Universidade Federal do Amapá - UNIFAP

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

PROFMAT

Dissertação de Mestrado

DISCALCULIA E O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Fernando Cabral Correia

Macapa - AP

Agosto de 2019

DISCALCULIA E O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Fernando Cabral Correia

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Fundação Universidade Federal do Amapá Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Simone de Almeida Delphim Leal.
Co-orientador: Prof. Me. Neylan Leal Dias.

Macapá - AP

Agosto de 2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborada por Cristina Fernandes – CRB2/1569

Correia, Fernando Cabral
Discalculia e o ensino de análise combinatória / Fernando cabral Correia ; Orientadora, Simone de Almeida Delphim Leal ; Coorientador, Neylan Leal Dias. – Macapá, 2019.
136 f.

Dissertação (Mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aprendizagem. 3. Análise combinatória. 4. Discalculia. I. Leal, Simone de Almeida Delphim, orientadora. II. Dias, Neylan Leal, coorientador. III. Fundação Universidade Federal do Amapá. IV. Título.

511.6 C824d
CDD. 22 ed.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FERNANDO CABRAL CORREIA** intitulada: **DISCALCULIA E O ENSINO DE ANALISE COMBINATÓRIA** após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós Graduação.

Macapá, 24 de agosto de 2019.

Prof.ª Dr.ª Simone de Almeida Delphim Leal
Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)

Prof. Dr. Erasmo Senger
Avaliador interno (UNIFAP)

Prof. Drª. Leila do Socorro Rodrigues Feio
Avaliador interno (UNIFAP)

Prof. Me. Neylan Leal Dias
Avaliador externo (PEM/FEB/UNESP)

Macapá, 24 de agosto de 2019.

À Chuck Norris por me inspirar com sua força e poder infinito.

Ao Chaves pelos momentos de descontração.

Agradecimentos

A Deus, o grande arquiteto do universo.

A minha amada esposa pelo apoio, incentivo e companheirismo.

Aos meus professores, Prof. Dr. Guzman Isla, Profª. Dra. Simone Leal, Prof. Dr. Walter Cardenas, Prof. Dr. Gilberlândio Dias, Prof. Dr. Ítalo Duarte, pelos ensinamentos.

Aos colegas de curso e grandes amigos que conquistei durante o Mestrado, Artur, Camilo, Denílson, Carlos, José, Allan, Célio, Ageane Lígia, Alex, Josué, Ronaldo e, em especial, Paulo Roberto Miranda, o homem que tudo tinha e nada lhe faltava.

A minha amada filha Rita de Cássia F. Cabral Correia, a quem espero proporcionar uma vida voltada para o conhecimento.

A minha companheira de trabalho, Professora Danila Martins pelo apoio durante a execução deste trabalho.

"Demore o tempo que for para decidir o que quer da vida, e depois que decidir não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir"

Zaratrusta

Resumo

CORREIA, Fernando Cabral. **Discalculia e o ensino de Análise Combinatória. 2019. 115f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – UNIFAP – Fundação Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2019.**

Esta dissertação foi elaborada a partir da experiência vivenciada enquanto aluno do ensino médio, período em que o autor sentiu dificuldade para aprender os tópicos de análise combinatória. Desta forma, a pesquisa teve como principal objetivo analisar a aprendizagem de tópicos de análise combinatória (AC) entre quarenta e um alunos do 2º ano do ensino médio regular e vinte e oito alunos de Educação de jovens e Adultos (EJA) que apresentaram dificuldades de aprendizagem, em especial, buscando identificar e observar aqueles com indícios de discalculia (ID). O trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual José do Patrocínio, e foi fundamentado na teoria da engenharia didática que caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas"em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino, e iniciou com a aplicação de um teste com 20 questões para identificar possíveis indícios de discalculia (ID) entre os alunos. A discalculia é um tipo de transtorno de aprendizagem caracterizada por uma inabilidade ou incapacidade de pensar, refletir, avaliar ou raciocinar processos ou tarefas que envolvam conceitos matemáticos. Não existe uma causa única para se justificar as fases das dificuldades com a linguagem Matemática, todavia esse acometimento pode causar grandes problemas à pessoa, sobretudo em idade escolar. A aprendizagem tem um papel muito importante no ensino da Matemática, uma vez que é contínua e segue

acompanhando os diferentes níveis de desenvolvimento do ser humano, entretanto, alguns estudantes apresentam dificuldades para aprender Matemática. De acordo com dados do Ministério da Educação – MEC (2017), 71,67% dos alunos têm nível insuficiente de aprendizado em Matemática. Desses, 23% estão no nível 0, o mais baixo da escala de proficiência. Vários fatores contribuem para o insucesso na disciplina, tais como os aspectos culturais, sociais, pedagógicos e políticos que circundam o estudante. Nesta pesquisa, optou-se por trabalhar com os conteúdos de análise combinatória, no intuito de analisar as dificuldades de aprendizagem matemática, uma vez que os conceitos utilizados em contagem são básicos (multiplicação, divisão, adição e subtração), e isoladamente não são suficientes para o desenvolvimento do tema, eis que o conhecimento de mundo é essencial para que o estudante consiga interpretar e desenvolver seu raciocínio referente ao tema, como exemplo, problemas com dados, baralhos, moedas, dentre outros que exigem conhecimento prévio para que se possa avançar na resolução de problemas. Assim, a identificação de alunos do ensino médio com ID foi eficaz no sentido proporcionar conhecimento a respeito do nível de dificuldade dos alunos; a analise da aprendizagem dos tópicos de análise combinatória dentre os alunos do 2º ano do ensino médio (regular e EJA) mostrou que os alunos envolvidos na pesquisa, apresentaram dificuldade com os temas de Análise combinatória, e aqueles com ID apresentam maior dificuldade em Matemática e consequentemente menor rendimento nas atividades propostas, pois seus desempenhos não ultrapassaram 30% do total de atividades propostos. Conclui-se que utilizar os parâmetros de discalculia são eficazes para revelar as habilidades matemáticas dos alunos e que os conteúdos de Análise combinatória, pela exigência de matemática básica e riqueza de informações que instigam o raciocínio matemático e podem fazer a ligação do conteúdo escolar com o contexto social do educando, torna-se um conteúdo eficaz para buscar a redução das dificuldades matemáticas dos alunos.

Palavras-chave: Matemática. Educação. Ensino. Análise Combinatória. Discalculia.

Abstract

This dissertation was elaborated from own experience lived by the author as a high school student, which had difficulty in learning the topics of combinatorial analysis. Thus, the main objective of the research was to analyze the learning of topics of combinatorial analysis (CA) among forty-one students of the 2nd year of regular high school and twenty-eight students of Education of Youth and Adult (EYA) who presented difficulties in learning, in particular, seeking to identify and observe those with evidence of dyscalculia (ED). The work was developed at José do Patrocínio State School, and was based on the didactic engineering theory that is characterized, first, by an experimental scheme based on "didactic achievements"in the classroom, that is, in the conception, accomplishment , observation and analysis of teaching sessions, and began with the application of a test with 20 questions to identify possible signs of dyscalculia (ID) among students. Dyscalculia is a type of learning disorder characterized by an inability or inability to think, reflect, evaluate, or reason processes or tasks that involve mathematical concepts. There is no single cause to justify the stages of difficulties with mathematical language, however this involvement can cause major problems to the person, especially at school age. Learning plays a very important role in the teaching of mathematics, since it is continuous and follows the different levels of human development, however, some students have difficulties to learn mathematics. According to data from the Ministry of Education - MEC (2017), 71.67 % of students have insufficient level of learning in mathematics. Of these, 23 % are at level 0, the lowest of the proficiency scale. Several factors contribute to the failure in the subject, such as the cultural, social, pedagogical and political aspects surrounding the student. In this research, we chose to work with the contents of combinatorial analysis, in order to analyze the difficulties of mathematical learning, since the concepts used in counting are basic (multiplication, division, addition and subtraction), and alone are not enough. For the development of the theme, behold that knowledge of the world is essential for the student to be able to interpret and develop their reasoning on the theme, such as problems with dice, decks, coins, among others that require prior knowledge to advance in problem solving. Thus, the identification of high school students with ID was effective in providing knowledge about the students' level of difficulty; The analysis of the learning of the topics of combinatorial analysis among the students of the second year of high school (regular and EJA) showed that the students involved in the research had difficulty with the themes of combinatorial analysis, and those with ID present greater difficulty in mathematics and learning. consequently lower performance in the proposed activities, as their performance did not exceed 30% of the total proposed activities. It is concluded that using the dyscalculia parameters are effective in revealing the students' mathematical skills and that the contents of combinatorial analysis, due to the requirement of basic mathematics and richness of information that instigate mathematical reasoning and can link the school content with the student's social context, becomes an effective content to seek the reduction of students' mathematical difficulties.

Keywords: Mathmatics. Education. Teaching. Combinatorial Analysis. Dyscalculia.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

O autor da pesquisa, movido pela experiência particular de não ter aprendido, ou mesmo sequer ter tomado conhecimento de análise combinatória no ensino médio, e em estudos individuais, bem como em curso pré-vestibular, não ter logrado êxito na aprendizagem do referido assunto, busca com o presente trabalho analisar as dificuldades de aprendizagem dos conteúdos de análise combinatória tendo como parâmetro a presença de indícios de discalculia (ID).

Com isso passou a buscar temas relacionados a transtornos de aprendizagem específicos com a Matemática. Foi então que encontrou vários artigos tratando de dislexia, TDA-H e discalculia, e dentre esses, a "discalculia" que para Barbosa (2008) é uma dificuldade de aprendizagem apresentada na disciplina de matemática, esse tema chamou bastante atenção, pois trata-se de uma dificuldade de aprendizagem específico das habilidades matemáticas.

A discalculia é um tipo de transtorno de aprendizagem caracterizada por uma inabilidade ou incapacidade de pensar, refletir, avaliar ou raciocinar processos ou tarefas que envolvam conceitos matemáticos. Não existe uma causa única para se justificar as fases das dificuldades com a linguagem Matemática, todavia esse acometimento pode causar grandes problemas à pessoa, sobretudo em idade escolar (GARCIA, 1998).

A discalculia mostrou-se interessante para pesquisar a dificuldade de aprendizagem especificamente dos tópicos de análise combinatória, devido a riqueza do assunto, contextualização dos problemas e a dificuldade encontrada por muitos alunos para solucionar problemas de análise combinatória.

A aprendizagem tem um papel muito importante no ensino da Matemática, uma vez que é contínua e segue acompanhando os diferentes níveis de desenvolvimento do ser humano, entretanto, alguns estudantes apresentam dificuldades para aprender Matemática. De acordo com dados do Ministério da Educação – MEC (2017), 71,67% dos alunos têm nível insuficiente de aprendizado em Matemática. Desses, 23% estão no nível 0, o mais baixo da escala de proficiência. Vários fatores contribuem para o insucesso na disciplina, tais como os aspectos culturais, sociais, pedagógicos e políticos que circundam o estudante.

No cenário atual as transformações sociais e econômicas, exigem que o aluno adquira competências cada vez mais abrangentes e efetivas. Neste sentido, o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, sem dúvida, é um requisito relevante para a aquisição dessas competências, e quaisquer fatores que levem a limitação da aprendizagem devem ser identificados e tratados com o devido cuidado.

Dentre os conteúdos de matemática, de acordo com Calist (2016), os de Análise Combinatória (AC) são uma das mais importantes ferramentas de resolução de problemas, uma vez que desenvolve o raciocínio lógico matemático de forma plena e eficaz, fazendo com que o aluno, consiga desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas.

Julianelli, Dassie e Lima (2009), ao discutirem sobre Análise Combinatória, afirmam que o modelo de ensino deste tema tem seguido enfoques didáticos voltados integralmente ou quase integralmente para os aspectos estritamente matemáticos, desvinculados de suas conexões com a realidade natural ou social. De acordo com os autores, encontrar professores na educação básica que limitam suas aulas à utilização de fórmulas apenas para estabelecer a diferença entre os agrupamentos Arranjos Simples e Combinação Simples, é uma prática comum.

Ao questionar estudantes do ensino médio sobre o que é combinatória, Morgado (1991), constata que a maior parte dos estudantes entrevistados responderia que ela é o estudo das combinações, arranjos e permutações, se tratando de um conceito parcial, considerando o conceito usado pelo autor que define análise combinatória como a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas. Desta forma, o trabalho tem dentre seus objetivos

específicos analisar a aprendizagem de AC entre os alunos do 2º ano do ensino médio regular e de Educação de jovens e Adultos (EJA) que apresentam dificuldades de aprendizagem, em especial, identificar e observar aqueles que apresentarem indícios de discalculia e por fim buscar estratégias pedagógicas adequadas para amenizar as dificuldades de aprendizagem de matemática.

Na seção 1, o trabalho inicia-se com definição e primeiras concepções históricas acerca do tema discalculia, destacando-se o ensino da matemática e as dificuldades apresentadas pelos alunos em sala de aula, bem como as dificuldades de aprendizagem em sentido amplo, partindo da primeira definição proposta do termo "Dificuldades de Aprendizagem" feita por Kirk (1962), suas caracterizações e indicadores.

Após esse enfoque, na seção 2 faz-se uma breve análise das dificuldades de aprendizagem especificamente ligadas à Matemática que segundo Nacarato; Mengali e Passos (2009), muitas podem ser relacionadas a vários fatores tais como: reforço inadequado ou insuficiente, falta de oportunidades para que os alunos possam ir á prática, pois materiais ou ato concreto ajuda a dar sentido e aprender a parte teórica, ausência ou pouca instrução, falta de estímulos ou forma errada de incentivar, apresentação de dificuldades nas habilidades, entre outras, ao final da seção, a discalculia é abordada como fator de dificuldade de aprendizagem da Matemática, apresentando-se também as suas principais características.

Na seção 3 o foco do trabalho se direciona para a aprendizagem matemática e os métodos de avaliação, com especial destaque para a dificuldade de fazer operações matematicamente, de maneira formal, uma vez que toda pessoa em algum momento do dia utiliza-se de conhecimentos matemáticas, sem se dar conta, ou seja de maneira informal. Nesta seção as formas de avaliação em matemática, bem como as competências e habilidades definidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são apresentadas mais detalhadamente.

Na seção 4, o trabalho destaca a evolução histórica da análise combinatória, que por muito tempo foi negligenciada pelos historiadores matemáticos, tanto que os primeiros registros de técnicas combinatórias datam

do século 16 a.C. Ressaltando que Árabes, Indianos e Chineses destacaram-se por suas contribuições no desenvolvimento da análise combinatória. Neste ponto é dado o destaque a combinatória no século 20, mencionando autores e suas contribuições tais como a teoria dos grafos, bem como alguns problemas teóricos clássicos como do mapa de quatro cores e o problema de I-ching.

Na seção 5, dedicada à metodologia de trabalho, será detalhada a proposta de intervenção, onde o autor buscou identificar dentre os alunos, aqueles que apresentam indícios de discalculia, e por fim, o trabalho traz as considerações finais da pesquisa, com análise crítica dos resultados obtidos e avaliação das metodologias utilizadas, procurando contribuir de modo efetivo para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória. Toda a pesquisa de campo foi desenvolvida através da metodologia da engenharia didática, caracterizada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Definição e concepções históricas da discalculia.

A discalculia (do grego dýs+calculare, dificuldade ao calcular) é definida como uma turbulência neurológica que afeta a capacidade de uma pessoa de abranger e manejar números. Não existe uma causa única para se justificar as fases das dificuldades com a linguagem Matemática, todavia esse acometimento pode causar grandes problemas à pessoa, sobretudo em idade escolar (GARCIA, 1998).

A Discalculia é uma dificuldade de aprendizagem desenvolvida ao longo da vida que afeta as habilidades de uma pessoa entender números e aprender matemática. Bastos (2008, p.12) refere-se à Discalculia como a "prima pobre da Dislexia", sendo por muitos especialistas considerada uma equivalência matemátia para dislexia. Há indicações de que a discalculia é um impedimento congênito ou hereditário, com um contexto neurológico. Portadores de discalculia são incapazes de identificar sinais matemáticos, montar operações, classificar números, entender princípios de medida, seguir sequências, compreender conceitos matemáticos, relacionar o valor de moedas entre outros.

Dr. Gerstmann (1940) foi a primeira pessoa a estudar e escrever sobre a lesão causada por isquemia cerebral, traumatismo ou AVC no giro angular do hemisfério cerebral dominante. Os prejuízos na capacidade de leitura e reconhecimento costumam ser bastante incapacitantes, principalmente nas áreas educacionais e profissionais. Gerstamann analisou as dificuldades em quatro áreas: escrita, aritmética, agnosia digital (ocorre quando a pessoa não consegue identificar qual dedo de sua mão é tocado a menos que ela esteja olhando para ele) e o problema com a coordenação de direita e esquerda.

Sua descoberta passou a ser conhecida como Síndrome de Gerstmann, assim definida:

Distúrbio neurológico raro caracterizado por lesões no giro angular do hemisfério cerebral dominante (geralmente o hemisfério esquerdo). O giro angular situa-se no lobo parietal, próximo ao lobo temporal. Nomeado em homenagem a Josef Gerstmann, pode eventualmente mudar de nome para Síndrome Angular por recomendação da comunidade científica (Vallar, 2007).

Observa-se que a discalculia é um dos sintomas da síndrome de Gerstmann, dificuldade ou incapacidade de compreender matemática; por outro lado, ela não resulta de lesão na região cerebral. De acordo com Bastos (2008) a Academia americana de Psiquiatria define que a discalculia ou discalculia do desenvolvimento é a dificuldade em aprender matemática, com falhas para adquirir adequada proficiência neste domínio cognitivo, a despeito de inteligência normal, oportunidade escolar, estabilidade emocional e necessária motivação.

Em 1974, Ladislav Kosc descreveu a discalculia como uma dificuldade de aprendizagem. Dr. Kosc (1974, p. 167-168) inicialmente propôs um sistema uniforme para denominar e classificar as disfunções quanto às habilidades matemáticas em defasagem na Discalculia, e a classificou em seis categorias baseado nas habilidades dos estudantes ou nas tarefas em que eles apresentavam dificuldades, quais sejam:

Tabela 1.1: Categorias de defasagem matemáticas em Discalculia

Descrição	**Dificuldade apresentada**
Léxica	Na leitura de símbolos matemáticos.
Verbal	Em nomear quantidades matemáticas, números, termos e símbolos.
Gráfica	Na escrita de símbolos matemáticos.
Operacional	Na execução de operações e cálculos numéricos.
Practognóstica	Na enumeração, manipulação e comparação de objetos reais ou em imagens.
Ideognóstica	Nas operações mentais e no entendimento de conceitos matemáticos

Cerca de 40 anos depois, no final da década de 1990, mais pesquisas foram conduzidas à medida que crescia a popularidade das máquinas de ressonância magnética para distúrbios cerebrais. Os resultados revelaram que a discalculia existe onde uma ou mais partes do cérebro, responsáveis pelos cálculos básicos, não conseguem coordenar bem.

Em 2000, David Geary, um psicólogo norte americano com estudos no campo da aprendizagem matemática investigou as causas da discalculia dividindo sua pesquisa em três grupos: memória semântica, processual e visual-espacial. Geary determinou que os alunos com deficiências matemáticas incluíssem todos os alunos que estivessem abaixo de 35% no teste de raciocínio de Woodcock-Johnson Mathematics.

A Bateria de Habilidades Cognitivas Woodcock-Johnson-III – WJ-III (WOODCOCK, MCGREW e MATHER, 2001) foi padronizada nos Estados Unidos e considerada o instrumento mais apropriado e completo para elucidar e mensurar o funcionamento intelectual cognitivo, assim como seu desenvolvimento (MUÑOZ e WOODCOCK, 2005).

David Geary passou a usar o termo "deficiência matemática"para se referir à discalculia, referindo-se a qualquer estudante que tenha dificuldade em uma ou mais áreas da matemática e que os impeça de compreender um conceito ou passar para um pensamento matemático mais complexo.

Em geral a Dificuldade de Aprendizagem em Matemática (DAM) tem sido considerada “normal”, por se tratar de uma disciplina que muitos consideram difícil de compreender. Garcia (1998, p. 217) menciona que “atualmente, sugere-se que mais de 6% da população em idade escolar poderia ser incluída entre as pessoas com dificuldades de aprendizagem da matemática”. O contato com a matemática em sala de aula tem sido fonte de frustrações, tanto para o professor que pode se sentir incapaz de ensinar de forma efetiva, quanto para o aluno que pode apresentar dificuldade de aprendizagem.

Para Bastos (2008, p.10), ter dificuldade de aprendizagem em matemática “parece ‘incomodar’ menos do que ter dificuldade de aprendizagem em leitura e escrita”, pois a matemática, nos diferentes níveis de ensino, é considerada difícil, geralmente saber matemática é tido como prerrogativa de poucos. De acordo com Garcia (1998), as pesquisas relacionadas às dificuldades de aprendizagem da matemática são relativamente recentes, pois o interesse ficou centrado nas habilidades verbais, incluindo a leitura. O método de ensinar matemática também pode ser considerado um agravante para alunos que apresentam dificuldades nesta disciplina.

Diferentemente do que ocorre na aprendizagem de outras áreas de conhecimento, que permitem interação com o ambiente, os conceitos matemáticos dependem de conhecimento formal, organizado e de raciocínio indutivo e dedutivo. A Matemática utiliza uma linguagem precisa em seus termos e símbolos, usando um estudo de modelos e relações, como, por exemplo, a numeração (VIEIRA, 2004, p. 110). A linguagem matemática é expressa por meio de símbolos e a dificuldade de aprendizagem dos conhecimentos matemáticos está relacionada significativamente ao desenvolvimento das habilidades que envolvem o uso desse conhecimento.

Em geral, segundo Garcia (1998) essas dificuldades estão ligadas às habilidades linguísticas (utilização da nomenclatura matemática, operações e codificação de problemas); habilidades perceptivas (reconhecimento e leitura de símbolos numéricos ou sinais e agrupar objetos em conjuntos); habilidades de atenção (consiste em copiar e lembrar corretamente de figuras e operações matemáticas), por fim, as habilidades matemáticas (compreensão da sequencia correta nas operações, realizar contagens e aprender as tabuadas).

2 ENSINO DA MATEMÁTICA E AS DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

2.1 O ensino da Matemática

O desenvolvimento da Matemática ocorreu com o aprimoramento do senso numérico, pois o ser humano sempre percebeu as diferenças de quantidades que, a princípio eram distinguidas como pouco ou muito. Segundo Mato Grosso (2000), a matemática surgiu através da necessidade apresentada pelo homem para resolver problemas encontrados diariamente no seu cotidiano como medir, calcular, contar e organizar-se de acordo com os espaços, na qual os conhecimentos adquiridos foram passados de geração em geração, acumulando-se mutuamente e intelectualmente.

Da necessidade de contar para diferenciar as coisas, a raça humana inventa os números e surge a Matemática que não parou de se desenvolver e está sempre em constante construção e aprimoramento.

Em que pese a disciplina de matemática estar presente na vida de todas as pessoas, sempre se apresentou como uma disciplina desagradável para a maioria dos alunos e desafiadora para outros por ser tão complexa, no entanto, a matemática faz parte do cotidiano de todos e dela se faz uso para resolver inúmeras situações.

Neste contexto, segundo Brasil (2001), a aprendizagem da matemática é necessária para propiciar ao aluno oportunidades para desenvolver os seguintes quesitos: a criatividade; interpretação; senso crítico; capacidade de fazer uma análise; produção de estratégias; resolução de problemas; raciocínio rápido.

Neste aspecto, nota-se que o ensino da matemática proporciona a construção de novos caminhos e possibilidades de conhecimento para o aluno, de forma a ajudá-lo na sua própria capacidade autocrítica como sujeito em construção permanente e passível de erros. O aluno torna-se autônomo e passa a conhecer o seu potencial na realização de situações problemas encontrados na sua realidade, sem medo das possíveis frustrações. (NACARATO; MENGALI e PASSOS, 2009, p. 88) afirmam que:

> Se, desde os primeiros anos do ensino fundamental, o aluno for colocado em situações em que tenha de justificar, levantar hipótese, argumentar, convencer o outro, convencer-se, ele produzirá significados para a matemática escolar. Esses significados precisam ser compartilhados e comunicados no ambiente de sala de aula.

Assim, ensinar matemática tem como objetivo desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas, para se aproximar desses objetivos, o educador deve buscar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolvendo a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

Ao buscar diferentes maneiras de ensinar a Matemática, constata-se que o ensino é bom na medida em que o aluno é incentivado a pensar e raciocinar ao invés de imitar. O fracasso na aprendizagem da Matemática é atribuído, em grande parte, ao fato de as atividades escolares serem desvinculadas das situações de vida dos alunos. Entretanto não se leva em consideração que alguns alunos apresentam distúrbios de aprendizagem matemática, mas que por falta de profissionais adequados para fazer o acompanhamento, são vistos como desinteressados, muitas vezes rotulados e abandonados pelo professor.

Os estudantes apresentam peculiaridades decorrentes do ambiente em que vivem, bem como processos e tempo de aprendizagem distintos. Enquanto isso, os educadores devem estar preparados para trabalhar respeitando as diferenças e colaborar para uma educação eficiente buscando o resgate do aluno marcado pelo insucesso escolar, que pode levar ao fracasso social, e a futura inserção em grupos marginalizados e a ocupação de subempregos.

Quando os professores de matemática são questionados sobre o processo de ensino-aprendizagem, ou seja, sobre de que maneira os conceitos matemáticos são ensinados na escola, questiona-se como se aprende Matemática hoje, diante dos avanços científicos e tecnológicos da sociedade atual. Questiona-se, portanto, a concepção do ensino-aprendizagem de Matemática existente nas escolas, nas salas de aulas, enfim, nas práticas docentes.

Aprender e ensinar matemática são processos indissociáveis e devem ser elementos constituintes dos saberes associados à prática do professor de matemática. Portanto, novas formas de ensinar e aprender os conceitos matemáticos devem ser no atual contexto social uma das preocupações dos docentes.

> **Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julgar importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor. (D'AMBRÓSIO, 1989, p.15).**

Certamente toda aprendizagem significativa (ou não) tem relação direta com o trabalho docente realizado em sala de aula. A metodologia do docente é vista como o ponto-chave para a transformação do saber científico em saber e ensinar, sendo que este "trata-se de um saber ligado a uma forma didática que serve para apresentar o saber ao aluno". (MACHADO, 2002, p.23). Ora, não há que se considerar que o empenho do professor não englobe a totalidade de seus alunos, há de se considerar que a aprendizagem escolar é uma relação binária, professor – aluno, sendo importante buscar os fatores que levam ao insucesso do aluno, seja pela falta de interesse ou distúrbios de aprendizagem. Assim, cabe ao educador ater-se ao desenvolvimento individual e grupal da turma que estiver trabalhando, pois as pessoas percorrem caminhos parecidos, mas em velocidades diferentes, de acordo com o meio em que vivem e principalmente dos estímulos que recebem dos adultos que os cercam. O de-

senvolvimento pessoal não é linear, as pessoas avançam, aparentemente param ou recuam, conforme seu estado emocional ou pela necessidade de rever uma hipótese para aprimorá-la. É conhecendo bem o seu grupo que o professor saberá se determinado conteúdo é adequado ou não.

A Matemática está presente no dia a dia das pessoas, sendo de responsabilidade da escola diagnosticar se faltam estímulos para uma maior eficácia de seu ensino ou se os alunos apresentam distúrbios de aprendizagem. Desta forma a escola necessita oferecer um espaço de experimentação e criação, estimulando um sentimento de cooperação e solidariedade.

Neste sentido, sabe-se que existem diferentes propostas de trabalho que possuem materiais com características muito próprias, e que os utilizam também de forma distinta e em momentos diferentes no processo ensino-aprendizagem. Assim, junto com cada material, se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica.

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico, muito menos um "aprender" que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

2.2 Dificuldades de aprendizagem

O termo "Dificuldades de Aprendizagem" (DA) surge somente em 1962 com o objetivo de situar uma problemática frequente no contexto institucional, na tentativa, conforme Correia e Martins (2005), de dar um novo significado aos padrões clínicos estereotipados que eram atribuídos aos sujeitos que apresentavam alguma forma de DA.

Historicamente, a atenção dada a esse campo era muito mais focada nas crianças em função da defasagem recorrente em algumas ou na maioria das disciplinas escolares específicas ou em referência a um comportamento socialmente inadequado no ambiente escolar, como critério que orientava a

classificação de estudantes com características de dificuldades em aprendizagem (SISTO, 2001).

A primeira definição proposta do termo "Dificuldades de Aprendizagem" aparece com Kirk (1962) que dava ênfase ao componente educacional e o distanciamento existente, dentro de uma concepção biológica, de outros problemas psicológicos e de aprendizagem, tais como a deficiência mental, a privação sensorial e a privação cultural. Posteriormente, outra definição histórica que se tornou marco relevante, foi proposta por Bateman (1965), que incluíam três outros fatores de grande importância: a discrepância, pois os estudantes com DA eram considerados como possuindo uma potencialidade intelectual além de sua realização escolar; a irrelevância da disfunção do sistema nervoso central, para determinar os problemas escolares dos estudantes sem a existência de uma possível lesão cerebral; e a exclusão, pelo fato de conceber que as DA dos estudantes não eram em decorrência de deficiência mental, deficiência visual, deficiência auditiva, perturbação emocional ou de privação educacional ou cultural.

No Brasil, a área das DA não tem sido considerada como deveria no campo da educação especial e da inclusão, conceituando como DA somente como consequência do fracasso escolar, cujas características básicas seriam a evasão escolar e a reprovação ou repetência (SISTO, 2001). Marchesi (1995) destaca que por durante muito tempo os atrasos, dificuldades e problemas de aprendizagem foram definidos como uma deficiência em uma determinada habilidade e que, quanto maior fosse, mais profundo eram os problemas nas dimensões psicológicas deficitárias. Romero (1995) menciona que as DA eram atribuídas às variáveis pessoais dos indivíduos, tal como às variáveis ambientais.

Assim, a expressão dificuldade de aprendizagem surgiu com o objetivo de esclarecer a problemática surgida pelos alunos no contexto educacional, com o intuito de diminuir o rótulo clínico que se dava a criança que apresentava algum tipo de dificuldade e abrir várias possibilidades de intervenção pedagógica.

Com vários estudos realizados e esse novo olhar dos estudiosos a respeito

das dificuldades de aprendizagem, surgem também vários tipos de conceito, na qual cada um é discriminado de uma forma. Esses conceitos e estudo podem ser no sentido, lato, orgânico, estrito e educacional. A tabela 2.1 apresenta as caracterizações e especificidades das DA.

Tabela 2.1: Caracterização das dificuldades de aprendizagem quanto ao sentido

Caracterização	**Descrição**
Sentido lato	Todo conjunto de problemas de aprendizagem, ou seja, todo conjunto de situações, de índole temporária ou permanente que se aproxima do risco educacional.
Sentido estrito	As DA restringem-se a uma incapacidade ou um impedimento específico para a aprendizagem em uma ou mais áreas do conhecimento humano, podendo ainda envolver a parte socioemocional.
Sentido orgânico	São reconhecidos como desordens neurológicas que interferem na recepção, integração ou expressão de informações. Caracterizam-se, em geral, por uma discrepância acentuada entre o potencial estimado do aluno e a sua realização escolar.
Sentido educacional	São reconhecidas como uma incapacidade ou um impedimento para a aprendizagem da leitura, da escrita, do cálculo ou para a aquisição de aptidões sociais.

Nessa concepção, a dificuldade de aprendizagem apresenta-se como falhas no processo de aprender no âmbito escolar principalmente, no que diz respeito à incapacidade da aprendizagem da escrita, cálculo, convívio social e leitura. (COLL; MARCHESI e PALACIOS, 2004, p.53) afirmam que:

> **(...) as DA podem ser qualificadas como generalizadas, por afetar quase todas as aprendizagens, (escolares e não escolares), e como graves, por serem afetados vários e importantes aspectos do desenvolvimento da pessoa (motoras, linguísticos, cognitivos, etc.), geralmente como consequência de uma lesão ou de um dano cerebral manifestado, observável, cuja origem é adquirida (durante o desenvolvimento embrionário ou em acidente posterior ao nascimento), ou fruto de alguma alteração**

> genética. Por último, também são qualificadas como permanente, já que o prognóstico de solução das DA é muito pouco favorável. (...) Em outras ocasiões, as DA são consideradas como inespecíficas porque não afetam o desenvolvimento, de modo a impedirem alguma aprendizagem em particular. Nem sequer se fala delas em termos de leve gravidade (muitas vezes nem como DA), e, embora algumas pessoas costumam dizer de si mesma que "não servem" para ou aquela aprendizagem (por exemplo a matemática), ou inclusive para o estudo em geral, não há nenhuma razão intelectual (de QI, etc.) que as justifique ; ao contrário, a causa pode ser instrucional e/ou ambiental com uma influencia especial sobre variáveis pessoais, tais como a motivação. Ou seja, poderia ser evitadas e solucionadas com relativa facilidade do ponto de vista da análise técnica psicopedagógica.

Diante dessa perspectiva, as dificuldades de aprendizagem apresentam-se de diversas formas e motivos, na qual podem ser de caráter biológico, psicológico e até hereditário.

Geralmente, essas dificuldades são apresentadas no primeiro ano escolar. Nesse intuito, o professor precisa estar atento às atitudes que os alunos apresentam em sala de aula, para que possa fazer uma análise de qual é o grau de dificuldade apresentado.

As identificações das Dificuldades de Aprendizagens (DA) devem ser feitas o mais rápido possível, com observações cuidadosas da criança e seus comportamentos. Para ajudar a fazer essas observações, os educadores sempre tem que estar atentos aos sinais contínuos que as crianças apresentam em sala de aula.

A tabela 2.2 apresenta os indicadores quanto a atenção, memória e comportamento e a tabela 2.3 apresenta os indicadores quanto a organização, coordenação motora e linguagem para as DA.

Tabela 2.2: Indicadores para as DA quanto a atenção, memória e comportamento social

Atenção e concentração	**Memória**	**Comportamento social**
Completar tarefa	Recordar instruções	Iniciar e manter amizades
Agir depois de pensar	Recordar fatos	Tolerar frustrações
Esperar	Aprender conceitos matemáticos	Interagir
Relaxar	Reter matérias novas	Interpretar sinais não verbais
Manter-se atento	Identificar letras	Trabalhar em cooperação
	Recordar nomes	

Tabela 2.3: Indicadores para as DA quanto a organização, coordenação motora e linguagem

Organização	**Coordenação motora**	**Linguagem falada ou escrita**
Conhecer as horas, os dias da semana, os meses e o ano.	Manipular objetos pequenos	Adquirir a fala. Contar histórias. Responder às perguntas. Soletrar. .
Gerir tempo	Cortar	Aprender vocabulário novo
Encontrar objetos pessoais	Desenhar	Encontrar palavras certas.
Executar planos	Escrever	Rimar palavras.
Tomar decisões		Discriminar sons.
Estabelecer prioridades		Compreender conceitos.
Sequenciar		Escrever histórias e textos

Segundo Barbosa (2008, p. 54) "a presença do obstáculo nem sempre caracteriza uma dificuldade patologizante", nesse sentido, ressalte-se, que nem todas as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos alunos são patológicas e precisam de um especialista para diagnosticar e fazer as devidas

intervenções e tratamentos. Muitos alunos quando encontram obstáculos para resolver novos problemas apresentados em sala se omitem, ficam envergonhados, pois sentem medo dos colegas rirem dos seus possíveis erros. (BARBOSA, 2008, p. 55), afirma que:

> A presença de um obstáculo no processo de aprendizagem não indica a existência de dificuldades permanentes, mas, sim, a forma que o sujeito encontrou de auto-regular seus esquemas de aprendizagem. Neste sentido, a busca da superação desses obstáculos deve acontecer não como uma proposta de cura, mas como um encontro para a ampliação de recursos a serem utilizados neste movimento de busca de equilíbrio e de auto-regulação.

Nessa perspectiva, observa-se que as dúvidas e dificuldades fazem parte do aprendizado do aluno, a cada novo assunto abordado pelo professor surgirão dúvidas e questionamentos, sendo este o momento oportuno para se fazer as devidas intervenções, fazendo com que os alunos procurem soluções para os seus problemas encontrados, valorizando suas tentativas para que percebam o ato prazeroso que é descobrir possíveis soluções.

> (...) é preciso acreditar nas possibilidades do aprendiz, valorizar o que ele é capaz, entusiasmá-lo para realizar tentativas, entendendo seu desempenho como o melhor que pôde obter naquele momento, porém, com possibilidades de ser melhorado a partir da mediação. (BARBOSA, 2000, p. 56).

2.3 Dificuldades de aprendizagem matemática

A matemática é uma linguagem que se expressa através de símbolos. Assim, se faz oportuno, abordar aqui as dificuldades dos alunos que não conseguem compreender instruções e enunciados matemáticos, bem como as operações aritméticas, pois é necessário que eles superem as dificuldades de leitura e escrita antes de iniciarem a resolução das atividades que lhes são propostas. A dificuldade de aprendizagem da matemática (DAM) funda-se nos processos cognitivos, que na maioria das vezes são apresentados na escola. Geralmente, um grande número de crianças apresenta algum tipo de dificuldade em Matemática e acaba se estendendo até a idade adulta. Essa dificuldade apresentada na área da disciplina de matemática acaba provocando uma preocupação muito grande com o ensino aprendizado das crianças, na qual, podem ser consideradas como um dos fatores para o fracasso escolar. A DAM interfere de uma forma significativa no desenvolvimento escolar da criança e também no seu cotidiano, pois essa habilidade sempre se apresenta na vida de todos, na qual envolve um fator de cálculos e interpretações.

> Os alunos precisam aprender a ler matemática e ler matemática para aprender, pois, para interpretar um texto matemático, é necessário familiarizar-se com a linguagem e com os símbolos próprios desse comportamento curricular e encontrar sentido naquilo que lê, compreendendo o significado das formas escritas. (NACARATO; MENGALI e PASSOS, 2009, p. 44).

Dessa forma, verifica-se, que as disciplinas estão interligadas umas às outras, e para que o aluno consiga superar a dificuldade da disciplina de matemática é necessário saber interpretar o que o texto matemático está pedindo.

> Quando o aluno fala, lê, escreve ou desenha, ele não só mostra quais habilidades e atitudes estão sendo desenvolvidas no processo de ensino, como também indica os conceitos que domina e as dificuldades que apresenta. Com isso, é possível verificar mais um aspecto importante na utilização de recursos de comunicação para interferir nas dificuldades e provocar cada vez mais o avanço dos alunos. (NACARATO; MENGALI e PASSOS, 2009, p. 45)

Diante das explicações educativas possíveis para a dificuldade de aprendizagem de matemática, segundo Nacarato; Mengali e Passos (2009), muitas podem ser explicadas por vários fatores ou questões, como por exemplo: reforço inadequado ou insuficiente, falta de oportunidades para que os alunos possam ir á prática, pois materiais ou ato concreto ajuda a dar sentido e aprender a parte teórica, ausência ou pouca instrução, falta de estímulos ou forma errada de incentivar, apresentação de dificuldades nas habilidades, entre outras. Nesse contexto, pode-se afirmar que essa dificuldade é um transtorno estrutural da maturação das habilidades matemáticas, na qual apresenta-se por erros quantitativos e variados no que diz respeitos à dos números, saber contar, habilidades computacionais, interpretação e soluções de problemas. Em

suma, as DAM devem ser compreendidas a partir das necessidades biológicas e educativas apresentadas pelas crianças, mediante observação, intervenções e um trabalho em conjunto para realizar adaptações no âmbito escolar.

3 APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E AVALIAÇÃO

3.1 Aprendizagem da Matemática

A maior parte das pessoas não conhece ou despreza a importância do ensino da matemática, mesmo que cotidianamente façam uso de recursos e conceitos matemáticos. Uma vez que o acervo matemático é um conhecimento que está aprofundado na memória humana, não sendo possível para uma pessoa comum, distinguir em que momento ela faz uso desse conhecimento, desta forma, o saber matemático se configura em um recurso fundamental para a vida prática, seja em atividades comerciais, aferição de tempo, distância, padronização de medidas e grandezas. No que tange a aprendizagem, de forma geral, vale destacar os estudos de Vygotsky, destacados por Dantas (2017):

> O bom aprendizado é aquele que se adianta ao desenvolvimento e não aquele que se dirige para os níveis de desenvolvimento que já foram atingidos. A característica essencial do aprendizado é a capacidade de ele criar a zona de desenvolvimento que faz despertar processos internos que só podem operar a partir da interação do aluno com outras pessoas. A aprendizagem é um processo de adaptação ativa, por meio do qual o sujeito, em razão de uma situação determinada, acaba recebendo, bem como, incorporando os esquemas de conduta, resultantes em situações similares ora vividas, podendo ocorrer à modificação de tais esquemas com a finalidade de produzir uma conduta totalmente adequada à situação vivenciada no presente (Dantas, 2017, p. 15).

A aprendizagem tem um papel muito importante no ensino da Matemática, uma vez que é contínua e segue acompanhando os diferentes níveis de desenvolvimento do ser humano, ressaltando que aprendizagem e desenvolvimento estão afetivamente ligadas, ou seja, se um fato que marcou emocionalmente uma pessoa será mais lembrado que um fato que não a marcou.

Quando se aborda os conteúdos de análise combinatória, os conceitos matemáticos isoladamente não são suficientes para o desenvolvimento do tema, sendo que o conhecimento de mundo é essencial para que o estudante consiga interpretar e desenvolver seu raciocínio referente ao tema, como exemplo, tem-se problemas com dados, baralhos, moedas dentre outros que exigem conhecimento prévio para que se possa avançar na resolução de problemas, visto que se o aluno não está afetivamente ligado a esses conhecimentos, não lembrará de suas características necessárias para a solução do problema, ou seja o contexto social e o envolvimento do educando com o mundo que o cerca são essenciais para a aprendizagem, senão vejamos:

> Num contexto social, o mundo de hoje está sempre em mudanças constantes, o que acaba exigindo que os educandos estejam sempre atualizados com o mundo cujo estamos vivendo. Sendo assim, representar informações conforme uma instrução já fornecida não mais fornece efeito em relação à educação e à aprendizagem; entretanto, a forma de aprender imposta pelo mundo moderno acaba os efeitos desse tipo de aprendizagem. Ao mencionar o educador neste trabalho, geralmente não estão indicando apenas ao educador, mas em geral qualquer indivíduo que em certa circunstância adota o papel de instruir, colaborar ou ensinar o restante das pessoas (PIAGET, 1984; MORIN, 2001; ROSSI, 2003).

Educar é uma ação que sempre exigiu objetivos a serem alcançados, por exemplo, quando um pai educa seu filho, já estabelece um objetivo que almeja alcançar com aquela forma de educar. Da mesma forma, quando um governo estipula diretrizes educacionais, o faz visando um resultado específico, geralmente voltado a atender as demandas do mercado ou ainda a difundir determinados valores culturais, tanto que o Brasil possui o PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) que no capítulo intitulado o aluno e o saber matemático trás a seguinte abordagem:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade

> para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. No entanto, apesar dessa evidência, tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações; nem mesmo a exploração de materiais didáticos tem contribuído para uma aprendizagem mais eficaz, por ser realizada em contextos pouco significativos e de forma muitas vezes artificial. É fundamental não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele percebe entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, (PCN – EF), 1997, p. 29).

Nota-se a preocupação em fazer com que o ensino da Matemática não esteja dissociado da realidade do estudante, ou seja, busca-se integrar o ensino a Matemática com as demais disciplinas, pois o acúmulo de informações por si só não tem sido eficaz para a aprendizagem matemática.

Cumpre destacar que no processo de aprendizagem o aluno atribui a razão de sua dificuldade de aprendizagem à metodologia do educador, de fato o educando não tem consciência nem domínio do seu processo de aprendizagem. A perspectiva de alguns alunos ainda estarem utilizando estratégias de aprendizagem de origem associacionista, na base da repetição simples, ou seja, o fato de não ser autônomo, não ter domínio nem consciência dos processos de aprendizagem justifica-se ao se saber que o aluno utiliza estratégias de repetição, dependendo exclusivamente daquilo que é transmitido pelo educador.

É através da escola que se proporciona ao aluno a possibilidade de se criar um mundo melhor, sua principal missão é cumprir com as exigências do mundo em permanente transformação, que nas palavras de Lopes (1998):

> Para ter um desenvolvimento independente da politica intelectual, é importante ter um ensino da Matemática que auxilie o sujeito no conhecimento e ao compreender os dados que estão presentes na sociedade (LOPES, 1998).

No que tange ao ensino da matemática, se considerarmos todos os níveis de ensino, a começar pela pré-escola até a universidades, pode-se destacar diversos fatores que contribuem para a indisposição da aprendizagem matemática. Um deles recai sob a inadequação do ensino de Matemática em relação ao conteúdo, à metodologia e ao ambiente em que o estudante vive. Levar ao conhecimento de um aluno de área ribeirinha problemas de análise combinatória pautado em elementos típicos de uma sociedade urbanizada, acaba por dissociar o conteúdo da realidade do aluno.

Outro aspecto que dificulta o ensino de análise combinatória recai sobre a má formação de professores, ou seja, a falta de capacitação docente, pois nem todos os profissionais da educação matemática dispõem da mesma habilidade para lidar com o assunto, diferentemente do que ocorre com outros assuntos como funções ou geometria, ou mesmo a falta de compreensão e domínio de pré-requisitos fundamentais para o assunto, os quais são imprescindíveis para o bom desenvolvimento das aulas de matemática.

Um grande problema do ensino da matemática é a sua utilização como uma área de conhecimento que não guarda nenhuma realidade com o ambiente em que o aluno está inserido, ou seja, conteúdo dissociado da realidade do aluno. Dessa forma, somente alunos dotados do que se chama inteligência lógico-matemática se beneficiam da tal prática, pois para estes alunos, é possível chegar com mais facilidade nas respostas de perguntas como "para que serve isso?" e "onde vou utilizar aquilo?".

Um ensino contextualizado da matemática visa alcançar, com um aprendizado eficaz, a totalidade dos alunos, formando indivíduos para o mundo, para a vida, fazendo com que a escola seja o local de preparação para a cidadania.

A matemática sempre será uma grande necessidade humana, em que pese os atuais índices de insuficiência obtidos nos diversos níveis de ensino, ressalte-se que o processo de educar, em especial a educação matemática, não vem sendo aplicado de forma eficaz na educação brasileira.

Com o passar do tempo, o motivo do fracasso, ou melhor dizendo, do insucesso na Matemática tem sido atribuído aos alunos, fazendo com que professores lancem mão de diferentes alternativas e opções metodológicas para estimular e simplificar a compreensão dos conteúdos. Dentro das escolas ainda há professores que ensinam Matemática de maneira muito formal, seguindo a risca os conteúdos do livro didático, e cuja metodologia de ensino são exercícios de fixação ou de aprendizagem. A Matemática é uma matéria favorável, sendo aproveitada praticamente em todas as áreas de conhecimento científico, e especialmente na vida cotidiana, e quando se trata de análise combinatória, tomamos atitudes cuja decisão parte da escolha de uma dentre diversas opções, tais como a combinação da roupa que se veste, a definição de uma rota para uma viagem ou mesmo qual caminho tomar para ir ao trabalho, etc.

Ocorre que o ensino da Matemática nas escolas não oferece a qualidade e dinamismo necessário, deixando a desejar quando se cria um espaço vazio entre a matemática escolar e a matemática exercida no cotidiano. Nos dias de hoje, a Matemática é essencial principalmente com o desenvolvimento e a invenção de novas áreas de conhecimento, a convicção que se tem é que a matemática tem se tornado bastante importante para o indivíduo, como observa Dantas (2017).

> A matemática sempre estará presente em nosso cotidiano. Não precisamos apresentar contextos e táticas para mostrar às pessoas a respeito da importância da Matemática em nossas vidas. Compreendemos a importância que os números e as operações numéricas representam na vida da maior parte da população, e, além disso, a Matemática cada vez mais tem sido indispensável para a vida do ser humano, pois ela está mais presente na sociedade desde os tempos atrás, e, com o passar do tempo, está se desenvolvendo mais. (Dantas, 2017, p. 49)

Necessário que se perceba a importância do ensino da Matemática, muito além de uma disciplina que por muitos é vista como algo incompreensível e sem importância. A matemática precisa ser mais do que cópia de exercícios, de memorização de regras. Deve-se buscar a contextualização, fazendo com que o aluno deixe de ser mero expectador em sala de aula e passe a participar da construção do saber, abandonando a visão de que a matemática é algo complicado e sintonizando-se com ela de forma que sua aprendizagem assuma um novo sentido.

3.2 As formas de avaliação

Definir o conceito de avaliação e abordar o que ele deve expressar, atualmente é reforçar a ideia de que o processo de avaliação seja o alicerce de todo o processo educativo, ou seja, "a avaliação escolar é uma parte integrante do processo de ensino e aprendizagem e não uma etapa isolada" (LIBÂNEO, 2013, p. 222). A avaliação não deve ser entendida como etapa de aprendizagem que ocorre somente no final de uma unidade de ensino ou de um período letivo, mas, como elemento presente desde o planejamento do professor, ou seja, segundo Luckesi:

> (...) ela só faz sentido na medida em que serve para diagnóstico da execução e dos resultados que estão sendo buscados e obtidos. A avaliação é um instrumento auxiliar da melhoria dos resultados" (LUCKESI, 2005, p. 150).

A avaliação da aprendizagem, independentemente da disciplina é um tema discutido em vários âmbitos, seja, no âmbito da escola, em encontro de educadores, nos sistemas oficiais de ensino responsáveis por elaborar e distribuir as orientações curriculares acerca das disciplinas nos diferentes níveis escolares, no meio acadêmico por meio das pesquisas realizadas sobre a avaliação da aprendizagem, a avaliação é concebida, atualmente, da forma mais adequada possível.

> A avaliação é uma ferramenta importante no processo educativo e existe para auxiliar o professor quanto sua didática e prática pedagógica que garanta a qualidade da aprendizagem do aluno. Nesse sentido, a avaliação amplia seu significado e resulta em processos interligados entre si. Decorrente disto tem-se a avaliação entendida como diagnóstica, formativa e somativa. (AMARAL, 2015)

Autores como, Libâneo (2013), e Luckesi (2005), em seus trabalhos, ao abordarem a avaliação utilizam a palavra latina "valere" que significa ato de averiguar ou verificar determinado objeto para lhe conferir determinado valor. Arrisca-se afirmar que atualmente o ensino está pautado nos resultados das avaliações aplicadas aos alunos isto é, todo o processo educativo fica reduzido à uma nota obtida, e essa nota é o que concede ao aluno sua aprovação ou reprovação. Nota-se que os sistemas de ensino e a sociedade se contentam com resultados traduzidos em notas e conceitos, ou seja, a aprendizagem fica restrita aos dados numéricos, muitas vezes expressos em tabelas e gráficos.

Na tendência tradicional a avaliação é realizada com o propósito de verificar a capacidade de o aluno reter informações e repetir quando solicitado (MIZUKAMI, 1986). Nesse sentido, a avaliação assume um caráter fechado e limitado no que se refere à criatividade do aluno, ou seja, não permite que o mesmo seja questionador e reflexivo. O processo de avaliação ocorre pela aplicação de testes, provas escritas e orais que possam evidenciar a capacidade de memorização do aluno (BEHRENS, 2000).

A avaliação na abordagem comportamentalista, diferentemente da tradicional, ocorre durante todo o processo de ensino, mas, com o intuito de verificar se os objetivos propostos inicialmente foram alcançados. Nesse sentido, ela se destina a reorganizar o processo com vistas aos objetivos previamente estabelecidos, ou seja, garante a formação de comportamento esperados ao final do processo. Para Behrens (2000), essa concepção se refere ao paradigma tecnicista que visa o produto em detrimento do processo, ou seja, a avaliação realizada no final para verificar o estabelecimento dos objetivos instrucionais ou operacionais.

Na abordagem humanista o foco de todo processo educativo centra-se no aluno, da mesma forma, a avaliação volta-se para o aluno e é entendida como processo de busca de metas pessoais e realizada pelo próprio aluno que deverá controlar seu progresso (BEHRENS, 2000, MIZUKAMI 1986).

A avaliação apoiada em diversos critérios e expressa em dados qualitativos é a concepção explicitada na abordagem cognitivista. O erro passa ser um elemento essencial para a aprendizagem, nesse sentido, o erro evidenciado pela avaliação passa a ter valor pedagógico significativo, tornando-se o ponto de partida para novas aprendizagens.

A abordagem sócio-histórica concebe a avaliação como um processo mútuo, ou seja, tanto aluno como professor são passíveis de avaliação. Diante disso, fica evidente a necessidade de ampliar o sentido atribuído ao processo avaliativo que vai além de provas, testes e notas, devem contemplar instrumentos que aponte aos "alunos e professores [...] quais suas dificuldades, quais seus progressos" (MIZUKAMI, 1986, p. 102). Na visão de Behrens (2000), a avaliação é um processo transformador e processual, pois, envolve várias formas de avaliação, não no sentido de instrumentos, mas na forma de sua execução que pode ser coletiva, individual e autoavaliativa.

3.3 A avaliação no ensino da Matemática

O processo de ensino e aprendizagem em matemática deve contribuir para que o aluno, utilizando-se do conhecimento matemático, tenha possibilidade para entender e refletir criticamente sobre questões sociais, políticas, econômicas e históricas presentes na sociedade. Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que:

> Os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, postura em sala, constituem indícios de competências e como tal devem ser considerados. A tarefa do avaliador constitui um permanente exercício de interpretação de sinais, de indícios, a partir dos quais manifesta juízos de valor que lhe permitem reorganizar a atividade pedagógica.

Dessa forma professor deve fazer uso de práticas metodológicas que incluem situações problemas que ao serem desenvolvidas poderão fortalecer o trabalho em equipe tornando a aula mais dinâmica, respeitando os diferentes modos de pensar matematicamente, uma vez que não há um único método, para se chegar à solução exata das situações propostas.

A prática de avaliação deverá acontecer durante todo o processo de ensino aprendizagem, buscando envolver temas reais e presentes no contexto socioeconômico do aluno, ou seja, as situações propostas poderão ir além do conteúdo da disciplina e assim relacionando-os com o ensino da matemática, trabalhando com dados informativos, a interpretação e análise de situações cotidianas. O professor deverá criar oportunidades diversificadas em sala de aula, para que haja uma melhor compreensão por parte do aluno, pois só assim, o aluno irá aprender com mais facilidade a matemática, à medida que ele começa a compreender a sua lógica, corroborando com o entendimento de Pavanello:

> Em termos de conteúdos, a matemática informativa para todos deve abordar, por exemplo, porcentagens, funções e gráficos, a interpretação e confecção de tabelas, a exploração do raciocínio combinatório e do probabilístico, o cálculo aritmético, grandezas e medidas, etc., que são conteúdos essenciais para a compreensão do mundo em que vivemos. O que abordar além desses conteúdos da matemática informativa vai depender das necessidades futuras do aprendiz e do momento histórico. (PAVANELLO, 2006, p. 35)

A avaliação da aprendizagem escolar em matemática, segundo Sameshima (2008), deve configurar-se com a prática que demonstramos para os alunos o progresso de sua aprendizagem a partir das atividades e resultados de aprendizagem. Para isso, é preciso que o professor utilize métodos alternativos e adequados que possam expressar o desenvolvimento do aluno e assim, reconhecer o valor de todas as experiências de aprendizagem, além dos momentos destinados às provas e testes.

Desta forma, cabe ao professor viabilizar a criação de oportunidades diversificadas em sala de aula, para que haja uma melhor compreensão por parte do aluno, pois só assim, o aluno irá aprender com mais facilidade a matemática.

4 CONCEPÇÕES HISTÓRICAS DE SISTEMA DE NUMERAÇÃO, CONTAGEM E ANÁLISE COMBINATÓRIA.

4.1 A evolução histórica da combinatória

A Combinatória tem sido bastante negligenciada pelos historiadores da matemática. No entanto, há boas razões para estudar as origens do assunto, já que é por muitos considerada uma espécie de subcultura matemática, não exatamente paralela em seu desenvolvimento com as grandes disciplinas de aritmética, álgebra e geometria. Neste capitulo o foco da combinatória estará voltado para sua evolução histórica, suas raízes, antes de se tornar um ramo identificável da matemática com suas próprias definições e teoremas. Grosso modo, isto significa que o período em discussão termina por volta de 1650 d.C.

Como campo da matemática, a combinatória foi estudada em vários graus e em numerosas sociedades antigas. Seu estudo na Europa teve início com os trabalhos de Leonardo Fibonacci que no século 13 d.C, introduziu idéias árabes e indianas para o continente e que continuaram a ser estudadas na era moderna.

O primeiro uso registrado de técnicas combinatórias vem do problema 79 do papiro Rhind, que data do século 16 a.C., o problema diz respeito a certas séries geométricas e tem semelhanças com o problema de Fibonacci de contar o número de composições de números 1 e 2 que somam um total dado.

Figura 4.1: Sistema de numeração egípcio

Na Grécia, Plutarco escreveu que Xenócrates de Calcedônia (396-314 a.C.) descobriu o número de sílabas diferentes possíveis na língua grega. Essa teria sido a primeira tentativa registrada de resolver um problema difícil em permutações e combinações. A alegação, no entanto, é implausível: esta é uma das poucas menções de combinatória na Grécia, sendo que o número que eles encontraram $1,002.10^{12}$**, parece muito redondo para ser mais do que um palpite.**

O Sutra Bhagavati [1] teve a primeira menção de um problema combinatório; o problema perguntava quantas combinações de sabores eram possíveis, selecionando-se gostos em um, dois, três, etc., a partir de uma seleção de seis sabores diferentes (doce, picante, adstringente, azedo, salgado e amargo). O Bhagavati é também o primeiro texto a mencionar a função de escolha. No século II a.C., Pingala[2] incluiu um problema de enumeração no Chanda Sutra (também conhecido como Chandahsutra) que perguntou de quantas maneiras um medidor de seis sílabas poderia ser feito a partir de notas curtas e longas. Pingala descobriu o número de medidores que tinham notas longas e notas curtas; o procedimento utilizado por ele é equivalente a encontrar os coeficientes binomiais.

As ideias do Bhagavati foram generalizadas pelo matemático indiano Mahavira [3] em 850 d.C, e o trabalho de Pingala sobre a prosódia foi expandido

[1]Bhagavat é o quinto dos 12 Agamas Jainistas que foram promulgados por Mahavira. É o maior texto do cânon, diz-se que contém 36.000 perguntas respondidas por Mahavira. O assunto das respostas varia de doutrina a regras de comportamento ascético.

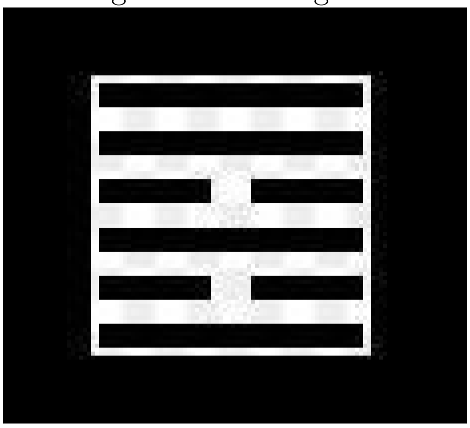
[2]Pingala foi um antigo matemático indiano que escreveu o Chandaśastra, também chamado de Pingalasutras, o mais antigo tratado conhecido sobre a prosódia sânscrita.

[3]Mahavira foi o autor de Ganitasarasagrah (ou Ganita Sara Samgraha, 850), que revisou o Brahmasphutasiddhanta, o mais antigo texto indiano inteiramente dedicado a Matemática, tendo sido patrocinado pelo Rei de Rashtrakuta, Amoghavarsha.

por Bhaskara[4] e Hemacandra[5] em 1100 d.C. Bhaskara foi a primeira pessoa conhecida a encontrar a função de escolha generalizada, embora Brahmagupta possa ter sabido antes. Hemacandra, um estudioso, poeta e polímata jainista que escrevia sobre gramática, filosofia, prosódia e história contemporânea, perguntou quantos metros existiam de um certo comprimento, se uma nota longa fosse considerada o dobro da duração de uma nota curta, o que equivale a encontrar os números de Fibonacci.

Um antigo livro chinês de adivinhação, conhecido como I Ching descreve um hexagrama como uma permutação com repetições de seis linhas, onde cada linha pode ser um dos dois estados: sólido ou tracejado. Ao descrever os hexagramas dessa maneira, eles determinaram que existem hexagramas possíveis, como o da Figura 4.2.

Figura 4.2: Hexagrama



Há indícios de que um monge chinês também pode ter contado o número de configurações para um jogo similar ao Go, é um jogo estratégico de tabuleiro estratégico, em que dois jogadores posicionam alternadamente pedras pretas e brancas, por volta de 700 d.C. Embora a China tivesse relativamente poucos avanços em combinatória enumerativa, por volta de 100 d.C., eles resolveram o quadrado mágico de Lo Shu, que é o problema de design combinatório do quadrado mágico normal de ordem três. Quadrados mágicos permaneceram

[4] Bhaskara Akaria, também conhecido como Bhaskaracharya, nasceu na cidade de Vijayapura, na India, em 1114, e viveu até meados de 1185. De família de astrólogos indianos tradicionais, o pai, astromante de renome, chamava-se de Mahesvara

[5] Brahmagupta nasceu no ano de 598. Foi um matemático e astrônomo da Índia Central que demonstrou a solução geral para a equação do segundo grau em números inteiros (as diofantinas) e desenvolveu métodos algébricos gerais para aplicação na Astronomia, em sua principal obra, Brahmasphutasidanta (650).

com um grande interesse por parte dos chineses, e eles começaram a generalizar o quadrado original 3×3 entre 900 e 1300 d.C. A China correspondeu com o Oriente Médio sobre esse problema no século 13.

Figura 4.3: Go

O Oriente Médio também aprendeu sobre os coeficientes binomiais do trabalho dos matemáticos indianos e descobriu uma conexão com a expansão polinomial. O trabalho dos hindus influenciou os árabes, como visto no trabalho de al-Khalil ibn Ahmad[6], que considerou os possíveis arranjos de letras para formar sílabas. Seus cálculos mostram grande compreensão de permutações e combinações. Em uma passagem do trabalho do matemático árabe Umar al-Khayyami, que data de cerca de 1100, é corroborado que os hindus tinham conhecimento dos coeficientes binomiais, mas também que seus métodos alcançaram o Oriente Médio.

Abū Bakr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji (953-1029) escreveu sobre o teorema binomial e o triângulo de Pascal. Em um trabalho considerado perdido e conhecido apenas da citação de al-Samaw'al, Al-Karaji introduziu a idéia de argumento por indução matemática.

O filósofo e astrônomo Rabi Abraham ibn Ezra (1089 - 1167) contou as permutações com repetições na vocalização do Nome Divino. Ele também estabeleceu a simetria dos coeficientes binomiais, enquanto uma fórmula fechada foi obtida mais tarde pelo talmudista e matemático Levi Ben Gerson (1248-1344) (mais conhecido como Gersonides), em 1321. O triângulo aritmético -

[6]Abu Abd ar-Ramanan al-Khalil ibn Ahmad ibn Amr ibn Tammam al-Farahid al-Azda al-Yahmadi, conhecido como Al-Farahidi, ou Al-Khalil, ele era um lexicógrafo filólogo e principal gramático de Basra, no Iraque.

um diagrama gráfico que mostra as relações entre os coeficientes binomiais - foi apresentado por matemáticos em tratados datados do século X e acabaria por se tornar conhecido como o triângulo de Pascal. Mais tarde, na Inglaterra medieval, a campanologia forneceu exemplos do que hoje é conhecido como ciclos hamiltonianos em certos gráficos de Cayley sobre permutações.

O estudo da combinatória chegou a Europa no século 13 através dos matemáticos Leonardo Fibonacci e Jordanus de Nemore. Liber Abaci, de Fibonacci, introduziu muitas idéias da Arábia e da Índia na Europa, inclusive a dos números de Fibonacci. Jordanus foi a primeira pessoa a organizar os coeficientes binomiais em um triângulo, como fez na proposição 70 de "*De Arithmetica*". Isso também foi feito no Oriente Médio em 1265 e na China por volta de 1300. Atualmente, esse triângulo é conhecido como triângulo de Pascal.

A contribuição de Pascal para o triângulo que leva seu nome vem de seu trabalho em provas formais sobre ele, e as conexões que ele fez entre o triângulo e a probabilidade de Pascal. De uma carta que Leibniz enviou a Daniel Bernoulli, descobriu-se que Leibniz estava estudando formalmente a teoria matemática das partições no século XVII, embora nenhum trabalho formal tenha sido publicado. Juntamente com Leibniz, Pascal publicou De Arte Combinatória em 1666, que foi reimpresso mais tarde. Pascal e Leibniz são considerados os fundadores da moderna combinatória.

Tanto Pascal quanto Leibniz entenderam que a expansão binomial era equivalente à função *choice*. A noção de que álgebra e combinatória eram campos correspondentes na matemática foi expandida por De Moivre, que encontrou a expansão de um multinomial. De Moivre também encontrou a fórmula para distúrbios usando o princípio do princípio da inclusão-exclusão, um método diferente de Nikolaus Bernoulli, que havia encontrado anteriormente. De Moivre também conseguiu aproximar os coeficientes binomiais e fatorial, e encontrou uma forma fechada para os números de Fibonacci, inventando funções geradoras.

No século XVIII, Euler trabalhou em problemas de análise combinatória e vários problemas de probabilidade que estão ligados à análise combinatória.

Os problemas em que Euler trabalhou incluem a turnê dos Cavaleiros, a praça greco-latina, os números eulerianos e outros. Para resolver o problema das Sete Pontes de Königsberg, ele inventou a teoria dos grafos, que também levou à formação da topologia. Finalmente, ele abriu espaço com partições pelo uso de funções geradoras.

No século XIX, o assunto de conjuntos parcialmente ordenados e teoria da estrutura originou-se no trabalho de Dedekind[7], Peirce[8] e Schröder[9]. No entanto, foi obra seminal de Garrett Birkhoff em seu livro Lattice Theory publicado em 1967, e o trabalho de John Von Neumann que verdadeiramente estabeleceu os temas. Na década de 1930, Hall (1936) e Weisner (1935) declararam independentemente a fórmula geral de inversão de Möbius. Em 1964, Sobre as Fundações da Teoria Combinatória I, de Gian-Carlo Rota, e Teoria das Funções de Miibius, introduziu a teoria de treliça e como teorias em Combinatória. Richard P. Stanley teve um grande impacto na combinatória contemporânea por seu trabalho na teoria matróide, por introduzir polinômios Zeta, por definir explicitamente posets eulerianos, desenvolvendo a teoria dos posetas binomiais junto com outros estudiosos da época.

4.1.1 A combinatória durante o século 20

Muitos fatores contribuíram para o acelerado ritmo de desenvolvimento da teoria combinatória desde 1920. Um deles foi o desenvolvimento da teoria estatística do projeto de experimentos pelos estatísticos ingleses Ronald Fisher e Frank Yates, que deu origem a muitos problemas de análise combinatória. Os métodos inicialmente desenvolvidos para resolvê-los encontraram aplicações em campos como a teoria de codificação. A teoria da informação, que surgiu

[7]Julius Wilhelm Richard Dedekind Foi um matemático alemão com importantes contribuições para a álgebra abstrata, base axiomática para números naturais, Teoria dos números algébricos e a definição dos números reais

[8]Charles Sanders Peirce. Foi um filósofo, lógico, matemático e cientista americano, também conhecido como "o pai do pragmatismo". foi educado como químico e empregado como cientista por 30 anos. Apreciado apreciado em grande parte por suas contribuições à lógica, matemática, filosofia, metodologia científica e semiótica, e por sua fundação do pragmatismo.

[9]Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder. Foi um matemático alemão conhecido principalmente por seu trabalho em lógica algébrica, figura importante na história da lógica matemática, mais conhecido por sua monumental Vorlesungen über die Álgebra der Logik (Lições sobre a álgebra da lógica), em três volumes, que preparou o caminho para o surgimento da lógica matemática como uma disciplina separada no século XX, sistematizando os vários sistemas de lógica formal do dia.

por volta de meados do século, também se tornou uma rica fonte de problemas combinatórios de um tipo bastante novo.

Outra fonte do ressurgimento do interesse pela combinatória é a teoria dos grafos[10], cuja importância reside no fato de que os gráficos podem servir como modelos abstratos para muitos tipos diferentes de esquemas de relações entre conjuntos de objetos. Suas aplicações se estendem à pesquisa operacional, química, mecânica estatística, física teórica e problemas socioeconômicos. A teoria das redes de transporte pode ser considerada como um capítulo da teoria dos gráficos direcionados.

Um dos problemas teóricos mais desafiadores, o problema do mapa de quatro cores pertence ao domínio da teoria dos grafos. Ele também tem aplicações para outros ramos da matemática como a teoria de grupos.

Por mais de um século, a solução do problema do mapa de quatro cores iludiu todos os analistas que tentaram. O problema pode ter atraído a atenção de Möbius[11], mas a primeira referência escrita a ele parece ser uma carta de Francis Guthrie a seu irmão, um estudante de Augustus De Morgan, em 1852.

O problema diz respeito aos mapas planares - isto é, subdivisões do plano em regiões não sobrepostas limitadas por simples curvas fechadas. Em mapas geográficos, tem sido observado empiricamente, em tantos casos especiais como foram experimentados, que no máximo quatro cores são necessárias para colorir as regiões, de modo que duas regiões que compartilham um limite comum sejam sempre coloridas de maneira diferente, e em certos casos, são necessárias pelo menos quatro cores. (Regiões que se encontram apenas em um ponto, como os estados de Colorado e Arizona nos Estados Unidos, não são consideradas como tendo um limite comum). Uma formalização dessa observação empírica constitui o que é chamado de "o teorema das quatro cores". O problema é provar ou refutar a afirmação de que esse é o caso de todo mapa planar. Que três cores não bastam é facilmente demonstrada, enquanto a su-

[10]é um ramo da matemática que estuda as relações entre os objetos de um determinado conjunto. Para tal são empregadas estruturas chamadas de grafos, G (V , E), onde V é um conjunto não vazio de objetos denominados vértices (ou nós) e E (do inglês Edges - arestas) é um subconjunto de pares não ordenados de V.

[11]August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) foi um matemático e astrónomo alemão. A ele se devem a fita de Möbius, a função de Möbius, as transformações de Möbius, a fórmula de inversão de Möbius e a rede de Möbius.

ficiência de cinco cores foi provada em 1890 pelo matemático britânico Percy J. Heawood[12].

O Problema das Quatro Cores tem a característica indubitavelmente fascinante de ser um problema matemático de formulação muito simples, a par duma enorme complexidade de resolução, que fez com que permanecesse por resolver durante mais e uma centena de anos. Há outros assim, por exemplo, é bem sabido que o famoso último Teorema de Fermat somente há escassos anos foi demonstrado.

Em 1879 Alfred B. Kempe[13], propôs uma solução para o problema das quatro cores. Embora Heawood tenha mostrado que o argumento de Kempe era falho, dois de seus conceitos se mostraram frutíferos em uma investigação posterior. Uma delas, chamada inevitabilidade, afirma corretamente a impossibilidade de construir um mapa no qual cada uma das quatro configurações esteja ausente (essas configurações consistem em uma região com dois vizinhos, um com três, um com quatro e um com cinco). O segundo conceito, o de redutibilidade, leva o nome da prova válida de Kempe de que se há um mapa que requer pelo menos cinco cores e que contém uma região com quatro (ou três ou dois) vizinhos, então deve haver um mapa requerendo cinco cores para um menor número de regiões. A tentativa de Kempe de provar a redutibilidade de um mapa contendo uma região com cinco vizinhos era errônea, mas foi corrigida em uma prova publicada em 1976 por Kenneth Appel[14] e Wolfgang Haken[15] dos Estados Unidos.

Sua prova atraiu algumas críticas porque exigiu a avaliação de 1.936 casos distintos, cada um envolvendo até 500.000 operações lógicas. Appel, Haken e seus colaboradores criaram programas que possibilitaram a um grande computador digital lidar com esses detalhes. O computador precisou de mais

[12]Percy John Heawood foi um matemático britânico educado na Queen Elizabeth's School, em Ipswich, e no Exeter College, em Oxford. Foi nomeado professor da Universidade de Durham em 1885.

[13]Alfred Bray Kempe (1849-1922) foi um matemático britânico, conhecido por sua contribuição para o teorema das quatro cores.

[14]Kenneth Ira Appel (1932- 2013)foi um matemático estadunidense que, em 1976, colaborando com Wolfgang Haken na Universidade de Illinois, resolveu um dos mais famosos problemas na matemática: o teorema das quatro cores.

[15]Wolfgang Haken é um matemático alemão. Em 1976, com seu colega Kenneth Appel da Universidade de Illinois em Urbana-Champaign, resolveu um dos mais famosos problemas da matemática, o teorema das quatro cores.

de 1.000 horas para realizar a tarefa, e a prova formal resultante é de várias centenas de páginas.

O desenvolvimento da informática na segunda metade do século XX é a principal causa do interesse pela matemática finita em geral e pela teoria combinatória em particular. Os problemas combinatórios surgem não apenas na análise numérica, mas também no projeto de sistemas de computadores e na aplicação de computadores a problemas como o armazenamento e a recuperação de informações.

A mecânica estatística é uma das fontes mais antigas e produtivas de problemas combinatórios. Um trabalho combinatório muito importante tem sido feito por matemáticos e físicos aplicados desde meados do século 20 - por exemplo, o trabalho sobre modelos Ising:

> Uma grade retangular de lados $m \times n$ é composta de quadrados unitários, cada um colorido em vermelho ou verde. Quantos padrões de cores diferentes existem se o número de bordas limite entre quadrados vermelhos e quadrados verdes for preestabelecido?

Este problema, embora fácil de afirmar, mostrou-se muito difícil de resolver. Uma solução completa e rigorosa não foi alcançada até o início dos anos 1960. A importância do problema reside no fato de que é o modelo mais simples que exibe o comportamento macroscópico esperado de certas suposições naturais feitas no nível microscópico. Historicamente, o problema surgiu de uma tentativa inicial, feita em 1925, de formular a mecânica estatística do ferromagnetismo.

Na matemática pura, os métodos combinatórios têm sido usados com vantagem em campos tão diversos como probabilidade, álgebra (grupos e campos finitos, matriz e teoria de treliça), teoria dos números(conjuntos de diferenças), teoria de conjuntos (teorema de Sperner) e lógica matemática teorema).

Em contraste com a ampla gama de problemas combinatórios e a multiplicidade de métodos que foram concebidos para lidar com eles, está a falta de uma teoria unificadora central. Princípios unificadores e conexões cruzadas, no entanto, começaram a aparecer em várias áreas da teoria combinatória. A

busca por um padrão subjacente que possa indicar de alguma forma como as diversas partes da análise combinatória estão entrelaçadas é um desafio que os matemáticos enfrentam no último quartel do século XX.

5 METODOLOGIA

No presente capítulo será feita uma abordagem a respeito do percurso metodológico selecionado para a realização do trabalho em questão. Desta forma, necessário destacar que para o entendimento da presença de ID e dificuldades na aprendizagem de análise combinatória foi feita utilizando-se Método da Engenharia Didática.

5.1 Engenharia didática como metodologia de pesquisa

A metodologia da Engenharia Didática surgiu como decorrência da vertente conhecida como Didática da Matemática. Douady (1985) define a Didática da Matemática como a área da ciência que estuda o processo de transmissão e aquisição de diferentes conteúdos no ensino básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar os fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática.

Toda pesquisa, deve ter como objetivo principal proporcionar aos docentes uma capacidade de sinalizar os enfrentamentos sofridos pelas pessoas no processo de procura de solução dos problemas que os cercam, assim, auxiliando professores a melhor compreender os momentos de dificuldades de seus alunos nas aulas de matemática.

Aproximar a prática educacional às metodologias de ensino propostas pelos educadores pesquisadores deve ser sempre um objetivo a ser alcançado, contudo, ao realizar essa aproximação, deve-se analisar cuidadosamente o campo que se trabalhará, pois nem todos os alunos são iguais, logo, nem todas as metodologias de ensino funcionam da mesma forma com todos os discentes.

Portanto, a realização de pesquisas de campo sempre será válida e fundamental para análise do funcionamento de tais ferramentas metodológicas. D'Ambrósio diz que:

> "O grande desafio da educação é por em prática hoje o que vai servir para o amanhã. Por em prática significa levar pressupostos teóricos, isto é, um saber/fazer acumulado ao longo de tempos passados, ao presente." (D'AMBROSIO, 2012).

As pesquisas em Educação Matemática, em sua maior parte, com caráter qualitativo, têm como objetivo encontrar soluções para os diversos problemas encontrados pelos professores frente ao ensino da Matemática. Estas soluções procuram propor novas metodologias de ensino, novas abordagens de conteúdos, criação de materiais lúdicos e didáticos trabalhados em ambientes específicos ou não, com a finalidade de diagnosticar e identificar as principais dificuldades encontradas pelos discentes para que, conhecendo o problema, possam atuar de forma mais precisa alcançando os resultados esperados.

Entre as diversas pesquisas dentro da área de Educação matemática está a Engenharia Didática. Essa metodologia de pesquisa se caracteriza por um esquema experimental realizada numa sequencia didática previamente planejada, na qual serão analisados, no próprio ambiente escolar, as aulas ministradas. Uma das partes mais singulares dessa metodologia é a existência de uma análise a priori e uma analise a posteriori. Essas análises podem ser feitas mesmo com a ausência de uma avaliação diagnóstica ou uma avaliação final o que de acordo com Almouloud(2008):

> Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 66).

A Engenharia Didática atua de forma a analisar as práticas que estão em ação e, que por algum motivo, apresentam resultados pouco satisfatórios.

Assim, é realizada uma análise crítica e bem fundamentada com o objetivo de apresentar soluções ou mudanças cabíveis para que a prática do ensino alcance seu objetivo, que é a construção do conhecimento pelo aluno.

Por outro lado, conforme Souza e Cordeiro (2005), a Engenharia Didática é uma expressão com duplo sentido. Designa produções para o ensino, derivadas de resultados de pesquisa, e também designa uma específica metodologia de pesquisa baseada em experiências de sala de aula. Dessa maneira, esta metodologia foi criada para atender a duas questões: a questão das relações entre pesquisa e ação no sistema de ensino; e a questão do lugar reservado para as realizações didáticas entre as metodologias de pesquisa.

Assim, a teoria da Engenharia Didática pode ser vista como referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados na junção do conhecimento prático com o conhecimento teórico, ou seja, nesta metodologia a prática de ensino é articulada com prática de investigação.

No contexto da pesquisa em questão foram desenvolvidas as quatro fases da Engenharia didática:

Fase de análise prévia, etapa em que é realizada uma análise preliminar, na qual, através de uma observação, conseguimos identificar que existe alguma dificuldade por parte de professores ou alunos em desenvolver e construir determinado conhecimento.

Fase de análise a priori, etapa que permite ao pesquisador prever algumas ocorrências dentro da pesquisa devido à escolha conveniente de recursos didáticos, que auxilia na evolução da pesquisa.

Fase de experimentação, etapa na qual a pesquisa é desempenhada de fato, num campo previamente escolhido e com amostras antecipadamente selecionadas. De acordo com Machado (2002 apud PINHEIRO, 2008, p. 25), a experimentação consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise a priori.

Fase de análise a posteriori etapa na qual são feitas as análises finais, que de acordo com Artigue (1996 apud PINHEIRO, 2008, p. 26), “se apoiam sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação pelas observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita".

5.2 Análise preliminar

Movido pela experiência pessoal de não ter compreendido os tópicos de análise combinatória enquanto aluno de ensino médio, e enquanto profissional da educação, ter percebido a dificuldade de muitos alunos ao estudarem análise combinatória. Com isso, surgiu o interesse em realizar uma pesquisa para buscar compreender quais os fatores que corroboram para o insucesso de muitos alunos no conteúdo de Análise Combinatória e, dessa maneira, poder propor uma abordagem alternativa para o ensino desse conteúdo.

A análise preliminar foi feita, uma busca no catálogo de teses da CAPES acerca do tema discalculia, sendo encontrados 36 resultados, dos quais 22 são teses de mestrado e 8 de doutorado, com apenas 6 pesquisas na área de conhecimento de ensino ciências e matemática. Ao pesquisar o tema análise combinatória obteve-se um quantitativo de 30788 trabalhos na mesma área. Percebe-se que há uma carência de pesquisas na área de discalculia.

Com o intuito de verificar indícios de discalculia (ID) e dificuldades de aprendizagem matemática nos alunos da Escola Estadual José do patrocínio, que atende 160 alunos do ensino médio, dos quais 69 são alunos do segundo ano e EJA, foi utilizado o software Dyscalc (disponível em: http://app.educational-psychologist.co.uk/screening/dyscalculic/). O software foi desenvolvido pelo Wadeson Street Dyslexia Centre, em Londres.

O software Dyscalc é um instrumento de triagem, desenvolvido por uma equipe de psicólogos educacionais, as questões do software são direcionadas para pessoas a partir de 14 anos de idade, não se trata de um diagnóstico, de acordo com o Dyscalc uma pontuação baixa não fornece um diagnóstico de discalculia e sim indica a presença de indícios de discalculia (ID) e proporciona ao professor uma amostra das habilidades matemáticas de seus alunos, como senso numérico, memorização e recordação de dados matemáticos, raciocínio matemático, percepção do número na forma escrita e numérica, raciocínio aritmético mental (adição, subtração, multiplicação e divisão) e matemática

básica na solução de problemas do mundo real utilizando a forma escrita. As Tabelas 5.1 e 5.2 descrevem as habilidades avaliadas em cada questão:

Tabela 5.1: Habilidades matemáticas avaliadas nas questões 01 à 17 do teste Dyscalc.

Item	**Habilidade**
01	Aritmética mental básica: multiplicação; aplicação numérica; Cálculo; sentido numérico.
02	Memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética.
03	Memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número.
04	Uso de número equivalentes e números básicos.
05	Entendendo o número em forma escrita e numérica; resolver problemas do mundo real apresentados em forma escrita; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número; aritmética básica com uso de caneta e papel.
06	Resolvendo problemas do mundo real apresentados em forma escrita.
07	Cálculo e processamento de informações numericamente relacionadas e sentido numérico; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número; aritmética mental básica: adição e multiplicação.
08	Aritmética básica com uso de caneta e papel: subtração; Resolvendo problemas do mundo real apresentados em forma escrita; manuseio de dinheiro e mudança; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número.
09	Dificuldades numéricas que afetam a vida cotidiana; sentido numérico; habilidades relacionadas ao número do mundo real; gerenciamento de dinheiro.
10	Raciocínio matemático: descobrir informação relacionada com números; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética.
11	Retomada de informações relacionadas ao número do mundo real.
12	Aritmética básica com uso de caneta e papel: adição e/ou multiplicação; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número.
13	Lembrar-se da informação relacionada ao número do mundo real e do senso numérico.
14	Processamento de informação numérica; compreender o número em forma escrita e numérica; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número; resolver problemas do mundo real apresentados em forma escrita.
15	Conhecimento do mundo real e retomada de informações numericamente relacionadas; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética.
16	Conhecimento do mundo real e retomada de informações numericamente relacionadas; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética.
17	Memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética.

Tabela 5.2: Habilidades matemáticas avaliadas nas questões 18 a 20 do teste Dyscalc.

Item	Habilidade
18	Memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética.
19	Memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética; aritmética básica com uso de caneta e papel: multiplicação.
20	Aritmética básica com uso de caneta e papel: divisão; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética; processar informação numérica; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número.

Um aluno que obtenha pontuação igual ou inferior a 50% não significa que o tenha discalculia, entretanto aponta que o aluno apresenta indícios de discalculia (ID), permitindo ao professor identificar alunos com dificuldades de aprendizagem em matemática. Assim, teste Dyscalc se apresenta como uma ferramenta de rastreio de estudantes com dificuldades de aprendizagem em Matemática.

Foram planejadas aulas sobre Princípio Fundamental da Contagem (PFC), Permutação, Arranjos e Combinação simples, cuja abordagens metodológicas foram: a) Problema motivador e b) Fórmula aplicação, com o objetivo de analisar a aprendizagem dos alunos. O objetivo desta etapa foi apresentar ao aluno problemas de combinatória que possam ser resolvidos através de diagramas de possibilidades ou, mostrando todas as possibilidades existentes e contabilizando-as, associando, dessa forma, problemas de combinatória aos problemas de contagem. Dessa maneira, a pesquisa foi guiada para que o aluno percebesse a importância das ferramentas que serão compartilhadas pelo professor futuramente.

5.3 Análise a priori.

De acordo com Machado (2002 apud POMMER, 2013, p. 24), "a análise a priori deve comportar um caráter descritivo e preditivo, sendo a análise vinculada às características da situação didática desenvolvida e aplicada aos alunos."

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual José do Patrocínio, localizada no Distrito de Fazendinha, Município de Macapá-AP. A escola funciona em três turnos, ofertando ensino regular e Educação de Jovens e Adultos – EJA, do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio. A escola não dispõe de equipe pedagógica para acompanhamento de alunos com dificuldades de aprendizagem, dispondo apenas de professores de Atendimento Educacional Especializado – AEE, para acompanhamento de alunos portadores de necessidades especiais (Autismo, surdez, cegueira, limitações físicas, etc.).

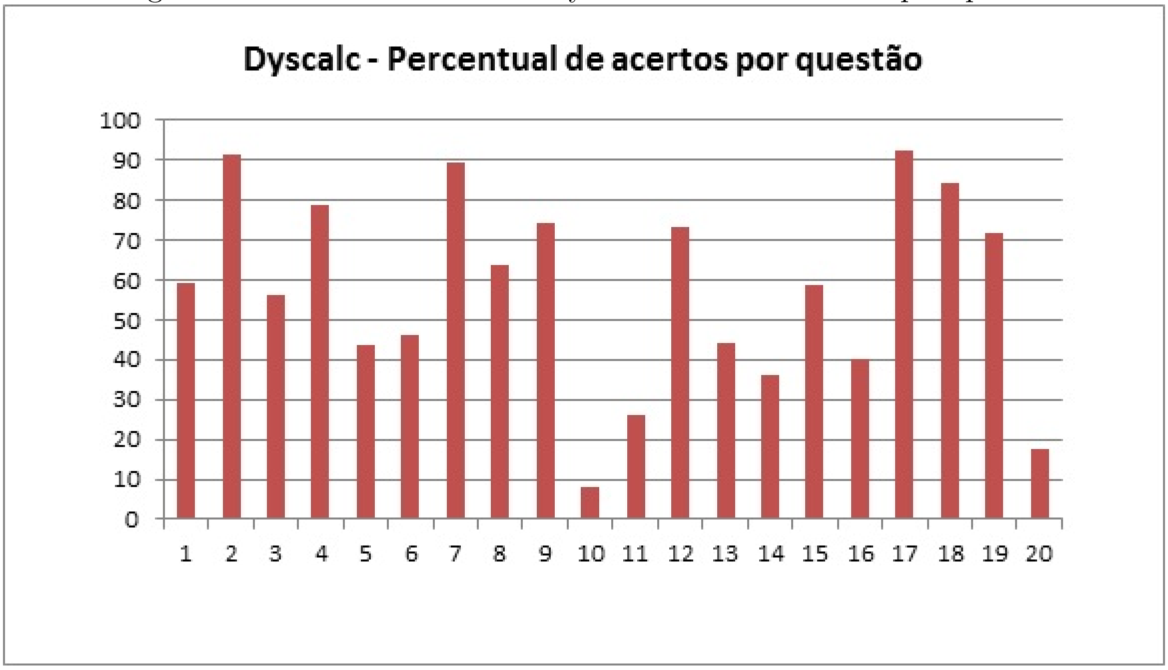
No ano de 2019 a escola ofertou ensino médio regular com as seguintes turmas, três turmas de 1º ano regular, duas turmas de 2º ano e uma turma de 3º ano; e também ofertado Educação de Jovens e Adultos (EJA), com uma turma de 1ª Etapa e duas turmas de 2ª Etapa. A Tabela 5.3 apresenta a composição das turmas de ensino médio, no que tange a faixa etária e a presença de ID.

Tabela 5.3: Caracterização das dificuldades de aprendizagem quanto ao sentido

Turmas	**Alunos matriculados**	**Alunos frequentando**	**Faixa etária**	**Percentual de alunos com ID**
1º ano A	32	20	15 à 17	0%
1º ano B	36	24	15 à 18	12,5%
1º ano C	38	11	17 à 21	45,45%
2º ano A	23	23	16 à 18	30,43%
2º ano B	23	18	17 à 18	44,44%
3º ano	29	26	19 à 22	42,30%
1ª Etapa A	22	10	19 à 47	90%
2ª Etapa T	20	12	17 à 24	25%
2ª Etapa N	28	16	19 à 52	75%

A Figura 5.1 apresenta o percentual de acertos por questão entre todas as turmas do ensino médio.

Figura 5.1: Resultado do teste Dyscalc no Ensino Médio por questão



A aplicação do teste Dyscalc em todas as turmas no ensino médio proporcionou uma amostra das habilidades matemáticas dos alunos, na Tabela 5.3 observa-se que a turma 1º ano A, formada por alunos com idade adequada para a série, nenhum deles apresentou ID, nas turmas de EJA com alunos de idade mais avançada apresentaram maior percentual de ID, refletindo assim, a dificuldade de aprendizagem matemática desses alunos.

A seguir, nas Tabelas 5.4 e 5.5 temos a descrição das perguntas e o objetivo que o teste dyscalc visa alcançar, ressaltando que cada questão contém quatro alternativas.

Tabela 5.4: Descrição das questões 01 e 02 do Teste Dyscalc.

Item	**Descrição**	**Habilidade**
1	Propõe a multiplicação de 18,975 por 10	Matemática básica:multiplicação; aplicação numérica; cálculo;sentido
2	Questiona o significado do simbolo >	Analisa a capacidade memorização e recordação de simbolos relacionados à aritmética.

Tabela 5.5: Descrição das questões 03 à 08 do Teste Dyscalc.

Item	**Descrição**	**Habilidade**
3	Apresenta um circulo fracinado em oito partes,com uma parte sombreada e requer que aluno a correlacione com a fração correspondente	Avalia a capacidade de memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética, raciocínio matemático e de descobrir informações relacionadas ao número.
4	Apresenta o número 0,5 para que o aluno compare com o seu equivalente	Avalia a capacidade do aluno de utilizar números equivalentes e números básicos.
5	Apresenta a distância entre duas cidades e a velocidade média de deslocamento para que o aluno indique o tempo necessário para completar o deslocamento	Avalia o entendendimento de número em forma escrita e numérica; capacidade de resolver problemas do mundo real apresentados em forma escrita, de descobrir informações relacionadas ao número e aritmética básica com uso de caneta e papel.
6	Apresenta a situação de uma pessoa saudável caminhando e questiona o tempo médio para caminhar 1,5km	Avalia a capacidade de resolver problemas do mundo real apresentados em forma escrita
7	Apresenta uma malha com 80 asteriscos dispostos e 10 linhas e 8 colunas e proprõe a contagem dos mesmos	Avalia a capacidade de cálculo e processamento de informações numericamente relacionadas; cálculo; raciocínio matemático referente a informações relacionadas ao número; aritmética mental básica: adição e multiplicação.
8	Apresenta a subtração entre dois números décimais em forma de valores monetários	Avalia a capacidade do aluno de operar aritmética básica com uso de caneta e papel: subtração; Resolvendo problemas do mundo real apresentados em forma escrita; manuseio de dinheiro e mudança; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número;

Tabela 5.6: Descrição das questões 09 à 15 do Teste Dyscalc.

Item	**Descrição**	**Habilidade**
9	Questiona se o aluno tem dificuldade em manusear dinheiro	Avalia as dificuldades numéricas que afetam a vida cotidiana do aluno, habilidades relacionadas ao número do mundo real e gerenciamento de dinheiro.
10	Requer que o aluno compare os números "um quarto", 0,95 e 28% e indique qual o maior	Avalia a capacidade de raciocínio matemático em descobrir informações relacionadas com números; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética
11	Requer que o aluno identifique a unidade de medida destacada em um segmento de régua	Avalia a capacidade de retomada de informações relacionadas ao número do mundo real
12	Apresenta uma malha composta de números 2, disposta em 8 linhas e 10 colunas sendo solicitado que o aluno some os números	Avalia os conhecimentos de aritmética básica com uso de caneta e papel: adição e/ou multiplicação; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número
13	Apresenta um diagrama representando uma cama e requer que o aluno identifique a unidade de medida correspondente	Avalia a capacidade de Lembrar-se da informação relacionada ao número do mundo real e do senso numérico
14	Apresenta uma tabela com informações de venda de dois produtos feita por 5 grupos de venda e requer que o aluno identifique quais grupos venderam mais um certo tipo de produto	Avalia a capacidade de processamento de informação numérica; compreensão do número em forma escrita e numérica; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número; resolver problemas do mundo real apresentados em forma escrita
15	Requer que o aluno identifique a quantidade de metros contidos em 1km	Avalia o conhecimento do mundo real e retomada de informações numericamente relacionadas; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética

Tabela 5.7: Descrição das questões 16 à 20 do Teste Dyscalc.

Item	Descrição	Habilidade
16	Requer que o aluno identifique a quantidade de milimetros contidos em 1 metro	avalia o conhecimento do mundo real e retomada de informações numericamente relacionadas; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética
17	Apresenta o sinal de raiz quadrada e requer que o aluno o identifique	Avalia a capacidade de memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética;
18	Apresenta o sinal de infinito e requer que o aluno o identifique	avalia a capacidade de Memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética
19	Apresenta uma potenciação e requer que o aluno associe ao valor correspondente	Avalia a capacidade de memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética; aritmética básica com uso de caneta e papel: multiplicação
20	Apresenta um cubo de aresta 3cm e requer que o aluno idenfique o valor correspondente ao volume	Avalia a capacidade de operar aritmética básica com uso de caneta e papel: divisão; memorização e recordação de fatos relacionados à aritmética; processar informação numérica; Cálculo; raciocínio matemático: descobrir informações relacionadas ao número.

5.4 Experimentação

A experimentação ocorreu durante o primeiro bimestre do ano letivo de 2019, do dia 26/02/2019 à 03/05/2019, tomando como espaço amostral 41 alunos das turmas de 2º ano (ensino médio regular) e 28 alunos das turmas de 2ª etapa (EJA).

5.4.1 Experimentação na turma 2º ano A

Nesta turma, formada por 23 alunos. Foi aplicado o teste Dyscalc com o objetivo de identificar a presença de indícios de discalculia. O diagnóstico correto e apurado deve ser realizado por profissionais e técnicos da área. Assim, se o aluno partícipe obtiver 50% ou menos de acertos, e durante as atividades em sala de aula demonstrar desempenho insuficiente, deverá ser encaminhado ao profissional da área, somente este poderá diagnosticar e avaliar o melhor tratamento para a discalculia apresentada. A Figura 5.2 apresenta os resultados obtidos pós a aplicação o teste Dyscalc a a Figura 5.3 o quantitativo de alunos com ID segundo a faixa de acertos.

Figura 5.2: Resultado do teste Dyscalc por aluno na turma 2º ano A

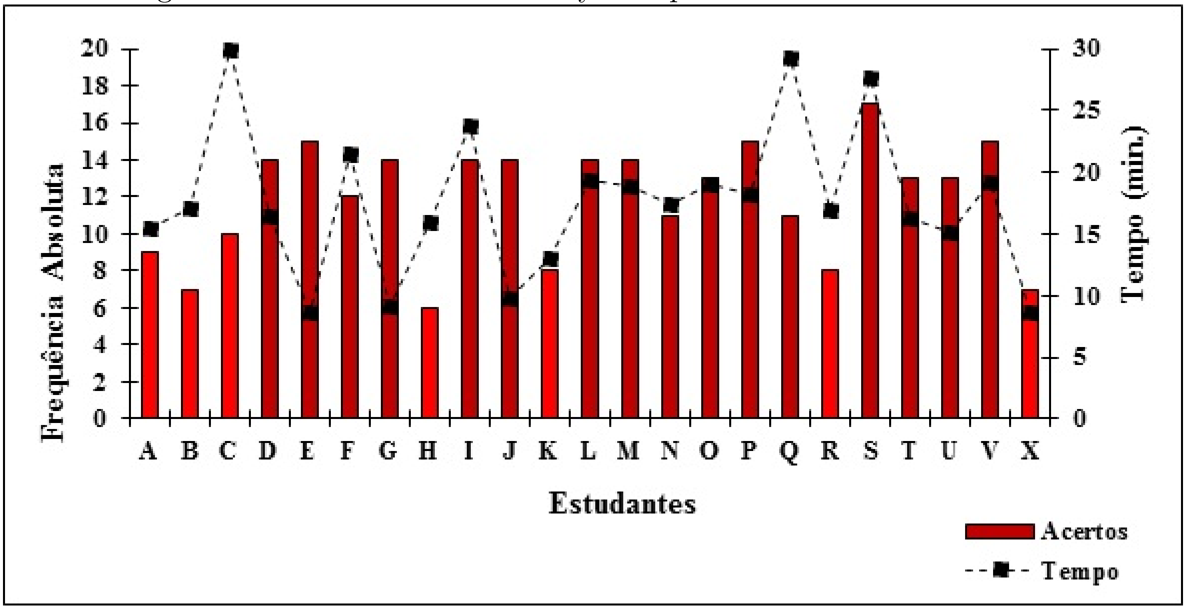
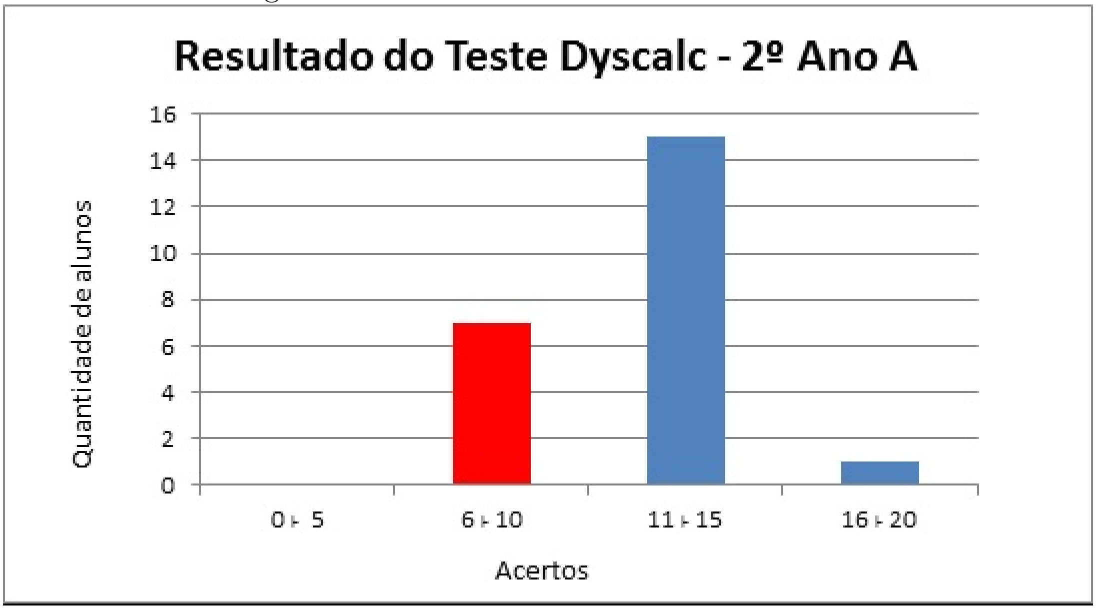


Figura 5.3: Alunos com ID na turma 2º ano A



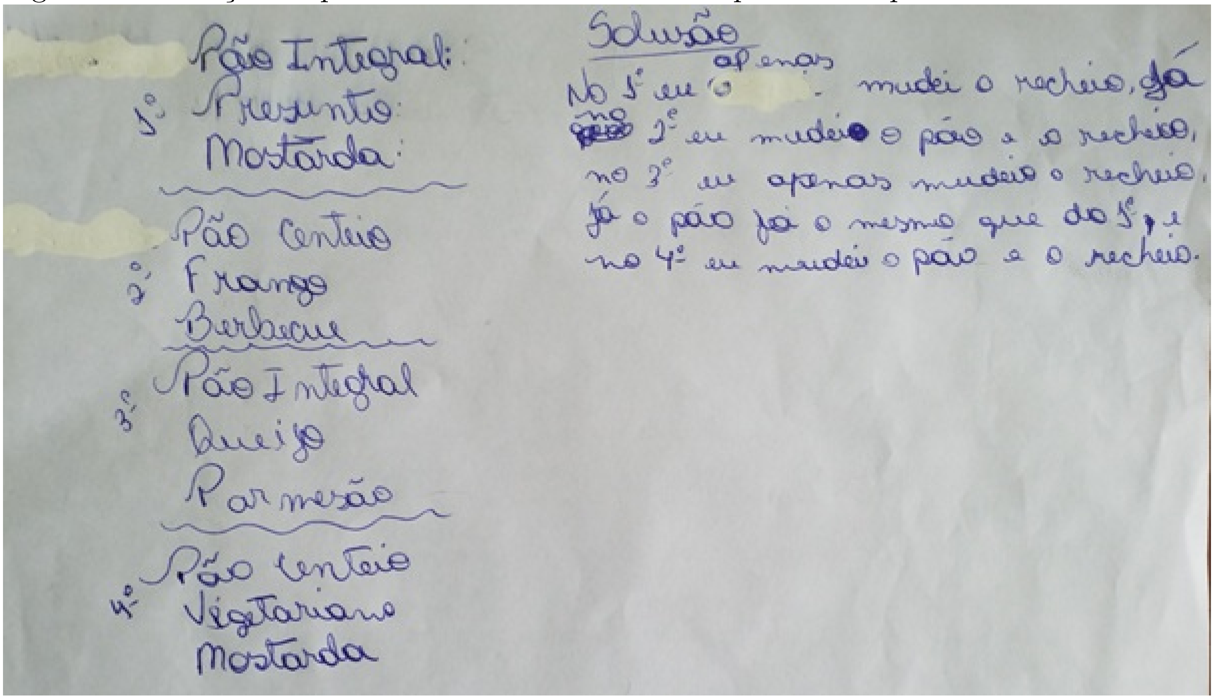
Dos 23 alunos submetidos ao teste Dyscalc sete apresentaram ID, ou seja, 30,43% dos alunos, com pontuação no intervalo de acertos de 6 a 10 questões.

5.4.2 Princípio fundamental da contagem a partir de um problema motivador na turma 2º ano A

Ao iniciar a abordagem conceitual de análise combinatória, foi utilizada a metodologia da resolução de problemas como ponto de partida, sendo apresentado o seguinte problemas motivador: *"Em certa lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão, (centeio ou integral), quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano) e três de molhos (barbecue, mostarda e parmesão). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão, um recheio e um molho?"*

Nesta etapa foi dada aos alunos a oportunidade de encontrar uma solução para problema sem a intervenção do professor, vejamos algumas respostas obtidas por alunos que apresentaram ID.

Figura 5.4: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno K. 2ª ano A.



Pão Integral:
1º Presunto:
Mostarda:

Pão Centeio
2º Frango
Barbecue

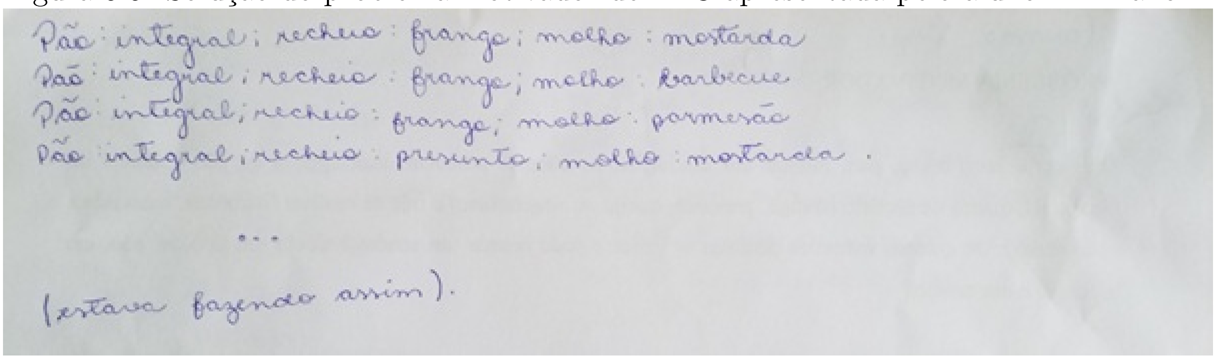
Pão Integral
3º Queijo
Parmesão

Pão centeio
4º Vegetariano
Mostarda

Solução
No 1º eu apenas mudei o recheio, já no 2º eu mudei o pão e o recheio, no 3º eu apenas mudei o recheio, já o pão foi o mesmo que do 1º, e no 4º eu mudei o pão e o recheio.

A resolução apresentada na Figura 5.4 é de um aluno com ID e em sua resolução enumerou 4 possibilidades de formação do sanduiche, sem utilização do princípio multiplicativo. Não houve análise de possibilidades para a composição dos sanduíches.

Figura 5.5: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno H. 2ª ano A



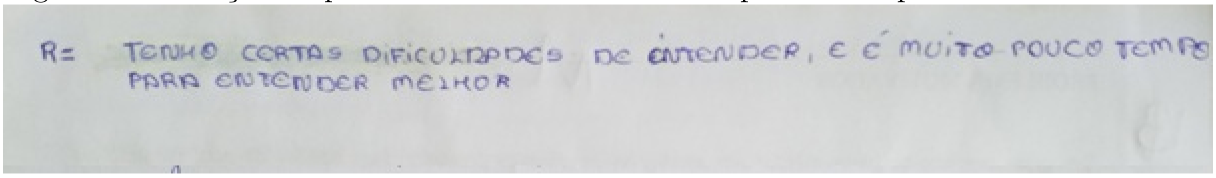
Pão: integral; recheio: frango; molho: mostarda
Pão: integral; recheio: frango; molho: barbecue
Pão: integral; recheio: frango; molho: parmesão
Pão: integral; recheio: presunto; molho: mostarda.

...

(estava fazendo assim).

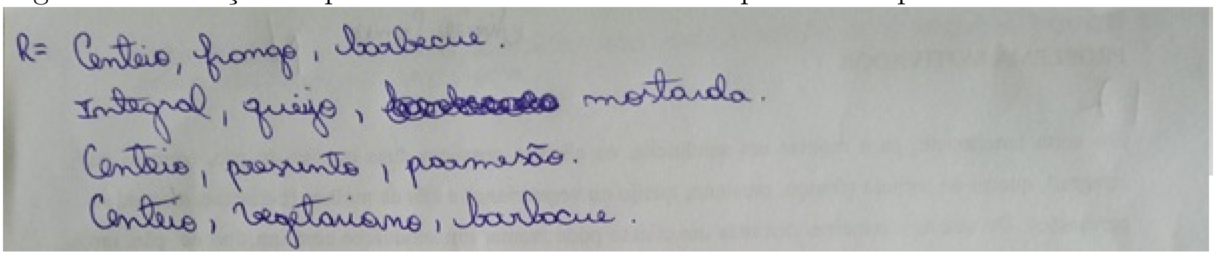
Na Figura 5.5 aluno utilizou recurso de enumeração das possibilidades, entretanto apresentou solução parcial.

Figura 5.6: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno C. 2ª ano A



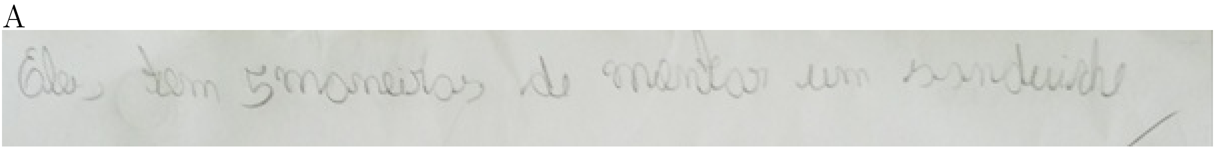
Na Figura 5.6 o aluno não conseguiu apresentar solução para o problema e justificou admitindo que tem dificuldade para entender e também manifestou insatisfação com o tempo para aprendizagem em sala de aula.

Figura 5.7: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno B. 2ª ano A



Na Figura 5.7 o aluno com ID apresentou apenas 4 possibilidades como solução, sem desenvolver qualquer recurso matemático, restringindo as variedades de sanduíches aos tipos de recheios disponíveis, uma vez não houve repetição destes. O aluno repetiu os tipos de pães e de molho, entretanto não percebeu que para cada tipo de pão teria quatro tipos de recheios e três tipos de molho.

Figura 5.8: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno R. 2ª Etapa A



Na figura 5.8, sem apresentar qualquer recurso matemático em sua solução, o aluno afirma que há apenas 5 maneiras de montar um sanduiche.

Dentre os alunos que não apresentaram ID também houve dificuldade para apresentar a solução para o problema. Após a resolução dos alunos, sem

a intervenção do professor, foi apresentada a resolução da questão enumerando todas as possiblidades de composição do sanduíche. Em seguida foi introduzido o conceito formal do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo que conforme (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 98), pode ser conceituado da seguinte forma: Se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras distintas, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto de n **x** m**. Em seguida no sentido de subsidiar a aprendizagem dos alunos foram apresentados e resolvidos os seguintes exemplos:**

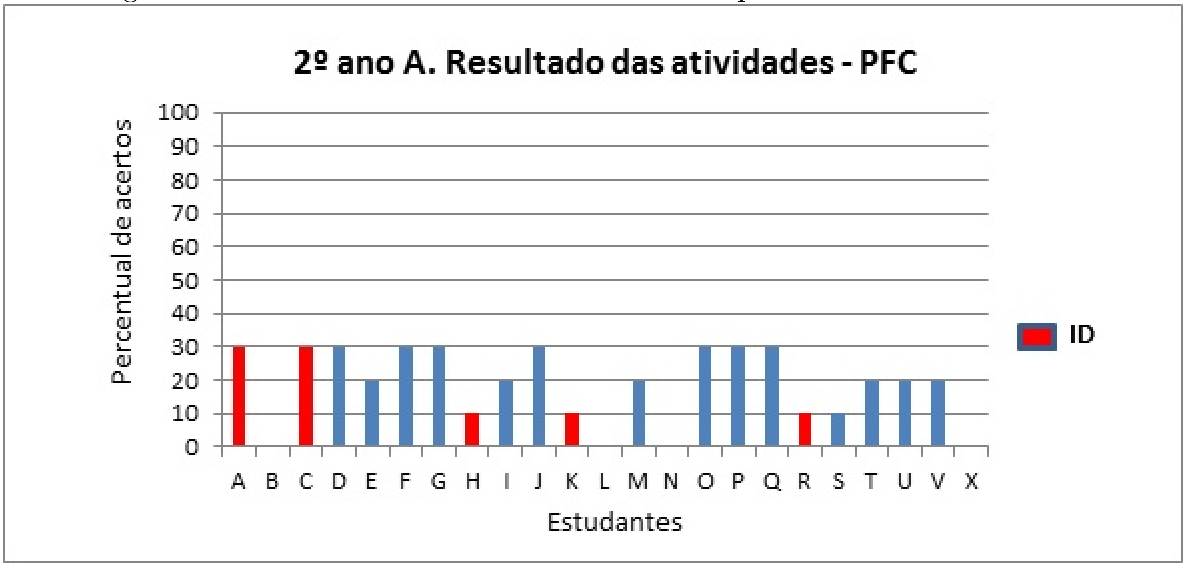
Tabela 5.8: Exercícios modelo de PFC utlizados na turma 2ª etapa A

1) Renato levou em uma viagem três calças, dois pares de sapatos e 4 camisas todos diferentes entre si. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir, utilizando uma calça, um par de sapatos e uma camisa?
2) Quantos números de três algarismo distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9.
3) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 podemos formar quantos números de quatro algarismos.

No segundo encontro foi proposta uma atividade de verificação de aprendizagem contendo 10 questões, conforme anexo II, divididas da seguinte forma: Aplicação imediata do PFC (1,2 e 3); aplicação do PFC reconhecida após leitura e interpretação da questão (4,5 e 6); aplicação condicionada a o conhecimento de outros conceitos matemáticos (7, 8, 9 e 10).

Após a aplicação dos exercícios forma obtidos os seguintes resultados:

Figura 5.9: Resultado das atividades de PFC aplicada na turma 2ª ano A

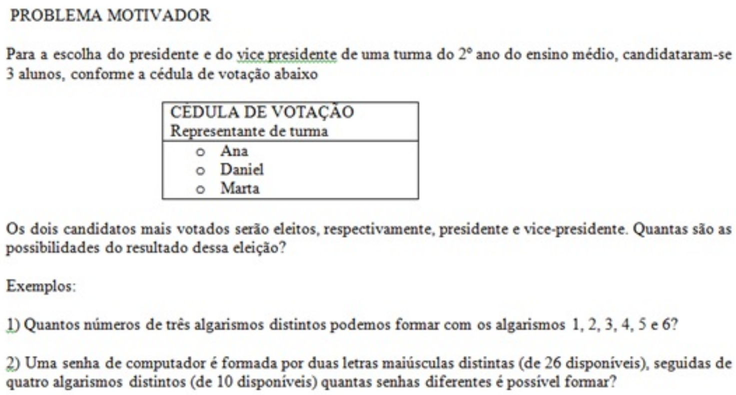


Na Figura 5.9, os alunos A, B, C, H, K, R e X apresentaram indícios de discalculia, seus rendimentos permaneceram entre 10 e 30%, obtendo êxito apenas nas questões em que a aplicação do PFC é imediata (Questões 1, 2 e 3), nas questões que exigiam maior atenção quanto a leitura e interpretação (questões 4, 5 e 6) e nas que necessitavam de conhecimentos sobre composição, organização e multiplicidade de números, (questões 7, 8 9 e 10), os alunos não apresentaram nenhuma tentativa de resolução.

5.4.3 O conceito de Arranjos a partir de um problema motivador na turma 2º Ano A

Antes de apresentar aos alunos o tema proposto, foi necessário introduzir o conceito de fatorial, essencial para a compreensão das atividades. Em seguida alunos foram apresentados ao seguinte problema motivador:

Figura 5.10: Problema motivador e exercícios utilizadas na aula sobre Arranjos



PROBLEMA MOTIVADOR

Para a escolha do presidente e do vice presidente de uma turma do 2º ano do ensino médio, candidataram-se 3 alunos, conforme a cédula de votação abaixo

CÉDULA DE VOTAÇÃO Representante de turma
o Ana o Daniel o Marta

Os dois candidatos mais votados serão eleitos, respectivamente, presidente e vice-presidente. Quantas são as possibilidades do resultado dessa eleição?

Exemplos:

1) Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

2) Uma senha de computador é formada por duas letras maiúsculas distintas (de 26 disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de 10 disponíveis) quantas senhas diferentes é possível formar?

A intervenção iniciou, com a propositura de três exercícios para os alunos que já possuíam conhecimentos sobre o PFC e fatorial. Foram obtidos os seguintes dados: Dentre os alunos analisados, 45% fez uso do PFC (Alunos D, E, I, K, O, S, T U e V) mesmo que dissociado do contexto do exercício apresentado, demonstrando uso mecanizado de recursos matemáticos, sem se preocupar com a interpretação do exercício. Dos alunos que fizeram uso do PFC, nenhum apresentou ID e utilizaram o PFC de forma correta em pelo menos uma questão (Alunos D, E, I, K, S e V), demonstrando capacidade realizar operações matemáticas e baixa capacidade de leitura e interpretação. Os alunos que apresentaram ID não conseguiram desenvolver a resolução corretamente, conforme exemplo:

Figura 5.11: Solução do problema motivador de Arranjo apresentada pelo aluno K. 2ª ano A

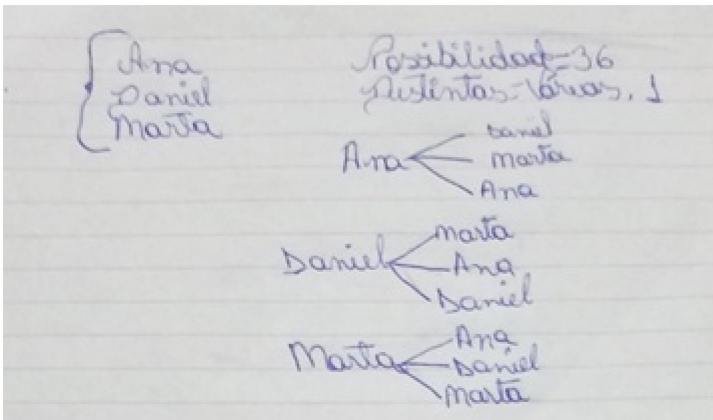
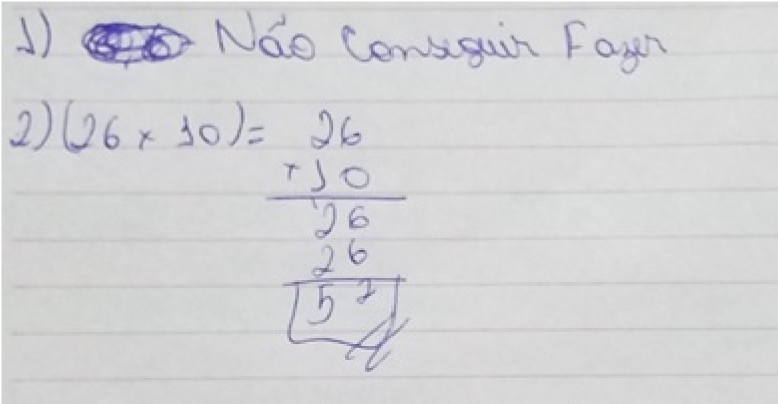


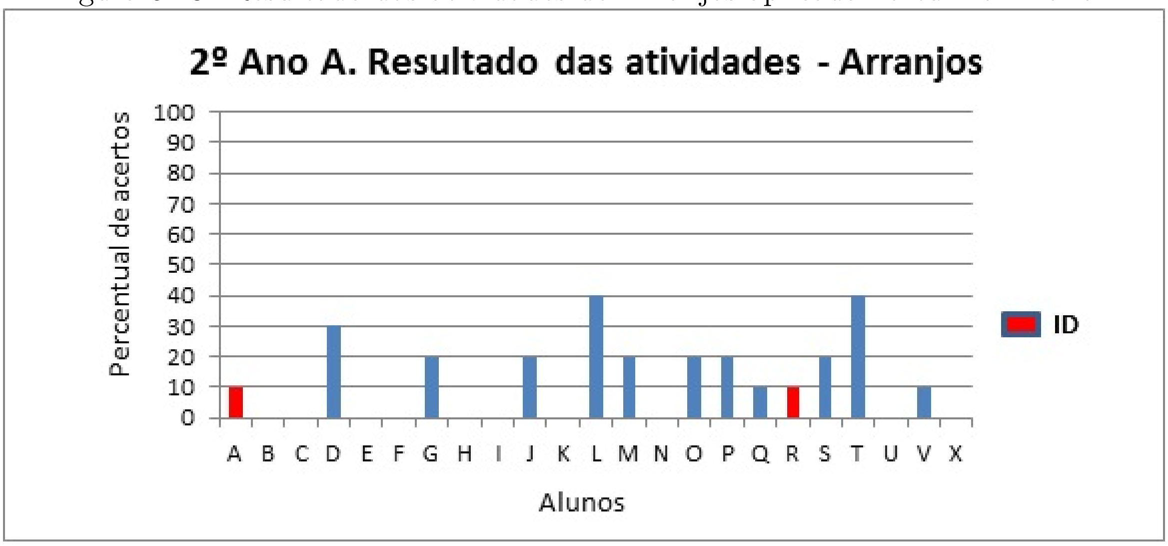
Figura 5.12: Solução de exercício modelo de arranjos apresentada pelo aluno K. 2ª ano A



As Figura 5.11 e 5.12 apresentam a solução de um aluno com indícios de discalculia, nota-se que o aluno, na resolução do problema motivador, utilizou o recurso da árvore de possibilidades, sem relacionar as possibilidades de resultado da eleição, acima o aluno escreveu que o total de possibilidades é 36. Na Figura 5.12, o aluno afirma não conseguir resolver o exemplo 1 e, no exemplo 2, apresentou o princípio multiplicativo, por outro lado efetuou a operação de forma errada.

Após a entrega das atividades, foi iniciada a abordagem de arranjos simples, partindo da noção de fatorial para então apresentar conceito e fórmula. As atividades da Figura 5.10 foram corrigidas utilizando o PFC e a fórmula de arranjos simples. Após a correção das atividades foi proposta a segunda lista de exercícios, conforme Anexo III, contendo 10 questões sobre o tema arranjos, sendo obtidos os seguintes dados:

Figura 5.13: Resultado das atividades de Arranjos aplicada na turma 2ª ano A



A figura 5.13 mostra que dentre os alunos que apresentaram ID, apenas 28,57% conseguiram solucionar apenas 10% das questões propostas.

5.4.4 O conceito de permutação a partir de um problema motivador na turma 2º ano A

Para a apresentação do tema, foi apresentado o seguinte problema motivador: *"Considerando os anagramas da palavra BRASIL, determine: a) o número total de anagramas. b) Quantos começam com B? c) Quantos terminam com L"*.O problema serviu de base para a apresentação do conceito de permutação, cuja resolução se deu a partir da utilização do PFC.

Após a resolução das atividades e da formalização do conceito de permutação, foi proposta uma lista de 10 questões sobre o tema, conforme anexo IV, cujo rendimento está representado na figura 5.14 onde 71,42% dos alunos com ID apresentaram melhor rendimento que nas atividades anteriores, tendo acertado até 40% das questões, ressaltando que nas questões com maior grau de dificuldade, não houve acerto entre os alunos com ID, conforme solução constante na Figura 5.14 na qual temos um exemplo de resolução feita por aluno com ID.:

Figura 5.14: Resultado da atividade de Permutação aplicada na turma 2ª ano A

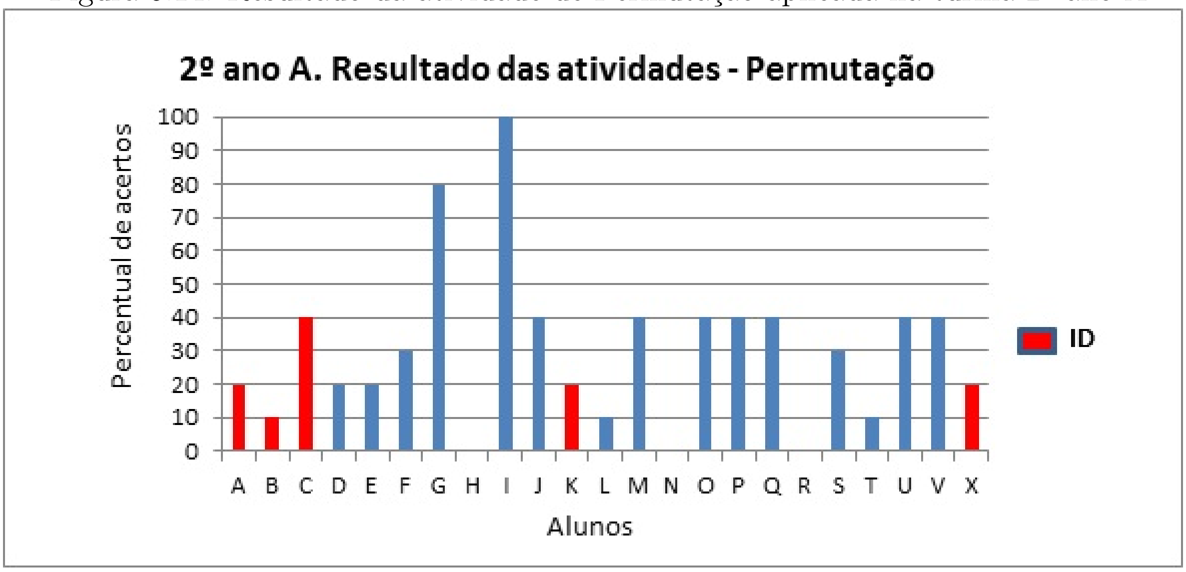
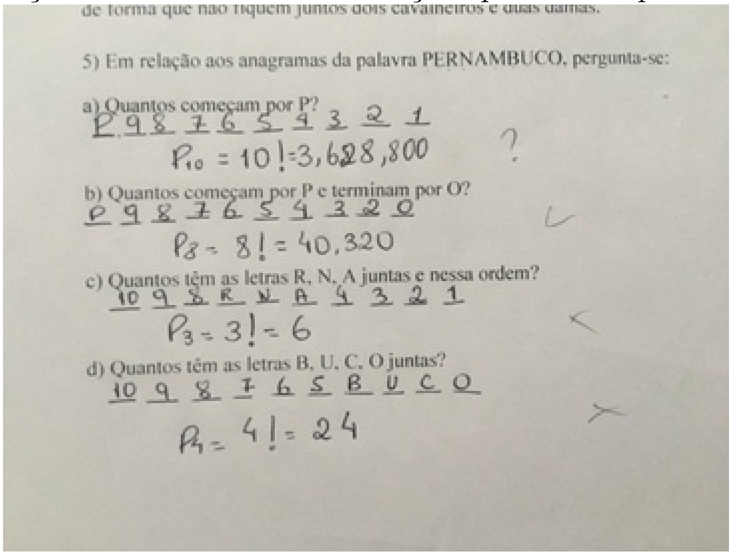


Figura 5.15: Solução de exercício de Permutação apresentada pelo aluno C. 2ª ano A


de forma que não fiquem juntos dois cavaleiros e duas damas.

5) Em relação aos anagramas da palavra PERNAMBUCO, pergunta-se:

a) Quantos começam por P?

P 9 8 7 6 5 4 3 2 1

$P_{10} = 10! = 3{,}628{,}800$?

b) Quantos começam por P e terminam por O?

P 9 8 7 6 5 4 3 2 O

$P_8 = 8! = 40.320$

c) Quantos têm as letras R, N, A juntas e nessa ordem?

10 9 8 R N A 4 3 2 1

$P_3 = 3! = 6$

d) Quantos têm as letras B, U, C, O juntas?

10 9 8 7 6 5 B U C O

$P_4 = 4! = 24$

Na Figura 5.15 pode-se notar que o aluno, na solução do item a, indicou que a fixação da letra P deixava 9 possibilidades de letras para permutar, entretanto, no decorrer de sua resolução fez a permutação de 10 elementos; no item c, o aluno fixou as letras R, N e A na mesma posição e indicou que permutaria 10 letras, posteriormente permutou 3 letras isoladamente.

5.4.5 O conceito de combinação a partir de um problema motivador na turma 2º ano A

A intervenção foi iniciada com o seguinte problema motivador: ***"Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizza nos seguintes sabores: atum, queijo, calabresa, milho e portuguesa. Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?"***

Dada a oportunidade de resolução, os alunos que tentaram resolver chegaram ao resultado 60, seja utilizando o PFC ou a formula de arranjo. Entretanto eles não perceberam a contagem repetida de uma mesma combinação de sabores. Coube ao professor esclarecer que nesse caso as pizzas formadas (agrupamentos) se diferenciavam pela natureza de seus elementos e não pela ordem de escola dos sabores (elementos).

Após a apresentação formal do conceito de combinação foram resolvidas três problemas modelo para subsidiar a aprendizagem dos alunos, conforme

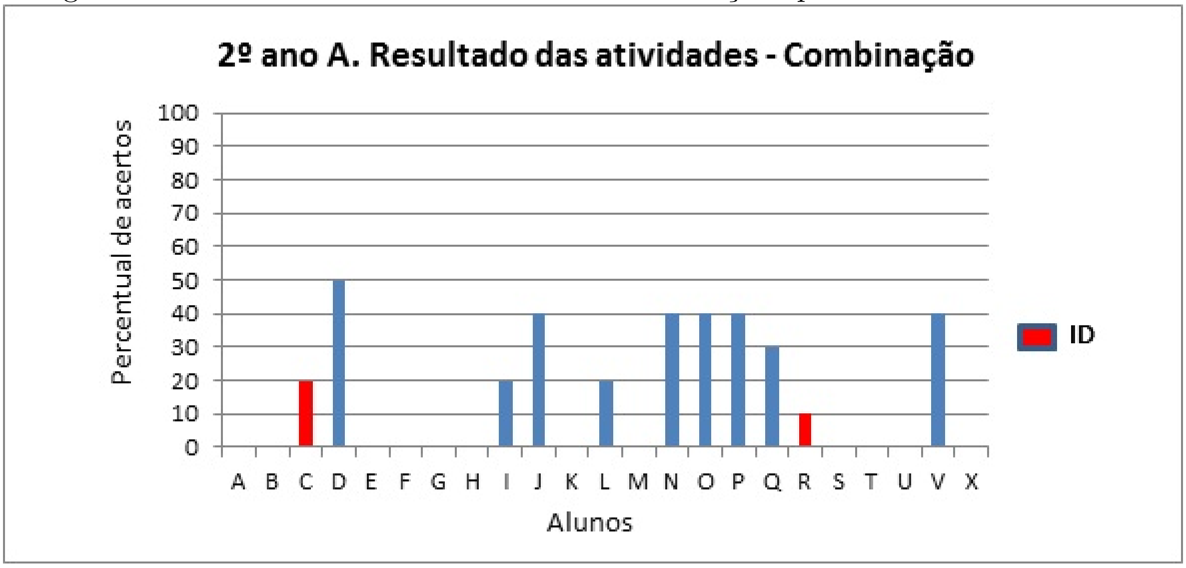
Tabela 5.8:

Tabela 5.9: Exercícios modelo de Combinação utilizados na turma 2º ano A

1) Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.
2) Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.
3) Uma sala de aula do 2º ano do ensino médio há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30030 comissões distintas de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, exatamente 3 serão moças. Quantos alunos há nessa sala de aula?

Após a resolução e discussão dos exercícios modelo, foi proposta uma lista de 10 questões, conforme Anexo V, cujo desempenho está retratado na Figura 5.16:

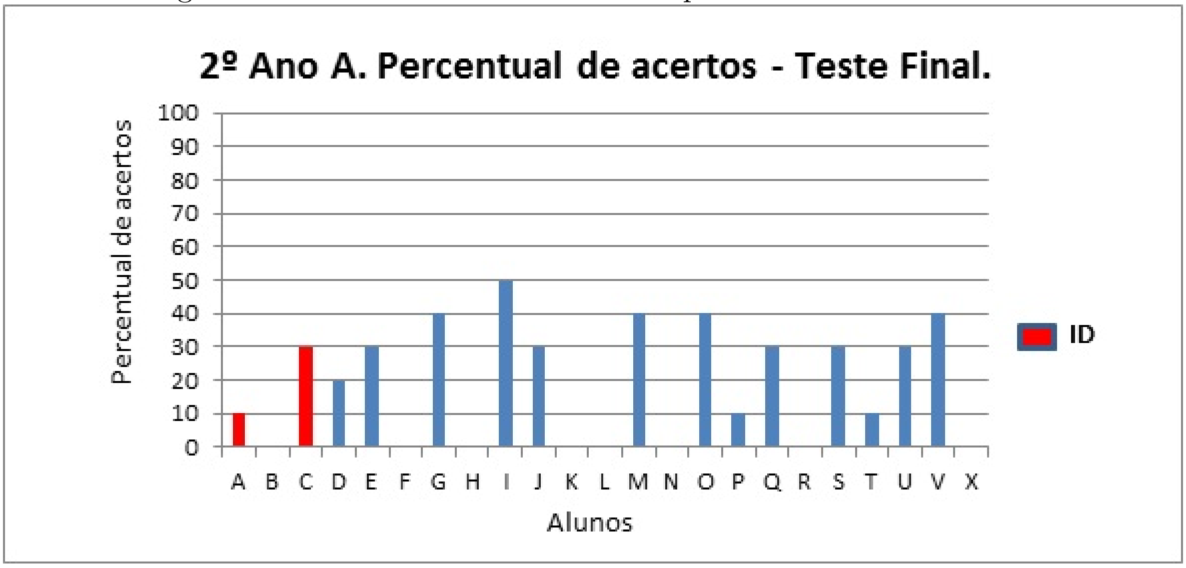
Figura 5.16: Resultado das atividades de Combinação aplicada na turma 2ª ano A



Somente dois alunos com ID conseguiram entre 10% e 20% de acertos dentre as questões propostas, mesmo sendo a elas franqueado o uso de calculadora. No último dia de intervenção, foi aplicado um teste com 10 questões

envolvendo os quatro temas estudados, distribuídas da seguinte forma: 3 de PFC, 3 de permutação, 2 de arranjos e 2 de combinação, cujo desempenho está representado na Figura 5.17:

Figura 5.17: Resultado do Teste final aplicado na turma 2ª ano A

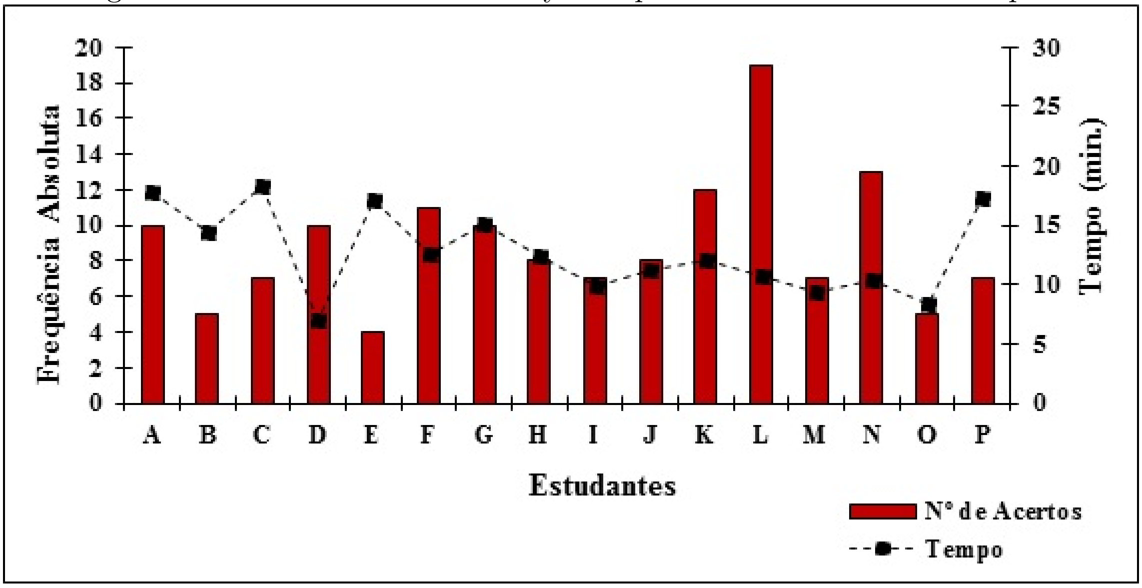


O gráfico da Figura 5.17 retrata o baixo rendimento dos alunos que apresentaram ID. Nesta turma, dos composta por 23 alunos, com idade entre 16 e 18 anos, 7 apresentaram ID, correspondendo a 30,43% dos alunos, dentre eles, somente 2 alunos conseguiram rendimento na atividade que englobou os quatro temas de AC, o percentual de acertos ficou entre 10% e 30%. Dentre todos os alunos submetidos ao teste, 34,78% obtiveram nota zero, e dentre eles, 62% são alunos com ID.

5.4.6 A experimentação na turma 2ª etapa N

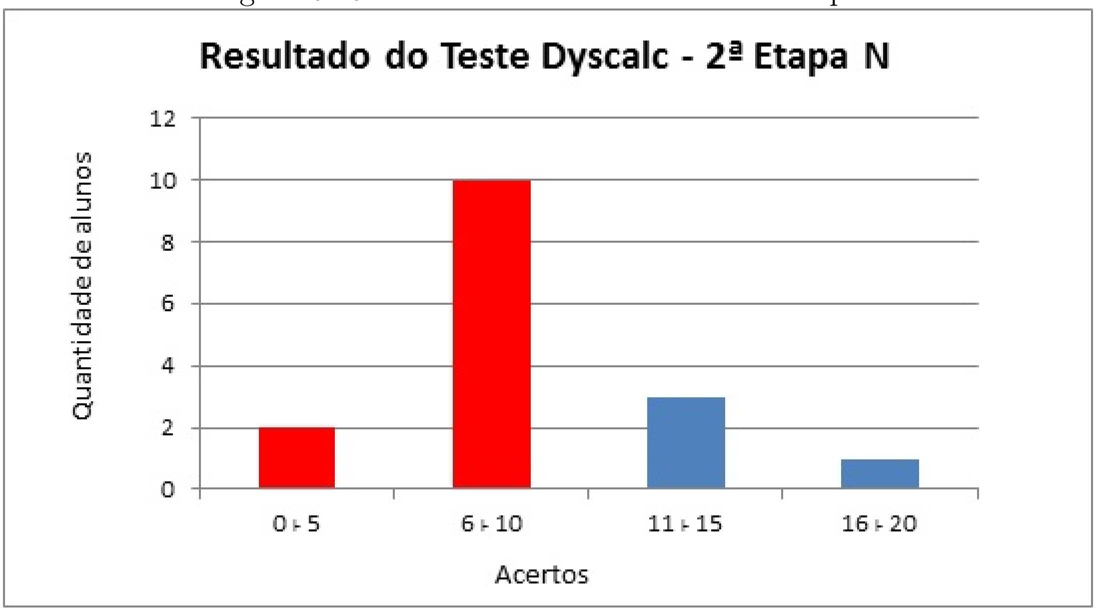
Nesta turma, formada por 34 alunos matriculados, entretanto apenas 16 frequentando. Foi aplicado o teste Dyscalc com o objetivo de identificar a presença de indícios de discalculia. Após a aplicação foram obtidos os seguintes resultados:

Figura 5.18: Resultado do teste Dyscalc por aluno na Turma 2ª Etapa N



Dos 16 alunos submetidos ao questionário apenas quatro não apresentaram indícios de discalculia, ou seja 75% dos alunos que frequentam as aulas apresentaram indícios de discalculia. Esta turma em especial, apresenta características peculiares quanto a faixa etária e turno de estudo, são alunos que estão a algum tempo afastados da sala de aula, constituíram família e exercem atividade remunerada durante o dia. A Figura 5.19 apresenta a distribuição de aluno de acordo com a presença ou não de ID, considernando a faixa de acertos.

Figura 5.19: Alunos com ID na turma 2ª Etapa N

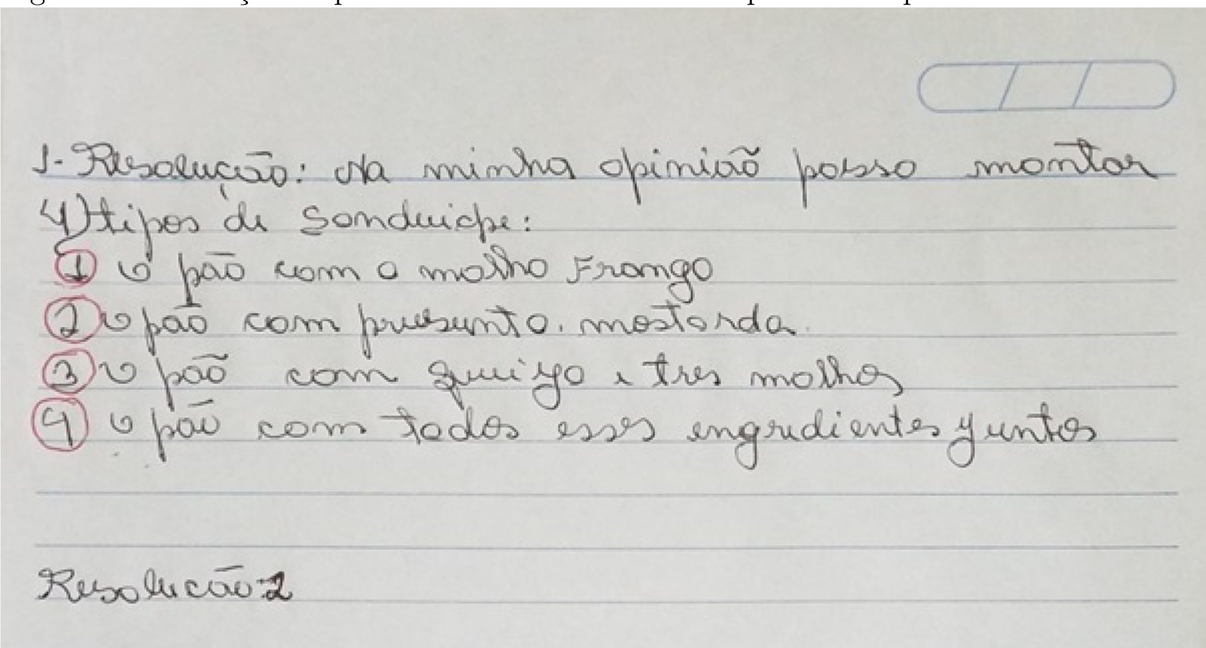


5.4.7 O princípio fundamental da contagem a partir de um problema motivador na turma 2ª etapa N

Ao iniciar a abordagem conceitual de análise combinatória, foi utilizada a metodologia da resolução de problemas como ponto de partida, sendo apresentado o seguinte problemas motivador: *"Em certa lanchonete, para montar um sanduíche, os clientes possuem duas opções de pão, (centeio ou integral), quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano) e três de molhos (barbecue, mostarda e parmesão). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão, um recheio e um molho?"*

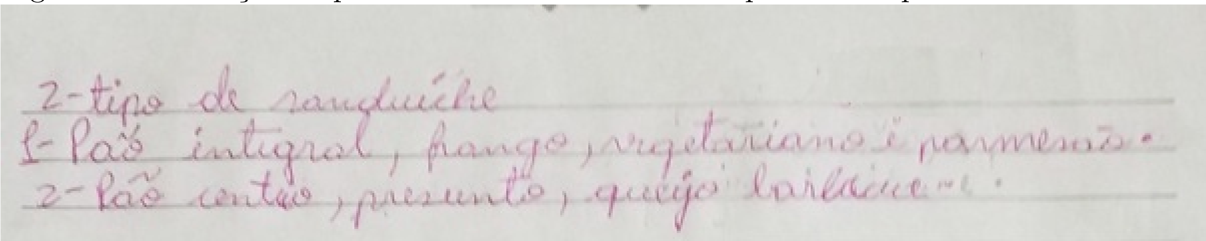
Nesta etapa foi dada aos alunos a oportunidade de encontrar uma solução para problema sem a intervenção do professor, vejamos algumas respostas obtidas.

Figura 5.20: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno E. 2ª Et. N



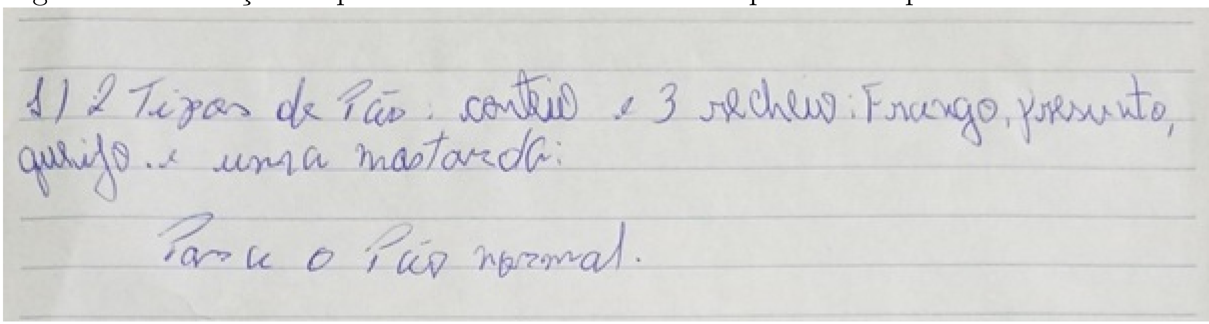
Na figura 5.20 aluno com ID não levou em consideração os tipos de pães, apenas o gênero pão foi considerado, não diferenciou os tipos de recheio das opções de molho, por fim, não apresentou recurso matemático na resolução.

Figura 5.21: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno D. 2ª Et. N


2-tipo de sanduiche
1-Pão integral, frango, vegetariano e parmesão.
2-Pão centeio, presunto, queijo barbecue.

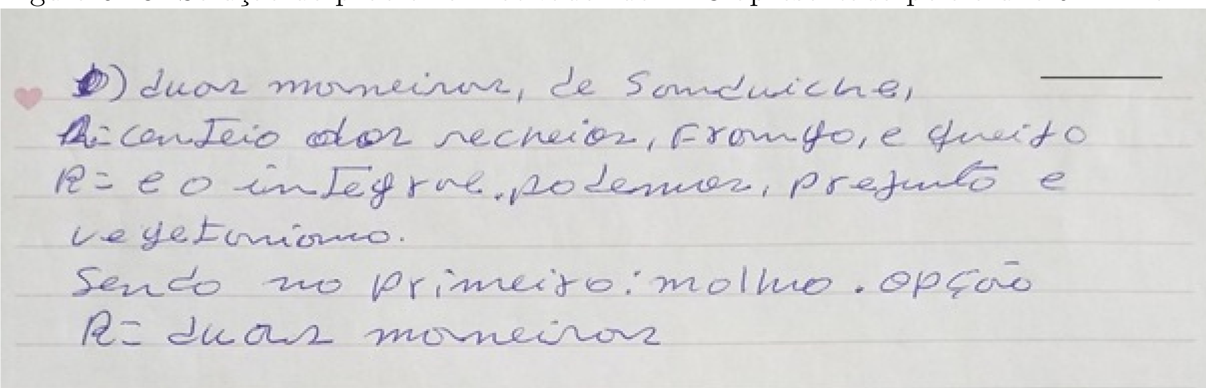
O aluno com ID, no teste Dyscalc acertou 50% das questões. Na resolução apresentada na Figura 5.21 considerou apenas os tipos de pães para definir as possiblidades de formar sanduiches.

Figura 5.22: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno B. 2ª Et. N


1) 2 Tipos de Pão: centeio e 3 recheio: Frango, presunto, queijo.. e uma mostarda:
Para o Pão normal.

Aluno apresentou ID, com 40% de acertos no teste Dyscalc, não apresentou interpretação matemática para o problema proposto.

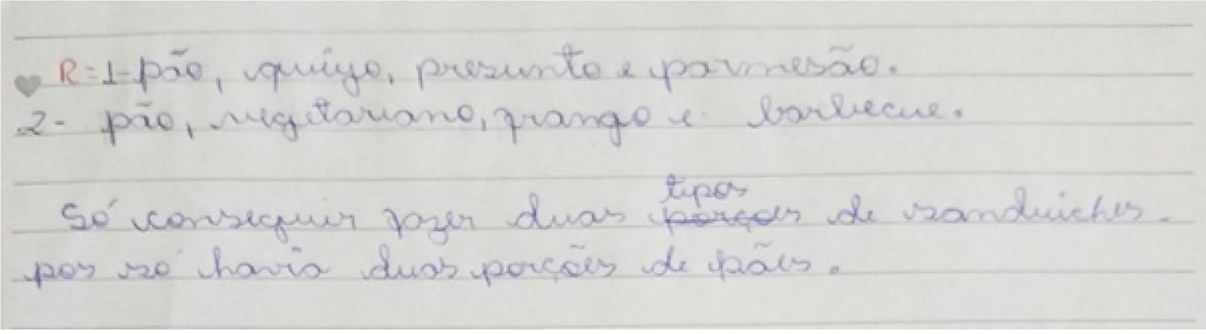
Figura 5.23: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno J. 2ª Et. N


1) duas maneiras, de Sanduiche,
R: centeio dos recheios, frango, e queijo
R: e o integral, podemos, presunto e
vegetariano.
Sendo no primeiro: molho. opção
R: duas maneiras

A solução apresentada na Figura 5.23 realizada por aluno que apresentou ID, ele considerou apenas duas possibilidades para a composição dos

sanduiches, sem apresentar recurso matemático.

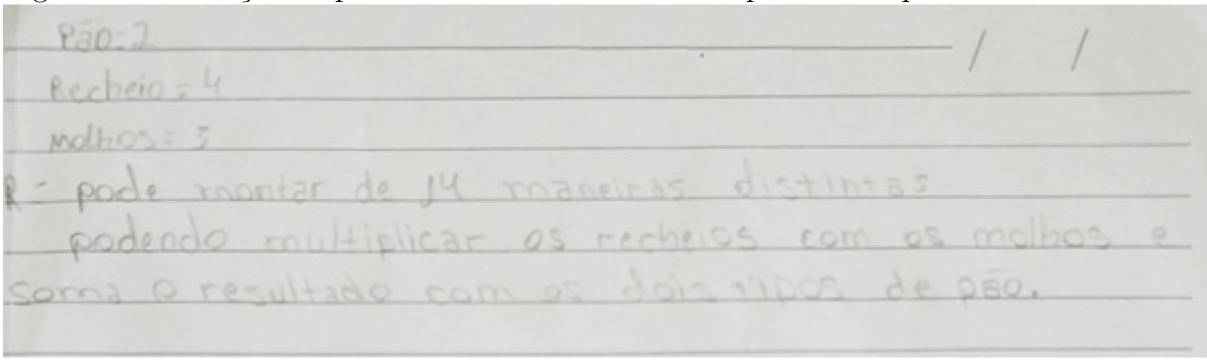
Figura 5.24: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno I. 2ª Et. N


R= 1- pão, queijo, presunto e parmesão.
2- pão, vegetariano, frango e barbecue.

Só consegui fazer duas tipos ~~porções~~ de sanduiches. por só havia duas porções de pães.

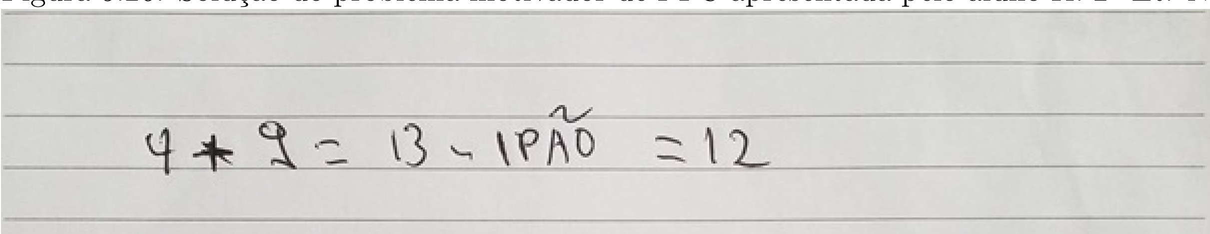
Na Figura 5.24 temos a resolução de um aluno que apresentou ID, nela foi considerada apenas os tipos de pães para definir as possiblidades de formar sanduiches.

Figura 5.25: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo Aluno L. 2ª Et. N


Pão: 2
Recheio = 4
molhos = 3
R: pode montar de 14 maneiras distintas
podendo multiplicar os recheios com os molhos e
soma o resultado com os dois tipos de pão.

A Figura 5.25 trata de uma solução de aluno que não apresentou ID, na resolução apresentou raciocínio matemático coerente na resolução, utilizou o fator multiplicativo entre os recheio e molhos, no entanto não o utilizou ao considerar o elemento "pão", passando a adotar o princípio aditivo.

Figura 5.26: Solução do problema motivador de PFC apresentada pelo aluno K. 2ª Et. N

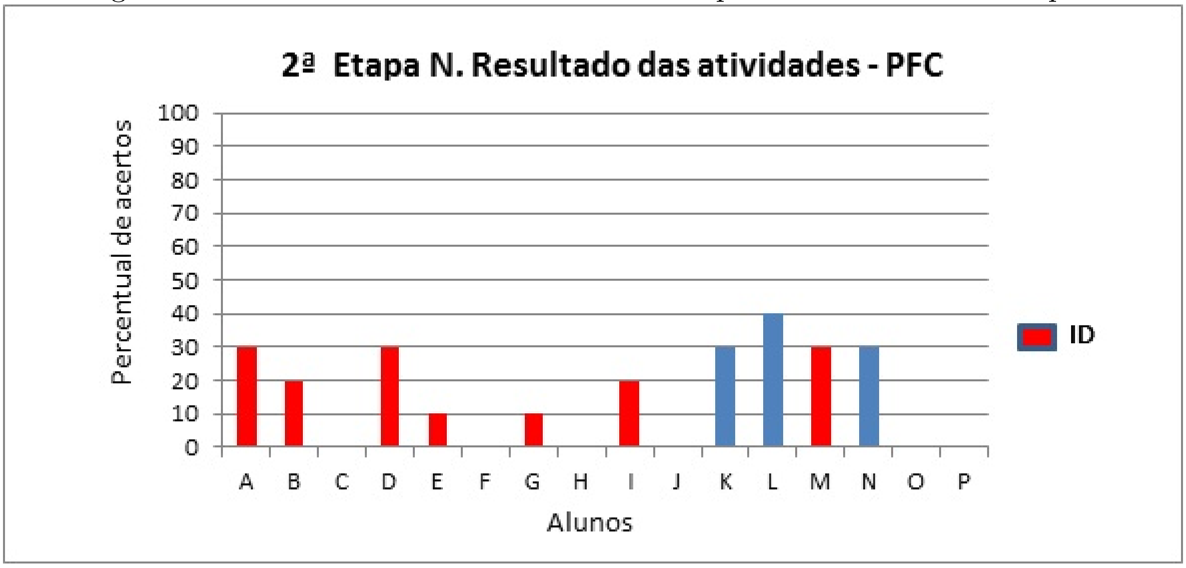

4 * 9 = 13 - 1PÃO = 12

Na Figura 5.26, temos a solução de aluno que não apresentou ID, entretanto na resolução o aluno apresentou raciocínio matemático incoerente com o enunciado da questão.

Após a resolução dos alunos, sem a intervenção do professor, foi apresentada a resolução da questão enumerando todas as possiblidades de composição do sanduíche. Após a resolução do problema motivador, foi apresentando o conceito formal do Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo que conforme (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 98), pode ser conceituado da seguinte forma: Se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras distintas, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto de $n \times m$. Em seguida no sentido de subsidiar a aprendizagem dos alunos foram apresentados e resolvidos os exercícios da Tabela 5.8:

No segundo encontro foi proposta uma lista de exercícios com 10 questões, divididas da seguinte forma: Aplicação imediata do PFC (1,2 e 3); aplicação do PFC reconhecida após leitura e interpretação da questão (4,5 e 6); aplicação condicionada a o conhecimento de outros conceitos matemáticos (7, 8, 9 e 10). Após a aplicação dos exercícios forma obtidos os seguintes resultados:

Figura 5.27: Resultado da atividade de PFC aplicada na turma 2ª Etapa N



Os alunos que apresentaram maior rendimento não apresentaram ID, entretanto apresentaram problemas com leitura, vocabulário reduzido e desconhecimento de outros conceitos matemáticos o que dificultou a compreensão do enunciado de algumas questões.

Dentre os alunos que apresentaram indícios de discalculia os acertos se concentraram nas questões em que a aplicação do PFC é imediata e nas questões que guardavam semelhança aos problemas resolvidos pelo professor em sala da aula.

5.4.8 O conceito de arranjos a partir de um problema motivador na turma 2ª etapa N

Nesta aula os alunos foram apresentados a um problema motivador, cujo objetivo seria fomentar a discussão e despertar curiosidade dos alunos, seguido de dois exercícios modelos conforme Figura 5.28:

Figura 5.28: Problema motivador e exercícios sobre arranjos

PROBLEMA MOTIVADOR

Para a escolha do presidente e do vice presidente de uma turma do 2º ano do ensino médio, candidataram-se 3 alunos, conforme a cédula de votação abaixo

CÉDULA DE VOTAÇÃO Representante de turma
o Ana o Daniel o Marta

Os dois candidatos mais votados serão eleitos, respectivamente, presidente e vice-presidente. Quantas são as possibilidades do resultado dessa eleição?

Exemplos:

1) Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

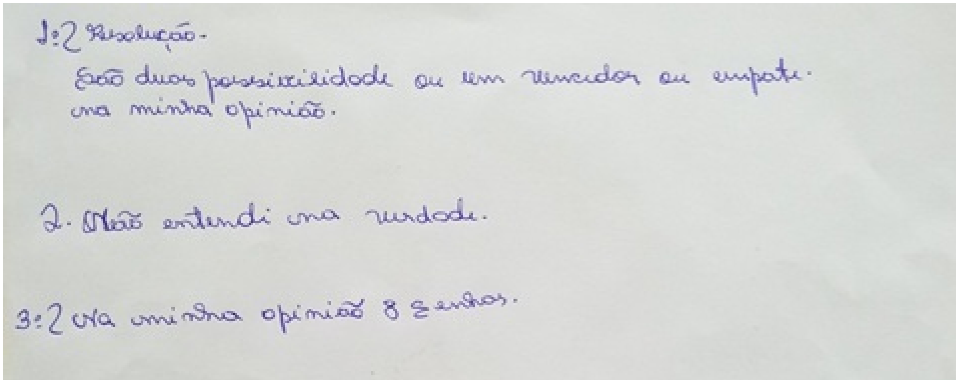
2) Uma senha de computador é formada por duas letras maiúsculas distintas (de 26 disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de 10 disponíveis) quantas senhas diferentes é possível formar?

A intervenção iniciou com a propositura de três exercícios para os alunos que já possuíam conhecimentos sobre o PFC, sendo o primeiro utilizado como problema motivador. Dentre os alunos com ID, observou-se que a 58,33% não recorreu ao uso do PFC (Alunos D, E, G, I, J, M e P), demonstrando inabilidade de utilizar os dados numéricos para obter a solução da questão,

50% utilizou o PFC de forma equivocada (A, C, F, H, K e N), pois apenas multiplicaram os números disponíveis nas questões sem observar o comando dos exercícios. Do total de alunos, somente 18,75% apresentou coerência na utilização do PFC (alunos B, I e L) e obteve êxito na solução dos dois primeiros problemas apresentados.

Alguns exemplos das soluções realizadas pelos alunos que apresentaram ID, estão reproduzidos nas figuras a seguir:

Figura 5.29: Solução do problema motivador de Arranjo realizada pelo Aluno E. 2ª Et. N

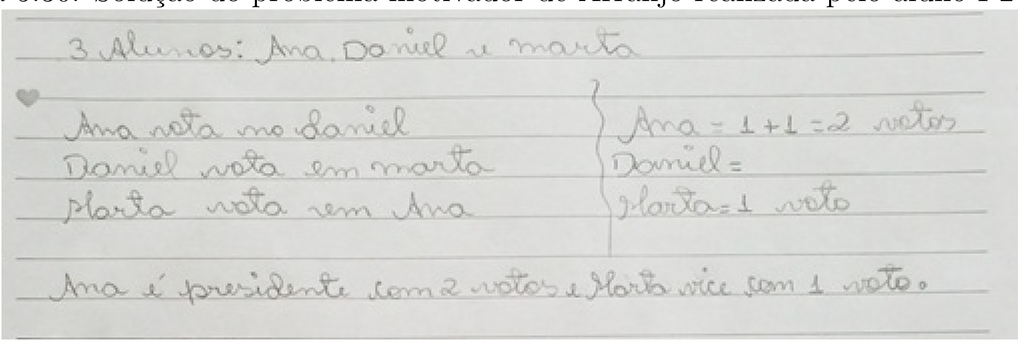


1:2 Resolução-
São duas possibilidade ou um vencedor ou empate.
na minha opinião.

2. Não entendi na verdade.

3:2 Na minha opinião 8 senhas.

Figura 5.30: Solução do problema motivador de Arranjo realizada pelo aluno I 2ª Et. N



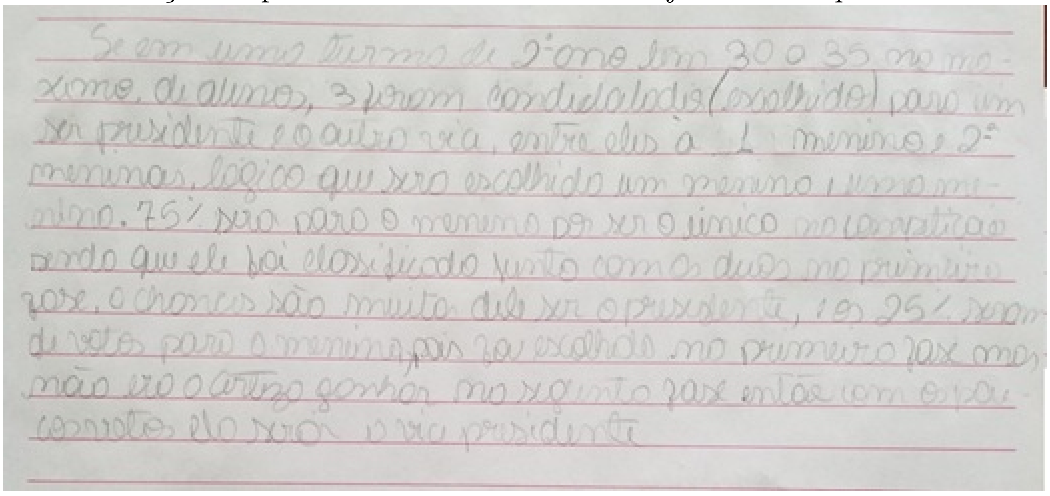
3 Alunos: Ana, Daniel e marta

Ana vota no daniel
Daniel vota em marta
Marta vota em Ana

Ana = 1+1 = 2 votos
Daniel =
Marta = 1 voto

Ana é presidente com 2 votos e Marta vice com 1 voto.

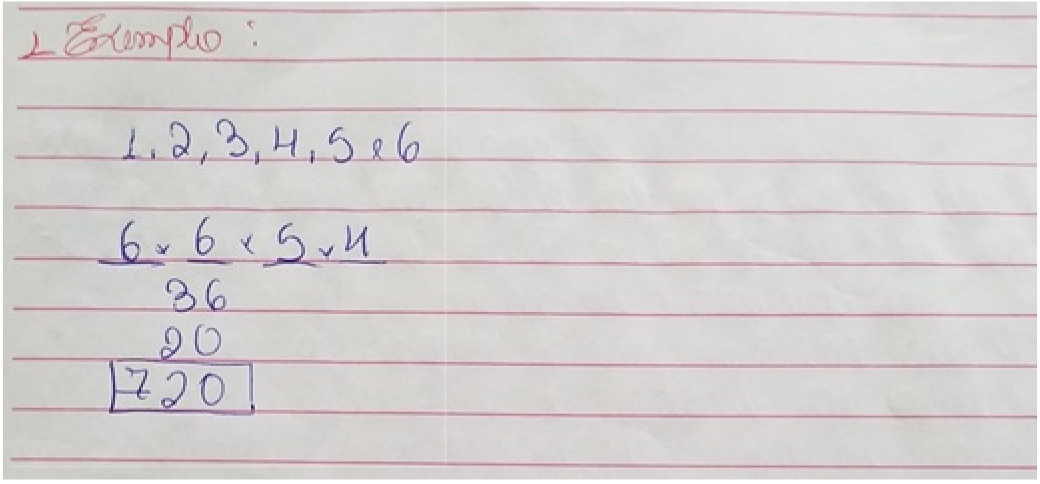
Figura 5.31: Solução do problema motivador de Arranjo realizada pelo aluno F 2ª Et. N


Se em uma turma de 2º ano tem 30 a 35 no má-
ximo de alunos, 3 foram candidatados (escolhido) para um
ser presidente e o outro via, entre eles a 1 menino e 2º
meninas, lógico que será escolhido um menino e uma me-
nina. 75% são para o menino por ser o único na competição
sendo que ele foi classificado junto com as duas no primeiro
fase, o chances são muito dele ser o presidente, e os 25% são
de votos para a menina pois foi escolhida no primeiro fase mas
não era o artigo ganhar no segundo fase então com os pou-
cos votos ela será a via presidente

Analizando as resoluões, temos que na Figura 5.29 o aluno não apresentou argumentos matemáticos satisfatórios, na Figura 5.30 o aluno limitou sua analise aos três candidatos, como se fossem os únicos alunos da turma, além disso simulou uma situação em que cada eles votam entre si, atribuindo um vota a cada candidato, e por fim, apresenta um cálculo que não representa a situação descrita.

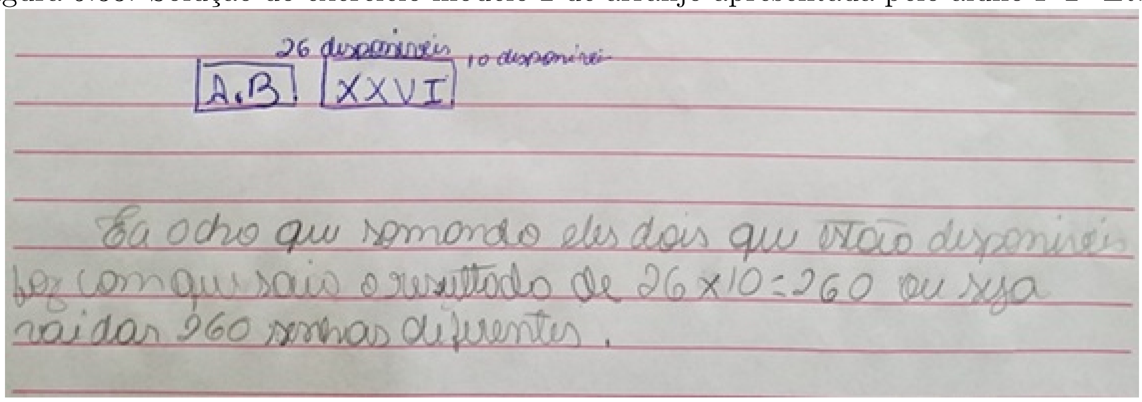
Na figura 5.31 temos a solução apresentada por aluno sem ID, o qual não utilizou o PFC e não demonstrou coerência com o enunciado da questão. Na sequência, temos a solução dos exercícios modelos no qual o enunciado solicita a quantidade de números de três algarismos distintos que poderiam ser formados com os algarismo 1, 2, 3, 4, 5, e 6. O aluno F utilizou o recurso apresentado pelo professor, em questão semelhante, na qual se buscava números com quatro algarismos, com os números de 0 a 6. Assim, observa-se que o aluno mecanizou o procedimento utilizado pelo professor na resolução, e não compreendeu que cada questão trás uma particularidade, como no caso da questão que o professor apresentou, havia a necessidade de se excluir o algarismo zero da primeira posição, na questão proposta aos alunos, não havia nenhuma restrição que justificasse a composição 6x6x5x4, conforme figura 5.32:

Figura 5.32: Solução do exercício modelo 1 de arranjo realizada pelo aluno F 2ª Et. N



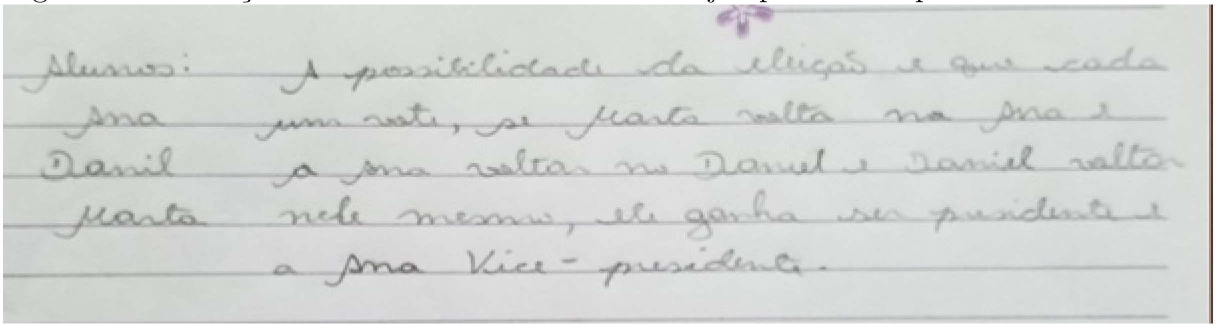
Na Figura 5.33, a solução foi apresentada com utilização do PFC, entretanto os dados numéricos forma utilizados sem se obediência ao comando da questão. Uma vez que o aluno, em que pese ter feito o esquema de formação da senha, não levo em consideração que os valores que utilizou são referentes as possibilidades de utilização, e que a utilização de uma letra do alfabeto para compor o primeiro espaço reduziria em uma unidade as possibilidades de preencher o segundo espaço, assim, a solução 26 x 10 está incorreta para o problema proposto, mas o aluno demonstrou habilidade para executar multiplicação.

Figura 5.33: Solução do exercício modelo 2 de arranjo apresentada pelo aluno F 2ª Et. N



Na figura 5.34, temos uma solução apresentada por um aluno com ID que não utilizou o princípio multiplicativo.

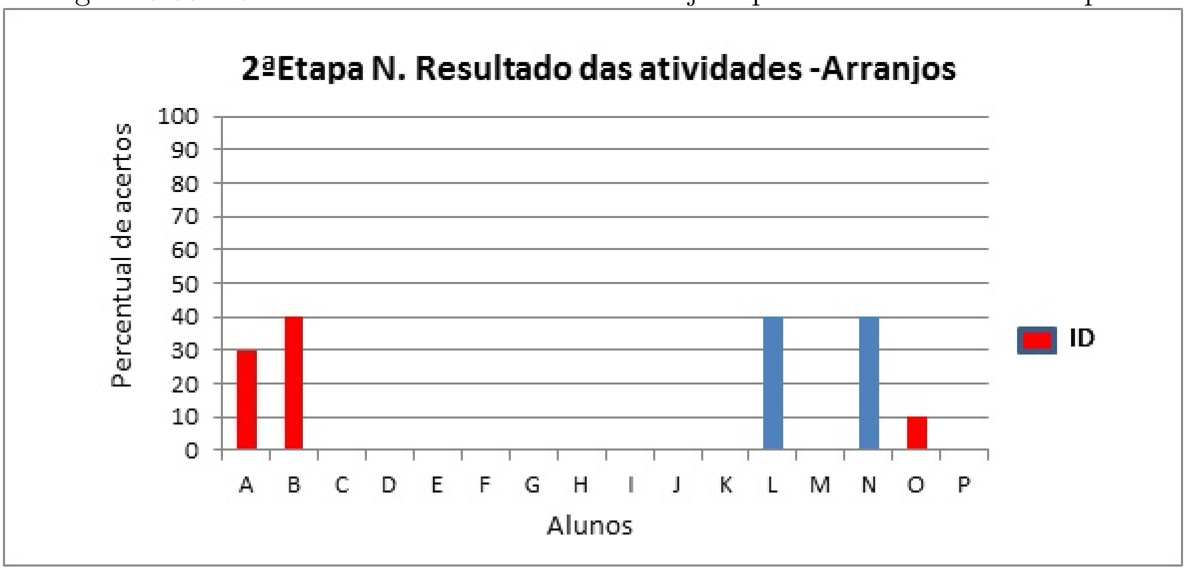
Figura 5.34: Solução do exercício modelo 2 de arranjo apresentada pelo aluno F 2ª Et. N



posteriormente a execução das atividades pelos alunos, foi feita a correção dos exercícios com a utilização do PFC, em seguida foi apresentado o conceito de fatorial, seguido de exercícios feito pelo professor, e por fim, foi apresentado o conceito formal de Arranjo e sua respectiva fórmula, com a resolução dos mesmos exercícios propostos, com auxílio da fórmula de arranjo.

Após a explanação tema arranjo e de sua associação ao PFC foram propostos os exercício do Anexo III. Na lista de exercícios sobre arranjos, somente 25% dos alunos com ID conseguiram desenvolver a resolução de 10 à 40% das questões, os demais não apresentaram êxito nas atividades. Entre os que não apresentaram ID 50% apresentou rendimento de 40%, conforme Figura 5.35:

Figura 5.35: Resultado das atividades de arranjos aplicada na turma 2ª Etapa N



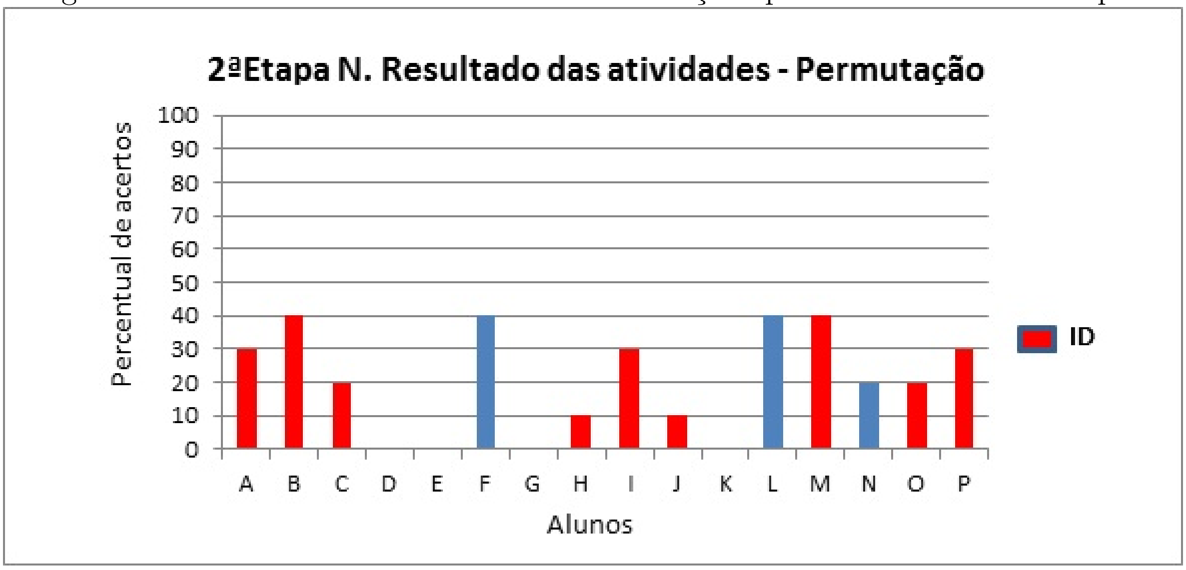
5.4.9 O conceito de permutação a partir de um problema motivador na turma 2ª etapa N.

Para a apresentação do tema, foi apresentado o seguinte problema motivador: *Considerando os anagramas da palavra BRASIL, determine: a) o número total de anagramas? b) Quantos começam com B? c) Quantos terminam com L?*

O problema serviu de base para a apresentação do conceito de permutação, cuja resolução com fundamento no PFC, em seguida o professor resolveu exercícios modelos para subsidiar a aprendizagem dos alunos.

Após a resolução das atividades e da formalização do conceito de permutação foi proposta uma lista de 10 questões sobre o tema, conforme anexo IV, cujo rendimento está retratado na Figura 5.36.

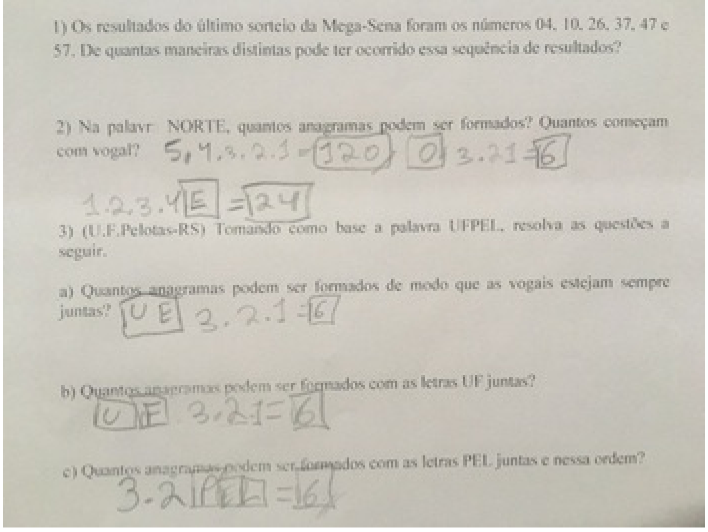
Figura 5.36: Resultado da atividade de Permutação aplicada na turma 2ª Etapa N



Nas atividades sobre permutação a turma apresentou melhora de desempenho, devido a aplicação direta do princípio multiplicativo. A maior dificuldade encontrada pelos alunos estava na resolução das questões que exigiam permutação de elementos dentro da própria permutação. Em que pese o melhor rendimento da turma, os alunos com ID demonstraram raciocínio mecanizado, utilizando exemplos resolvido pelo professor como base, e tentando resolver da mesma forma sem levar em consideração as particularidades de

cada problema.As Figuras 5.37 e 5.38 são exemplos das resoluções apresentadas:

Figura 5.37: Solução das atividades de permutação realizada pelo aluno G 2ª Et. N



1) Os resultados do último sorteio da Mega-Sena foram os números 04, 10, 26, 37, 47 e 57. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?

2) Na palavr NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal? 5.4.3.2.1 = 120 ; 0 3.2.1 = 6

1.2.3.4 E = 24

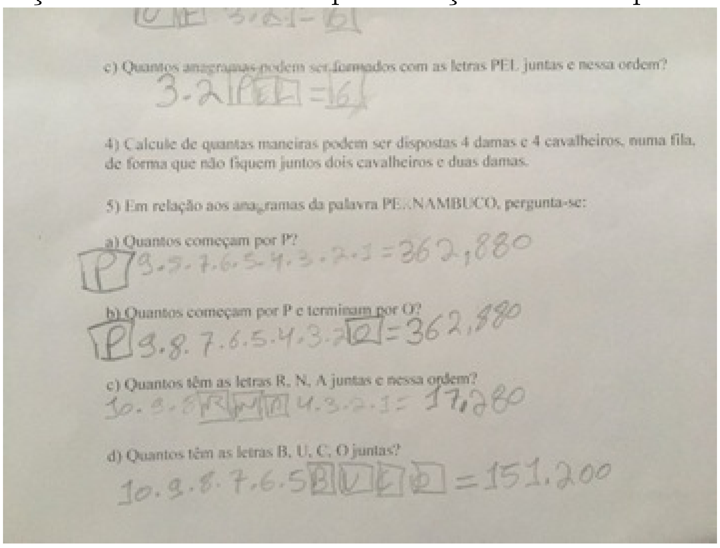
3) (U.F.Pelotas-RS) Tomando como base a palavra UFPEL, resolva as questões a seguir.

a) Quantos anagramas podem ser formados de modo que as vogais estejam sempre juntas? UE 3.2.1 = 6

b) Quantos anagramas podem ser formados com as letras UF juntas? U F 3.2.1 = 6

c) Quantos anagramas podem ser formados com as letras PEL juntas e nessa ordem? 3.2 PEL = 6

Figura 5.38: Solução das atividades de permutação realizada pelo aluno G 2ª Et. N



c) Quantos anagramas podem ser formados com as letras PEL juntas e nessa ordem? 3.2 PEL = 6

4) Calcule de quantas maneiras podem ser dispostas 4 damas e 4 cavalheiros, numa fila, de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas.

5) Em relação aos anagramas da palavra PERNAMBUCO, pergunta-se:

a) Quantos começam por P? P 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362,880

b) Quantos começam por P e terminam por O? P 9.8.7.6.5.4.3.2 O = 362,880

c) Quantos têm as letras R, N, A juntas e nessa ordem? 10.9.8 R N A 4.3.2.1 = 17,280

d) Quantos têm as letras B, U, C, O juntas? 10.9.8.7.6.5 B U C O = 151.200

Na Figura 5.37 o aluno não apresentou solução, na questão 2 o aluno teve acerto parcial, entretanto não soube analisar as possibilidades da palavra NORTE começar com vogal; na questão 3 o aluno não considerou que as vogais juntas constituem um elemento da permutação, e que também elas poderiam ser permutadas entre s, além disso tratou todas como elemento fixo do anagrama.

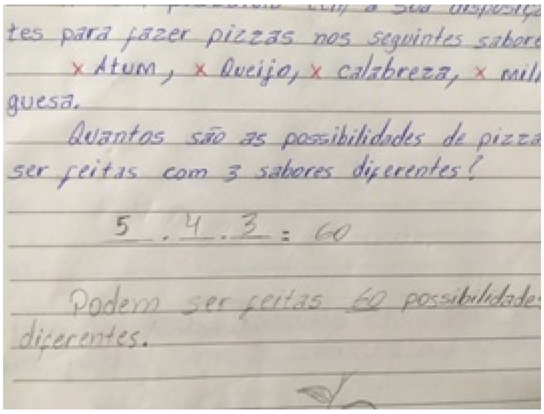
Na Figura 5.38, o mesmo aluno não apresentou solução para a questão 4, na questão 5, item *a*, resolveu corretamente, no item *b*, das 10 letras duas

tem lugar fixo, restando 8 letras para permutação, o aluno permutou 9. No item c o aluno fixou as letras R, N e A e resolveu como se houvessem 10 letras para permutação.

5.4.10 O conceito de combinação a partir de um problema motivador na turma 2ª etapa N.

A intervenção foi iniciada com o seguinte problema motivador: ***"Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizza nos seguintes sabores: atum, queijo, calabresa, milho e portuguesa. Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?"*. Dada a oportunidade de resolução, os alunos apresentaram seguintes respostas:**

Figura 5.39: Solução do Problema motivador de combinação realizada pelo aluno L 2ª Et. N


tes para fazer pizzas nos seguintes sabore
x Atum, x Queijo, x calabreza, x mil
guesa.
Quantos são as possibilidades de pizza
ser feitas com 3 sabores diferentes?
5 . 4 . 3 = 60
Podem ser feitas 60 possibilidade
diferentes.

A solução apresentada na Figura 5.39 foi realizada por aluno sem ID que cometeu um erro comum entre alunos ao terem o primeiro contato com o tema combinação, pois não percebem que efetuam contagens repetidas.

Figura 5.40: Solução do Problema motivador de combinação realizada pelo aluno K 2ª Etapa. N

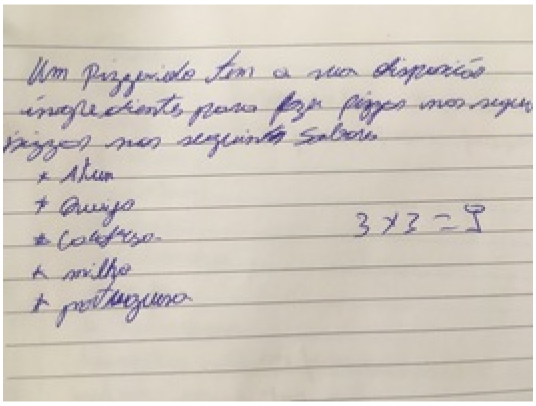


Figura 5.41: Solução do Problema motivador de combinação realizada pelo aluno E 2ª Etapa. N

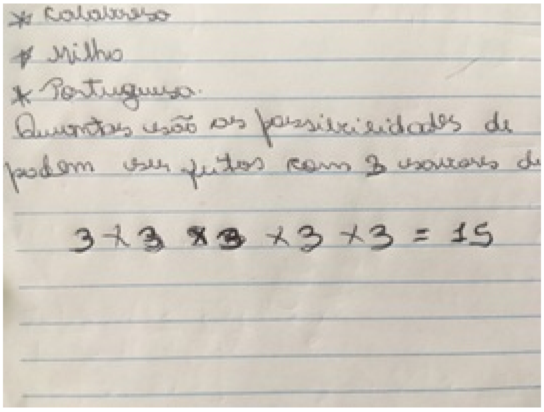


Figura 5.42: Solução do Problema motivador de combinação realizada pelo aluno J 2ª Etapa N

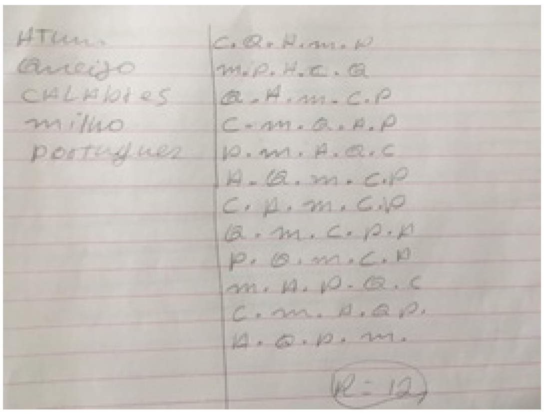


Figura 5.43: Solução do Problema motivador de combinação realizada pelo aluno G 2ª Etapa N

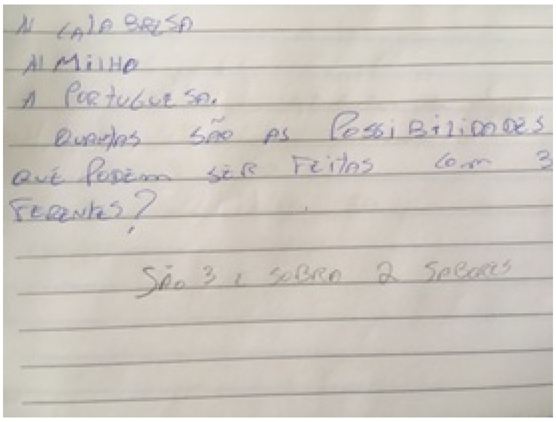
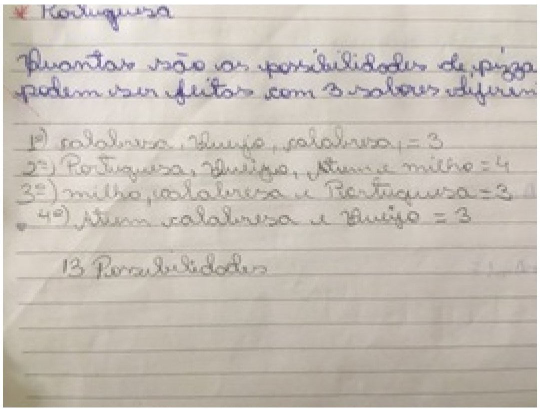


Figura 5.44: Solução do Problema motivador de combinação apresentada pelo aluno I 2ª Etapa N



Dentre as soluções apresentadas acima, as Figuras 5.39 e 5.40, são de alunos sem ID, as demais são soluções de alunos que apresentaram ID. A solução que mais se aproximou da resposta correta foi obtida a partir da utilização do PFC, conforme Figura 5.39, entretanto o aluno não percebeu a contagem repetida de uma mesma combinação de sabores. Coube ao professor esclarecer que nesse caso as pizzas formadas (agrupamentos) se diferenciavam pela natureza de seus elementos e não pela ordem de escola dos sabores (elementos). Após a apresentação formal do conceito de combinação foram resolvidos três problemas modelo para subsidiar a aprendizagem dos alunos:

Tabela 5.10: Exercícios modelo de Combinação utilizados na turma 2ª Et. N

1) Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.
2) Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.
3) Uma sala de aula do 2º ano do ensino médio há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30030 comissões distintas de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, exatamente 3 serão moças. Quantos alunos há nessa sala de aula?

Após a resolução dos exemplos da Tabela 5.10 e esclarecimento de dúvidas, foi proposta uma lista de 10 questões de combinação, conforme anexo V, cujo desempenho dos alunos está representado na Figura 5.45. Na sequencia, as figuras 5.46, 5.47 e 5.48 são exemplos de resoluções realizadas pelos alunos, sendo que a resolução da Figura 5.46 é referente a um aluno sem ID. Percebe-se que em suas resoluções, o aluno faz uso de operações matemáticas de forma correta, mas seus cálculos estão em desacordo com o problema proposto, não houve utilizaçao do conceito de permutação, apenas pedominância de fator multiplicativo.

Figura 5.45: Resultado das atividades de combinação. Turma 2ª Etapa N

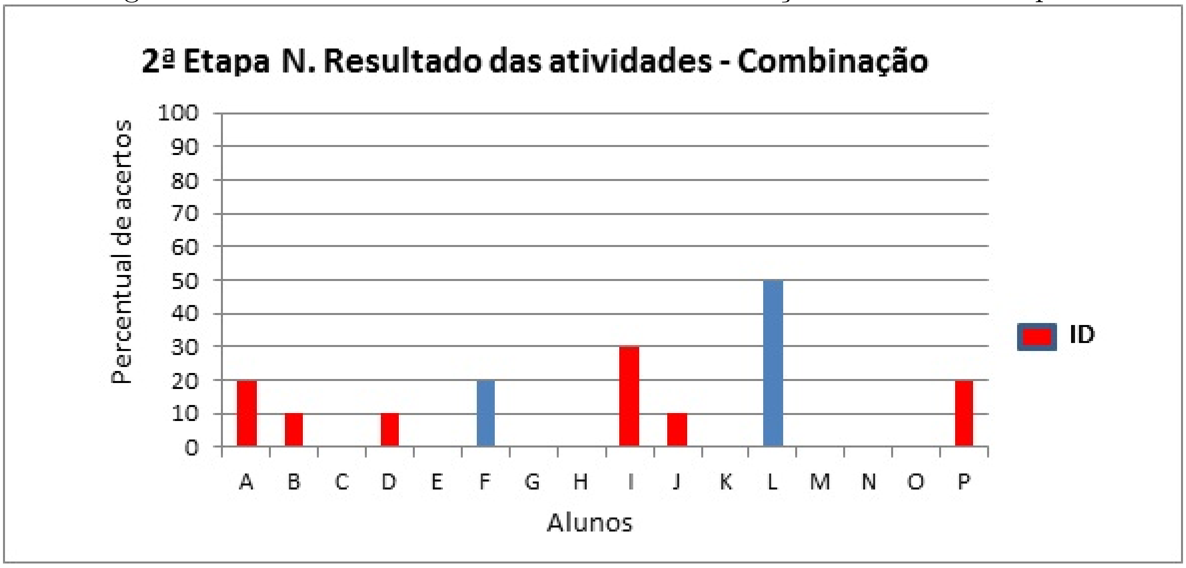
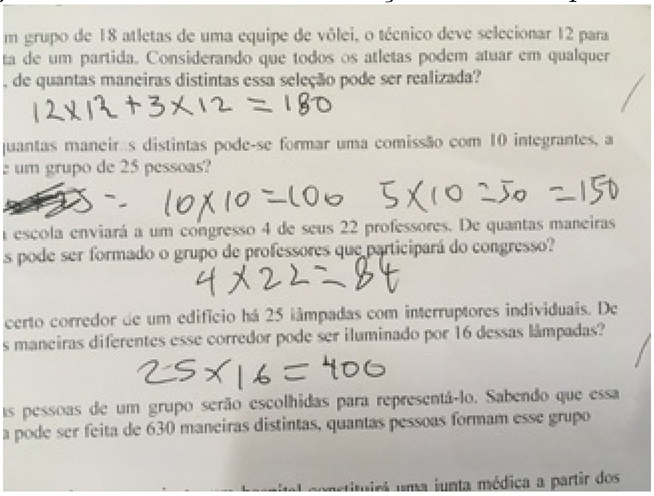


Figura 5.46: Solução da atividade de combinação realizada pelo aluno K 2ª Etapa N



m grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, o técnico deve selecionar 12 para ta de um partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer , de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser realizada?

12x12+3x12 = 180

uantas maneiras distintas pode-se formar uma comissão com 10 integrantes, a um grupo de 25 pessoas?

~~25~~ - 10x10 = 100 5x10 = 50 = 150

escola enviará a um congresso 4 de seus 22 professores. De quantas maneiras s pode ser formado o grupo de professores que participará do congresso?

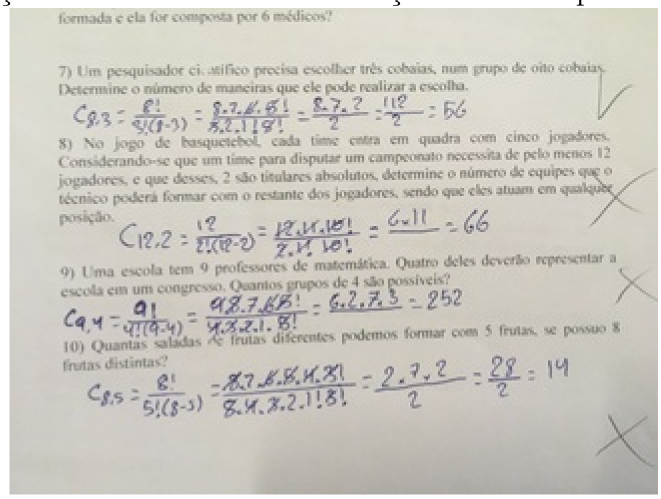
4x22 = 84

certo corredor de um edifício há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De s maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas?

25x16 = 400

s pessoas de um grupo serão escolhidas para representá-lo. Sabendo que essa pode ser feita de 630 maneiras distintas, quantas pessoas formam esse grupo

Figura 5.47: Solução da atividade de combinação realizada pelo aluno A 2ª Etapa N



formada e ela for composta por 6 médicos?

7) Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)} = \frac{8.7.\cancel{6}.\cancel{5}!}{\cancel{3}.2.1!\cancel{5}!} = \frac{8.7.2}{2} = \frac{112}{2} = 56$

8) No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de pelo menos 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição.

$C_{12,2} = \frac{12}{2!(12-2)} = \frac{12.11.10!}{2.1.10!} = \frac{6.11}{} = 66$

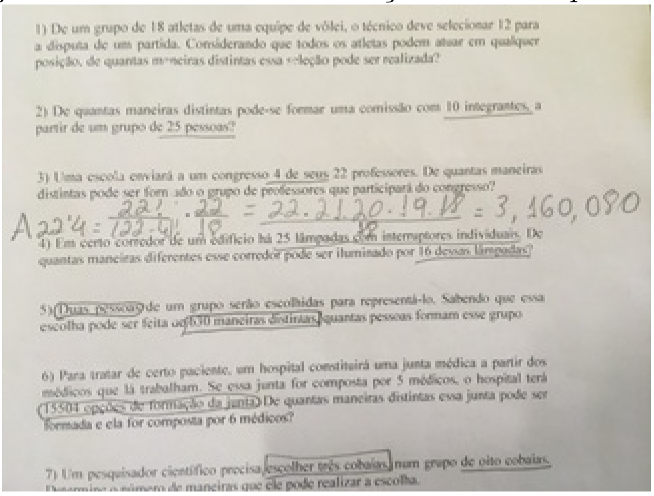
9) Uma escola tem 9 professores de matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?

$C_{9,4} = \frac{9!}{4!(9-4)} = \frac{9.8.7.6.5!}{4.3.2.1.5!} = \frac{6.2.7.3}{} = 252$

10) Quantas saladas de frutas diferentes podemos formar com 5 frutas, se possuo 8 frutas distintas?

$C_{8,5} = \frac{8!}{5!(8-5)} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{5.4.3.2.1!3!} = \frac{2.7.2}{2} = \frac{28}{2} = 14$

Figura 5.48: Solução da atividade de combinação realizada pelo aluno B 2ª Etapa N



1) De um grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, o técnico deve selecionar 12 para a disputa de um partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser realizada?

2) De quantas maneiras distintas pode-se formar uma comissão com 10 integrantes, a partir de um grupo de 25 pessoas?

3) Uma escola enviará a um congresso 4 de seus 22 professores. De quantas maneiras distintas pode ser formado o grupo de professores que participará do congresso?

$A_{22,4} = \frac{22!}{(22-4)!} \cdot \frac{22}{18} = \frac{22.21.20.19.18}{18} = 3,160,080$

4) Em certo corredor de um edifício há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De quantas maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas?

5) Duas pessoas de um grupo serão escolhidas para representá-lo. Sabendo que essa escolha pode ser feita de 630 maneiras distintas, quantas pessoas formam esse grupo

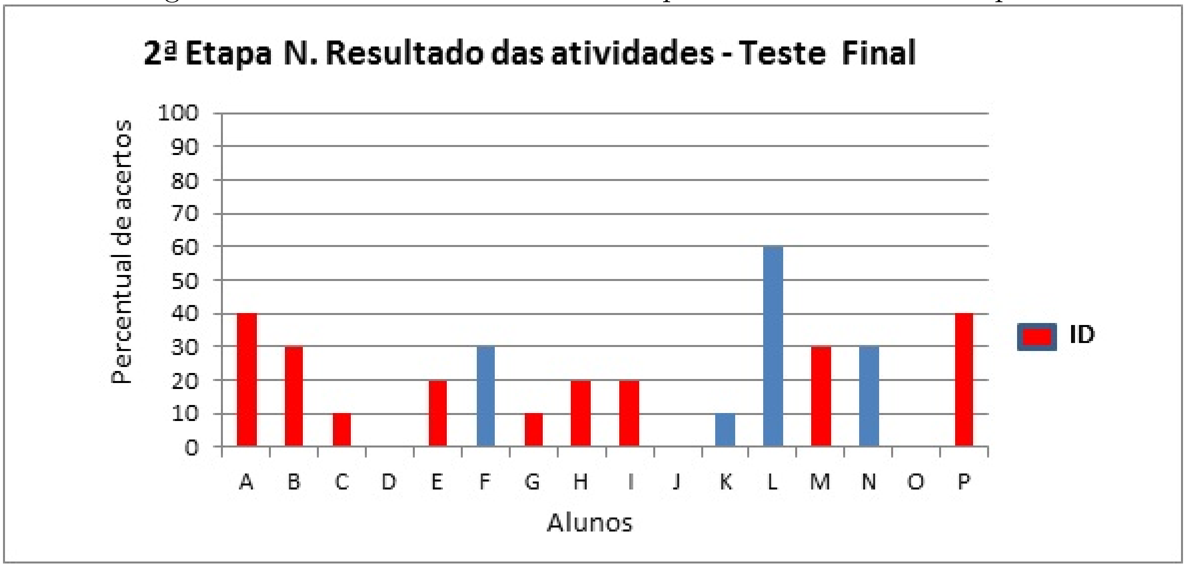
6) Para tratar de certo paciente, um hospital constituirá uma junta médica a partir dos médicos que lá trabalham. Se essa junta for composta por 5 médicos, o hospital terá 15504 opções de formação da junta. De quantas maneiras distintas essa junta pode ser formada e ela for composta por 6 médicos?

7) Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

As Figuras 5.46, 5.47 e 5.48 retratam as soluções apresentadas por um aluno sem ID e dois com ID, respectivamente. Ambos cometeram erros na resolução. O aluno K que não apresentou ID utilizou um procedimento distinto do tema combinação, entretanto as operações por ele utilizadas estão numericamente corretas, o aluno tem percepção e capacidade de manipular operações matemáticas corretamente, entretanto por erro de interpretação não chegou ao resultado correto da questão. Os alunos A e B que apresentaram ID não demonstraram capacidade de manipular os dados corretamente, embora tenham utilizado as fórmulas, não conseguiram chegar ao resultado correto, o aluno A, nas questões 8, 9 e 10 teve dificuldade de realizar as operações (multiplicação e divisão) mesmo dispondo de máquina de calcular. O aluno B não soube identificar que a questão 3 tratava de uma combinação, mesmo ciente de que as atividades eram todas sobre combinação, ainda assim, utilizou a fórmula de arranjos, e não realizou as operações matemáticas corretamente, pois o produto indicado por ele ($22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = \mathbf{3.160.808}$) foi efetuado de forma incorreta, pois o resultado correto seria 175560.

No último dia de intervenção, foi aplicado um teste com 10 questões (Anexo VI) envolvendo os quatro temas estudados, distribuídas da seguinte forma: 3 questões de PFC, 3 questões de permutação, 2 questões de arranjos e 2 questões de combinação, cujo desempenho está representado no gráfico abaixo:

Figura 5.49: Resultado do teste final aplicado na turma 2ª Etapa N



Analisando o desempenho dos alunos com ID, 75% apresentou desempenho variando entre 10% e 40%, entretanto 20% deles não obteve nenhum acerto nas questões propostas. Dentre os alunos que não apresentaram ID o desempenho variou entre 10% e 60%.

5.4.11 A experimentação na turma 2º ano B

Nesta turma, formada por 23 alunos com 18 frequentando com regularidade. Foi aplicado o teste Dyscalc com o objetivo de identificar a presença de indícios de discalculia. Após a aplicação foram obtidos os seguintes dados:

Figura 5.50: Resultado do teste Dyscalc por aluno na Turma 2ª Ano B

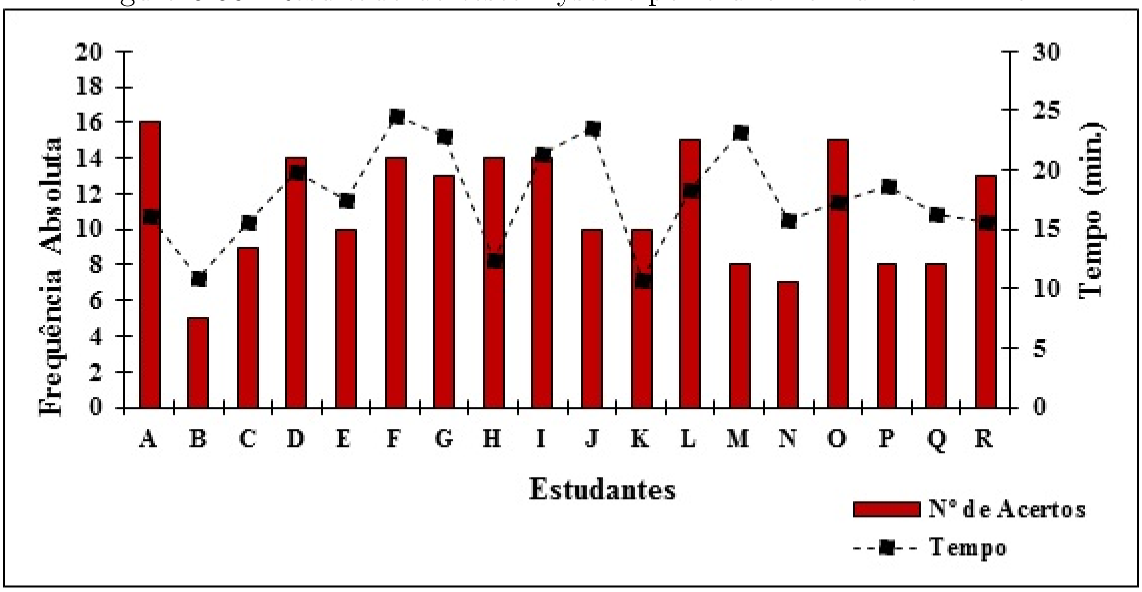
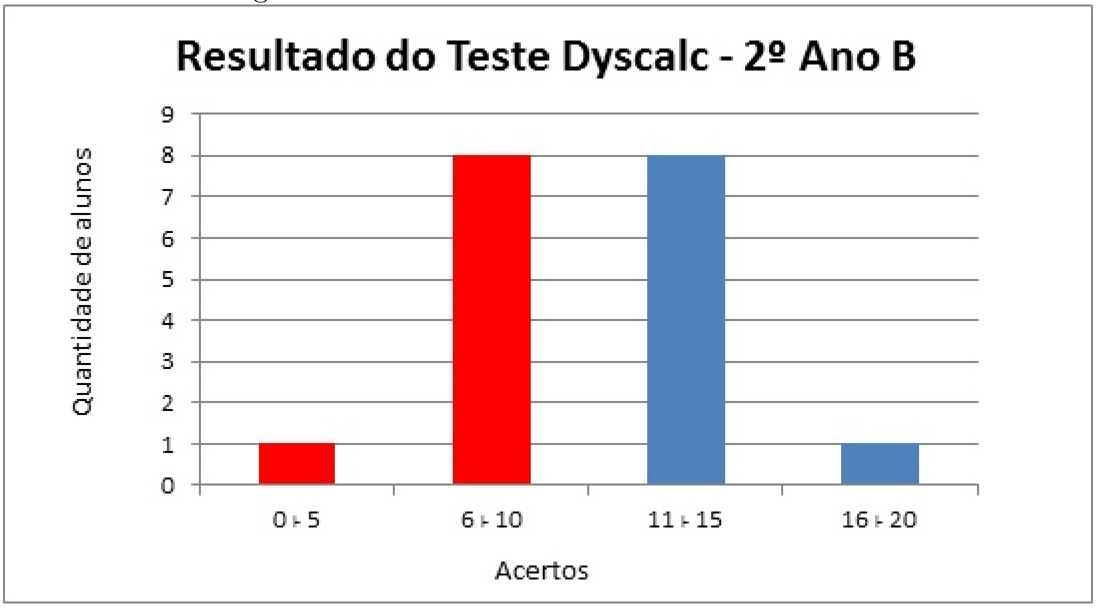


Figura 5.51: Alunos com ID na turma 2º Ano B



Dos 18 alunos submetidos ao teste, 9 apresentaram indícios de discalculia, ou seja 50% dos estudantes da turma.

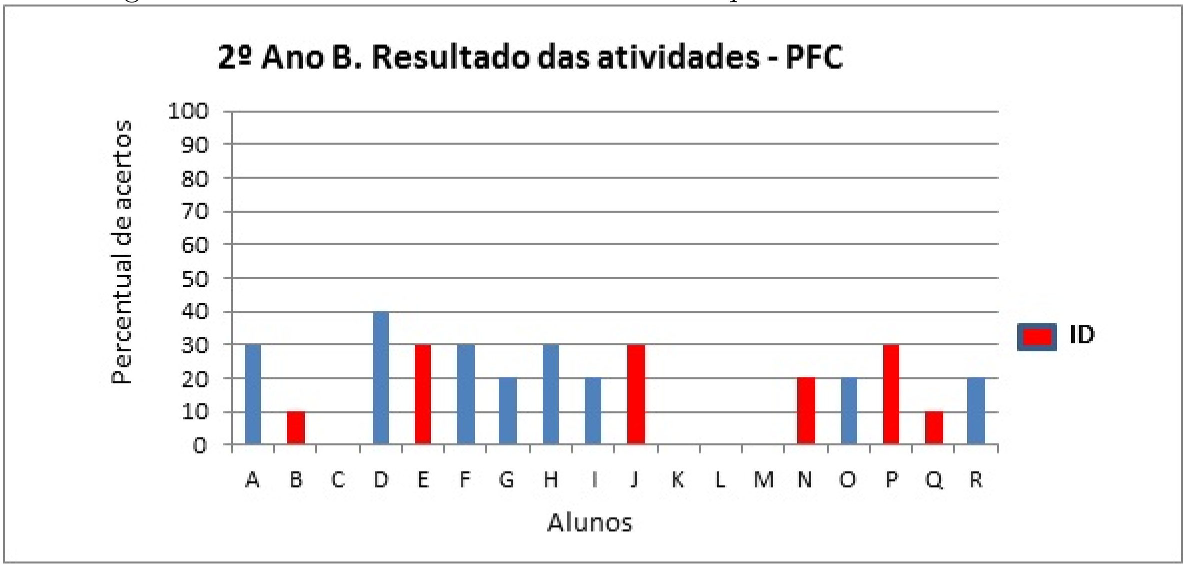
5.4.12 O Princípio Fundamental da Contagem utilizando o método fórmula aplicação na turma 2º ano B

Nesta turma foi utilizada uma sequência didática consistente no método de fórmula-aplicação, ou seja, os alunos primeiramente foram apresentados ao conceito de PFC, que na definição de Souza(2016) se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrências dos acontecimentos A e B é dada pelo produto nxm.

Após a apresentação do coneceito de PFC as atividades prosseguiram com a resolução do problema motivador e da resolução de 3 exercícios modelo. Após a explanação e o esclarecimento de dúvidas pelo professor, foram propostos 10 exercícios aos alunos, conforme Anexo II, com questões em que a aplicação do PFC é: imediata (1,2 e 3); requer mais atenção na leitura e interpretação (4,5 e 6); e requer conhecimento de outros conceitos matemáticos (7, 8, 9 e 10) Após a resolução dos exercícios pelos alunos forma obtidos os

seguintes resultados:

Figura 5.52: Resultado da atividade de PFC aplicada na turma 2º Ano B



Nesta turma, os alunos envolvidos demonstraram bastante interesse na resolução dos exercícios, tendo apresentado maior dificuldade na interpretação das questões, tanto que, os alunos que apresentaram ID, conseguiram resolver no máximo as três questões iniciais, visto que demandavam aplicação imediata do PFC.

5.4.13 O conceito de fatorial e arranjos utilizando o método fórmula aplicação na turma 2º ano B

Para apresentar a noção de arranjos para os alunos, foi necessário iniciar com a definição de fatorial de um número seguidos de exercícios de fixação:

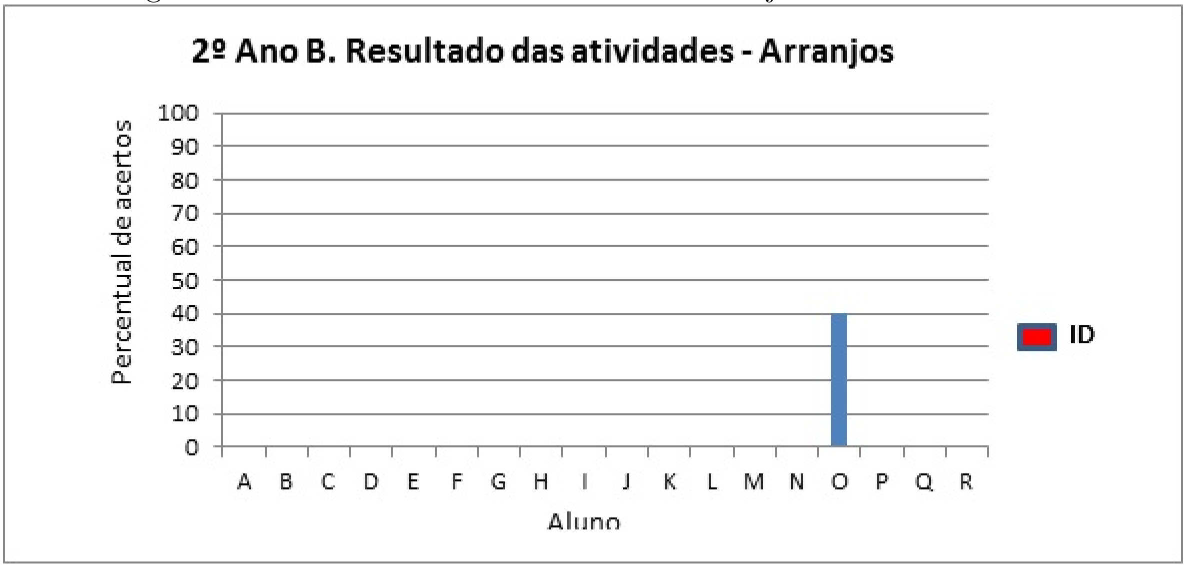
$$n! = n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1, \tag{5.1}$$

Então, foi apresentado o conceito de souza (2016) para Arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, com n e p naturais e n maior ou igual a p como sendo todo agrupamento ordenado fomrado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. A quantidade total de arranjos simples é indicada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \tag{5.2}$$

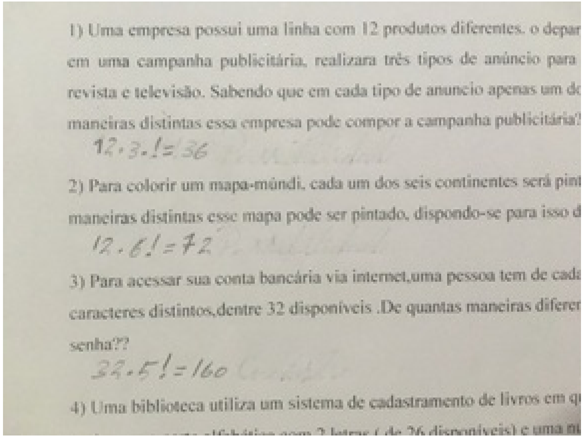
Oportunamente foi feito um comparativo entre a fórmula de Arranjo e o PFC, e esclarecendo que quando não houver repetição de elementos e se os agrupamentos se distinguirem somente pela natureza ou pela ordem de seus elementos, pode-se utilizar tanto o PFC quanto a fórmula de arranjos para a resolução. Após a conceituação e resolução de exercícios, foi aplicado a lista de exercícios do Anexo III, cujos resultados foram:

Figura 5.53: Resultado das atividades de Arranjos na turma 2º Ano B



Os alunos não obtiveram êxito no desenvolvimento das atividades, somente um aluno conseguiu resolver corretamente, 4 das 10 questões propostas. Entretanto, observou-se que os aluno utilizaram o PFC de maneira equivocada, Nos exemplos abaixo, pode-se observar que os alunos se detiveram em extrair os valores numéricos presentes no enunciado da questão e em seguida aplicaram o PFC de forma mecanizada, sem respeitar o enunciado da questão, em nenhum dos casos foi utilizada a fórmula de arranjos, conforme pode ser constatado pelo exemplos de resolução nas Figuras 5.54 e 5.55:

Figura 5.54: Solução da atividade de Arranjo realizada pelo Aluno M 2ª Ano B



1) Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. o depar
em uma campanha publicitária, realizara três tipos de anúncio para
revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anuncio apenas um do
maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?

12.3.!=36

2) Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pint
maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso d

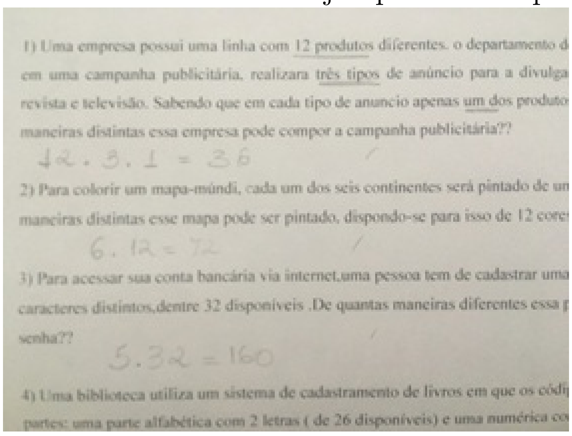
12.6!=72

3) Para acessar sua conta bancária via internet,uma pessoa tem de cada
caracteres distintos,dentre 32 disponíveis .De quantas maneiras diferen
senha??

32.5!=160

4) Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em q

Figura 5.55: Solução da atividade de Arranjo apresentada pelo Aluno B 2ª Ano B



1) Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. o departamento d
em uma campanha publicitária, realizara três tipos de anúncio para a divulga
revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anuncio apenas um dos produto
maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária??

12 . 3 . 1 = 36

2) Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pintado de un
maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 core

6 . 12 = 72

3) Para acessar sua conta bancária via internet,uma pessoa tem de cadastrar uma
caracteres distintos,dentre 32 disponíveis .De quantas maneiras diferentes essa p
senha??

5.32 = 160

4) Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códi
partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis) e uma numérica co

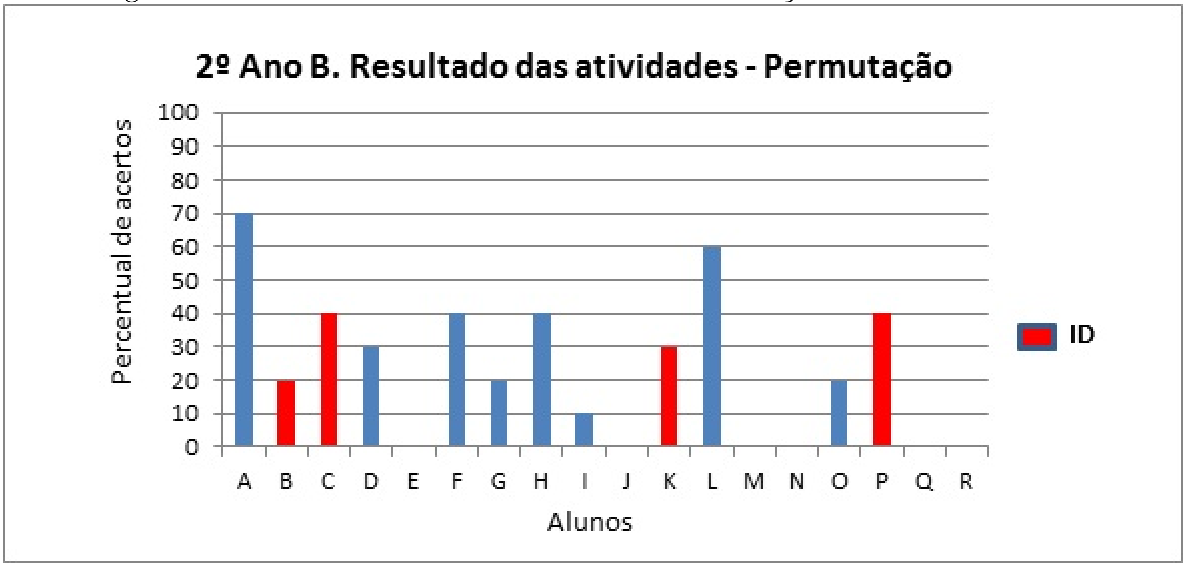
5.4.14 O conceito de permutação utilizando o método fórmula aplicação na turma 2ª ano B

Para a conceituação de permutação simples foi utilizada o conceito de Souza (2016) consistindo em todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n. A quantidade total de permutações simples é indicada por:

$$P = n! = n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1, \tag{5.3}$$

Apresentado o conceito as atividades seguiram com a resolução de exercícios modelo para fixação do conteúdo. Após a aula expositiva do professor forma propostas 10 questões sobre o tema, conforme Anexo IV cujo desempenho pode ser visualizado na Figura 5.56:

Figura 5.56: Resultado das atividades de Permutação na turma 2º Ano B



Constatou-se que nas atividades de permutação, somente 44,44% dos alunos com ID conseguiram de 20% à 40% de acertos e 55,56% não conseguiram nenhum acerto nas questões propostas.

5.4.15 O conceito de combinação utilizando o método fórmula aplicação na turma 2ª ano B

A intervenção foi iniciada com a conceituação de combinação, para tanto foi utilizado o conceito de Souza (2016) que define combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p, com n, p naturais e n maior ou igual a p, como todo agrupamento não ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. A quantidade total de combinações é indicada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}, \tag{5.4}$$

Após a abordagem conceitual, foi dado prosseguimento com a resolução do exemplo: *"Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizza nos seguintes sabores: atum, queijo, calabresa, milho e portuguesa. Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?"* O professor utilizou o exemplo para aplicar a fórmula de combinação simples e esclarecer que diferença entre Arranjos e combinações

reside na natureza de seus elementos, ou seja se a ordem dos elementos interferir no resultado, arranjo, se não interferir, combinação.

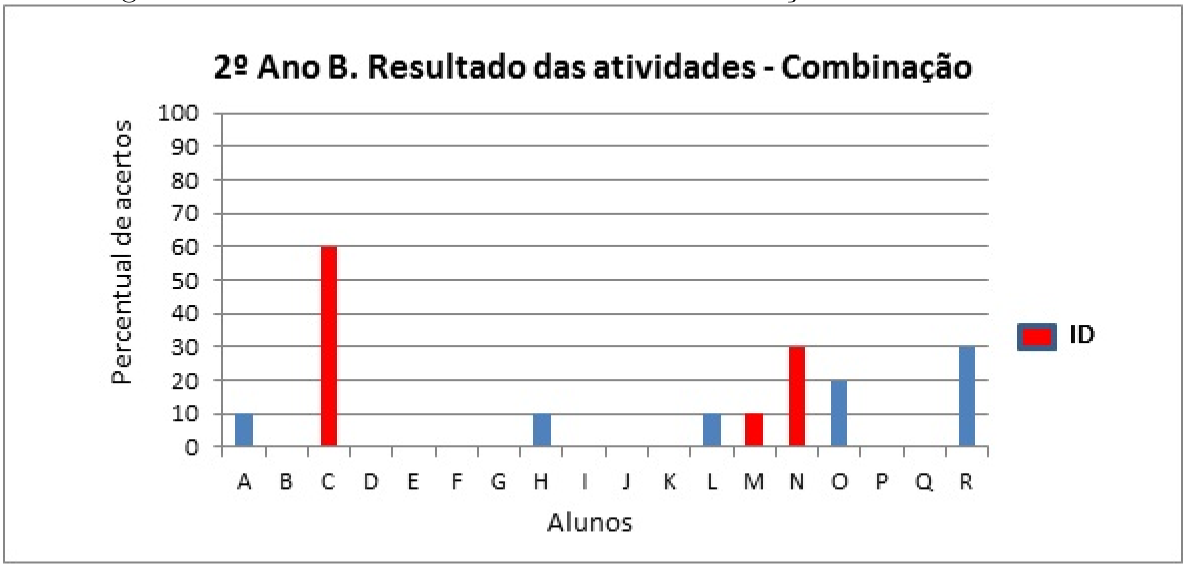
Após a apresentação formal do conceito de combinação foram resolvidos três problemas modelo para subsidiar a aprendizagem dos alunos:

Tabela 5.11: Exercícios modelo de Combinação utilizados na turma 2º ano B

1) Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.
2) Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.
3) Uma sala de aula do 2º ano do ensino médio há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30030 comissões distintas de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, exatamente 3 serão moças. Quantos alunos há nessa sala de aula?

Após a resolução dos exercícios modelo, foi proposta uma lista de 10 questões, conforme Anexo V, cujo desempenho está retratado na Figura 5.57:

Figura 5.57: Resultado das atividades de Combinação na turma 2º Ano B

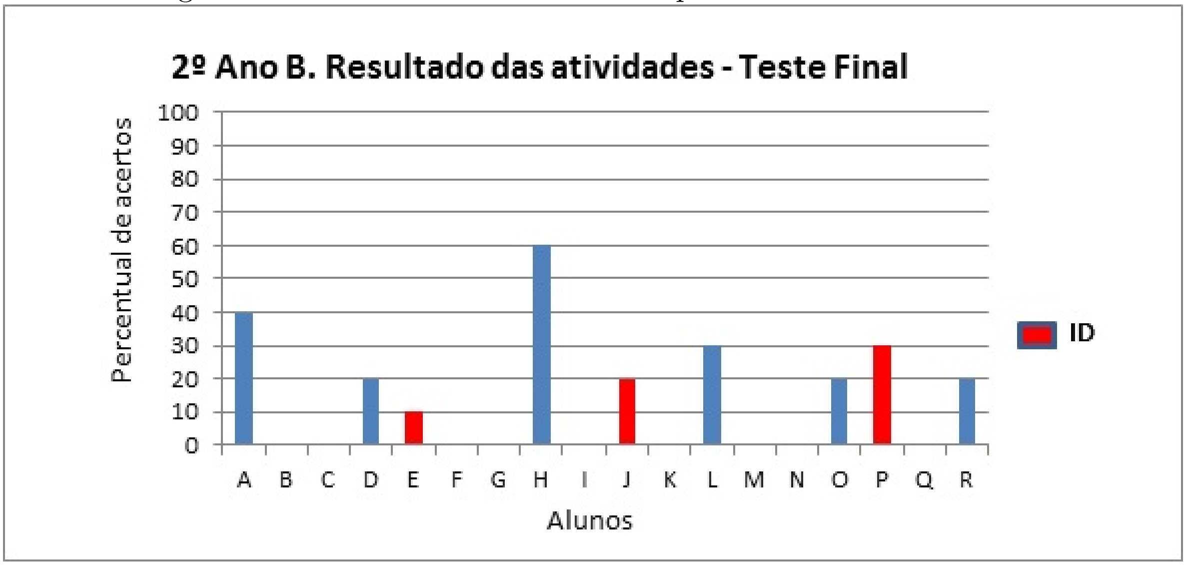


Nesta turma, 33,33% dos alunos com ID conseguiram entre 10% e 60%

de acertos dentre as questões propostas, sendo-lhes franqueado o uso de calculadora. 55,56% dos alunos da turma zeraram as questões, sendo que desse total, 40% são alunos com ID.

No último dia de intervenção, foi aplicado um teste com 10 questões envolvendo os quatro temas estudados, distribuídas da seguinte forma: 3 de PFC, 3 de permutação, 2 de arranjos e 2 de combinação, cujo desempenho está representado na Figura 5.58:

Figura 5.58: Resultado do teste final aplicado na turma 2º Ano B



foi observado que na diversidade e temas somente três alunos com ID conseguiram até 30% de acerto. Do total de alunos, 50% conseguiu resolver até 6 dos problemas, 27,77% entregou a prova em branco, dos 9 alunos com ID, 4 entregaram a prova em branco, 2 tentaram resolver até 4 questões e 3 acertaram até 3 questões.

5.4.16 A experimentação na turma 2ª etapa T

Nesta turma, formada por 21 alunos matriculados com 12 frequentando com regularidade. Foi aplicado o teste Dyscalc com o objetivo de identificar a presença de indícios de discalculia. Após a aplicação foi observado que dos 12 alunos submetidos ao teste, 4 apresentaram indícios de discalculia, conforme Figura 5.60, ou seja, cerca de 33,33% dos alunos da turma. Os dados obtidos após a aplicação do teste dyscalc revelam que todos os alunos da turma apresentam dificuldades com a disciplina matemática, uma vez que o tempo de resolução do teste ficou acima de 6 minutos, o que pode ser observado na Figura 5.59.

Figura 5.59: Resultado do teste Dyscalc por aluno na Turma 2ª Etapa T

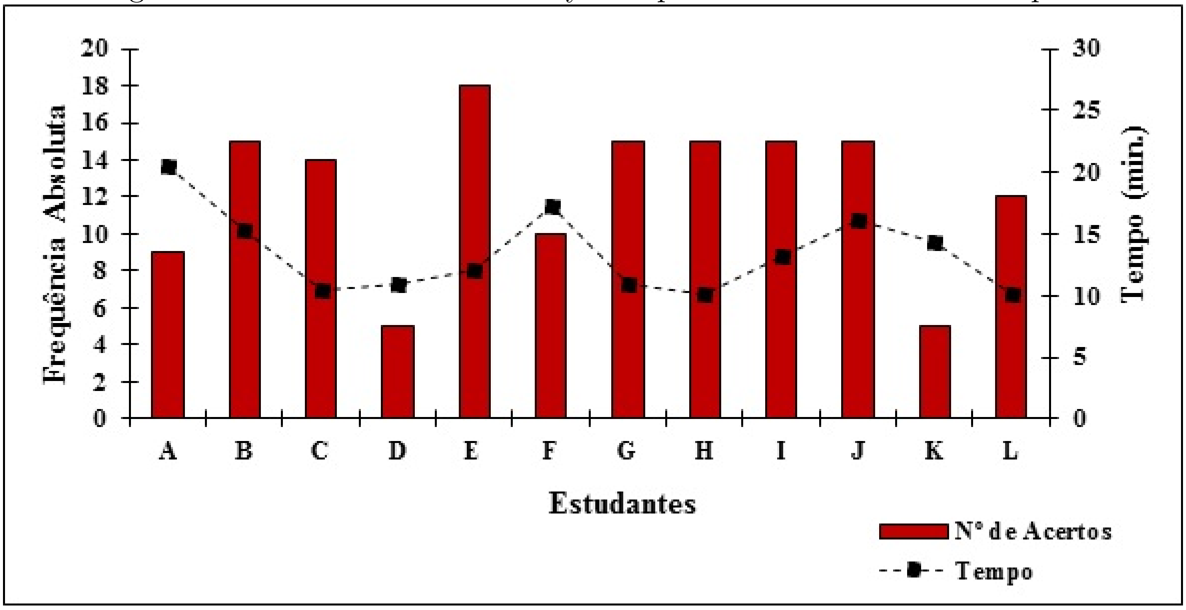
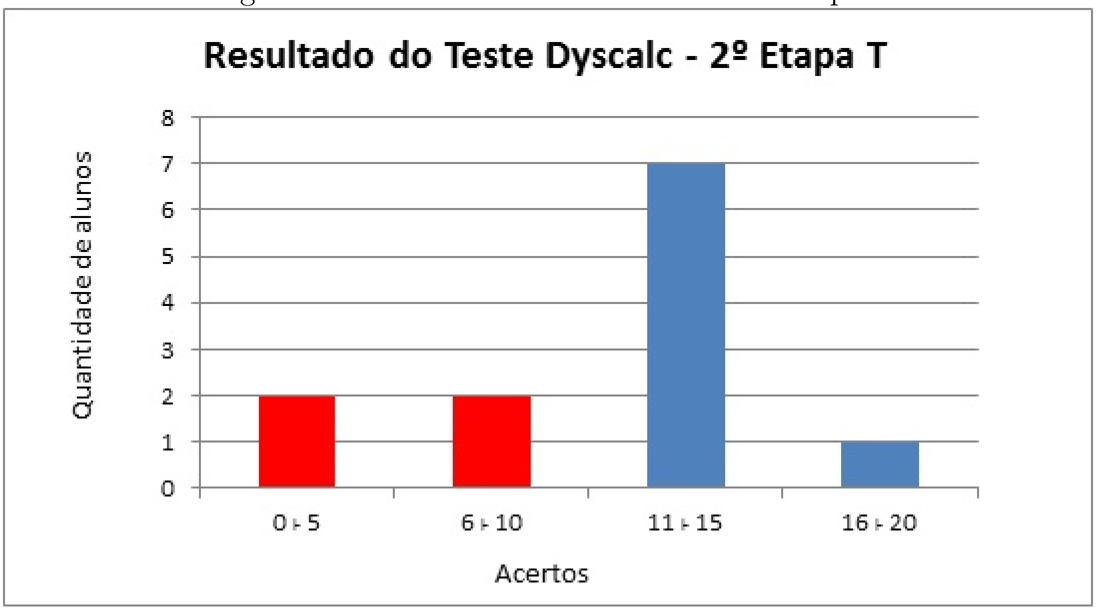


Figura 5.60: Alunos com ID na turma 2ª Etapa T



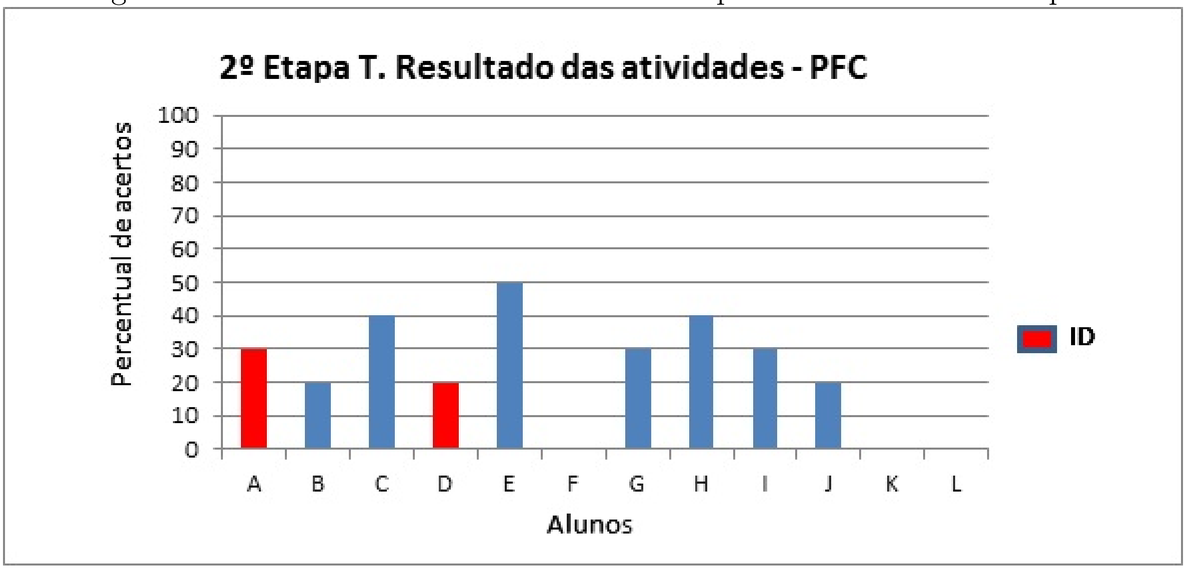
Dos 12 alunos submetidos ao teste, 4 apresentaram indícios de discalculia, ou seja, cerca de 33,33% dos alunos da turma. Os dados obtidos após a aplicação do teste dyscalc revelam que a turma apresenta dificuldades com a disciplina matemática, uma vez que o tempo de resolução do teste ficou acima de 6 minutos.

5.4.17 O princípio fundamental da contagem utilizando o método fórmula aplicação na turma 2ª etapa T.

Conforme (SOUZA e GARCIA, 2016, p. 98), o Princípio Fundamental da Contagem (P.F.C.) ou Princípio Multiplicativo pode ser conceituado da seguinte forma: Se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras distintas, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto de $n \times m$.

Nesta turma foi utilizada a metodologia de fórmula-aplicação, ou seja, os alunos primeiramente foram apresentados ao assunto (PFC), seguidos da resolução do problema motivador, juntamente com mais 3 exercícios modelo. Após a explanação e o esclarecimento de dúvidas pelo professor, foram propostos 10 exercícios aos alunos, conforme Anexo II, com questões em que a aplicação do PFC é: imediata (1,2 e 3); requer mais atenção na leitura e interpretação (4,5 e 6); e requer conhecimento de outros conceitos matemáticos (7, 8, 9 e 10). Após a resolução dos exercícios pelos alunos forma obtidos os seguintes resultados

Figura 5.61: Resultado da atividade de PFC aplicada na turma 2ª Etapa T

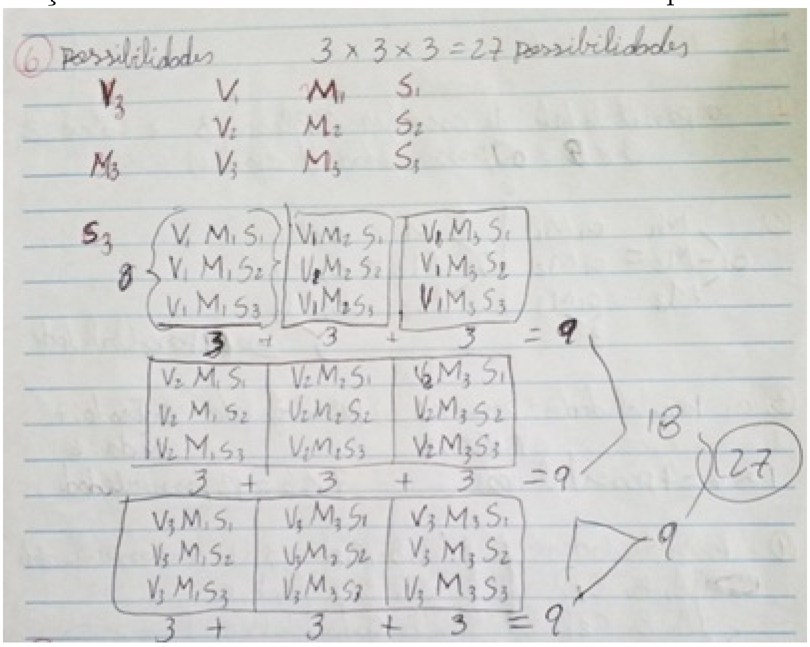


A turma apresentou 33,33% de aluno com ID, desse total 50% não conseguiu resolver nenhuma das questões, dentre os que conseguiram resolver corretamente, presentaram percentual de acerto variando entre 20% e 30% dos problemas.

As questões que exigiam maior empenho dos alunos tiveram poucas tentativas de resolução, destacando-se a soluções de um aluno sem ID, que utilizou o recurso da árvore de possibilidades, demonstrou habilidade de enumeração e dificuldade de interpretação do enunciado das questões.

A questão proposta tem o seguinte enunciado: ***Uma fantasia é composta de vestido, máscara e sapatos, disponíveis nas cores vermelha, amarela e preta. Sabendo que os sapatos o vestidos devem ter cores diferentes e a máscara é opcional, de quantas maneiras distintas pode-se compor a fantasia?*** Vejamos a solução apresentada por um aluno com ID.

Figura 5.62: Solução do item 6 da atividade de PFC realizada pelo Aluno A 2ª Etapa T

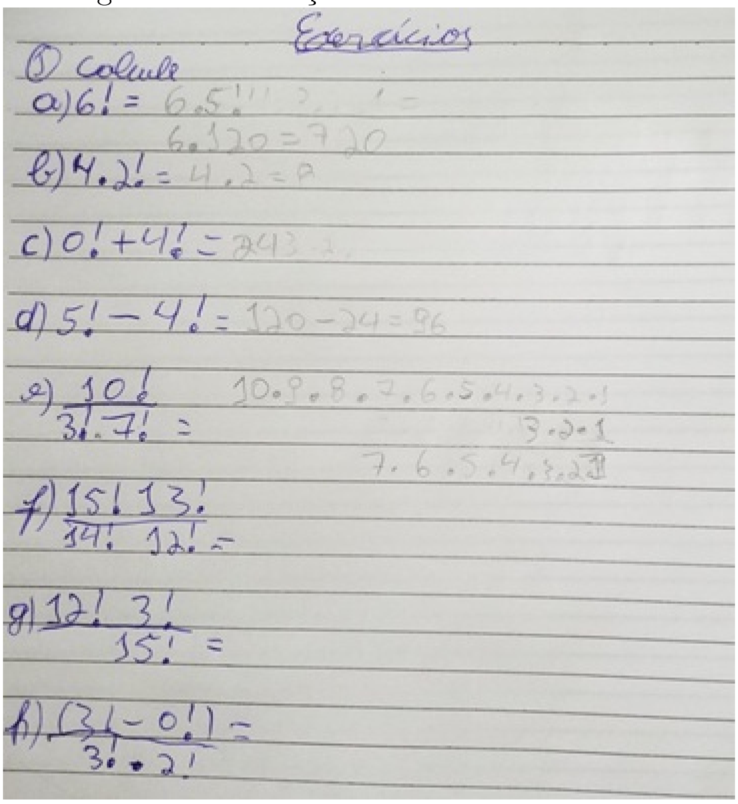


Na Figura 5.62 pode-se observar que aluno aplicou corretamente o PFC, bem como montou árvore de possibilidades, mas não observou as restrições de cores e o uso opcional da máscara, em que pese a primeira solução apresentada no inicio da figura, o aluno viu a necessidade de identificar todas as possibilidades de formação da fantasia para confirmar a solução, que numericamente está correta, mas não corresponde a solução do problema proposto A solução correta deve considerar a fantasia com máscara, sapatos e vestidos com cores distintas (3 x 3 x 2 = 18) e fantasia sem a máscara e com cores diferentes para os sapatos e vestidos (3 x 2 = 6) assim o há 24 possibilidades de compor a fantasia.

5.4.18 O conceito de fatorial e arranjos utilizando o método fórmula aplicação na turma 2ª etapa T

Da mesma forma que foi abordado na turma 2º ano B, a turma inicialmente foi apresentada ao conceito de fatorial seguido de resolução de exercícios modelo, posteriormente foi proposto uma lista de exercícios que foi realizada com acompanhamento do professor, conforme Figura 5.62:

Figura 5.63: Solução de exercícios de fatorial

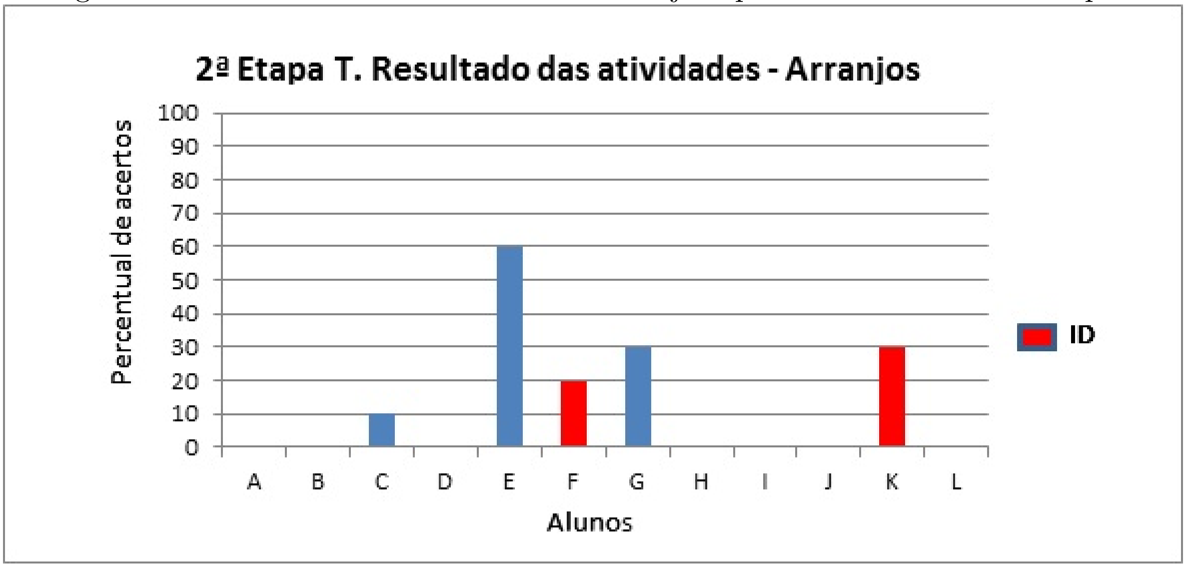


O objetivo da atividade foi preparar os alunos para a utilização de fatorial nos problemas de arranjo.

Posteriormente foi abordado o tema Arranjos simples, ressaltadno que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. O conceito de arranjo tem como fundamento o PFC, e a fórmula matemática está fundada no conceito de fatorial. Na sequência foram resolvidos exercícios modelos, fazendo-se a comparação com o PFC.

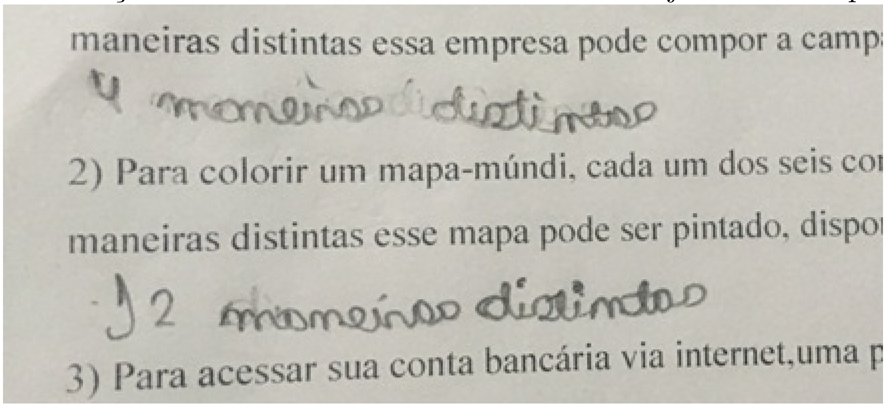
Completada a fase conceitual, foi entregue uma lista com 10 questões aos alunos, conforme Anexo III, as quais poderiam ser resolvidas com aplicação do PFC ou pela fórmula de arranjos, após a aplicação observou-se que 50% dos alunos com ID conseguiram resolver de 20% à 30% dos exercícios propostos, conforme Figura 5.64, entretanto, em que pese a baixa taxa de acertos, observou-se que muitos utilizaram o PFC de forma equivocada.

Figura 5.64: Resultado da atividade de Arranjos aplicadda na turma 2ª Etapa T



A Figura 5.65 destaca a solução apresentada para as questões 1 e 2 da lista de exercícios de arranjos: *1) Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. o departamento de marketing dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizara três tipos de anúncio para a divulgação dos produtos. outdoor, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anuncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?"* Na solução o aluno apenas dividiu a quantidade de produtos por 3 obteve resultado 4. *2) Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pintado de uma cor diferente. De quantas maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 cores distintas?* A resposta exigia um arranjo de 12 elementos tomados 6 a 6, e o aluno considerou que as possibilidades dependiam apenas das 12 cores.

Figura 5.65: Solução dos itens 1 e 2 da atividade de arranjos realizada pelo aluno F



maneiras distintas essa empresa pode compor a camp

4 maneiras distintas

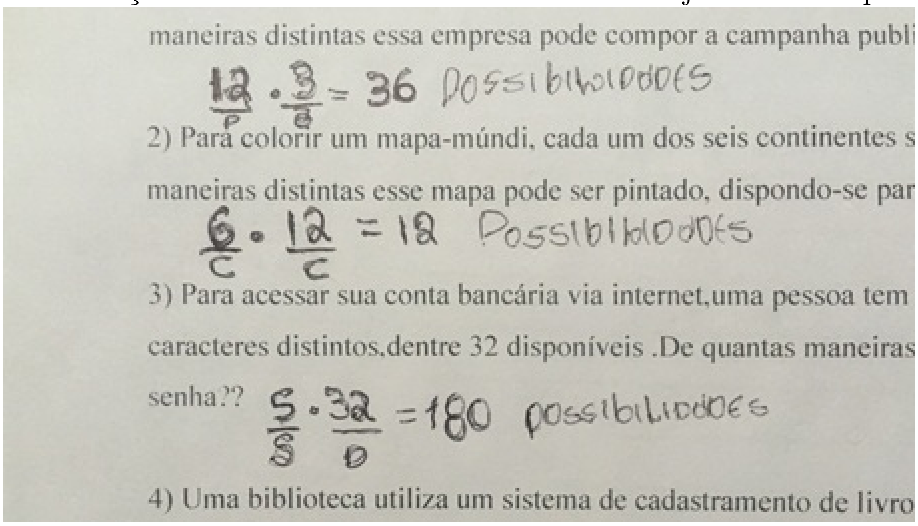
2) Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis co

maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispo

12 maneiras distintas

3) Para acessar sua conta bancária via internet,uma p

Figura 5.66: Solução dos itens 1 e 2 da atividade de arranjos realizada pelo aluno H



maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publi

$\frac{12}{P} \cdot \frac{3}{a} = 36$ possibilidades

2) Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes s

maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se par

$\frac{6}{C} \cdot \frac{12}{C} = 12$ possibilidades

3) Para acessar sua conta bancária via internet,uma pessoa tem

caracteres distintos,dentre 32 disponíveis .De quantas maneiras

senha?? $\frac{5}{S} \cdot \frac{32}{D} = 180$ possibilidades

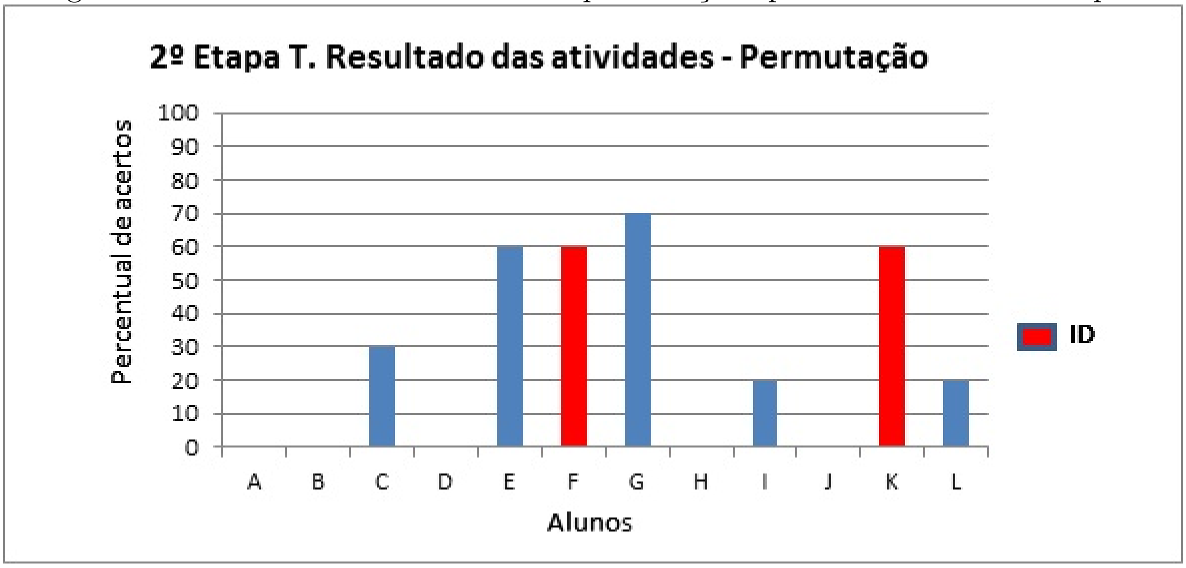
4) Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livro

A Figura 5.66 apresenta a solução utilizada pelo aluno H que não apresentou ID, e em suas resoluções utilizou o PFC em todas as questões indistintamente, sem obedecer os enunciados e particularidades de cada questão, obtendo resultados incompatíveis com os problemas propostos.

5.4.19 O conceito de permutação utilizando o método fórmula aplicação na turma 2ª etapa T

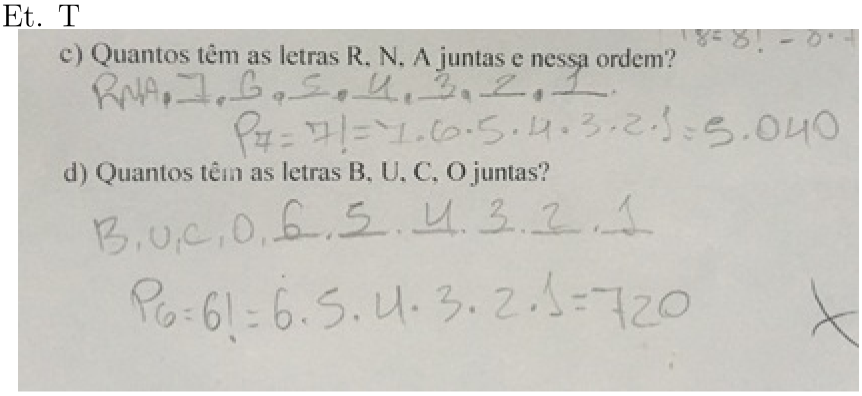
Conforme Souza (2016) permutação simples é todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n. A quantidade total de permutações simples obtida pela equação 5.3. Após a conceituação e resolução de problemas modelo os alunos receberam uma lista de 10 exercícios, cujos percentuais de acertos foram os seguintes:

Figura 5.67: Resultado da atividade de permutação aplicada na turma 2ª etapa T



Os alunos apresentaram bom rendimento nas atividades de permutação, visto que demandavam utilização de fatorial. Os que não conseguiram acertos, utilizaram o PFC em desacordo com o enunciado dos exercícios, a figura a seguir mostra a resolução apresentada pelo aluno D na resolução dos itens c e d da questão 5: Em relação aos anagramas da palavra PERNAMBUCO, pergunta-se: *c) Quantos têm as letras R, N, A juntas e nessa ordem? d) Quantos têm as letras B, U, C, O juntas?*

Figura 5.68: Solução da questão 5, itens c e d da atividade de permutação realizada pelo aluno F. 2ª Et. T



Para a resolução do item c, as letras R, N e A juntas devem compor um elemento da permutação, assim a solução correta é:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4320 \qquad (5.5)$$

Neste caso, o aluno fixou as letras como primeiro elemento e permutou as 7 letras restantes. No item d, o aluno considerou B, U, C e O como elemento fixo e permutou as 6 letras restantes, obtendo:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \tag{5.6}$$

. Para a resolução correta o aluno deveria ter considerado BUCO como um elemento a ser permutado juntamente com as 6 letras restantes, depois deveria permutar as 4 letras entre si, pois o enunciado nada mencionava a respeito da posição das letras, assim a solução correta seria:

$$P_4 \cdot P_7 = 120960 \tag{5.7}$$

5.4.20 O conceito de combinação utilizando o método fórmula aplicação na turma 2ª etapa T

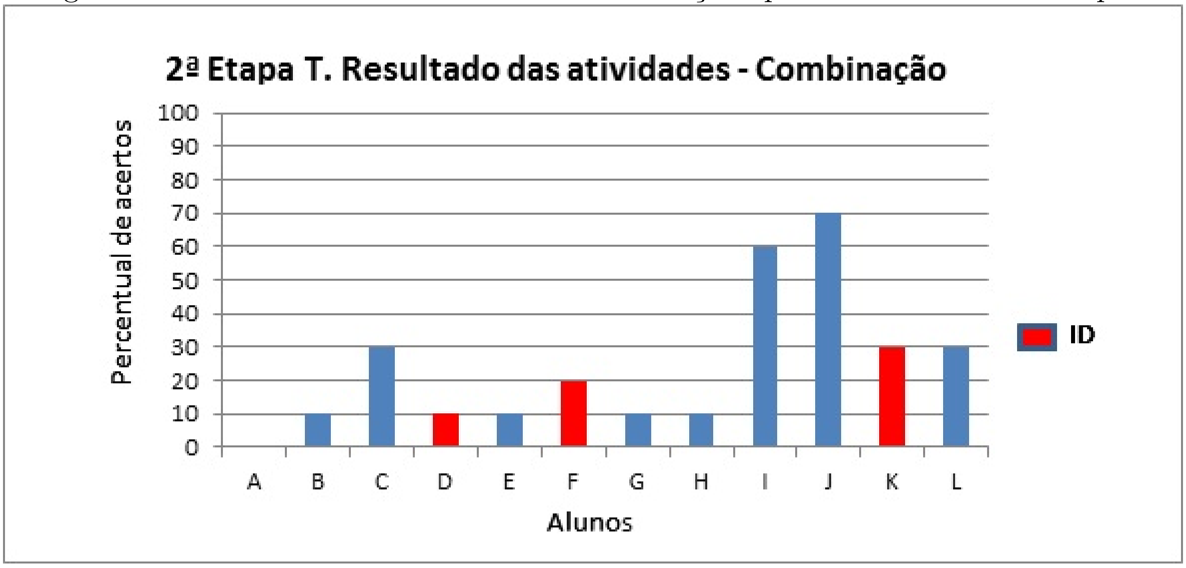
A intervenção foi iniciada com a conceituação de combinação, seguido da resolução do exemplo: *"Um pizzaiolo tem a sua disposição ingredientes para fazer pizza nos seguintes sabores: atum, queijo, calabresa, milho e portuguesa. Quantas são as possibilidades de pizzas que podem ser feitas com três sabores diferentes?"* O professor utilizou o exemplo para aplicar a fórmula de combinação simples e esclarecer que diferença entre Arranjos e combinações reside na natureza de seus elementos, ou seja se a ordem dos elementos interferir no resultado, arranjo, se não interferir, combinação Após a apresentação formal do conceito de combinação foram resolvidos três problemas modelo para subsidiar a aprendizagem dos alunos:

Tabela 5.12: Exercícios modelo de Combinação utilizados na turma 2ª Et. T

1) Em uma sala de aula existem 12 alunas, onde uma delas chama-se Carla, e 8 alunos, onde um deles atende pelo nome de Luiz. Deseja-se formar comissões de 5 alunas e 4 alunos. Determine o número de comissões, onde simultaneamente participam Carla e Luiz.
2) Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.
3) Uma sala de aula do 2º ano do ensino médio há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30030 comissões distintas de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, exatamente 3 serão moças. Quantos alunos há nessa sala de aula?

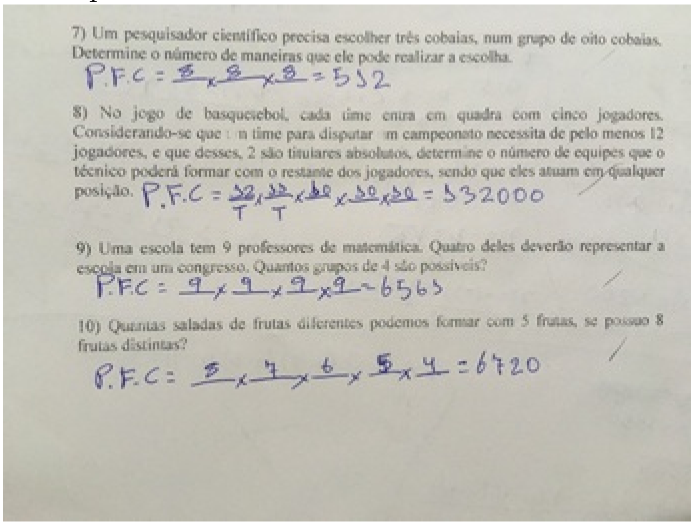
Após a resolução dos exercícios modelo, foi proposta uma lista de 10 questões sobre o tema estudado, conforme anexo V, cujo desempenho obtido pelos alunos pode ser vizualizado na Figura 5.69.

Figura 5.69: Resultado da atividade de combinação aplicada na turma 2ª Etapa T



Os alunos que apresentaram ID, obtiveram 0%, 20% e 30% de acertos nos exercícios de combinação. Nas figuras 5.70 e 5.71 pode-se observar as resoluções das questões 7, 8 e 9 de dois alunos, um com ID e outro sem.

Figura 5.70: Resolução das questões 7, 8 e 9 da atividade de combinação apresentada pelo aluno E da turma 2ª Etapa T


7) Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.
P.F.C = 8 x 8 x 8 = 512

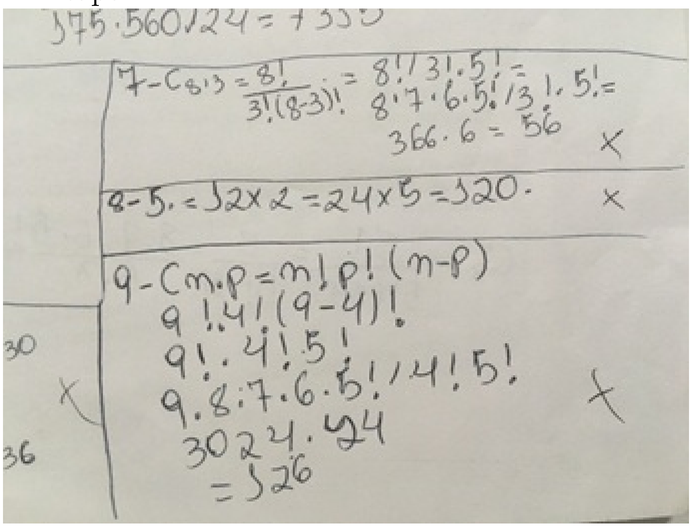
8) No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de pelo menos 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição.
P.F.C = ... = 532000

9) Uma escola tem 9 professores de matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?
P.F.C = 9 x 9 x 9 x 9 = 6561

10) Quantas saladas de frutas diferentes podemos formar com 5 frutas, se possuo 8 frutas distintas?
P.F.C = 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 6720

O aluno cuja resolução consta na Figura 5.70 não apresentou ID e utilizou o PFC para resolver as questões de 7 à 10, em que pese o erro da questão, o aluno demonstrou habilidade para utilizar recursos matemáticos, indicou a utilização do PFC e multiplicou os valores corretamente.

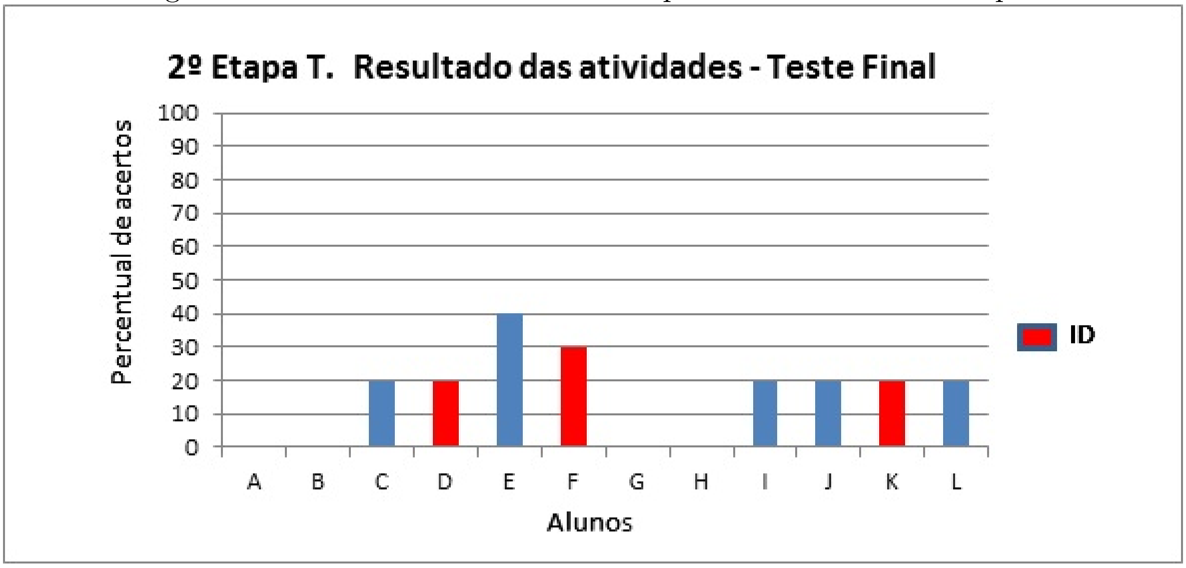
Figura 5.71: Resolução das questões 7, 8 e 9 da atividade de combinação apresentada pelo aluno K da turma 2ª Etapa T


7 - $C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 8!/3!.5! = 8.7.6.5!/3!.5! = 336.6 = 56$
8 - 5. = 12 x 2 = 24 x 5 = 120.
9 - Cm.p = m! p! (m-p)
9!.4!(9-4)!
9!.4!5!
9.8.7.6.5!/4!5!
3024.24
= 126

Na Figura 5.71 o aluno apresentou ID e demonstrou incoerência na resolução e dificuldade de organização dos dados, nas questões 7 e 9, não reconheceu que a questão 8 é resolvida por meio de combinação. No último dia de intervenção, foi aplicado um teste com 10 questões envolvendo os quatro

temas estudados, distribuídas da seguinte forma: 3 de PFC, 3 de permutação, 2 de arranjos e 2 de combinação, cujo desempenho está representado na Figura 5.72:

Figura 5.72: Resultado do teste final aplicado na turma 2ª Etapa T



5.5 Análise a posteriori e validação

Nessa fase da pesquisa foi realizada a confrontação entre os dados obtidos e a análise a priori para a interpretação dos resultados obtidos, verificando uma possível comprovação de hipóteses. Segundo Pommer (2013), nessa etapa da Engenharia Didática "é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa."

5.5.1 Descrição da análise a posteriori

O objetivo da pesquisa foi identificar alunos com dificuldade de aprendizagem em matemática, utilizando como parâmetro a presença de ID e analisar a aprendizagem dos conteúdos de análise combinatória. No decorrer da pesquisa, os alunos tiveram contato inicial com os conteúdos de análise combinatória através de duas abordagens metodológicas (problema motivador e fórmula-aplicação). Nas turmas 2º ano A e 2ªEtapa N o percentual de alunos que apresentou ID foi respectivamente de 30,43% e 75%, entretanto, mesmo os

que não apresentaram ID tiveram dificuldades no desenvolvimento dos tópicos estudados. Os gráficos abaixo mostram o rendimento médio obtido pelos alunos das turmas em que foi utilizado e método problema motivador:

Figura 5.73: Percentual de acertos por aluno da turma 2ª ano A

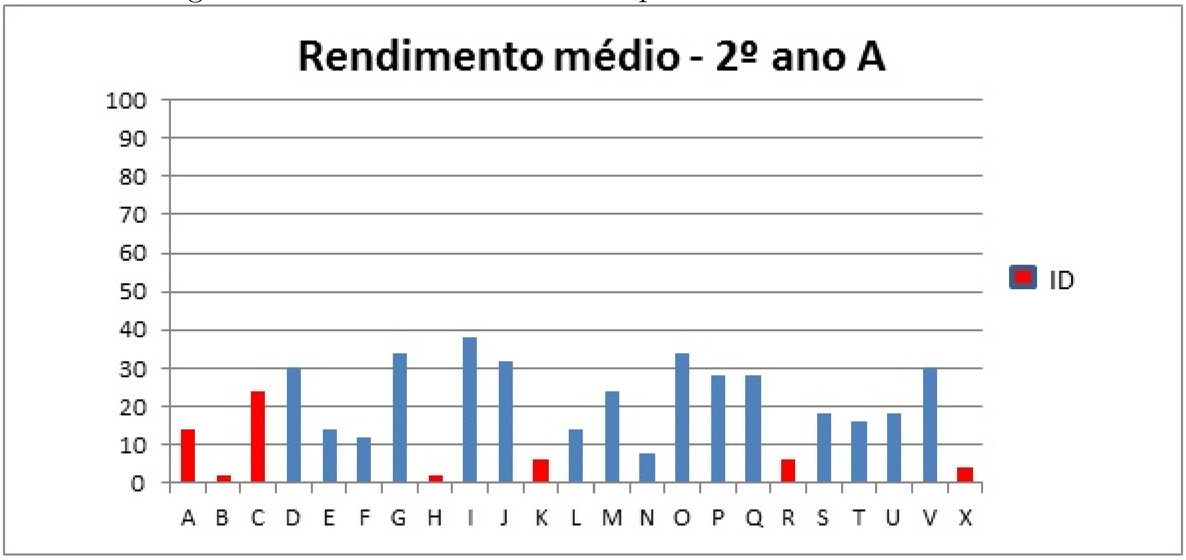
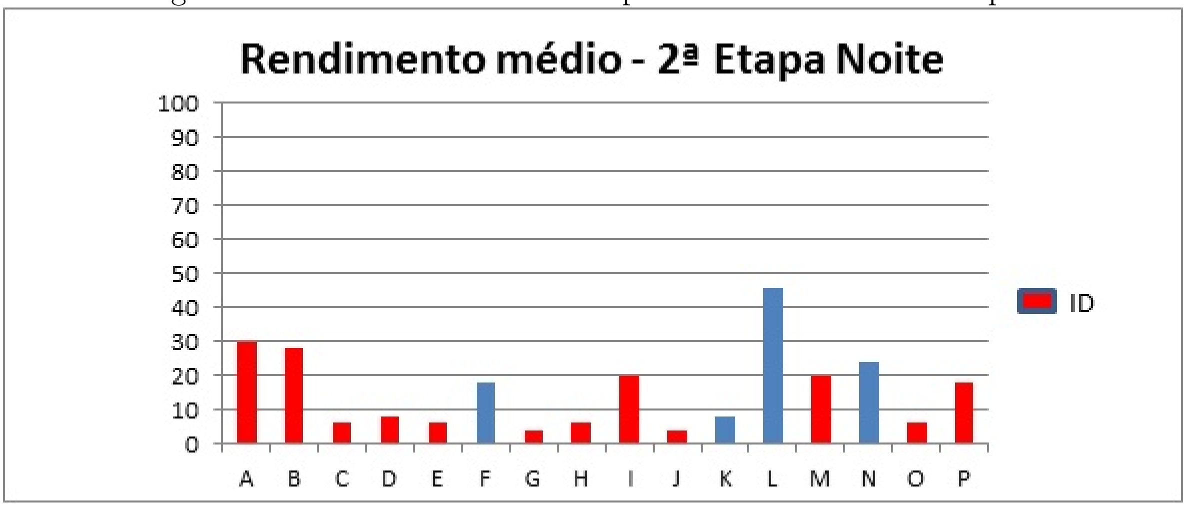


Figura 5.74: Percentual de acertos por aluno da turma 2ª Etapa N



Nas turmas retratadas nas Figuras 5.73 e 5.74, os alunos com ID apresentaram rendimento de até 30%, ou seja, de um total de 50 questões, os alunos acertaram pelo menos de 15. Com relação aos alunos que não apresentaram ID, notou-se que eles apresentaram dificuldades na compreensão do enunciado das questões, visto que em muitas resoluções a operação matemática é realizada corretamente, em contrapartida, de forma diversa do que é solicitado no comando da questão.

De forma geral, os alunos com ID da turma 2º Ano A apresentam dificuldades de maiores que a dos demais alunos, demostraram maior falta de interesse e inércia para a realização das atividades. Os alunos da turma 2ª Etapa N apresentaram maior dificuldade na resolução das questões, seja na interpretação (desconhecimento de conceitos e palavras) e na manipulação das informações numéricas.

As turmas 2º Ano B e 2ª Etapa T apresentaram 44,44% e 25% de alunos com ID respectivamente, nelas foi utilizado o método fórmula-aplicação para a abordagem do conteúdos de análise combinatória, cujo rendimento médio está retratado nos gráficos das Figuras 5.75 e 5.76. Nas duas turmas, os alunos com ID também apresentaram rendimento médio inferior a 30%. Importante destacar que nas 4 turmas envolvidas na pesquisa, os alunos com ID apresentaram dificuldades semelhantes, ou seja, na manipulação numérica. Já os alunos sem ID apresentaram habilidade na manipulação de fórmulas matemáticas, entretanto houve dificuldade em aplicar a fórmula ou conceito aos problemas apresentados.

Figura 5.75: Percentual de acertos por aluno da turma 2º Ano B

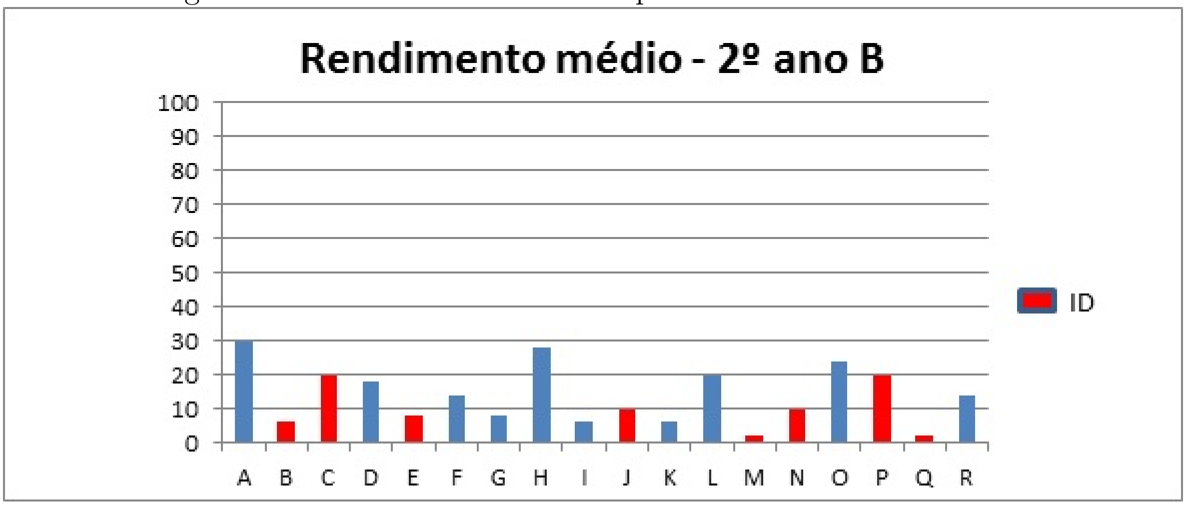
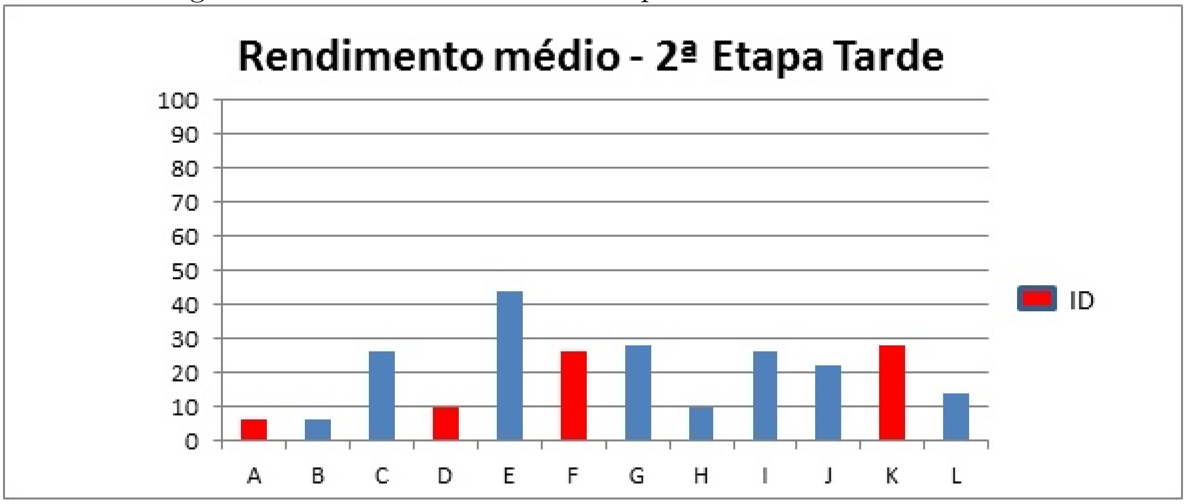


Figura 5.76: Percentual de acertos por aluno da turma 2ª Et. T



Dentro deste trabalho, era esperado que as turmas que tiveram seu contato inicial com a Análise Combinatória através da metodologia de fórmula-aplicação sentissem mais dificuldades em resolver problemas de combinatória, quando esses fossem apresentados de forma aleatória, uma vez que não nesse tipo de abordagem não foi dada oportunidade de reflexão e discussão sobre os problemas propostos. Enquanto que os alunos que submetidos ao método problema-motivador aprenderiam a resolver utilizando exclusivamente o PFC e sentiriam mais segurança para interpretar e chegar ao resultado correto.

Entretanto a metodologia aplicada não interferiu no rendimento dos alunos, uma vez que ao conhecer a fórmula o alunos sempre optam por fazer uso da fórmula, por sua vez, o método problema motivador, mostrou maior eficácia no sentido de instigar os alunos, a participar da aula, e nessas participações foi observado que os alunos com ID não se mostraram dispostos a participar ou mesmo esclarecer eventuais dúvidas, permaneciam inertes aguardando a solução do professor para copiar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal analisar as dificuldades de aprendizagem dos conteúdos de análise combinatória tendo como parâmetro a presença de ID, verificando também a eficácia da metodologia utilizada (problema motivador e fórmula aplicação) utilizando como metodologia de pesquisa a teoria da engenharia didática.

A hipótese levantada no início da pesquisa foi a de que alunos do ensino médio apresentam dificuldades na aprendizagem dos temas de análise combinatória e que a presença de indícios de discalculia (ID) poderiam sem um dos fatores que contribui para o baixo desempenho em Matemática. Assim, a pesquisa buscou inicialmente identificar os indícios de discalculia entre todos os alunos do ensino médio da escola onde a pesquisa foi realizada. Para o estudo de análise combinatória, foram submetidos apenas os alunos das turmas de 2º ano regular e da 2ª etapa da Educação de Jovens e Adultos, totalizando 69 alunos envolvidos na pesquisa. As turmas foram divididas de acordo com forma de abordagem dos conteúdos, quais sejam: fórmula-aplicação e problema motivador.

As hipóteses levantadas como ponto de partida da pesquisa e que despertaram o interesse inicial, a princípio se comprovaram, muitos alunos submetidos ao método problema-motivador apresentaram dificuldade de demonstrar um raciocínio matemático adequado ao nível de escolaridade em que sem encontram, principalmente nos problemas de PFC (Princípio Fundamental da Contagem) em que o aluno deveria ter capacidade de reconhecer e utilizar o princípio multiplicativo em suas resoluções.

Percebeu-se que a utilização da forma de abordagem dos temas em sala de aula não é fator significativo para a aprendizagem dos conteúdos, em que pese o método do problema motivador atiçar a curiosidade do aluno, após sua apresentação, o aluno é apresentado a uma fórmula matemática referente ao tema e dela fará uso com mais frequência, entretanto seu uso se mostrou eficaz para identificar quais alunos demonstram interesse pelo assunto abordado e quais apresentam dificuldades com raciocínio matemático.

Com o avançar dos conteúdos (Arranjos, permutação e combinação), o professor sempre reforçou que o PFC era o fundamento para resolução, sempre ressaltando suas particularidades, além disso, antes de cada lista de exercícios o professor apresentava a resolução de alguns problemas modelos.

Todos os alunos envolvidos na pesquisa apresentaram dificuldades. Dentre os alunos que não apresentaram ID, a dificuldade estava na adequação do tema estudado (PFC, Arranjos, permutação e combinação) ao problema proposto, desta forma, foi observado que o aluno apresenta em sua resolução uma operação matemática correta, mas em desacordo com o enunciado da questão, muitos foram os alunos que incidiram na mesma falha. Nesse grupo encontramos alunos sem dificuldade de operar matematicamente, mas com dificuldade de utilizar corretamente os dados fornecidos pela questão, dificuldade esta que pode ser superada no decorrer das aulas.

Dentre os alunos que apresentaram ID, observou-se muita dificuldade em realizar operações matemáticas básicas, desorganização na resolução, dificuldade em retirar os dados da questão para iniciar a resolução e até mesmo recusa em realizar as atividades sob o argumento de que não entendeu nada ou de que não consegue aprender matemática, observou-se também que os alunos com ID não questionam e não compartilham dúvidas com o professor.

Portanto, este trabalho tem como objetivo mostrar que a aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória não dependem exclusivamente de uma boa metodologia de ensino, e sim de um diagnóstico prévio dos alunos, no sentido de identificar indícios de dificuldades de aprendizagem, em especial indícios de discalculia, por meio do programa dyscalc, o qual permite ao professor diagnosticar quais alunos apresentarão maior dificuldade na aprendizagem de matemática, e nos casos mais graves encaminhá-los a um atendimento especializado ou mesmo traçar uma estratégia metodológica jun-

tamente com a coordenação pedagógica do escola de forma a acompanhar os alunos com maior dificuldade de aprendizagem matemática, pois o tempo em sala de aula é insuficiente para sanar as dificuldades dos alunos que apresentam ID, e acabam por interferir no avanço de conteúdos, ou mesmo agravar as dificuldades dos alunos, culminando em repetência ou mesmo em abandono escolar.

Por fim, sugere-se que as escolas, por meio da coordenação pedagógica, professores de Língua Portuguesa e Matemática desenvolvam uma forma de tutoria dos alunos que apresentarem ID, seja de forma presencial ou mediante plataforma on-line para que o aluno não se distancie do ambiente de aprendizagem e que possa contornar suas dificuldades de maneira eficaz, tendo acesso a um tutor que possa dar apoio pedagógico ao aluno, suporte em leitura e interpretação e orientação nas uma vez que o tempo regular em sala de aula não é suficiente para atender às necessidades desses alunos sem prejudicar o avanço dos demais alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ALMOULOUD, S.A.; COUTINHO, C.Q.S.Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática,v. 3.6, p.62-77, 2008.

[2] AMARAL, Wagner alexandre. Avaliação da aprendizagem no ensino da matemática: tendências e perspectivas. Disponível em : educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/2119810077.pdf Aprendizagem no Contexto Psicopedagógico. Petrópolis: Vozes, 2001, p. 19-39.

[3] BARBOSA, Laura Monte Serrat. Psicopedagogia: um diálogo entre a psicopedagogia e a educação. 2. ed. Curitiba: Bolsa nacional do livro, 2008.

[4] BASTOS, J.A. O cérebro e a matemática. São Paulo: Edição do Autor, 2008.

[5] BATEMAN, B. Education's view of a Diagnostic Approach to Learning Disorders. In: HELLMUTH, J. (Ordg.). Learning Disorders. Seattle: Special Child Publications, 1965.

[6] BIBLIOTECA, digital. Coleção educação. Disponível em: <http://www.alppsicologa.hpg.ig.com.br/difaprend.pdf.>. Acesso em: 21 jan. 2019.

[7] BIGGS, Norman Linstead. The roots of combinatorics. Royal Holloway College, University of London, Egham, surrey tw20 oex, England (1979) 109 – 136 disponível em <https://core.ac.uk/download/pdf/82630903.pdf>

[8] BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. 3. Ed. Brasília: MEC/SEF, 2001.

[9] CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho; PEREIRA, Ducival carvalho; SANTOS, Maria de Lourdes Silva. O ensino-aprendizagem de análise combinatória: o desempenho de alunos de belém do pará. educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo–SP, 13 a 16 de julho de 2016. Comunicação Científica.

[10] CORREIA, Luís de M; MARTINS, Ana P. Dificuldade de Aprendizagem: que são? Como entende - las? In: Biblioteca Digital. Coleção Educação. Portugal: Porto Editora, 2005.

[11] D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: Da teoria á prática. 23. Ed. Campinas: Papirus, 2012.

[12] DANTAS, Tiago Pereira. Educação Matemática. 1ªEd. Rio de Janeiro, Abrindo Página, 2016.

[13] DOUADY, Régine. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. RDM, V 7, 1985.

[14] FRAGOSO. W.C. História da Matemática: história de uma disciplina. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 11, n. 34, p. 625-643, set./dez. 2011.

[15] Francis, T., Smith, G., Wareham, J. and Wood, H. (2013). Dyscalc ¡http://www.educational-psychologist.co.uk/screening/dyscalculic¿. acesso em: 08 mar. 2019.

[16] GARCIA, J.N. Manual de dificuldades de aprendizagem. Linguagem, leitura, escrita e matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

[17] Geary, D.C.; Bjorklund, D.F. (2000). "Evolutionary Developmental Psychology". Child Development. 71 (1): p. 57–65. CiteSeerX 10.1.1.380.309. doi:10.1111/1467-8624.00118. PMID 10836558

[18] INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANISIO TEIXEIRA. Sinopse estatística da educação básica 2018: Inep, 2019. Disponível em ¡http://portal.inep.gov.br/web/guest/sinopses-estatisticas-da-educacao-basica¿. Acesso em 01 jun 2019.

[19] JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno Alves; LIMA, Mário Luiz Alves de; SÁ, Ilydio Pereira de. Curso de Análise Combinatória e Probabilidade. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

[20] KIRK, Samuel GALLAGHER, James J. Educação da criança excepcional. Tradução Marilia Zanella Sanvicente. 3ed. São Paulo. Editora Martins Fontes, 1996.

[21] LIBÂNEO, J. C. Didática. 2 Ed. São Paulo: Cortez, 2013.

[22] LOPES, Washington Lauriano. Filosofia da Educação Matemática reflexão e pesquisa sobre a importância do ensino da Matemática, 1998.

[23] LUCKESI, C. C. Avaliação da aprendizagem na escola: estudos e proposições. 17. Ed. São Paulo: Cortez, 2005.

[24] MATO GROSSO. Escola ciclada de Mato Grosso: novos tempos e espaços para ensinar. Cuiabá: Seduc, 2000.

[25] MORGADO, Augusto César de Oliveira; PITOMBEIRA, João bosco; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. 10ª Ed. Rio de Janeiro, SBM, 2016.

[26] MUÑOZ-SANDOVAL, A. WOODCOCK, R. W. Bateria Woodcock-Muñoz III: Pruebas de habilidad cognitiva/ Bateria Woodcock-Muñoz III: Pruebas de aprovechamiento. Em S.M. WECHSLER E R.S.L. GUZZO (Orgs.). Avaliação Psicológica: perspectiva internacional (pp. 327-366). São Paulo: Casa do Psicólogo, 2005.

[27] NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

[28] ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTLIN, Andresa Maria. Resolução de Problemas: Teoria e Prática. Jundiaí, Paco Editorial: 2014.

[29] PARÂMETROS Curriculares Nacionais: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF,1997. 146 p.

[30] PAVANELLO, Regina Maria. Estudos em Avaliação Educacional, v. 17, n. 32 33, jan./abr. 2006.

[31] POMMER, W.M. A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013. 72 p. Disponível em: <http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+ Did%C3%A1tica+2013.pdf>. Acesso em 19/01/2019.

[32] ROQUE, Tatiana, e PITOMBEIRA, João bosco. Tópicos de História da Matemática. 1ª Ed. SBM, 2012.

[33] SAMESHIMA, D. C. T. Compreendendo a Avaliação da Aprendizagem Matemática. In: BURIASCO, R. L. C. de. Avaliação e educação matemática. Recife: SBEM, 2008, p.109-119.

[34] SANTOS, Valdinéia Melhado dos. Dificuldade de aprendizagem da Matemática: Discalculia, disponível em: https://monografias.brasilescola.uol.com.br/psicologia/dificuldade-aprendizagem-matematica-discalculia.htm

[35] SISTO, F. F. Dificuldade de aprendizagem em escrita: um instrumento de avaliação (Adape). In: Sisto, F.F.; Boruchovitch, E.; Fini, L.D.T.; Brenelli, R. P.; Martinelli, S.C.. (Org.). Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico. 1ed.Petrópolis: Editora Vozes, 2001, v. 1.

[36] SOUZA, Joamir Roberto de, e GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. Contato Matemática 2º Ano, 1ª Ed. São Paulo, FTD, 2016.

[37] Vallar, G. (July 2007). "Spatial neglect, Balint-Homes' and Gerstmann's syndrome, and other spatial disorders". CNS Spectr. 2007; 12:527–36

[38] WOODCOCK, R.W., MCGREW, K. S., MATHER, N. Woodcock-Johnson III: Tests of cognitive abilities. Itasca, IL: Riverside Publishing, 2001.

A ANEXO I – Teste dyscalc

1) Multiplicando 18,975 por 10.

a) 0,18975

b) 1,8975

c) 18,975

d) 189,750

e) Vou tentar adivinhar

2) O que significa o símbolo >?

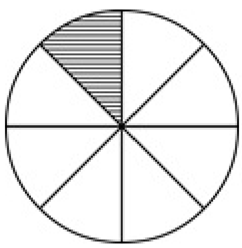
a) Maior que

b) Vire a direita

c) Vá para a próxima página

d) Vou tentar adivinhar

3) A parte sombreada do círculo representa



a) Um quarto b) Um oitavo c) Um quinto d) Vou tentar adivinhar.

4) 0.5 é o mesmo que dizer:

a) 50 b) Metade c) 5 d) Vou tentar adivinhar.

5) Sabendo que são aproximadamente 65km de Londres para Oxford, você tem uma velocidade média de 50km/h aproximadamente. Quanto tempo levaria para completar a viagem?

a) 6.5 horas

b) Seis horas

c) Uma hora e meia

d) 180 minutos

e) Vou tentar .

6) Uma pessoa saudável levaria aproximadamente quanto tempo para caminhar 1,5km ?

a) Uma hora

b) 20 minutos

c) Cinco minutos

d) Vou tentar adivinhar

7) Conte as estrelas:

```
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
* * * * * * * * * *
```

a) 70 b) 80 c) 90 c) Perdi a conta.

8) O valor de R$ 5,29 – R$ 2.46 = ?

a) R$ 2.56 b) R$ 2.83 c) R$ 3.78 d) Vou tentar adivinhar

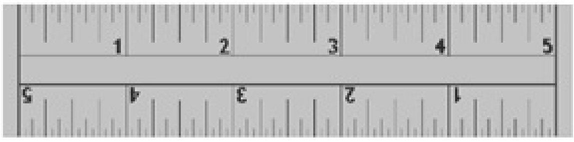
9) Você tem dificuldade em manusear dinheiro?

a) Sim b) Não

10) **Qual é maior?**

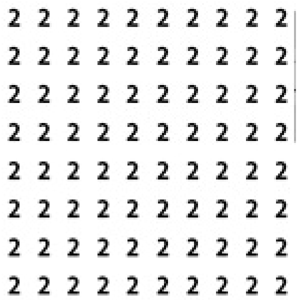
a) Um quarto b) 0.95 c) 28% d) Vou tentar adivinhar.

11) **Qual unidade de medida a régua imperial usa?**



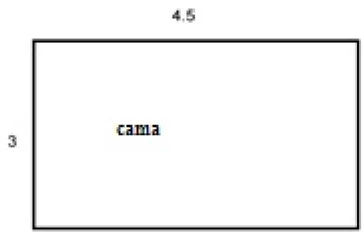
a) Polegadas b) Milímetros c) Vou tentar adivinhar

12) **Some os números:**



a) 130 b) 160 c) 140 d) 180 e) Perdi a conta.

13) **Os números no diagrama provavelmente se referem a:**



a) Polegadas

b) Metros

c) Decímetros

d) Centímetros

e) Vou tentar adivinhar

14) Quantos times venderam mais vans que carros?

Time de vendas	**carros**	**Vans**	**Total**
A	78	50	128
B	106	98	204
C	47	66	113
D	18	18	36
E	8	12	20
F	27	36	63
Total	248	280	

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

f) Vou tentar adivinhar

15) Quantos metros há em 1km?

a) 10

b) 100

c) 1000

d) 10.000

e) Vou tentar adivinhar

16) Quantos milímetros em 1 metro?

a) 10 b) 100 c) 1000 d) 10.000 e) Vou tentar adivinhar.

17) $\sqrt{a}$ **significa:**

a) Maior que

b) Raiz quadrada

c) Correto

d) Vou tentar adivinhar.

18) ∞ **significa:**

a) Oito dividido por 2

b) Infinito

c) Raiz quadrada

d) Vou tentar adivinhar

19) 8^2 **é o mesmo que:**

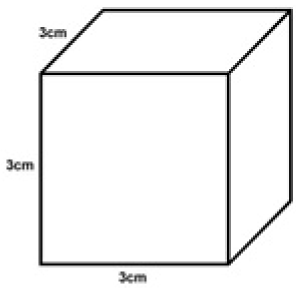
a) Uma hora

b) 64

c) 8 + 2

d) Oito minutos

20) Qual é o volume do cubo?



a) 33cm^3

b) 27cm^3

c) 9cm^3

d) Vou tentar adivinhar.

B ANEXO II - Lista de atividades de PFC

Aluno:

1) Thiago possui 3 blusas diferentes e 2 calças diferentes. De quantas maneiras ele poderá escolher uma blusa e uma calça para se vestir?

2) Antes do início de uma partida de futebol, é verificado se as equipes utilizarão uniformes cujas cores os distingam claramente. Para certa partida de futebol, uma das equipes dispunha de quatro modelos de camisa, dois de calção e três de meião. De quantas maneiras distintas essa equipe pode compor seu uniforme?

3) Em certo shopping há sete portões de entrada/saída. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair desse shopping? E entrar e sair por um portão não utilizado na entrada?

4) Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para a realização de viagens do município A ao município C, com passagem obrigatória pelo município B. Sabendo de que A a B existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre B e C?

5) Na 1ª fase de um campeonato de xadrex organizado em uma escola, cada participante joga uma única vez contra cada um dos outros. Sabendo que foram realizadas 66 partidas nessa fase, quantas pessoas participaram do campeonato?

Obs: Note que um participante não joga contra si mesmo. Além disso, a partida entre os participantes A e B e a partida entre B e A é a mesma.

6) Uma fantasia é composta de vestido, máscara e sapatos, disponíveis nas cores vermelha. Amarela e preta. Sabendo que os sapatos o vestidos devem ter cores diferentes e a máscara é opcional, de quantas maneiras distintas pode-se compor a fantasia?

7) Com os algarismos de 0 a 9, quantos números:

- **a) de quatro algarismos podem ser formados?**
- **b) de cinco algarismos distintos podem ser formados?**
- **c) ímpares de três algarismos podem ser formados?**
- **d) Múltiplos de 5 com seis algarismos podem ser formados?**

C ANEXO III - Lista de atividades de Arranjos

Aluno:

1) Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. o departamento de marketing dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizara três tipos de anúncio para a divulgação dos produtos. outdoor, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anuncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária?

2) Para colorir um mapa-mundi, cada um dos seis continentes será pintado de uma cor diferente. De quantas maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 cores distintas?

3) Para acessar sua conta bancária via internet, uma pessoa tem de cadastrar uma senha composta por 5 caracteres distintos, dentre 32 disponíveis .De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode cadastrar a senha?

4) Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos por duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis) e uma numérica com 5 algarismos(de 10 disponíveis) sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos quantos livros essa biblioteca pode cadastrar?

5) A partir dos algarismos 1,2,3,4 e 8 calcule a quantidade de números:

a) com 4 algarismos que podem ser formados.
b) com 4 algarismos distintos que podem se formados.
c) múltiplos de 4 com 4 algarismos distintos que podem ser formados
d) ímpares de quatro algarismos distintos que podem ser formados.

6) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 7 e 9 quantos números de cinco algarismos distintos menores que 70.000 podem ser formados?

7) um concurso promovido por uma emissora de televisão vai formar uma nova banda de rock. Classificaram-se para etapa final três bateristas, quatro baixistas, cinco guitarristas e dois vocalistas. A banda do concurso será formada por um baterista, um baixista, dois guitarristas e um vocalista. de quantas maneiras pode -se formar a banda, partir dos candidatos finalistas, sabendo que os guitarristas possuem funções diferentes nessa banda?

D ANEXO IV - Lista de atividades de Permutação

Aluno:

1) Os resultados do último sorteio da Mega-Sena foram os números 04, 10, 26, 37, 47 e 57. De quantas maneiras distintas pode ter ocorrido essa sequência de resultados?

2) Na palavra NORTE, quantos anagramas podem ser formados? Quantos começam com vogal?

3) (U.F.Pelotas-RS) Tomando como base a palavra UFPEL, resolva as questões a seguir:

a) Quantos anagramas podem ser formados de modo que as vogais estejam sempre juntas?

b) Quantos anagramas podem ser formados com as letras UF juntas?

c) Quantos anagramas podem ser formados com as letras PEL juntas e nessa ordem?

4) Calcule de quantas maneiras podem ser dispostas 4 damas e 4 cavalheiros, numa fila, de forma que não fiquem juntos dois cavalheiros e duas damas.

5) Em relação aos anagramas da palavra PERNAMBUCO, pergunta-se:

a) Quantos começam por P?

b) Quantos começam por P e terminam por O?

c) Quantos têm as letras R, N, A juntas e nessa ordem?

d) Quantos têm as letras B, U, C, O juntas?

E ANEXO V - Lista de atividades de Combinação

Aluno:

1) De um grupo de 18 atletas de uma equipe de vôlei, o técnico deve selecionar 12 para a disputa de um partida. Considerando que todos os atletas podem atuar em qualquer posição, de quantas maneiras distintas essa seleção pode ser realizada?

2) De quantas maneiras distintas pode-se formar uma comissão com 10 integrantes, a partir de um grupo de 25 pessoas?

3) Uma escola enviará a um congresso 4 de seus 22 professores. De quantas maneiras distintas pode ser formado o grupo de professores que participará do congresso?

.

4) Em certo corredor de um edifício há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De quantas maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas?

.

5) Duas pessoas de um grupo serão escolhidas para representá-lo. Sabendo que essa escolha pode ser feita de 630 maneiras distintas, quantas pessoas formam esse grupo?

.

6) Para tratar de certo paciente, um hospital constituirá uma junta médica a partir dos médicos que lá trabalham. Se essa junta for composta por 5 médicos, o hospital terá 15504 opções de formação da junta. De quantas maneiras distintas essa junta pode ser formada e ela for composta por 6 médicos?

.

7) Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha

.

8) No jogo de basquetebol, cada time entra em quadra com cinco jogadores. Considerando-se que um time para disputar um campeonato necessita de pelo menos 12 jogadores, e que desses, 2 são titulares absolutos, determine o número de equipes que o técnico poderá formar com o restante dos jogadores, sendo que eles atuam em qualquer posição

.

9) Uma escola tem 9 professores de matemática. Quatro deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de 4 são possíveis?

.

10) Quantas saladas de frutas diferentes podemos formar com 5 frutas, se possuo 8 frutas distintas

.