UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Logaritmo, história e aplicações

Joel dos Reis Mizael

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Joel dos Reis Mizael

Logaritmo, história e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Geraldine Góes Bosco

USP – São Carlos
Fevereiro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M618l Mizael, Joel dos Reis
Logaritmo, história e aplicações / Joel dos Reis Mizael; orientador Geraldine Góes Bosco. -- São Carlos, 2019.
45 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Logaritmo. 2. História dos logaritmos. 3. Aplicações. I. Bosco, Geraldine Góes, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Joel dos Reis Mizael

Logarithm, history and application

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Professional Master's Program in Mathematics in National Network, for the degree of Master in Science. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Geraldine Góes Bosco

USP – São Carlos
February 2019

Dedico este trabalho primeiramente a Deus,
aos meus pais Gessi(in memoriam) e Mizael,
à minha super querida esposa Neiva, aos queridos filhos Sander e Leandro e,
especialmente à minha eterna professora Eleozina que por toda a minha vida me inspirou como professor.

AGRADECIMENTOS

Os agradecimentos são direcionados a todos os professores do Profmat USP Ribeirão, meus queridos mestres que se dedicaram a ensinar e compartilhar todos os seus conhecimentos, especialmente à minha orientadora Geraldine Góes, que fez toda a diferença na orientação de minha dissertação, à Helena Ebert que, com muita paciência, me deu todo o suporte com as normas ABNT com o programa Látex e todos aqueles que contribuíram para que a produção desse trabalho fosse possível. Os agradecimentos especiais são direcionados à USP - Universidade de São Paulo - unidade Ribeirão Preto, que me deu a oportunidade de cursar mestrado nesta renomada instituição, por proporcionar um ambiente saudável para todos nós alunos, além de estimular a criatividade, a interação e a participação nas atividades acadêmicas. À Capes pois "o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

"Você precisa ser a mudança que quer no mundo"
(Mahátma Gándhi)

RESUMO

MIZAEL, J. R. **Logaritmo, história e aplicações**. 2019. 45 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Logaritmos são partes integrantes de muitas formas de tecnologia, e sua história e desenvolvimento ajudam a ver sua importância e relevância. Os logaritmos têm sido parte da matemática há vários séculos, mas o conceito de logaritmo mudou notavelmente ao longo dos anos. O logaritmo tem sido uma ferramenta para matemáticos, físicos e engenheiros ao redor do mundo, simplificando seus cálculos. A ideia de logaritmo existe desde o início do século XVII, como uma forma de facilitar a divissão e a multiplicação de números grandes. O logaritmo tomou diferentes formas em sua jornada para se tornar o que é hoje e houve muitos matemáticos, tais como John Napier, Henry Briggs e Leonhard Euler que fizeram contribuições significativas para o assunto. Este trabalho aborda as origens dos logaritmos e sua utilidade nos tempos antigos e modernos.

Palavras-chave: Aplicações, História dos Logaritmos, Logaritmos.

ABSTRACT

MIZAEL, J. R. **Logarithm, history and application**. 2019. 45 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Logarithms are an integral part of many forms of technology, and their history and development help to see their importance and relevance. Logarithms have been part of mathematics for several centuries, but the concept of logarithm has changed markedly over the years. The logarithm has been a tool for mathematicians, physicists and engineers around the world, simplifying your calculations . Having existed since the early seventeenth century, the logarithm changed a lot since its introduction into the world of mathematics, it began as a way to make multiplication and division of large numbers an easier way to look up values in a table. and then adding them for its addition and sustenance to the division and from there it evolved into the logarithm today known as the inverse of the exponential. The logarithm took different forms on its journey to become what it is today and there were many mathematicians, such as John Napier, Henry Briggs and Leonhard Euler who made significant contributions to the matter. This paper addresses the origins of logarithms and their usefulness in ancient and modern times.

Keywords: Applications, History of Logarithms, Logarithms.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Entre os séculos XVI e XVII, no auge da expansão do comércio causado pelas grandes navegações e pelo desenvolvimento da astronomia, os cálculos eram intensos e demorados devido à dificuldade de multiplicação ou divisão de grandes números. Então, exatamente nessa época, surgiram os logaritmos como um meio de simplificar esses cálculos, transformando as complexas operações de multiplicação (divisão) em simples operações de adição (subtração). No século atual, apesar das transformações tecnológicas, se faz necessário entender ideias básicas e fundamentais, como os logaritmos, para a compreenção dos fenômenos naturais e econômicos.Computadores dão respostas imediatas, mas as análises ainda dependem do cérebro humano em tomadas de decisões. Sendo os logaritmos de muita utilidade prática, torna-se instigante estudar suas origens e suas aplicações, desde o século XVI até o século presente. Além disso, os logaritmos se fazem presentes no ensino básico e são cobrados nos principais exames vestibulares, como o ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio e a Fuvest.

1.1 Escolha do Tema

A matemática é o grande desafio do binômio ensino/aprendizagem, pois ela requer muita abstração por parte de quem ensina e de quem aprende. Normalmente se pergunta para quê estudar determinado conteúdo se o mesmo não será usado no dia a dia, ou se for, tem-se a tecnologia (calculadoras, computadores, celulares) que calcula sem nenhum esforço. Sendo assim, a opção pelo assunto Logaritmos se deu com a intenção de desmistificar essa retórica em seu caso específico, trazendo suas utilidades prátidas para o dia a dia, mostrando que estão atrelados a várias áreas e eventos, tais como na como economia e geofísica.

1.2 Motivação

A motivação surgiu a partir de uma atividade em sala de aula, com alunos de uma turma do terceiro ano do ensino médio, que propunha uma pesquisa sobre logaritmos. A atividade foi dividida em três momentos:

1º Momento Pesquisa em livros de história da matemática, enciclopédias e internet, respodendo a questões do tipo: Como surgiram os logaritmos? Para que eram utilizados? Em que época surgiram? Quem os criou e com que finalidade?

2º Momento Apresentação de grupos de cinco alunos, cada, respondendo a três questões: O que sabemos de logaritmos? O que queremos saber sobre logaritmos? Quais são suas aplicações?

3º Momento Após a apresentação, houve debates sobre questões que mais despertaram a curiosidade dos alunos e do professor: Como os logaritmos diminuem os números grandes? Qual é a utilidade prática dos logaritmos? Como utilizar tabelas e porque utilizá-las, dado o advento das calculadoras? O que é mudança de base? O que são logaritmos decimais? Como transformar multiplicação e divisão em adição e subtração, respectivamente?

4º Momento A partir desses e outros questionamentos, tiveram contato com o livro didático e, após atenta leitura, resolveram os primeiros exercícios de aplicação e, em seguida, alguns exercícios propostos.

Nos debates alguns alunos fizeram observações como:"Naquela época não existiam calculadoras, arcaicamente tinham o ábaco e alguns outros sistemas rudimentares de cálculos, então foi muito útil a invenção dos logaritmos"; "No ocidente, até meados do século XX, ainda recorriam às tabelas de logaritmos, mas qual é a importância hoje, com o advento das calculadoras, seguidos por microcomputadores e celulares cada vez mais sofisticados?"

Muitas perguntas foram respondidas com outras perguntas e muitas outras respostas, indicando que nossas pesquisas deveriam continuar, pois os logaritmos continuam sendo utilizados em várias áreas do cotidiano e da ciência.

1.3 Problemática

Há uma nítida diferença na forma de ensinar conteúdos matemáticos na educação básica entre as escolas públicas e privadas. A escola pública adota um livro didático de autores consagrados como Gelson Iezzi e outros (IEZZI *et al.*, 2011), cujo título é revisto a cada dois anos, e segue a BNCC - Base Nacional Comum Curricular - o qual indica as competências e habilidades para o ensino básico: Ela segue a sequência sumária dos livros, subdivididos nas três séries (1ª, 2ª e 3ª) do ensino médio. O aluno dessa escola aprende os conceitos de Potenciação e Radiciação no ensino fundamental, depois aprende os conceitos superficialmente de exponencial e logaritmo no 1º ano do ensino médio e vai usá-los no 3º ano, principalmente porque cai nas provas do ENEM e de outros vestibulares. É nesse momento que o aluno dá-se conta de que nunca viu o conceito de logaritmo de forma consistente.

A escola privada, geralmente, não adota o livro didático, adota apostilas elaboradas por seus docentes, constituindo um conjunto de conteúdos compactados com a finalidade explícita que é a aprovação em vestibulares. Neste tipo de escola o aluno vê todo o conteúdo do ensino médio nos dois primeiros anos (1ª e 2ª séries) e depois revê tudo no 3º ano (3ª série), razão pela qual muitos treineiros (alunos do 2º ano concluído) são aprovados em vestibulares, pois já viram todo o conteúdo do ensino médio. Logo, ao término do 3º ano, o aluno que viu o conteúdo novamente, vai para o vestibular com os logaritmos na memória, usa e até se sai bem, mas esquece, pois decorou fórmulas prontas. Os estudantes de qualquer grau e de qualquer nível de aprendizado, em sua maioria, manifestam dificuldades no aprendizado de logaritmos e não entendem como esse tópico pode ser utilizado na prática. Como apresentar aos alunos, de uma forma amigável, os conceitos e as demonstrações práticas de aplicação dos logaritmos?

É possível que haja resistência ao aprendizado do tema, em função do conceito prévio de que a matemática é uma disciplina de conteúdo de difícil compreensão, de elevado teor teórico e de pouca aplicação prática. Os métodos de ensino normalmente utilizados não privilegiam o entendimento conceitual e nem a sua importância antes da passagem da teoria, o que de fato dificulta a sua associação com o mundo real. Ao apresentar a história dos logaritmos, os benefícios, oriundos de sua criação, na simplificação de cálculos complexos e as aplicações práticas que derivam de seu conceito,espera-se tornar mais aceitável o entendimento empírico do tópico.

Neste contexto, este trabalho visa tornar o conceito matemático de logaritmo mais acessível, desmistificando sua complexidade e demonstrando sua utilidade, a partir de uma reflexão de como era o mundo dos cálculos, em diferentes áreas do conhecimento humano, antes da sua invenção. A realidade tecnológica tem mostrado que o raciocínio perdeu espaço para as respostas prontas das máquinas e, ao mesmo tempo, a escola tem realizado um papel de mera coadjuvante no ensino-aprendizagem. Não estamos formando seres pensantes. A elaboração dessa pesquisa partiu da tentativa de resgatar a história da criação ou descobrimento dos logaritmos, como uma modalidade de cálculo que, paradoxalmente, também abriu caminhos para as modernas tecnologias. Dessa forma, buscando 'em algum lugar do passado', presentemente essa busca tornou-se uma bandeira levantada encontrando no tema, grande desafio para professores de matemática qual seja, direcionar a aprendizagem contrariando e ao mesmo tempo fazendo uso das novas tecnologias. Portanto,a escolha deste tema tem por finalidade, uma maior discussão sobre a aliança entre o novo e o antigo, na construção do conhecimento e não só dos saberes.

1.4 Objetivos

1.4.1 Obetivo Geral

Analisar a conexão entre a obtenção do conhecimento através da aprendizagem cognitiva e a obtenção fácil e pronta dos saberes, relacionando a teoria dos logaritmos com sua utilização prática em diferentes áreas da atividade humana, a fim de mostrar a proximidade da matemática com o dia - a - dia.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Abordar os principais conceitos envolvidos no aprendizado dos logaritmos.
- Demonstrar algumas das aplicações práticas de logaritmos.
- Discutir os porquês do uso de logaritmo no processo de ensino-aprendizagem.
- Refletir sobre problemas de lacunas na aprendizagem de logaritmos.
- Aprender no dia a dia, como o aluno pode construir o conhecimento além da calculadora.
- Observar, identificar, analisar e diagnosticar as principais dificuladades em aprender, devido ao desconhecimento prévio de potenciação e radiciação.
- Estimular os estudantes a conhecer as aplicações de logaritmos.
- Despertar nos professores o reconhecimento do resgate histórico do conhecimento matemático.

CAPÍTULO

2

HISTÓRIA

2.1 História dos Logaritmos

2.1.1 A tabela de potências de Arquimedes

Arquimedes (287 a.c. - 212 a.c.), um dos maiores matemáticos da antiguidade, nasceu e viveu na Grécia antiga, no século 3 a.c.. Dentre suas inúmeras contribuições para o desenvolvimento da ciência, ele contribuiu para a elaboração da Potenciação. Arquimedes se propôs a calcular quantos grãos de areia seriam necessários para encher o Universo, o qual era considerado um sistema de esferas ao redor do Sol e, no qual os planetas tinham órbitas fixas e circulares. Com seus parâmetros particulares, ele calculou os volumes V_u do Universo e V_g do grão médio de areia. Fez a divisão $\frac{V_u}{V_g}$ e, logicamente obteve um número enorme, impossível de ser usado na prática, devido à enorme quantidade de algarismos. Ele observou que no resultado apareciam muitos fatores 10 que se multiplicavam e à essa quantidade de fatores 10 deu o nome de 'miríades', o que hoje é conhecido como 'expoente'. Sendo assim, $10 \times 10 \times 10 \times \cdots \times 10$ tem-se n fatores 10, logo n é o número de vezes que o 10 aparece na multiplicação; visto num quadro, tem-se que: a quantidade de grãos que caberiam no Universo é igual a sequência da tabela abaixo, Arquimedes chegou

n	Resultado
1	10
2	10^2
3	10^3
4	10^4
5	10^5
n	10^n

Tabela 1 – Miríades

ao número 10^{51}. Sua persistência culminou na elaboração da potência e na formulação de leis e propriedades das mesmas, com o auxílio de tabelas, com a matriz acima, cujos elementos da primeira linha são as miríades (expoentes) e os elementos da segunda linha são as potências (resultados) de base dez, isto é, 10^n.

Então foi assim que Arquimedes revolucionou, transformando a multiplicação de grandes números com resultados astronômicos, em soma de pequenos números, os expoentes. Por exemplo, seja multiplicar 10000 por 10000000. Segundo Arquimedes, na tabela somam-se os elementos da primeira linha que se localizam imediatamente acima dos números 10000 e 10000000, que são, respectivamente 4 e 7. Como $4+7=11$, toma-se o resultado logo abaixo de 11, na segunda linha, que é 100000000000; logo $10000 \times 10000000 = 100000000000$. Daí surgiu uma das primeiras propriedades das potências.

2.2 John Neper (1550 - 1617)

John Napier (em latim: Loannes Neper - daí o codinome: John Neper) era um ávido matemático (porém não era matemático profissional), nascido na Escócia, (MAIOR, 2008) perto de Edimburgo, notório por suas contribuições para a geometria esférica. Era também físico, astrólogo, astrônomo e teólogo. Foi ele que idealizou e projetou uma calculadora mecância e o primeiro a usar e popularizar o ponto decimal para separar a parte inteira da parte fracionária de um número. Na área de astronomia, fez muitos cálculos com suas observações e pesquisas, cálculos longos que, muitas das vezes, envolviam funções trigonométricas. Depois de muitos anos construindo pacientemente o conceito, ele finalmente desenvolveu o conceito pelo qual é mais conhecido: o conceito de logaritmos. Nepier usou como base, as sequências de potências sucessivas de um número de Stiefel, cinquenta anos antes, e das de Arquimedes do século3 a.C. Em seu livro, publicado em 1614 - Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio (Descrição do maravilhoso cânon dos logaritmos), Neper explicou que havia uma necessidade de logaritmos para a prática matemática que envolvia as multiplicações, divisões, extrações quadradas e cúbicas de grandes números. Essas operações eram cansativas e gastavam muito tempo, consequentemente eram sujeitas a muitos erros. Então, John Neper buscando remover esses obstáculos, foi o primeiro matemático a conceber a ideia do logaritmo. Em grego: logos significa proporção e arithmos significa números.

Durante o tempo de Napier, muitos cálculos astronômicos exigiam multiplicação bruta e divisão de números muito grandes. Os astrônomos do século XVI usavam frequentemente a *prostafaerese*, um método de obter produtos usando identidades trigonométricas para transformar produtos em somas ou diferenças, utilizando as tabelas de funções trigonométricas, que são conhecidas desde os tempos de Ptolomeu [1].

[1] Cláudio **Ptolomeu** foi um cientista grego que viveu em Alexandria entre 100 e 160 d.C. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical.

As identidades trigonométricas são mostradas na tabela a seguir.

Tabela 2 – Identidades trigonométricas

$2senA \times cosB$	$sen(A+B)+sen(A-B)$
$2cosA \times senB$	$sen(A+B)-sen(A-B)$
$2cosA \times cosB$	$cos(A+B)+cos(A-B)$
$2senA \times senB$	$cos(A-B)-cos(A+B)$

Fonte: Elaborado com base em (KATHLEEN; MONTELLE,)

2.2.1 Joost Bürgi (1532 - 1632)

Burgi era matemático suíço e tambén relojoeiro que, na mesma em que Newton e Leibniz criavam o cálculo,ele, paralelamente a Neper também procurou uma maneira de de simplificar operações matemáticas mais complicadas, criando logaritmos semelhantes a Neper, tentando simplificar as operações de multiplicação, divisão, raízes quadradas e cúbicas, colocando-as juntas em uma única tabela para logaritmos. Pelo fato de Burgi ter escrito seus trabalhos em alemão,língua que muitos não entendiam e de não os ter compartilhado e nem publicado, os mesmos receberam menos crédito como fundador dos logaritmos, créditos que foram atribuídos a Neper, que publicou suas descobertas em 1614. Porém, as tabelas de logaritmos foram publicadas por Burgi, em 1620.

2.2.2 Henry Briggs (1561 - 1630)

Briggs foi um matemático inglês e o primeiro professor de geometria da faculdade de Greshan e, posteriormente professor em Oxford. Entusiasta dos logaritmos, chegou a visitar Neper em Edimburgo para discutir a nova invenção. Juntos criaram uma nova tábua de manuseio mais fácil usando o sistema de numeração decimal. Dessa visita, nasce a ideia do logarimto de um (1) ser igual a zero (0),e ambos concordam e decidem que a base mais conveniente para um logaritmo é a base 10. Assim, como na versão de hoje, $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2, ..., \log(10.000.000.000) = 10, ...$, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, como os de hoje em dia. Briggs chegou a construir uma tabela, que foi usada até o século 19.

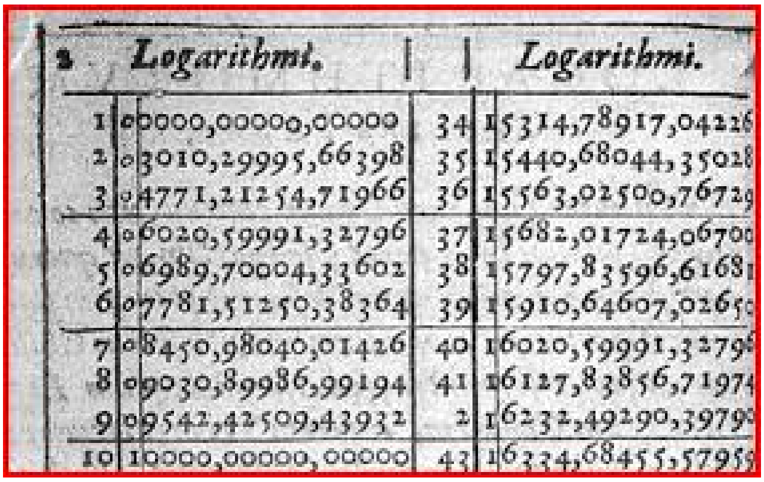
2.2.2.1 Construção da Tábua de Logaritmo de Brigss

O trabalho de construção da primeira tábua de logaritmos foi muito árduo, usando o método de aproximações sucessivas.

A título de exemplificação, podemos mostrar o processo de aproximação para encontrar o $\log 2$.

Se $\log 2 = x$, temos que $10^x = 2$.

Figura 1 – Primeira Tábua de logaritmos de Briggs



2	Logarithmi.		Logarithmi.
1	00000,00000,00000	34	15314,78917,04226
2	03010,29995,66398	35	15440,68044,35028
3	04771,21254,71966	36	15563,02500,76729
4	06020,59991,32796	37	15682,01724,06700
5	06989,70004,33602	38	15797,83596,6168
6	07781,51250,38364	39	15910,64607,0265
7	08450,98040,01426	40	16020,59991,3279
8	09030,89986,99194	41	16127,83856,7197
9	09542,42509,43932	2	16232,49290,3979
10	10000,00000,00000	43	16334,68455,5795

Fonte: Baricentro da mente

Inicialmente, podemos situar o número 2 entre duas potências de 10, a_1 e a_2, com expoentes inteiros e sucessivos. Teremos: $a_1 = 1$ e $a_2 = 10$.

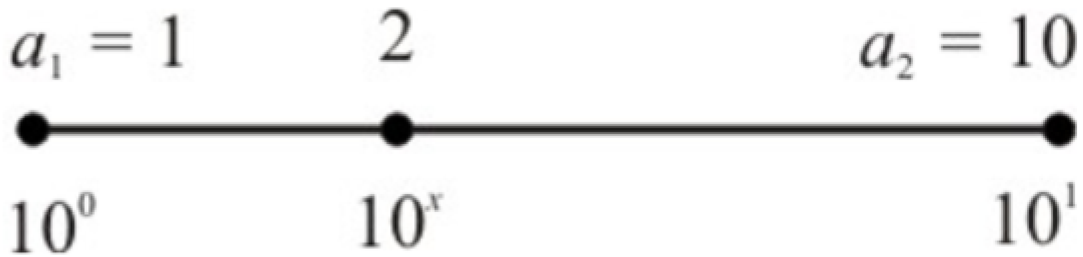
Assim: $1 < 2 < 10$.

Então: $10^0 < 10^x < 10^1$.

Logo: $0 < x < 1$, ou seja $0 < \log 2 < 1$.

Em uma representação esquemática, temos:

Figura 2 – Representação da primeira aproximação de $\log 2$



Fonte: Baricentro da mente

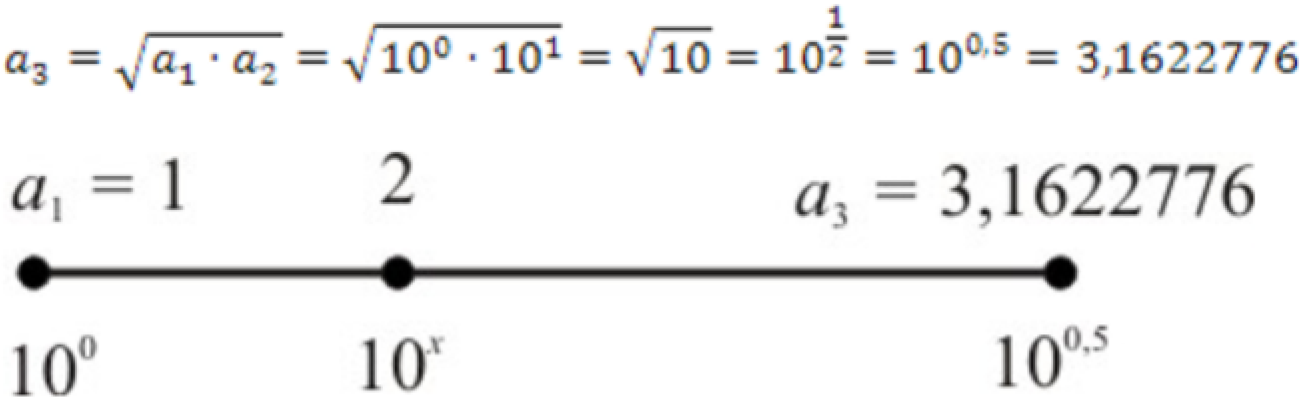
O próximo passo é calcular a média geométrica (a_3) entre a_1 e a_2 e localizá-la na representação esquemática. Dessa forma teremos:

Assim, conseguimos obter uma melhor aproximação, uma vez que:

$0 < x < 0,5$. Então: $0 < \log 2 < 0,50000$

Sucessivamente calculamos a média geométrica entre os pontos até chegar à seguinte

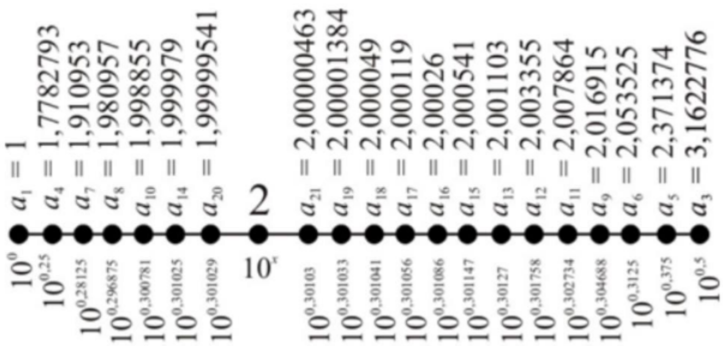
Figura 3 – Representação da segunda aproximação de $\log 2$



Fonte: Baricentro da mente

representação esquemática.

Figura 4 – Representação das sucessivas aproximações de $\log 2$



Fonte: Baricentro da mente

Dessa forma chegamos a uma aproximação satisfatória para $\log 2 = 0,30103$, com precisão de 5 casas decimais.

Agora podemos imaginar o trabalho de Briggs que construiu sua tabela apresentando os logaritmos dos números inteiros de 1 a 1000, com precisão até a 14 casa decimal.

2.2.3 Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz, Leonhard Euler

Muito tempo depois, outros matemáticos tentaram encontrar logaritmos de números imaginários ou negativos, que Neper não havia encontrado. Bernoulli e Leibniz tiveram seus trabalhos examinados e refutados por Euler. Eles afirmavam que o logaritmo natural de -1 ou de i, também era igual a zero, o que não podeser verdade, já eue o logaritmo de um número imaginário deve ser também imaginário. Usando propriedades de logaritmos e exponenciais, trigonometria e números complexos, Euler mostrou que um único número real negativo produz uma infinidade de logaritmos, mas nenhum deles é real. Então ele afirmou não ser possível que um logaritmo de um número negativo produza um número real. Euler concluiu: "Está claro claro que cada número positivo tem apenas um logaritmo real, e que todos os seus infinitos logaritmos são imaginários. Os logaritmos de todas as quantidades negativas e imaginárias são números imaginários porque nenhum valor real do logaritmo corresponde a essas quantidades."

O logaritmo foi moldado pelas ideias de vários matemáticos que queriam tomar paret em facilitar cálculos, porém foi Euler o primeiro a descobrir a relação inversa entre o logaritmo natural e a função exponencial e^x.

2.2.4 A invenção dos logaritmos

Partindo da tabela de potências (inserir tabela), composta de duas sequências crescentes horizontais, sendo que a primeira linha é uma progressão aritmética, cujos elementos são os expoentes (miríades para Arquimedes) de um número, e a segunda linha é uma progressão geométrica, cujos elementos são as potências (resultados) desse mesmo número, Neper considerou preencher as lacunas entre os números inteiros da segunda linha da tabela; então tomou um número muito próximo de um (1), escolhendo o valor $(1-10^{-7}) = 0,9999999$. Assim, os termos na progressão de potências ficariam bem próximos.

Neper multiplicou cada potência por 10^7 para evitar casas decimais e criou uma nova tabela, com a primeira linha formada pelos expoentes que ele chamou de L, e a segunda linha formada pelos números N, que ele escreveu assim:

$$N = 10^7(1-\frac{1}{10^7} = 10^7(1-10^{-7})^L$$

daí surgiu o logaritmo , tal que L é o logaritmo do número N.

Neper concluiu que: fazendo $L = 0$, implicaria em $N = 10^7$, o que significaria que o logaritmo de 1 fosse igual a zero, que o logaritmo de $10^7(1-10^{-7}) = 9999999$ é igual a um (1), e assim sucessivamente.

Neper ainda não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, com isso sua definição para logaritmo era bem diferente da atual (ou das atuais). Logo, dividindo os logaritmos por 10^7, surgiria um sistema de logaritmos de base $1/e$, pois $(1-10^{-7})$ fica bem próximo do $\lim_{n\to\infty}(1-10^7) = 1/e$.

CAPÍTULO

3

TEORIA DOS LOGARITMOS

3.1 Bases padrão

Existem duas bases que são usadas muito mais comumente do que quaisquer outras e merecem menção especial. Essas são a **base 10** e a **base e**. Logaritmos para base 10, $\log 10$, são frequentemente escritos simplesmente como log sem escrever explicitamente uma base para baixo. Portanto, se você vir uma expressão como $\log x$, poderá assumir que a base é 10.

A segunda base comum é **e**. O símbolo **e** é chamado de constante exponencial e tem um valor aproximadamente igual a 2,718. Este é um número como π no sentido de que tem uma expansão decimal infinita. A base **e** é usada porque esta constante ocorre frequentemente na modelagem matemática de muitas aplicações físicas, biológicas e econômicas.

Os logaritmos para base e, $\log_e$, são geralmente escritos simplesmente como $\ln$. Se você vir uma expressão como $\ln x$, pode assumir que a base é e. Esses logaritmos também são chamados de logaritmos Naperianos ou naturais.

Embora o logaritmo comum tenha muitos usos práticos, outro logaritmo é amplamente utilizado em campos que vão do cálculo à biologia. O logaritmo natural é da forma $\log_e a = n$.

A base de um logaritmo pode ser qualquer número maior que 1, mas o uso de **e** traz várias vantagens (LOWAN, 2002). A definição de **e** pode parecer um pouco estranha no começo, mas acontece que **e** não só aparece frequentemente na natureza, mas também faz logaritmos naturais as derivadas mais simples de todos os sistemas logarítmicos (EVANS, 1939).

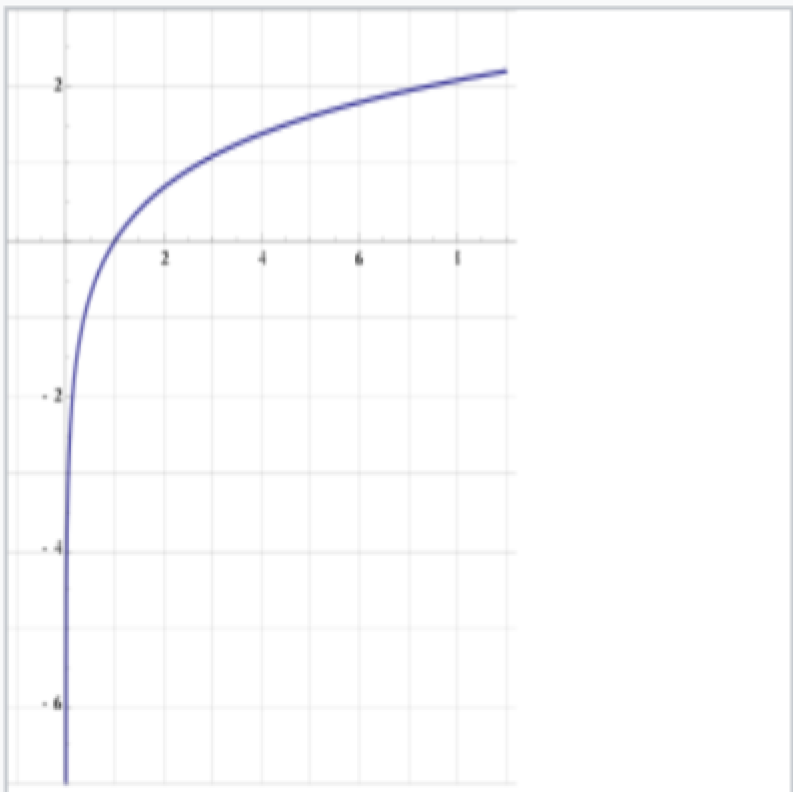
Várias soluções para problemas matemáticos aplicados podem ser expressas como potências de **e** o fluxo de eletricidade através de um circuito, decaimento radioativo, crescimento bacteriano, etc.(LOWAN, 2002).

O logaritmo natural é o logaritmo de base **e**, onde **e** é um número irracional aproximadamente igual a 2,718281828459045... chamado de **número de Euler**(EULER, 1751). O logaritmo natural é definido para todos os números reais estritamente positivos x e admite uma extensão como uma função complexa analítica em $\mathbb{C}^*$. Em termos simples, o logaritmo natural é uma função que é o expoente de uma potência de **e**, e aparece frequentemente nos processos naturais (o que explica o nome "logaritmo natural"). Esta função torna possível o estudo de fenômenos que evoluem de maneira exponencial.

Apesar do logaritmo natural ser usualmente chamado de logaritmo neperiano, do nome de seu inventor, o matemático escocês John Napier (ou John Napier), este utilizou a base $\frac{1}{e}$ e não a base e.

É, portanto, a função inversa da função exponencial.

Figura 5 – Gráfico 1 – Logaritmo Natural



Fonte: Lowan (2002)

O logaritmo natural surgiu de modificações dos logaritmos de Napier feitos por John Speidell, um professor de matemática da Inglaterra. Em 1622 ele publicou o livro New Logarith com logaritmos de tangentes, senos e secantes em um formato que mostrava logaritmos naturais (exceto que ele havia omitido pontos decimais). Por exemplo, ele deu

$\log 10 = 2302584$, que seria escrito hoje como $\log 10 = 2,302584$ (Cajori, 1893).

3.2 A Função logarítmica

Do que vimos no capítulo anterior já há uma ideia inicial de uma função bionívoca definida em $\mathbb{R}^+$ assumindo valores em $\mathbb{R}$. Considerando-se as propriedades básicas para logaritmos a função real logarítmica fica definida pelas duas propriedades fundamentais a seguir (LIMA, 2016):

1. A função $\log$ é uma função crescente, pois se $x < y$, então $\log(x) < \log(y)$;
2. $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ para quaisquer $x, y \in R^+$.

Para ambos os casos chama-se logaritmo de x, para todo $x \in R^+$.

Todavia, outras propriedades derivam dessas duas fundamentais, referidas acima, as quais seguem descritas por Elon Lages (LIMA, 2016); algumas das quais serão demonstradas naturalmente:

Propriedade 1 Toda função logarítmica é uma função injetora, pois números positivos diferentes, no domínio, têm relação biunívoca com logaritmos diferentes no contradomínio. Logo, para $x \neq y$, tal que $x, y \in R^+$ implica que $\log(x) \neq \log(y)$.

Propriedade 2 Considerando que $\log(x.y) = \log(x) + \log(y)$ e fazendo $x = y = 1$, vem que: $\log(1.1) = \log(1) + \log(1)$, isto é, $\log(1) = 2.\log(1)$; sendo assim, $\log(1) = 0$.

Propriedade 3 Para números reais positivos crescentes, tal que $0 < x < 1 < y$, vem que $\log(x) < \log(1) < \log(y)$. Não existe $\log(0)$. Então conclui-se que: números positivos e menores do que 1, têm logaritmos negativos; números maiores do que 1, têm logaritmos positivos.

Propriedade 4 Das propriedades já citadas, sabe-se que $\log(1) = 0$ e $\log(x.y) = \log(x) + \log(y)$. Fazendo $y = \frac{1}{x}$ vem que: $\log(x.\frac{1}{x}) = \log(x) + \log(\frac{1}{x}); \text{mas} \log(x.\frac{1}{x}) = \log(1) = 0$, logo $0 = \log(x) + \log\left(\frac{1}{x}\right)$; então daí surge a propriedade: $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$, para todo $x > 0$.

Propriedade 5 Tomando a propriedade $\log(x.y) = \log(x) + \log(y)$, fazendo $y = \dfrac{1}{z}$, vem que $\log(x.\dfrac{1}{z}) = \log(x) - \log(z)$, ou seja, para todo $x, z \in R^+$, vale a propriedade: $\log(\dfrac{x}{z}) = \log(x) - \log(z)$.

Propriedade 6 Dado que $\log(x.k) = \log(x) + \log(k)$, se $k = y.z$, tem-se que: $\log(k) = \log(y.z) = \log(y) + \log(z)$; então $\log(x.k) = \log(x.y.z) = \log(x) + \log(y) + \log(z)$. Portanto, para o logaritmo do produto de n fatores iguais a x, tem-se como resultado, a soma de n fatores iguais a $\log(x)$, isto é: $\log(x.x.x...x) = \log(x) + \log(x) + \log(x) + ... + \log(x)$, que se resume na propriedade: $\log(x^n) = n.\log(x)$. Por extensão, n pode ser um número: natural (já demonstrado), inteiro negativo ($n = -m, \text{logo}, \log(x^{-m}) = -m.\log(x)$), racional (do tipo $n = \frac{p}{q}$, tal que $p \in Z$ e $q \in N$)e irracional.

A função logaritmica é uma função injetora e sobrejetora, formalizando a ideia já intuitivamente discutida anteriormene e usada para construir as tabelas de logaritmos. Prova-se que a função logarítimica é injetora a partir do fato dela ser crescente. A demonstração de que é sobrejetora é um pouco mais delicada e precisa de um resultado de acordo com o Lema 1, a seguir:

Seja $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função logarítimica; dados arbitrariamente dois números reais u e v, existe $x > 0$ tal que $u < \log(x) < v$. Este Lema diz que todo intervalo aberto $]u, v[$, tem pelo menos um valor $\log(x)$ da função $\log$, porém o teorema que diz que toda função logarítimica é sobrejetora assegura que o intervalo I inteiro seja formado por valores da função $\log$. Outro ponto que é pouco discutido e não aparece nos livros didáticos do ensino médio, são os expoentes irracionais. O que significa elevar o número 2, por exemplo, a $\sqrt{2}$? Ou elevar 10 a π. O assunto pode ser abordado no segundo grau pelo professor, em termos de desafio por relacionar os conceitos de números irracionais e de logaritmos, e pode despertar o interesse dos alunos mais avançados e interessados em matemática.

3.3 Aplicações de logaritmos

3.3.1 Curiosidades sobre logaritmos

3.3.1.1 Guerras

As guerras são classificadas de acordo com o número de mortos e menciona-se a magnitude 3, 4 ou 7, para indicar o expoente que, em base 10, indica o número de homens mortos aproximadamente, isto é, em suma, o logaritmo na base 10, da quantidade de homens mortos. Portanto, se, ao ouvir que uma guerra tem uma magnitude dupla, em relação a uma guerra anterior, deve-se alarmar porque, no que diz respeito ao número de homens mortos, essa guerra teve muito mais que o dobro da quantidade da guerra anterior. Por exemplo, uma guerra de magnitude $M = 3$ terá pouco mais de de mil vítimas, enquanto que uma guerra de magnitudde $M = 6$, terá mais um milhão de mortos.

3.3.1.2 Evazão Fiscal

No campo financeiro, o último trabalho para encontrar evasores fiscais, está conectado com os logaritmos e o matemático Mark Nigrini trabalhou nele usando a lei descoberta em 1881 pelo matemático Simon Newcomb, depois formalizada pelo físico Frank

Benford em 1938. Newcomb tinha notado que na biblioteca da Universidade as tabelas dos logaritmos, muito usadas, eram mais espinhosas no começo do que no final e deduziu que os números usados nos cálculos de seus colegas mais frequentemente começavam com 1 de 2, com 2 de 3 etc. A partir dessa observação, ele obteve uma lei empírica de distribuição dos números usados pelos cientistas que resumiu em uma fómula de probabildade. Benford testou a fórmula usando vários dígitos de dados numéricos. Ele notou que nem todas as tabelas de dados obedecem à lei: os dados mais ordenados, como um exemplo para a tabela contendo os quadrados dos números, não respeitam a lei, enquanto as tabelas mais desinteressadas a respeitam quase completamente. Nigrini usou a lei de Benford elaborando programas que permitem encontrar distribuições numéricas suspeitas na declaração de renda: na verdade, quando uma pessoa tenta inventar uma sequência de números acidentais para simular sua situação financeira, ele obtém alguns números correlacionados entre si. Desta forma, os evasores fiscais, produzem rendimento de retorno de imposto que analisaram os evidentes desvios notáveis da lei de Benford. Portanto, para saber se o evasor compilou honestamente a declaração de imposto de renda, é suficiente controlar a frequência dos diversos números usados para escrever os números.

3.3.1.3 Astronomia

Além disso, os logaritmos, na astronomia, são usados na definição de Magnitude de uma estrela. A magnitude estelar é logarítmica e isso está de acordo com o quanto acontece em nossos olhos, onde a resposta aos impulsos luminosos é logarítimica (e não linear). Desta forma, podemos ver uma luz fraca e um grande raio. O primeiro a falar sobre Magnitude Estelar foi Ipparco de Nicea (300 a.C.). Ele definiu as estrelas mais brilhantes como as maiores, aquelas que acabamos de ver na sexta grandeza. As estrelas da segunda grandeza eram aproximadamente duas vezes e meia mais fracas que as anteriores. Hoje uma estrela de magnitude 1 é 100 vezes mais brilhante do que uma magnitude de 6. Então, se quisermos saber a relação exata de brilho entre uma magnitude e outra, devemos dividir 100 em 5 partes em proporção geométrica, de modo que a relação é constante entre uma parte e com àquela imediatamente anterior. Portanto, tomando esses números como base para alguns logaritmos, que chamaremos logaritmos estelares, escrevemos a progressão 1, 2.512; 512; 6.310; 15.849; ... Os números indicados representam as potências sucessivas de 2.512. Desta última sequência podemos ver que os seguintes números naturais que são usados para a magnitude não são outros senão que os logaritmos (os expoentes) que devem elevar a base 2.512 para obter o valor do brilho de uma estrela.

3.3.1.4 Terremotos

Os logaritmos também estão ligados a terremotos. A escala Richter, de fato, mede a magnitude de um terremoto com base na quantidade de energia liberada pelo epicentro. É importante saber que a escala usada é logarítmica porque um terremoto de magnetude 8 não é duplamente mais desastroso do que um de magnetude 4. Trabalhamos com expoentes assim, 10^8 representa $10000x10^4$, o que é 10 mil vezes mais desastroso.

3.3.2 Logaritmos no mundo real

Conforme apresentado ao longo desse trebalho, logaritmos estão por toda parte. Quando falamos em 'dois dígitos', 'ordem de grandeza', 'taxas de juros', por exemplo, estamos descrevendo números em termos de potências, ou seja, conforme visto, um logaritmo. Tomando como exemplo a taxa de juros, podemos dizer que se trata do logaritmo do crescimento de um investimento ou uma dívida. Trazendo a definição para o mundo real, podemos dizer que os logaritmos encontram a causa de um efeito, ou seja, a entrada para alguma saída. Um 'efeito' comum é ver algo crescer, como passar de 100 mil reais para 150 mil reais em cinco anos. Como isso aconteceu? O logaritmo encontra uma causa possível: um retorno contínuo de

$$\frac{\ln(\frac{150}{100})}{5} = 8,1\%$$

seria responsável por essa alteração. Pode não ser a causa real (todo o crescimento aconteceu no último ano?), mas é uma média suave que pode ser comparada com outras mudanças. A noção de 'causa e efeito' é matizada. Por que 1000 é maior do que 100?

- 100 é 10 que cresceu sozinho por 2 períodos de tempo (10×10)
- 1000 é 10 que cresceu por si mesmo por 3 períodos de tempo $(10 \times 10 \times 10)$

Pode-se pensar em números como saídas (1000 são '1000 saídas') e entradas ('Quantas vezes 10 precisam crescer para produzir essas saídas?'). Dessa forma, tem-se que: 1000 saídas > 100 saídas, porque, 3 entradas > 2 entradas, ou em outras palavras: $\log(1000) > \log(100)$. Por que isso é útil? Os logaritmos colocam os números em uma escala amigável aos humanos. Grandes números não são amigáveis ao cérebro humano. Milhões e trilhões são 'muito grandes', embora um milhão de segundos sejam 12 dias e um trilhão de segundos sejam 30000 anos. O truque para superar a 'enorme cegueira dos números' é escrever números em termos de 'entradas' (ou seja, sua base pode ser 10). Esta escala menor (0 a 100) é muito mais fácil de entender:

- Potência de $0 = 10^0 = 1$ (unidade)
- Potência de $1 = 10^1 = 10$
- Potência de $3 = 10^3 =$mil
- Potência de $6 = 10^6 =$milhões

- Potência de $9 = 10^9$ =bilhões
- Potência de $12 = 10^{12}$ = trilhões
- Potência de $23 = 10^{23}$ = número de moléculas em uma dúzia de gramas de carbono
- Potência de $80 = 10^{80}$ = número de moléculas no Universo

Uma escala de 0 a 80 anos nos levou de um único item para o número de coisas no Universo. Não é muito pobre? Logaritmos contam multiplicação como etapas. Descrevem mudanças em termos de multipliação: nos exemplos acima, cada passo é 10 vezes maior. Com o logaritmo natural, cada etapa é 'e'(2,71828...) vezes mais. Ao lidar com uma série de multiplicações, os logaritmos ajudam a 'contá-las', assim como a adição conta para nós quando os efeitos são adicionados. Quando dizemos salário de 6 dígitos ou despesas de 2 dígitos, estamos descrevendo números em termos de seus dígitos, ou sejam, quantas potências de 10 eles têm? (São dezenas, centenas, milhares, 10 mil, etc). Adicionar um dígito significa 'multiplicar por 10'. Os logaritmos contam o número de multiplicações adicionadas, então começando com 1 (um único dígito) e adicionando mais 5 dígitos $(10^5) = 100000$ obtem-se um resultado de 6 dígitos. Falar de '6' em vez de 'cem mil' é a essência dos logaritmos. Dá uma ideia aproximada de escala sem entrar em detalhes.

3.3.2.1 Ordem de grandeza

Nos computadores, onde tudo é contado em bits (0 ou 1), cada bit tem um efeito de duplicação (não 10x). Então, de 8 a 16 bits significa é '8 ordens de magnitude' ou $2^8 = 256$ vezes maior. ('Maior' nesse caso refere-se à quantidade de memória que pode ser endereçada). Indo de 16 a 32 bits significa um extra de 16 ordens de magnitude, ou $2^{16} = 65536$ vezes mais memória que pode ser endereçada.

3.3.2.2 Escala de medição: Google Page Rank

O Google dá a cada página da web uma pontuação (Page Rank) que é uma medida aproximada de autoridade importância. Esta é uma escala logarítmica, que significa 'O Page Rank conta o número de dígitos na sua pontuação'. Assim, um site com Page Rank 2 ('2 dígitos') é 10 vezes mais popular que um site de Page Rank 1. Um site com Page Rank 5 tem uma diferença de 4 ordens de magnitude $(10^4 = 10000)$ para um site de Page Rank 9. Se o site com Page Rank 5 recebe 7 mil visitas por dia, o site com Page Rank 9 recebe cerca de $7000 \times 10000 = 70$ milhões de vsitas por dia.

3.3.2.3 Escala de medição: Richter, Decibel

Estes são exemplos típicos de 'logaritmos no mundo real'. A ideia é colocar eventos que podem variar drasticamente (terremotos) em uma única escala com um pequeno intervalo (tipicamente de 1 a 10). Assim como o Page Rank, cada aumento de 1 ponto é um acréscimo de 10 vezes na potência. O maior terremoto registrado pela humanidade foi de 9,5 pontos na escala Richter.

O impacto na península de Yucatán, que provavelmente extinguiu os dinossauros, foi de 13 pontos. Os decibéis são semelhantes, embora possam ser negativos. Os sons podem ir de intensamente silenciosos (pindrop) a extremamente altos (aviões) e nossos cérebros podem processar tudo. Na realidade, o som do motor de um avião é de milhões (bilhões, trilhões) de vezes mais poderoso que um pindrop, e é inconveniente ter uma escala que vai de 1 a um zilhão. Os logaritmos mantêm tudo em uma escala razoável.

3.3.2.4 Exemplo de Exercício

Exemplo 1. Logaritmo e a Geografia
Numa determinada cidade o crescimento populacional cresce na taxa de 5% ao ano. Em quantos anos a população triplicará, considerando que essa taxa não varia? Solução: Utilizando a fórmula $P = P_0.(1+i)^t$, onde P_0 é a populacção inicial no ano de referência, t é o tempo procurado, partindo de um tempo inicial igual a zero, P é a população triplicada e i é a taxa percentual ao ano. Dados: $P = 3P_0$, i = 5% a.a. $= 0,05$ e t é o que se pede. Substituindo os valores, vem que: $3P_0 = P_0.(1+0,05)^t$, chegando numa equação exponencial do tipo $1,05^t = 3$, que será resolvida logarítimicamente, aplicando logaritmo de ambos os lados da igualdade, de maneira que $\log(1,05^t) = \log 3$.Com o auxílio das tabelas ou com os conhecidos logaritmos de tabela ou usando calculadora, chega-se ao resultado aproximado de $t = 22,5$ anos.

CAPÍTULO

4

CARACTERÍSTICA E MANTISSA DE UM LOGARITMO

4.1 Cálculo da característica de um logaritmo decimal

A parte inteira de um logaritmo é chamada Característica e a parte não inteira (decimais) é chamada Mantissa.

Exemplo 2. $\log 115 = 2,06069784...$, aproximadamente $\log 115 = 2,0607$. Sua característica é 2 e sua mantissa é 0,0607.

Seja $\log 115 = x$, que por definição, $10^x = 115$, então é óbvio que x não é um número inteiro. Pode-se descobrir a parte inteira desse logaritmo fazendo $10^2 < \log 115 < 10^3$, ou seja, $10^2 < 10^x < 10^3$, donde conclui-se que $2 < x < 3$ e, consequentemente, $2 < \log 115 < 3$ e a parte inteira de$\log 115$ é 2, ou melhor, sua característica é igual a 2.

4.2 Cálculo da mantissa de um logaritmo decimal

Considere ao final dessa seção (ou capítulo), a tábua (ou tabela) logarítmica, na qual os algarismos dos números da primeira coluna juntamente com os algarismos dos números da primeira linha, compõem números, dos quais se deseja extrair, da tabela, as mantissas, com 4 casas decimais. Essas mantissas estão abaixo da primeira linha e à direita da primeira coluna.

Exemplo 3. Qual é a mantissa do $\log 115$?

Separa o 115 em dois números 11 e 5 e observa na tabela, qual é o elemento da linha do número 11 e da coluna do número 5; esse elemento, o número 0,0607, é a mantissa do $\log 115$.

Como um logaritmo é a soma de sua característica com a sua mantissa, então log115 = 2 + 0,0607 = 2,0607, conforme verificado no exemplo 2.

4.3 Propriedades da característica e da mantissa de um logaritmo decimal

Quem publicou a primeira tábua de logaritmos, de 1 a 1000, foi Henry Briggs, matemático inglês (1561-1630), em 1617.

4.3.1 Característica

Seja b, tal que $b > 0$, então $x = \log b$ é um número real e todo número real está entre duas potências de 10. Seja c, tal que c pertence a$\mathbb{Z}$, e considere $10^c < 10^x < 10^{(c+1)}$, onde $c < x < (c+1)$, ou ainda $c < \log b < (c+1)$. Esse c é o maior número inteiro que não supera o logaritmo decimal e c é chamado característica do $\log b$.

Propriedade 1 Se $b > 1$, a característica do $\log b$ é a quantidade de algarismos que vem antes da vírgula, subtraída de uma unidade.

Exemplo 4.
- $\log 115 \Rightarrow log 115,0 \Rightarrow c = 3-1 = 2$.
- $\log 11,5 \Rightarrow c = 2-1 = 1$.
- $\log 1156,32 \Rightarrow c = 4-1 = 3$.

Propriedade 2 Se $0 < b < 1$, a característica do logb é o oposto da quantidade de zeros que antecedem o primeiro algarismo diferente de zero.

Exemplo 5.
- $\log 0,115 \Rightarrow c = -1$.
- $\log 0,0115 \Rightarrow c = -2$.
- $\log 0,0000115 \Rightarrow c = -5$.

4.3.2 Mantissa

Sabe-se que $\log(b.10^x) = \log b + \log 10^x = \log b + x \log 10 = \log b + x.1 = \log b + x$.

Daí conclui-se que, dado um número b e qualquer outro número composto $(b \times 10^x)$, ou seja, produto de b por uma potência de 10, as características de ambos serão diferentes (uma é acrescida ou diminuída de x, da outra), mas a mantissa permanece a mesma para ambos, qualquer que seja x pertencente a $\mathbb{Z}$.

Exemplo: os logaritmos decimais de 115, 1150, 0,115 e 0,0115 têm mantissa igual a 0,0607 e características iguais a 2; 3; -1 e -2.

Como Propriedade, a mantissa de um logaritmo decimal de b não se altera se b for multiplicado por uma potência de 10 com expoente inteiro.

Exemplo 6. (Sempre cobrado em vestibulares): se $\log 3$ é aproximadamente 0,4771, determine quantos algarismos possui o número 3^{50}?

Não é de bom senso calcular essa potência, nem com uma calculadora, pra contar quantos algarismos possui e obstante que é proibido o uso de quaisquer meios eletrônicos durante uma prova de vestibular.

Então tem que apelar para o que foi aprendido dos conceitos apresentados anteriormente tem - se.

Solução:

De $\log 3 = 0,4771$ tem-se que: a característica é 0 e a mantissa é 0,4771. Dado que a característica é zero, então o logaritmando tem $(0+1)$ algarismos, lógico, 3 tem um único algarismo. Mas $\log 3^{50} = 50.\log 3 = 50 \times 0,4771 = 23,855$, onde sua característica é 23, então $\log 3^{50}$ possui 23 + 1 = 24 algarismos.

$\log b = c + m$, tal que $b > 0$, c é a característica e m é a mantissa do $\log b$.

Figura 6 – Tabela Logarítmica

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

CAPÍTULO

5

CONSIDERAÇÕES GERAIS

O conceito atual de logaritmos pode fazer parecer estranho que os logaritmos realmente tenham se desenvolvido a partir da comparação de velocidades de pontos que se movem aritmética e geometricamente.

A ideia de Napier levou décadas para se desenvolver e ser concluída plenamente.O trabalho de Briggs ajudou a simplificar e aprimorar essa útil invenção matemática.

O que hoje parece ser uma base simples para relacionamento de expoentes realmente tem uma longa história de trabalho e melhorias. O logaritmo natural nos ajuda a ver a conexão entre os trabalhos de um matemático escocês (e muitos outros) com cálculo e todas as suas aplicações modernas em matemática, ciências e tecnologia.

A invenção de Napier do logaritmo certamente deixou uma marca importante na história da matemática. As aplicações derivadas dos cálculos que ele e outros desenvolveram ainda têm relevância hoje.

A história do desenvolvimento dos logaritmos é um bom exemplo dos efeitos que as descobertas matemáticas e as invenções podem ter na sociedade e no mundo tecnológico.

A descoberta de operações e truques matemáticos certamente exige muito esforço, tempo e dedicação. Hoje, muitas vezes tomamos por certo aqueles símbolos e explicações que são perfeitamente compilados em livros de matemática e ciências.

É fácil esquecer que todo o desenvolvimento de um resultado matemático envolve uma história: frustração, fascínio, trabalho árduo, colaborações amistosas, desapontamento. Matemática não é apenas sobre números, mas também é sobre as pessoas cujo trabalho nos dão o prazer de conhecer.

Podemos encontrar exemplos de logaritmos em muitas coisas que nos cercam e também em nosso corpo. Todos os nossos sentidos são percebidos pelo nosso cérebro em intensidade logarítmica.

Essa particularidade de nossos sentidos nos permite fazer muitas coisas. A resposta logarítmica de nossa visão a um sinal luminoso nos permite ver as estrelas em uma noite escura sem permanecer deslumbrados por uma paisagem iluminada pelo Sol em pleno dia. A resposta logarítmica da audição nos permite ouvir o farfalhar das folhas em um dia de brisa leve, mas também ouvir sem danos o rugido de um avião que decola.

REFERÊNCIAS

EULER, L. **"On the controvrsy between messrs. Leibniz and Bernoulli concerning logarithms of negative and imaginary numbers."**. [S.l.: s.n.], 1751. Citado na página 32.

EVANS, J. E. **Why logarithms to the base *e* can justly be called natural logarithms**. [S.l.: s.n.], 1939. 14, 91-95. p. Citado na página 31.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO ROBERTO; ALMEIDA, N. **Matemática: Ciência e Aplicações**. [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 22.

KATHLEEN, M. C.; MONTELLE, C. **"Logarithms: The Early History of a Familiar Function - John Napier Introduces Logarithms."**. [S.l.: s.n.]. Citado na página 27.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. [S.l.], 2016. Citado na página 33.

LOWAN, A. N. **Logarithm**. [S.l.: s.n.], 2002. Citado nas páginas 31 e 32.

MAIOR, E. **"*e*:a história de um número"**. São Paulo: Record, 2008. Citado na página 26.

ICMC USP
SÃO CARLOS