a Changing Society

December 1986/January 1987 : Curriculum Development in the U.S. and the World

March 1986 : Empowering Students and Teachers Through Technology

December 1983/January 1984 : Mathematical and Scientific Literacy for the High Tech Society

March 1982 : Education in Other Nations

April 1980 : Students Can Learn to Be Better Problem Solvers

February 1978 : State/Federal Role in Curriculum Development

January 1978 : Curriculum Evaluation: Uses, Misuses, Nonuses

February 1975 : School-University Partnership for Teacher Growth

January 1975 : Alternatives to Grading

November 1973 : Women and Education

May 1972 : Community Involvement in Curriculum

November 1970 : Technology and the Further Reach

October 1970 : Political Power, the School, and the Culture

December 1968 : Court Decisions: Impact on Schools

November 1968 : Racial Integration: Roads to Understanding

October 1968 : Impact of Social Forces on Education

May 1968 : Technology: Its Effects on Education

A.3 SALA DE AULA INVERTIDA/HIBRIDISMO

A aula invertida é uma abordagem híbrida de ensino cuja origem é atribuida a Salman Khan. Nascido na Luisiana, filho de imigrantes pobres bengalis, diz em entrevista[2] que em sua adolescencia tinha duas opções: crime ou matemática. Acabou no MIT como aluno destacado, estudando engenharia elétrica e negócios[3].

Khan não é um educador de origem, mas teve a idéia de criar em 2006 uma plataforma, a Khan Academy onde voluntariamente professores poderiam depositar pequenas videoaulas, para uso livre por outros professores e por quem quisesse aprender por sua pròpia conta[4]. Como sabemos, esta idéia se espalhou e atualmente existem inúmeras plataformas deste tipo, governamentais e não governamentais.

O que é a sala de aula invertida?

Como não temos formação na área de Educação além do que vimos da Licenciatura, seremos esquemáticos. Como método pedagógico, a formalização da idéia da *flipped classroom* parece ter sido proposta por Jonathan Bergmann e Aron Sams, em 2007 [121], [16]. Uma das motivações iniciais era simplesmente encontrar uma solução para o absenteismo dos estudantes do ensino médio nas aulas presenciais [122]. Em [123] e [124] são apresentados relato de experiências no Brasl.

A aula invertida visa possibilitar que os conteúdos sejam expostos fora da sala de aula através de mídias ou práticas supervisonadas pelo professor, ambas usando os recursos tecnológicos e práticos no cotidiano do aluno [125]. Ainda é cedo para avaliar o potencial e os perigos decorrentes também das chamadas MOOCs (acrônimo para *Massive Open Online Courses*. Um coisa é clara, porém: o aprendizado invertido não é usar vídeos nas nossas aulas. É sobre como usar melhor o tempo com os alunos, usar melhor o avanço tecnológico em prol da Educação, usar os recursos sociais inter-relacionais, e, além disso, saber que não esgota o conteúdo dentro da sala de aula.

Para a Matemática, deseja-se que através do desenvolvimento de atividades via *sala de aula invertida* a Matemática possa ser observada e entendida não somente como exposição de equações, ou na melhor das hipóteses um instrumento prático e aplicado no dia-a-dia. O ideal seria o desenvolvimento do interesse e auto-estima para que os alunos percebam que podem também criar.

---

2 https://www.nytimes.com/2011/12/05/technology/khan-academy-blends-its-youtube-approach-with-classrooms.html?pagewanted=all

3 `https://en.wikipedia.org/wiki/Sal_Khan`
`http://porvir.org/en/salman-khan-man-flipped-classroom/`

4 `https://pt.khanacademy.org`

O que a Educação Física pode contribuir para outras matérias?

Entre muitos outros artigos que estão aparecendo sobre o uso da sala de aula invertida em Educação Física mencionamos apenas como exemplos [126], [127], [128], [129], [130], [131], [132], [133], além a literatura neles mencionada, principalmente neste último.

De fato, professores de outras disciplinas podem aprender muito com os de Educação Física, como aponta o livro de Nathan Barber [134]. Uma professora de História Universal para pré-adolescentes, Joanne Fuchs, fez uma interessante resenha[5].

> Barber says, 'For every minute a coach talks or lectures, a minute passes during which players get no touches on the ball'. Think about that. Every minute a teacher lectures is a minute the student is not engaged in a meaningful learning activity. The advice here is not to never lecture, but to actively involve every student in the learning process as much as possible.
>
> ··· Barber reminds us that by 'explaining the why before students ask, a great teacher equips them with confidence (from those touches), enhances their understanding and provides them with a roadmap for where the lesson and the work are taking them.'

Como a tecnologia pode melhor ajudar?

Já em 1968 Freire [135] mostrava a necessidade de ultrapassar a educação por ele chamada de "bancária" . Revendo seu pensamento, em 1996 popõe a pedagogia da autonomia [136]. José Moran[6] corrobora:

> "As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa....
>
> Desafios e atividades podem ser dosados, planejados e acompanhados e avaliados com apoio de tecnologias. Os desafios bem planejados contribuem para mobilizar as competências desejadas, intelectuais, emocionais, pessoais e comunicacionais. Exigem pesquisar, avaliar situações, pontos de vista diferentes, fazer escolhas, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta, caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação, os alunos precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a tornar

[5] `https://www.middleweb.com/20460/a-playbook-of-instructional-strategies/`

[6] `http://www2.eca.usp.br/moran/`

> conscientes alguns processos, a estabelecer conexões não percebidas, a superar etapas mais rapidamente, a confrontá-los com novas possibilidades. Quanto mais aprendamos próximos da vida, melhor". (Moran, [137], 2015, p. 17).

Segundo Moran a intersecção de metodologias ativas com tecnologias digitais permite o desenvolvimento de uma melhor aprendizagem, por meio de práticas, atividades, jogos, problemas e projetos que combinem colaboração e personalização. A verdadeira transformação das Escolas, não ocorrerá no uso dos instrumentos tecnológicos em si mesmos, mas sim, nas mudanças de práticas pedagógicas.

Ensino a distância

Não discutiremos este tópico importante. A EAD está em grande expansão no Brasil, e é sem dúvida um instrumento importante de inserção social. Deixamos registradas apenas duas perguntas.

- Como incremenrtar políticas públicas para o EAD?
- A expansão do mercado EAD pelo ensino privado estará sendo acompanhada?

Segue um trecho de um recente comunicado de imprensa sobre prioridades do MEC até 2030[7]. Mencionamos duas delas.

> Educação conectada - O MEC vai conectar 6,5 mil escolas rurais por meio de satélite em banda larga em todos os estados brasileiros. A iniciativa é para colégios com mais de 200 alunos. Já foram conectados, até o momento, 4.600 instituições de ensino. Serão investidos R$ 120 milhões até o fim deste ano. Aproximadamente 1,7 milhão de estudantes serão beneficiados. Outros 17 milhões de alunos serão contemplados com conectividade em escolas urbanas. O MEC repassará R$ 114 milhões para fomentar a internet de 32 mil colégios. Também por meio do programa, as Universidades Federais do Ceará (UFC), de Goiás (UFG) e de Santa Catarina (UFSC) desenvolverão games para tornar as aulas dos anos iniciais do ensino fundamental mais interativas e atraentes. O trabalho é feito pela Plataforma MEC RED. Serão investidos 3 milhões até o final de 2019.
>
> Formação de docentes - Até 2020, serão estabelecidas trilhas de formação para professores da educação básica por meio de cursos de ensino a distância com a disponibilização de materiais de apoio e disponibilização de recursos. Hoje há docentes que lecionam em áreas nas quais não são graduados. O plano é dar condições para que avancem em seus estudos.

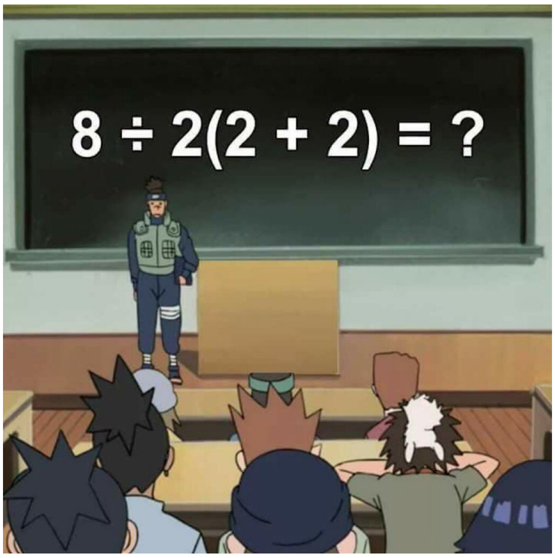
[7] http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211-218175739/77991-mec-firma-compromisso-para-tornar-brasil-referencia-na-america-latina-ate-2030

Hibridismo

Em nosso ponto de vista, para as aulas relativas de Matemática faz-se necessário usar todos os métodos pedagógicos disponíveis, tanto o dito “bancário” quanto o “libertador“, de maneira pragmática. São válida tanto a aula clássica, organizada, mas chata, e a outra (propositalmente?) confusa mas instigante. Por vezes a conbrança rigorosa, por vezes cada aluno no seu ritmo, sem pressa e sem estresse.

Este “cartoon” talvez ilustre bem o “método confuso”’, que tem seus méritos...

Figura 43 – Deu no NYT (Steven Strogatz, 2/8/2019)



Fonte: `https://as.cornell.edu/news/math-equation-tried-stump-internet`

Nota-se que estas ações híbridas exigem uma transformação comportamental do docente e discente, tanto dentro quanto fora da sala de aula. O aluno passa a ter mais autonomia e flexibilidade, exigindo-se dele um envolvimento afetivo para desenvolver suas habilidades. Quanto ao professor, exige maior tempo de preparação das aulas práticas e teóricas.

Diante do exposto, percebe-se que essa metodologia não diminui os preparativos do professor, e nem exclui a necessidade de lecionar. Inverter a sala de aula acarretará um grande esforço do professor. Terá ele as condições adequadas para realizar este trabalho?

Em resumo: penso que é interessante que os educadores realizem oficinas de aprendizagem invertida, usando todos os recursos disponíveis: esporte, tecnologia, recreação e dentre outras, a fim de estimular a democracia do saber, permitindo que os seus alunos possam navegar nos mais variados saberes, de maneira ora coletiva e ora individual. Torna-se ainda mais rico e complexo o papel dos professores com essa nova metodologia.

REFERÊNCIAS

[1] VANSTEENWEGEN, P.; GUNAWAN, A. *Orienteering problems: Models and algorithms for vehicle routing problems with profits.* Springer Nature Switzerland, 2019.

[2] LEWIS, M. *Moneyball. o homem que mudou o jogo.* Intrinseca,, 2015.

[3] SILVA, M. A. F. D. Esporte orientação: Conceituação, resumo histórico e proposta pedagógica interdisciplinar para o currículo escolar. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Educação Física, 2011.

[4] FRIEDMANN, R. M. P. *Fudamentos de orientação, cartografia e navegação terrestre.* Universidade Federal Tecnológica do Paraná, 2008.

[5] MARGATO, B.; SANTOS, M. D.; BARROS, H. L. D. Propriedades magnéticas de organismos magnetotácticos: um trabalho multidisciplinar. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 29, p. 347–353, 2007.

[6] PEREIRA, E. F.; VILLIS, J. M. C.; PAIM, M. C. C. Avaliação física e psicológica em atletas de orientação. *Revista de Educação Física do Exército*, v. 134, p. 10–21, 2006.

[7] IOAN-SABIN, S.; MARCEL, P. Socialization through sport, effects of team sports on students at primary level, 2014.

[8] DE FÁTIMA FERNANDES DE MELLO, E.; TEIXEIRA, A. C. A interação social descrita por Vigotski e a sua possível ligação com a aprendizagem colaborativa através das tecnologias de rede, 2012.

[9] DA SILVA, M. C.; DE REZENDE, L. B. V.; VICENTE, C. L. P.; DA SILVA, C. C.; DE SOUZA, T. M.; JÉSSICA; MONTEIRO, D. H. A iniciação da prática corporal de aventura orientação no Instituto Presbiteriano Álvaro Reis de assistência à criança e ao adolescente (INPAR). *Revista de Educação Física do Exército*, v. 86, n. 2, p. 134–136, 2017.

[10] SOARES, A. J. G.; DE MELO, L. B. S.; DA COSTA, F. R.; BARTHOLO, T. L.; BENTO, J. O. Jogadores de futebol no Brasil: mercado, formação de atletas e escola. *Rev. Bras. Ciênc. Esporte*, v. 33, n. 4, 2011.

[11] MEC, Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio (PCNEM), acesso 07/10/2019 http://portal.mec.gov.br/programa-saude-da-escola/195-secretarias-seb-educacaobasica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211.

[12] HARTMANN, A. *O desporto orientação como ferramenta para o ensino da matemática.* 2004. Dissertação (Mestrado em Física) - Departamento de Matemática da UNB, 2004.

[13] SOUZA, D. Q. O.; ARAÚJO, A. C.; DE PADUA DOS SANTOS, A.; DIAS, M. A. Esporte orientação: relato de experiência pedagógica no ensino médio. *Cadernos de Formação RBCE, UFRN*, p. 88–100, 2015.

[14] ABRAMOF, E.; SHITARA, N.; DE SOUZA, C. A. W.; BLANCO, C. M. R.; DE FREITAS CHAGAS JUNIOR SIMONE REDIVO, M. Inpe: Plano diretor 2016-2019, 2016.

[15] KONO, M.; MIYAKI, T.; REKIMOTO, J. Jackin airsoft: Localization and view sharing for strategic sports. In: . VRST '17. New York, NY, USA: ACM, c2017. p. 3:1–3:4.

[16] SAMS, A.; BERGMANN, J. Flip your students' learning. *Educational Leadership: Technology-Rich Learning*, v. 70, n. 6, p. 16–20, 2013.

[17] JUNIOR, J. G.; SOARES, V. P.; GLERIANI, J. M.; DE SOUZA, A. L.; RIBEIRO, C. A. A. S. Influência dos usos de sistemas geodésicos e de coordenadas geográficas nos mapeamentos cartográficos originados de imagens de satélites. *Anais XIV Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Natal*, p. 1787–1794, 2009.

[18] SALEMA, R. L. Das cordas ao GPS: um estudo sobre a Geometria Esférica, dissertação Profmat, Colégio Pedro II. 2018.

[19] ZANELLA, I. A. *Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações, dissertação Profmat.* 2013. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, 2013.

[20] DE ABREU, S. M. *Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição, dissertação Profmat.* 2015. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de São João del-Rei, 2015.

[21] DOS SANTOS, J. A. F. *Matemática aplicada à Geografia, dissertação Profmat.* 2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Ceará, 2016.

[22] HOGBEN, L. *Mathematics for the million, 4th ed., 42th printing 1968.* W. W. Norton, New York, 1937.

[23] HOGBEN, L. *Maravilhas da matematica: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos.* Globo, 1946.

[24] DE CAMARGO, V. L. V. *Trajetórias sobre o globo terrestre: Um estudo da geometria da esfera nos mapas cartográficos.* 2009. Dissertação (Mestrado em Física) - Unicamp, 2009.

[25] DE LIMA MACEDO, C. *Sobre a projeção de mercator, dissertação Profmat.* 2018. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Cariri, 2018.

[26] SANTOS, K. C. *A matemática na cartografia e o uso de mapas no ensino de matemática na educação básica, dissertação Profmat.* 2018. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Piauí, 2018.

[27] FILHO, A. N. *A relação cartográfica e geometria diferencial de mercator a gauss.* 2012. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, (http://hdl.handle.net/11449/102109), 2012.

[28] DA SILVA AMARAL, A. J. *Geometria esférica e cartografia: uma proposta de estudo e atividades para o ensino médio, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal Fluminense, 2014.

[29] MARIANI, M. *Cartografia e investigação matemática: Possibilidades para uma intervenção pedagógica com alunos do 9o ano do ensino fundamental.* 2018. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade do Vale do Taquari, 2018.

[30] MÜLHBAUER, M. *Cartografia: uma introdução aos conceitos de geometria não euclidiana na educação básica, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.

[31] DO CARMO DIAS BUENO, M. *(coord.) atlas Geografico Escolar.* Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2018.

[32] NABONNAND, P. Le problème mathématique des cartes géographiques au 19e siècle. *Actas de la Academia Nacional de Ciencias (Cordoba, Argentina)*, v. 15, p. p. 99–115, 2012.

[33] HILBERT, D.; COHN-VOSSEN, S. *Geometry and the imagination.* American Mathematical Society, 1999.

[34] COURANT, R.; ROBBINS, H. *What is mathematics?* Oxford University Press, 1941.

[35] OSSERMAN, R. Mathematical mapping from Mercator to the millennium, in. In: HAYES, D.; SHUBIN, T. (Eds.) *Mathematical Adventures for Students and Amateurs.* Mathematical Association of America, 2004.

[36] MONZON, L. W.; GRAVINA, M. A. Uma introdução às funções de variável complexa no ensino médio: uma possibilidade através do uso de animações interativas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 27, p. 645–661, 2013.

[37] NEEDHAM, T. *Visual complex analysis.* Oxford University Press, 2009.

[38] ALEKSEEV, V. B. *Abel's theorem in problems and solutions: Based on the lectures of professor v.i. arnold.* Springer Verlag, 2010.

[39] ARNOLD, V. I. On teaching mathematics (disponível online em https://dsweb.siam.org/the-magazine/all-issues/vi-arnold-on-teaching-mathematics). *Russian Mathematical Surveys*, London, v. 53, n. 1, p. 229, 1998.

[40] DE FÁTIMA TEIXEIRA SILVA, I. (coord.) Noções básicas de Cartografia. Technical report, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 1999.

[41] MILNOR, J. A problem in cartography. *The American Mathematical Monthly*, v. 76, n. 10, p. 1101–1112, 1969.

[42] PAPADOPOULOS, A. Maps with least distortion between surfaces: From geography to brain warping. *Notices of the AMS*, v. 66, n. 10, p. 1928–1639, 2019.

[43] CHEBYSHEV, P. *Sur la construction des cartes géographiques, oeuvres de p.l. chebyshev, vol. 1, 233-236; 239-247.* Chelsea, 1962.

[44] FRANKICH, K. *Optimization of geographic map projections for canadian territory.* 1982. Tese (Doutorado em Física) - Simon Fraser University, 1982.

[45] BERMEJO, M.; OTERO, J. Minimum conformal mapping distortion according to Chebyshev's principle: a case study over peninsular Spain. *Journal of Geodesy*, v. 79, p. 124–134, 2005.

[46] PEDZICH, P. Conformal projection with minimal distortions, International Cartographic Conference, 2005.

[47] SZATMÁRI, D. Optimization of conformal cartographic projections for the Slovak republic according to Chebyshev's theorem. *Slovak Journal of Civil Engineering*, v. 23, n. 4, p. 19–24, 2015.

[48] ORIHUELA, S. Optimal conformal map projections in harmonic polynomials in terms of Gauss-Schreiber coordinates. *Survey Review*, v. 49, n. 354, p. 227–236, 05 2017.

[49] HILL, G. W. Application of Tchebychef's principle in the projection of maps. *Annals of Mathematics, Second Series*, v. 10, n. 1, p. 23–36, 1908.

[50] SNYDER, J. P.; STEWARD, H. *Bibliography of map projections.* U.S. Government Printing Office, Bulletin 1856-1857, 1989.

[51] SNYDER, J. P. *Map projections – a working manual.* U.S. Government Printing Office, Bulletin 1395, 1987.

[52] CANTERS, F. *Small-scale map projection design.* CRC Press, 2002.

[53] PAPADOPOULOS, A. Euler and Chebyshev: From the sphere to the plane and backwards. *Proceedings in cybernetics (Jubilee of Academician Vladimir Betelin)*, v. 22, n. 55-69, 2016.

[54] GHYS, É. Sur la coupe des vêtements. Variation autour d'un thème de Tchebychev. *Enseign. Math.*, v. 57, n. 165-208, 2011.

[55] PAPADOPOULOS, A. Quasiconformal mappings, from Ptolemy's geography to the work of Teichmüller, arxiv:1702.03756. 2017.

[56] PAPADOPOULOS, A. Nicolas-Auguste Tissot: A link between cartography and quasiconformal theory. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 71, n. 4, p. 319–336, 2017.

[57] DARBOUX, G. Sur la construction des cartes géographiques. *Bulletin des sciences mathématiques*, v. 35, n. 2, p. 23–28, 1911.

[58] GRAVÉ, D. Démonstration d'un théorème de Tchébychef généralisé. *Journal fur die reine and angew. Math. (Crelle Journal)*, v. 140, p. 247–251, 1911.

[59] AO DO CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies, 6 ed.* Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[60] CHANG, S.-Y. A. Conformal invariants and partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc*, v. 42, p. 365–393, 2005.

[61] REICHEL, L. On polynomial approximation in the complex plane with application to conformal mapping. *Math. Comp.*, v. 44, p. 425–433, 1985.

[62] THOMPSON, R. B. Global positioning system: The mathematics of GPS receivers. *Mathematics Magazine*, v. 71, n. 4, p. 260–269, 1998.

[63] LANGLEY, R. The mathematics of GPS. *GPS World*, July, August 1991.

[64] LANGLEY, R. GPS by the numbers: A sideways look at how the global positioning system works. *GPS World*, April 2010.

[65] WELLS, D. (coordinator) guide to GPS positioning, disponivel em http://www2.unb.ca/gge/pubs/ln58s.pdf. Technical report, Canadian GPS Associates, 1986.

[66] ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Matemática e atualidade, vol. 1.* Sociedade Brasileira de Matemática, 20??

[67] LIMA, D. D. Desvendando a matemática do GPS, dissertação Profmat, Universidade Federal de Sergipe. 2013.

[68] PEREIRA, E. H. U. *A matemática do GPS, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Piauí, 2014.

[69] DUCATTI, M. C. *Explorando a matemática do posicionamento geográfico, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - UNESP, São José do Rio Preto, 2014.

[70] PAIXÃO DE DEUS, N. S. Equações diofantinas lineares e o GPS: nova conexão curricular, dissertações Profmat, Universidade Federal da Bahia. 2017.

[71] DE MORAES, M. C. O funcionamento do GPS e a matemática do Ensino Médio, dissertações Profmat, Universidade Federal de São Carlos. 2015.

[72] GASPAROTO, L. Matemática na prática: GPS. http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1480.

[73] DE ALMEIDA, R. N. *O método dos mínimos quadrados : Estudo e aplicações para o ensino médio, dissertação profmat.* 2015. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2015.

[74] GONCALVES, L. D. *Aproximação usando o método dos mínimos quadrados, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de São João del-Rei, 2014.

[75] DA CUNHA, J. C. V. *O método dos mínimos quadrados: uma proposta ao ensino médio para o ajuste por retas, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - Unirio, 2014.

[76] ESPINDOLA, M. O. *Método de mínimos quadrados no ensino médio, dissertação Profmat.* 2014. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal da Grande Dourados, 2014.

[77] DA SILVA, A. E. S. *O ajuste de retas pelo método dos mínimos quadrados e secções didáticas de solução LSQ para o ensino médio, dissertação Profmat.* 2015. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Ceará, 2015.

[78] DE SOUZA, W. B. *Método dos mínimos quadrados aplicado a um problma de geoposicionamento, dissertação Profmat*. 2018. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2018.

[79] ASHBY, N. Relativity and the Global Positioning System. *Physics Today*, v. 55, n. 5, p. 41–47, 2002.

[80] ASHBY, N. Relativity in the Global Positioning System. *Living Rev. Relativity*, v. 6, n. 1, 2003.

[81] ASHBY, N. Relativistic effects in the Global Positioning System. In: . c2006.

[82] OXLEY, A. *Uncertainties in GPS Positioning: A Mathematical Discourse*. Elsevier Science, 2017.

[83] RANACHER, P.; BRUNAUER, R.; TRUTSCHNIG, W.; DER SPEK, S. V.; REICH, S. Why GPS makes distances bigger than they are. *International Journal of Geographical Information Science*, v. 30, n. 2, p. 316–333, 2016. PMID: 27019610.

[84] STRANG, G.; BORRE, K. *Linear algebra, geodesy, and gps*. Wellesley-Cambridge Press, 1997.

[85] REID, T. G. R. *Orbital diversity for global navigation stellite systems*. 2017. Tese (Doutorado em Física) - Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, 2017.

[86] CARDOSO, B. N. *Grafos eulerianos na educação básica, dissertação Profmat*. 2017. Dissertação (Mestrado em Física) - PUC-Rio, 2017.

[87] MADU, C. N.; KUEI, C.-H. *Handbook of disaster risk reduction & management*. World Scientific, 2017.

[88] SANTOS, L. B. L.; NEGRI, R. G.; DE CARVALHO, T. J. *Towards mathematics, computers and environment: A disasters perspective*. Springer, Cham, 2019.

[89] BERTAZZI, L.; CHERUBINI, S. S. M. Natural disaster management in Italy, in Handbook of Disaster Risk Reduction. World Scientific, 2017. Cap. 21, p. 523–537.

[90] SANTOS, L. B. L.; LONDE, L. R.; DE CARVALHO, T. J.; S. MENASCHÉ, D.; VEGA-OLIVEROS, D. A. *About interfaces between machine learning, complex networks, survivability analysis, and disaster risk reduction*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 185–215.

[91] DOLINSKAYA, I.; SHI, Z. E.; SMILOWITZ, K. Adaptive orienteering problem with stochastic travel times. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, v. 109, p. 1 – 19, 2018.

[92] TSILIGIRIDES, T. Heuristic methods applied to orienteering. *Journal of the Operational Research Society*, v. 35, n. 9, p. 797–809, 1984.

[93] GOLDEN, B. L.; LEVY, L.; VOHRA, R. The orienteering problem. *Naval Research Logistics (NRL)*, v. 34, n. 3, p. 307–318, 1987.

[94] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. *Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness*. New York, NY, USA: W. H. Freeman, 1979.

[95] LAPORTE, G.; MARTELLO, S. The selective travelling salesman problem. *Discrete Applied Mathematics*, v. 26, n. 2, p. 193 – 207, 1990.

[96] CHAO, I.-M.; GOLDEN, B. L.; WASIL, E. A. A fast and effective heuristic for the orienteering problem. *European Journal of Operational Research*, v. 88, n. 3, p. 475 – 489, 1996.

[97] FEILLET, D.; DEJAX, P.; GENDREAU, M. Traveling salesman problems with profits. *Transportation Science*, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA, v. 39, n. 2, p. 188–205, May 2005.

[98] VANSTEENWEGEN, P.; SOUFFRIAU, W.; OUDHEUSDEN, D. V. The orienteering problem: A survey. *European Journal of Operational Research*, v. 209, n. 1, p. 1 – 10, 2011.

[99] CHEKURI, C.; KORULA, N.; PáL, M. Improved algorithms for orienteering and related problems. *ACM Trans. Algorithms*, New York, NY, USA, v. 8, n. 3, p. 23:1–23:27, July 2012.

[100] EKICI, A.; RETHAREKAR, A. Multiple agents maximum collection problem with time dependent rewards. *Computers & Industrial Engineering*, v. 64, n. 4, p. 1009 – 1018, 2013.

[101] ARCHETTI, C.; BIANCHESSI, N.; SPERANZA, M. Optimal solutions for routing problems with profits. *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, n. 4, p. 547 – 557, 2013. Seventh International Conference on Graphs and Optimization 2010.

[102] ANGELELLI, E.; ARCHETTI, C.; VINDIGNI, M. The clustered orienteering problem. *European Journal of Operational Research*, v. 238, n. 2, p. 404 – 414, 2014.

[103] CURA, T. An artificial bee colony algorithm approach for the team orienteering problem with time windows. *Computers & Industrial Engineering*, v. 74, p. 270 – 290, 2014.

[104] GUNAWAN, A.; LAU, H.; YUAN, Z. *A mathematical model and metaheuristics for time dependent orienteering problem*. Angewandte Mathematik und Optimierung Schriftenreihe. Helmut-Schmidt-Univ., Prof. für Angewandte Mathematik, 2014.

[105] VERBEECK, C.; SÖRENSEN, K.; AGHEZZAF, E.-H.; VANSTEENWEGEN, P. A fast solution method for the time-dependent orienteering problem. *European Journal of Operational Research*, v. 236, n. 2, p. 419 – 432, 2014.

[106] BOCK, A.; SANITA, L. The Capacitated Orienteering Problem. *Discrete Applied Mathematics*, v. 195, p. 31–42, 2015.

[107] GUNAWAN, A.; LAU, H. C.; VANSTEENWEGEN, P. Orienteering problem: A survey of recent variants, solution approaches and applications. *European Journal of Operational Research*, v. 255, n. 2, p. 315 – 332, 2016.

[108] KARA, I.; BICAKCI, P. S.; DERYA, T. New formulations for the orienteering problem. *Procedia Economics and Finance (3rd Global Conference on Business, Economics, Management and Tourism)*, v. 39, p. 849 – 854, 2016.

[109] MEI, Y.; SALIM, F. D.; LI, X. Efficient meta-heuristics for the multi-objective time-dependent orienteering problem. *European Journal of Operational Research*, v. 254, n. 2, p. 443 – 457, 2016.

[110] VERBEECK, C.; VANSTEENWEGEN, P.; AGHEZZAF, E.-H. Solving the stochastic time-dependent orienteering problem with time windows. *European Journal of Operational Research*, v. 255, n. 3, p. 699 – 718, 2016.

[111] ANGELELLI, E.; ARCHETTI, C.; FILIPPI, C.; VINDIGNI, M. The probabilistic orienteering problem. *Computers & Operations Research*, v. 81, p. 269 – 281, 2017.

[112] LU, Y.; BENLIC, U.; WU, Q. A memetic algorithm for the orienteering problem with mandatory visits and exclusionary constraints. *European Journal of Operational Research*, v. 268, n. 1, p. 54 – 69, 2018.

[113] GASSER, J. P. A. *Born digital: Understanding the first generation of digital natives.* Basic Books, New York, 2008.

[114] WILMER, H. H.; SHERMAN, L. E.; CHEIN, J. M. Smartphones and cognition: A review of research exploring the links between mobile technology habits and cognitive functioning. *Frontiers in psychology*, v. 8, p. 605–605, 04 2017.

[115] GAMA, M. C. S. S. *Educação de superdotados: teoria e prática.* EPU, 2006.

[116] GAMA, M. C. S. S. As teorias de Gardner e de Sternberg na educação de superdotados. *Revista de Educação Especial, UFSM*, v. 27, n. 50, p. 665–674, 2014.

[117] VIRGOLIM, A. M. R.; KONKIEWITZ, E. C. *(orgs.), altas habilidades/superdotação, inteligência e criatividade: Uma visão multidisciplinar.* Papirus Editora, 2014.

[118] DO ESPÍRITO SANTO COELHO, V.; CESTARI, P. G.; DA SILVA LIMA3, E. B. A inclusão escolar e os alunos com altas habilidades/superdotação. *Contemporâneos: Revista de Artes e Humnidades*, , n. 16, 2017.

[119] DA SILVA PEDREIRA, F.; ARAÚJO, F. H. M.; SANT'ANNA, K. B. S.; DA SILVA, J. P. Esporte orientação como ferramenta pedagógica. *Revista Extensão & Sociedade*, v. 5, n. 3, 2019/11/04 2012.

[120] DA SILVA PEDREIRA, F.; DA SILVA, J. M. P.; ANNA, K. B. S. S.; SILVA, K. R. Corrida de orientação: Proposta de inclusão do esporte nas aulas de educação física escolar. In: . c2009. p. 1–6.

[121] BERGMANN, J.; SAMS, A. *Flip your classroom: Reach every student in every class every day.* Association for Supervision and Curriculum Development, 2012.

[122] VATSADZE, E. Basics of flipped classrom, in higher education new technologies and innovation (https://atsu.edu.ge/ejournal/henti/indexeng.html, 2017).

[123] NETO, R. N. B.; DE LIMA, R. W. Sala de aula invertida: uma revisão sistemática da literatura, 2017.

[124] CORRÊA, P. M. H. *A plataforma Khan Academy como auxílio ao ensino híbrido em matemática: um relato de experiência, dissertação Profmat.* 2016. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Rio Grande, 2016.

[125] DATIG, I.; RUSWICK, C. Four quick flips: Activities for the information literacy classroom. *College & Research Libraries News*, v. 74, n. 5, p. 249–257, 2013.

[126] CHEN, A.; MARTIN, R.; ENNIS, C. D.; SUN, H. Content specificity of expectancy beliefs and task values in elementary physical education. *Research Quarterly for Exercise and Sport*, v. 79, n. 2, p. 195–208, 06 2008.

[127] HAYMAN, R. A flipped learning maiden voyage: Insights and experiences of undergraduate sport coaching students. *Innovative Practice in Higher Education*, v. 3, n. 2, p. 81–102, 2018.

[128] HEINERICHS, S.; PAZZAGLIA, G.; GILBOY, M. B. Using flipped classroom components in blended courses to maximize student learning. *Athletic Training Education Journal*, v. 11, n. 1, p. 54–57, 2019/11/03 2016.

[129] GARCÍA, I. G.; LEMUS, N. C.; MORALES, P. T. Las flipped classroom a través del smartphone: efectos de su experimentación en educación física secundaria. *Prisma Social: revista de investigación social*, v. 15, p. 296–351, 2015.

[130] THOMPSON, G. A.; AYERS, S. F. Measuring student engagement in a flipped athletic training classroom. *Athletic Training Education Journal*, v. 10, n. 4, p. 315–322, 2019/11/03 2015.

[131] BARKER, D.; WALLHEAD, T.; QUENNERSTEDT, M. Student learning through interaction in physical education. *European Physical Education Review*, v. 23, n. 3, p. 273–278, 2019/11/06 2016.

[132] REDDAN, G.; MCNALLY, B.; CHIPPERFIELD, J. Flipping the classroom in an undergraduate sports coaching course. *International Journal of Sports Science & Coaching*, v. 11, n. 2, p. 270–278, 2019/11/03 2016.

[133] ØSTERLIE, O. Can flipped learning enhance adolescents' motivation in physical education? an intervention study. *Journal for Research in Arts and Sports Education*, v. 2, n. 1, 2019/11/04 2018.

[134] BARBER, N. *What teachers can learn from sports coaches: A playbook of instructional strategies*. Routledge, New York, 2014.

[135] FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. Paz e Terra, 1974.

[136] FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*. Paz e Terra, 1996.

[137] MORÁN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. In: DE SOUZA E OFELIA ELISA TORRES MORALES (ORGS.), C. A. (Ed.) *Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens*. https://uepgfocafoto.wordpress.com/2774-2/colecao-midias-contemporaneas-convergencias-midiaticas-educacao-e-cidadania-aproximacoes-jovens-vol-ii/: Foca-Foto, PROEX/UEPG, 2015. v. 2, p. 15–33.