Universidade Federal do Cariri
Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Sobre o Conceito de Infinito e Aplicações

Josevanio Alcantara de Lima

Juazeiro do Norte

2019

Josevanio Alcantara de Lima

Sobre o Conceito de Infinito e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares

Juazeiro do Norte

2019

Dados internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

L696s Lima, Josevanio Alcantara de.

Sobre o conceito de Infinito e aplicações/ Josevanio Alcantara de Lima. – Juazeiro do Norte, 2019.

76 f.: il., enc.; 30 cm.

Inclui Bibliografia.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientação: Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares.

1. Infinito. 2. Teoria dos Conjuntos. 3. Paradoxos. 4. Geometria. 5. Área. I. Título.

CDD 510.7

Bibliotecária: Valeska Paulino Nogueira – CRB 3/1198

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sobre o Conceito de Infinito e Aplicações

JOSEVANIO ALCANTARA DE LIMA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 19 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Leandro da Silva Tavares
Orientador

Prof.ª Dr.ª Érica Boizan Batista
Coorientadora UFCA

Prof. Dr. Valdinês Leite de Sousa Júnior
UFCA

Prof. Dr. Jose Vanterler da Costa Souza
UNICAMP

Dedico meus filhos Emanuelle Ágata (*in memorian*), Licius Raphael e Petrus Magno (que está por vir), que são as razões do meu viver. Neles encontro forças e quero os educar pelo exemplo, mostrando-lhes que inspiração, dedicação e compromisso são deveras, premissas para concluir todas as caminhadas da vida.

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus, fonte inesgotável de todas as minhas forças, sempre presente em todas as situações de minha vida, levantando-me nos momentos em que caí, que nunca me abandona diante de quaisquer adversidades. Em particular nessa caminhada, Deus mostrou-me o quão maravilhoso é poder contar com verdadeiras amizades.

A meus pais, por terem me educado valorizando o saber e que com ele poderia moldar minha própria realidade.

A minha esposa Adriana Dannúbia, que fora de extrema importância para ingresso, permanência e conclusão dessa difícil jornada, dando-me forças, sempre deixando claro que acreditou em mim durante todo o curso, com quem pude contar como suporte. Alguém em que não só agradeço, mas, também admiro.

Agradeço, em particular aos colegas de turma, indiscutivelmente verdadeiros amigos, com quem pude contar quando precisei, aprendendo e compartilhando conhecimentos.

Também agradeço a todos os docentes, que tem uma parcela de contribuição por eu chegar até aqui. Em particular, agradeço aos professores Leandro da Silva Tavares e Érica Boizan Batista, respectivamente, orientador e coorientadora, que contribuíram de forma significativa, orientando-me e direcionando-me para pesquisas e conclusão do presente trabalho.

Agradeço aos membros da banca por terem aceitado o convite.

Por fim, agradeço, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

"Infinidades e indivisibilidades
transcendem nossa compreensão finita;
as primeiras em virtude de sua
magnitude, as últimas em virtude de
sua pequenez; imagine como são
quando elas se combinam".
(Galileu Galilei)

Resumo

O conceito de infinito é algo que a maioria dos estudantes do Ensino Básico tem conhecimento, porém, que é compreendido muito mais como oposto de finito do que pelo sentido que é empregado na Matemática e em alguns cursos de Ensino Superior. Objetivando diminuir a distância entre as diferentes concepções existentes entre os referidos níveis de ensino, este trabalho busca apresentar uma noção de infinito matemático e algumas aplicações sob argumentos acessíveis ao Ensino Básico.

Palavras-chave: Infinito; Teoria dos Conjuntos; Paradoxos; Geometria; Área.

Abstract

The concept of infinity is something that the most elementary school students have knowledge, however, which is understood much more as the opposite of finite than by the sense that is used in mathematics and in some higher education courses. In order to reduce the distance between the different conceptions existing between the referred levels of education, this work seeks to present a mathemathical notion of infinite and some applications under arguments accessible to Basic Education.

Keywords: Infinity; Set Theory; Paradoxes; Geometry; Area.

Lista de Figuras

Sumário

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda a temática do infinito, que é de senso comum do ponto de vista informal mesmo no Ensino Básico, o qual exibe uma grande diferença em comparação com o conceito formal no contexto da Matemática.

Iniciamos então a discussão de nosso trabalho com o seguinte questionamento: Como a Matemática aborda o conceito de infinito?

> Uma das maiores conquistas da Matemática como linguagem tem sido a sua própria coragem imaginativa para enfrentar o conceito mais inacessível e paradoxal que poderia pretender a fragilidade temporal do intelecto: o conceito de infinito. Nós poderíamos quase dizer que a matemática é a linguagem que finge falar de infinito, ou a ciência que pretende medir o infinito [19, p. 60].

A afirmação acima de Ortiz reflete o quanto se mostra delicado conceituar o infinito pela Matemática enquanto ciência, mesmo sob argumentos e pressupostos criados com a *Teoria dos Conjuntos*, das conhecidas somas infinitesimais do Cálculo, entre outras ferramentas e situações comuns à ela.

Conceituar o infinito ou compreender seu emprego nas inúmeras aplicações na Matemática e em outras áreas é, de fato, uma tarefa não muito simples, pois, comumente o conceito é associado a ideias puramente abstratas.

Mostrando-se essa problemática que envolve a conceituação e aplicações do infinito como discussão pertinente, o presente trabalho vem abordá-lo como um assunto de razoável conhecimento no senso comum, embora compreendido muito mais como o oposto de finito. As deficiências na construção do conceito continuam, mesmo sendo trabalhado no Ensino Básico em algumas situações. Tal deficiência na compreensão do conceito por parte dos discentes do referido nível de ensino se dá muitas vezes por não se trabalhá-lo como se deveria, implicando a tais discentes não conseguirem construir uma concepção de infinito que lhes permitam dar continuidade a seus estudos quando optam por alguns cursos de Ensino Superior.

Diante da situação de que no Ensino Básico costuma se construir uma visão apenas superficial do conceito, objetiva-se apresentar um trabalho que, sob a mediação de docentes, possibilite aos discentes desse nível de ensino a construção de uma concepção de infinito adequada e que permitam-lhes dar continuidade sem maiores dificuldades nos cursos Ensino Superior que necessitem do conceito como tal.

A construção do trabalho parte da ênfase dada à evolução histórica do conceito de infinito e como ele emergiu a partir de aplicações, mesmo sem uma formalização matemática direta, como veremos em algumas aplicações abordadas no capítulo destinado à Geometria. Será discutida de forma sucinta a trajetória enfrentada pelo conceito em algumas áreas de conhecimento, mas enfatizando-se os avanços e recuos dele na Matemática.

Para um melhor discernimento acerca do trabalho, não seguiremos uma linha cronológica do desenvolvimento da temática, buscando-se logo no primeiro capítulo apresentar como se deram fatos relativos às oscilações e ao êxito para a formalização matemática do conceito de infinito com os trabalhos de Georg Cantor em sua *Teoria dos Conjuntos*. Ainda no primeiro capítulo são ressaltados alguns percalços que o conceito continuou a enfrentar até a sua efetiva aceitação, sendo enfatizadas as significativas contribuições do matemático David Hilbert, mediante à resolução problemas oriundos do paradoxos do Hotel do Infinito, em que o emprego do conceito apresenta-se como condição essencial à resolução.

No capítulo seguinte, a discussão do conceito de infinito terá um tom um pouco diferente, pois, ela partirá dos paradoxos clássicos do pensador grego Zenon de Eleia, que os empregou num sentido muito mais filosófico do que matemático para defender suas fundamentações, mas principalmente para refutar as ideias de seus adversários da *Escola Pitagórica*. No entanto, deve ser salientado que nesse trabalho objetiva-se chegar às resoluções dos paradoxos mediante argumentos matemáticos e, então, refutar as afirmações filosóficas de Zenon.

No terceiro capítulo serão apresentados os cálculo de áreas como o círculo, a parábola, como também se busca estimar um valor aproximado para π, em que o emprego do infinito surgiu já na antiguidade como caminho necessário à resolução desses problemas. A metodologia adotada enfatizará o *Método da Exaustão* grego, por ser considerado de argumentação matemática mais acessível para resolver os problemas propostos. Assim, direcionamos um papel de destaque às contribuições de Arquimedes de Siracusa que conseguiu aprimorar esse método e, com isso, é considerado por muitos como o maior matemático da antiguidade e um dos maiores de todos os tempos, sendo considerado um dos precursores do Cálculo.

E por fim, ainda no capítulo três, é destacado o papel desempenhado por Pierre de Fermat no emprego do infinito para o cálculo de áreas sob curvas de funções do tipo $f(x) = x^m$, com m natural, sendo delimitadas pelo eixo das abscissas no intervalo $[0; b]$ e pela reta $x = b$, o que levou-o à margem de descobrir os fundamentos do *Cálculo*

Infinitesimal.

Em suma, o trabalho busca, mediante exemplos clássicos, constituir-se como suporte pedagógico que leve o leitor a construir um conceito de infinito e de seu respectivo emprego na resolução de vários problemas, de modo que tal conceito venha apresentar-se como algo mais próximo das concepções evidenciadas em cursos de Ensino Superior.

2 O INFINITO NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Um dos problemas mais emblemáticos, e que levou estudiosos de áreas diversas do conhecimento a refletirem sobre ele, concerne ao conceito de infinito. É um conceito em que discussões relativas a ele se deram já desde à antiguidade, e que perpassaram algumas áreas como a Matemática, a Filosofia, a Teologia, entre outras.

Durante muito tempo o conceito fora discutido e, dependendo da área e do período em que se discutiu, ele ganhou certas conotações, mas que não serviram para resolver problemas de cada área em específico. Entre elas estava a Matemática, que já se deparara com problemas de definição de lugares geométricos (retas, planos e pontos infinitos), já pensados por Euclides e Eudoxo, porém, que os viam como arbitrários e desprovidos de uma formalização. Além de não ganhar uma definição ou aplicação formal, grandes expoentes da Matemática, entre eles Gauss, Cauchy e Galilleu, relutavam em aceitar o conceito de infinito, o que implicou na não consolidação do conceito e, consequentemente, da não difusão dentro do mundo matemático [2, p. 16].

Nas diversas áreas de conhecimento, o emprego do conceito de infinito se deu basicamente fundamentado sob perspectivas do senso comum, isto é, baseado na ideia de que o infinito configurava-se mais como ideia e não como algo relacionado a números, o que dificultou sua inserção na Matemática. Como já prevalecia a aceitação do Divino como o único de natureza infinita, acarretavam-se associações com uma maior facilidade ao conceito à visão teológica, e esta área ganhou certa propriedade sobre a ideia. Assim, o infinito perpetuou-se muito mais relacionado a algo inatingível e abstrato do que como números ou limites.

Essa forma de se conceber o infinito (fortemente arraigada no senso comum), apesar de tudo, não impossibilitou sua fácil associação à natureza de infinito concernente aos números naturais (e racionais), mas apenas isso. Portanto, na Matemática, a primeira forma de se conceber o infinito esteve diretamente relacionada aos números naturais (de forma clara), e isso era evidenciado na Geometria Euclidiana mediante tamanhos arbitrários de lugares geométricos, no entanto, ela limitava-se às margens do que seria, posteriormente, conceituado como infinito real.

Até mesmo descobertas que chegaram a fascinar alguns estudiosos por alguns instantes, foram não compreendidas como deveriam e, portanto, ficaram à margem de sua magnitude. É o caso de Galileu Galilei (1564-1642) que, objetivando estabelecer uma relação entre os conjuntos naturais e de números pares mediante bijeções, observou a seguinte associação:

$$
\begin{gathered}
0 \leftrightarrow 0 \\
1 \leftrightarrow 2 \\
2 \leftrightarrow 4 \\
3 \leftrightarrow 6 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Ficou evidente, e isso fora dito por ele, que o conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e o conjunto dos números pares apresentavam mesma quantidade de elementos. No entanto, tal descoberta colocava em xeque o axioma de Euclides, que dizia que "*o todo é sempre maior que a parte*". Com isso, ele optou por não aceitar o infinito como estava se mostrando, optando por evitá-lo como conceito matemático. No entanto, no ano de 1872 o alemão Richard Dedekind (1831-1916) deu início aos fundamentos matemáticos que conceituam o infinito afirmando que um conjunto é infinito quando pode ser colocado numa correspondência biunívoca com partes de si próprio [10, p. 21]. Segue que isso foi constatado por Galileu, mas ignorado, pois, parecia-lhe paradoxal, embora viesse a ser a "propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, com todas as suas implicações".

Como se percebe, durante séculos a não formalização do conceito de infinito assolou vários estudiosos das mais diversas áreas, cabendo a um matemático lançar em suas formulações teóricas, uma definição formal de tal conceito. Esse matemático fora Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).

2.1 O Infinito de Cantor

Cantor concentrou-se em seus estudos buscando formalizar uma definição de infinito fundamentada em pressupostos matemáticos, o que levou-o à elaboração da *Teoria dos Conjuntos*, que iria transformar toda a Matemática como área de conhecimento levando-a à forma como ela se apresenta atualmente [13, p. 2]. Seu grande mérito foi mostrar que haviam infinitos com cardinalidades diferentes (que ele chamou de também potências ou tamanho).

Após a descoberta de Galileu e da formalização de Dedekind, Cantor percebeu que se dois conjuntos como $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e o conjuntos dos números pares podem ser colocados sob uma correspondência biunívoca, então, pode-se dizer que os dois conjuntos possuem mesma cardinalidade.

A partir da percepção de que era possível estabelecer uma cardinalidade para conjuntos infinitos, tornava-se possível comparar o tamanho entre os mesmos, estabelecendo-se quem poderia ter maior ou menor cardinalidade, o que foi constatado por ele em alguns casos. Dada essa verificação, Cantor conseguiu estabelecer a hierarquização entre os infinitos diversos, ideia a ser abordada à frente.

Para darmos continuidade à narrativa de sob melhores entendimentos, torna-se necessário apresentar algumas definições, pois, ao longo desse capítulo serão feitas menções acerca delas como quesito para resolução de alguns problemas.

Definição 1. [20] *Uma função* $f : A \to B$ *é uma sobrejeção se, e somente se, para todo* $y \in B$*, existe* $x \in A$*, tal que* $f(x) = y$*.*

Definição 2. [20] *Uma função* $f : A \to B$ *é uma injeção se, e somente se,* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$*, para* $x_1, x_2 \in A$*.*

Definição 3. [20] *Uma função é* $f : A \to B$ *é uma bijeção se, e somente se,* f *é sobrejeção e injeção simultaneamente.*

Pode-se dizer em outras palavras que $f : A \to B$ é uma bijeção se, e somente se, todo elemento $y \in B$, for imagem, através de f, de um único $x \in A$.

Abaixo destacamos um resultado clássico.

Proposição 1. *Uma função* $f : a \to B$ *é uma bijeção se, e somente se, existe uma função* $g : B \to A$*, tal que* $(g \circ f)(a) = a, \forall a \in A$ *e* $(f \circ g)(b) = b, \forall b \in B$*.*

A função g é chamada de inversa de f, a qual denotaremos por f^{-1}.

Para entendermos alguns princípios básicos acerca do conceito de infinito, torna-se interessante entendermos com ele é compreendido e mensurado nos conjuntos numéricos, como também em alguns subconjuntos próprios deles, para posteriormente entendermos suas aplicações em funções, sequências, etc.

Considere o conjunto dos números naturais de 1 até k denotado por $I_k = \{1, 2, ..., k\}$.

Definição 4. [16] *Dizemos que* $A \neq \varnothing$ *é infinito se para todo* $k \in \mathbb{N}$*, não existe uma função bijetora* $f : I_k \to A$*.*

Com Definição 4 pode-se provar o seguinte resultado:

Teorema 1. $\mathbb{N}$ *é infinito.*

Demonstração: Seja $f : I_k \to \mathbb{N}$ uma função qualquer, então, temos que $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(k) \in \mathbb{N}$. Assim, sendo o número $m = f(1) + f(2) + \cdots + f(k)$, então, $m > f(x)$, para todo $x \in I_k$, tal que $m \notin f(I_k)$. Logo, isso implica que $f : I_k \to \mathbb{N}$ não pode ser uma bijeção, pois, não é uma sobrejeção. Portanto, o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito. □

Definição 5. [16] *Sejam A e B dois conjuntos. Se existir uma bijeção $f : A \to B$, diz-se que tais conjuntos apresentam a mesma cardinalidade ou que são equivalentes e escreve-se $A \sim B$.*

É possível demonstrar que $\sim$ é uma relação de equivalência. Portanto, são satisfeitas as propriedades abaixo.

(i) $A \sim A$ (propriedade reflexiva);
(ii) Se $A \sim B$, então $B \sim A$ (propriedade simétrica);
(iii) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$ (propriedade transitiva).

No que segue, verificaremos que $P = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ tem mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$.

Seja $f : \mathbb{N} \to P$, onde $f(x) = 2x$, então, existe $g : P \to \mathbb{N}$, tal que $g(x) = x/2$.

A inversa de f é obtida quando isolamos o y na equação $x = f(y)$. Desse modo, temos que a inversa de $f(x)$ é dada por

$$x = 2y \Longrightarrow y = \frac{x}{2} = g(x).$$

Logo, como $g = f^{-1}$, então, pela Definição 5 e pela Proposição 1, os conjuntos $\mathbb{N}$ e P possuem mesma cardinalidade.

Mediante os mesmos argumentos pode-se concluir que outros subconjuntos de $\mathbb{N}$ como o conjunto dos números ímpares (em que cada elemento seja dado por $x = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$) e o conjunto dos números quadrados perfeitos (onde cada elemento seja dado por $x = n^2, n \in \mathbb{N}$), por exemplo, também apresentam a mesma cardinalidade que a dos naturais, pois, também estão sob uma relação biunívoca com o conjunto dos números naturais.

A cardinalidade de $\mathbb{N}$ é definida como $\aleph_0$ (lê-se alef 0), sendo atribuída ao infinito considerado de menor cardinalidade.

Ao se atribuir cardinalidade ao infinito, os conjuntos numéricos puderam ser hierarquizados segundo suas respectivas cardinalidades e, surpreendentemente, os conjuntos

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ tem cardinalidade designada por $\aleph_0$. Então, vejamos os casos das cardinalidades dos conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Provemos que o conjunto $\mathbb{Z}$ tem mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$.

Defina $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se n é par} \\ (1-n)/2, & \text{se n ímpar.} \end{cases}$$

Seja $f(a) = m$, com $a \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$. Note que existe $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, tal que

$$g(m) = \begin{cases} 2m, & \text{se m } \geq 1 \\ -2m+1, & \text{se m } < 1. \end{cases}$$

Provemos que f é uma bijeção e que g é sua inversa. Sabemos que se $f(x)$ é invertível, então sua inversa é obtida fazendo $x = f(y)$.

Para determinar f^{-1} analisemos separadamente cada uma das sentenças que compõem f.

- $f(n) = n/2$, se n é par. Logo, n é da forma $2k, k \in \mathbb{N}$.

Para facilitar, podemos escrever $y = n/2$, para $n = 2k$.

Trocando y por n e n por y, temos $n = y/2$, para $y = 2k$.

Isolando y, temos: $y = 2n$, para $y = 2k$.

Ou seja, $y = 2n$, para $2n = 2k \Rightarrow n = k$. Como $k \in \mathbb{N}$, então, $f^{-1} = 2n$, para $n \geq 1$.

- $f(n) = (1-n)/2$, se n é ímpar. Logo, n é da forma $2k-1, k \in \mathbb{N}$.

Para facilitar, podemos escrever $y = (1-n)/2$, para $n = 2k-1$.

Trocando y por n e n por y, temos $n = (1-y)/2$, para $y = 2k-1$.

Isolando y, teremos:

$$\begin{aligned} 1 - y &= 2n \\ y - 1 &= -2n \\ y &= 1 - 2n, \end{aligned}$$

para $y = 2k-1$.

Ou seja, $y = 1 - 2n$, para

$$
\begin{aligned}
1 - 2n &= 2k - 1 \\
-2n &= 2k - 2 \\
n &= 1 - k.
\end{aligned}
$$

Como $k \in \mathbb{N}$, então, $1 - k \notin \mathbb{N}$. Logo, $f^{-1} = 1 - 2n$, para $n < 1$.

Temos então que

$$
f^{-1} = \begin{cases} 2n, & \text{se n } \geq 1 \\ 1 - 2n, & \text{se n } < 1. \end{cases}
$$

Logo, temos que $f^{-1} = g$. Assim, torna-se evidente que os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ apresentam mesma cardinalidade.

Em relação à cardinalidade do conjunto dos racionais é possível demonstrar que ela é a mesma de $\mathbb{N}$. A seguir apresentaremos um argumento informal, devido a Cantor, que fornece o resultado mencionado.

A demonstração da enumerabilidade dos racionais que adotaremos aqui seguirá uma linha de raciocínio análoga à que Cantor utilizou, pois, a consideramos de fácil compreensão já que dispensa diretamente demonstrações da bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Assim, vejamos.

Teorema 2. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais possui cardinalidade $\aleph_0$.*

Demonstração: Consideremos o diagrama a seguir.

$$
\begin{tikzcd}
1/1 \arrow[r] & 1/2 \arrow[dl] & 1/3 \arrow[r] & 1/4 \arrow[dl] & 1/5 \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
2/1 \arrow[d] & 2/2 \arrow[ur] & 2/3 \arrow[dl] & 2/4 \arrow[ur] & 2/5 \arrow[dl] & \cdots \\
3/1 \arrow[ur] & 3/2 \arrow[dl] & 3/3 \arrow[ur] & 3/4 \arrow[dl] & 3/5 \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
4/1 \arrow[d] & 4/2 \arrow[ur] & 4/3 \arrow[dl] & 4/4 \arrow[ur] & 4/5 \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

Considere a listagem dos racionais positivos com base no sentido das setas e excluindo as frações equivalentes. Observe que com esse raciocínio teremos a listagem de todos os números racionais positivos, de tal modo que temos a sequência infinta

$$\left(1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots\right).$$

Denotando essa sequência por $(q_1, q_2, q_3, \cdots)$, então, é fácil lembrar que temos também a sequência $(0, -q_1, -q_2, -q_3, \cdots)$ que representa os racionais não positivos. Logo, a sequência

$$(0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, \cdots)$$

contém todos os elementos de $\mathbb{Q}$, o que nos permite concluir a demonstração [8, p. 663].

Logo, o conjunto $\mathbb{Q}$ está em bijeção com $\mathbb{N}$ e, portanto, também possui cardinalidade $\aleph_0$.

> [...] dois conjuntos se dizem equipotentes, se, e somente se, eles podem ser colocados em correspondência biunívoca. Se dois conjuntos são equipotentes, diz-se que eles tem o mesmo número cardinal. Os números cardinais dos números finitos podem ser identificados com os números naturais. Os números cardinais dos conjuntos infinitos recebem o nome de números transfinitos [8, p. 662].

A *Teoria dos Conjuntos* permite a construção de uma sequência infinita de números transfinitos e, embora não seja o intuito do nosso trabalho apresentá-la, há demonstrações que se destinam a mostrar que há efetivamente um número ilimitado de números cardinais. Assim, dado um número transfinito qualquer, sempre existe outro de maior cardinalidade [8, p. 664-667].

Essa ideia é corroborada em Lima, quando ele afirma que

> Cantor foi a primeira pessoa a provar que existem diferentes números cardinais infinitos. Mais precisamente, os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ são ambos infinitos mas ele mostrou que não pode existir uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Em particular, não pode existir uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Como certamente existe uma função injetiva de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ (a saber aquela que a cada $n \in \mathbb{N}$ faz corresponder o próprio n como elemento de $\mathbb{R}$), diz-se então que a cardinalidade $\mathbb{N}$ é estritamente menor que a de $\mathbb{R}$ [15, p. 67].

É intuitivo que a cardinalidade imediatamente maior que a dos naturais seria a dos conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, sendo definidas por $\aleph_1$ (Alef 1).

Para entendimento da ideia de valores infinitamente grandes e infinitamente pequenos e, assim, compreendermos o que foi afirmado acerca da cardinalidade dos reais torna-se necessário o apresentar o teorema a seguir, às vezes chamado de "Princípio dos Intervalos Encaixados" [14].

Teorema 3. (Intervalos Encaixantes.)[9, p. 19] *Seja* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots I_n \cdots$ *uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$*. A interseção* $\bigcap I_n$ *não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real* x *tal que* $x \in I_n$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Outra informação importante diz respeito aos conceitos de intervalos degenerado e não degenerado, que será preciso para compreender a demonstração do próximo teorema. Seja $[a;b]$ um intervalo fechado. Se $a = b$, então, esse intervalo se reduz a um único elemento $[a;a] = \{a\}$ e, assim, é dito **degenerado**. Todo intervalo **não-degenerado**, isto é, do tipo $[c;d]$, com $c \neq d$ é um conjunto infinito [10, p. 43].

Provaremos agora o resultado abaixo.

Teorema 4. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais é* $\aleph_1$.

Demonstração: Utilizaremos a demonstração de [14, p. 86]. Considere números reais a, b, c e d tal que $a < b < c < d$. Considere os intervalos $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$, tal que $I \supset J$ e que existe um $x_0 \in J$. Sendo um subconjunto enumerável dado por $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots\}$, com $X \subset \mathbb{R}$, então, vamos mostrar que se pode encontrar um número real $\alpha \notin X$.

Note que X é um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$. Seja I_1 um intervalo fechado e não degenerado, tal que $x_1 \notin I_1$; seja I_2 um intervalo do mesmo tipo, tal que $x_2 \notin I_2$, com $I_1 \supset I_2$ e assim, prosseguindo com o raciocínio, supomos obter uma sequência de intervalos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n$ limitados, fechados e não degenerados, de modo que $x_k \notin I_k$, onde $1 \leq k \leq n$ e, com isso, pode-se encontrar um novo intervalo I_{n+1}, tal que $I_{n+1} \subset I_n$ com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$.

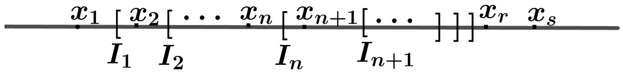

Figura 1: Intervalos encaixantes.

Daí, isto pode nos fornecer a sequência decrescente de intervalos fechados, limitados e não degenerados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ de tal modo que a interseção, pelo pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, é não vazia, pois existe um real x que pertence a todos os I_n. Como $x_n \notin I_n$, segue-se que x não nenhum dos x_n e, portanto, temos que nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais. Logo, existe $\alpha \in \bigcap I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. □

É importante ressaltar que Já antes da definição da cardinalidade dos números reais estabelecida por Cantor, Bernardo Bolzano (1781-1848) já havia percebido a relação de bijeção entre os intervalos $[0,1]$ e $[0,2]$, por $f : [0,1] \to [0,2]$, tal que $f(x) = 2x, x \in [0,1]$ [8, p. 530].

Segue que partir de tal bijeção é passível de se estabelecer generalizações, em que o intervalo $[0,1]$ tem a mesma cardinalidade do intervalo $[0,\alpha]$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Isso confirma a ideia de Dedekind quando estabeleceu que um conjunto é infinito caso se possa colocá-lo numa correspondência biunívoca com algumas partes de si mesmo.

Outro exemplo interessante pode ser dado mediante a bijeção

$$f : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},$$

tal que $f(x) = tg(x)$. Assim, evidencia-se que a cardinalidade dos reais é igual à cardinalidade dos números reais do intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.

O passo dado por Cantor em estabelecer o conceito de infinito foi essencial para a Matemática, assim como em outras áreas de conhecimento e digno do comentário de David Hilbert (1862-1943): *"Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós"*.

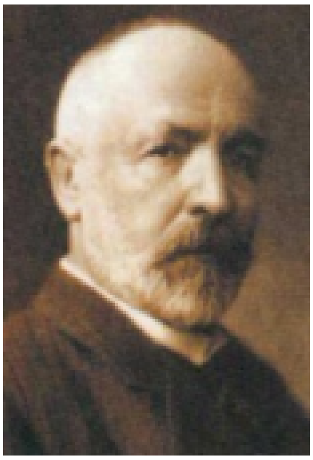

Figura 2: Georg Cantor (1845-1918)
Fonte: https://www.storyofmathematics.com/19thcantor.html

Segundo Howard Eves [8], Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, era filho de pais dinamarqueses, no entanto, era russo. Ele nasceu em São Petersburgo em 1845. Em 1856 mudou-se para Frankfurt, na Alemanha. Cantor demonstrou desde muito cedo o interesse sobre o contínuo e o infinito. Embora seu pai tenha sugerido cursar Engenharia, Cantor dedicou-se ao estudo de Filosofia, Física e Matemática. Estudou em Zurique e obteve o título de Doutor em 1867.

Seus interesses eram voltados à Teoria dos Números, Séries trigonométricas e Equações indeterminadas. Elaborou uma forma de abordagem dos números irracionais, que difere bastante da de Dedekind – mais disseminada entre os meios acadêmicos.

Em 1874, Cantor iniciou seu pioneiro trabalho que culminou com a Teoria dos Conjuntos e Teoria do infinito. Com isso, ele criou uma nova área de pesquisa da Matemática, onde em muitos artigos, foi desenvolvida a Teoria dos Números Transfinitos. Tais estudos fundamentam-se numa abordagem do infinito na Matemática, onde foi apresentada toda aritmética dos números transfinitos (números de cardinalidade infinita), que se mostra muito similar à aritmética dos números finitos.

Desde muito cedo, Cantor teve seus interesses pelo infinito fomentados pelos paradoxos de Zenon, o que reflete suas tendências aos estudos da *Escolástica medieval*, sobre a natureza do infinito. Embora suas contribuições tenham sido uma das mais relevantes dentro da Matemática e hoje a Teria dos Conjuntos permeie todos os ramos da Matemática, inicialmente ele catalisou vários pontos de vista divergentes, dentre eles estava Leopold Kronecker, que não mediu esforços para impedir que Cantor lecionasse na Universidade de Berlim, onde ele lecionava.

As querelas entre Cantor e Kronecker se davam por algumas controvérsias pertinentes à inconsistências da *Teoria dos Conjuntos*, e se estenderam até o século XX, onde Hilbert – um matemático formalista – e outros matemáticos buscaram resolvê-las, dentre elas estavam a *Hipótese do Contínuum* e o *Paradoxo de Russel*.

2.2 O Infinito de Hilbert

Quando se fala sobre o infinito, dificilmente não há como deixar de se creditar as significativas contribuições relativas à disseminação do conceito e de sua aplicação na Matemática a David Hilbert (1862-1943), sendo considerado como um dos grandes matemáticos dos séculos XIX e XX e o principal representante do formalismo matemático [8, p. 677].

Desde o início dos trabalhos que abordavam o infinito, em particular os infinitos distintos, gerou-se uma série de "inseguranças" pelos matemáticos, levando-se a questionamentos acerca da legitimidade do infinito na Matemática. No entanto, Hilbert decidiu seguir numa direção, cuja finalidade concernia em justificar o uso do referido conceito na Matemática partindo das várias axiomáticas existentes, tanto das já abordados na *Teoria dos Conjuntos* de Cantor, como outras já bem disseminadas, como as de Weierstrass (1815-1897), que mediante uma consistente fundamentação para a Análise Matemática removeu "falhas" que ainda persistiam no cálculo infinitesimal.

Diante de tudo o que estava se apresentando, Hilbert sugeriu a utilização de métodos dedutivos como meio de se abordar o conceito de infinito em sua integralidade, em que operações com os infinitamente pequeno e grande fossem substituídos por procedimentos finitos, mas que deva produzir exatamente os mesmos resultados ([11] e [6]).

Hilbert tinha como objetivo desenvolver com o infinito fórmulas, teoremas e suas respectivas provas com valores e validações considerados de mesmas consistências que as obtidas com as do finito, isto é, ele estava preocupado em mostrar que o emprego do infinito na Matemática deveria seguir as mesmas regras e que o finito e que apresentassem também as mesmas consistências aritméticas. Tal forma de pensar o conceito de infinito implicava que este ganhasse um aspecto mais prático e perdesse um pouco de sua natureza puramente abstrata.

Hilbert chamou a atenção para o fato de que certas operações realizadas com o conceito eram passíveis de realização, meramente, em pensamento, sendo percebidas quase que exclusivamente de forma intuitiva. Para ele, a Análise por si só não seria capaz de tornar para todos o conceito de infinito discernível. Portanto, fazia-se necessário o estabelecimento de fundamentos que viessem corroborar o que já se fora apropriado pela Matemática no tocante à aplicação do conceito, como também tudo o que ainda estivesse por ainda vir.

Na busca incessante de justificar o infinito, muitas produções surgiram, entre elas a de Dedekind e a de Cantor, com o objetivo de independer do raciocínio intuitivo e prover de lógica tanto a Aritmética para aplicação do conceito como as noções de conjuntos infinitos. No entanto, a Matemática necessitaria de algo a mais.

Diante dessas diversas problemáticas, Hilbert, já conhecedor e apreciador da Teoria dos Conjuntos elaborada por Cantor, busca justificar o conceito de infinito a partir do que ele considerou central em tal teoria, isto é, a dos números transfinitos $(\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots)$, que além de criá-los, formulou um cálculo para eles, embora Cantor não tenha conseguido demonstrar, por exemplo, a *Hipótese do Contínuo*, ou seja, não provou como $\aleph_1 > \aleph_0$. Mas fato é que para Hilbert, estava justificado e desenvolvido o conceito de infinito e, segundo suas próprias palavras: *"graças ao esforço hercúleo de Frege, Dedekind e Cantor o infinito se fez rei e reinou em grande triunfo. Em voo vertiginoso, o infinito atingiu o pináculo da glória"* ([6] e ([11]).

Sua grande contribuição não concerniu em formular axiomas ou teoremas que justificassem diretamente o infinito, mas em verificar se a Aritmética produzida até então era passível de aplicação tanto para grandezas finitas quanto para o infinito.

Hilbert concluiu que operações com o infinito só podem apresentar alguma consistência lógico-matemática se forem construídas a partir de pressupostos do finito, ou seja, operações só são válidas para o infinito se forem também para o finito. Restava ao infinito ser somente uma ideia que foge à experiência, mas que sua totalidade deve ser vista como um complemento do concreto.

2.2.1 O Paradoxo do Grande Hotel do Infinito

Além do empenho em buscar definir o conceito de infinito matemático mediante métodos de sistemas formais que constituem a Matemática (axiomas, definições, teoremas, etc.), Hilbert tem à sua relevância o crédito de elaborar um paradoxo que tem como temática principal o conceito de infinito e a sua operacionalidade. Tal paradoxo concerne ao "Hotel do Infinito" ou "Hotel de Hilbert" e, como veremos, ilustra bem a ideia de justificar o referido conceito e como proceder, mediante fundamentações lógico-matemáticas, diante de determinadas problemáticas.

Esse paradoxo é um experimento matemático bem interessante sobre conjuntos infinitos criado Hilbert e se configura como um ótimo exercício para cálculos com o infinito. É importante mencionar que embora hajam versões bem diferentes dos problemas do hotel, e cada um deles com uma diversidade de soluções, os problemas aqui apresentados foram retirados e adaptados de Yokoyama [25] e as formas de resoluções seguem de modo análogo às do raciocínio apresentadas em Elon [13]. Então, vejamos.

Considere um hotel com infinitos quartos, cuja enumeração deles é dada pelos números naturais $\mathbb{N} = 1, 2, 3, ..., n-1, n, n+1, ...$ e que está lotado, ou seja, há um hóspede em cada quarto e, consequentemente, não seria capaz de estar recebendo novos hóspedes. Tal maneira de pensar seria análoga ao caso de um número finito de quartos.

Problema 1. *Se chegar um novo cliente, ele poderá ser hospedado?*

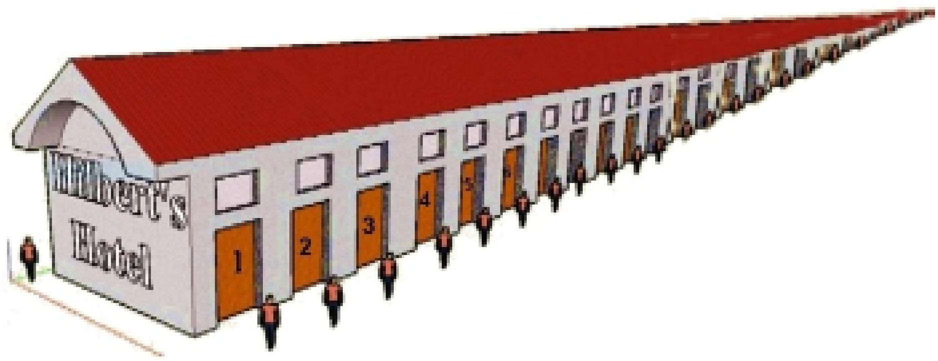

Figura 3: Hotel do Infinito
Fonte: https://sophiaofnature.files.wordpress.com/2015/03/hotel-de-hilbert.jpg

Solução: Sim. Basta que o hóspede seja direcionado ao quarto 1, sendo pedido ao hóspede do quarto 1 que se direcione para o quarto 2; o do quarto 2 para o quarto 3; e seguindo esse procedimento de modo que o hóspede do quarto k passe para o quarto $k+1$, e assim, por diante, o que implica em todos os hóspedes serem acomodados.

Perceba que a acomodação dos hóspedes é possível através da relação biunívoca dada por $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, em que $f(n) = n + 1$.

Em termos

Problema 2. *Se alguém trouxesse sua família e ela fosse constituída de uma quantidade infinita de membros, tornar-se-ia possível agora liberar infinitos quartos para hospedar essa família?*

Solução: Sim. A estratégia para acomodar uma quantidade infinita de hóspedes não seria tão simples, no entanto, é possível acomodá-los. Considere que se for direcionado o hóspede do quarto 1 para o quarto 2; o do quarto 2 para o quarto 4; e seguindo esse procedimento de modo que o hóspede do quarto k passe para o quarto $2k$, deve-se ficar com todos os quartos ímpares vagos. Logo, como existem quartos desocupados de numeração ímpar em quantidade infinita, então, o problema estaria solucionado e, logo, todos seriam hospedados.

Observe que a solução encontrada corresponde a duas relações biunívocas: a primeira, $f : \mathbb{N} \to P$, em que P é o conjunto dos pares, que corresponde à acomodação dos hóspedes antigos, dada por $f(n) = 2n$; e a segunda, $g : \mathbb{N} \to I$, em que I é o conjunto dos ímpares, que corresponde à acomodação dos novos hóspedes que é dada por $g(n) = 2n - 1$.

Problema 3. *Após algum tempo, chegam ao hotel infinitas famílias e cada uma delas constituída de infinitos membros. E agora, será que o hotel poderá hospedar todo mundo?*

Solução: A resposta também é sim. No entanto, a acomodação dos novos hóspedes é bem mais criteriosa e, acentuadamente, caracterizada por indícios matemáticos. Para que se dê a possível hospedagem de todos, deve-se seguir os seguintes procedimentos:

i- Deve-se pedir que cada hóspede do quarto n, com $n \in \mathbb{N}$ dirija-se para o quarto $2n$. Logo, todos os quartos com enumeração ímpar estarão desocupados.

ii- Deve-se enumerar todas as famílias e todos os seus membros. Assim, sejam k e m as cardinalidades que representam respectivamente membros e famílias, em que $m = 1, 2, \cdots, n, n{+}1, \cdots$ e $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n, n{+}1, \cdots$. Logo, cada um dos indivíduos será associado a um par ordenado (m, k).

iii- Enumera-se cada um dos quartos vagos por $2^m(2k + 1) - 1$, em que k e m representam, respectivamente, famílias e membros.

iv- Pede-se ao indivíduo de número r da família de número s que se dirija ao $2^r(2s + 1) - 1$.

Verifiquemos como ficaria as possíveis ocupações dos quartos pelas famílias e respectivos membros:

Família 0: Sendo seus membros enumerados por $(1, 2, 3, \cdots)$, então, eles irão ocupar, respectivamente, os quartos de números $(1, 3, 7, 15, \cdots)$;

Família 1: Sendo os membros dessa família também enumerados por $(1, 2, 3, \cdots)$, então, eles irão ocupar, respectivamente, os quartos de números $(5, 11, 23, 47, \cdots)$.

Perceba que pode-se acomodar todos os hóspedes, mas como saber se não ocorrerão problemas na acomodação, isto é, em relação a hóspedes distintos serem direcionados a um mesmo quarto? Vejamos.

De fato não há famílias enumeradas com um mesmo número, no entanto, em relação aos indivíduos há alguns que sim, mas de famílias diferentes. Então, suponha que dois indivíduos de numerações a e b que pertencem, respectivamente, às famílias x e y sejam direcionados a um mesmo quarto de número w. Logo,

$$2^a(2x + 1) - 1 = w = 2^b(2y + 1) - 1.$$

Assim, vejamos.

$$
\begin{aligned}
2^a(2x+1)-1 = w &= 2^b(2y+1)-1 \\
2^a(2x+1) &= 2^b(2y+1) \\
\frac{2^a}{2^b} &= \frac{2y+1}{2x+1}.
\end{aligned}
$$

Perceba que se $a = b$, então,

$$
\begin{aligned}
\frac{2^a}{2^b} = 1 &= \frac{2y+1}{2x+1} \Longrightarrow \\
2y+1 &= 2x+1 \\
2y &= 2x \\
y &= x.
\end{aligned}
$$

Perceba que se os indivíduos tiverem os mesmos números, então, eles deverão ser da mesma família. Ou seja, trata-se do mesmo indivíduo.

Caso tenhamos $a \neq b$, supomos sem perda de generalidade que

$$a > b \Longrightarrow a - b = t \in \mathbb{N}.$$

Então

$$a > b \Longrightarrow \frac{2^a}{2^b} = 2^t,$$

em que 2^t é da forma $2u, u \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\frac{2y+1}{2x+1} = 2u \Longrightarrow 2y+1 = 2(2xu+u)$$

em que $2y+1$ é ímpar e $2(2xu+u)$ é par. Absurdo!

Note que se $a < b$ temos

$$a < b \Longrightarrow \frac{2^a}{2^b} = \frac{1}{2^{t_1}},$$

em que 2^{t_1} é da forma $2u_1, u_1 \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\frac{2y+1}{2x+1} = \frac{1}{2u_1} \Longrightarrow (2yu_1 + u_1)2 = 2x+1$$

em que $2x+1$ é ímpar e $2(2yu_1+u_1)$ é par. Absurdo! Logo, temos uma contradição, caso os indivíduos tenham números diferentes. □

De tal maneira, todos os recém chegados podem se hospedar e, em hipótese alguma, dois deles se verão acomodados num mesmo quarto.

Esse paradoxo de Hilbert reflete bem a possibilidade de se efetuar cálculos com conjuntos infinitos e apresenta soluções construídas edificados sobre fundamentações lógico-matemáticas, algo tanto almejado por ele.

Através desse exemplo, Hilbert mostrou de forma muito clara a possível Aritmética do infinito e hoje, Matemática e Física são ainda fortemente influenciadas pelo seu trabalho e sua visão.

Figura 4: David Hilbert (1862-1943)
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/123145371036389640/

Segundo Howard Eves [8], David Hilbert nasceu em 23 de janeiro de 1862 em Königsberg, na Prússia Oriental, hoje cidade de Kaliningrado, Rússia. É considerado como renomado e brilhante professor de Geometria Euclidiana e sendo um dos grandes nomes da Matemática dos séculos XIX e XX.

Em 1886, Hilbert tornou-se professor de Matemática na Universidade de Königsberg e em 1895 passou a lecionar na Universidade de Göttingen, Alemanha, onde passaria o resto de sua carreira e onde gigantes como Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann e Peter Dirichlet tinham sido também professores de Matemática.

Ele era notável em vários ramos da Matemática, como Teoria dos Números, Geometria, Topologia, Equações Diferenciais, Cálculo de Variações, entre outros, além de desenvolver trabalhos no ramo da Física. Em 1899, Hilbert publicou seu livro *Fundamentos da Geometria* (obra que lhe consagrou) e em 1900, Hilbert, num projeto audacioso, ele definiu seus famosos 23 problemas ou *Problemas de Hilbert*. Com isso, conseguiu exercer uma influência maior do que a de qualquer outra pessoa, pois, eles acabaram propiciando uma enorme quantidade de trabalhos produzidos em modelagem matemática no século XX.

Esses 23 problemas ou *Problemas de Hilbert* elevaram a Matemática a um novo patamar e essa lista, disse ele, não era para excluir outros problemas, mas apenas uma amostra deles. Desde que Hilbert apresentou os 23 problemas, uma enorme quantidade de trabalhos tem sido produzidos, buscando suas respectivas soluções. Dentre esses problemas podemos citar alguns que variam de acordo com as suas situações em relação às sua soluções [24]:

- *Hipótese do continuum*: Procura saber se existe algum número transfinito compreendido estritamente entre as cardinalidades de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Esse problema foi solucionado por Paul Cohen em 1963 mostrando que a resposta depende de quais axiomas são usados para a teoria estabelecida.

- *Linha reta como a menor distância entre dois pontos*: O problema consiste em formular axiomas para a Geometria em termos da definição acima de "linha reta" e investigar as implicações. Amplo demais para ter solução definitiva, porém muito trabalho foi feito.

- *Axiomas para a Física*: Desenvolver um sistema rigoroso de axiomas para algumas áreas da Matemática da Física, tais como Probabilidade e Mecânica. Andrei Kolmogorov estabeleceu axiomas para a Probabilidade em 1933.

- *Hipótese de Riemann*: Provar que todos os zeros não triviais da função *zeta* de Riemann encontram-se sobre a linha crítica. Ainda sem solução.

- *Leis de reciprocidade em campos numéricos*: Generalizar a lei clássica da reciprocidade quadrática, sobre quadrados em algum módulo, para potências mais elevadas. Parcialmente solucionado.

- *Finitude de sistemas completos de funções*: Resume-se a estender um teorema de Hilbert sobre invariantes algébricos apar todos os grupos de transformações. Provado falso por Masayoshi Nagata em 1959.

- *Desenvolvimento do cálculo de variações*: Hilbert clamava por novas ideias no Cálculo de |Variações. Embora muitos trabalhos tenham sido produzidos a questão mostra-se vaga demais para ser considerada resolvida.

Em 1902, já com 40 anos de idade, tornou-se coeditor da revista matemática, *Mathematische Annalen* de líderes mundiais. Encerrou seus trabalhos de ensino e pesquisa na Universidade de Göttingen em 1930 ao aposentar-se aos 68 anos de idade, mas continuou trabalhando como editor na referida revista até 1939.

David Hilbert morreu em 14 de fevereiro de 1943 com a idade de 81 anos, em Göttingen.

3 O INFINITO NOS PARADOXOS DE ZENON

Como já foi dito anteriormente, o conceito de infinito foi tema de vários estudos desde tempos que remontam a antiguidade, e apareceram não somente como objeto de estudo, mas também como mecanismos que objetivavam refutar ideias de outrem – mesmo sem que houvesse ainda uma “compreensão” matemática do conceito. Um personagem que aparece no cerne desse tipo de discussão foi Zenon de Eleia, cujos trabalhos se deram por meio de paradoxos [12, p. 151].

Os paradoxos de Zenon são vistos aqui como fator de expressiva contribuição para compreensão do emprego do infinito na Matemática, mas também como uma ótima oportunidade para verificar que tal conceito há tempos intriga o ser humano. Ademais, perceberemos que seus paradoxos propiciaram influências e contribuições significativas para o desenvolvimento do conceito de infinito na Matemática – como na Física – mediante reflexões e questionamentos suscitados por eles.

Ao buscarmos o sentido da terminologia *paradoxo*, percebe-se que, etimologicamente, ela tem o significado de “apresentar uma opinião contrária”. Trata-se de uma palavra de origem grega (*para* = contra; e *doxo* = opinião) e apresenta-se, essencialmente, como uma proposição que carrega uma contradição, sendo muitas vezes percebida como um absurdo para concepções do senso comum. Abaixo apresentamos a definição da palavra paradoxo:

> **Paradoxo**. (Pa.ra.do.xo) [cs] sm. 1 Ideia, conceito, proposição, afirmação aparentemente contraditória a outra ou ao senso comum: Surpreendia a todos com seus paradoxos. 2 Contradição, incompatibilidade com o contexto; falta de coerência: Quanto mais enriquece mais fica preocupado, esse é o paradoxo de sua vida. Paradoxal a2g. [F.: Do latin *paradoxon*] [1, p. 648].

Embora Zenon tenha sido uma das principais referências nesse tipo de proposição, outros vieram a construir proposições análogas, como também houveram outros que não necessariamente objetivavam causar reflexões acerca de determinadas temáticas. No entanto, é evidenciado que a elaboração de paradoxos para explicar, fundamentar, questionar ou refutar ideias ou ideologias são algo recorrentes desde a antiguidade e, em particular, instrumentos presentes como meios de propagação de ideias.

É fato que os paradoxos de Zenon sempre geravam grandes confusões e incertezas, pois traziam em suas estruturas dúvidas concernentes à escolha entre duas perspectivas fundamentadas na racionalidade, no entanto, apresentavam-se contraditórias entre si [12, p. 211]. Segundo Costa, as formulações de Zenon tem atribuições específicas:

> É por intermédio do paradoxo que Zenão demonstra o absurdo e o equívoco de uma determinada posição filosófica, posição esta supostamente contrária à sua. Escondido no paradoxo, o Eleata não mostra o que, mas o que não é; ou ainda mais do que isso: ele mostra o que não pode ser [7, p. 205].

Nesse contexto, torna-se interessante compreender o momento histórico em que ele estava inserido, para que se possa estabelecer um melhor entendimento das intencionalidades que permeiam e caracterizam seus paradoxos. Embora o principal objetivo aqui não seja levar a discussão acerca do conceito de paradoxos para o campo filosófico, nem simplesmente justificá-lo a partir do contexto e realidade social do período.

Zenon elaborou seus paradoxos com o intuito de questionar diretamente algumas correntes de pensamento que ele considerava adversárias por estarem em desacordo com suas ideias. Entre tais "escolas" estavam a dos Pitagóricos que defendiam ideias de *multiplicidade* e de *divisibilidade*, e que eram os principais pontos de divergência com Zenon e sua Escola, que defendiam a *unidade* e a *permanência* [3, p. 55].

Segundo os pitagóricos, números inteiros eram os elementos essenciais e intrínsecos à natureza e que tudo era constituído de números [8, p. 97]. Suas concepções convergiam para a ideia de uma teoria dos números, ou de grandezas, que ficou conhecida como "*Teoria das Mônadas*" [12, p. 191-192]. Segundo tal teoria, existiria uma unidade mínima e, portanto indivisível, que constituiria todas as grandezas. Tal unidade era designada por eles de Mônada e por tal teoria, por exemplo, o tempo e espaço (tema central dos paradoxos a serem abordados aqui) eram, de fato, constituídos de unidades mínimas, respectivamente, de pontos e de instantes.

Tal ideia é apresentada em Caraça quando ela afirma

> [...] que a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos - *mónada* - era assimilado à unidade numérica e, assim, os corpos se formavam por *quantidade e arranjo de mónadas* como os números se formavam por *quantidade e arranjo de unidades* [5, p. 72].

Essa ideia de que tudo era constituído dessa *multiplicidade* de unidades mínimas estava atrelada a uma outra concepção aceita pelos matemáticos e filósofos gregos concernia ao fato de que uma grandeza finita poderia passar por um processo de *divisibilidade* infinita, ao ponto de atingir, pela "*Teoria das Mônadas*", a unidade mínima que a constituía [5, p. 74]. Assim, um segmento finito poderia passar por infinitas subdivisões, em que cada unidade resultante seria considerada a unidade mínima – ou segmento – de comprimento e, portanto, finita. E essas ideias eram duramente criticadas por Zenon [3, p. 55].

Para uma melhor compreensão do trabalho, propomos aqui separar a discussão filosófica da discussão matemática. Assim, iremos apresentar as duas frentes que representaram os ataques à Escola Pitagórica. Uma dessas frentes se deu a partir da descoberta dos incomensuráveis e sua argumentação era de cunho matemático; e a outra era filosófica, em que destacava-se Zenon.

Iniciemos, então, com aquela dos incomensuráveis, mas para isso precisamos entender o que são comensuráveis. Assim, seja AB um segmento de reta que para medi-lo fixemos uma unidade de medida u, tal que $u = 1$. Estipulando que segmentos congruentes tem mesmas medidas e que AB possa ser decomposto em p segmentos congruentes, em que cada um deles seja congruentes a u, então, a medida de AB (aqui denotada por $\overline{AB}$) é $p \cdot u = p$. Nessa situação, temos que p será um número natural. No entanto, pode ser que essa situação não ocorra, isto é, que a medida $\overline{AB}$ não seja constituída de um número exato de vezes do segmento unitário u. Então, $\overline{AB}$ não será um número natural e, portanto, por construção isso nos leva à concepção de números fracionários.

Seja CD um segmento de comprimento x. Considere que ele caiba q vezes em u e p vezes em AB. Perceba que CD de medida x será uma unidade de medida padrão para u e AB e, por isso são considerados comensuráveis [15, p. 53]. Temos

$$\overline{CD} = q \cdot x \Rightarrow x = 1/q$$

e

$$\overline{AB} = p \cdot x = p(1/q) = p/q.$$

É importante salientar que a Escola Pitagórica começou a ruir a partir de sua principal descoberta: o *Teorema de Pitágoras*. Isso se deu pelo fato dos pitagóricos acreditarem na existência apenas de grandezas comensuráveis, isto é, na ideia de que na razão de dois segmentos levaria ou a um número natural ou numa fração p/q, tal que p e q sejam múltiplos de $x \in \mathbb{N}$ e quando $x = 1$, tinha-se p/q irredutível.

Eles acreditaram por muito tempo, como os demais matemáticos gregos, que dois segmentos AB e CD quaisquer eram sempre comensuráveis e também aceitavam sem questionar-se que existiria um terceiro segmento EF tal que $m(\overline{EF}) = \overline{AB}$ e $n(\overline{EF}) = \overline{CD}$ [13, p. 48-49].

Essa ideia de comensurabilidade era reforçada pela Teoria das Mônadas, pois, segundo ela sempre se podia estabelecer uma unidade mínima como padrão de medida: a *mônada*. Assim, compreendia-se a medida de um segmento qualquer como a disposição de uma determinada quantidade dessas unidades mínimas.

As limitações na consistência da teoria dos pitagóricos surgiram pelo fato deles utilizarem-se apenas de medidas comensuráveis e tais limitações ficaram claras quando se tentava resolver o problema da medida da diagonal do quadrado acreditando-se poder tomar um número racional $r = p/q$ irredutível como possível solução, pois, como já foi dito, para os pitagóricos, números se resumiam aos inteiros positivos e às razões entre eles.

O grande abalo à teoria dos pitagóricos ocorre com a descoberta dos incomensuráveis, isto é, de um tipo de segmentos que números naturais e a razão entre eles não são capazes de medi-los. Em outras palavras, segmentos incomensuráveis não apresentam uma unidade padrão de medida. Esse abalo é evidenciado em Eves quando ele afirma:

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. Além disso, parecia contrária ao senso comum, pois intuitivamente havia o sentimento de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional [8, p. 106].

A descoberta dos incomensuráveis surgiu quando tentou-se calcular a diagonal de um quadrado pelo próprio Teorema de Pitágoras. Vejamos isso na consideração a seguir:

Considere um quadrado com medida de lado l unidades de comprimento e d sua da diagonal, tal que, sem perda de generalidade, d/l seja uma fração irredutível.

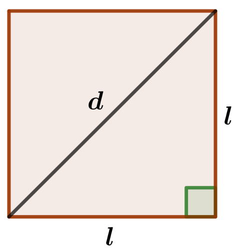

Figura 5: Quadrado de lado l.

Logo, pelo teorema de Pitágoras, sabe-se que sendo d a medida da diagonal, então,

$$\begin{aligned} d^2 &= l^2 + l^2 \\ d^2 &= 2 \cdot l^2 \iff \\ \frac{d^2}{l^2} &= 2 \iff \\ \left(\frac{d}{l}^2\right) &= 2 \Longrightarrow \\ \frac{d}{l} &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Embora hoje seja algo comum para alunos do Ensino Básico, $\sqrt{2}$ se apresentava como algo inesperado, não conhecido e, portanto, não explicável pela *Teoria das Mônadas*. A contradição se dava na passagem $d^2 = 2 \cdot l^2$. Note que d^2 é múltiplo de 2 e de l^2. De fato.

Sendo d um número ímpar, então, ele é da forma $d = 2k + 1$, em que $k \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\begin{aligned} d^2 &= (2k+1)^2 \Longrightarrow \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \Longrightarrow \\ &= 4(k^2 + k) + 1. \end{aligned}$$

Perceba que podemos escrever $k^2 + k = m$, então, temos que

$$d^2 = 4(k^2 + k) + 1 \Longrightarrow d^2 = 4m + 1,$$

que é um número ímpar. Contradição! Lembre que tinha-se $d^2 = 2 \cdot l^2$, isto é, d^2 é par.

Sendo d um número par, então, ele é da forma $d = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\begin{aligned} d^2 &= (2k)^2 \Longrightarrow \\ &= 4k^2 \Longrightarrow \\ &= 2(2k^2) \Longrightarrow \\ &= 2m \end{aligned}$$

que é um número par.

Note que tínhamos

$$d^2 = 2l^2 \Longrightarrow 2l^2 = 4k^2 \Longrightarrow l^2 = 2k^2,$$

isto é, l^2 também é um número par, o que implica em l também o ser.

Como d/l é uma fração irredutível tem-se novamente uma contradição, pois, sendo d e l números pares, então, deve haver que pelo menos o 2 como divisor comum, o que implica numa redutibilidade da fração. Absurdo! □

Essa forma de demonstração por métodos aritméticos e geométricos levou os pitagóricos à constatação da incomensurabilidade da razão da diagonal pelo lado do quadrado e, a partir daí, a teoria pitagórica sofreu inúmeros questionamentos, a ponto de não mais sustentar-se nos pressupostos da comensurabilidade e da Teoria das Mônadas. Matematicamente, a Escola Pitagórica sofreu um contundente abalo.

Apesar do problema, os pitagóricos buscaram sustentá-la mediante o processo de subdivisões sucessivas, buscando fundamentar tal teoria pela propriedade de "continuidade". Essa tentativa desesperada em buscar explicar a continuidade a partir do discreto, isto é, a incomensurabilidade de segmentos a partir de segmentos comensuráveis constituía a base principal da Teoria das Mônadas, como atesta Caraça:

> A ser ela verdadeira, a recta, como toda figura geométrica, seria formada de mónadas postas ao lado uma das outras e, então, ao procurar a parte aliquota comum a dois segmentos, ela encontrar-se-ía sempre, quanto mais não fosse quando se chegasse, por subdivisões sucessivas, às dimensões da mónada - se um segmento tivesse m, outro n vezes o comprimento da mónada: a razão dos comprimentos seria m/n [...] outra tentativa de fuga parece ter residido numa vaga esperança de que, considerando como infinito - um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um muito grande, do que o infinito moderno - o número de mónadas que formam um segmento de recta, talvez a dificuldade desaparecesse [5, p. 74-76].

Tal tentativa catalisou de forma constante e inexorável, vários ataques das mais diversas escolas gregas, destacando-se dentre eles os de Zenon de Eleia, que deixou explícita a contradição na argumentação da escola pitagórica acerca da incomensurabilidade de determinados segmentos – em particular, a da diagonal do quadrado. Segundo o próprio Zenon:

> [...] como querem que a recta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa afirmação fundamental de que todas as coisas tem um número. Com efeito, entre dois corpúsculos, 1 e 2, deve haver um espaço – se estivessem unidos, em que se distinguiam um do outro? – e esse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores concebíveis; logo, entre dois posso intervalar um corpúsculo, 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3, e outro entre

> 3 e 2, nas mesmas condições. Posso repetir o raciocínio indefinidamente e fico, portanto, com a possibilidade de meter entre 1 e 2 quantos corpúsculos quiser. Qual é então o número que pertence ao seguimento que vai de 1 a 2? [5, p. 77].

A outra frente (*filosófica*) que contestava de forma veemente a Escola Pitagórica tinha como principal personagem Zenon de Eleia, um dos primeiros filósofos antigos a observar certas particularidades do infinito, embora, pelo que parece, ele não tenha buscado apresentar uma definição formal para o conceito propriamente dito. Seu intuito principal era apenas em refutar as ideias de *multiplicidade* e de *divisibilidade* defendida pelos pitagóricos, no entanto, sendo relevante salientar que suas contribuições foram de grande valia para o estudo tanto do infinito, como das sequências infinitas e a aritmética que as envolvia.

Zenon utilizou as grandezas de tempo e espaço no seu ataque à construção pitagórica das Mônadas, deixando claras as incoerências de tais argumentações acerca de tentar demonstrar que algumas grandezas contínuas poderiam ser constituídas de um número infinito de unidades mínimas encontradas por um processo de infinitas subdivisões.

Com o intuito de refutar perante os matemáticos da época as contradições da teoria pitagórica, Zenon elaborou seus paradoxos que buscavam mostrar que se o tempo e o espaço, de fato, eram infinitamente divisíveis existindo uma menor unidade de ambos, então, isso implicaria que o movimento seria impossível de acontecer. Em suma, Zenon procurava, a partir dos pressupostos de seus adversários, levá-los ao absurdo. Vejamos como se davam suas ideias.

Para isso, tomemos como verdade a ideia de que, por exemplo, um segmento AB possa passar de um processo de subdivisões sucessivas, sempre tomando-se se ponto médio, como mostra a Figura 6.

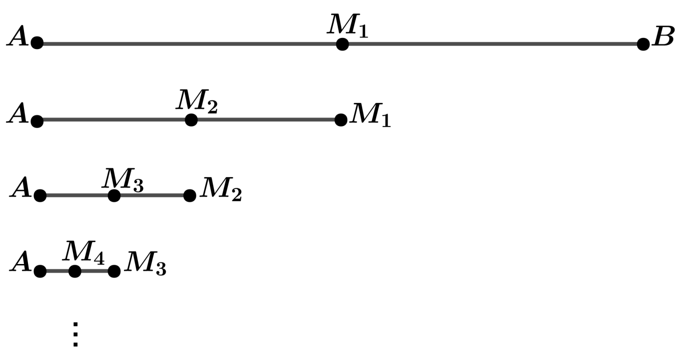

Figura 6: Segmentos AM_n.

Tomando $\overline{AB} = c$ e que M_1 seja seu ponto médio, então, $\overline{AM_1} = c/2$; tomando M_2 como ponto médio de $\overline{AM_1}$, então, $\overline{AM_2} = c/4$; tomando agora M_3 como ponto médio de $\overline{AM_3}$, então, $\overline{AM_3} = c/8$. Perceba que esse processo de se tomar sempre os pontos médios dos segmentos pode continuar infinitamente.

Agora pensemos o seguinte: Quanto tempo se levaria para sair do ponto A para seu ponto sucessor dado por M_n, com $n \in \mathbb{N}$? A resposta é: Nunca! Isso por que o processo de subdivisões se dará de forma ininterrupta infinitamente e, portanto, nunca se sairia do ponto A.

É sobre as próprias formas de pensar dos pitagóricos que Zenon fundamentou seus paradoxos para levá-los à contradição. Ele supunha sempre poder ocorrer a *divisibilidade* ocorrendo infinitamente como também encontrar mediante essas infinitas divisões os pontos que corresponderiam às unidades mínimas (*mônadas*).

Acredita-se que Zenon elaborou cerca de 40 paradoxos, no entanto, todos se perderam, chegando ao nosso conhecimento apenas alguns, sendo relevante salientar que estes não são narrados diretamente por ele, mas por outros filósofos, dentre os quais destacam-se Aristóteles em seu *Livro VI* de *Física*, que narrou alguns de seus paradoxos, afim de refutá-los.

Para que se tenha uma melhor compreensão dos paradoxos que aqui serão abordados, buscamos relatá-los de forma sucinta, mas objetivando ser fiel às ideias apresentadas por Zenon. Aqui serão apresentados dois dos mais famosos paradoxos dele: o de "*Aquiles e a Tartaruga*", e o da "*Dicotomia*".

Em ambos os paradoxos o infinito é a questão chave para levar a Teoria das Mônadas dos pitagóricos à contradição. Mostraremos que, independentemente da versão adotada (há mais de uma para alguns), eles tem em comum Sequências Infinitas e Progressões Geométricas e, por tal característica, eles apresentaram uma solução por caminhos matemáticos. E o que são Sequências Infinitas e Progressões Geométricas? Vejamos cada um dos dois casos.

Definição 6. [13] *Sequência infinita é toda função real de domínio* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, *em que cada elemento da imagem é denominado termo da sequência e sendo representado pelo símbolo* a_n (termo geral), *com* n *representando a posição da sequência ocupada por ele ou*

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots).$$

Exemplo 1. Seja a sequência dada pela função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $f(n) = (-1)^n$, isto é:

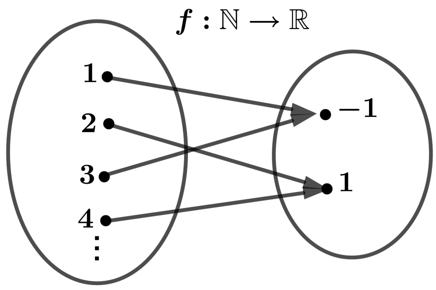

Figura 7: $f(n) = (-1)^n$.

Temos que essa função é uma sequência infinita x_n dada por

$$f(1) = -1, f(2) = 1, f(3) = -1, \cdots, f(n) = (-1)^n.$$

Exemplo 2. Seja a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tal que $g(n) = 2n$, isto é:

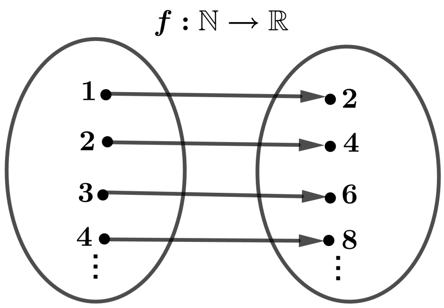

Figura 8: $g(n) = 2n$.

Essa função é uma sequência infinita que pode ser representada por $(2, 4, 6, 8, ...)$

Para nossa discussão, precisaremos também do conceito abaixo:

Definição 7. [13] *Progressão Geométrica é toda sequência*

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto $a_{n+1} = a_n \cdot q$ *do termo anterior por uma constante* q *chamada razão.*

Pela definição, temos portanto que

$$a_2 = a_1 \cdot q;\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2;\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3;\ \cdots$$

Dada uma Progressão Geométrica qualquer, em que seu primeiro termo é a_1, e razão q, então, seu termo geral (enésimo termo) será dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

Um fato que utilizaremos é que $b_n = q^n, |q| < 1$ se aproxima de zero quando n fica grande. Para ilustrar tal fato, consideremos quais os valores assumidos pela sequência $b_n = (1/10)^n, n \in \mathbb{N}$ na Tabela 1.

Valores atribuídos a n	Valores da expressão $(1/10)^n$
1	$(1/10)^1 = 1/10 = 0,1$
2	$(1/10)^2 = 1/10 = 0,01$
3	$(1/10)^3 = 1/10 = 0,001$
4	$(1/10)^4 = 1/10 = 0,0001$
5	$(1/10)^5 = 1/10 = 0,00001$
$\vdots$	$\vdots$
k	$(1/10)^k =$ 0,00...001, com k algarismos zeros
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1: Tabela para valores de n.

Abaixo destacamos um importante resultado acerca da soma dos termos de uma Progressão Geométrica.

Teorema 5. *A soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q, tal que $|q| < 1$ é dada por*

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exemplo 3. Vamos calcular a soma abaixo.

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$$

Note que a soma acima é a soma de infinitos termos de uma progressão geométrica, em que $a_1 = 3/10$ e razão $q = 1/10$.

Logo,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{3/10}{1-1/10} = \frac{1}{3}.$$

A partir do discernimento e compreensão da aplicação do conceito de infinito abordados em sequências, aplicaremos o Teorema 5 em dois paradoxos de Zenon.

Nesses paradoxos, Zenon partia da ideia de que os pressupostos dos pitagóricos da Teoria das Mônadas eram verdades, ou seja, que as ideias de *divisibilidade* infinita e que o espaço constituído de infinitos pontos eram possíveis.

Paradoxo 1. (Aquiles e a Tartaruga) *O destemido herói grego, Aquiles, e uma tartaruga decidem apostar uma corrida. Sendo ele dez vezes mais veloz que ela, fica estabelecido que ele irá dar-lhe uma vantagem deixando-a começar a corrida uma certa distância à frente dele, estando num ponto que corresponda à metade do percurso. Iniciando-se a corrida, quando Aquiles percorre a distância que correspondia à vantagem dada por ele à tartaruga, esta já tivera percorrido uma distância equivalente a* $1/10$ *do que Aquiles percorreu. Logo, ela ainda estaria à sua frente. Prosseguindo a corrida, Aquiles ao percorrer uma distância equivalente a* $1/10$*, então, iria alcançar o ponto anteriormente atingido pela tartaruga e esta já tivera percorrido mais uma distância equivalente a* $1/100$ *do ele havia percorrido. E seguindo esse raciocínio, Aquiles jamais iria alcançar a tartaruga, pois, sempre que ele atingisse certo ponto, ela já teria percorrido certa distância e, consequentemente, estaria num ponto à frente.*

Figura 9: Aquiles e a Tartaruga.
Fonte: https://forumdediscursus.wordpress.com/antiga-2/tudo-parado/

Nesse paradoxo, Zenon parte da ideia de que os pressupostos dos pitagóricos da Teoria das Mônadas são verdades, ou seja, que as ideias de *divisibilidade* infinita e que o espaço constituído de infinitos pontos são possíveis. Assim, como é sempre possível a sucessão infinita de subdivisões e cada uma sempre implica na existência de novos pontos, então, Zenon conclui que Aquiles jamais iria alcançar a tartaruga.

No entanto, na esfera matemática, esse paradoxo de Zenon apresenta uma solução que difere de sua conclusão, isto é, haverá um instante em que Tartaruga é alcançada por Aquiles e, consequentemente a venceria. Vejamos.

Solução: Seja x a distância a ser percorrida por Aquiles e a tartaruga para finalizar o percurso. Note que ao Aquiles avançar uma distância equivalente a $x/2$, a tartaruga avança o equivalente a $x/20$; quando ele avança uma distância equivalente a $x/20$, ela avança uma distância equivalente a $x/200$. Continuando o processo, ambos percorrerão as seguintes distâncias: Aquiles, $5x/9$ e a Tartaruga, $x/9$. Vejamos tais cálculos e comparemos eles.

Seja d_A a distância percorrida por Aquiles. Então

$$d_A = \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}x + \frac{1}{200}x + \frac{1}{2000}x + \cdots = \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right).$$

Note que temos como segundo fator a soma de termos de uma progressão geométrica com infinitas parcelas, em que $a_1 = 1$ e razão $q = 1/10$.

A soma desses infinitos termos é dada por

$$S_\infty = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Logo,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-1/10} = \frac{10}{9}.$$

Podemos concluir que a distância percorrida por Aquiles é

$$d_A = \frac{1}{2}x\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...\right) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}x.$$

Note que ao percorrer todas as infinitas distâncias, Aquiles deverá ter percorrido $5x/9$, isto é, uma parte equivalente a cinco nonos da distância total do percurso da corrida.

Seja d_T a distância percorrida pela tartaruga. Então

$$d_T = \frac{1}{20}x + \frac{1}{200}x + \frac{1}{2000}x + ... = \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...\right).$$

Note que ao percorrer os infinitos pontos, a distância percorrida pela tartaruga é

$$S_\infty = \frac{1/10}{1-1/10} = \frac{1}{9}.$$

Ao comparar as duas respostas, nota-se que a tendência é Aquiles alcançá-la à distância de $5x/9$, pois, a distância atingida por ela ao percorrer os infinitos pontos é

$$d_T = \frac{1}{18}x = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot x = \frac{1}{10}\left(\frac{5}{9}x\right) = \frac{1}{10}d_A \therefore d_T = \frac{1}{10}d_A,$$

isto é, uma distância correspondente a um décimo daquela percorrida por Aquiles.

Paradoxo 2. (Paradoxo da Dicotomia ou do Estádio) *Um corredor pretende percorrer certa extensão. Antes de chegar ao final, ele terá que passar por um ponto localizado no meio do percurso, 1/2 da extensão total. Antes disso, ele deveria passar pelo ponto que corresponde a 1/4 do percurso. Ainda antes, pelo ponto correspondente a 1/8 e, assim, sucessivamente. Como o espaço pode passar por um processo de divisões sem limite, então, há um número infinito de pontos que o corredor deve percorrer antes de chegar ao final de seu percurso. Fica evidente que será necessária uma quantidade de tempo, pois, é necessário atravessar uma quantidade infinita de pontos. Como isso não é possível, logo o corredor não poderia sequer sair da sua posição inicial. Assim, conclui Zenon, ele nunca chegaria ao final!*

Figura 10: O Estádio.
Fonte: https://forumdediscursus.wordpress.com/antiga-2/tudo-parado/

Note que nesse paradoxo também temos a *divisibilidade* presente nas subdivisões infinitas acarretando sempre em novos pontos. Assim, de acordo com Zenon, se pela Teoria das Mônadas pode-se sempre uma ponto médio, então, jamais o atleta iria iniciar a corrida, pois, sempre existiria um ponto médio entre o que determina a posição do atleta e qualquer outro fixado à frente. Logo, isso sendo verdade o atleta jamais iria iniciar à corrida, pois, não sairia do lugar e o movimento seria impossível. Uma contradição, já que a experiência sensível mostra o contrário.

Em outras palavras, sendo P_0 o ponto que determina a posição do atleta, não se conseguiria encontrar um P_1 que fosse exatamente o sucessor de P_0, pois, existiria um P_2 que seria o ponto médio de P_1P_0. De modo análogo, também existira um P_3 que seria o ponto médio de P_0P_2, e assim, por diante. Logo, sempre se encontraria uma sucessão de novos pontos médios dados por

$$P_{k+1} = \frac{P_0 - P_k}{2}$$

e, portanto, o atleta não sairia de sua posição inicial.

Verifica-se mais uma vez o infinito aparecendo nos paradoxos de Zenon, em que a ideia central leva o atleta praticamente à imobilidade, pois, seria necessário a passagem por uma sequência infinita de pontos. No entanto, sob uma perspectiva no âmbito matemático sabemos que isso não acontece, ou seja, o atleta iria iniciar sua corrida como também iria concluí-la. Vejamos então essa perspectiva.

Observando a sequência de forma decrescente, ela seria dada por

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right),$$

e que tal sequência é claramente perceptível como sendo a de uma Progressão Geométrica, em que $a_1 = 1/2$, a razão $q = 1/2$.

Note que, dado um segmento qualquer, sempre é possível estabelecer um ponto médio. Entretanto, apesar de existirem pontos *inatingíveis* através de uma sucessão enumerável, sabemos que a soma desses infinitos pontos resulta num valor finito. Em outras palavras, como é possível calcular a soma das distâncias percorridas pelo atleta, então, temos que o atleta cumpriria sua tarefa.

Nos paradoxos apresentados, "*Aquiles e a Tartaruga*" e o da "*Dicotomia*" (ou do "*Estádio*"), Zenon argumenta que se tempo e espaço podem ser infinitamente divisíveis, então, o movimento seria impossível, pois, seria necessário efetuar uma sequência infinita de atos para atingir os infinitos pontos, algo que não pode ser realizado em um período de tempo finito. Assim, ao demonstrar a impossibilidade do movimento, Zenon, leva ao absurdo os fundamentos da Teoria das Mônadas.

O papel desempenhado pelos pensamentos de Zenon implicou em resultados positivos, pois a partir de seus questionamentos, suscitou a necessidade de uma reflexão acerca de conceitos algumas grandezas como tempo e espaço, números contínuos e de infinito.

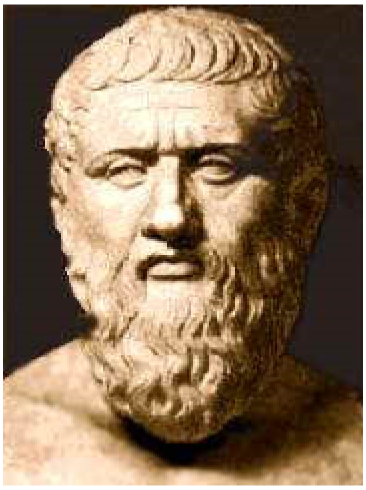

Figura 11: Zenon de Eleia.
Fonte: https://42e54.wordpress.com/category/uncategorized/

Não existe nos tempos atuais nenhuma obra completa e diretamente produzida por Zenon, sendo as fontes principais para os seus paradoxos as citações na obra de Aristóteles e de um comentador aristotélico chamado Simplício.

Zenon de Eleia foi um filósofo grego da escola eleática e discípulo de Parmênides e teria vivido, aproximadamente, entre os anos 490 a.C e 430 a.C. Ele notabilizou-se por seu brilhantismo e, sobretudo, por elaborar uma série de paradoxos que lhe rendeu o status de criador da dialética, apontado por Aristóteles. Assim, mediante um método dialético que antecipou Sócrates, Zenon procurava, partindo dos pressupostos teóricos de seus próprios oponentes, levá-los ao absurdo.

Dentre seus paradoxos, destacam-se os de *"Aquiles e a tartaruga*, o da *Dicotomia"* e o da *"Flecha"*. O argumento central desses paradoxos parte da divisibilidade ao infinito do espaço e da necessidade, portanto, de algum corpo em movimento percorrer um espaço infinito em tempo infinito, o que por ser impossível farão com que o corpo permaneça inerte.

Por volta dos 40 anos, Zenon teria acompanhado seu mestre Parmênides numa viagem a Atenas, tendo então conhecido Sócrates. Conta-se também que, quando sua pátria, a Cidade-Estado de Eleia, foi submetida aos desmandos de um tirano, o Zenon político empreendeu libertá-la, mas acabou de maneira trágica, enfrentando corajosamente terríveis suplícios, sendo torturado para que delatasse seus companheiros. No entanto, ele delatou os aliados do próprio tirano e ainda o xingou de "a peste do Estado".

Com a morte de Zenon, houve uma subversão geral dos cidadãos contra o déspota, e a rebelião culminou com a liberdade do Estado. Há relatos de que Zenon, quando estava sendo interrogado, arrancou a língua com os dentes, mostrando que não falaria nada.

4 O INFINITO NA GEOMETRIA

Nessa seção iremos tratar do conceito e aplicação do infinito no cálculo de áreas de regiões curvas como que envolvem a área do círculo e da parábola, como também mediante um método análogo ao de Arquimedes, iremos estimar uma aproximação para o valor da constante π. Além disso, apresentaremos um método para o cálculo de áreas sob curvas utilizado por Fermat.

Por fins didáticos, em relação às áreas do círculo e do segmento parabólico, não serão apresentados aqui os métodos clássicos para os seus respectivos cálculos, já que os raciocínios originais apresentam-se com certa complexidade, além de exigirem o conhecimento de algumas proposições como pré-requisitos. Portanto, serão adotados métodos distintos dos de Arquimedes por serem considerados mais simples e acessíveis, mas que possibilitem ao leitor ter uma ideia acerca dos métodos originais utilizados por ele, além de possibilitar calcular as áreas do círculo e do segmento parabólico e de se estimar uma boa aproximação para π.

Cabe salientar que esclarecer o leitor no que diz respeito a como se davam os procedimentos do método clássico para os cálculos das áreas das do círculo e do segmento parabólico, como também para a estimativa para o valor da constate π mostra-se não só relevante, mas como também necessário para uma melhor compreensão dos métodos aqui adotados. Assim, entender o momento histórico em que esse método clássico era um procedimento básico dos geômetras gregos será de extrema utilidade.

A área do círculo, como também de outras formas curvilíneas como a da parábola mostrou-se como uma grande desafio aos geômetras gregos. É fato que as ferramentas da Geometria Euclidiana nos permite calcular a área de qualquer triângulo e, a partir daí, de qualquer outra forma poligonal, mas quando se fala de formas curvas, ela se se apresenta insuficiente. Surge então o seguinte questionamento: qual o método seria (ou é) capaz de propiciar o valor das áreas dessas formas planas?

Há indícios de que na Grécia Antiga a Geometria se desenvolveu de modo a buscar a resolução de alguns problemas através de procedimentos de uma Matemática dedutiva. Assim, partindo desses pressupostos, iremos seguir uma ideia análoga à de Arquimedes para obter a área do círculo, mas que não serão métodos idênticos aos utilizados por ele originalmente. No entanto, os procedimentos usados aqui, além de nos dar ideia de como se davam as estratégias de Arquimedes, nos permite calcular a área do círculo.

Basicamente, isso se dava através de um método, cuja descoberta, na verdade é atribuída a Eudoxo (408 a.C - 355 a.C), que ficou conhecido como *Método da Exaustão* e será tratado posteriormente. Por um processo análogo a esse método, iremos tratar de como os grego Arquimedes conseguiu estimar uma boa aproximação para a constante π.

Em relação ao cálculo do segmento parabólico, também não nos utilizaremos do métodos clássicos, que exigiam a utilização de algumas proposições. Seguiremos ideias muito análogas às do *Método da Exaustão*, mas não o faremos seguindo as mesmas proposições que Arquimedes, que demonstrou o valor do segmento parabólico por meio de uma dupla *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) nos moldes do referido método [8, p. 421].

Por fim, também seguindo ideias aos moldes das adotadas no *Método da Exaustão*, iremos apresentar o método utilizado por Pierre Fermat para calcular áreas compreendias entre as retas $y = 0$ e $x = b$, com $0 \leq x \leq b$ e curvas do tipo $y = x^m, m \in \mathbb{N}$.

4.1 O Valor para π por Arquimedes

Estreitamente ligado ao problema do cálculo da área do círculo está o do cálculo de π, razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro [8, p. 141]. Percebeu-se a constante π surgindo mediante cálculos envolvendo a quadratura do círculo e isso foi também notado desde a antiguidade, sempre se mostrando presente nas grandezas que envolviam a figura compreendendo-se como a razão entre seus respectivos comprimentos e diâmetros. Sabe-se que o valor de π = 3,141592653589793... tem uma exorbitante quantidade de casas decimais conhecidas, isso mediante instrumentos de cálculo. No entanto, na época dos gregos isso não era possível, mas isso não os impediu de conseguirem encontrar valores para uma boa aproximação para o número π, claro que levando-se em consideração as limitações da época.

Arquimedes de Siracusa (287–212 a.C.) foi o primeiro a encontrar o valor aproximado da constante mediante fundamentações matemáticas. Sendo capaz de aplicar de forma aprimorada o *Método da Exaustão*, que será mostrado na próxima seção, ele conseguiu obter resultados importantes, como calcular volumes e áreas das superfícies de muitos corpos, como também, apresentou um valor aproximado para π.

Através da computação já são conhecidas significativas aproximações cada vez maiores do valor de π, entretanto, aqui o faremos mediante um método análogo ao desenvolvido por Arquimedes e que ficou conhecido como o *Algoritmo de Arquimedes* [3, p. 93].

Para estimar o valor aproximado da constante π mediante tal método, seguiremos uma linha de raciocínio apresentada em Burton [4], que mostra-se sob uma argumentação acessível, além propiciar ao leitor uma ideia dos métodos originais de Arquimedes. Observe a Figura 12.

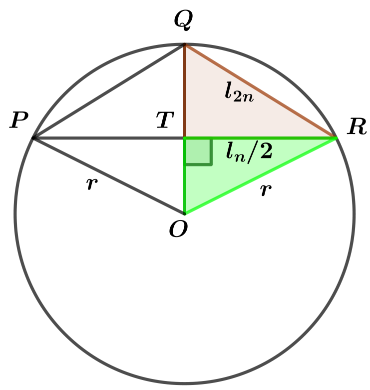

Figura 12: Inserção de polígonos com lados l_n e l_{2n}

Tal método consiste em conjecturar uma fórmula para encontrar a medidas para o comprimento do lado de um polígono regular inscrito num círculo. Assim, sem perda de generalidade, suponha que o segmento PR corresponda ao lado de um polígono P_n regular inscrito com n lados. Note que T é o ponto médio de PR. Com isso, considerando que $\overline{PR} = l_n$, então, $\overline{TR} = (1/2) \cdot l_n = l_n/2$.

Observe que, pelo critério LAL (lado, ângulo, lado) os triângulos $\triangle PTQ$ e $\triangle RTQ$ são congruentes. Logo, $\overline{PQ} = \overline{QR}$. Considere que $\overline{QR} = l_{2n}$ como a medida de outro polígono P_{2n} regular inscrito com $2n$ lados.

Agora observe as seguintes relações existentes.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos no triângulo $\triangle OTR$ que:

$$\overline{OR}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{TR}^2 \Longrightarrow \overline{OT}^2 = \overline{OR}^2 - \overline{TR}^2 \Longrightarrow$$

$$\overline{OT} = \sqrt{\overline{OR}^2 - \overline{TR}^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{{l_n}^2}{4}}$$

Tem-se também

$$\begin{aligned}
\overline{OQ} &= \overline{QT} + \overline{TO} \\
\overline{QT} &= \overline{OQ} - \overline{OT} \\
\overline{QT}^2 &= \left(\overline{OQ} - \overline{OT}\right)^2 \\
&= \left(r - \sqrt{r^2 - (l_n)^2/4}\right)^2.
\end{aligned}$$

Por Pitágoras, temos em $\triangle RTQ$ que:

$$\begin{aligned}
\overline{QR}^2 &= \overline{QT}^2 + \overline{TR}^2 \\
&= \left(r - \sqrt{r^2 - (l_n)^2/4}\right)^2 + (l_n/2)^2 \\
&= r^2 - 2 \cdot r \cdot \left(\sqrt{4r^2 - {l_n}^2}\right)/2 + r^2 - l_n^2/4 + l_n^2/4 \\
&= 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - {l_n}^2},
\end{aligned}$$

o que implica

$$\overline{QR} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - {l_n}^2}}.$$

Note que

$$\overline{PR} = l_n \Longrightarrow \overline{QR} = l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - {l_n}^2}}.$$

Pelas relações apresentadas, segue que sendo l_n do valor da medida de um polígono regular com n inscrito num círculo de raio r, pode-se descobrir a medida do lado de outro polígono regular com $2n$ lados inscrito no mesmo círculo.

Seja $P_n, P_{2n}, P_{4n}, P_{8n}, ..., n \in \mathbb{N}$ a sequência de perímetros de polígonos inscritos num círculo de raio r, em que $P_{2kn} \leq 2\pi r,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Conhecendo-se o perímetro de qualquer polígono da sequência, o Algoritmo de Arquimedes permite descobrir a medida do perímetro do polígono que lhe é sucessor [3, p. 93].

Provando ser um exímio calculista, Arquimedes avaliou a razão entre o diâmetro e o comprimento de um círculo a partir das conjecturas acima. Arquimedes começou inscrevendo o hexágono regular, pois tem-se nesse caso que a medida do lado desse polígono é igual à medida do raio r do círculo que o circunscreve. Então, ele começou com a seguinte desigualdade: $P_6 \leq 2\pi r$.

Considere o hexágono regular inscrito num círculo de raio igual a 1. Logo, o lado desse polígono dado por $l_6 = r = 1$. Sabemos que por construção o perímetro do círculo será maior ou igual ao perímetro do polígono inscrito. Logo, sendo o perímetro do círculo dado por $2\pi r$ e o do hexágono regular por$P_6 = 6l_6$, em que $l_6 = 1$. Então

$$
\begin{aligned}
2\pi r &\geq P_6 \\
2\pi r &\geq 6l_6 \\
2\pi \cdot 1 &\geq 6l_6 \\
2\pi &\geq 6l_6 \\
\pi &\geq 3l_6 \\
\pi &\geq 3 \cdot 1 \\
\pi &\geq 3.
\end{aligned}
$$

Note que com a inscrição do polígono de um polígono regular como seis lados, temos uma aproximação para π de modo que ele seja um valor maior que 3.

Vejamos a aproximação para π utilizando um dodecágono regular dado por P_{12}. Como $l_6 = 1$, temos pelo *Algoritmo de Arquimedes* que

$$
\begin{aligned}
l_{12} &= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - {l_6}^2}} \\
&= \sqrt{2 \cdot 1^2 - 1\sqrt{4 \cdot 1^2 - 1^2}} \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

De forma análoga ao caso anterior, temos que o perímetro do círculo é maior ou igual ao de P_{12}, em que $P_{12} = 12l_{12}$. Verificando o valor de π para o polígono regular de 12 lados e lembrando que $r = 1$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
2\pi r &\geq P_{12} \\
2\pi r &\geq 12 \cdot l_{12} \\
\pi &\geq 6 \cdot l_{12} \\
\pi &\geq 6 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\
\pi &\geq 3,1058...,
\end{aligned}
$$

aproximadamente.

Note que para a constante é satisfeita a desigualdade $\pi \geq n \cdot l_{2n}$. Então, continuando os raciocínios, temos que

$$
l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}},
$$

o que implica

$$\pi \geq 12 \cdot l_{24}$$
$$\pi \geq 12\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$
$$\pi \geq 3,1326...$$

Mediante os mesmos raciocínios, tem-se

$$P_{48} = 48 \cdot l_{48} \Longrightarrow \pi \approx 3,1393...$$

e

$$P_{96} = 96 \cdot l_{96} \Longrightarrow \pi \approx 3,1410...$$

Percebe-se que à medida que o número de lados dos polígonos inscritos irão aumentando, isso implica que o valor de π tende a estabilizar-se nas primeiras casas, diferenciando-se apenas pelas que se distanciam da vírgula e, assim apresentando gradativamente o valor da constante π.

Embora o Algoritmo de Arquimedes possibilite se estender este raciocínio a polígonos com um número grande de lados que tende ao infinito, por limitações da época, Arquimedes estimou o valor da constante para polígonos de 96 lados, chegando por métodos matemáticos a uma aproximação de três casas decimais, em notação atual. No entanto, cabe salientar que os gregos não apresentavam grandezas em forma de decimais, pois só utilizavam-se de números inteiros ou na forma fracionária e, portanto, estimava-se que $\pi \approx \frac{22}{7}$, uma forma muito comum de aproximação para a constante em muitas literaturas matemáticas.

4.2 A Área do Círculo

Desde muito tempo, os seres humanos já se utilizavam dos cálculos de áreas para resolução de problemas em situações do quotidiano, fato que pode ser observado na História da Mesopotâmia e do Egito. No entanto, tratando-se de áreas de superfícies curvas, são datados cálculos de áreas com de fundamentação matemática de períodos que remontam a aproximadamente 450 anos a.C. na Grécia Antiga, onde foram encontrados registros do cálculo de áreas mediante o *"Método da Exaustão"* [23, p. 2].

Esse método é comumente associado a Arquimedes e tem suas demonstrações publicadas por Euclides, no entanto, é creditado a Eudoxo (408 a.C - 355 a.C). Arquimedes, de fato, conseguiu tornar esse problema mais requintado, pois, ao situar um círculo entre as áreas de dois polígonos semelhantes, cujas áreas que tendem à da figura inicial, uma crescendo e outra decrescendo, a área do círculo comprimia-se gradualmente pela dos polígonos inscritos e circunscritos, de modo que, aumentando-se o número de lados, suas áreas se aproximavam da área da circunferência.

O método adotado aqui para o cálculo da área do círculo consiste na inserção gradativa de polígonos regulares, de modo que cada polígono inserido apresente o dobro de lados do polígono anterior, até que a diferença entre área do círculo e a do polígono inscrito se torne tão próxima de zero o quanto se queira.

Esse tipo de procedimento ficou conhecido como *Método da Exaustão* e tem essa nomenclatura adquirida a partir do século XVII. Esse método foi considerado por alguns como saída apontada pela escola dos platônicos aos famosos paradoxos de Zenon de Eleia, que causaram profundos questionamentos à escola dos pitagóricos – que fora profundamente fundamentada pela teoria dos infinitésimos de Demócrito [8, p. 418].

Era de conhecimento dos gregos a prática de se calcular a área de um polígono qualquer mediante a divisão deste em triângulos e, em seguida, somava-se as áreas encontradas, como mostra a Figura 13.

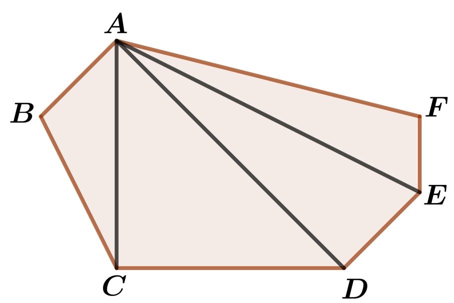

Figura 13: Decomposição de polígonos em triângulos.

Se S é o valor da área do polígono $ABCDEF$, então tal área pode ser obtida pela soma das áreas dos triângulos que compõem o referido polígono. Assim,

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF.$$

De fato, temos uma forma muito eficiente para se calcular a área de polígonos, porém, a situação mudava quando se tratava de regiões curvas, pois, calcular suas áreas não era tão simples e a decomposição em triângulos não se apresentava como método eficaz. Portanto, o *Método da Exaustão* emergiu como estratégia capaz de resolver, na época, os problemas pertinentes aos cálculos de determinadas áreas curvas. Trata-se como uma forma de se calcular a área do círculo mediante sucessivas aproximações por áreas de polígonos nele inscritos, em que tais polígonos tinham suas áreas conhecidas. Um dos primeiros registros desse tipo de estratégia é mencionado em Eves:

> Uma das contribuições importantes mais antigas ao problema da quadratura do círculo foi dada por Antífon, o sofista (c. 430 a.C.), um contemporâneo de Sócrates. Consta que Antífon teria antecipado a ideia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia [...] a corajosa abordagem de Antífon continha o germe do famoso Método de Exaustão grego [8, p. 418].

Vejamos a ideia mediante a Figura 14:

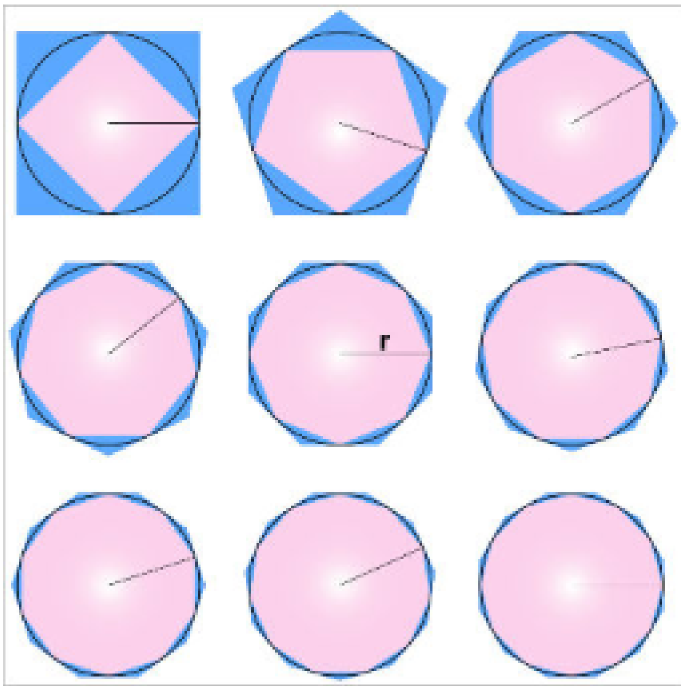

Figura 14: Inscrição e circunscrição de polígonos regulares num círculo de raio r. Fonte: https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/elementos-poligono-regular-inscrito.htm

Com a Figura 14 fica clara a ideia de que quanto maior for a quantidade do número de lados apresentados pelo polígono inscrito, mais próxima será sua área da do círculo que o circunscreve.

Para determinar a área do círculo, seguiremos uma linha de raciocínio originalmente atribuída a Eudoxo e aprimorada por Arquimedes, e que está descrita em Boyer [3, p. 68]. Para atender a linha de raciocínio aqui exposta, será inicialmente inscrito um quadrilátero regular num círculo de raio r e, em seguida, tomando cada ponto médio dos lados, ligando-os e fazendo-os de novos vértices constrói-se um octógono regular também inscrito no círculo, como mostra a Figura 15.

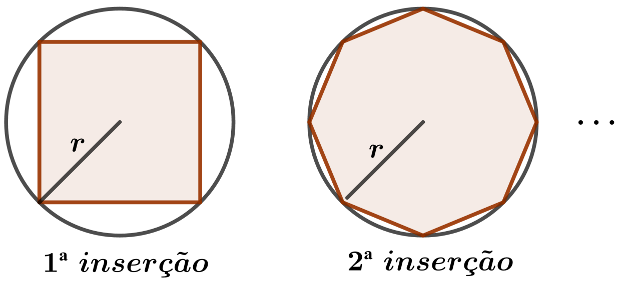

Figura 15: Inscrição de polígonos com 2^n lados.

Seguindo os mesmos raciocínios teremos a construção de um polígono regular com 2^n lados, $n \geq 2$, na enésima etapa de procedimentos. Esses polígonos poderão ser decompostos em 2^n triângulos isósceles como na Figura 16.

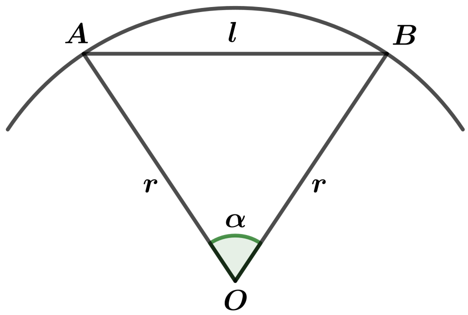

Figura 16: Triângulo da enésima inserção.

Note que como o polígono inscrito é regular, então, $\alpha = 360°/2^n$. Bissectando o ângulo α pelo segmento $\overline{OM}$, tal que M se encontra no ponto médio segmento $\overline{AB}$ e como $\triangle OAB$ é isósceles, pois, $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ correspondem ao raio do círculo, tem-se que o triângulo $\triangle OMB$ é retângulo em M, sendo que seus catetos correspondem ao apótema (correspondente à altura do triângulo) e à metade da medida do lado do polígono e a hipotenusa corresponde ao raio do círculo, como mostra a Figura 17.

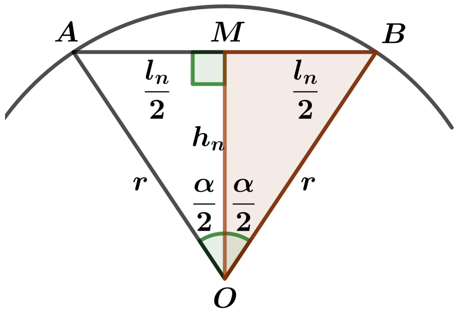

Figura 17: Razões trigonométricas no triângulo da enésima inserção.

Seja l_n a medida do lado do polígono regular inscrito no círculo na enésima etapa procedimentos.

Independentemente do número n de iterações, note que tem-se as mesmas razões trigonométricas a seguir.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{MB}}{\overline{OB}} = \frac{l_n/2}{r} \Longrightarrow l_n = 2r\sin(\alpha/2),$$

em que $\alpha/2 = 180°/2^n$;

A outra relação é dada por

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{h_n}{r} \Longrightarrow h_n = r\cos(\alpha/2),$$

em que $\alpha/2 = 180°/2^n$.

Note que a área dos polígonos obtidos a cada iteração irá aumentar sucessivamente, mas, não poderá ultrapassar a área do círculo, pois por construção eles estão inscritos e, portanto, a área do círculo poderá ser obtida quando fizermos o número de lados dos polígonos serem tão grandes quanto quisermos.

Seja P_n a área do polígono obtida na enésima etapa, o qual pode ser decomposto em 2^n triângulos isósceles idênticos, cujas áreas A_t são dadas por

$$A_t = \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{2r\sin(\alpha/2)\cdot r\cos(\alpha/2)}{2} = r^2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2).$$

Logo,

$$P_n = 2^n \cdot At = 2^n r^2 \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2).$$

Observe que $\alpha/2 = \pi/2^n$.

Logo, à medida que n é muito grande, temos que $\cos(\alpha/2)$ se aproxima de $\cos 0 = 1$. Note que,

$$2^n \sin(\alpha/2) = 2^n \sin(\pi/2^n) = \pi \left(\frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \right).$$

Quando n se torna grande, tem-se que $\left(\frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \right)$ se aproxima de 1, o que pode ser observado na Tabela 2.

Valores de n	Valores da expressão $\left(\frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \right)$
2	0,9003163161...
3	0,9744953584...
4	0,9935868511...
$\vdots$	$\vdots$
10	0,9999984312...
$\vdots$	$\vdots$
100	0,9999999999...
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2: Valor limite da expressão em função de n.

Logo, temos que a expressão $\left(\frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \right)$ tende a assumir valor igual a 1, quando n se torna grande.

Logo,

$$P_n = 2^n r^2 \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) = \pi \left(\frac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \right) \cos(\alpha/2) r^2 = \pi \cdot 1 \cdot 1 \cdot r^2 = \pi r^2.$$

Portanto, P_n se aproxima de πr^2 o quanto se queira, o que nos permite concluir que a área do círculo de raio r é igual a πr^2.

4.3 A Área do Segmento Parabólico

Dentre a vasta quantidade de trabalhos desenvolvidos por Arquimedes, destaca-se um concernente à Geometria Plana que diz respeito a área do segmento parabólico e isso, ele o fez por meio de algumas proposições que ele dizia estar contidas no Livro

Cônicas de Euclides, mas que não chegou até nós [21, p. 138]. A demonstração fica mais clara no livro *O Método dos Teoremas Mecânicos*, encontrado em 1899 e que fora escrito para Eratóstenes. Nele é mostrado que a área de um segmento parabólico é 4/3 da área do triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela à base [22, p. 108].

Cabe salientar, no entanto, que o método a ser utilizado para o cálculo da área do segmento parabólico não seguirá os métodos seguidos por Arquimedes. O resultado será obtido mediante aplicação da fórmula da soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, conforme [9, p. 491]. Assim, considere os segmento parabólico que é limitado pela parábola dada por $y = x^2$ e pela corda $\overline{AB}$.

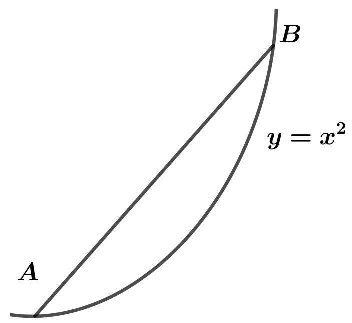

Figura 18: Segmento parabólico 1.

Note que dado um trapézio qualquer, o segmento que liga os pontos médios dos lados não paralelos corresponde à semissoma das bases (lados paralelos). Observe a Figura 19.

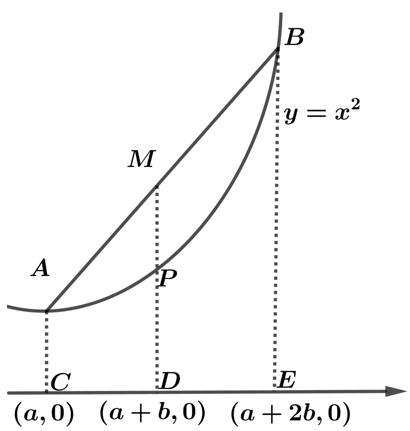

Figura 19: Segmento parabólico 2.

Perceba que M é o ponto médio de $\overline{AB}$, D é o ponto médio de $\overline{CE}$ e, logo, tem-se que $\overline{CD} = \overline{DE} = b$. Lembre-se que como cada ponto da parábola é dado por $y = x^2$ e como A, P e B pertencem à curva y, então, observe que: $\overline{AC} = b^2$; $\overline{DP} = (a+b)^2$; e $\overline{EB} = (a+2b)^2$.

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\overline{MD} &= \frac{\overline{AC} + \overline{BE}}{2}\\ &= \frac{a^2 + (a+2b)^2}{2}\\ &= \frac{a^2 + a^2 + 4ab + 4b^2}{2}\\ &= \frac{2a^2 + 4ab + 4b^2}{2}\\ &= a^2 + 2ab + 2b^2.\end{aligned}$$

Agora note que $\overline{MP} = \overline{MD} - \overline{PD}$. Assim,

$$\begin{aligned}\overline{MP} &= \overline{MD} - \overline{PD}\\ &= a^2 + 2ab + 2b^2 - (a+b)^2\\ &= a^2 + 2ab + 2b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)\\ &= b^2.\end{aligned}$$

De acordo com a figura abaixo, perceba que $\overline{MP}$ é um lado comum aos triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$, o que implica que suas alturas em relação é base $\overline{MP}$ são dadas pela medida b. Isto é, do modo como se procedeu, a altura dos triângulos são as distâncias entre os pontos pertencentes ao eixo das abscissas dadas.

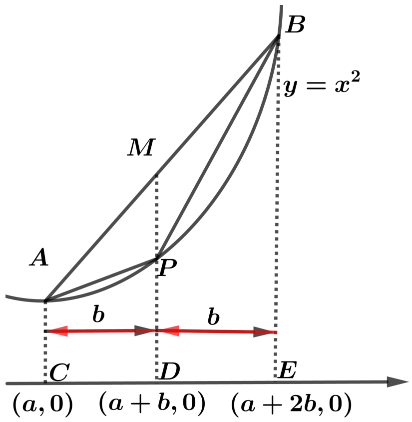

Figura 20: Segmento parabólico 3.

Perceba na Figura 20 que a área do triângulo $\triangle APB$ é dada pela soma das áreas dos triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$. Sejam Δ_1, Γ_1 e Γ_2 as áreas de $\triangle APB, \triangle AMP$ e $\triangle BMP$ respectivamente. Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \\ &= \frac{\overline{MP} \cdot \overline{CD}}{2} + \frac{\overline{MP} \cdot \overline{DE}}{2} \\ &= \frac{b^2 \cdot b}{2} + \frac{b^2 \cdot b}{2} \\ &= \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \\ &= b^3 \end{aligned}$$

que, genericamente, corresponde à área obtida relativa à de uma primeira aproximação para a área do segmento parabólico e para facilitar cálculos ulteriores, observe de forma atenta que

$$\triangle APB = b^3 = \overline{(CD)}^3 = \overline{(DE)}^3.$$

Para dar continuidade ao cálculo da área do segmento parabólico, pode-se supor sem perda de generalidade que A seja o ponto de origem do sistema de coordenadas, como pode ser ilustrado pela Figura 21.

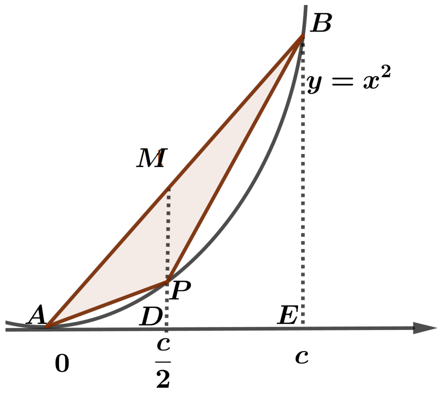

Figura 21: Segmento parabólico 4.

Pelas relações encontradas anteriormente, tem-se agora que $\overline{CD} = c/2$. Logo, a área do triângulo $\triangle APB$ deverá ser dada por

$$\overline{CD}^3 = \left(\frac{c}{2}\right)^3 = \frac{c^3}{8}.$$

Mediante a tomada de dois novos pontos P' e P'' na parábola, tal que segmentos paralelos ao eixo das ordenadas que vão de tais pontos ao eixo X encontrem os pontos médios dos segmentos já seccionados no referido eixo, façamos a inserção de novos triângulos no segmento parabólico mediante os pontos pertencentes à parábola dados por $P' = (c/4, 0)$ e $P'' = (3c/4, 0)$, tais que se tenham os triângulos $\triangle APP'$ e $\triangle BPP''$, como ilustra Figura 22.

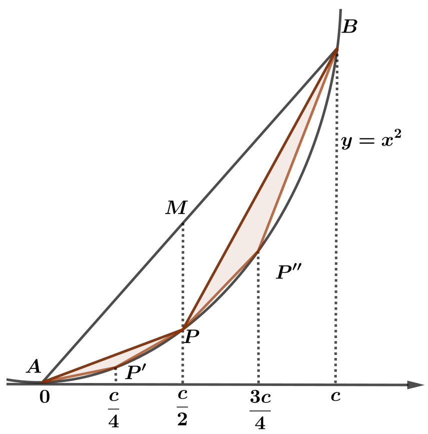

Figura 22: Segmento parabólico 5.

Como os triângulos inseridos estão sob as mesmas condições que o triângulo $\triangle APB$, perceba que utilizando-se dos mesmos raciocínios anteriores, tem-se que as áreas dos triângulos $\triangle APP'$ e $\triangle BPP''$ são dadas respectivamente por

$$\Delta_2 = \left(\frac{c}{4}\right)^3 = \frac{c^3}{64}$$

e

$$\Delta_3 = \left(\frac{3c}{4} - \frac{c}{2}\right)^3 = \left(\frac{c}{4}\right)^3 = \frac{c^3}{64}.$$

Logo,

$$\triangle_2 + \triangle_3 = \frac{c^3}{64} + \frac{c^3}{64} = 2 \cdot \frac{c^3}{64} = \frac{c^3}{32}.$$

Agora perceba que

$$\frac{c^3}{32} = \frac{1}{4}\left(\frac{c^3}{8}\right),$$

isto é, a áreas dos novos triângulos inseridos no segmento parabólico correspondem a $1/4$ do triângulo $\triangle_1$. Assim, obteve-se uma nova aproximação para área do segmento que agora é dada por

$$\triangle_1 + (\triangle_2 + \triangle_3) = \frac{c^3}{8} + \frac{c^3}{32} = \frac{c^3}{8} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{c^3}{8}\right) = \frac{c^3}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right).$$

Continuando o processo de inserções de novos triângulos tomam-se novos pontos médios como os que já foram tomados anteriormente, pode-se deduzir que a soma das novas áreas encontradas serão equivalentes a $1/4$ das áreas dos triângulos anteriores imediatamente inseridos no segmento parabólico. Assim, tem-se que o valor da soma das áreas dos novos triângulos inseridos será dada por

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{c^3}{32}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{c^3}{8}\right),$$

isto é, equivale $1/16$ da área do triângulo $\triangle_1$.

Assim, a nova aproximação para área dos segmento parabólico será dada pela soma das áreas dos triângulos até agora inseridos, dada por

$$\frac{c^3}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{c^3}{8}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{c^3}{8}\right) = \frac{c^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right).$$

Fazendo $\dfrac{c^3}{8} = A_T$, e prosseguindo como raciocínio, temos que a área procurada é

$$S = \frac{c^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) = \frac{4}{3}A_T,$$

em que foi usada a fórmula da soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica, como queríamos demonstrar. □

O método de demonstração da área do segmento parabólico por Arquimedes se deu de modo diferente. Ele supunha S como sendo a valor da área do segmento parabólico dado e seguia algumas proposições que levava-o à constatação por dupla *reductio ad absurdum* em que $S > 4A_T/3$ e $S < 4A_T/3$ levam a contradições [8, p. 420].

Logo, as desigualdades não sendo satisfeitas isso implicaria em $S = \dfrac{4}{3}A_T$.

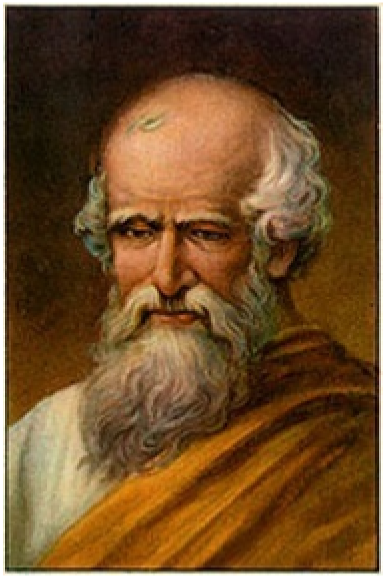

Figura 23: Arquimedes.
Fonte: https://www3.unicentro.br/petfisica/2016/05/15/cientistaarquimedes/

Segundo Howard Eves [8], Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) era filho de um astrônomo, chamado Fídias, e também adquiriu uma reputação em Astronomia. Ele era natural da cidade de cidade grega de Siracusa, localizada na ilha da Sicália. É provável que ele tenha estudado na Universidade de Alexandria,já que existem registros que apontam contatos entre ele e alguns sucessores de Euclides, entre eles Cônon e Dositeo, como também Erastótenes que fora bibliotecário da Universidade de Alexandria.

É considerado como o maior gênio da antiguidade e desenvolveu trabalhos de valores expressivos tanto na área da Matemática quanto na Física e a ele são atribuídas célebres frases e expressões, como: *"Dê-me uma alavanca que moverei o a Terra"*; e *"Eureka, eureka!"* (que quer dizer "Achei, achei"), sendo essa expressão famosa por estar associada a um episódio em que ele saiu despido nas ruas gritando-a.

Seus trabalhos são considerados como muito bem fundamentados e de grande originalidade. Apenas cerca de 10 de seus vários tratados foram preservados até à atualidade, no entanto, há indícios de outros que são mencionados em obras de outrem. Eles abrangem a Geometria Plana (onde se apresentam os tratados *A Medida de um Círculo, A Quadratura da Parábola* e *Sobre as Espirais*), a Geometria Espacial (*Sobre a Esfera e o Cilindro* e *Sobre os Cones e Esferóides*), a Aritmética (dois opúsculos, onde apenas um dos quais preservou-se: *O Contador de Areia*, que aborda como determinar a quantidade de grãos de areia capaz de preencher uma esfera de centro na Terra e raio alcançando o Sol); a Matemática Aplicada (*Sobre o Equilíbrio de Figuras Planas* e *Sobre os Corpos Flutuantes*), entre outros que foram perdidos. É relevante salientar que todos esses tratados foram fundamentados sob expressivo rigor matemático.

Ele também desenvolveu inventos engenhosos, como o *Parafuso de Arquimedes*, alavancas, catapultas, entre outros. É muito comum ler histórias acerca dele e de suas invenções. Uma delas concerne ao conflito greco-romano, onde Siracusa resistiu ao sítio de Roma por quase três anos. Tal resistência se deu por meio dos engenhosos inventos de guerra de Arquimedes, utilizados para deixar os romanos à distância. Entre elas: catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos; e espelhos que concentravam os raios solares para queimar os navios inimigos.

Arquimedes morreu no ano de 212 a.C. durante a Segunda Guerra Púnica em Siracusa. No episódio, a cidade estava sendo saqueada pelos romanos. Dizem que após não dar ouvidos a um soldado romano devido estar altamente concentrado na resolução de um problema, o soldado enfureceu-se por falar com ele várias vezes sem que Arquimedes lhe desse atenção, então, o soldado o matou.

4.4 Fermat e o Cálculo de Áreas

Devido à seção anterior, uma pergunta seria pertinente: como se poderia calcular a área regiões curvilíneas que não fossem dadas somente por parábolas? Esse tipo de problema só passou a ser solúvel, obviamente, após a instituição da Geometria Analítica sendo que uma relevante contribuição para esse tipo de problema fora dada por seus fundadores: René Descartes e Pierre de Fermat, este último sendo considerado por alguns como o maior matemático do século XVII.

Isso fica evidenciado em Eves quando ele afirma

> Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat, como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois das contribuições desses dois homens à Geometria Analítica é que essa ganhou contornos iniciais da forma que estamos familiarizados [8, p. 383].

Fermat conseguiu obter a área delimitada pela curva $y = x^m$, $m \in \mathbb{N}, m \neq 1$ e $0 \leq x \leq b$, com $b > 0$, o eixo das abscissas e a reta $x = b$.

O método utilizado por Fermat se deu mediante a aproximação da área procurada, através da utilização de retângulos auxiliares como na Figura 24.

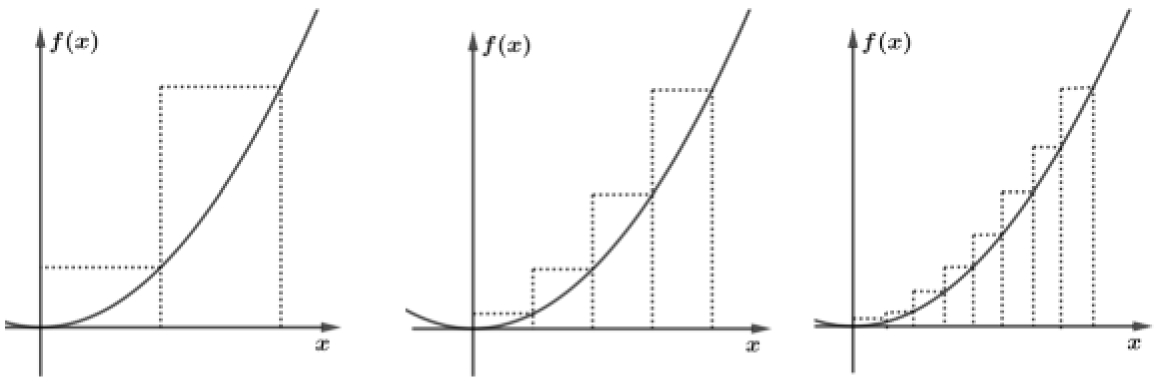

Figura 24: Inserção de retângulos na curva $y = x^2$.

Observe que se considerarmos infinitos retângulos com bases pequenas tem-se uma aproximação da área delimitada pela curva. Mais ainda, se as bases forem muito pequenas, teremos um valor exato da área procurada.

Nessa seção apresentamos o método utilizado por Fermat e seguiremos o raciocínio apresentado em Guidorizzi [9]. Para compreender tal método, observe a Figura 25, cuja curva é dada por $y = x^2$.

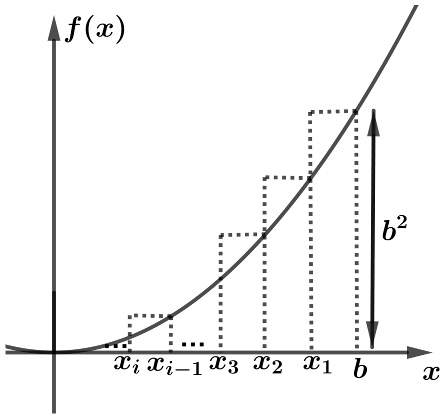

Figura 25: Inserção de n retângulos.

Seja $0 \leq \alpha \leq 1$ um número fixado.

Considere agora os números $x_i = \alpha^i b, i \in \mathbb{N}$. Note que o retângulo maior tem a medida de sua base dada por $b - x_1 = b - (\alpha^1 b)$ e sua altura é dada por b^2. Logo, denotando esse retângulo por A_1, sua área será dada por

$$(b - (\alpha b)) \cdot b^2 = b^3(1 - \alpha).$$

Verifica-se que o retângulo A_2 à esquerda tem sua área da por

$$\begin{aligned} A_2 &= (x_1 - x_2) \cdot {x_1}^2 \\ &= (\alpha^1 \cdot b - \alpha^2 \cdot b) \cdot (\alpha^1 \cdot b)^2 \\ &= (\alpha \cdot b - \alpha^2 \cdot b) \cdot (\alpha \cdot b)^2. \end{aligned}$$

Assim, procedendo de modo análogo e continuando-se o processo de cálculo das áreas dos retângulos inseridos partindo da direita para a esquerda, isto é, do maior para o menor, tem-se que suas áreas são dadas, respectivamente, por:

$A_1 = (b - \alpha b) \cdot b^2 = b^3(1 - \alpha);$

$A_2 = (\alpha b - \alpha^2 b) \cdot (\alpha b)^2 = b^3 \alpha^3 (1 - \alpha);$

$A_3 = (\alpha^2 b - \alpha^3 b) \cdot (\alpha^2 b)^2 = b^3 \alpha^6 (1 - \alpha);$

$A_4 = (\alpha^3 b - \alpha^4 b) \cdot (\alpha^3 b)^2 = b^3 \alpha^9 (1 - \alpha);$

$\vdots$

$A_k = (\alpha^{k-1} \cdot b - \alpha^k \cdot b) \cdot (\alpha^{k-1} \cdot b)^2 = b^3 \alpha^{3(k-1)} (1 - \alpha);$

$\vdots$

Note que o valor da área que procuramos é aproximadamente igual a área equivalente à soma dos retângulos $A_n, n \in \mathbb{N}$ mencionados acima com n representando a quantidade destes se apresenta grande.

Perceba que as áreas de todos os retângulos são termos de uma Progressão Geométrica, pois todas possuem como fator comum $b^3(1-\alpha)$. Portanto, a soma A_c das áreas dos infinitos retângulos será dada por

$$\begin{aligned} A_c &= b^3(1-\alpha) + b^3\alpha^3(1-\alpha) + b^3\alpha^6(1-\alpha) + ... \\ &= b^3(1-\alpha)\cdot\left(1+\alpha^3+\alpha^6+\alpha^9+\alpha^{12}+...\right) \\ &= b^3(1-\alpha)\left(\frac{1}{1-\alpha^3}\right), \end{aligned}$$

devido à fórmula da soma infinita dos termos de uma Progressão Geométrica.

Temos que $1-\alpha^3 = (1-\alpha)(\alpha^2+\alpha^1+1)$. Logo,

$$A_c = \frac{b^3(1-\alpha)}{(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha+1)} = \frac{b^3}{\alpha^2+\alpha+1}.$$

Note que quando α se aproxima de 1, a quantidade de retângulos se torna grande e, então, temos que A_c se aproxima de $b^3/3$.

Vejamos agora, como demonstrar a fórmula para as funções do tipo $y = x^m, m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq x \leq b$, também com as mesmas delimitações que no caso anterior.

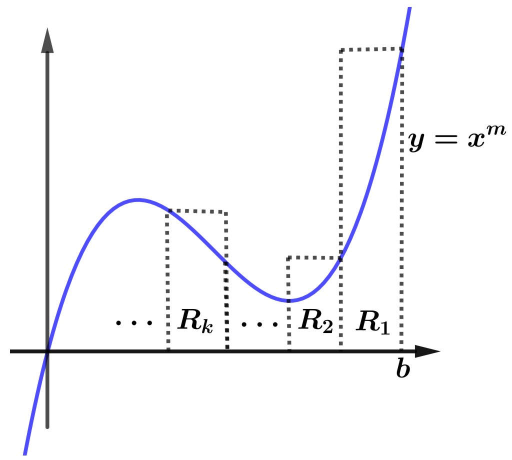

Figura 26: Inserção de retângulos na curva $y = y^m$.

Fixe novamente $0 < \alpha < 1$ e seja $x_i = b\cdot\alpha^i$, em que $i \in \mathbb{N}$. Considere os retângulos auxiliares como antes. Note que as bases de todos os retângulos são expressas pela diferença $(b\alpha^{i-1} - b\alpha^i)$ e suas alturas por $(b\alpha^{i-1})^m, i \in \mathbb{N}$. Então, todos os retângulos

R_i terão suas áreas dadas por

$$\begin{aligned} R_i &= (b\alpha^{i-1} - b\alpha^{i})(b\alpha^{i-1})^m \\ &= (b\alpha^{i-1})(1-\alpha)(b\alpha^{i-1})^m \\ &= (b\alpha^{i-1})(1-\alpha)(b^m\alpha^{(i-1)m}) \\ &= (b^{m+1})(1-\alpha)(\alpha^{(i-1)(m+1)}). \end{aligned}$$

Seja $A_c = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \cdots$, então, temos

$$\begin{aligned} A_c &= (b^{m+1})(1-\alpha) + (b^{m+1})(1-\alpha)(\alpha^{m+1}) + (b^{m+1})(1-\alpha)(\alpha^{m+1})^2 + \cdots \\ &= (b^{m+1})(1-\alpha)\left(1 + \alpha^{m+1} + (\alpha^{m+1})^2 + (\alpha^{m+1})^3 + \cdots\right) \end{aligned}$$

Perceba que

$$\left(1 + \alpha^{m+1} + (\alpha^{m+1})^2 + (\alpha^{m+1})^3 + \cdots\right)$$

é a soma dos infinitos termos de uma Progressão Geométrica, em que $a_1 = 1$ e $q = \alpha^{m+1}$. Logo, sua soma é dada por

$$S_\infty = 1 + \alpha^{m+1} + (\alpha^{m+1})^2 + (\alpha^{m+1})^3 + \cdots = \frac{1}{1-\alpha^{m+1}}.$$

Temos então que

$$A_c = \frac{(b^{m+1})(1-\alpha)}{1-\alpha^{m+1}} = \frac{b^{m+1}(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\alpha^m)} = \frac{b^{m+1}}{1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^m}.$$

Para que a aproximação da área da soma dos infinitos retângulos seja a melhor possível, fazemos α se aproximar de 1. Com isso, temos então que

$$A_c = \frac{b^{m+1}}{m+1}$$

que é o desejado. $\square$

É relevante salientar que o método de Fermat também é válido para curvas do tipo $y = x^{\frac{p}{q}}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, o que não faremos e deixamos como exercício ao leitor.

Figura 27: Pierre Fermat(1601-1665).
Fonte: https://study.com/academy/lesson/pierre-de-fermat-contributions-to-math-accomplishments.html

Segundo Howard Eves [8, p. 389], Pierre de Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, em 1601. Era filho um grande mercador de peles que exercia o cargo de segundo cônsul de Beaumont, chamado Dominique Fermat. Aos 15 anos, ingressou na Universidade de Toulouse, de onde saiu como bacharel em Direito. Uma vez concluído seu curso, serveiu durante algum tempo ao Parlamento de Toulouse como Consultor Jurídico e, mais tarde, como Conselheiro Jurídico, duas funções bastante importantes.

Dedicou seu lazer à Matemática, embora, tenha suas produções quase que não publicadas em vida. No entanto, ele manteve correspondências com alguns matemáticos de seu tempo, entre eles Pascal. Fermat promoveu enormes influências sobre a Matemática dando os entornos da Matemática moderna e, foi considerado por muitos, inclusive Pascal, como o maior matemático do século XVII.

Juntamente com René Descartes, ele fora responsável pela criação da Geometria Analítica e nela, Fermat mostra em 1629, as equações gerais da reta, da circunferência e de algumas cônicas.

Fermat também propiciou significativas contribuições a uma outra área da Matemática, que era objeto de estudo dos matemáticos de seu tempo: o Cálculo Infinitesimal. O próprio Newton (1642-1727), que foi quem desenvolveu e aprofundou esta área da

Matemática, baseou a sua teoria no método de traçar tangentes de Fermat.

Suas correspondências com Pascal constituíram as bases para lançar os fundamentos para criação da Combinatória e da Teoria Matemática da Probabilidade. No entanto, o seu campo predileto de estudos e que mais lhe rendeu notoriedade, foi o da Teoria dos Números. Nesse campo, Fermat deu expressivo impulso à Aritmética superior moderna exercendo grande influência sobre o desenvolvimento da Álgebra.

Embora Fermat não tenha se preocupado em publicar os trabalhos fruto de seus estudos, cópias manuscritas costumavam circular. Coube a seu filho, Clement-Samuel, publicá-las postumamente, em 1679. Fermat faleceu em 1665 na cidade Castres [8, p. 390].

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante todo o trabalho foi procurado mostrar não somente o conceito de infinito, mas também algumas de suas vastas aplicações, de modo que estas possam ajudar o leitor na construção das ideias relacionadas a ele e como são empregadas em vários ramos da Matemática. Com isso, ficou evidente que seu emprego perpassou por discussões filosóficas, aplicações na Álgebra (funções, sequências, etc.) e na Geometria, ramo este em que foram apresentados cálculos que envolviam áreas de regiões curvilíneas.

Relacionados a todos os cálculos, buscou-se como estratégia algo pouco explorado no Ensino Básico, que concerne em levantar informações acerca de suas histórias e de seus desenvolvimentos, como também dos matemáticos que foram responsáveis ou que promoveram de algum modo, contribuições de alguma expressividade. Com isso, através da retrospectiva histórica intencionou-se construir uma maior fundamentação para que se possa dar substância ao significado do conceito de infinito.

Uma outra estratégia que, acredita-se, possibilitar uma melhor assimilação do conceito e seu respectivo emprego e que mostrou-se presente em todos os capítulos do trabalho, concerne ao emprego do infinito matemático na resolução de problemas e paradoxos, implicando numa forma mais didática de explanação das ideias desenvolvidas em cada um dos capítulos.

Ficou claro que ao realizar a pesquisa, buscou-se "construir" a definição e o emprego do infinito matemático. Para isso, utilizou-se de recursos e argumentações que se apresentassem como cabíveis ao Ensino Básico, sendo em vários momentos evitado o uso de conceitos não tratados no referido nível de ensino.

Evidenciou-se a possibilidade de elevar o nível do significado de infinito mediante uma quantidade mínima de teoremas, axiomas, definições entre outros conceitos matemáticos com objetivo de se apresentar aos agentes do Ensino Básico, isto é, docentes e discentes, um trabalho que atenda o principal objetivo proposto na pesquisa que é atenuar a diferença que se mostra gritante entre as concepções de infinito que existem entre os níveis básico e superior de ensino. Os argumentos foram os mais sucintos possíveis, sendo que o principal objetivo era a clareza e que certos detalhes se tornassem exercícios para os leitores mais interessados no assunto.

Em suma, buscou-se elaborar um trabalho que viesse atender as expectativas atingindo todos os objetivos propostos no que diz respeito a elaboração de um produto que se constitua como ferramenta que possa auxiliar docentes e discentes dos Ensino Básico a perceberem a relevância intrínseca ao conceito de infinito, mas acima de tudo que lhes possibilitem ampliar ou construir um "novo" significado para o termo infinito tão presente mediante concepções de senso comum, mas tão distante dos modos diversos empregados na Matemática, alguns casos já na do Ensino Médio, mas principalmente na do Ensino Superior.

Referências

[1] Aulete, C.*Minidicionário contemporâneo de língua portuguesa.* Rio de Janeiro: Lexicon, 2009.

[2] Bertolucci, C. C. *Noções de infinito matemático em adolescentes e adultos.* (Dissertação de Mestrado). Porto Alegre, 2009.

[3] Boyer, C. B. *História da Matemática.* Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996.

[4] Burton, D. M. *The history of Mathematics: an introduction.* 7th ed. New York: Mc Graw Hill, 2011.

[5] Caraça, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Livraria Sá Costa, 1984.

[6] Carnielli, W. A. *Sobre o Infinito.* Traduzido por W. A. Carnielli a partir do original alemão publicado em *Mathematische Annallen.* v. 95, pp. 161-190.

[7] Costa, A. *Zenão de Eleia e o exercício da filosofia através do paradoxo: um ensaio acerca da intenção filosófica da dialética zenónica.* Revista Filosófica de Coimbra, vol. 14, nº 27, Março de 2004, p. 205-225.

[8] Eves, H. *Introdução à história da Matemática.* Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[9] Guidorizzi, L. H. *Um curso de cálculo, Vol 1.* 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[10] Halmos, P. R. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Editora Polígono, São Paulo, 1970.

[11] Hilbert, D. *Über das Unendliche. Mathematische Annallen,* Berlim, v. 95 (1926), pp. 161-190.

[12] Japiassu, H. e Marcondes, D.*Dicionário de Filosofia.* 4ª ed. Atual. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2006.

[13] Lima, E. L. *Números e Funções Reais.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] Lima, E. L. *Curso de análise real, Vol. 1.* 11ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[15] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio.* Vol 1. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[16] Novaes, G. P. *Introdução à teoria dos conjuntos.* Rio de Janeiro: SBM, 2018.

[17] Oliva, A. e Guerreiro, M. *Pré-socráticos: A invenção da filosofia.* Campinas, SP: Papirus, 2000(2ª edição).

[18] Olivero, M. *História da Matemática através de problemas.* Rio de Janeiro: UFF/CEP - EB, 2010. 160p. - (Curso de Instrumentação para o Ensino de Matemática).

[19] Ortiz, J. R. *EL concepto de infinito.* Associación Matemática Venezoela. Boletin, v. 1, n. 2, 1994.

[20] Paiva, M. R. *Matemática. Vol. 2.* São Paulo: Moderna, 1995.

[21] Pitombeira, J. B. e Roque, T. M. *Tópicos em História da Matemática.* 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[22] Roque, T. *História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[23] Stewart, J. *Cálculo, volume I.* Tradução EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[24] Stewart, I. *Os maiores problemas matemáticos de todos os tempos.* Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

[25] Yokoyama, L. A. *Há infinitos maiores que outros?* XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo: 2016.