Universidade Federal de São João del-Rei

FERNANDA VELLOSO AMÂNCIO

# MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

São João del-Rei

2019

FERNANDA VELLOSO AMÂNCIO

# MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO DA MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenadoria do Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

São João del-Rei, _____ de __________ de ________

Banca Examinadora

___________________________________________

Orientador: Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

___________________________________________

Prof(a) Dra. Viviane Pardini Valério

___________________________________________

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche

São João del-Rei
2019

*Dedico esse trabalho à minha mãe Zélia Maria Garcia Velloso (in memorian), que sempre me apoiou e acreditou em mim, quando eu mesma não acreditava. Perdê-la durante o curso foi mais um obstáculo a superar, mas tenho certeza de que, dos céus, ela me enviou forças para continuar.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me permitiu chegar até aqui, sempre me guiando, iluminando e alimentando minha alma com esperança!

Ao meu marido Marco Antônio, por sua disponibilidade, paciência e dedicação em me ajudar com o Latex, por sua compreensão, suporte e apoio incondicional tanto em casa com nossas filhas, como no nosso trabalho, dobrando seu horário para que eu pudesse, muitas vezes, me ausentar para dedicar-me aos estudos.

Às minhas filhas Beatriz e Júlia, que entenderam perfeitamente minha ausência, me apoiaram, mesmo sendo tão pequenas, foram tão sábias nas palavras de incentivo.

Ao meu orientador, prof. Dr. Francinildo, que foi sempre tão solícito, paciente, profissional e, acima de tudo, humano. Conduziu-me nesse processo de forma que me permitiu desenvolver ainda mais.

Aos meus colegas da turma na qual aprendemos a dividir para somar nossos conhecimentos. Quanta ansiedade passamos juntos, mas sempre colocando a esperança, a força e a dedicação em primeiro plano. Aprendemos a ajudar, a ser ajudados e a pedir a inspiração Divina para passar por todo esse processo.

Aos professores, que souberam cobrar de forma rígida para que alcançássemos nossos melhores resultados.

*"Chame o sucesso para fazer parte de sua vida. Acredite no seu potencial criador, seja inovador, treine sua mente para vencer, estipule metas e, principalmente, lute por seus ideais."* — FLÁVIO SOUZA

# Resumo

Para que a sala de aula seja um alicerce do conhecimento é necessário que o aluno esteja receptivo e entusiasmado e, considerando que o Brasil, nas últimas avaliações educacionais, está mal posicionado com relação à Matemática, fica evidente a necessidade de uma reflexão do processo ensino-aprendizagem que está sendo proposto aos nossos discentes. A sugestão apresentada é trabalhar de forma a motivar o aluno para o estudo, procurando dar sentido real às aplicações dos conteúdos e fazendo-o compreender como a Matemática foi e é aplicada na vida das pessoas, tornando as aulas mais atrativas e consequentemente produtivas. O objetivo desse trabalho é oferecer aos professores de Matemática do Ensino Médio ideias de debates e atividades para motivar os alunos a quererem aprender Matemática, haja vista que uma das maiores reclamações dos professores tem sido a falta de interesse por parte dos alunos. As sugestões apresentadas neste trabalho visam explorar a Matemática com interdisciplinaridade, de forma que os professores possam apoiar-se nos mais diversos temas e também trabalhar a importância e o uso da Matemática nas mais diversas profissões.

**Palavras-chave:** Matemática, Interdisciplinaridade, Motivação, Profissões.

# Abstract

To make the classroom a foundation of knowledge, it is necessary that the study to be receptive and enthusiastic and considering that Brazil in the latest educational assessments is badly setted up regarding to Mathematics, it is evidence that need of a reflection about the teaching-learning process which is being proposed to our students. The shown suggestion is to work in a way to motivate the student to study, trying to give a real way to the content applications and make them to understand how Mathematics was and is applied in real life, making the lessons more attractive and consequently productive. The goal of this work is to offer to High school math teachers ideas to discuss and activities to motivate the students to wish to learn mathematics, knowing that the biggest teacher complaints have been the lack of interest from the students .The shown suggestion in this work look for exploring Mathematics in the interdisciplinary in which the teachers can be supported in many different themes and also work the importance and use of Mathematics in the many different professions.

**Keywords:** Mathematics, Interdisciplinarity, Motivation, Professions.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Lista de Abreviaturas e Siglas

SBM - Sociedade Brasileira de Matemática

IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos

CNE - Conselho Nacional de Educação

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Os professores querem que seus alunos se interessem pelas suas aulas, preparadas com dedicação, mas muitas vezes se deparam com alunos desmotivados, que parecem ignorar o conhecimento que querem transmitir. Faz-se necessária uma reflexão sobre os motivos pelos quais muitos alunos permanecem com uma total apatia nas salas de aula e falta de vontade em obter conhecimento.

Esse contexto remete-me à lembrança sobre o que me motivou a querer aprender Matemática. Na quinta série do Ensino Fundamental (atualmente sexto ano) no meu primeiro dia de aula, a professora nos levou até a sala de vídeo e reproduziu um desenho animado[1] no qual o pato Donald tentava jogar sinuca. Inicialmente, sem estratégia alguma, ele não atinge nenhum resultado positivo no jogo. Ao começar a observar um profissional jogando, ele diz que o jogador tinha sorte e é aí que o narrador começa a mostrar para Donald que era necessário ter habilidade e conhecer muito sobre ângulos para se sair bem nesse jogo. Usando vários cálculos para fazer uma boa jogada Donald atinge seu objetivo. Realmente, aquilo me encantou e eu vi, a partir daquele momento, que a Matemática é muito mais que os simples números e continhas que eu fazia até aquele momento, ela é estratégia, lógica, possibilidade de criação, inclusive, possibilidade de ganhar um jogo que até então eu pensava que não tinha nada a ver com matemática.

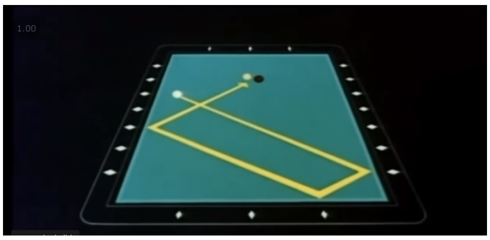


Figura 1.1: Usando as marcas losangulares das bordas da mesa de bilhar como guia matemático

Fonte: (VERGARA, 2019).

[1]O vídeo pode ser assistido através do link <https://www.youtube.com/watch?v=AYm84JLSNWY>

Huete e Bravo (2006) mencionam que os professores querem introduzir conteúdos matemáticos apresentando, na maioria das vezes, complexas abstrações e querem que os alunos adquiram tais conceitos sem prévias experiências e se esquecem que alguns alunos têm dificuldades de chegar ao pensamento abstrato. Por isso, é fundamental discutir com os alunos sobre o porquê de aquele conteúdo ter sido importante para o crescimento em alguma área ou melhor, ainda é e poderá ser importante para o futuro, para o desenvolvimento de muitas ciências e fornecer-lhes apoio concreto mais diretamente relacionados com a experiência diária deles. Pode ser esta a razão de muitos alunos se desinteressarem pela disciplina, já que não compreendem e não fazem nenhuma analogia com a realidade que os permeiam.

A BNCC[2] lista as competências gerais da Educação Básica e a primeira delas é:

> Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2017, p. 9).

Este documento da BNCC ainda deixa claro o compromisso que a educação tem com a formação e o desenvolvimento humano global. Assim, propõe como ação:

> contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas (BRASIL, 2017, p. 16).

Ao apresentar a Matemática aos alunos, embasando-se no entendimento da sua aplicação para uma posterior transferência para as aulas, pode-se atrair o interesse daqueles que, de alguma forma, se identificam com outra disciplina e fica claro, através da multidisciplinaridade que a Matemática não se separa das demais ciências. É importante então, que o professor, como mediador do conhecimento, tome a postura de instigador para que os alunos compreendam os fins do ensino de cada conteúdo.

Huete e Bravo (2006, p.18) exploram bem isto quando mencionam que a aplicação da Matemática acontece num enorme campo de atuação, como por exemplo: a Biologia, a Agricultura, a Pecuária, a Arquitetura, a Engenharia, a Demografia, o Direito, a Medicina,

[2] A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE).

a Política, as atividades tecnológicas, industriais e comerciais, dentre tantas outras que aqui, neste trabalho, serão mencionadas.

A segunda competência que a BNCC apresenta, é justamente esta interação com outras ciências:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (BRASIL, 2017, p. 9).

Huete e Bravo (2006) mostram, através de um organograma que, para se chegar às atividades finais da Matemática, antes é preciso entender a utilidade prática desta ciência e a sua aplicabilidade em outras disciplinas:

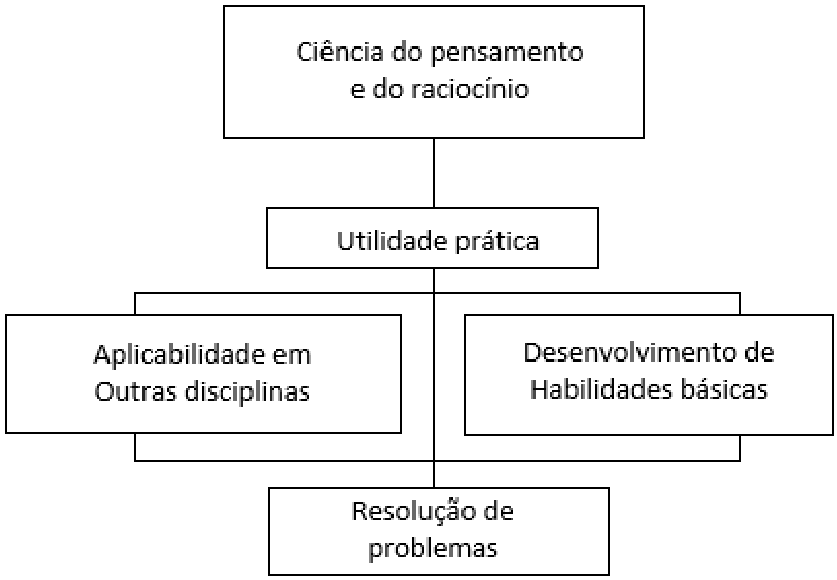



Figura 1.2: Organograma da Operacionalização dos princípios da Matemática Realista
Fonte: (HUETE; BRAVO, 2006).

Assim, quando o professor começa a interligar os conhecimentos do conteúdo dado em sala com as demais ciências e profissões, o aluno passa a notar que a Matemática não é uma disciplina isolada, ou seja, ele começa a perceber que esse conhecimento é, na maioria das vezes, base para o desenvolvimento, descobertas, e principalmente, avanços tecnológicos, a partir daí o interesse do aluno poderá se tornar o principal fator motivacional para a aprendizagem e o aluno passa a ter uma visão diferente da Matemática.

Pode-se perceber que está arraigado à Matemática um paradigma onde só os mais inteligentes é que podem compreendê-la e, para desmistificar essa ideia, vários órgãos e entidades voltadas à Matemática estão buscando formas para popularizá-la, como a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). A cada dois anos estas entidades realizam a Bienal da Matemática com o objetivo de:

> ...despertar o interesse dos estudantes para a pesquisa e o ensino da Matemática, disseminar o conhecimento matemático em todo o país, propiciando a estudantes e professores uma visão ampla da Matemática e suas aplicações; gerar textos de qualidade, que estimulem a leitura e o estudo da Matemática; promover a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento, abordando aplicações e questões interdisciplinares (SBM, 2017).

Em 2017 a SBM também realizou:

> O Festival da Matemática como parte da Bienal e que faz parte do conjunto de iniciativas de popularização da Matemática durante todo o Biênio da Matemática. O Festival tem como objetivo popularizar a Matemática atingindo um público que vai desde os pequenos a partir 2 anos de idade até um público mais exigente e com mais experiência na área. Atividades lúdicas e divertidas voltadas a toda a família formarão o campo ideal para despertar novas formas de vivenciar a Matemática e desfazer o preconceito que existe em relação à disciplina (SBM, 2017).

Em 2017 e 2018 os eventos mais importantes do mundo da Matemática aconteceram no Brasil:

> Dois anos de eventos e ações que colocaram a Matemática, Ciência e Tecnologia no foco da comunicação - contribuindo para o crescimento do país e o desenvolvimento humano. O país sediou pela primeira vez a Olimpíada Internacional da Matemática IMO 2017 e o Congresso Internacional de Matemáticos ICM 2018, o mais importante evento do mundo voltado à disciplina. Um movimento em prol da educação que se propõe a criar, produzir e trazer para o país múltiplas experiências que gerem novas descobertas e estimulem o aprendizado da Matemática de forma geral (IMPA E SBM, 2017).

A partir de tantos esforços por parte das entidades e órgãos voltados à Matemática para que seja desmistificado que a Matemática é para alguns, essa onda de popularização também ajuda os professores a terem uma nova visão da disciplina o que lhes permitem levar aos alunos um conteúdo com maior clareza na sua multidisciplinaridade e sua aplicabilidade na vida das pessoas.

Como o Ensino Médio é decisivo na vida escolar dos alunos, pois é o processo final para a decisão de qual profissão seguir, pretende-se abordar formas de motivar os alunos dessa etapa do ensino a aprenderem a Matemática interligando-a com as profissões e a utilidade de cada conteúdo de forma ajudar o aluno a escolher uma profissão a qual exercerá por toda a sua vida. Mesmo para aqueles que optarem por seguir alguma profissão na qual não utilizarão uma Matemática mais aprofundada, que possam desenvolver um raciocínio lógico matemático que embasará o seu cotidiano, já que a Matemática se faz presente no mundo que nos rodeia de diversas formas e assim pode contribuir para a formação de cada aluno/cidadão, pois sabe-se que, principalmente nas escolas públicas, muitos alunos têm, no Ensino Médio, uma etapa conclusiva.

A BNCC diz sobre o ensino da Matemática durante o Ensino Médio:

> Essa percepção da unidade da Matemática, além da diversidade de suas práticas, serve também para mostrar que o desenvolvimento da disciplina é fruto da experiência humana ao longo da história. Assim, ela não é um edifício perfeito que surgiu pronto da mente de poucos seres privilegiados, a fim de ser estudada para puro deleite intelectual. O desenvolvimento gradual desse campo do saber, por seres humanos inseridos em culturas e sociedades específicas, confere a ela valores estéticos e culturais, e fornece uma linguagem com a qual pessoas de diferentes realidades podem se comunicar, com precisão e concisão, em várias áreas do conhecimento. Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história (BRASIL, 2017, p. 522).

Os PCN+[3] sobre o Ensino Médio esclarecem que:

[3]Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

> A expansão exponencial do ensino médio brasileiro é outra razão pela qual esse nível de escolarização demanda transformações de qualidade, para se adequar à promoção humana de seu público atual, diferente daquele de há trinta anos, quando suas antigas diretrizes foram elaboradas. A ideia central expressa na nova Lei, e que orienta a transformação, estabelece o ensino médio como etapa conclusiva da educação básica de toda a população estudantil e não mais somente uma preparação para outra etapa escolar ou para o exercício profissional. Isso desafia a comunidade educacional a pôr em prática propostas que superem as limitações do antigo ensino médio, organizado em duas principais tradições formativas, a pré-universitária e a profissionalizante. (BRASIL, 2006, p. 8).

Analisando os livros didáticos no decorrer de vários anos, observa-se que, inicialmente, eles apresentavam os conteúdos de forma abstrata, sem muitas explicações sobre como e onde poderiam ser aplicado, com demonstrações e muitas contas. Atualmente, os livros estão trazendo um pouco da história e da aplicação, mas muitos professores não dão importância para essa parte, voltando-se novamente para as contas. Assim, é importante que o professor, como incentivador e mediador, não só utilize essa história e aplicabilidade a cada conteúdo, mas vá além, para que o aluno comece a posicionar-se diante daquele conhecimento que será trabalhado, pois o livro didático é apenas uma das bases para o ensino e não a única fonte de conhecimento para o aluno.

Os livros didáticos mudaram, mas, principalmente, hoje tem-se um novo estudante, antenado com as tecnologias e com muita informação de forma fácil e rápida e precisamos nos perguntar: como motivá-los para uma ciência tão antiga e ao mesmo tempo tão atual? Assim, percebe-se a necessidade de uma mudança de postura do professor frente a esse novo estudante.

Os resultados do PISA[4] mostram que o ensino do Brasil está aquém do esperado.

Em uma reportagem da Folha de São Paulo, do dia 19 de julho de 2018, o professor Naercio Menezes Filho, do Insper e da Universidade de São Paulo (USP) fala sobre a avaliação do PISA de 2015 e dos resultados obtidos pelos alunos brasileiros:

> "Parte do diagnóstico é de que os alunos não sabem o que é pedido, ou têm dificuldade de entender os enunciados, mas há outros fatores por trás" diz. "Há também uma questão de estímulo, de motivação dos alunos brasileiros" (SALDAÑA, 2018).

Assim, a proposta deste trabalho é encontrar formas de motivar os alunos do Ensino

[4]O Pisa - Programa Internacional de Avaliação de Alunos – é uma avaliação internacional que mede o nível educacional de jovens de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências.

Médio a quererem aprender e aprofundar os conhecimentos na Matemática. O foco do segundo capítulo é interligar a Matemática com as outras disciplinas, revelando que, de uma forma ou de outra, essa ciência está inserida em todas as demais. No terceiro capítulo, discorre-se sobre o uso da Matemática em algumas profissões, salientando que os professores podem discutir com os alunos a sua utilização com o intuito de que, a partir dos conhecimentos adquiridos, estes possam enxergar as ligações com as diversas áreas profissionais e isso também os ajude na escolha de suas profissões. Muitas atividades estão nos apêndices e anexos como propostas para trabalhar os conteúdos de forma contextualizada e, por fim, no Apêndice 7 está uma proposta para ser aplicada no primeiro dia de aula, buscando aguçar a curiosidade para que os alunos consigam perceber a importância da Matemática em vários aspectos da vida das pessoas.

# Capítulo 2

# A Matemática interdisciplinar

O intuito nesse capítulo é apresentar um pouco da Matemática em conjunto com as disciplinas do Ensino Médio. É claro que o assunto vai muito além do que vai ser exposto, porém o que se almeja é apresentar uma alternativa para a prática da interdisciplinaridade a qual, em muitas realidades, é pouco trabalhada.

Muitos alunos se identificam com outras disciplinas e concluem que não precisarão utilizar os conhecimentos de matemática que são vistos nessa etapa do ensino e isso fica claro quando eles afirmam em sala de aula: "Mas eu nunca vou utilizar isso na minha vida!". A proposta, porém é de que eles poderão começar a ver a Matemática com outros olhos a partir do momento que enxergarem a sua relação com os conteúdos que já lhes são interessantes.

O Estado de Minas Gerais, através da Subsecretaria de Desenvolvimento da Educação Básica, destaca a importância de realizar trabalhos nesse contexto. No mês de junho/2019 foi enviado para as Secretarias Regionais de Ensino um projeto "Matemática em toda parte", para ser aplicado nas escolas públicas estaduais, contendo atividades contextualizadas e interdisciplinares para despertar nos estudantes o interesse pela Matemática.

## 2.1 A história da Segunda Guerra Mundial e a Matemática

Ao investigar a Segunda Guerra Mundial observa-se que a Matemática está no seu início, meio e fim. Assim, para os alunos amantes da História, é possível motivá-los a partir de fatos reais nos quais a matemática está intrinsecamente presente.

É interessante começar a aula propondo a discussão sobre como os alemães pretendiam ganhar a Segunda Guerra Mundial, quais eram as suas estratégias e como os aliados conseguiram por fim à guerra antes do que era previsto.

Figura 2.1: Segunda Guerra Mundial
Fonte: (HISTÓRIA UNIVERSAL, 2018).

Inserir a Matemática nesse contexto de guerra, discutindo também sobre criptografia, mensagens secretas, sobre como os alemães se comunicavam através da máquina Enigma, a qual utilizou a Matemática como sua maior aliada, é uma motivação e tanto para os alunos amantes de História.

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015):

> Ao longo da história, os homens inventaram códigos secretos na tentativa de transmitir mensagens que não poderiam ser inteligíveis por um interceptador.

A máquina Enigma é um ótimo pretexto para se aprender Matemática:

> Ficou conhecida pelo nome de Enigma a máquina adotada pelas forças alemãs para codificar e decodificar mensagens secretas durante a Segunda Guerra Mundial...
> ...Embora muito bem desenhado, e de uma segurança inabalável em relação à tecnologia da época, seu uso negligente pelas Forças Armadas Alemãs, além de um manual decodificador que deixava a desejar, permitiu que a inteligência inimiga desvendasse os mistérios da Enigma, dando assim um estímulo enorme à prática da inteligência criptográfica.(SANTIAGO, 2019)

Figura 2.2: Máquina Enigma
Fonte: (DEFESANET, 2013).

Assim, a criptografia foi a maior aliada na troca de mensagens entre os alemães, que modificavam seus códigos a cada 24 horas, dificultando imensamente a possibilidade de decifrá-los em tão pouco tempo. Alan Mathison Turing (1912-1954), um matemático, viu que a quantidade de combinações possíveis eram tantas que em 24 horas seria impossível humanamente serem descobertas, foi quando começou a se dedicar à construção de uma máquina para decifrar tais códigos e, consequentemente criou o primeiro computador do mundo, com a finalidade de acabar com a Segunda Guerra Mundial. Num centro especializado em quebra de códigos Alan Turing criou a Máquina de Turing e, de acordo com a REVISTA GALILEU (2018):

> Considerado o "pai da computação", o britânico Alan Turing formulou na década de 1930 um modelo teórico que seria responsável pela criação de conceitos como o algoritmo e o desenvolvimento dos computadores modernos. Conhecido como Máquina de Turing, o dispositivo escrevia e interpretava símbolos limitados em 0, 1 e conjunto vazio — basicamente, a estruturação das linhas de códigos atuais.

A Máquina de Turing decifrou os códigos criptografados da Máquina Enigma e, com isso, os aliados começaram a receber e entender as mensagens transmitidas pelos alemães, ganhando vantagem estratégica, o que possibilitou o fim da Segunda Guerra Mundial, portanto, pode-se dizer que a Matemática foi um meio para o fim da maior guerra mundial da história.

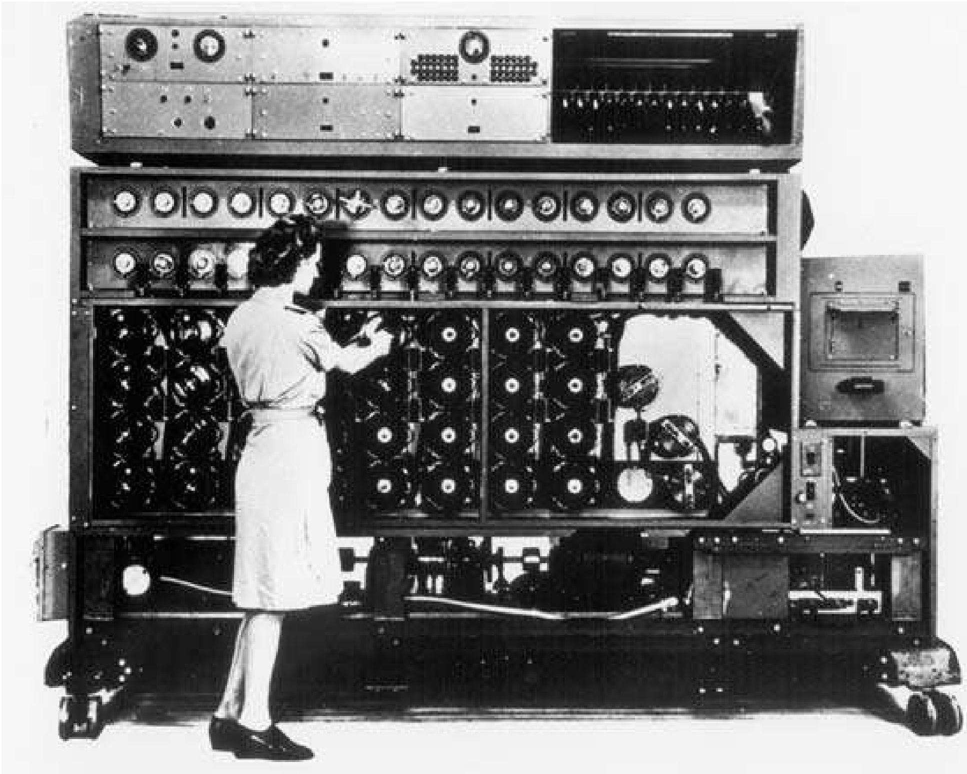


Figura 2.3: Máquina de Turing
Fonte: ENCYCLOPEDIA BRITANNICA (2019).

É importante também falar com os alunos sobre o algoritmo RSA, que, segundo Coutinho (2008) é o mais conhecido método de criptografia de chave pública atualmente em uso. Esse código é muito usado em operações comerciais via internet e transações bancárias.

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015) "RSA é baseado em teoria básica dos números, mais especificamente na aritmética (soma e multiplicação)".

Um exemplo de mensagens criptografadas na prática para ser apresentado aos alunos do Ensino Médio de forma que eles entendam a lógica de codificar e decodificar uma mensagem, está disponível no Apêndice 1, com uma proposta de atividade. Porém, é bom deixar claro para os alunos que atividade como esta que estarão realizando mostra como um sistema de criptografia funciona, onde tanto quem codifica como quem decodifica a mensagem precisa conhecer o sistema criptográfico utilizado.

Quando o interesse é manter o sigilo de mensagens, pode-se inclusive criar um sistema de criptografia próprio, mas o aluno precisa compreender que criar sistemas de criptografia pode ser fácil, entretanto, também pode ser fácil de ser descoberto. Por isso, é importante um sistema que seja seguro para que transações importantes, tanto financeiras quanto comerciais, via internet, não tenham suas informações decodificadas facilmente. E por ser tão seguro, é que até hoje o código RSA é o mais utilizado, porém não é o único.

Dessa forma, é possível instigar a curiosidade dos alunos mostrando a importância da Matemática na história mundial e trazendo para a atualidade, que, conforme Rousseau e Saint-Aubin (2015) devido a tantos casos "de roubo de identidade e nossa crescente dependência na internet, tais técnicas têm um papel importante na proteção de nossa identidade online".

Os PCN+ nos dizem que:

> A História é também história do conhecimento científico-tecnológico e matemático, e ainda história da cultura, em todos os sentidos dessa palavra, desde cultura da alimentação, do vestuário e de regras de convívio, até cultura literária, artística e humanista (BRASIL, 2006, p. 18).

Fazer essa conexão entre História, a Matemática envolvida e a atualidade mostra aos alunos que tudo está interligado, assim despertando a curiosidade para posteriores assuntos. É interessante que os alunos assistam ao filme "O Jogo da Imitação" para que percebam como tudo aconteceu durante a Segunda Guerra Mundial e como a Matemática foi importante nesse processo.

## 2.2 A matemática na Geografia

A cartografia nos permite identificar e medir lugares em um mapa, a partir de uma projeção da superfície da Terra em um plano: isso tem algo em comum com a Matemática?

De acordo com Abrantes (2018):

> O desenvolvimento da Matemática, na antiguidade, se dava à medida que as necessidades dos povos iam aparecendo. Sendo assim, a necessidade de medir comprimentos e áreas levou a Matemática a ser tratada, naquela época, como a ciência da medida. Desse modo, é compreensível que a cartografia estivesse inserida na Matemática, haja vista que ela mede as posições de determinados lugares e os identifica, a partir de uma projeção de esfera terrestre no plano (ABRANTES, 2018, p. 96).

Algumas das principais projeções cartográficas são: cilíndrica, cônica ou plana, as quais podem ser observadas na figura a seguir.

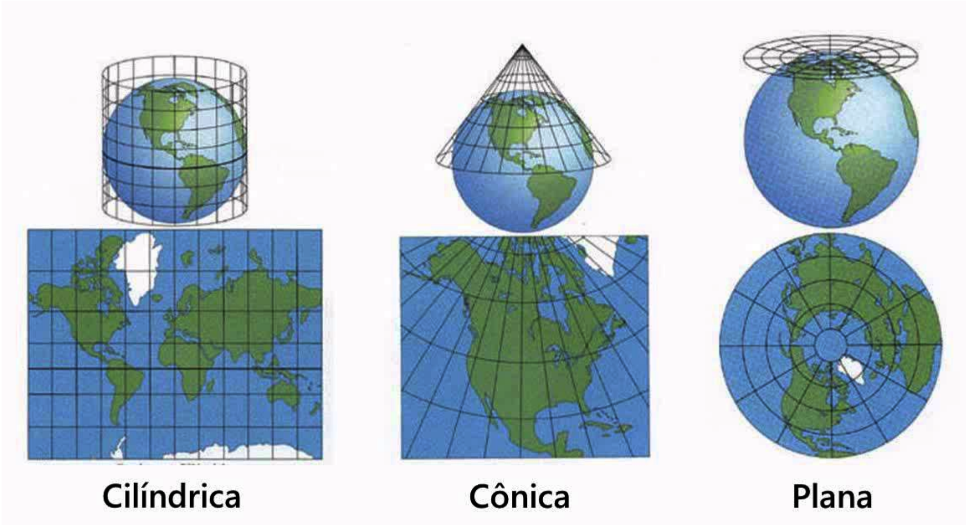



Figura 2.4: Projeções Cartográficas
Fonte: (PROENEM, 2019).

As projeções plana e cônica foram as primeiras a serem feitas, porém apresentam limitações quanto ao cálculo de longitudes o que, no passado, no período das grandes navegações gerava erros ao computar grandes distâncias. De acordo com Abrantes (2018, p.60):

> Sendo assim, era de fundamental importância que houvesse uma projeção em que o navegante pudesse obter um rumo único, que interceptasse os meridianos (e os paralelos) segundo o mesmo ângulo. Esse desafio foi desvendado por Mercator.

Gerard Mercator (1512 - 1594) desenvolveu uma projeção da Terra a partir de um cilindro de altura infinita, conforme a figura:

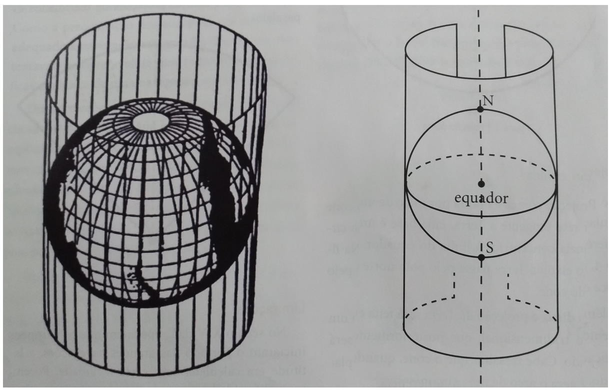



Figura 2.5: Desenvolvimento da projeção de Mercator
Fonte: Abrantes (2018, p. 60).

Ainda segundo Abrantes (2018, p. 61):

> ... a projeção de Mercator contribuiu sobremaneira para o incremento da navegação à época. Dentre as vantagens proporcionadas por esse tipo de projeção cilíndrica, pode-se citar que os pontos cardeais são de fácil identificação no mapa e, a principal delas, que o trajeto em alto mar poderia ser traçado no mapa por uma linha reta, formando ângulos idênticos com todos os meridianos (e com todos os paralelos), conforme figura abaixo. Assim fica possível identificar um único rumo para fazer grandes travessias no oceano, acabando com o enorme transtorno das constantes correções de rumos, que geravam grandes imprecisões à navegação.

Figura 2.6: Mapa-mundi na projeção de Mercator
Fonte: Abrantes (2018, p. 61).

Assim, para falar sobre mapas, fusos horários, escalas, dentre outros conceitos, utiliza-se a Matemática, uma vez que é através de figuras, cálculos precisos e ângulos que foram construídas as projeções cartográficas.

É importante mostrar aos alunos o quanto a Matemática está inserida na Geografia. Uma proposta para trabalhar a Cartografia e a Matemática no Ensino Médio se encontra no Anexo 1.

O ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) utiliza problemas na área de Ciências Humanas interligando esses conhecimentos com a Matemática e duas questões para se trabalhar com os alunos se encontram no Anexo 1.

## 2.3 O conceito de Função utilizado na Física

A Física existiria sem a Matemática? Seria possível realizar qualquer um dos seus experimentos sem a utilização das ferramentas dessa ciência?

A prática em sala de aula demonstra que a resposta é negativa e, inclusive, para os alunos amantes desta disciplina é bem nítida a profunda relação da Física com a Matemática. Questionamentos como esses ajudam a manter os alunos motivados.

Sobre a Matemática no ensino da Física os PCN+ esclarecem:

> O ensino de Física tem enfatizado a expressão do conhecimento aprendido através da resolução de problemas e da linguagem matemática (BRASIL, 2006, p. 84).

Muitos alunos ainda dizem que gostam de Matemática, mas não de Física, fato que justifica a necessidade de se trabalhar melhor essa relação, aprendendo matemática com uma ideia dessa prática. Um exemplo da aplicação da Matemática na Física é a cinemática, ciência que estuda o movimento dos corpos. Pode-se enfatizar para os alunos que um movimento uniforme é um caso particular de Função Afim e um movimento uniformemente variado, de Função Quadrática.

Segue a relação do movimento uniforme com a Função Afim.

Nesse tipo de movimento a aceleração é nula, então, a velocidade é constante. Relaciona-se a posição do corpo com o tempo em relação ao ponto inicial, usando a notação: $S$ para espaço final; $S_0$ para espaço inicial; $v$ para velocidade e $t$ para tempo.

A expressão para a medida do Espaço $S$ é dada por:

$$S = S_0 + v.t$$

Nessa oportunidade é importante que o professor de Matemática destaque para o aluno que a expressão anterior é um caso particular de Função Afim, do tipo $y = ax + b$, sendo $x$ a variável tempo, o valor de $b$ a posição inicial $S_0$ e a constante $a$ a velocidade $v$.

Merece destaque também o fato de que o gráfico que determina a expressão do móvel que satisfaz a equação é uma reta que forma com o eixo das abcissas um ângulo agudo ou obtuso e, ainda, que é possível encontrar a velocidade através da tangente desse ângulo.

Relação do movimento uniformemente variado com a Função Quadrática:

Nesse tipo de movimento a velocidade é variável e a aceleração constante. Relacionando a posição do corpo com o tempo em relação ao ponto inicial, nota-se que $S$ é o espaço final; $S_0$ é o espaço inicial; $v_0$ é a velocidade, $\gamma$ é a aceleração e $t$ é o tempo.

A expressão para a medida do Espaço $S$ é dada por:

$$S = S_0 + v_0.t + \frac{\gamma}{2}.t^2$$

A expressão acima é um caso particular de Função Quadrática, do tipo $y = ax^2+bx+c$, sendo $x$ a variável tempo, o valor de $c$ a posição inicial $S_0$, o valor de $b$ a velocidade escalar inicial $v_0$ e a constante $a$ a metade da aceleração escalar $\frac{\gamma}{2}$. Nesse caso, o gráfico que determina a trajetória do móvel é uma parábola.

Se o professor considerar pertinente, é possível explorar o fato de que ao derivar a Função que define o espaço percorrido pelo móvel, obtém-se a velocidade escalar instantânea $v = v_0 + \gamma.t$ onde o gráfico que satisfaz a equação é uma reta da velocidade em função do tempo que forma com o eixo das abcissas um ângulo agudo ou obtuso e ainda que é possível encontrar a aceleração através da tangente do ângulo e também o espaço através da área da figura que se forma.

Portanto, ao interligar conhecimentos, os alunos conseguem dar sentido ao conteúdo matemático, saindo da abstração.

## 2.4 A matemática na Biologia

Assim como outras ciências, a Biologia também tem uma relação importante com a Matemática interessante de ser mostrada e trabalhada em sala de aula.

A IVEPESP destaca que:

> Matemática e biologia: Uma é a ciência dos números, outra, a da vida. E o que elas podem ter em comum? Muito! Desde muito tempo, as duas trabalham juntas para compreender os fenômenos da natureza. Um bom exemplo é a taxonomia, ciência que classifica os seres vivos segundo suas características, incluindo as formas de cada um! Universo é matemático! (IVEPESP, 2018).

Segundo Silva (2019a) a “geometria tem sua origem grega e tradução literal: medir a terra”, logo “é o estudo das formas dos objetos presentes na natureza, das posições ocupadas por esses objetos, das relações e das propriedades relativas a essas formas”. Na figura a seguir observa-se essa relação feita com a geometria molecular:

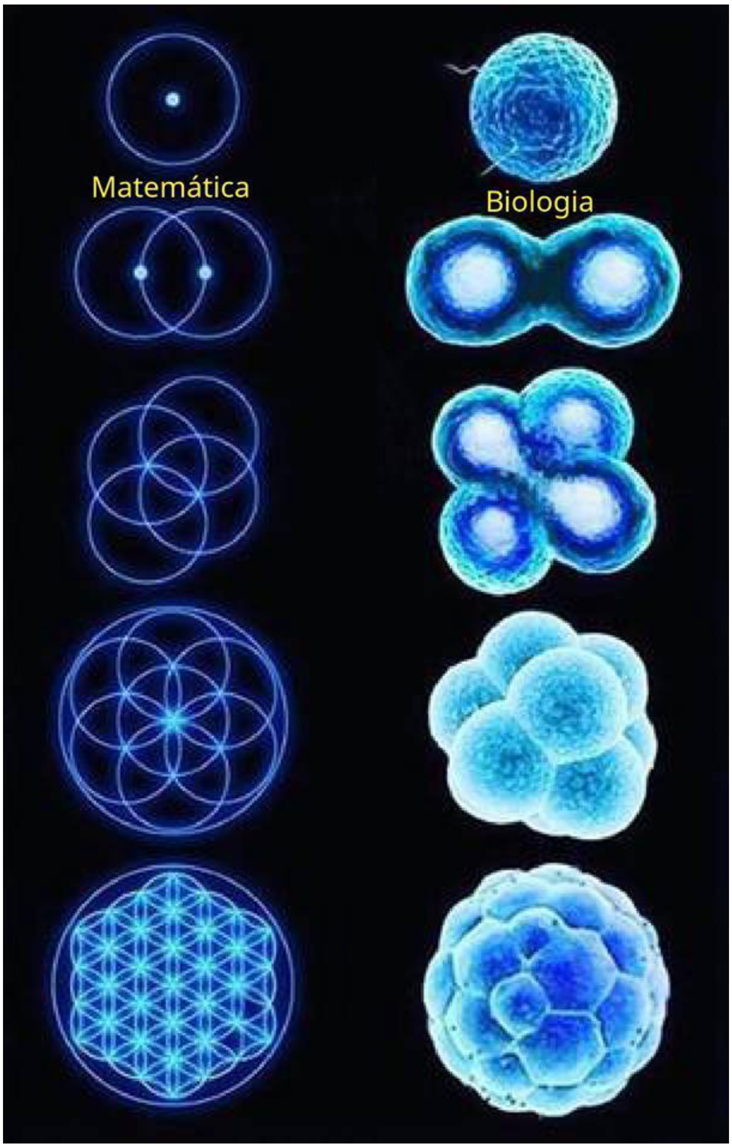



Figura 2.7: A matemática na Biologia
Fonte: Adaptada de (IVEPESP, 2018).

A divisão binária, ou cissiparidade, estudada em Biologia, no Ensino Médio, é um tipo de reprodução assexuada onde um ser vivo dá origem a outros dois geneticamente idênticos. Essa reprodução é comum em protozoários e bactérias e o interessante é que a quantidade de seres nesse tipo de reprodução cresce em uma progressão geométrica.

Como o intuito deste trabalho é a motivação para o ensino da Matemática, é perspicaz que se associem os conteúdos para que os alunos amantes da Biologia possam se interessar pelo cálculo dos problemas apresentados, mostrando inclusive que, caso venham a trabalhar na área biológica, poderão, muitas vezes, se depararem com casos como este.

Questionamentos a serem feitos após introduzir os conceitos de progressão geométrica, a partir da divisão binária da figura, para que os alunos possam analisar o contexto da Matemática na Biologia:

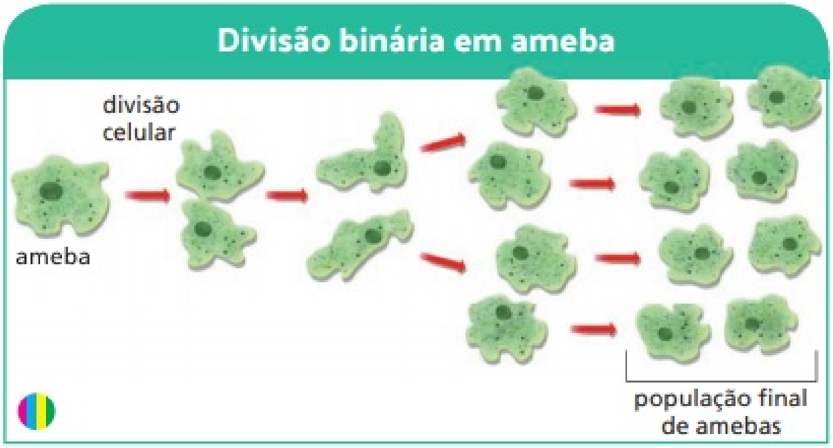



Figura 2.8: Reprodução Binária e a Progressão Geométrica
Fonte:(MENDONÇA, 2016).

a) Por que uma reprodução binária em uma colônia de bactérias é uma progressão geométrica?

Na reprodução binária cada indivíduo dá origem a novos dois, então a quantidade de bactérias da colônia será dobrada a cada reprodução. Denotando por $P$ a população de bactérias tem-se que a quantidade da n-ésima geração será dada por $P = P_0.2^n$, sendo $P_0$ a população inicial e $n$ o número de reproduções. Obtendo assim, uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo $P_0$.

Além disso, considerando a população inicial como uma bactéria $P_0 = 1$, (Figura 2.8), a população de bactérias $P$ será $P = 2^n$ que é um caso particular de uma função conhecida como Função Exponencial cuja lei de formação é escrita na forma $f(x) = a^x$ e no caso deste exemplo, $a = 2$ e $x$ sendo números inteiros positivos.

b) Para fazer o gráfico que determina o crescimento dessa colônia de bactérias em relação ao tempo, qual seria a função utilizada?

Até esse momento, pela maneira como foi apresentado aos alunos, seria um gráfico de função Exponencial. Porém é interessante, nesse momento, conversar com os alunos sobre esse crescimento, pois, na realidade, se essa cultura de bactérias não parasse de crescer, o mundo seria dominado por elas. Então, num contexto real deve-se levar os alunos a analisarem que as bactérias tem predadores, naturais ou artificiais, logo, num determinado momento esse crescimento será pausado, dependendo das circunstâncias.

É interessante que o professor explore as oportunidades de mostrar como a Matemática do Ensino Médio, especialmente através da Função Logarítmica, está presente nesse contexto da reprodução em uma colônia de bactérias. Dado que uma função Logarítmica associa a cada número real positivo $x$ ao seu logaritmo na base $a$ $(0 < a \neq 1)$ cuja lei de formação é escrita na forma $f(x) = log_a x$ também pode ser observada no contexto analisado acima.

As colônias de bactérias mostram um padrão nas suas fases de crescimento:

A - Lag: é uma fase de adaptação, por isso as bactérias não crescem ou até mesmo pode haver um pequeno declínio e, em alguns casos, há um aumento no tamanho dos indivíduos.

B - Logarítmica ou exponencial: fase onde há grande reprodução e um aumento expressivo na cultura.

C - Estacionária: nessa fase muitas bactérias começam a morrer e mesmo com o crescimento de novos microorganismos, o aumento é mínimo ou inexistente e a colônia começa a estacionar.

D - Letal, também chamada de fase de declínio, pois a quantidade de bactérias que começam a morrer é muito expressiva e a colônia começa a diminuir.

As fases citadas acima podem ser percebidas através do gráfico seguinte, que relaciona a concentração de células bacterianas (ml) em função do tempo em horas:

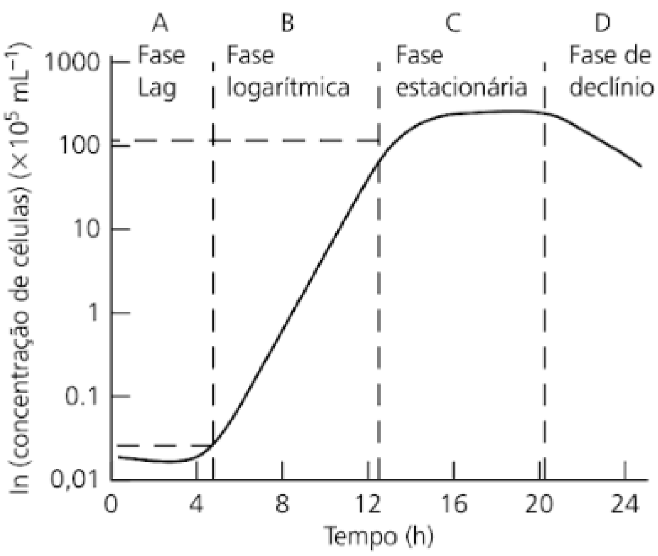



Figura 2.9: Fases do crescimento microbiano
Fonte: Fellows (2019, p.64).

Como o conteúdo a ser discutido na aula é a progressão geométrica, a atenção será dada à fase logarítimica/exponencial, sobre a qual Fellows (2019) ressalta:

> Todas as bactérias estão se dividindo por fissão binária, e os números aumentam exponencialmente (i.e., em uma progressão geométrica). As células dividem-se a uma taxa constante, que depende da composição do meio e das condições de incubação. A taxa exponencial de crescimento é expressa como ”tempo de geração”, ou tempo para duplicar a população. (FELLOWS, 2019, p.64).

Para a aplicação do logaritmo nesse contexto de colônia de bactérias, Davis e Masten (2016) esclarecem que:

> Se aplicarmos o logaritmo dos dois lados da equação $P = P_0.2^n$, temos $logP = logP_0 + nlog2$. Isto significa que se representarmos a população bacteriana em escala logarítmica, esta fase de crescimento seria uma reta com inclinação n. O ponto $P_0$ no $t_0$ indica a população ao final da fase de crescimento acelerado. Com isso, inicia-se a etapa chamada de **fase logarítmica** ou **exponencial**, caracterizada pela ausência de limitações à replicação e ao crescimento celular (DAVIS; MASTEN, 2016, p.205).

Há um exemplo que utiliza o logaritmo em uma comunidade bacteriana no Apêndice 2.

A genética também é uma área da Biologia inicialmente muito atrativa aos alunos do Ensino Médio, porém, devido à dificuldade que muitos têm com a Matemática, esse tópico pode tornar-se complexo e desmotivante. Ao abordar temas como porcentagem, análise combinatória, binômio de Newton e probabilidade, o professor pode destacar a relação desses temas com a genética.

Há um problema de genética que utiliza o Binômio de Newton e probabilidade no Apêndice 2.

É interessante um esforço para desempenhar um trabalho interdisciplinar entre os professores de Biologia e Matemática, se possível, por exemplo, colhendo dados reais dos alunos e seus familiares para que eles possam desenvolver as habilidades necessárias e colocar em prática o que é visto na sala de aula, podendo, inclusive, nesses trabalhos desenvolver habilidades em outros contextos, como gráficos, tabelas e cálculo de médias.

Muitos alunos amantes da Biologia supõem que há um abismo entre essa disciplina e a Matemática. A função do professor é mostrar que a Matemática está presente em praticamente todas as ciências e, que hoje em dia, existem possibilidades de trabalhos com ênfase em Biologia Matemática, inclusive a UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) numa parceria entre o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), o Instituto de Biologia e o Instituto de Biofísica oferece o curso de Matemática para Ciências Biológicas.

> A Biologia sempre foi considerada um refúgio para aqueles que, gostando de Ciência, pensavam ter dificuldades em Matemática. No entanto, cada vez mais a Matemática e os métodos quantitativos vêm sendo utilizados em Biologia. Uma Biologia teórica, matematizada, está hoje na raiz de boa parte dos estudos biológicos. Por exemplo, todas as teorias recentes sobre evolução são formalizadas matematicamente. Uma dificuldade para o uso da Matemática pelos biólogos é a falta de compreensão entre os praticantes dos dois campos. Como, frequentemente, os biólogos não sabem Matemática e os matemáticos não têm a mínima ideia do que seja Biologia, a colaboração fica difícil. Profissionais capazes de fazer a ponte entre as duas áreas são raros e altamente valorizados.(UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2013).

Garcia (2012), tratando da relação da Biologia com a Matemática destaca que:

> Matemáticos preocupados com a estrutura de proteínas e biólogos com a análise dos ângulos formados entre seus aminoácidos. Talvez pareça estranho, mas a aproximação entre matemática e biologia tem se tornado mais comum nas últimas décadas e pode até mesmo dar origem a novos ramos da ciência. Em um ciclo de palestras realizado no contexto da comemoração dos 60 anos do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), o premiado matemático norte-americano Stephen Smale, da Universidade da Califórnia, nos Estados Unidos, abordou o trabalho de seu grupo e as diversas possibilidades que surgem a partir dessa interação. Na ocasião, Smale apresentou os fundamentos matemáticos dessa nova abordagem e seu potencial para o estudo das estruturas moleculares e das formas de interação entre algumas moléculas básicas para a vida, como os peptídeos. "As possibilidades são muitas, como o aprimoramento de vacinas e o entendimento dos mecanismos por trás das dobras e do enovelamento das proteínas", avalia. "Se descobrirmos esse segredo, vamos responder a uma das questões mais fundamentais da biologia.". (GARCIA, 2012).

Viana, coordenador das atividades científicas do IMPA ressalta que:

> Há algumas décadas, com os avanços na genética e na bioinformática, a biologia já vem obtendo bons resultados com a matemática tradicional em áreas como a epidemiologia e a dinâmica evolutiva. O trabalho de grupos como o de Smale, no entanto, busca mais; procura elaborar fundamentos matemáticos inovadores para as novas questões experimentais (GARCIA, 2012).

Ainda em se tratando da relação Matemática e genética, Pereira (2014), reitera que:

> ...a genética não existe sem a natureza matemática. A manifestação dos genes em um indivíduo segue a lógica da probabilidade. Lembro que quando estudava genética estudava um coeficiente chamado qui-quadrado, e um índice chamado de desvio padrão, que era determinado pela dinâmica das populações, do movimento de determinada espécie em um território.
>
> O desvio padrão conferia uma margem de erro para a manifestação de um gene em um conjunto de seres vivos da mesma espécie. Isso significa dizer que, em uma amostra, haveria uma porcentagem, dentro de uma margem de erro determinada pelo movimento migratório de uma população de um gene se expressar ou não.
>
> Talvez o auge da importância da Matemática nessa disciplina, seja na engenharia genética. Uma coisa pode ter certeza, as áreas relacionadas à biotecnologia, chega muitas vezes a ser mais relacionadas à Matemática do que Biologia (PEREIRA, 2014).

Portanto, é função dos professores provocar o despertar do aluno para os caminhos da sua preferência e sua inclinação a determinadas áreas, para que ele possa perceber a utilidade e a importância da Matemática, e deste fato, sair beneficiado.

## 2.5 A Matemática na Química

É possível constatar que a Matemática está presente em diversas ciências e muito tem a contribuir para o desenvolvimento científico. Em Química percebe-se o auxílio que a Matemática proporcionou no prêmio Nobel de Química de 2017, de acordo com a matéria do IMPA (2017):

> Um exemplo recente é o Nobel de Química dado aos biofísicos Jacques Dubochet, Joachim Frank e Richard Henderson pelo "desenvolvimento da criomicroscopia eletrônica para a determinação em alta resolução da estrutura de biomoléculas numa solução". Olhando de longe nem parece que a Matemática tem alguma relação com a descoberta que está levando a bioquímica a uma "nova era". Mas o fato é que, sem ela, o trabalho dos pesquisadores não teria avançado.

Os PCN+ relacionam a Matemática com a Química, quando destaca:

> Em Química, transformação e conservação podem também ser apresentadas por meio de expressões matemáticas, como nas equações químicas, em que a igualdade representa uma transformação química, com diferentes substâncias de cada lado da equação, cujos coeficientes numéricos também expressam uma conservação material, o fato de que nenhum átomo desapareceu ou surgiu, mas simplesmente combinou-se de outra forma, em outra substância (BRASIL, 2006, p. 28).

O que os PCN+ apresentam podem ser evidenciados nos balanceamentos das equações químicas que levam a um sistema de equações lineares. Por exemplo, na equação química a seguir, para fazer o balanceamento, introduzem-se as variáveis $x$, $y$ e $z$ que são conhecidas como coeficientes estequiométricos.

$$N_2 + H_2 \rightarrow NH_3$$

Nestas condições, procuram-se os coeficientes $x$, $y$ e $z$ que determinam o equilíbrio da equação mantendo a mesma quantidade de cada elemento químico.

$$xN_2 + yH_2 \rightarrow zNH_3$$

A solução desse balanceamento químico encontra-se no Apêndice 3 e, embora essa equação seja de resolução simples, na qual uma solução pode ser encontrada por tentativa e erro, o formalismo matemático permite resolver equações mais elaboradas envolvendo um maior número de elementos químicos.

A função logarítmica também está presente na Química para determinar a acidez ou basicidade de uma solução, como pode ser observado no problema que envolve logaritmo na base dez usando a mesma notação vista anteriormente na seção 1.4 (A Matemática na Biologia) onde $a$ é a base do logaritmo e $x$ é um número real positivo cuja representação é $log_a x$ e nesse caso, quando $a = 10$ usualmente usa-se simplesmente a notação $logx$.

Qual o pH[1] de uma solução em que a concentração de íons $H^+$ é igual a $2.10^{-4}$ mol/litro? (Dado: $log2 = 0,30$). (Exercício extraído do vestibular da FATEC-SP) cuja solução se encontra no Apêndice 3.

Uma outra presença da Matemática na Química pode ser observada nas estruturas moleculares através da distribuição espacial dos átomos e segundo Lisboa et al. (2016) quando tem-se dois pares de elétrons ao redor do átomo central, como o dióxido de carbono ($CO_2$) o ângulo formado é de 180°, ou seja, eles estão sobre uma reta, se forem três pares de elétrons, a formação é plana como no formaldeídeo ($CH_2O$), equivalendo a um triângulo equilátero e, por fim, quando a distribuição é a mais afastada no espaço, tem-se um tetraedro regular, como o metano ($CH_4$). A figura a seguir mostra a forma eletrônica de cada uma dessas moléculas e a sua forma espacial.

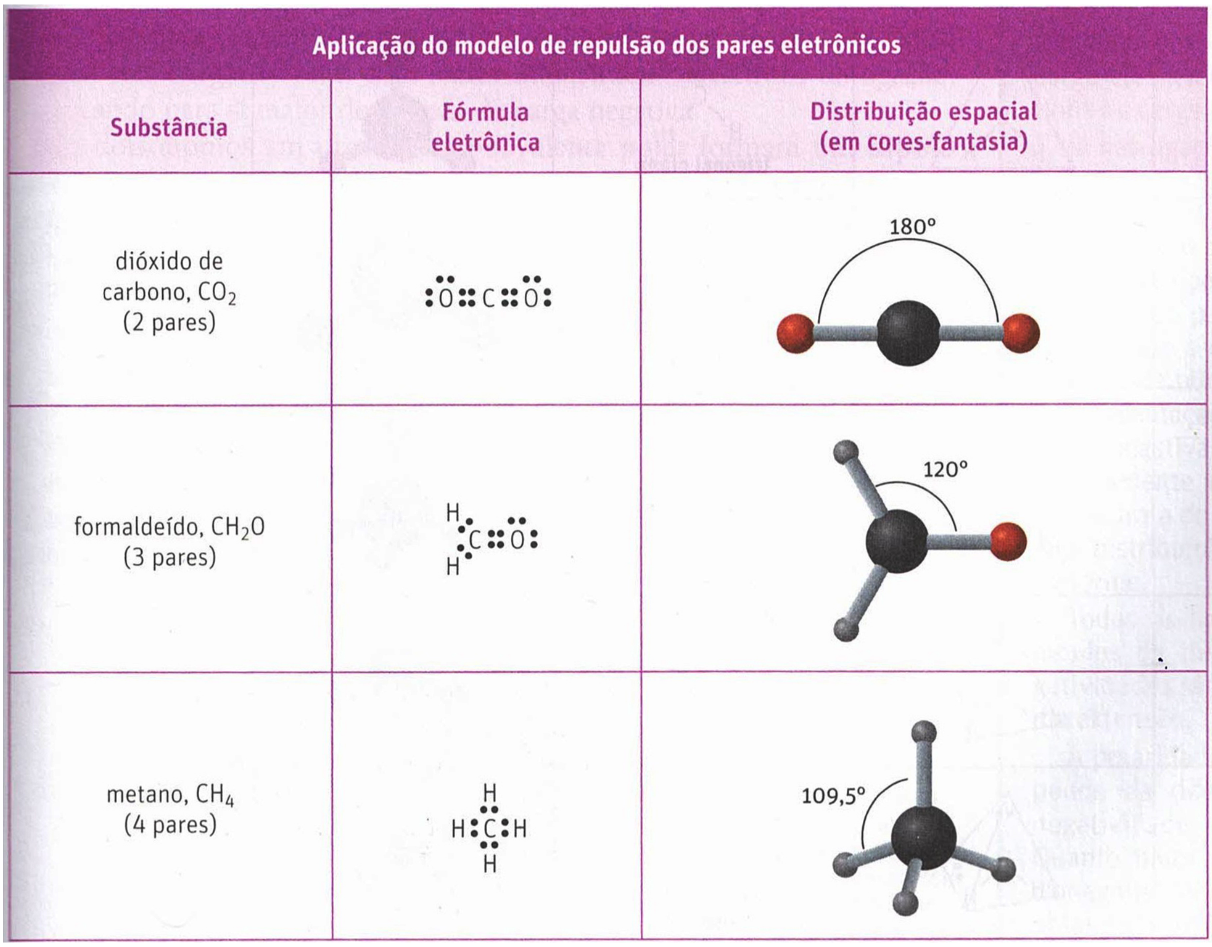


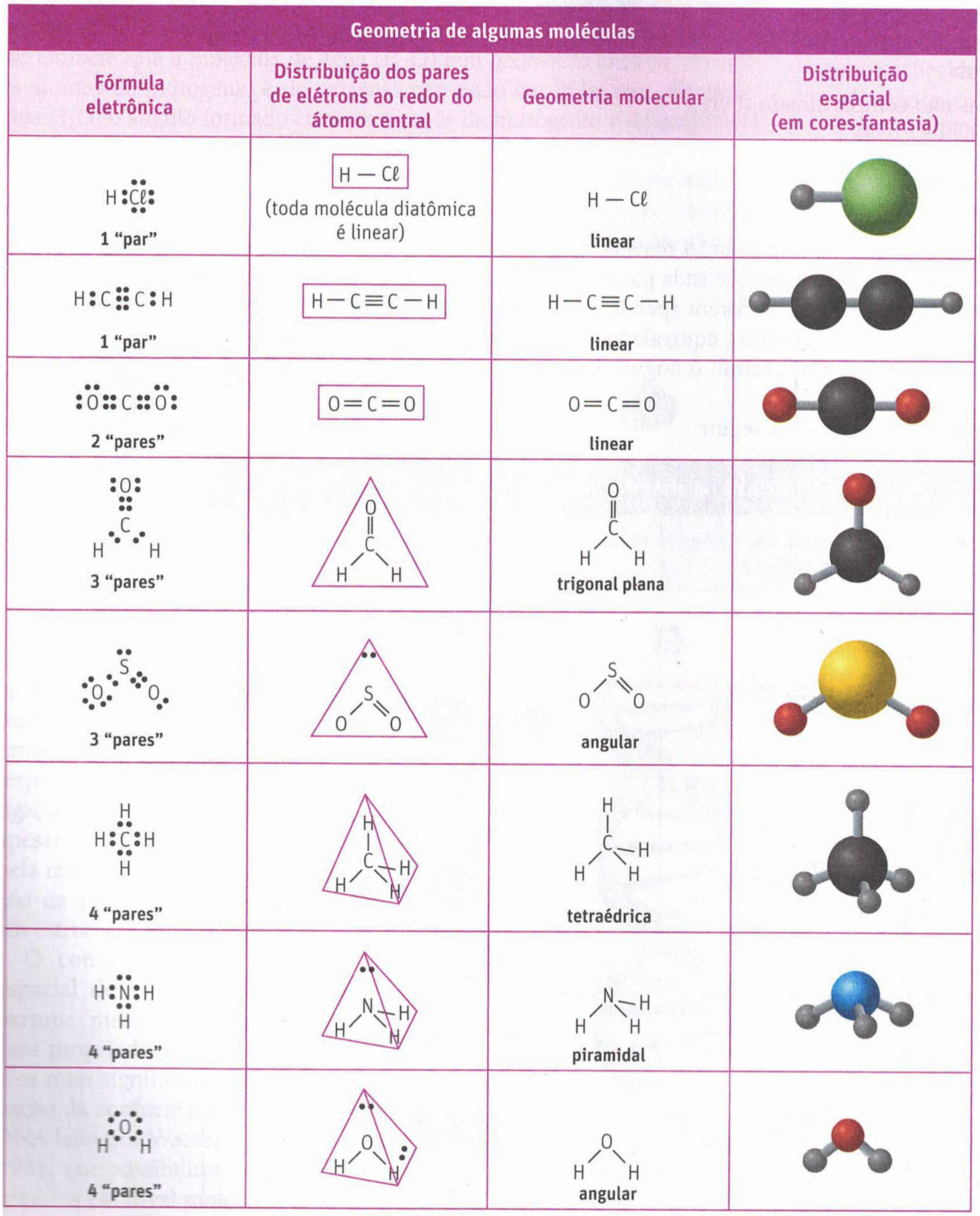

Figura 2.10: Ângulos formados pelas estruturas moleculares
Fonte: (LISBOA et al., 2016).

Há um problema usando a trigonometria e a geometria espacial para calcular o ângulo

[1]potencial Hidrogeniônico. Uma escala logarítmica que mede o grau de acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma determinada solução. As substâncias são consideradas ácidas quando o valor de pH está entre 0 e 7 e alcalinas (ou básicas) entre 7 e 14

formado entre os átomos da molécula do metano disponível no Apêndice 3.

De modo análogo à figura anterior, apresenta-se a seguir a geometria de outras moléculas com um, dois, três e quatro pares de elétrons.



**Geometria de algumas moléculas**

| Fórmula eletrônica | Distribuição dos pares de elétrons ao redor do átomo central | Geometria molecular | Distribuição espacial (em cores-fantasia) |
|---|---|---|---|
| H:Cℓ: <br> 1 "par" | H — Cℓ <br> (toda molécula diatômica é linear) | H — Cℓ <br> linear | |
| H:C:::C:H <br> 1 "par" | H—C≡C—H | H—C≡C—H <br> linear | |
| :O::C::O: <br> 2 "pares" | O=C=O | O=C=O <br> linear | |
| 3 "pares" | | trigonal plana | |
| 3 "pares" | | angular | |
| 4 "pares" | | tetraédrica | |
| 4 "pares" | | piramidal | |
| 4 "pares" | | angular | |

Figura 2.11: Geometria molecular
Fonte: (LISBOA et al., 2016).

Com relação à linguagem matemática utilizada na Química os Parâmetros Nacionais Curriculares estabelecem que:

> Assim como os outros campos do conhecimento, a Química utiliza também uma linguagem matemática associada aos fenômenos macro e microscópicos. O domínio dessa linguagem servirá para desenvolver competências e habilidades referentes ao estabelecimento de relações lógicoempíricas, lógico-formais, hipotético-lógicas e de raciocínio proporcional (BRASIL, 2000, p. 34).

Diante dessas considerações, uma forma de motivar os alunos tanto em Matemática como em Química é trabalhar essas disciplinas juntas, e fazer com que percebam como elas estão relacionadas e são importantes para o desenvolvimento do homem e que as transformações químicas realizadas através de cálculos matemáticos é a base para a descoberta de novos materiais, como apresentam os PCN+:

> Expandindo a sistematização das propriedades gerais da matéria, a Química dá ênfase às transformações geradoras de novos materiais. Ela está presente e deve ser reconhecida nos alimentos e medicamentos, nas fibras têxteis e nos corantes, nos materiais de construção e nos papéis, nos combustíveis e nos lubrificantes, nas embalagens e nos recipientes (BRASIL, 2000, p. 10).

Os PCN+ tratando a relação da Matemática com as ciências da natureza, a saber, Física, Química e Biologia destacam que:

> A Matemática, linguagem onipresente, distribuirá transversalmente às demais ciências seus temas estruturadores, relacionados respectivamente aos números, às formas e à análise de dados (BRASIL, 2006, p. 32).

Estes mesmos parâmetros, ao tratarem sobre a qualidade de vida do ser humano através de descobrimento de processos químicos e até mesmo dos impactos causados por esses processos, salientam que:

> O entendimento dessas transformações exige visão integrada da Química, da Física e da Biologia, recorrendo ao instrumental matemático apropriado, mostrando a necessidade das interações entre esses saberes (BRASIL, 2000, p. 10).

## 2.6 Educação Física e a expressão matemática no peso ideal

Muitos alunos que têm inclinação ao esporte e amam as aulas de Educação Física, normalmente, não gostam da Matemática. Porém, ensinar Matemática relacionada ao esporte poderá despertar o interesse desses alunos. Segundo Pereira (2012):

> Entendemos que um trabalho entre Educação Física e Matemática numa proposta interdisciplinar podem levar a um aprendizado mais prazeroso devido à percepção que o aluno vai ter da presença da matemática em coisas que culturalmente eles gostam, como o ato de jogar.(PEREIRA, 2012, p. 7):

Alguns jogos na Educação Física podem ser usados como motivação para o ensino de Matemática e uma proposta de trabalhar em conjunto com o professor de Educação Física pode ajudar bastante o desenvolvimento dos alunos. Mas o intuito aqui é, que os professores de Matemática, mostrem que pessoas melhores condicionadas fisicamente podem ter um melhor resultado no esporte e que um dos testes usado para avaliar os atletas é o IMC (índice de massa corporal) que é calculado por meio da fórmula:

$$IMC = \frac{Peso(kg)}{[Altura(m)]^2}$$

Expor aos alunos que uma pessoa com IMC abaixo ou acima do ideal pode desenvolver problemas de saúde e apresentar baixo desempenho atlético. Zanin (2019) destaca que:

> IMC é a sigla para Índice de Massa Corporal que serve para avaliar o peso do indivíduo em relação à sua altura e assim indicar se está dentro do peso ideal, acima ou abaixo do peso desejado.
>
> Estar dentro do peso certo é importante porque estar acima ou abaixo peso influencia na saúde, aumentando o risco de doenças como desnutrição quando se está abaixo do peso, e AVC e infarto, quando se está acima do peso. Assim, é comum os médicos, enfermeiros e nutricionistas avaliarem o peso da pessoa nas consultas de rotina para verificar a possibilidade de doenças que a pessoa pode estar pré-disposta.

De acordo com Pinheiro (2019) "os resultados do IMC para crianças são interpretados da seguinte forma: baixo peso para crianças abaixo do percentil 5; peso normal para crianças entre o percentil 5 e 85; sobrepeso para crianças entre o percentil 85 e 95 e obesidade para crianças acima do percentil 95.”

A tabela de IMC para meninos, relativa à idade, poderá ser muito explorada, trabalhando-se com os alunos a parte de plano cartesiano e pontos no plano, além disso da análise de gráfico.

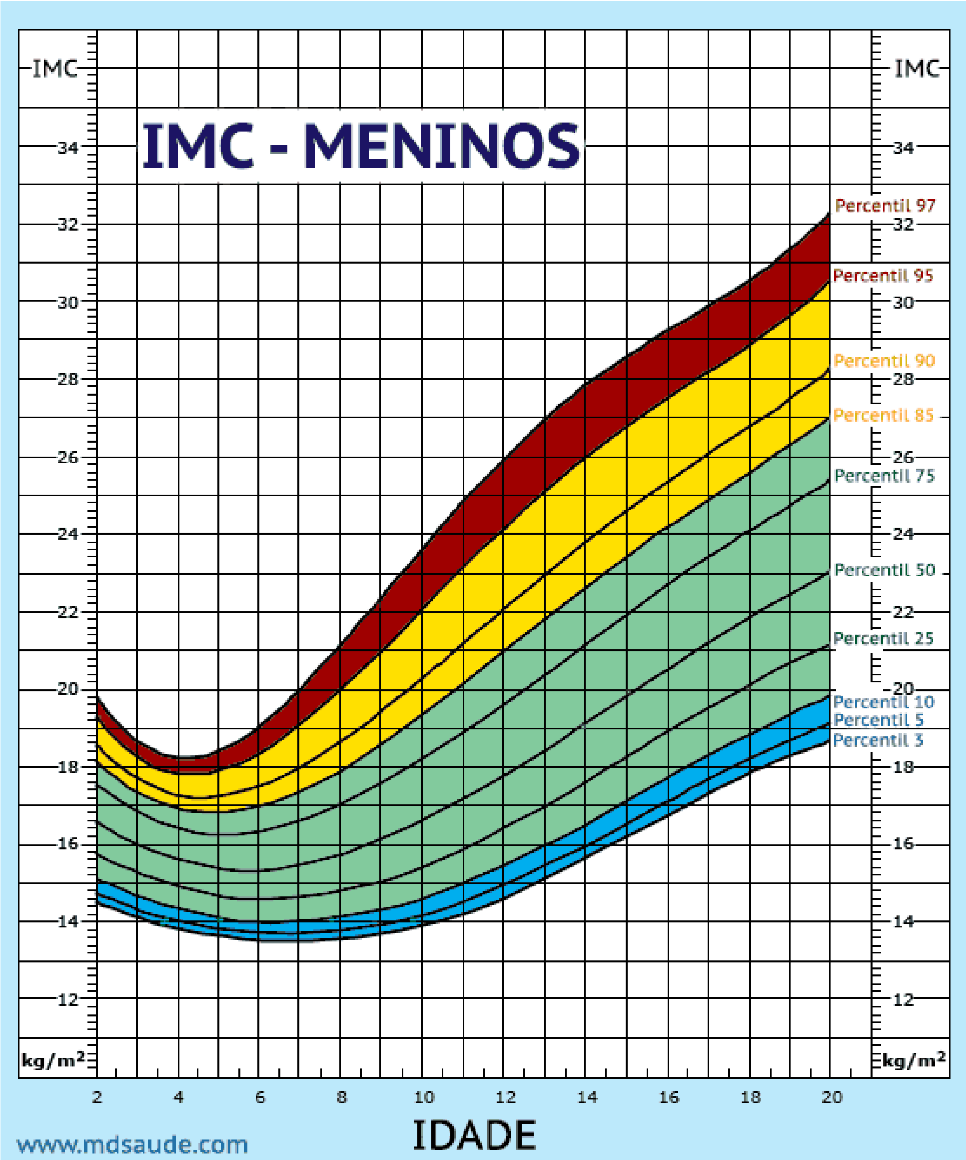



Figura 2.12: Índice de Massa Corporal para meninos
Fonte: (PINHEIRO, 2019).

A tabela de IMC para as meninas, relativa à idade também poderá ser explorada de modo análogo à tabela dos meninos:

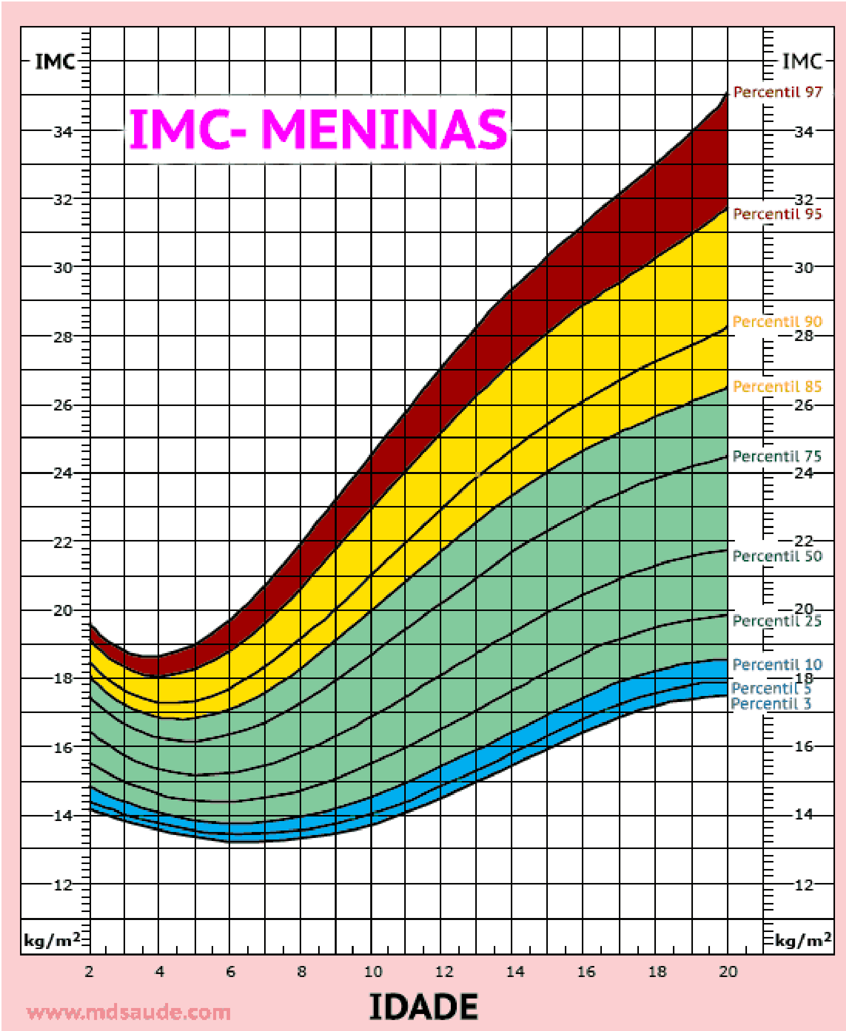



Figura 2.13: Índice de Massa Corporal para meninas
Fonte: (PINHEIRO, 2019).

Para uma boa utilização dos gráficos acima, o professor poderá solicitar aos alunos que calculem os seus IMC's e marquem no gráfico o ponto que corresponde à sua idade e IMC analisando o seu resultado pessoal. O professor ainda pode ajudá-los a analisar o resultado da sala, posteriormente fazendo gráficos e percentuais de alunos acima do peso, no peso ideal e abaixo do peso. Inclusive, pode explorar também os conceitos de média, mediana, moda e desvio padrão.

Nas aulas de Educação Física o professor, para uma continuidade do trabalho, poderá orientar os alunos sobre as interferências do resultado do IMC para a saúde física explicando como eles podem, através da prática de esportes e uma alimentação saudável, atingir o peso ideal.

Portanto, trabalhar essa interdisciplinaridade também deixará evidente para os alunos que os conhecimentos matemáticos são de extrema importância para o progresso e entendimento de outras disciplinas.

# Capítulo 3

# A Matemática nas profissões

A fase do Ensino Médio é decisiva para o aluno na escolha da sua profissão, assim sendo, a proposta é apresentar, de modo relativamente breve, qual o papel da Matemática em algumas profissões, tais como: Engenharia, Agricultura, Direito, Medicina, Atividades Tecnológicas e Atividades Comerciais/Empresariais.

## 3.1 Engenharia

Em todas as Engenharias a Matemática está fortemente presente. Os cálculos matemáticos são a base para a construção de casas, edifícios, galpões, fábricas, túneis, barragens, tubulações, máquinas, softwares de informática, processos de produção, ou seja, na construção de vários tipos de infraestrutura e sustentabilidade para o cotidiano da sociedade.

Dentre essas, na Engenharia Hidráulica e Sanitária, por exemplo, encontra-se o tratamento da água e esgoto que é de suma importância para o desenvolvimento urbano e rural visando a saúde da população. É por esse motivo que foi a eleita para a motivação nessa profissão.

As áreas de atuação da Engenharia Hidráulica são:

> **Urbana:** sistema de abastecimento de água, sistema de esgotamento sanitário, sistema de drenagem pluvial, Canais. **Rural:** sistema de drenagem, sistema de irrigação, sistema de água potável e esgotos. **Instalações Prediais:** industriais, comerciais, residenciais, públicas. **Lazer e paisagismo**. **Estradas (drenagem)**. **Defesa contra inundações**. **Geração de Energia**. **Navegação e Obras Marítimas e Fluviais** (NETTO et al., 2003, p.2).

Um problema simples, presente em Netto et al. (2003) que os alunos do Ensino Médio podem solucionar e que está no cotidiano do Engenheiro Hidráulico é o cálculo da força exercida por um líquido sobre uma superfície plana imersa: Numa barragem de concreto está instalada uma comporta circular de ferro fundido com 0,20 m de raio, à profundidade de 4 metros (Figura 3.1). A proposta é calcular a força exercida por um líquido sobre uma superfície plana imersa, cujo peso específico da água é de $(1000 kgf/m^3)$[1].

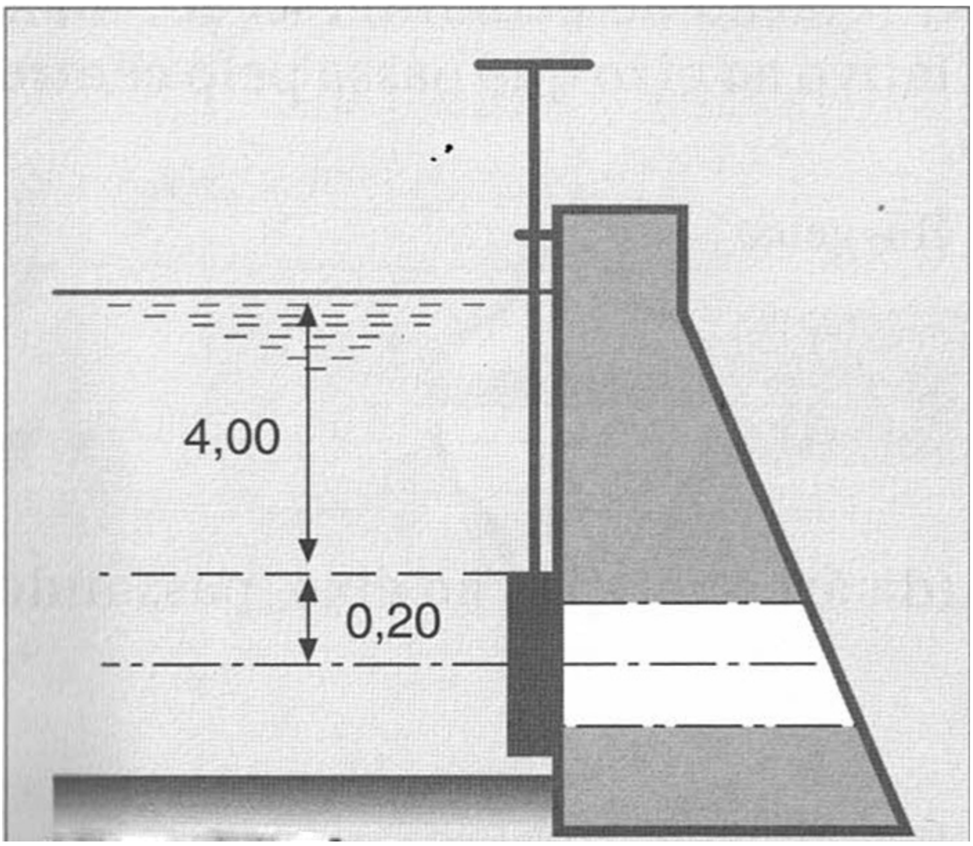


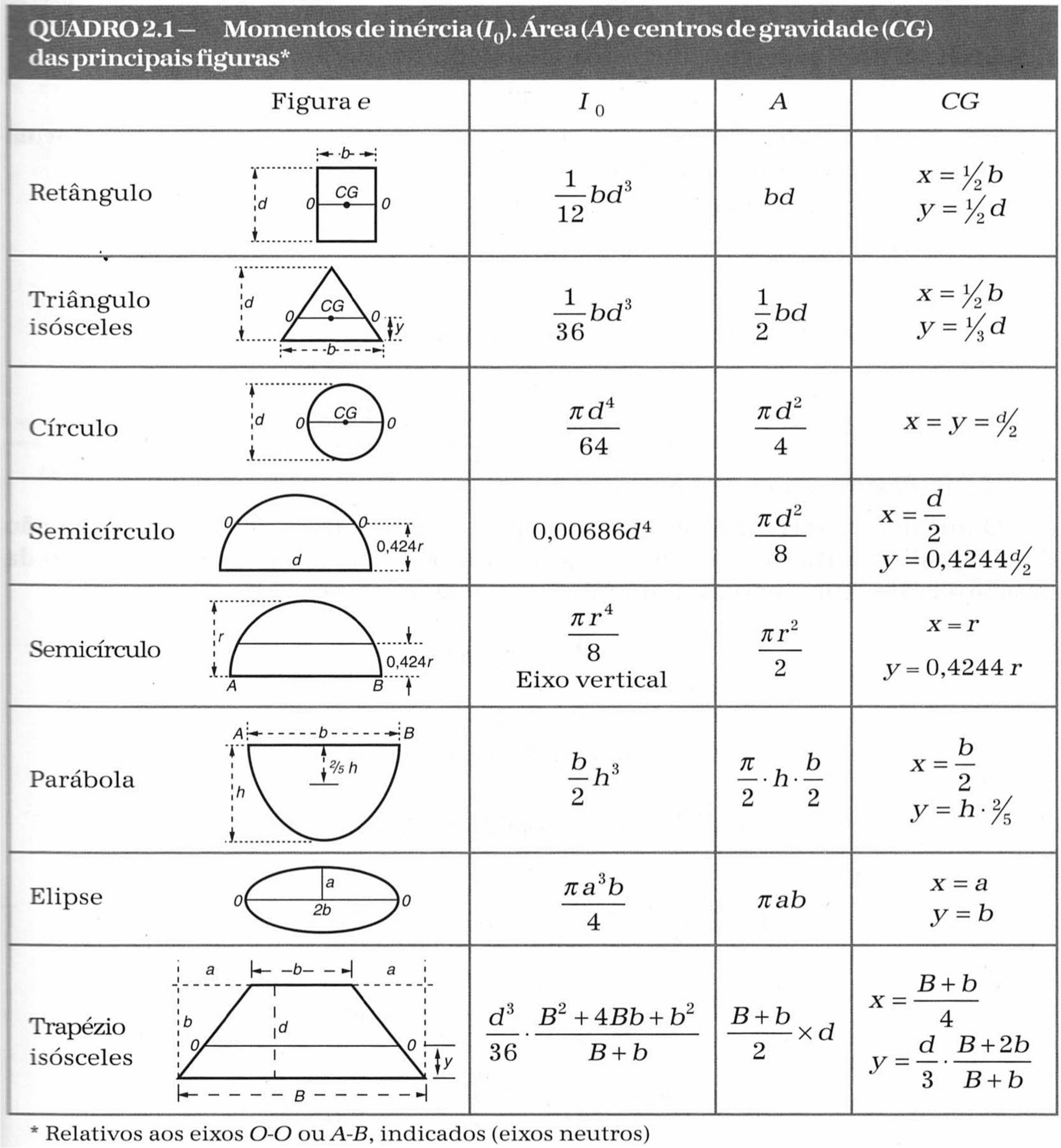

Figura 3.1: Barragem de concreto - exercício de Hidráulica
Fonte: (NETTO et al., 2003).

Denotando por $F$ a força a ser calculada, $\gamma$ o peso específico da água, $h$ a profundidade da barragem, $h'$ a medida do raio da comporta circular, $\bar{h} = (h + h')$ a altura desde a superfície da água até o centro da comporta onde a força é exercida e por $A$ a área da superfície da comporta em contato com a água.

O cálculo dessa força depende da área da superfície da comporta em contato com a água, do peso específico da água e da altura da superfície da água até o centro da comporta e é calculada pela fórmula: $F = \gamma.\bar{h}.A$, ou seja $F = 528kgf$. A solução completa desse problema está disponível no Apêndice 4.

Um quadro interessante da utilização prática da Matemática presente em Netto et al. (2003), no qual encontra-se, na primeira coluna, várias figuras geométricas; na segunda coluna, o momento de inércia de cada uma delas que é denotado por $I_0$; na sequência, a área, denotada por $A$; e, por fim, o centro de gravidade de cada figura denotado por $CG$:

[1]O peso específico é definido como peso por unidade de volume, logo entende-se que 1 litro de água pesa 1 kg, nesse caso temos 1000 litros de água



**QUADRO 2.1 — Momentos de inércia ($I_0$). Área ($A$) e centros de gravidade ($CG$) das principais figuras***

| Figura e | $I_0$ | $A$ | $CG$ |
| --- | --- | --- | --- |
| Retângulo | $\frac{1}{12}bd^3$ | $bd$ | $x = \frac{1}{2}b$<br>$y = \frac{1}{2}d$ |
| Triângulo isósceles | $\frac{1}{36}bd^3$ | $\frac{1}{2}bd$ | $x = \frac{1}{2}b$<br>$y = \frac{1}{3}d$ |
| Círculo | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi d^2}{4}$ | $x = y = d/2$ |
| Semicírculo | $0{,}00686d^4$ | $\frac{\pi d^2}{8}$ | $x = \frac{d}{2}$<br>$y = 0{,}4244 d/2$ |
| Semicírculo | $\frac{\pi r^4}{8}$<br>Eixo vertical | $\frac{\pi r^2}{2}$ | $x = r$<br>$y = 0{,}4244\, r$ |
| Parábola | $\frac{b}{2}h^3$ | $\frac{\pi}{2} \cdot h \cdot \frac{b}{2}$ | $x = \frac{b}{2}$<br>$y = h \cdot 2/5$ |
| Elipse | $\frac{\pi a^3 b}{4}$ | $\pi ab$ | $x = a$<br>$y = b$ |
| Trapézio isósceles | $\frac{d^3}{36} \cdot \frac{B^2 + 4Bb + b^2}{B + b}$ | $\frac{B+b}{2} \times d$ | $x = \frac{B+b}{4}$<br>$y = \frac{d}{3} \cdot \frac{B+2b}{B+b}$ |

* Relativos aos eixos *O-O* ou *A-B*, indicados (eixos neutros)

Figura 3.2: Centro de gravidade das principais figuras geométricas
Fonte: (NETTO et al., 2003).

Um exemplo da utilização de dados da tabela anterior presente em Netto et al. (2003) é o seguinte problema: Uma caixa de água de 800 litros mede 1,00 x 1,00 x 0,80. Determinar o empuxo[2] que atua em uma das suas paredes laterais e seu ponto de aplicação. O peso específico da água é de $1000kgf/m^3$. A figura a seguir ilustra o problema:

[2]É a força vertical para cima exercida na água contrária à pressão atmosférica

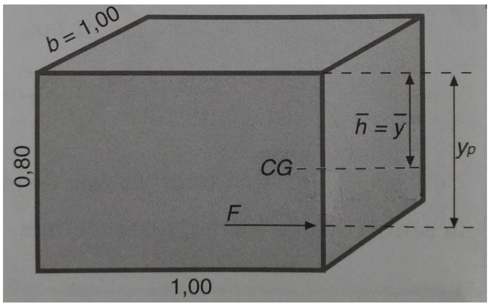



Figura 3.3: Caixa de água - exercício de Hidráulica
Fonte: (NETTO et al., 2003).

O engenheiro hidráulico faz esse cálculo para saber qual a estrutura ideal para a construção segura da parede onde essa força está atuando de forma que não se rompa.

Denotando por $F$ a força do empuxo que atua na parede da face lateral direita, esta será calculado pela fórmula: $F = \gamma.\bar{h}.A$, assim $F = 329kgf$ e denotando por $y_p$ a altura onde o empuxo acontece, será calculado pela fórmula: $y_p = \bar{y} + \frac{I_0}{A\bar{y}}$ o que resulta $y_p = 0,533m$. Portanto, encontra-se um empuxo de $329kgf$ aplicado a $0,533m$ de altura. A solução detalhada desse problema encontra-se no Apêndice 4. Esses dados são fundamentais para o cálculo, como neste exemplo, para a construção de caixas de água de acordo com as forças exercidas.

Outra parte interessante na Engenharia Hidráulica, que os professores de Matemática do Ensino Médio podem utilizar em suas discussões, são os orifícios que são feitos para o escoamento de líquidos, pois suas classificações podem ser feitas quanto à forma geométrica e quanto às suas dimensões. Além disso, para a classificação do tamanho desses orifícios, em pequenos ou grandes, são usadas proporções relativas à área e à profundidade dos recipientes que os contêm. Netto et al. (2003) destaca que:

> Os orifícios podem ser classificados quanto à forma, em circulares, retangulares, etc.; quanto às suas dimensões relativas, em pequenos e grandes. São considerados pequenos os orifícios cujas dimensões são muito menores que a profundidade em que se encontram: dimensão vertical igual ou inferior a um terço da profundidade. Para orifícios pequenos de área inferior a $\frac{1}{10}$ da superfície do recipiente, pode-se desprezar a velocidade do líquido (NETTO et al., 2003, p.63).

O professor poderá explorar muitos outros aspectos relativos a essa profissão, pois todas as engenharias utilizam muito os conceitos matemáticos: a trigonometria, áreas, volumes, porcentagens, funções, dentre outros e o professor tem aí uma vasta gama de formas de motivar os alunos através das práticas utilizadas no cotidiano dos profissionais da Engenharia Hidráulica.

## 3.2 Agricultura

Na Agricultura a Matemática está presente desde a área de plantio, quantidade de fertilizantes por metro quadrado, lucro ou prejuízo, percentual em relação à produção anterior, até a análise da quantidade produzida, dentre muitas outras especificidades.

A seguir encontram-se notícias[3] relacionadas à Agricultura que exemplificam a presença da Matemática nesta área:

Agricultura

Outras matérias

Óleo de soja: EUA vendem 19,7 mil toneladas da safra 2018/19 na semana

O volume representa alta de 3% ante a semana anterior e de 79% em relação à média das quatro semanas anteriores

05/7/2019 13H19 - Atualizada em: 05/7/2019 13H19

Tereos sai de lucro para prejuízo líquido consolidado de R$ 401 mi em 2018/19

O resultado inclui as sete usinas de açúcar, etanol e bioenergia do Brasil e uma unidade em Moçambique

05/7/2019 13H01 - Atualizada em: 05/7/2019 13H01

Irrigação por pivô central triplicou entre 2000 e 2017, mostra novo levantamento

Segundo a Agência Nacional de Águas (Ana) e Embrapa. Estados campões em irrigação são Minas Gerais, Goiás e Bahia

04/7/2019 19H58 - Atualizada em: 04/7/2019 19H58

Rio Grande do Sul já plantou 88% de lavoura de trigo

De acordo com a Emater, 97% das plantações estão em fase de germinação

04/7/2019 19H34 - Atualizada em: 04/7/2019 19H34

Figura 3.4: Notícias sobre agricultura
Fonte: O autor.

Para a reflexão sobre a presença da Matemática na agricultura, um vídeo[4] interessante mostra o porquê de o formato dos silos de armazenagem dos grão ser cilíndrico, como é

[3]Notícias apresentadas pelo <https://revistagloborural.globo.com/Noticias/Agricultura/index.html> no dia 05/07/19.

[4]O vídeo pode ser assistido através do link: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=38&v=4VJ6GHtN3TY>.

feito o cálculo do volume do cilindro e a importância disso para uma boa produção e armazenagem. Em seguida, trata de outros produtos agrícolas para os quais a melhor forma de armazenagem são os caixotes em formatos de paralelepípedos, como o milho. O professor poderá utilizar-se deste vídeo como motivação para o estudo de áreas e volumes de sólidos. A figura a seguir mostra um pouco da Matemática no campo:


Figura 3.5: Matemática na Agricultura - Formatos dos Silos
Fonte: (YOKOYAMA, 2013).

Uma parte essencial da Agricultura para o bom plantio é a fertilização do solo. No ano de 1999 a Comissão de Fertilidade do Solo do Estado de Minas Gerais apresentou a 5ª aproximação do Boletim "Recomendações para o Uso de Fertilizantes no Estado de Minas Gerais", envolvendo Professores, Pesquisadores e Extensionistas (UFV, UFLA, UFU, EMBRAPA, EPAMIG e EMATER) que apresenta:

> Esta versão foi adaptada ao Sistema Internacional de Unidades, conforme sugestão da Sociedade Brasileira de Ciência do Solo, traz aperfeiçoamentos no cálculo da necessidade de calagem pelo método do alumínio e do cálcio e magnésio trocáveis, inclui um método de cálculo da necessidade de gesso e acrescenta o fósforo remanescente como critério de interpretação da atividade físico-química da fração argila do solo, além de refinar as recomendações de adubação NPK e micronutrientes para várias culturas.(RIBEIRO; GUIMARãES; V., 1999, p.182).

Segundo Ribeiro, Guimarães e V. (1999) o processo de fertilização inicia-se com a análise química do solo e após o resultado dessa análise o agricultor deverá adubá-lo com Nitrogênio($N$), Fósforo ($P_2O_5$) e Potássio ($K_2O$) que é uma relação conhecida como N:P:K.

Um problema presente em Ribeiro, Guimarães e V. (1999) é: "A análise química da amostra de um solo determinou, por exemplo, de acordo com os teores dos nutrientes do solo, a necessidade de 20:80:40 kg/ha de $N : P_2O_5 : K_2O$, respectivamente, para a adubação de plantio de determinada cultura". Aqui apresenta-se a alternativa na qual os alunos do Ensino Médio poderão compreender e visualizar a aplicação da Matemática, com a utilização da regra de três. A solução apresentada pelos autores pode ser feita a partir da mistura de fertilizantes minerais simples, desde que sejam compatíveis. A partir da análise feita, serão utilizados ureia, superfosfato simples e cloreto de potássio. A relação utilizada é que para cada $100kg$ de ureia, há necessidade de $44kg$ de Nitrogênio $(N)$, para $100kg$ de superfosfato simples, há necessidade de $18kg$ de Fósforo $(P_2O_5)$ e para $100kg$ de cloreto de potássio há necessidade de $58Kg$ de Potássio $(K_2O)$. Portanto, utilizando a regra de três, chega-se aos resultados necessários para a adubação desse solo por hectare: $45,5$ kg de uréia, $444,4$ kg de superfosfato simples e 69 kg de cloreto de potássio, o que resulta num total de $558,9$ kg/ha de fertilizantes. A solução detalhada deste problema está disponível no Apêndice 5.

Na Agricultura, assim como em várias outras profissões as matrizes ajudam a resolver problemas de forma rápida e, por isso, esse conteúdo do Ensino Médio também deve ser explorado para a motivação dos estudos.

É importante apresentar aos alunos as matrizes como uma ferramenta que organiza os dados exibidos em tabelas de forma a fornecer informações importantes de maneira rápida e eficiente. Além disso, é possível fazer estimativas de plantio futuro, também com fertilizantes, dentre outros. Inclusive, por volta de 250 a.C., foi escrito na China um livro com vários problemas que incluem mensuração de terras e agricultura que foram apresentados através de sistemas de equações do primeiro grau e foram solucionados por meio de tabelas que hoje recebem o nome de matrizes.

Um problema que poderá ser apresentado aos alunos e que utiliza matriz nesse contexto é: Foi feito um levantamento sobre o plantio de milho, arroz e soja nas regiões A e B conforme a tabela:

Tabela 3.1: Área plantada (em hectare)

| Região | Milho | Arroz | Soja |
|---|---|---|---|
| A | 40 | 20 | 50 |
| B | 30 | 10 | 40 |

Foram utilizados fertilizantes X, Y e Z nessas plantações conforme a tabela:

Tabela 3.2: Fertilizantes (em Kg/hectare) por Grãos

| Grãos | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| Milho | 5 | 10 | 8 |
| Arroz | 6 | 5 | 4 |
| Soja | 3 | 7 | 5 |

Com base nos dados apresentados construa uma tabela com a quantidade de fertilizantes utilizados por região. Em seguida, dê o total de fertilizantes utilizado por hectare, em cada região.

Através do conhecimento sobre matrizes e suas propriedades é possível resolver esse problema com tranquilidade aplicando a multiplicação de matrizes. O que gera a tabela:

Tabela 3.3: Fertilizantes (em Kg/hectare) por região

| Região | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| A | 470 | 850 | 650 |
| B | 330 | 630 | 480 |

Assim, foram utilizados 1.970 kg/hectare de fertilizantes na região A e 1.440 kg/hectare na região B.

A solução detalhada deste problema encontra-se no Apêndice 5.

Ao professor fica o desafio de instigar a curiosidade para o conhecimento, colocando em prática cada conteúdo proposto para que o aluno relacione o conhecimento adquirido ao cotidiano. Esses conteúdos tornam-se ainda mais relevantes quando o aluno percebe que a Matemática não é algo abstrato, mas aplicável nas profissões que a utilizam simultaneamente com outras ciências, como foi visto aqui com a Agricultura, e nas primeiras atividades relacionam-se com a Química. Portanto, como o Brasil é essencialmente um país agrícola, trabalhar nessa área requer conhecimentos matemáticos essenciais para uma boa safra.

## 3.3 Direito

Na área jurídica a Matemática se faz presente para cálculos trabalhistas e de tributos, também nas repartições de heranças com os inventários, nos casos de divórcio para divisão de bens, em cálculos previdenciários dentre outros.

Embora nem sempre seja perceptível, a Matemática está presente nas leis que organizam a sociedade.

Analisando desde o início a contratação de um advogado para qualquer caso, já se começa a utilizar a Matemática quando são acordados os valores, que na maioria dos casos, são calculados através de porcentagem sobre o ganho da causa.

Existem vários ramos na Advocacia, porém aqui, o foco será no Direito Previdenciário. Muitas pessoas procuram um advogado quando estão próximas a se aposentar e o que esse profissional faz? É ele quem analisa o tempo de contribuição da pessoa verificando todos os cálculos do período trabalhado para que, ao concluir o processo, o cliente possa se aposentar sem perdas.

Ainda hoje, o fator previdenciário é utilizado para o cálculo de aposentadorias. Esse fator, segundo Dalvi e Dalvi (2012), "tem como objetivo incentivar o trabalhador a se aposentar mais tarde para que o valor do seu benefício seja maior", ou seja, esse cálculo é realizado caso a pessoa queira se aposentar mais cedo.

Com a nova proposta para a reforma da previdência, segundo o Governo do Brasil (2019) o fator vai desaparecer em até dois anos após promulgada a Proposta de Emenda à Constituição da Nova Previdência, porém como essa mudança é um processo que se estenderá por alguns anos segue a regra atual para o cálculo do fator previdenciário:

$$f = \frac{Tc.a}{Es}.\frac{[1 + (Id + Tc.a)]}{100}$$

Onde $f$ é o fator previdenciário, $Es$ é a expectativa de sobrevida no momento da aposentadoria, $Tc$ é o tempo de contribuição até o momento da aposentadoria, $Id$ é a idade no momento da aposentadoria e $a$ é a alíquota de contribuição correspondente a 0,31.

Com relação à expectativa de sobrevida utilizada para o cálculo do fator previdenciário Dalvi e Dalvi (2012) destacam que:

> A expectativa de sobrevida do segurado na idade da aposentadoria será obtida a partir da tábua completa de mortalidade construída pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, para toda a população brasileira, considerando-se a média nacional única para ambos os sexos(DALVI; DALVI, 2012, p.33).

Dalvi e Dalvi (2012) mostram também que para o cálculo do fator previdenciário são acrescentados ao tempo de contribuição cinco anos para mulheres e no caso de professores da Educação Básica são acrescentados cinco anos para homens e dez anos para mulheres. A seguir encontra-se a tabela do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE para o cálculo do fator previdenciário:

**FATOR PREVIDENCIÁRIO 2019 (TABELA MORTALIDADE AMBOS OS SEXOS 2017 - IBGE)**

EXPECTATIVA DE SOBREVIDA / IDADE DA APOSENTADORIA

| TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO | 36,6 | 35,7 | 34,8 | 34,0 | 33,1 | 32,2 | 31,4 | 30,5 | 29,7 | 28,8 | 28,0 | 27,2 | 26,4 | 25,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 15 | 0,187 | 0,193 | 0,200 | 0,206 | 0,213 | 0,220 | 0,228 | 0,236 | 0,244 | 0,253 | 0,262 | 0,271 | 0,282 | 0,292 |
| 16 | 0,200 | 0,207 | 0,213 | 0,220 | 0,228 | 0,235 | 0,243 | 0,252 | 0,261 | 0,270 | 0,280 | 0,290 | 0,301 | 0,312 |
| 17 | 0,213 | 0,220 | 0,227 | 0,235 | 0,242 | 0,251 | 0,259 | 0,268 | 0,278 | 0,287 | 0,298 | 0,309 | 0,320 | 0,332 |
| 18 | 0,226 | 0,234 | 0,241 | 0,249 | 0,257 | 0,266 | 0,275 | 0,284 | 0,294 | 0,305 | 0,316 | 0,328 | 0,340 | 0,353 |
| 19 | 0,239 | 0,247 | 0,255 | 0,263 | 0,272 | 0,281 | 0,291 | 0,301 | 0,311 | 0,322 | 0,334 | 0,346 | 0,359 | 0,373 |
| 20 | 0,253 | 0,261 | 0,269 | 0,278 | 0,287 | 0,297 | 0,307 | 0,317 | 0,328 | 0,340 | 0,352 | 0,365 | 0,379 | 0,393 |
| 21 | 0,266 | 0,274 | 0,283 | 0,292 | 0,302 | 0,312 | 0,323 | 0,334 | 0,346 | 0,358 | 0,371 | 0,384 | 0,399 | 0,414 |
| 22 | 0,279 | 0,288 | 0,297 | 0,307 | 0,317 | 0,328 | 0,339 | 0,350 | 0,363 | 0,376 | 0,389 | 0,403 | 0,419 | 0,434 |
| 23 | 0,292 | 0,302 | 0,311 | 0,321 | 0,332 | 0,343 | 0,355 | 0,367 | 0,380 | 0,393 | 0,408 | 0,423 | 0,438 | 0,455 |
| 24 | 0,306 | 0,315 | 0,325 | 0,336 | 0,347 | 0,359 | 0,371 | 0,384 | 0,397 | 0,411 | 0,426 | 0,442 | 0,458 | 0,476 |
| 25 | 0,319 | 0,329 | 0,340 | 0,351 | 0,362 | 0,374 | 0,387 | 0,401 | 0,415 | 0,429 | 0,445 | 0,461 | 0,478 | 0,496 |
| 26 | 0,332 | 0,343 | 0,354 | 0,366 | 0,378 | 0,390 | 0,403 | 0,417 | 0,432 | 0,447 | 0,463 | 0,480 | 0,498 | 0,517 |
| 27 | 0,346 | 0,357 | 0,368 | 0,380 | 0,393 | 0,406 | 0,420 | 0,434 | 0,449 | 0,465 | 0,482 | 0,500 | 0,519 | 0,538 |
| 28 | 0,360 | 0,371 | 0,383 | 0,395 | 0,408 | 0,422 | 0,436 | 0,451 | 0,467 | 0,484 | 0,501 | 0,519 | 0,539 | 0,559 |
| 29 | 0,373 | 0,385 | 0,397 | 0,410 | 0,424 | 0,438 | 0,453 | 0,468 | 0,485 | 0,502 | 0,520 | 0,539 | 0,559 | 0,580 |
| 30 | 0,387 | 0,399 | 0,412 | 0,425 | 0,439 | 0,454 | 0,469 | 0,485 | 0,502 | 0,520 | 0,539 | 0,559 | 0,579 | 0,601 |
| 31 | 0,400 | 0,413 | 0,426 | 0,440 | 0,455 | 0,470 | 0,486 | 0,503 | 0,520 | 0,539 | 0,558 | 0,578 | 0,600 | 0,623 |
| 32 | 0,414 | 0,427 | 0,441 | 0,455 | 0,470 | 0,486 | 0,502 | 0,520 | 0,538 | 0,557 | 0,577 | 0,598 | 0,620 | 0,644 |
| 33 | 0,428 | 0,442 | 0,456 | 0,470 | 0,486 | 0,502 | 0,519 | 0,537 | 0,556 | 0,575 | 0,596 | 0,618 | 0,641 | 0,665 |
| 34 | 0,442 | 0,456 | 0,470 | 0,486 | 0,502 | 0,518 | 0,536 | 0,554 | 0,574 | 0,594 | 0,615 | 0,638 | 0,662 | 0,687 |
| 35 | 0,456 | 0,470 | 0,485 | 0,501 | 0,517 | 0,535 | 0,553 | 0,572 | 0,592 | 0,613 | 0,635 | 0,658 | 0,682 | 0,708 |
| 36 | | 0,485 | 0,500 | 0,516 | 0,533 | 0,551 | 0,570 | 0,589 | 0,610 | 0,631 | 0,654 | 0,678 | 0,703 | 0,730 |
| 37 | | | 0,515 | 0,532 | 0,549 | 0,567 | 0,587 | 0,607 | 0,628 | 0,650 | 0,674 | 0,698 | 0,724 | 0,751 |
| 38 | | | | 0,547 | 0,565 | 0,584 | 0,604 | 0,624 | 0,646 | 0,669 | 0,693 | 0,718 | 0,745 | 0,773 |
| 39 | | | | | 0,581 | 0,600 | 0,621 | 0,642 | 0,664 | 0,688 | 0,713 | 0,739 | 0,766 | 0,795 |
| 40 | | | | | | 0,617 | 0,638 | 0,660 | 0,683 | 0,707 | 0,732 | 0,759 | 0,787 | 0,817 |
| 41 | | | | | | | 0,655 | 0,678 | 0,701 | 0,726 | 0,752 | 0,779 | 0,808 | 0,839 |
| 42 | | | | | | | | 0,695 | 0,720 | 0,745 | 0,772 | 0,800 | 0,830 | 0,861 |
| 43 | | | | | | | | | 0,738 | 0,764 | 0,792 | 0,821 | 0,851 | 0,883 |
| 44 | | | | | | | | | | 0,783 | 0,812 | 0,841 | 0,872 | 0,905 |
| 45 | | | | | | | | | | | 0,832 | 0,862 | 0,894 | 0,927 |
| 46 | | | | | | | | | | | | 0,883 | 0,915 | 0,950 |
| 47 | | | | | | | | | | | | | 0,937 | 0,972 |
| 48 | | | | | | | | | | | | | | 0,995 |
| 49 | | | | | | | | | | | | | | |
| 50 | | | | | | | | | | | | | | |
| 51 | | | | | | | | | | | | | | |
| 52 | | | | | | | | | | | | | | |
| 53 | | | | | | | | | | | | | | |
| 54 | | | | | | | | | | | | | | |
| 55 | | | | | | | | | | | | | | |

| TEMPO DE CONTRIBUIÇÃO | 24,8 | 24,0 | 23,2 | 22,4 | 21,6 | 20,9 | 20,1 | 19,4 | 18,7 | 18,0 | 17,3 | 16,6 | 15,9 | 15,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 15 | 0,304 | 0,316 | 0,328 | 0,342 | 0,356 | 0,371 | 0,387 | 0,404 | 0,422 | 0,442 | 0,463 | 0,485 | 0,508 | 0,533 |
| 16 | 0,324 | 0,337 | 0,351 | 0,365 | 0,380 | 0,397 | 0,414 | 0,432 | 0,451 | 0,472 | 0,494 | 0,518 | 0,543 | 0,570 |
| 17 | 0,345 | 0,359 | 0,373 | 0,389 | 0,405 | 0,422 | 0,440 | 0,460 | 0,481 | 0,503 | 0,526 | 0,551 | 0,578 | 0,607 |
| 18 | 0,366 | 0,381 | 0,396 | 0,412 | 0,429 | 0,448 | 0,467 | 0,488 | 0,510 | 0,533 | 0,558 | 0,585 | 0,613 | 0,643 |
| 19 | 0,387 | 0,403 | 0,419 | 0,436 | 0,454 | 0,473 | 0,494 | 0,516 | 0,539 | 0,564 | 0,590 | 0,618 | 0,648 | 0,680 |
| 20 | 0,409 | 0,425 | 0,442 | 0,460 | 0,479 | 0,499 | 0,521 | 0,544 | 0,568 | 0,595 | 0,622 | 0,652 | 0,684 | 0,717 |
| 21 | 0,430 | 0,447 | 0,465 | 0,484 | 0,504 | 0,525 | 0,548 | 0,572 | 0,598 | 0,625 | 0,655 | 0,686 | 0,719 | 0,755 |
| 22 | 0,451 | 0,469 | 0,488 | 0,508 | 0,529 | 0,551 | 0,575 | 0,601 | 0,628 | 0,656 | 0,687 | 0,720 | 0,755 | 0,792 |
| 23 | 0,473 | 0,491 | 0,511 | 0,532 | 0,554 | 0,577 | 0,602 | 0,629 | 0,657 | 0,687 | 0,720 | 0,754 | 0,790 | 0,829 |
| 24 | 0,494 | 0,513 | 0,534 | 0,556 | 0,579 | 0,604 | 0,630 | 0,658 | 0,687 | 0,719 | 0,752 | 0,788 | 0,826 | 0,867 |
| 25 | 0,516 | 0,536 | 0,557 | 0,580 | 0,604 | 0,630 | 0,657 | 0,686 | 0,717 | 0,750 | 0,785 | 0,822 | 0,862 | 0,905 |
| 26 | 0,537 | 0,558 | 0,581 | 0,604 | 0,630 | 0,656 | 0,685 | 0,715 | 0,747 | 0,781 | 0,818 | 0,857 | 0,898 | 0,942 |
| 27 | 0,559 | 0,581 | 0,604 | 0,629 | 0,655 | 0,683 | 0,712 | 0,744 | 0,777 | 0,813 | 0,851 | 0,891 | 0,934 | 0,980 |
| 28 | 0,581 | 0,604 | 0,628 | 0,653 | 0,680 | 0,709 | 0,740 | 0,773 | 0,807 | 0,844 | 0,884 | 0,926 | 0,971 | 1,019 |
| 29 | 0,603 | 0,626 | 0,651 | 0,678 | 0,706 | 0,736 | 0,768 | 0,802 | 0,838 | 0,876 | 0,917 | 0,961 | 1,007 | 1,057 |
| 30 | 0,625 | 0,649 | 0,675 | 0,703 | 0,732 | 0,763 | 0,796 | 0,831 | 0,868 | 0,908 | 0,950 | 0,996 | 1,044 | 1,095 |
| 31 | 0,647 | 0,672 | 0,699 | 0,727 | 0,758 | 0,790 | 0,824 | 0,860 | 0,899 | 0,940 | 0,984 | 1,031 | 1,080 | 1,134 |
| 32 | 0,669 | 0,695 | 0,723 | 0,752 | 0,783 | 0,817 | 0,852 | 0,889 | 0,929 | 0,972 | 1,017 | 1,066 | 1,117 | 1,172 |
| 33 | 0,691 | 0,718 | 0,747 | 0,777 | 0,809 | 0,844 | 0,880 | 0,919 | 0,960 | 1,004 | 1,051 | 1,101 | 1,154 | 1,211 |
| 34 | 0,713 | 0,741 | 0,771 | 0,802 | 0,835 | 0,871 | 0,908 | 0,948 | 0,991 | 1,036 | 1,085 | 1,136 | 1,191 | 1,250 |
| 35 | 0,735 | 0,764 | 0,795 | 0,827 | 0,861 | 0,898 | 0,937 | 0,978 | 1,022 | 1,069 | 1,118 | 1,172 | 1,228 | 1,289 |
| 36 | 0,758 | 0,788 | 0,819 | 0,852 | 0,888 | 0,925 | 0,965 | 1,008 | 1,053 | 1,101 | 1,152 | 1,207 | 1,266 | 1,328 |
| 37 | 0,780 | 0,811 | 0,843 | 0,878 | 0,914 | 0,953 | 0,994 | 1,038 | 1,084 | 1,134 | 1,186 | 1,243 | 1,303 | 1,367 |
| 38 | 0,803 | 0,834 | 0,868 | 0,903 | 0,940 | 0,980 | 1,022 | 1,067 | 1,115 | 1,166 | 1,221 | 1,279 | 1,340 | 1,406 |
| 39 | 0,826 | 0,858 | 0,892 | 0,928 | 0,967 | 1,008 | 1,051 | 1,097 | 1,147 | 1,199 | 1,255 | 1,315 | 1,378 | 1,446 |
| 40 | 0,848 | 0,881 | 0,917 | 0,954 | 0,993 | 1,035 | 1,080 | 1,128 | 1,178 | 1,232 | 1,289 | 1,351 | 1,416 | 1,485 |
| 41 | 0,871 | 0,905 | 0,941 | 0,979 | 1,020 | 1,063 | 1,109 | 1,158 | 1,210 | 1,265 | 1,324 | 1,387 | 1,454 | 1,525 |
| 42 | 0,894 | 0,929 | 0,966 | 1,005 | 1,047 | 1,091 | 1,138 | 1,188 | 1,241 | 1,298 | 1,359 | 1,423 | 1,492 | 1,565 |
| 43 | 0,917 | 0,953 | 0,991 | 1,031 | 1,074 | 1,119 | 1,167 | 1,219 | 1,273 | 1,331 | 1,393 | 1,459 | 1,530 | 1,605 |
| 44 | 0,940 | 0,977 | 1,016 | 1,057 | 1,101 | 1,147 | 1,197 | 1,249 | 1,305 | 1,365 | 1,428 | 1,496 | 1,568 | 1,645 |
| 45 | 0,963 | 1,001 | 1,041 | 1,083 | 1,128 | 1,175 | 1,226 | 1,280 | 1,337 | 1,398 | 1,463 | 1,532 | 1,606 | 1,685 |
| 46 | 0,986 | 1,025 | 1,066 | 1,109 | 1,155 | 1,203 | 1,255 | 1,310 | 1,369 | 1,432 | 1,498 | 1,569 | 1,645 | 1,726 |
| 47 | 1,010 | 1,049 | 1,091 | 1,135 | 1,182 | 1,232 | 1,285 | 1,341 | 1,401 | 1,465 | 1,533 | 1,606 | 1,683 | 1,766 |
| 48 | 1,033 | 1,073 | 1,116 | 1,161 | 1,209 | 1,260 | 1,314 | 1,372 | 1,434 | 1,499 | 1,569 | 1,643 | 1,722 | 1,807 |
| 49 | 1,056 | 1,098 | 1,141 | 1,187 | 1,237 | 1,289 | 1,344 | 1,403 | 1,466 | 1,533 | 1,604 | 1,680 | 1,761 | 1,847 |
| 50 | | 1,122 | 1,167 | 1,214 | 1,264 | 1,317 | 1,374 | 1,434 | 1,498 | 1,567 | 1,640 | 1,717 | 1,800 | 1,888 |
| 51 | | | 1,192 | 1,240 | 1,292 | 1,346 | 1,404 | 1,465 | 1,531 | 1,601 | 1,675 | 1,755 | 1,839 | 1,929 |
| 52 | | | | 1,267 | 1,319 | 1,375 | 1,434 | 1,497 | 1,564 | 1,635 | 1,711 | 1,792 | 1,878 | 1,970 |
| 53 | | | | | 1,347 | 1,404 | 1,464 | 1,528 | 1,596 | 1,669 | 1,747 | 1,829 | 1,918 | 2,012 |
| 54 | | | | | | 1,433 | 1,494 | 1,560 | 1,629 | 1,704 | 1,783 | 1,867 | 1,957 | 2,053 |
| 55 | | | | | | | 1,524 | 1,591 | 1,662 | 1,738 | 1,819 | 1,905 | 1,997 | 2,094 |

Elaboração: SPREV/SRGPS.

Tabela 3.4: Fator Previdenciário 2019 (Tabela mortalidade ambos os sexos 2017 - IBGE)
Fonte:

Uma outra fórmula também utilizada pelos advogados para o cálculo do salário de benefício da aposentadoria é:

$$Sb = M.f$$

Onde: $Sb$ o salário de benefício, $M$ a média dos 80% maiores salários de contribuição do segurado, corrigidos monetariamente e $f$ o fator previdenciário.

Mesmo que a regra aqui discutida deixe de ser utilizada na nova proposta da Previdência, novas regras com base em cálculos virão.

É importante o professor enfatizar para os alunos que a área jurídica está relacionada à matemática, uma vez que muitos alunos, devido à dificuldade com os cálculos, pensam em seguir essa profissão como forma de se distanciar da Matemática.

## 3.4 Medicina

Uma outra área que também usa a Matemática é a Medicina. Por exemplo, o médico utiliza a regra de três para prescrever a dose de um determinado medicamento de acordo com a massa (kg) do paciente. Nesta área, a Matemática também está presente em cálculos e estatísticas relacionados a epidemias ou até mesmo na base dos processos da elaboração dos exames da Medicina como as tomografias computadorizadas e as ressonâncias magnéticas, cuja análise das imagens só é possível através da Matemática.

Um estudante de Medicina da Universidade Federal da Bahia (UFBA), Alan de Pinho de 20 anos que cursa atualmente o 5º semestre do curso relata que:

> Não existe ciência sem as ferramentas básicas, e uma delas é a Matemática, muito presente na área das ciências biológicas, em especial a médica. Ela está na tomada de decisões, seja de diagnóstico, rastreio ou prescrição, quando levamos em conta a prevalência de cada patologia, de cura com cada medicamento, dados como idade, sexo, região, entre outros. Além disso, temos matérias que abordam estatística, ferramenta crucial para construção e validação de conhecimento. Existem ainda outros temas aplicados diretamente à Medicina, como eletrofisiologia. O conhecimento prévio da Matemática facilita a compreensão e análise desses dados (IMPA, 2019).

Muitos estudos matemáticos proporcionaram a descoberta de cura para doenças. De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015) a Matemática está presente no tratamento de tumores cerebrais de forma a melhorar a vida de pacientes com o mínimo de seções possíveis no menor tempo e também com custos reduzidos. Nesse sentido, os autores destacam que foi apresentado a matemáticos um dispositivo cirúrgico chamado bisturi gama, usado nesses tratamentos, para que construíssem um algoritmo que pudesse melhorar o desempenho desse dispositivo:

> O "bisturi gama"é um dispositivo cirúrgico usado para tratar tumores cerebrais. A máquina focaliza 201 feixes de raios gama (gerados por fontes radioativas de cobalto 60 distribuídas uniformemente ao longo da superfície interna de uma esfera) numa região esférica pequena. A região de interseção fica sujeita a uma forte dose de radiação. Os feixes são focalizados com a ajuda de um capacete, e podem produzir regiões focais de vários tamanhos (raios de 2mm, 4mm, 7mm ou 9mm). ... O problema apresentado aos matemáticos foi construir um algoritmo que criasse planos de tratamentos ótimos, permitindo irradiar o tumor em tempo mínimo. Isto diminui o custo da operação e ao mesmo tempo melhora a qualidade do tratamento para o paciente, já que seções mais longas de radioterapia podem ser muito desconfortáveis. O problema é bem simples para tumores pequenos, que podem muitas vezes ser tratados com uma única dose. No entanto, fica bem complexo para tumores grandes, com formatos irregulares. Um bom algoritmo deve ser capaz de limitar o tratamento em 15 doses individuais. Também, deve ser o mais robusto possível, o que quer dizer fornecer planos de tratamento aceitáveis (para não dizer ótimos) para praticamente todos os possíveis formatos e tamanhos de tumores (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 128).

Em um estudo realizado para encontrar uma solução ótima, Rousseau e Saint-Aubin (2015) relacionam este problema com o de empacotar esferas preenchendo ao máximo uma determinada região no espaço de forma que a proporção de volume não coberto seja menor que um limiar de tolerância. Nesse contexto, os autores afirmam:

> ... a primeira tarefa é escolher sabiamente os centros das esferas. Com efeito, devemos escolher esferas que sejam conformes ao máximo com a superfície da região. Por definição, estas são as esferas que têm maior ponto de contato com a fronteira da região. Os centros das esferas serão tomados ao longo do "esqueleto"da região (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 129).

Em regiões bi e tridimensionais, segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015, p.129) "o esqueleto é um conceito matemático usado da análise de formas e reconhecimento automático de formas" e além disso dão a definição de esqueleto, entretanto, considerando a sua complexidade para o entendimento por alunos do Ensino Médio devido ao aprofundamento matemático, utilizar-se-á aqui somente a definição intuitiva proposta pelos autores:

> Suponha que uma região seja formada por material uniformemente combustível (por exemplo, grama) e que incendiássemos a superfície externa toda de uma vez. Enquanto o fogo queima para dentro numa taxa constante, em algum momento chegaremos ao ponto de não sobrar material combustível. O esqueleto da forma é o conjunto de pontos em que o fogo se apaga (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 129).

De acordo com a definição intuitiva apresentada, a figura a seguir mostra o esqueleto de uma região:

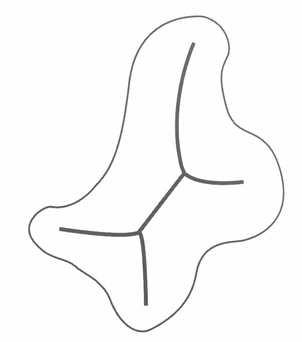


Figura 3.6: Esqueleto de uma região
Fonte: Rousseau e Saint-Aubin (2015).

O esqueleto da região será o foco desse tratamento para uma solução ótima. Iniciam-se pelo ponto extremo do esqueleto (Figura 3.7 (a) e (b)) e a partir daí formando novos esqueletos para novas doses até que toda a região seja irradiada (Figura 3.7 (c)) conforme a figura seguinte:

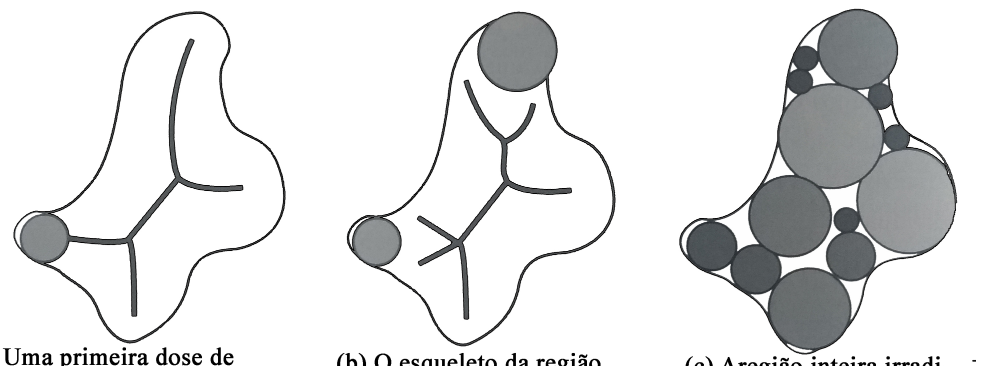



Figura 3.7: Estágios distintos na irradiação da região da Figura 3.6
Fonte: Rousseau e Saint-Aubin (2015).

Rousseau e Saint-Aubin (2015, p. 142) apresentam uma visão geral do algoritmo para um plano de dosagem ótimo em cirurgia de raios gama e também um algoritmo numérico para encontrar o esqueleto. Contudo, como a proposta aqui é motivar os alunos mostrando um pouco da aplicação da matemática em diversas profissões, não aprofundar-se-á sobre os esqueletos e a radiocirurgia com raios gamas, mas ressalta-se que trabalha com subconjuntos da região como se observa na Figura 3.7, além de utilizarem também a trigonometria, funções, geometria plana, geometria espacial e matrizes.

Portanto, o professor poderá enriquecer as aulas com um pouco destes conhecimentos, já que ao estudar conjuntos e trigonometria por exemplo, inicialmente os alunos acham um conteúdo sem sentido e sem aplicação prática. Mostrar a ação concreta da Matemática e sua aplicação em assuntos, como o citado acima, torna evidente a sua importância e contribuição para outras áreas.

## 3.5 Atividades Tecnológicas

É importante o professor questionar se existe algum argumento matemático no processo de busca que o Google utiliza quando alguma pesquisa é realizada. Uma proposta é instigar os alunos a pensarem sobre os mecanismos que são utilizados pelo Google para responder às dúvidas dos usuários, fornecer-lhes as mais diversas informações.

Segundo Rousseau e Saint-Aubin (2015), ao realizar-se uma busca no Google, o primeiro resultado apresentado tem alta chance de responder à pergunta do usuário, enquanto os outros, à medida que descemos na lista de resultados tendem a vaguear sobre o assunto. Nesse sentido, ao analisar a busca de um livro no Google, esses autores destacam que:

> Por exemplo, todos os livros de uma biblioteca contêm um título, um ou mais autores, uma editora etc. A uniformidade de dados a serem organizados, então faz o banco de dados mais facilmente categorizado e mais facilmente buscado. A qualidade da informação é também muito alta. Por exemplo, livros são normalmente adicionados ao catálogo das bibliotecas por profissionais, e a taxa de erro é assim muito baixa. Se um erro ocorre, a simplicidade da base de dados torna fácil a correção de erros. A uniformidade da necessidade dos usuários é uma vantagem destes sistemas. ... Também, tais bancos de dados evoluem lentamente. Numa biblioteca, bem poucos livros deixam a coleção num ano, ... A taxa de crescimento é, portanto, relativamente lenta, e tais bancos de dados são facilmente mantidos por humanos (ROUSSEAU; SAINT-AUBIN, 2015, p. 292).

Ao ser submetida uma pesquisa, o Google responde rapidamente e com uma imensa diversidade de sites posicionando primeiramente as melhores opções. A figura a seguir mostra um exemplo dessa busca. Observa-se que, logo antes do primeiro resultado, há a informação de que, para uma pesquisa sobre o livro História da Matemática de Carl B. Boyer, foram listados aproximadamente 21.700 resultados[5] em menos de 1 (um) segundo.

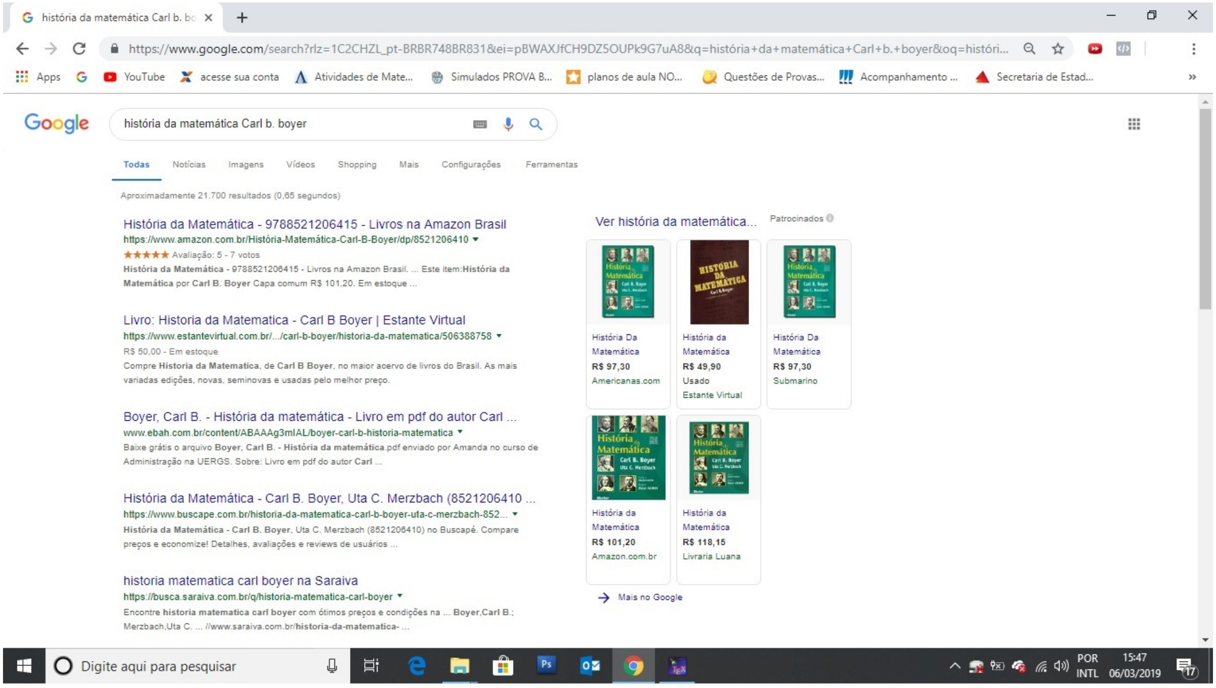



Figura 3.8: Busca no Google com as palavras-chave: História da Matemática Carl B. Boyer

Fonte: O Autor.

Por trás desse processo de busca respondida pelo Google, há muitos conceitos matemáticos que são abordados, como: matrizes, sistemas lineares, probabilidades, além de outros conceitos e propriedades mais complexas que são abordados no Ensino Superior, como: conjuntos, conhecidos como espaços vetoriais e funções com propriedades específicas também conhecidas como transformações lineares.

Para efetuar uma busca, o Google utiliza um algoritmo chamado PageRank para classificar o que será visto primeiro ao pesquisar certos assuntos. Um fato curioso a destacar é que, como muitas empresas conhecem um pouco do funcionamento desse algoritmo, fazem uso dele de forma inteligente para aparecerem primeiro na lista em pesquisas do seu ramo. Segundo a agência de marketing digital Conversion (2015), o PageRank é:

[5] <https://www.google.com> acesso: 06/03/2019. Repetindo a pesquisa em datas diferentes, há grandes chances do resultado também ser diferente, já que a internet está em constante mudança e expansão.

> Nome dado ao algoritmo do Google que classifica todos os sites, a relação entre eles através de links e, de uma maneira geral, a relevância de uma página em relação a toda a web. O PageRank funciona basicamente calculando a relação através de links de uma página com outra e é a principal maneira do algoritmo do Google de avaliar matematicamente a relevância de uma página.

Um vídeo superinteressante a ser transmitido aos alunos é "Isto é Matemática T01E02 - Como é que o Google googla"[6]. Segundo a descrição do vídeo, ele foi promovido pela Sociedade Portuguesa de Matemática, com produção e realização da SIGMA 3 e com apresentação de Rogério Martins, Matemático e Professor Universitário. Este vídeo tem uma linguagem simples e de fácil compreensão e mostra de forma criativa o funcionamento do Google supondo uma rede simples com apenas 4 páginas e usando a Matemática. Assim fica claro para os alunos que o Google "googla" através da Matemática.

A Revista do Professor de Matemática (RPM - 80) [7] traz uma proposta de trabalho para ser usada no Ensino Médio, operando com a Matemática presente no Google a partir da resolução de sistemas lineares homogêneos.

De acordo com Rousseau e Saint-Aubin (2015) quatro jovens estudantes da Universidade de Standford, L. Page, S. Brin, R Motwani e T. Winograd propuseram o algoritmo de PangeRank e posteriormente o patentearam, mas dois deles, Sergey Brin e Larry Page, foram além e fundaram o Google em 1998 quando ainda estavam com vinte e poucos anos. E, segundo o Newswires (2018), o Google tem um valor de mercado de, aproximadamente, 763 bilhões de dólares.

Essas considerações são uma excelente motivação para os alunos saberem que, utilizar a Matemática de forma inteligente, pode proporcionar uma rendosa vida profissional e o professor deve aproveitar essa oportunidade para estimular e despertar o interesse pela Matemática.

## 3.6 Atividades Comerciais e Empresariais

As atividades comerciais são de fundamental importância para o crescimento das empresas. Não há empresa que resista sem lucro. Mas como gerar lucro? Entender bem sobre Matemática Financeira é essencial para a realização de boas atividades comerciais que gerarão lucro. Segundo Wikiversidade (2018):

[6] Vídeo: Isto é Matemática T01E02 - Como é que o Google googla: <https://www.youtube.com/watch?v=DZ0hq2sQg28>

[7] A Matemática Escondida no Google: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/80/10.html>

> A Matemática Financeira é uma área da matemática que aplica seus conceitos no estudo da variação do dinheiro ao longo do tempo. A origem da Matemática Financeira está intimamente ligada a dos regimes econômicos, o surgimento do crédito e do sistema financeiro.
>
> Todo o desenvolvimento da Matemática Financeira está ligado a utilidade do dinheiro, que gera dinheiro, ao contrário de sua simples propriedade, que por si só não apresenta rendimento.
>
> No cotidiano mesmo que indiretamente sempre nos deparamos com esse ramo matemático. Um exemplo, clássico são nossas contas bancárias onde os juros da poupança ou de nossa conta corrente são calculados através de fórmulas específicas.

Talvez um aluno pense em abrir o seu próprio negócio e pode-se mostrar como a Matemática é importante nesse processo: antes, com um bom planejamento financeiro que permitirá analisar investimentos e retornos a curto, médio e longo prazos e, também durante as atividades comerciais da empresa.

A Matemática Financeira permite ao gestor tomar decisões assertivas, por isso deve-se apresentar aos alunos: juros, empréstimos, taxas, capital, amortização, entre outros conteúdos como uma forma interessante e bem inteligente para se ter sucesso empresarial e nas atividades comerciais. Sabe-se que o setor financeiro não é o único que determinará o sucesso de uma empresa, entretanto, é necessário deixar claro para os alunos que é um dos pilares mais importantes.

Uma empresa para ter sucesso em marketing, fazer novos investimentos, capacitar sua mão de obra, lançar novos produtos ou qualquer outra atividade precisa de uma boa administração financeira que assegure que o capital investido em cada setor tenha o menor custo e gere o retorno financeiro esperado.

Para um administrador é imprescindível calcular bem o preço de venda dos produtos/serviços e, para isso, é necessário verificar todos os custos fixos, variáveis e percentual de lucro a ser alcançado, analisar o ponto de equilíbrio da empresa, entre outros, e tudo isso tendo a Matemática como maior aliada.

Para os alunos que não têm interesse em abrir o seu próprio negócio é interessante mostrar que ter conhecimentos sobre atividades financeiras e comerciais é importante, pois todos nós, em algum momento, podemos fazer aplicações financeiras ou empréstimos. Atividades comerciais serão realizadas em nossas vidas seja como empresa ou como cidadãos. Segundo Nascimento (2011)

> Alerta-se que a maioria das pessoas físicas e jurídicas realiza negócios financeiros, tais como empréstimos, aplicações, descontos etc., confiantes na plena honestidade dos agentes de créditos, portanto, elas não confirmam se os cálculos estão corretos por julgar que são complexos ou trabalhosos. Também realizam aplicações financeiras sem uma visão mais ampla do momento em que será alcançado o montante de capital almejado (NASCIMENTO, 2011, p.1).

Os juros compostos, mais usados pelo mercado financeiro, são uma aplicação de função exponencial e progressão geométrica e é imprescindível fazer essas relações com cada conteúdo estudado na sala de aula.

Para relacionar os juros compostos com progressão geométrica começa-se denotando o Capital inicial por $C$, o montante após a conclusão do primeiro, segundo, ... n períodos por $M_1, M_2$, ...$M_n$ respectivamente e a taxa de juros por $i$. A tabela a seguir, presente em Dante (2016a), mostra essa relação:

| | Início | Juros | Montante no fim do período |
|---|---|---|---|
| 1º período | $C$ | $iC$ | $M_1 = C + iC = C(1+i)$ |
| 2º período | $M_1$ | $iM_1$ | $M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i) = C(1+i)^2$ |
| 3º período | $M_2$ | $iM_2$ | $M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i) = C(1+i)^3$ |
| ... | | | |

Tabela 3.5: Relacionando os Juros Compostos com Progressão Geométrica
Fonte: (DANTE, 2016a)

O professor deve destacar que os montantes em cada período formam uma progressão geométrica $(C, M_1, M_2...)$ de razão $1+i$. E no fim de $t$ períodos o montante será de:

$$M = C(1+i)^t$$

Já foi visto que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo exponencial é definida por $f(x) = b.a^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo $a$ e $b$ constantes, com $a > 0$, $a \neq 1$.

Um exemplo de função do tipo exponencial pode ser obtida a partir da fórmula para o cálculo de juros: sendo $f(x)$ o montante $M$, a constante $b$ o capital inicial $C$, a constante $a$ a taxa $i$ acrescida de 1 unidade $(1+i)$ e a variável $x$ o tempo $t$. Aqui é importante lembrar que o valor do montante após cada período é o valor da função exponencial considerando a variável $x$ sendo os números inteiros positivos.

No Apêndice 6 há um exemplo de juros compostos adaptado de Dante (2016a) e que mostra o crescimento exponencial.

Um exemplo dado por Morgado e Carvalho (2015) e que merece ser destacado é que as pessoas que não têm uma formação matemática, têm tendência a achar que juros de 10% ao mês, no regime de juros compostos, dão em dois meses juros de 20%. É importante o professor instigar os alunos a pensarem o porquê de esse exemplo conter um erro e como a Matemática é útil para não se fazer um cálculo errado em um empréstimo nessas condições. Mostrar e ajudá-los a compreender que, na verdade, os juros são de 21% e o que esse erro pode gerar prejuízo para um empréstimo a longo prazo é o que os motivará ao interesse e busca constante desse conhecimento.

Portanto, o professor relacionando os conteúdos com as áreas profissionais poderá, além de motivar o aluno para o estudo da Matemática, também contribuir para a escolha profissional do aluno, já que poderá, através de aulas como essas, fazer com que o aluno consiga perceber conteúdos com os quais ele mais se identifica e em quais profissões poderá se realizar.

# Considerações Finais

Durante o desenvolvimento deste trabalho, muitas ideias surgiram na prática em sala de aula e tentou-se aplicar alguns fatos e argumentos aqui relatados para verificar a reação dos alunos. Incrível como, em certos momentos, diante de uma sala apática e desmotivada, uma conversa sobre outras disciplinas e profissões onde a Matemática se encaixava, fez muitos alunos levantarem a cabeça, se interessarem pelo que estava sendo falado e participarem da discussão, sempre produtiva.

Muitas vezes, os próprios professores adotam a postura de pensar que este modo de se trabalhar a Matemática é uma perda de tempo, pois devido ao extenso conteúdo curricular a ser trabalhado, não se pode procrastinar tratando de outros assuntos que não sejam os cálculos puros e precisos. Porém, não há como trocar conhecimentos com um indivíduo que não tem interesse e nem motivos claros para querer aprender. Por isso, é fundamental primeiro despertar esse desejo, expor onde e como serão aplicados esses conhecimentos na vida das pessoas.

Este trabalho, bem como o PROFMAT, contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento profissional, pois a partir de todo o estudo realizado durante esses anos pude parar e refletir sobre minha própria prática docente, fato que possibilitou perceber que a motivação é uma tarefa que, os professores, não podem mais adiar.

Assim sendo, o professor, para realizar um bom trabalho de motivação para o estudo da Matemática necessitará adequar os seus argumentos à realidade de cada turma onde leciona, pois os desejos e anseios dos alunos mudam de acordo com a situação em que vivem, a faixa etária, dentre tantas outras especificidades que os professores atentos terão sensibilidade para perceber e poder, de fato, contribuir para o desenvolvimento pessoal e profissional dos alunos.

Reitero sobre a proposta de trabalho para ser aplicada no primeiro dia de aula, citada na Introdução deste trabalho e que está disponível no Apêndice 7.

Assim, espera-se que esse trabalho contribua para o processo ensino-aprendizagem e possa ser aplicado por outros professores contribuindo na reflexão de suas práticas pedagógicas.

# Referências Bibliográficas


ABRANTES, W. G. B. Matemática, cartografia e navegação: Uma história que deu certo. *Revista do Professor de Matemática*, n. 96, p. 56, 2018.

BRANCO, E. S.; MENTA, E. *A matemática da cartografia*. 2010. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=26647>. Acesso em: 10 abr. 2019.

BRASIL, M. da E. *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio. Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Governo Federal, 2000.

BRASIL, M. da E. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Governo Federal, 2006.

BRASIL, M. da E. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: Governo Federal, 2017.

CONVERSION. *PageRank Google*. 2015. Disponível em: <https://www.conversion.com.br/otimizacao-de-sites-seo/pagerank/>. Acesso em: 06 mar. 2019.

COUTINHO, S. C. *Criptografia*. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2008.

DALVI, F.; DALVI, L. *Cálculos Previdenciários*. 1ª. ed. Campo Grande: Editora Contemplar, 2012.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 3ª. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. v. 3.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. 3ª. ed. São Paulo: Editora Ática, 2016. v. 2.

DAVIS, M. L.; MASTEN, S. J. *Princípios de Engenharia Ambiental*. 3st. ed. Santana: AMGH Editora Ltda, 2016.

DEFESANET. *Cripto - UFRGS Adquire Máquina Enigma*. 2013. Disponível em: <http://www.defesanet.com.br/cyberwar/noticia/9251/CRIPTO---UFRGS-Adquire-Maquina-ENIGMA-/>. Acesso em: 05 jan. 2019.

ENCYCLOPEDIA BRITANNICA. *Bombe - Code-breaking Machine*. 2019. Disponível em: <https://www.britannica.com/topic/Bombe>. Acesso em: 05 jan. 2019.

FELLOWS, P. J. *Tecnologia do processamento de alimentos*. 4st. ed. Porto Alegre: Artmed Editora Ltda, 2019.

GARCIA, M. *Biologia e Matemática, aplicadas e combinadas*. 2012. Disponível em: <http://cienciahoje.org.br/biologia-e-matematica-aplicadas-e-combinadas/>. Acesso em: 01 fev. 2019.

GLOBO EDUCAÇÃO. *ENEM 2013: QUESTÃO 174*. 2019. Disponível em: <http://educacao.globo.com/provas/enem-2013/questoes/174.html>. Acesso em: 10 abr. 2019.

GOVERNO DO BRASIL. *Fator Previdenciário acabará e sistema de pontos será regra de acesso*. 2019. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/novaprevidencia/noticias/fator-previdenciario-acabara-e-sistema-de-pontos-sera-regra-de-acesso>. Acesso em: 19 mai. 2019.

HISTÓRIA UNIVERSAL. *Segunda Guerra Mundial*. 2018. Disponível em: <http://607historiauniversal.blogspot.com/>. Acesso em: 05 jan. 2019.

HUETE, J. C. S.; BRAVO, J. A. F. *O Ensino da Matemática: Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IMPA. *A Matemática por trás do Nobel de Química de 2017*. 2017. Disponível em: <https://impa.br/noticias/a-matematica-por-tras-do-nobel-de-quimica-de-2017/>. Acesso em: 18 set. 2019.

IMPA. *Na Medicina, Alan de Pinho encontrou a Matemática*. 2019. Disponível em: <https://impa.br/page-noticias/na-medicina-alan-de-pinho-encontrou-a-matematica/>. Acesso em: 13 mar. 2019.

IMPA E SBM. *Biênio da Matemática Brasil*. 2017. Disponível em: <https://www.bieniodamatematica.org.br/>. Acesso em: 1 out. 2018.

IVEPESP. *Matemática, Biologia e Astronomia*. 2018. Disponível em: <http://www.ivepesp.org.br/matematicabiologia-e-astronomia/>. Acesso em: 15 fev. 2019.

LISBOA, J. C. F. et al. *Química: Ser protagonista*. 3ª. ed. São Paulo: Editora SM, 2016. v. 1.

MALAGUTTI, P. L. *Atividades de Contagem a partir da Criptografia*. 1st. ed. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2014.

MENDONÇA, V. L. *Biologia*. 3st. ed. São Paulo: AJS, 2016. v. 1.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

NASCIMENTO, M. A. *Introdução à financeira*. 1ª. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2011.

NETTO, J. M. de A. et al. *Manual de Hidráulica*. 8ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2003.

NEWSWIRES, D. J. *Amazon ultrapassa Google em valor de mercado e é a segunda maior empresa dos EUA*. 2018. Disponível em: <https://economia.estadao.com.br/noticias/mercados,amazon-ultrapassa-google-em-valor-de-mercado-e-e-a-segunda-maior-empresa-dos-eua,70002234910>. Acesso em: 15 mar. 2019.

PEREIRA, C. A. L. Educação física e matemática: Uma proposta de interdisciplinaridade. *Revista de Educação do IDEAU*, v. 7, n. 15, 2012.

PEREIRA, D. *A importância da Matemática para a Biologia*. 2014. Disponível em: <https://www.prof-edigleyalexandre.com/2014/09/a-importancia-da-matematica-para-a-biologia.html>. Acesso em: 01 fev. 2019.

PINHEIRO, P. *Calcule o seu peso ideal e IMC*. 2019. Disponível em: <https://www.mdsaude.com/obesidade/calcule-o-seu-peso-ideal-e-imc/>. Acesso em: 22 set. 2019.

PROENEM. *Projeções Cartográficas*. 2019. Disponível em: <https://www.proenem.com.br/enem/geografia/cartografia-escala-e-projecoes/>. Acesso em: 12 out. 2019.

REVISTA GALILEU. *Origem da computação, Máquina de Turing é construída em madeira*. 2018. Disponível em: <https://revistagalileu.globo.com/Tecnologia/noticia/2018/03/origem-da-computacao-maquina-de-turing-e-construida-em-madeira.html>. Acesso em: 18 set. 2019.

RIBEIRO, A. C.; GUIMARãES, P. T. G.; V., V. H. A. *Recomendações para o uso de corretivos e fertilizantes em Minas Gerais - 5ª Aproximação*. Viçosa: UFV, 1999.

ROUSSEAU, C.; SAINT-AUBIN, Y. *Matemática e Atualidade*. 1st. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. v. 1.

SALDAÑA, P. *Alunos não chegam ao fim de prova em avaliação mundial*. 2018. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/educacao/2018/07/alunos-brasileiros-nao-chegam-ao-fim-de-prova-em-avaliacao-mundial.shtml>. Acesso em: 04 jan. 2019.

SANTIAGO, E. *Enigma*. 2019. Disponível em: <https://www.infoescola.com/segunda-guerra/enigma/)>. Acesso em: 18 set. 2019.

SBM. *Bienal da Matemática, Rio de Janeiro 2017*. 2017. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/bienal-2017/>. Acesso em: 1 out. 2018.

SBM. *Conceitos Básicos em Geometria Espacial: Lugares geométricos - Esfera*. 2019. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/23/2016/08/Conceitos_Basicos_em_Geometria_Espacial_Lugares_geometricos.mp4>. Acesso em: 23 set. 2019.

SILVA, L. P. M. *O que é geometria?* 2019. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-geometria.htm>. Acesso em: 19 set. 2019.

SILVA, M. N. P. da. *Probabilidade e Genética*. 2019. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/probabilidade-genetica.htm>. Acesso em: 28 jan. 2019.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. *Bacharelado em Matemática Aplicada: Ênfase Biologia Matemática*. 2013. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/matematica_aplicada/pagina_aplicada/biologicas.html>. Acesso em: 15 fev. 2019.

VERGARA, C. *Pato Donald e o Bilhar*. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=AYm84JLSNWY>. Acesso em: 28 mar. 2019.

WIKIVERSIDADE. *Introdução à Matemática Financeira: Conceitos Básicos*. 2018. Disponível em: <https://pt.wikiversity.org/wiki/Introdu\%C3\%A7\%C3\%A3o_\%C3\%A0_Matem\%C3\%A1tica_Financeira/Conceitos_B\%C3\%A1sicos>. Acesso em: 14 mar. 2019.

YOKOYAMA, L. A. *Matemática na Agricultura - Formatos dos Silos*. 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?time_continue=38&v=4VJ6GHtN3TY>. Acesso em: 05 jul. 2019.

ZANIN, T. *Calcule seu IMC e saiba se está no peso ideal*. 2019. Disponível em: <https://www.tuasaude.com/imc/>. Acesso em: 21 fev. 2019.

# Apêndice 1 - Atividade de Criptografia

Atividade proposta para que os alunos codifiquem e decodifiquem palavras ou mensagens usando um método apresentado por Malagutti (2014).

**Atividade: Decifre a mensagem**

O professor deverá colocar os alunos em duplas. Inicialmente um dos alunos da dupla deverá escrever uma mensagem utilizando o sistema criptográfico, apresentado a seguir, para codificar sua mensagem e passar para o colega que deverá decodificá-la.

A mensagem deverá ser codificada usando a tabela abaixo e as orientações a seguir:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A = 0 | B = 1 | C = 2 | D = 3 | E = 4 | F = 5 | G = 6 | H = 7 |
| I = 8 | J = 9 | K = 10 | L = 11 | M = 12 | N = 13 | O = 14 | P = 15 |
| Q = 16 | R = 17 | S = 18 | T = 19 | U = 20 | V = 21 | X = 22 | W = 23 |
| Y = 24 | Z = 25 | | | | | | |

Tabela 3.6: Tabela para criptografar mensagens segundo uma ordem

A letra codificada é obtida da letra original, somando-se 3 ao número correspondente. Caso o resultado ultrapasse 25, a letra codificada estará associada ao resto da divisão por 26 do número associado à letra original somado com 3. Por exemplo, a letra Y corresponde originalmente ao número 24, somando-se 3, obtém-se 24+3=27 e, dividindo 27 por 26, obtém-se resto 1 que corresponde à letra B. Assim Y deve ser codificado por B.

**Exemplo:**

Usando a tabela e senha descritas acima, codifique e decodifique a palavra **MATEMÁTICA**.

Para codificar faz-se o processo inverso do que foi descrito acima, ou seja, escolhe-se as letras e subtrai-se 3. E no caso, de uma letra que subtraindo 3 dá um número menor que zero, a letra a ser codificada será obtida pela subtração por 26, por exemplo a letra B= 1 e $1 - 3 = -2$, assim $26 - 2 = 24$ que corresponde a letra Y.

**Codificando:**

M $= 12$ e $12 - 3 = 9 =$ **J**

A $= 0$, como $0 - 3 = -3$ e $26 - 3 = 23 =$ **X**

T $= 19$ e $19 - 3 = 16 =$ **Q**

E $= 4$ e $4 - 3 = 1 =$ **B**

M $= 12$ e $12 - 3 = 9 =$ **J**

A $= 0$, como $0 - 3 = -3$ e $26 - 3 = 23 =$ **X**

T $= 19$ e $19 - 3 = 16 =$ **Q**

I $= 8$ e $8 - 3 = 5 =$ **F**

C $= 2$, como $2 - 3 = -1$ e $26 - 1 = 25 =$ **Z**

A $= 0$, como $0 - 3 = -3$ e $26 - 3 = 23 =$ **X**

Tem-se, portanto, que a palavra ficará codificada como:

**JXQBJXQFZX**

**Decodificando:**

J $= 9$ e $9 + 3 = 12 =$ **M**

X $= 23$, como $23 + 3 = 26$ e 26 dividido por 26 deixa resto $0 =$ **A**

Q $= 16$ e $16 + 3 = 19 =$ **T**

B $= 1$ e $1 + 3 = 4 =$ **E**

J $= 9$ e $9 + 3 = 12 =$ **M**

X $= 23$, como $23 + 3 = 26$ e 26 dividido por 26 deixa resto $0 =$ **A**

Q $= 16$ e $16 + 3 = 19 =$ **T**

F $= 5$ e $5 + 3 = 8 =$ **I**

Z $= 25$, como $25 + 3 = 28$ e 28 dividido por 26 deixa resto $2 =$ **C**

X $= 23$, como $23 + 3 = 26$ e 26 dividido por 26 deixa resto $0 =$ **A**

Portanto, a palavra secreta é **MATEMÁTICA**.

# Apêndice 2 - A Matemática interligada à Biologia

### Aplicação do Logaritmo para resolução de problemas

Problema presente em Davis e Masten (2016, p.205):

Se a densidade inicial de uma comunidade bacteriana ao final da fase de crescimento acelerado é de $10^4$ células por litro, qual é o número de bactérias ao final de 25 gerações?

**Resolução:**

Como a densidade inicial $P_0$ é $10^4$ organismos e são 25 gerações, $n = 25$. A população $P = P_0.2^n$ será $P = 10^4.2^{25}$, que é aproximadamente $3,4.10^{11}$

### Problema de genética utilizando o binômio de Newton e probabilidade

Problema presente em Silva (2019b):

**Problema 1**:

Um casal deseja ter dois filhos e quer saber a probabilidade de serem:

a) dois meninos

b) duas meninas

c) um menino e uma menina

**Problema 2**:

E no caso de o casal desejar três filhos?

**Resolução:**

Inicialmente é importante ressaltar que o sexo do segundo filho independe do sexo do primeiro, então as chances de ser menino ou menina é a mesma, ou seja, 50% ou $\frac{1}{2}$. Utilizando as notações de $x$ para a probabilidade de ser menina e $y$ para a probabilidade de ser menino e usando o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + y)^2$$

que fornece todas as possibilidades de sexo dos filhos do casal. Tem-se:

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Onde os coeficientes do desenvolvimento acima se dão através das combinações $C_{2,0}$, $C_{2,1}$ e $C_{2,2}$ respectivamente.

Portanto, a probabilidade de ser ter dois meninos é $y^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ou 25%

Já a probabiliade de ter duas meninas é $x^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ou 25%

E por último a probabilidade de ser um menino e uma menina é $2xy = 2.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ou 50%

Já no caso de o casal desejar três filhos, as possibilidades são: três meninos, três meninas, um menino e duas meninas e dois meninos e uma menina.

Usando a notação de $x$ e $y$ já mencionada anteriormente e, como no caso anterior, o sexo de qualquer um dos filhos independe do sexo dos filhos anteriores. Assim, pelo binômio de Newton, temos:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Sendo que os coeficientes do desenvolvimento acima se dão através das combinações $C_{3,0}, C_{3,1}, C_{3,2}$ e $C_{3,3}$ respectivamente.

Tem-se que a probabilidade de três meninos é $y^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, ou seja, $12,5\%$

Para três meninas é $x^3 = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$, ou seja, $12,5\%$

Um menino e duas meninas é $3x^2y = 3.(\frac{1}{2})^2.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$, ou seja, $37,5\%$

E, por fim, a probabilidade de ter dois meninos e uma menina é $3xy^2 = 3.\frac{1}{2}.(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$, ou seja, $37,5\%$

A seguir é apresentado um exemplo usando a análise combinatória e probabilidade segundo Dante (2016b, p. 245):

Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 homens, já que a primeira criança que nasceu é homem?

**Resolução:**

O nascimento de filhos é considerado um evento equiprovável, ou seja, “nascer homem”e ”nascer mulher”têm a mesma probabilidade de ocorrer.

Denotando as possibilidades de ser mulher por M, homem por H e o conjunto de todas as possibilidades por Ω temos:

$\Omega = \{HHH, HHM, HMM, MMM, MMH, MHH, HMH, MHM\}$

Tem-se que o número de elementos de Ω, $n(\Omega)$, é 8

Chamando de evento A a possibilidade de a família ter 3 homens, tem-se que:

$$\text{A} = \{HHH\}$$

Já considerando o evento B, a primeira criança é homem, tem-se que:

$$\text{B} = \{HHH, HHM, HMH, HMM\}$$

Nessas condições: $A \cap B = \{HHH\}$. Deste modo, a probabilidade de esse evento ocorrer é $p\,(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Já a probabilidade de o evento B ocorrer é $p\,(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. E por último, a probabilidade de que a família tenha 3 homens, sabendo que a primeira criança que nasceu é homem é $p\,(A/B) = \dfrac{p\,(A \cap B)}{p\,(B)} = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$

Uma outra forma de se concluir essa última afirmação é a seguinte:

Se a primeira criança já é um homem, então o espaço amostral para os próximos 2 filhos é $\{HH, HM, MH, MM\}$.

Nesse espaço amostral, o evento desejado é $\{HH\}$.

Assim, a probabilidade de nascerem 3 filhos homens, sabendo que o primeiro que nasceu é homem, é de $p\,(A/B) = \frac{1}{4}$

# Apêndice 3 - Resolvendo atividades de Química utilizando a Matemática

**Problema 1**: Encontrando os coeficientes estequiométricos para o balanceamento da equação química.

$$N_2 + H_2 \to NH_3$$

Dessa forma pretende-se encontrar os coeficientes $x$, $y$ e $z$ que determinam o equilíbrio da equação mantendo a mesma quantidade de cada elemento químico.

$$xN_2 + yH_2 \to zNH_3$$

Assim, para que se mantenha a mesma quantidade de átomos de Nitrogênio deve-se ter a equação $2x = z$ e para se obter a mesma quantidade de átomos de Hidrogênio deve-se ter a equação $2y = 3z$. Para isso, é necessário resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema de equações é a solução do balanceamento da equação química. Da primeira equação, tem-se que $z = 2x$ e substituindo o valor de $z$ na segunda equação, obtém-se $y = 3x$. Portanto, o sistema tem infinitas soluções inteiras positivas. Ou seja, para cada número inteiro positivo $x$, o terno $S = (x, 3x, 2x)$ é uma solução do sistema. Quando $x = 1$, tem-se $y = 3$ e $z = 2$ que são os menores valores de $x$, $y$ e $z$ inteiros positivos obtendo a equação química balanceada:

$$N_2 + 3H_2 \to 2NH_3$$

**Problema 2**:

Qual o pH de uma solução em que a concentração de íons $H^+$ é igual a $2.10^{-4}$ mol/litro? (Dado: $log2 = 0,30$). (Exercício extraído de um vestibular da FATEC-SP).

Como o $pH$ é dado pela fórmula $pH = -log[H^+]$, e a concentração de íons $H^+$ é $2.10^{-4}$ segue que $pH = -log2.10^{-4}$

Usando as propriedades do logaritmo, segue que:

$$pH = -(log2 + (-4).log10)$$

Como $log2 = 0,30$, temos que $pH = 3,7$

**Problema 3**:

Calcule os ângulos formados pelos átomos da molécula do metano ($CH_4$).

Como foi visto no texto, a molécula do metano forma um tetraedro regular, observe a figura a seguir:

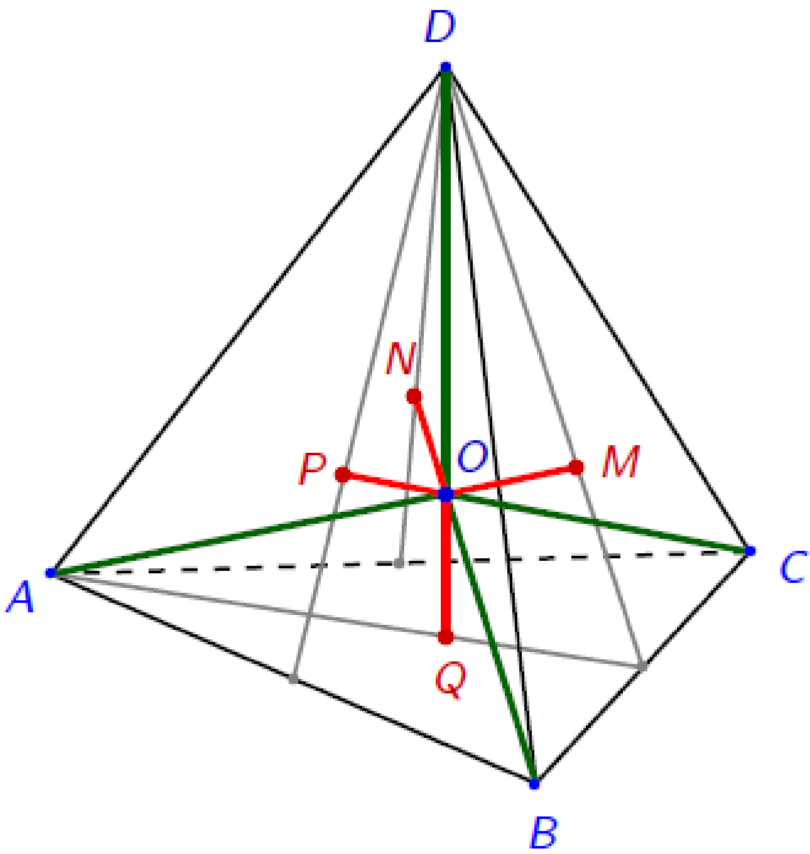



Figura 3.9: Tetraedro

Fonte: (SBM, 2019).

A molécula do metano está representada na figura acima, onde no ponto O está o átomo de Carbono (C), e nos vértices N, M, P e Q estão os átomos de Hidrogênio (H).

Pode-se observar que $O$ é o encontro das alturas do tetraedro, portanto é o centro do tetraedro e o raio da circunferência inscrita no tetraedro são os segmentos $\overline{OM}$, $\overline{ON}$, $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$.

Seja $a$ o comprimento da aresta do tetraedro e $h$ sua altura, $h = \dfrac{a.\sqrt{6}}{3}$. De fato, $\overline{AQ}$ é $\dfrac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero $ABC$ de lado $a$, então $\overline{AQ} = \dfrac{a.\sqrt{3}}{3}$. Tem-se que $ADQ$ é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AD} = a$. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, segue que $\overline{DQ} = h = \dfrac{a.\sqrt{6}}{3}$

Analisando a figura a seguir, pode-se notar que os triângulos retângulos DQR e DMO são semelhantes (caso AA: o ângulo $Q\widehat{D}R$ é um comum aos triângulos e $D\widehat{Q}R \equiv D\widehat{M}O = 90°$).

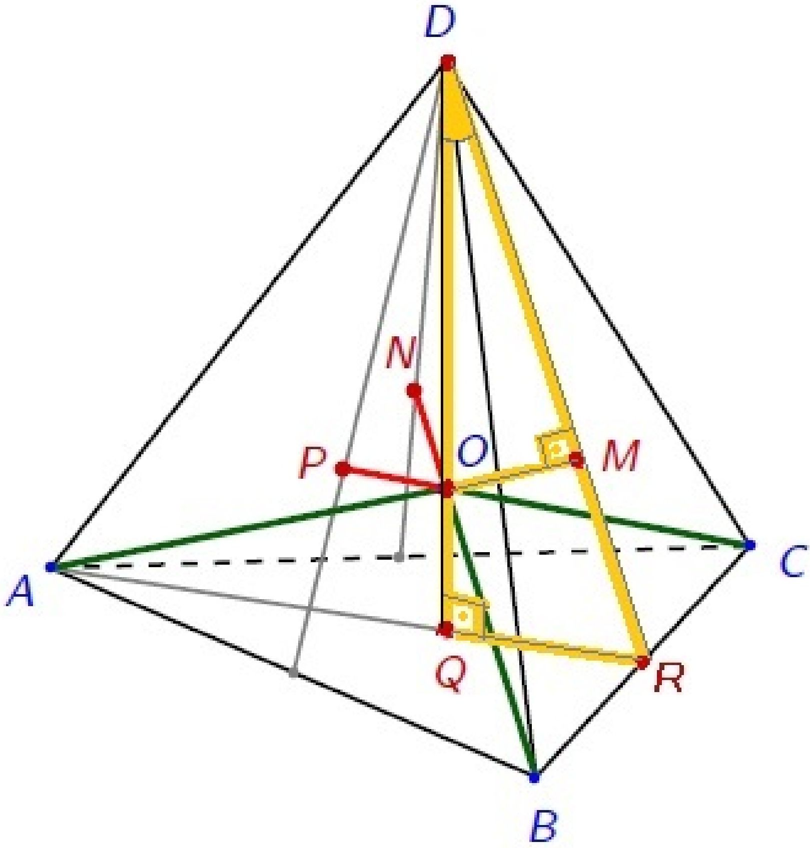



Figura 3.10: Tetraedro 2

Fonte: Adaptado de (SBM, 2019).

Desta semelhança segue que:

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{DR}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{MO}}$$

$\overline{AR}$ é altura do triângulo equilátero $ABC$, $\overline{AR} = \dfrac{a.\sqrt{3}}{2}$. O baricentro do triângulo equilátero $ABC$ é o ponto $Q$ que divide a altura do triângulo na razão $2:1$. Assim $\overline{QR} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a.\sqrt{3}}{6}$.

Por outro lado, $\overline{DR}$ é altura do triângulo equilátero $BCD$, logo $\overline{DR} = \dfrac{a.\sqrt{3}}{2}$. O baricentro do triângulo equilátero $BCD$ é o ponto $M$ que divide a altura do triângulo na razão $2:1$. Assim $\overline{DM} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a.\sqrt{3}}{3}$.

Logo, da igualdade

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{MO}}$$

Segue que:

$$\frac{\frac{a.\sqrt{6}}{3}}{\frac{a.\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{a.\sqrt{3}}{6}}{\overline{OM}}$$

Daí $\overline{OM} = \dfrac{a.\sqrt{6}}{12}$.

Como $\overline{DO} = \overline{DQ} - \overline{OQ}$, $\overline{DQ} = h = \dfrac{a.\sqrt{6}}{3}$ e $\overline{OQ} = \overline{OM} = \dfrac{a.\sqrt{6}}{12}$ segue que $\overline{DO} = \dfrac{a.\sqrt{6}}{4}$.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $AOD$, como $\overline{AO} = \overline{OD} = a.\sqrt{6}4$, $\overline{AO} = a$ e com o ângulo $A\widehat{O}D = \theta$, segue que:

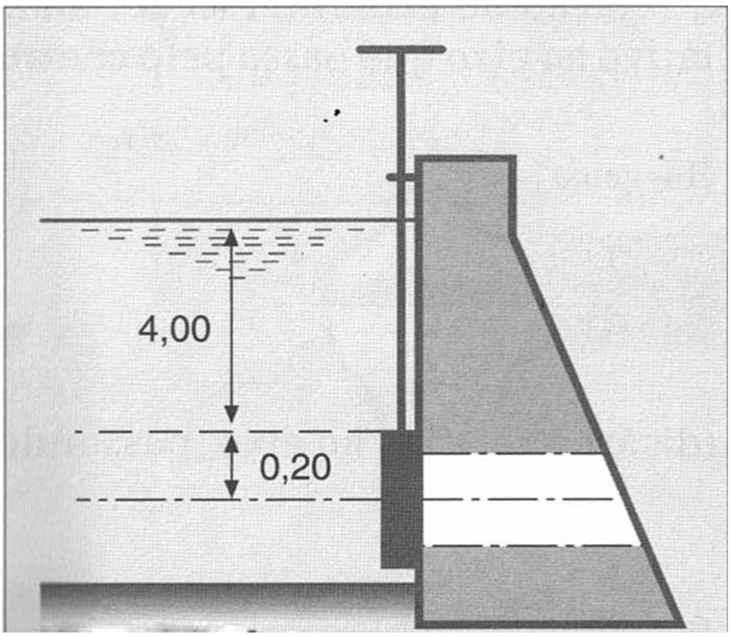
$$(a)^2 = (\frac{a.\sqrt{6}}{4})^2 + (\frac{a.\sqrt{6}}{4})^2 - 2.\frac{a.\sqrt{6}}{4}.\frac{a.\sqrt{6}}{4}.\cos\theta$$

Desenvolvendo a expressão acima, obtém-se que $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ e dessa forma o ângulo que satisfaz essa condição é $\theta = 109,5°$. Portanto, o ângulo formado pelos átomos da molécula do metano é $109,5°$.

# Apêndice 4 - Problemas de Engenharia

**Problema 1:**

Numa barragem de concreto está instalada uma comporta circular de ferro fundido com 0,20 m de raio, à profundidade indicada na Figura 3.1 a seguir. Calcular a força exercida por um líquido sobre uma superfície plana imersa, cujo peso específico da água é de $1000kgf/m^3$




Fonte: (NETTO et al., 2003).

Como foi citado no texto desse trabalho, o cálculo dessa força depende da área da superfície da comporta em contato com a água, do peso específico da água e da altura da superfície da água até o centro da comporta.

De acordo com a notação introduzida no texto, tem-se que:

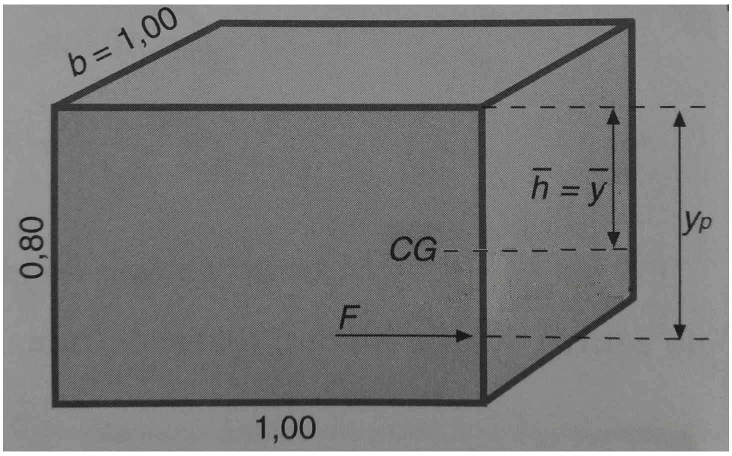
$\gamma = 1000kgf/m^3$ , $\bar{h} = 4,20$, $A = \pi.(0,20)^2 = 0,1257m^2$

Como a força $F =$ é calculada pela fórmula: $F = \gamma.\bar{h}.A$ segue que:

$F = 1000.4,20.0,1257 = 528kgf$

**Problema 2:**

Uma caixa de água de 800 litros mede 1,00 x 1,00 x 0,80. Determinar o empuxo que atua em uma das suas paredes laterais e seu ponto de aplicação. O peso específico da água é de $1000kgf/m^3$. A Figura 3.3 ilustra o problema:




Fonte: (NETTO et al., 2003).

Denotando por $F$ a força do empuxo, por $\gamma$ o peso específico da água, por $\bar{h} = \bar{y}$ a altura até o centro de gravidade, tem-se que esta força será calculada pela fórmula: $F = \gamma.\bar{h}.A$.

Analisando a figura, pode-se perceber que a altura $\bar{y}$ vai do topo da caixa até o centro de gravidade, que, conforme a Figura 3.2, é a metade da altura. Assim, tem-se que a altura é $\bar{h} = 0,40$ e a área lateral é $A = 0,80.1,00 = 0,80$. Logo essa força é de $F = 10^3 * 0,40 * 1,00 * 0,80 = 329kgf$

Denotando por $y_p$ a altura onde o empuxo acontece, será calculado pela fórmula:

$$y_p = \bar{y} + \frac{I_0}{A\bar{y}}$$

sendo $\bar{y} = 0,40m$ , $b = 1,00m$ e $d = 0,80m$ os lados da parede lateral onde o empuxo atua. Assim observando na Figura 3.2 do texto, tem-se que nesta parede com o formato retangular $I_0 = \frac{1}{12}bd^3$. Logo:

$$y_p = 0,40 + \frac{\frac{1}{12bd^3}}{bd0,40} = 0,40 + \frac{1.1,00.0,80^3}{12.0,80.0,40.1,00} = 0,40 + \frac{0,512}{3,840} = 0,40 + 0,133 = 0,533m$$

Logo, tem-se que a força do empuxo é de $329kgf$ e acontece a altura $y_p = 0,533m$.

# Apêndice 5 - A Matemática na Agricultura

Considerando o problema presente em Ribeiro, Guimarães e V. (1999): Se a análise química da amostra de um solo determinou, por exemplo, de acordo com os teores dos nutrientes do solo, a necessidade de 20:80:40 kg/ha de $N : P_2O_5 : K_2O$, respectivamente, para a adubação de plantio de determinada cultura.

Uma das alternativas propostas por Ribeiro, Guimarães e V. (1999) ao agricultor para a resolução desse problema é adquirir fertilizantes minerais simples e fazer a mistura dos mesmos, desde que sejam compatíveis.

Utilizando uréia (44% N), ou seja, para cada $100kg$ de ureia usa-se $44kg$ de Nitrogênio ($N$); superfosfato simples (18% $P_2O_5$), ou seja, para $100kg$ de superfosfato simples, usa-se $18kg$ de Fósforo ($P_2O_5$) e cloreto de potássio (58% $K_2O$), ou seja, para $100kg$ de cloreto de potássio usa-se $58Kg$ de Potássio ($K_2O$). Então, usando a regra de três, os cálculos seriam os seguintes:

| Kg de Uréia | Kg de N |
|---|---|
| 100 | 44 |
| $x$ | 20 |

$$\text{Daí } x = \frac{20.100}{44} \text{ ou seja, } x = 45,5 \text{ kg de uréia}$$

| kg de superfosfato simples | Kg de de $P_2O_5$ |
|---|---|
| 100 | 18 |
| $y$ | 80 |

$$\text{Nestas condições } y = \frac{80.100}{18} \text{ então } y = 444,4 \text{ kg de superfosfato simples}$$

| kg de cloreto de potássio | Kg de de $K_2O$ |
|---|---|
| 100 | 58 |
| $z$ | 40 |

$$\text{Nestas condições } z = \frac{40.100}{58} \text{ logo } z = 69 \text{ kg de cloreto de potássio}$$

Mistura final a ser aplicada por hectare: 45,5 kg de uréia + 444,4 kg de superfosfato simples + 69 kg de cloreto de potássio = 558,9 kg/ha.

Problema envolvendo matrizes:

Foi feito um levantamento sobre o plantio de milho, arroz e soja nas regiões A e B conforme a Tabela 3.1(Área plantada (em hectare)):

| Região | Milho | Arroz | Soja |
|---|---|---|---|
| A | 40 | 20 | 50 |
| B | 30 | 10 | 40 |

Foram utilizados fertilizantes X, Y e Z nessas plantações conforme a Tabela 3.2(Fertilizantes (em Kg/hectare) por grãos):

| Grãos | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| Milho | 5 | 10 | 8 |
| Arroz | 6 | 5 | 4 |
| Soja | 3 | 7 | 5 |

Com base nos dados apresentados monte uma tabela com a quantidade de fertilizantes utilizados por região. Posteriormente dê o total de fertilizantes por hectare utilizados em cada região.

Para a resolução deste problema aplica-se a multiplicação de matrizes. É possível usar essa propriedade pois a matriz que representa a primeira tabela (Área plantada), que será chamada de matriz $A$ possui 2 linhas e 3 colunas, logo $A_{2x3}$,

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 \\ 30 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

E a matriz que representa a segunda tabela (Fertilizantes), que será chamada de matriz $B$ possui 3 linhas e 3 colunas, logo $B_{3x3}$,

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Portanto, como o número de colunas da matriz $A$ é igual ao número de linhas da matriz $B$ é possível realizar a multiplicação $A.B$ conforme é apresentado:

$$A.B = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 50 \\ 30 & 10 & 40 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200+120+150 & 400+100+350 & 320+80+250 \\ 150+60+120 & 300+50+280 & 240+40+200 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$A.B = \begin{bmatrix} 470 & 850 & 650 \\ 330 & 630 & 480 \end{bmatrix}$$

Assim, a Tabela 3.3 de quantidade de fertilizantes por região é a apresentada a seguir:

| Região | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| A | 470 | 850 | 650 |
| B | 330 | 630 | 480 |

Portanto, o total de fertilizantes por hectare utilizados em cada região foi de: região $A = 470 + 850 + 650 = 1.970$ Kg/hectare e a região $B = 330 + 630 + 480 = 1.440$ kg/hectare.

# Apêndice 6 - A Matemática em atividades comerciais

Será resolvido um problema de juros compostos adaptado de Dante (2016a) onde pode ser visualizado com facilidade o crescimento exponencial: Uma pessoa fez um empréstimo em um banco no valor de R$ 10 000,00 à taxa de juros de 40% ao ano, no regime de juros compostos.

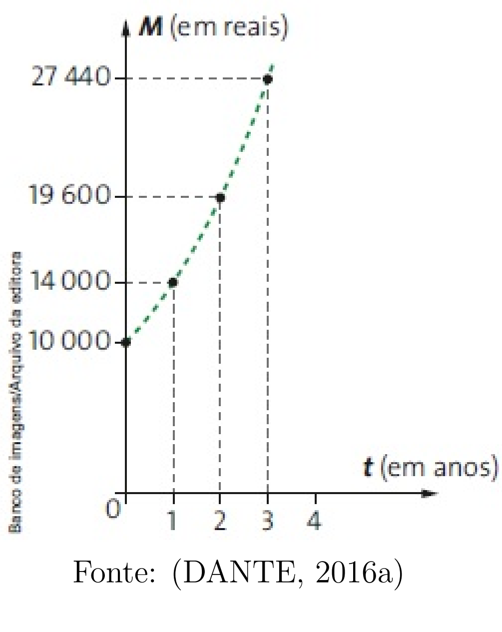
a) Qual o valor a ser pago após 2 anos? E 3 anos?

b) Construa o gráfico

De acordo com a equação $M = C(1+i)^t$ vista anteriormente, tem-se que o montante é obtido em função do tempo por meio da equação $M = 10000.(1,4)^t$.

Assim, após dois anos ter-se-á $M = 10000.(1,4)^2 = 19600$ e após três anos $M = 10000.(1,4)^3 = 27440$.

Da mesma forma, é possível encontrar os valores a serem pagos por mais tempo de empréstimo e a partir dos dados acima é apresentado o gráfico onde é possível observar com facilidade o crescimento exponencial:




Fonte: (DANTE, 2016a)

Vale ressaltar que a sequência dos montantes a partir do primeiro ano (14.000, 19.600, 27.440, 38.416,...) é uma Progressão Geométrica de razão 1,4, cujo termo geral é dado por:

$M_n = M_1.q^{n-1} = 1400.(1,4)^{n-1} = 1400.\dfrac{(1,4)^n}{1,4}$ logo, $M_n = 10000.(1,4)^n$

# Apêndice 7 - Motivando desde o primeiro dia de aula

Uma sugestão para ser trabalhada no primeiro dia de aula é utilizar alguns cartazes elaborados pela coordenação da OBMEP no início do projeto sobre a importância da Matemática no dia-a-dia das pessoas. Esses cartazes encontram-se nas páginas a seguir.

A proposta é imprimir esses cartazes e fixá-los na sala de aula para um debate com a turma.

Pedir para que os alunos relatem, na visão deles, onde conseguem perceber a matemática na realidade em que vivem.

Estimulá-los a pensar e a argumentar sobre como seria o mundo sem a Matemática, quais são as facilidades que essa ciência nos proporciona. Aqui é importante incitar o pensamento sobre a tecnologia, as construções, os avanços na medicina, etc.

Após esse debate, o professor poderá mostrar que a Matemática do Ensino Médio possibilitará aos alunos terem uma visão ampla de várias áreas e que, enquanto cidadãos, inseridos num mundo imerso em Matemática, conforme mostram os cartazes, eles terão mais argumentos e poderão tomar decisões tanto na sua vida pessoal quanto na profissional, embasados em conhecimentos sólidos, que permitirão uma melhor análise de cada situação.

Já que a Matemática está em muitas profissões, apresentá-la aos alunos desde o primeiro dia de aula como uma fonte de melhoria de vida e crescimento profissional, é uma forma de encorajar aqueles que sentem dificuldade para entender essa ciência, a se dedicarem e empenharem ao longo dessa etapa.

Com essa finalidade seguem duas sugestões de vídeos para a discussão:

- "Matemática no nosso cotidiano": <https://www.youtube.com/watch?v=JYtDvRrEG-w>
- "Eu vejo Matemática! Com que frequência? O tempo todo!": <https://www.youtube.com/watch?v=pnuXMXXdiP0>


Figura 3.11: Sem a Matemática... niguém anda
Fonte: <http://w3.impa.br/ dion/Cartazes/> acesso: 25/07/2019.


Figura 3.12: Sem a Matemática... niguém come
Fonte: <http://w3.impa.br/ dion/Cartazes/> acesso: 25/07/2019.


Figura 3.13: Sem a Matemática... ficamos no escuro
Fonte: <http://w3.impa.br/ dion/Cartazes/> acesso: 25/07/2019.


Figura 3.14: Sem a Matemática... ninguém fala
Fonte: <http://w3.impa.br/ dion/Cartazes/> acesso: 25/07/2019.


Figura 3.15: Sem a Matemática... não saímos do lugar
Fonte: <http://w3.impa.br/ dion/Cartazes/> acesso: 25/07/2019.


Figura 3.16: Sem a Matemática... ninguém vive
Fonte: <http://w3.impa.br/ dion/Cartazes/> acesso: 25/07/2019.

# Anexo 1 - Atividades de Cartografia

Atividade proposta por Branco e Menta (2010) :

**Momento 1** Professor, organize os alunos em grupos (3 a 4 alunos por grupo) e, em sala de aula, projete a imagem a seguir.

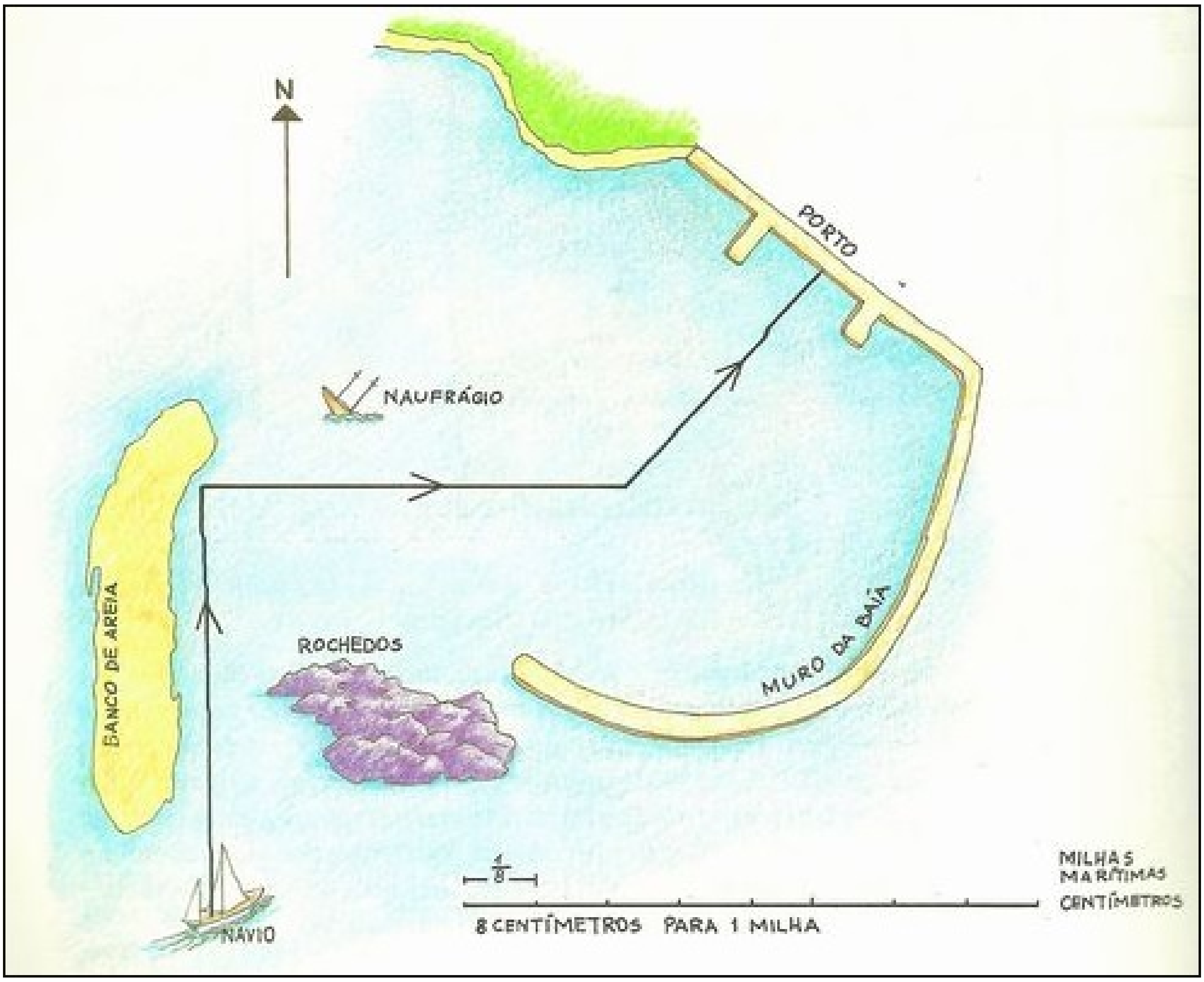



Figura 3.17: Atividades e Jogos com Escalas
Fonte: (BRANCO; MENTA, 2010).

Distribua uma cópia do mapa a cada grupo e permita que os alunos façam os cálculos. Lembre-os da escala apresentada.

Proponha então, a seguinte reflexão: O navio precisa seguir pelo canal e entrar na baía evitando os rochedos e o banco de areia. O comandante precisa calcular quanto deve navegar em cada direção antes de desviar. Na carta naútica tem uma escala marcada, onde 1 centímetro equivale a 1/8 de milha marítima.

As duas primeiras instruções do comandante são: Norte por 3/4 de milha e Leste por 3/4 de milha. Qual será a terceira instrução correta?

a) Norte por 1/2 milha.

b) Noroeste por 3/4 de milha.

c)**Nordeste por 1/2 de milha. (Resposta correta)**

d) 1:250 000

e) Nordeste por 1 milha.

**Momento 2** Após a resolução, proponha aos grupos de alunos que em uma cartolina (ou papel kraft) elaborem um mapa identificando as imediações da escola. O mapa deve abranger mais ou menos uns 5 quarteirões em todas as direções da escola (se for possível). Solicite que os alunos sejam bem rigorosos na elaboração do mapa e dos detalhes. Na sequência devem escrever uma orientação para que uma pessoa "perdida"em determinado ponto do mapa chegue até a escola.

Observação: Se julgar necessário, o professor pode sair com os alunos para fazer observação do terreno, anotando pontos comerciais importantes, postos de gasolina, igrejas, e outros locais que sejam referência.

Ao final, proponha que os grupos apresentem seus mapas e a orientação que descreveram. Durante a explanação dos grupos, possibilite que os mapas sejam fixados em locais onde todos possam observá-los. Nas apresentações chame a atenção dos grupos apontando similaridades entre os mapas elaborados, escala, legenda, tipos de projeção e a orientação no espaço, elementos matemáticos indispensáveis para a cartografia, tema abordado nesta aula.

**Momento 3** Professor faça uma busca no Google Maps procurando pela região da escola. Projete para os alunos o mapa que descreve essa região, apresente a visualização do mapa na versão das ruas e do satélite, comparando com os mapas desenvolvidos pelos alunos.

Para complementar a atividade proposta por Menta, e para um aprofundamento da Matemática que os alunos possam analisar a escala que utilizaram para o mapa confeccionado por eles mesmos.

**Questão ENEM - 2011** Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

$a)1:250$

$b)1:2500$

$c)1 : 25000$
$d)1 : 250000$
$e)1 : 25000000$

**Resolução** Primeiramente é necessário a transformação para a mesma unidade de medida, logo: 2 000 km = 200 000 000 cm. Portanto, a razão entre as medidas da figura e a real é:

$$\frac{8}{200000000} = \frac{1}{25000000}$$

Ou seja, a escala é 1: 25 000 000. Letra (e).

**Questão ENEM - 2013** A figura apresenta dois mapas, nos quais o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.

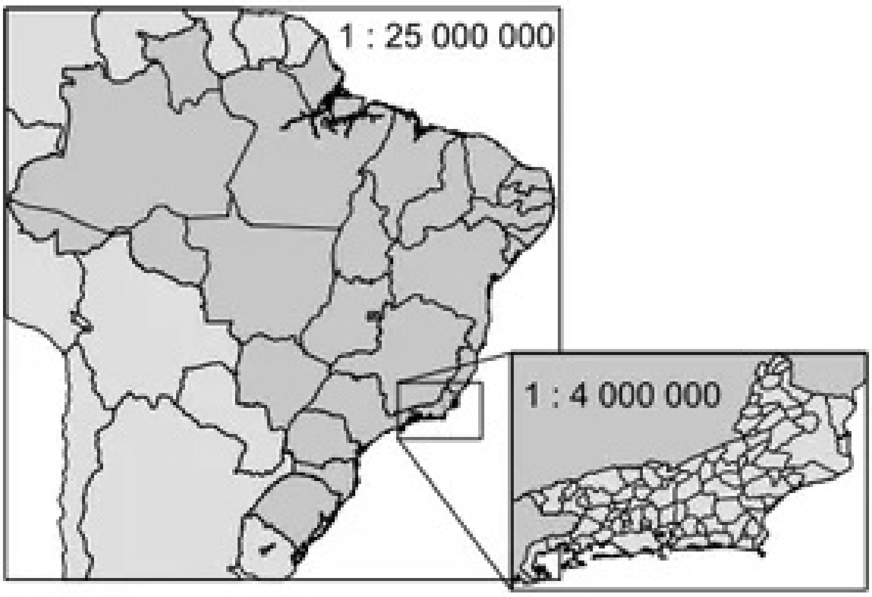



Figura 3.18: Foto: Reprodução/Enem
Fonte: (GLOBO EDUCAÇÃO, 2019).

Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é:
a) menor que 10.
b) maior que 10 e menor que 20.
c) maior que 20 e menor que 30.
d) maior que 30 e menor que 40.

e) maior que 40.

**Resolução**

Primeiro, o aluno precisa compreender que a escala apresentada na imagem do mapa do Brasil, cada 1 unidade no desenho equivale a 25.000.000 na realidade.

Por outro lado, no mapa do Rio de Janeiro a mesma unidade do desenho equivale a 4.000.000 na realidade.

Assim a razão do mapa do Brasil para o mapa do Rio de Janeiro é: $\frac{25000}{4000} = \frac{25}{4}$, ou seja, o mapa do Rio de Janeiro teve um aumento linear de $\frac{25}{4}$.

Como se pretende saber o quanto a **área** no mapa do Rio de Janeiro foi ampliada em relação à área no mapa do Brasil, deve-se lembrar aos alunos que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança das unidades do mapa, portanto a razão entre as áreas é:

$$(\frac{25}{4})^2 = \frac{625}{16} = 39,0625.$$

Portanto, o número de vezes que foi ampliada a área está entre 30 e 40 e assim a resposta é a letra (d).