

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

SILVIO JOSÉ DOS SANTOS

MODELO MATEMÁTICO DA CÉLULA FOTOVOLTAICA

CAMPO GRANDE - MS

SETEMBRO - 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

SILVIO JOSÉ DOS SANTOS

MODELO MATEMÁTICO DA CÉLULA FOTOVOLTAICA

Orientadora: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Rubia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
do Instituto de Matemática da Universidade Federal de  
Mato Grosso do Sul como parte dos requisitos para ob-  
tenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE - MS

SETEMBRO - 2019

# ESTUDO DO MODELO MATEMÁTICO DA CÉLULA FOTOVOLTAICA

SILVIO JOSÉ DOS SANTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Rubia Mara de Oliveira Santos - UFMS

Prof. Dr. Edson Donizete de Carvalho - UNESP

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Lilian Milena Ramos Carvalho - UFMS

Campo Grande – MS.

À memória de meu pai, Vitorino Correa dos Santos,  
pela sua força, sabedoria e humildade que foram li-  
ções a mim concedidas.

*E disse Deus: Haja luz; e houve luz. E viu Deus que era boa a luz.*

*Gênesis 1:3,4.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, que me concedeu saúde e forças para superar todos os momentos difíceis que eu me deparei ao longo do curso.

À minha companheira Bárbara Bruna, pela compreensão, paciência e apoio na realização deste sonho.

Aos meus pais, por serem pessoas tão essenciais na minha vida, pela educação e por todo amor a mim dispensado.

À minha família pelo incentivo e apoio incondicional.

À minha orientadora, Professora Rúbia, pela sua paciência e dedicação, a qual foi de suma importância para a elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos e companheiros de PROFMAT que tanto me incentivaram durante os anos de Mestrado, que permitiram que esta caminhada fosse mais divertida.

À esta instituição, ao corpo docente do PROFMAT e aos Servidores Administrativos do Instituto de Matemática, que proporcionaram um ambiente propício para meu aprendizado.

E a todos que de alguma forma participaram do meu processo de aprendizagem.

# Resumo

O presente trabalho tem por finalidade mostrar a importância do conhecimento matemático em aplicações reais na área de tecnologia e de engenharia, com o foco no tema energia fotovoltaica. É realizada uma abordagem sobre células fotovoltaicas, que é descrita através de um circuito elétrico e pelo desenvolvimento de equações que visam encontrar os valores dos seus parâmetros. Com auxílio do Software Mathcad e de informações técnicas de um módulo fotovoltaico, foi possível realizar simulações de suas curvas características. Tem-se a pretensão de mostrar que modelos matemáticos são ferramentas de motivação do conhecimento matemático, com interpretação de fenômenos que podem ser descritos com equações, gráficos, tabelas, dentre outras informações. Espera-se com este material inspirar o estudo de outros arquétipos matemáticos e despertar o interesse investigativo de novos modelos.

**Palavras-chave:** Célula Fotovoltaica, Modelo Matemático, Equações.

# Abstract

The present work aims to show the importance of mathematical knowledge in real applications in technology and engineering, focusing on the photovoltaic energy. It was performed an approach on photovoltaic cells, which is described through an electrical circuit and the development of equations to find the values of their parameters. With the assistance of Mathcad Software and technical information from a photovoltaic module, it was possible to implement simulations of its characteristic curves. It is intended to show that mathematical models are tools of motivation of mathematical knowledge, with the interpretation of phenomena that can be described with equations, graphs, tables, among other information. With this material, it is hoped to inspire the study of other mathematical archetypes and promote the investigative interest of new models.

**Keywords:** Photovoltaic Cell, Mathematical Model, Equations.

# Nomenclatura

V - Tensão

I - Corrente

s - segundos

kW - kilo Watt

Isc - Corrente de Curto Circuito

Voc - Tensão de Circuito Aberto

Vmp - Tensão de Máxima Potência

Imp - Corrente de Máxima Potência

Pmax - Potência Máxima

G - Irradiação

T - Temperatura da Célula

°C - graus Celsius

K - graus Kelvin

If - Corrente Fotogerada ou fotocorrente

Io - Corrente de saturação reversa

Ip - Corrente de perdas

Id - Corrente do diodo

J - Fluxo de Corrente

Jo - Fluxo de Corrente de Saturação Reversa

q - Carga do elétron

a - fator de idealidade do diodo

J - Joule

$R_s$  - Resistência Série

$R_p$  - Resistência Paralela

$V_t$  - Tensão Térmica

$N_s$  - Número de células em série

$\eta$  - Eficiência

A - Ampere

q - carga eletrônica

k - constante de Boltzmann

$E_f$  - energia do fóton (J)

h - constante de Planck (J.s)

f - frequência da luz (Hz)

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	2
1.2	Software Mathcad . . . . .	4
1.3	Objetivos . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
2.1	Energia Solar . . . . .	6
2.2	Tópicos de física dos semicondutores . . . . .	11
2.3	Efeito Fotovoltaico e Célula Fotovoltaica . . . . .	15
2.4	Associações de células e módulos fotovoltaicos . . . . .	17
2.5	Módulos Fotovoltaicos . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modelo Matemático da Célula Fotovoltaica</b>	<b>22</b>
3.1	Modelo Ideal . . . . .	22
3.2	Modelo de um diodo . . . . .	29
3.2.1	Construção das Curvas Características . . . . .	43
	<b>Conclusão</b>	<b>48</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>49</b>

# Lista de Figuras

2.1	Radiação solar global - média anual ( $\text{Wh}/\text{m}^2\cdot\text{dia}$ ). Fonte: [7]	8
2.2	Linha do zênite e ângulo zenital	9
2.3	Ângulos zênite, azimutal e altura solar	10
2.4	condutores (a), semicondutores (b) e isolantes (c). Fonte: adaptado de [5]	12
2.5	diodo semiconductor - símbolo elétrico	14
2.6	Célula Fotovoltaica	16
2.7	Associação de 2 células em série. Fonte: Adaptado de [5]	17
2.8	Associação de 2 células em paralelo. Fonte: Adaptado de [5]	18
2.9	Ligação em série das células fotovoltaicas	18
2.10	Módulo Fotovoltaico. Fonte: [13]	19
2.11	Curva de Máxima Potência	20
2.12	Fator de Forma	20
3.1	Modelo Ideal	22
3.2	Dimensões da célula fotovoltaica	27
3.3	Curva corrente-tensão (I-V) da célula fotovoltaica	28
3.4	Curva de potência-tensão (P-V) da célula fotovoltaica	29
3.5	Circuito Elétrico - Célula Fotovoltaica	29
3.6	Circuito elétrico - em condições de curto-circuito. Fonte: Adaptado de [22]	31
3.7	Circuito elétrico - em condições de curto aberto. Fonte: Adaptado de [22]	32
3.8	Circuito elétrico das células conectadas em série. Fonte: Adaptado de [16]	35
3.9	Módulo Fotovoltaico - células ligadas em série. Fonte: Adaptado de [17]	38
3.10	Curvas I-V - Módulo Fotovoltaico. Fonte: Adaptado de [18]	38
3.11	Ângulos estimados da Curva do Fabricante. Fonte: Adaptado de [18]	39
3.12	Cálculo da variação no ponto de curto-circuito. Fonte: Adaptado de [18]	40
3.13	cálculo da variação no ponto de circuito aberto. Fonte: Adaptado de [18]	41

3.14 Curva Tensão X Corrente . . . . .	44
3.15 Curva Tensão X Potência . . . . .	44
3.16 Curvas corrente versus tensão - irradiâncias . . . . .	46
3.17 Curvas potência versus tensão - irradiâncias . . . . .	46

# Lista de Tabelas

1.1	Áreas dos arranjos dos módulos solares . . . . .	3
1.2	Economia gerada por metro quadrado - módulo fotovoltaico . . . . .	3
3.1	Especificações da Célula Fotovoltaica . . . . .	27
3.2	Tabela especificações técnicas. Fonte: [18] . . . . .	37
3.3	Tabela características físicas. Fonte: [18] . . . . .	37
3.4	Tabela dados de entrada . . . . .	41
3.5	Tabela valores atribuídos - iniciais . . . . .	42
3.6	Tabela dados de saída . . . . .	42
3.7	Dados para plotagem dos gráficos . . . . .	43

# Capítulo 1

## Introdução

A matemática é o alicerce de várias áreas do conhecimento, dotada de uma arquitetura que permite desenvolver nos diversos graus de escolaridade, níveis cognitivo e criativo, sendo capaz de fazer emergir a habilidade em criar, modelar e resolver problemas[1].

Infelizmente, existe uma grande aversão entre os estudantes, o que provoca uma falta de interesse na aprendizagem da disciplina. Como despertar nos estudantes o interesse sobre o assunto e incentivá-los na construção do pensamento matemático?

Uma proposta seria mostrar a aplicação da matemática no cotidiano, procurando ressaltar a sua relevância. Contextualizar algo que ele vivencie é uma forma de trazer-lhe uma gratificação pelo estudo e aceitação por desafios, aguçá-la sua criatividade e incentivá-lo a aumento de suas habilidades matemáticas.

Por causa da crescente demanda por energia elétrica, muitas pesquisas para busca de novas formas de geração de energia vêm sendo feitas. Um assunto atual é a energia fotovoltaica. Há um crescente aumento do uso de módulos fotovoltaicos em residências, empresas, universidades, instituições públicas, dentre outros locais.

A energia solar fotovoltaica é considerada uma forma de energia limpa, com baixo impacto ambiental e de grande relevância para o desenvolvimento sustentável do país. Criar problemas ligados a esta tecnologia, fazendo que o aluno busque as finalidades e explicações aplicando conceitos matemáticos em suas soluções.

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no

desenvolvimento da própria ciência [2]

Pode-se dizer que o elemento básico para formação de um módulo é a célula fotovoltaica. Logo, indaga-se: um modelo matemático pode representar o comportamento dinâmico de uma célula fotovoltaica? Modelos matemáticos podem sim investigar os fenômenos e as características deste componente de geração de energia.

Durante a Dissertação serão apresentados modelos matemáticos que versam sobre o assunto, com técnicas de implementação que exigem conhecimento em áreas diversas, fazendo-se um elo entre elas. Solucionar problemas é uma característica da Engenharia, e a matemática ligada a diversas áreas do conhecimento é uma importante ferramenta de desenvolvimento da tecnologia.

## 1.1 Motivação

Uma aplicação para o educando pode ser vista na questão 176, prova azul, ENEM 2017. O exercício é um exemplo de aplicabilidade dos conceitos matemáticos fazendo uma associação com o assunto energia solar fotovoltaica [3].

A energia solar vai abastecer parte da demanda de energia do campus de uma universidade brasileira. A instalação de painéis solares na área dos estacionamentos e na cobertura do hospital pediátrico será aproveitada nas instalações universitárias e também ligada na rede da companhia elétrica distribuidora de energia.

O projeto inclui 100 m<sup>2</sup> de painéis solares que ficarão instalados nos estacionamentos, produzindo energia elétrica e proporcionando sombra para os carros. Sobre o hospital pediátrico serão colocados aproximadamente 300 m<sup>2</sup> de painéis, sendo 100 m<sup>2</sup> para gerar energia elétrica utilizada no campus, e 200 m<sup>2</sup> para geração de energia térmica, produzindo aquecimento de água utilizada nas caldeiras do hospital.

Suponha que cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica gere uma economia de 1 kWh por dia e cada metro quadrado produzindo energia térmica permita economizar 0,7 kWh por dia para a universidade. Em uma segunda fase do projeto, será aumentada em 75% a área coberta pelos painéis solares que geram energia elétrica. Nessa fase também deverá ser ampliada a área de cobertura com painéis para geração de energia térmica.

Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br>. Acesso em: 30 Outubro de 2013 (adaptado).

Para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à

primeira fase, a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado, deverá ter o valor mais próximo de?

### Solução

No exemplo, kWh é a unidade de consumo de energia elétrica (E) que é calculada da seguinte maneira:

$$E = \text{potência (W)} \cdot \Delta\text{tempo (h)}$$

O projeto contempla a geração de energia elétrica e energia térmica através da instalação de arranjos de painéis solares (módulos fotovoltaicos). As áreas dos arranjos para geração de energia são especificadas na tabela (1.1).

ÁREAS DOS ARRANJOS DOS MÓDULOS SOLARES			
Forma de Energia	Estacionamentos	Hospital pediátrico	Área Total
Área (Energia Elétrica)	100 m <sup>2</sup>	100 m <sup>2</sup>	200 m <sup>2</sup>
Área (Energia Térmica)	0 m <sup>2</sup>	200 m <sup>2</sup>	200 m <sup>2</sup>

Tabela 1.1: Áreas dos arranjos dos módulos solares

A economia gerada por metro quadrado por dia dos módulos fotovoltaicos está especificada na tabela (1.2).

ECONOMIA GERADA POR METRO QUADRADO - MÓDULO FOTOVOLTAICO		
Forma de Energia	Área Total · kWh economizado (Porcentagem)	Economia Total
Energia Elétrica	200 m <sup>2</sup> · 1 kWh · 1	200 kWh
Energia Térmica	200 m <sup>2</sup> · 1 kWh · 0,7	140 kWh

Tabela 1.2: Economia gerada por metro quadrado - módulo fotovoltaico

Logo, no projeto inicial (primeira fase) será gerada uma economia de 200 kWh e de 140 kWh, respectivamente para energia elétrica e energia térmica, totalizando 340 kWh que serão economizados diariamente.

Na segunda fase do projeto, será aumentada em 75% a área coberta dos painéis solares que tem por objetivo gerar energia elétrica. Como cada metro quadrado de painel solar para energia elétrica propicia uma economia de 1 kWh por dia, então, tem-se:

$$200 \text{ kWh} \cdot 1,75 = 350 \text{ kWh}.$$

Para obter a área total dos painéis que geram energia térmica, em metro quadrado que será necessária para se obter o dobro da quantidade de energia economizada diariamente, em relação à primeira fase, isto é,  $340 \text{ kWh} \cdot 2 = 680 \text{ kWh}$ , a economia de energia térmica deverá ter o valor de:  $680 \text{ kWh} - 350 \text{ kWh} = 330 \text{ kWh}$ . Logo, a área dos painéis que geram energia térmica deverá ter o valor mais próximo de:

REGRA DE TRÊS	
Área (m <sup>2</sup> )	Economia de Consumo (kWh)
200	140
X	330

$$X = \frac{200 \cdot 330}{140} = 471,428 \approx 472 \text{ m}^2.$$

## 1.2 Software Mathcad

A célula fotovoltaica e o módulo fotovoltaico são representados por meio de circuitos elétricos. Através dessas representações são desenvolvidas expressões matemáticas para cálculo de grandezas físicas que são a essência do trabalho. Nesse sentido, para realização de cálculos mais apropriados com entrada de dados, solução de equações e confecção de gráficos, que são objeto do nosso estudo, a utilização de um recurso computacional faz-se necessária. A simulação computacional dos modelos criados será realizada pelo Software Mathcad.

O PTC Mathcad é um software matemático desenvolvido para aplicações e soluções de cálculos na engenharia, que permite realizar, analisar e compartilhar seus cálculos sofisticados de maneira versátil. O programa apresenta vários recursos que permite apresentar seus cálculos com gráficos, textos e imagens. O download da versão gratuita pode ser feito em <https://www.ptc.com/en/products/mathcad-express-free-download>. O programa possui recursos poderosos que trazem inúmeros benefícios para elaboração de modelos matemáticos, que pode ser perfeitamente aproveitado por educadores em suas aplicações em ambiente escolar. Para maiores informações sobre o programa, acessar o site: <https://www.ptc.com>.

## 1.3 Objetivos

O objetivo principal do trabalho é a apresentação de dois modelos matemáticos que expressam os valores das grandezas físicas elétricas de uma célula fotovoltaica e de um módulo fotovoltaico. O tema tem como foco a interdisciplinaridade, estabelecendo conexões de conceitos matemáticos com outras ciências, com a finalidade de caracterizar e entender o funcionamento da célula e do módulo fotovoltaico.

Dessa forma, a estrutura do trabalho será organizada com segue:

No capítulo 2, é destinado ao embasamento teórico com diferentes áreas do conhecimento, com a finalidade de aproximar o leitor do tema. Os conceitos apresentados tratam de energia solar e de outras disciplinas que serão imprescindíveis para compreensão das aplicações

No capítulo 3, serão descritos modelos matemáticos desenvolvidos para estudo do comportamento das células fotovoltaicas e de um módulo fotovoltaico, descrito por meio de circuitos elétricos. As interpretações dos fenômenos serão apresentadas na forma de equações, gráficos, tabelas, dentre outras informações. Para o desenvolvimento da metodologia aplicada neste capítulo, será utilizado o software Mathcad.

No capítulo 4 serão apresentadas as conclusões do trabalho e possibilidade de temas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

Para o desenvolvimento do tema proposto para o trabalho faz-se necessária a construção de um embasamento teórico a fim de compreender a implementação dos modelos matemáticos que será desenvolvida no capítulo 3. A fundamentação teórica versa sobre tópicos de Energia Solar, Física dos Semicondutores, Efeito Fotovoltaico, Célula Fotovoltaica, Módulo Fotovoltaico e seus respectivos tipos de associação. Os conceitos e as definições foram retirados de [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] e [12].

### 2.1 Energia Solar

A Terra faz uma rotação em torno de seu eixo a cada 24 horas e completa o ciclo ao redor do Sol num período de aproximadamente 365,25 dias. Esta rotação segue uma elipse com Sol localizado em um dos focos. A excentricidade ( $\varepsilon$ ) da órbita da Terra é muito pequena, equivalente a 0,001673. Por isso, a órbita da Terra em torno do Sol é quase circular. Na medida em que a Terra faz a sua rotação em torno do Sol, ela gira a cada 24 horas sobre seu eixo, em um ângulo de  $23,45^\circ$  em relação ao plano normal à elipse, que inclui o plano orbital da Terra e do Equador do Sol.

Essa inclinação, juntamente com o seu movimento de translação, dá origem às estações do ano. Observando-se o movimento aparente do Sol, ao meio dia solar, ao longo do ano, verifica-se que o ângulo entre seus raios e o plano do Equador varia entre  $+23,45^\circ$  em torno do dia 21 de junho (solstício de inverno no hemisfério Sul),  $-23,45^\circ$  em 21 de dezembro (solstício de verão no hemisfério Sul), este ângulo é denominado Declinação Solar ( $\delta$ ).

A Declinação Solar ( $\delta$ ) é a distância angular dos raios do Sol ao norte (ou sul) do equador.

As convenções para declinação solar e latitude são estas: a declinação Norte é designada como positiva e considerada negativa ao Sul do Equador. Para um determinado dia em uma determinada localidade da Terra, a diferença entre a declinação e a latitude determina a trajetória do movimento aparente do Sol.

A Declinação Solar ( $\delta$ ) pode ser calculada aproximadamente pela seguinte equação:

$$\delta = 23,45 \cdot \text{sen} \left[ \frac{360}{365} \cdot (284 + N) \right] \quad (2.1)$$

Onde N representa o somatório de dias do calendário, contados de 1 a 365, sendo 1° de janeiro N = 1.

O dia N pode ser calculado pela equação (2.2):

$$N = \text{dia} + (\text{Mês} - 1) \cdot 30 + \text{Cor} \quad (2.2)$$

$$\text{Se: Mês} \leq 2 \rightarrow \text{Cor} = \text{Int} \left( \frac{\text{Mês}}{2} \right)$$

$$\text{Se: } 2 < \text{Mês} \leq 8 \rightarrow \text{Cor} = \left( \text{Int} \left( \frac{\text{Mês}}{2} \right) - 2 \right)$$

$$\text{Se: Mês} > 8 \rightarrow \text{Cor} = \left( \text{Int} \left( \frac{\text{Mês}}{2} + \frac{1}{2} \right) - 2 \right)$$

Sendo que Int é o menor inteiro contido no número obtido.

Quando os raios solares se alinham com o plano do Equador, a declinação solar é 0°, que ocorrem nos equinócios da primavera (21 de setembro) e de outono (21 de março). O ângulo é de  $-23,45^\circ$  para solstício de verão (21 de dezembro) e de  $23,45^\circ$  para o solstício de inverno (21 de junho).

A disponibilidade de radiação solar, também denominada energia total incidente sobre a superfície terrestre, depende da latitude local e da posição no tempo (hora do dia e dia do ano). Isso se deve à inclinação do eixo imaginário em torno do qual a Terra gira diariamente (movimento de rotação) e à trajetória elíptica que a Terra descreve ao redor do Sol (translação ou revolução).

O termo radiação solar é usado de forma genérica e pode ser referenciado em termos de fluxo de potência, quando é especificamente denominado de irradiância solar, ou em termos de energia por unidade de área, denominado, então, de irradiação solar.

A radiação global é a soma da radiação direta e da radiação difusa. A radiação direta corresponde aos raios solares que chegam diretamente do Sol em linha reta e incidem sobre o plano horizontal com uma inclinação que depende do ângulo zenital do Sol. A radiação difusa

corresponde aos raios solares que chegam indiretamente ao plano. É resultado da difração na atmosfera e da reflexão da luz na poeira, nas nuvens e em outros objetos.

A Figura (2.1) apresenta o índice médio anual de radiação solar no País, segundo o Atlas Solarimétrico do Brasil (2000). Os maiores índices de radiação são observados na região Nordeste, com destaque para o Vale do São Francisco. É importante ressaltar que mesmo as regiões com menores índices de radiação apresentam grande potencial de aproveitamento energético.

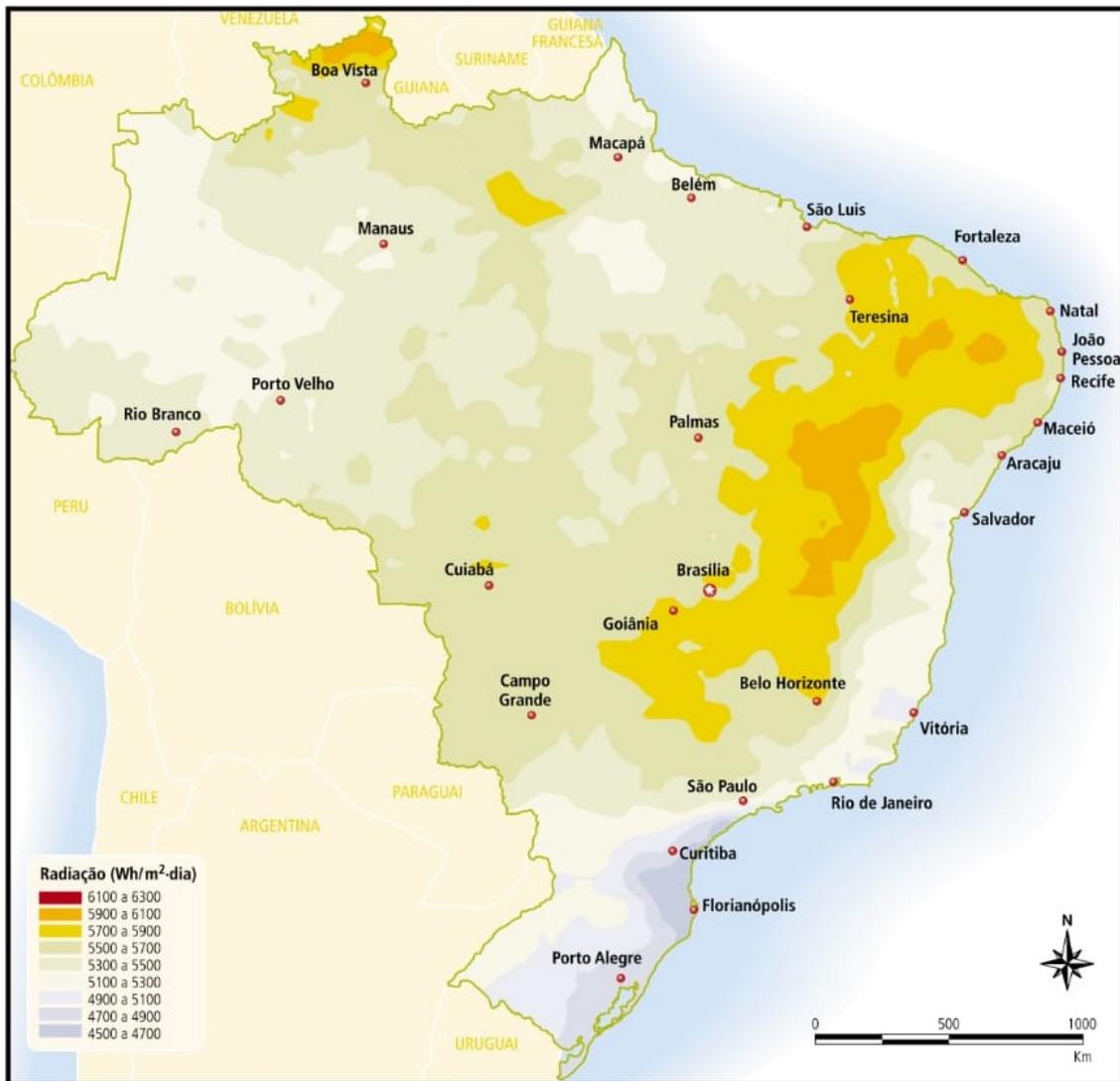


Figura 2.1: Radiação solar global - média anual (Wh/m<sup>2</sup>.dia). Fonte: [7]

A radiação solar sofre diversas alterações quando atravessa a atmosfera terrestre. As características da radiação solar que chega ao solo dependem da espessura da camada de ar e da composição da atmosfera, incluindo o ar e os elementos suspensos, como o vapor de água e a poeira. A espessura da camada de ar atravessada pelos raios solares depende do comprimento do trajeto até o solo. Esse trajeto depende do ângulo de inclinação do Sol com relação à linha

do zênite, ou ângulo zenital do Sol ( $\theta_Z$ ), ilustrado na Figura (2.2).

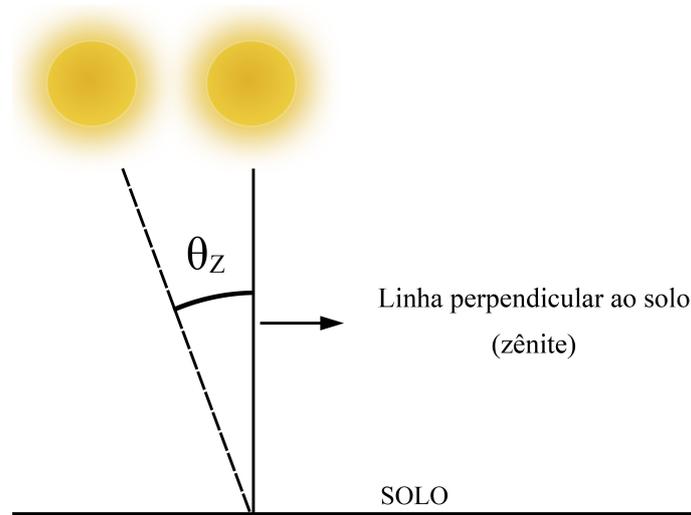


Figura 2.2: Linha do zênite e ângulo zenital

A expressão (2.3) permite calcular o ângulo zenital em função da latitude ( $\phi$ ), da declinação solar ( $\delta$ ) e do ângulo horário ( $\omega$ ).

$$\cos(\theta_Z) = \text{sen}\phi \cdot \text{sen}\delta + \text{cos}\phi \cdot \text{cos}\delta \cdot \text{cos}\omega \quad (2.3)$$

O ângulo horário  $\omega$ , com intervalo de  $-180^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ , manhãs  $< 0$  e tardes  $> 0$ , é calculado pela equação (2.4)

$$\omega = (HS - 12) \cdot 15 \quad (2.4)$$

A hora solar HS é dada pela equação (2.5):

$$HS = HL + \text{Corhora} \quad (2.5)$$

Em que o termo Corhora, sendo  $L_0$  longitude padrão do fuso e  $L$  longitude local, é calculado pela equação (2.6):

$$\text{Corhora} = \frac{(4 \cdot (L_0 - L) + E)}{60} \quad (2.6)$$

A equação do tempo ET é dada pela equação (2.7):

$$E = 9,87 \cdot \text{sen}(2B) - 7,53 \cdot \text{cos}(B) - 1,5 \cdot \text{sen}(B) \quad (2.7)$$

Sendo B:

$$B = \frac{360}{364} \cdot (N - 81) \quad (2.8)$$

A massa de ar é internacionalmente definida pela sigla AM (do inglês Air Mass) e calculada como:

$$AM = \frac{1}{\cos(\theta_Z)} \quad (2.9)$$

em que  $\theta_Z$  é o ângulo zenital do Sol.

Um ângulo maior corresponde a uma camada de ar mais espessa, portanto, há uma influência maior da atmosfera sobre a radiação solar.

Altura ou Elevação Solar ( $\theta_H$ ) é o ângulo compreendido entre os raios do Sol e a projeção dos mesmos sobre o plano horizontal (horizonte do observador). Os ângulos zenital e da elevação solar são complementares, ou seja:

$$\theta_Z + \theta_H = 90^\circ \quad (2.10)$$

Como os ângulos zenital e da Elevação solar são complementares, pode-se definir a seguinte equação :

$$\text{sen}(\theta_H) = \text{sen}\phi \cdot \text{sen}\delta + \text{cos}\phi \cdot \text{cos}\delta \cdot \text{cos}\omega \quad (2.11)$$

O azimutal é o ângulo de orientação dos raios solares com relação ao norte geográfico. O Sol, em sua trajetória no céu desde o nascente até o poente, descreve diferentes ângulos azimutais ao longo do dia:

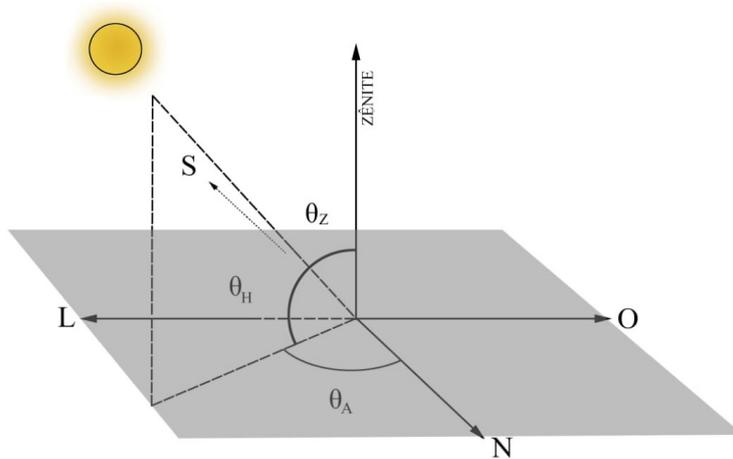


Figura 2.3: Ângulos zênite, azimutal e altura solar

O ângulo azimutal pode ser calculado pela equação (2.12):

$$\text{cos}(\theta_A) = \frac{\text{sen}\delta - \text{sen}\phi \cdot \text{sen}\theta_H}{\text{cos}\phi \cdot \text{sen}\theta_H} \quad (2.12)$$

Isso significa que um observador localizado no hemisfério sul, abaixo da linha do equador, quando estiver olhando para o Norte, verá o Sol com ângulos variáveis do seu lado direito no

período da manhã e do lado esquerdo no período da tarde. Ao meio-dia solar o observador verá o Sol exatamente à sua frente, o que representa o ângulo azimutal ( $\theta_A$ ) nulo. No hemisfério sul, quando o ângulo do azimute solar coincide com o norte polar da Terra, dizemos que o seu ângulo azimutal é zero, e essa situação é chamada de meio-dia solar. Para observadores localizados no hemisfério norte, o ângulo azimutal é medido em relação ao sul geográfico.

## 2.2 Tópicos de física dos semicondutores

Um átomo é formado por elétrons que orbitam ao redor de um núcleo. Para cada tipo de elemento químico há um número de órbitas de elétrons bem definido. Os elétrons mais internos têm o mínimo de energia, logo, requerem uma grande quantidade de energia para superar a atração do núcleo e tornarem-se livres. Portanto, os elétrons na camada mais externa são os únicos que interagem com outros átomos, denominada banda de valência.

A última órbita de um átomo define a sua valência, ou seja, a quantidade de elétrons desta órbita que pode ser libertar do átomo através do bombardeio de energia externa (calor, luz ou outro tipo de radiação) ou se ligar a outro átomo através de ligações covalentes (compartilhamento dos elétrons da última órbita de um átomo com os elétrons da última órbita de outro átomo).

Os elétrons da banda de valência são pouco ligados ao núcleo do átomo e, portanto, podem mais facilmente ligar-se a um átomo vizinho. Este fenômeno ocorre devido a eles terem uma energia maior e, em segundo lugar, por estarem a uma distância maior em relação ao núcleo do átomo, a força de atração eletrostática é menor. Com isso, uma pequena quantidade de energia recebida faz com que eles se tornem elétrons livres, formando assim, uma banda de condução, sendo capazes de movimentar pelo material. São esses elétrons livres que, sob a ação de um campo elétrico, formam a corrente elétrica.

Estes elétrons são responsáveis pela condução de eletricidade e de calor. A energia gap (ou bandgap) é a diferença entre a energia de um elétron na banda de valência e a camada mais interna da banda de condução.

A banda proibida (bandgap), que é a separação entre as duas bandas de energia permitidas dos materiais semicondutores, é representada por  $E_g$ , pode atingir até 3 eV (elétron-volt), diferenciando estes materiais dos materiais considerados isolante, onde a banda proibida supera este valor. A estrutura de separação de banda de energia para condutores (a), semicondutores

(b) e isolantes (c) é ilustrada na figura (2.4).

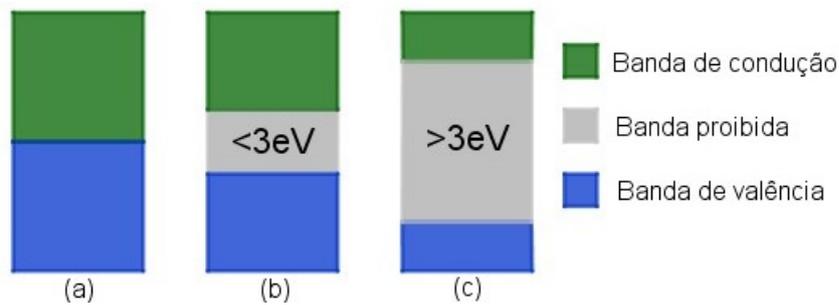


Figura 2.4: condutores (a), semicondutores (b) e isolantes (c). Fonte: adaptado de [5]

- (a) Materiais condutores: são materiais cujas bandas de valência e condução se sobrepõem. Possuem bandas de valência relativamente vazias e podem ter alguns elétrons na banda de condução. Um elétron pode migrar-se facilmente da banda de valência para banda de condução, sem necessitar de muita energia. Isso acontece principalmente nos materiais metálicos, em que a própria temperatura ambiente é suficiente para o surgimento de uma grande quantidade de elétrons livres.
- (b) Semicondutores: são materiais intermediários cujas camadas de valência são parcialmente cheias. A energia gap é menor que 3 eV (elétron-volt). Possuem a mesma estrutura de banda que os isolantes, porém, sua diferença de energia é menor (mais estreita).
- (c) Materiais Isolantes: são aqueles cuja camada ou banda de valência está preenchida e sua banda de condução vazia. A zona proibida ou energia gap é tão grande que, em circunstâncias normais, um elétron de valência não tem energia necessária para ocupar a banda de condução. O gap de banda nestes materiais é maior que 3 eV (elétron-volt). É importante notar que num isolante, a energia que separa as duas bandas é relativamente grande, de modo que a temperatura não gera pares elétrons-lacuna, como ocorre no semicondutor.

Na tabela periódica, os elementos semicondutores pertencem principalmente aos grupos 14 a 16 (antigos grupos IV A a VI A), incluindo Carbono, Silício (Si), Germânio (Ge), Arsênio (As), Fósforo (P), Selênio (Se) e Telúrio (Te). Além destes, existe um grande número de compostos binários, ternários e até quaternários, incluindo elementos de diversos grupos da tabela periódica, que também são semicondutores.

O silício (Si) caracteriza-se por ser um material semicondutor tetravalente, ou seja, por possuir quatro elétrons na sua camada de valência. Este material é chamado de semicondutor intrínseco ou puro, pois encontra-se em seu estado natural.

Para uma adequada utilização do material semicondutor, por exemplo para uso em microeletrônica ou construção de células fotovoltaicas, há a necessidade de uma série de tratamentos físico-químicos, conhecido como dopagem.

A dopagem consiste na introdução de dopantes (também chamadas de impurezas) de forma controlada num semicondutor intrínseco, de modo a modificar a sua condutividade. As impurezas são átomos trivalentes (três elétrons na camada de valência) ou pentavalentes (cinco elétrons na camada de valência).

Se um cristal de silício é dopado com uma certa quantidade de átomos de um material semicondutor pentavalente (impurezas), existirão elétrons que não participarão das ligações; logo, o semicondutor terá excesso de elétrons que estarão disponíveis para condução. Em semicondutores, quando um material que é dopado tem mais elétrons na camada de valência do que o semicondutor dopante, o material dopado é chamado de semicondutor tipo n. No semicondutor do tipo n os portadores majoritários são os elétrons livres (partículas negativas) e as lacunas (partículas positivas) são os portadores minoritários.

Analogamente, ao adicionar no cristal de silício impurezas trivalentes, constata-se a formação de lacunas positivas em sua estrutura (elétrons perdidos), as quais podem acomodar elétrons. Em semicondutores, se um material dopado tem menos elétrons na camada de valência que as impurezas, este apresenta uma concentração maior de lacunas (cargas positivas) e é denominado semicondutor do tipo p. Neste tipo de semicondutor, as lacunas são portadores majoritários e os elétrons livres serão os portadores minoritários. Os cristais semicondutores tipo n ou p, por conterem impurezas, são denominados semicondutores extrínsecos.

O diodo semicondutor é constituído basicamente por uma junção pn, ou seja, pela união física de um material tipo p (cujos portadores majoritários são lacunas) com um do tipo n (cujos portadores majoritários são elétrons).

Quando os semicondutores do tipo p e n são unidos em conjunto, isto é, formando uma junção pn, os elétrons em excesso a partir da camada n saltam para preencher as suas lacunas presentes na camada semicondutora do tipo p.

À medida que os átomos do material tipo p próximos à junção recebem os primeiros elétrons preenchendo suas lacunas, no lado n forma-se uma região com íons positivos (falta de elétrons)

e, no lado p, uma região com íons negativos (excesso de elétrons), dificultando ainda mais a passagem de elétrons do material tipo n para o material tipo p.

Devido ao excesso de cargas positivas e negativas na junção das camadas n e p, a mudança dos elétrons e lacunas de uma camada para outra é impedida, estabelecendo um equilíbrio. Uma barreira de potencial entre as duas camadas é formada, chamada de zona de depleção, cuja característica é a presença de um campo elétrico.

Depleção significa diminuição ou ausência e, neste caso, esta palavra corresponde à ausência de portadores majoritários na região próxima à junção pn.

Os átomos do material do tipo n, que perdem um elétron, ficam estáveis, isto é, ficam com oito elétrons na sua camada de valência. No material tipo p, haverá lacunas ocupadas pelos elétrons oriundos do semiconductor n; logo, também atingirão a estabilidade com oito elétrons na última camada. O fenômeno da ocupação de uma lacuna por um elétron é chamado de recombinação.

No semiconductor do tipo n, uma vez que a impureza dopada doa elétrons adicionais para condução de corrente, ela é chamada de doadora. Já no semiconductor do tipo p, a impureza dopada aceita elétrons adicionais; portanto ela é chamada de aceitador.

A figura 2.5 apresenta o símbolo elétrico do diodo. Cada lado do diodo semiconductor recebe um nome: o lado P chama-se ânodo e o lado N chama-se cátodo. Ânodo vem de ânion e cátodo de cátion.

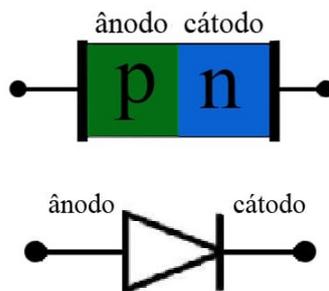


Figura 2.5: diodo semiconductor - símbolo elétrico

A corrente do diodo semiconductor tem comportamento exponencial que está relacionada com a temperatura  $T$  e a polarização  $V_d$  aplicada. A equação (2.13) é a equação teórica do diodo:

$$I_d = I_o \cdot \exp\left(\frac{q \cdot V_d}{a \cdot k \cdot T} - 1\right) \quad (2.13)$$

Em que:

q: carga do elétron;  
V<sub>d</sub>: tensão aplicada ao diodo;  
k: constante de Boltzmann;  
T: temperatura em Kelvin;  
I<sub>o</sub>: corrente de saturação reversa;  
I<sub>d</sub>: corrente total no diodo;  
a: constante empírica (o valor de (a) varia de 1 a 2 para o silício).

## 2.3 Efeito Fotovoltaico e Célula Fotovoltaica

O efeito fotovoltaico é o fenômeno físico que permite a conversão direta da luz em eletricidade. Esse fenômeno ocorre quando a luz, ou a radiação eletromagnética do Sol, incide sobre uma célula composta de materiais semicondutores com propriedades específicas.

O efeito fotovoltaico, primeiramente descoberto por Edmond Becquerel, em 1839, implica no aparecimento de uma diferença de potencial nos terminais de uma célula eletroquímica causada pela absorção de luz. Em 1876 foi concebido o primeiro aparato fotovoltaico advindo dos estudos da física do estado sólido e, apenas em 1956, iniciou-se a produção industrial, seguindo o crescimento da área de eletrônica.

Quando um fóton é absorvido por um elétron de valência de um átomo, a energia do elétron é aumentada pela quantidade de energia do fóton. Se a energia do fóton é maior do que a energia gap do semicondutor, o elétron, que tem excesso de energia, vai saltar para a banda de condução, na qual pode circular livremente. Portanto, quando um fóton é absorvido, um elétron é solto do átomo. O elétron pode ser removido por um campo elétrico através da parte dianteira e traseira do material fotovoltaico, isto é conseguido com a ajuda da junção pn.

Uma célula fotovoltaica é composta tipicamente pela junção de duas camadas de material semicondutor, uma do tipo p e outra n. As células fotovoltaicas podem ser entendidas essencialmente como diodos de grande área otimizados para o aproveitamento do efeito fotovoltaico. Quando os fótons de radiação solar atingem a superfície de uma célula solar e são absorvidos pelo semicondutor, algumas delas criam pares de elétrons e lacunas. Se esses pares estão suficientemente perto da junção, seu campo elétrico faz com que as cargas se separem, elétrons movendo-se para o lado de tipo n e lacunas para o lado de tipo p.

Além das camadas dos semicondutores que formam a junção pn, são ainda necessários

para completar a célula fotovoltaica, um contato elétrico frontal (malha metálica) na região n, assim como um contato na parte traseira na região p. Estes contatos deverão ser conectados externamente por um condutor para que ocorra a circulação dos elétrons. Se os dois lados da célula forem agora ligados através de uma carga, uma corrente elétrica fluirá, enquanto a radiação solar atinge a célula.

A propriedade fundamental que permite a fabricação de células fotovoltaicas é a possibilidade de fótons incidentes no material, com energia superior à  $E_g$  do gap, gerarem pares elétron-lacuna. A energia de um fóton é associada à cor da luz, de acordo com a equação (2.14):

$$E_f = h \cdot f \quad (2.14)$$

Onde:

$E_f$ : energia do fóton (J);

$h$ : constante de Planck (J.s);

$f$ : frequência da luz (Hz).

Quando a energia solar (fótons) atinge a célula solar, os elétrons são soltos a partir dos átomos do material semicondutor, criando pares elétron-lacuna. Se os condutores elétricos estão ligados aos lados positivos e negativos, que formam um circuito elétrico, os elétrons são captados sob a forma de corrente elétrica, chamada de fotocorrente  $I_f$ . A célula solar é o principal componente de um sistema fotovoltaico, sendo capaz de absorver a luz emitida do Sol e converter os fótons absorvidos em corrente elétrica. Quando a célula não está iluminada pela luz solar, ela não está ativa e funciona como um diodo semicondutor, não produzindo qualquer tensão ou corrente.

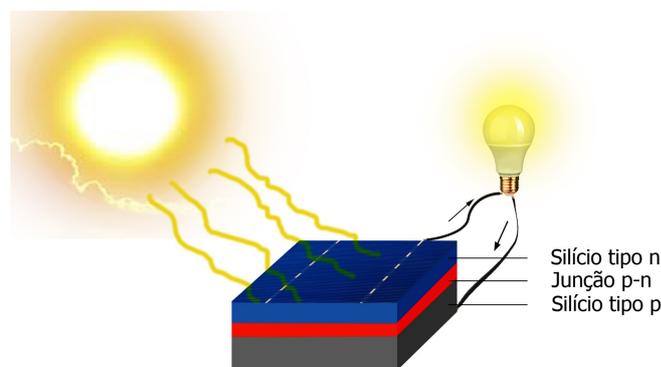


Figura 2.6: Célula Fotovoltaica

## 2.4 Associações de células e módulos fotovoltaicos

Células e módulos fotovoltaicos podem ser associados em série e/ou em paralelo, de forma a se obter os níveis de corrente e tensão desejados.

### Associação em série

Neste tipo de associação, o terminal positivo de um dispositivo (célula ou um módulo fotovoltaico) é conectado ao terminal negativo do outro dispositivo, e assim por diante. Para dispositivos idênticos e submetidos à mesma irradiância, quando a ligação é em série, as tensões são somadas e a corrente elétrica não é afetada, ou seja:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \dots + V_n \quad (2.15)$$

$$I = I_1 = I_2 = I_3 \dots = I_n \quad (2.16)$$

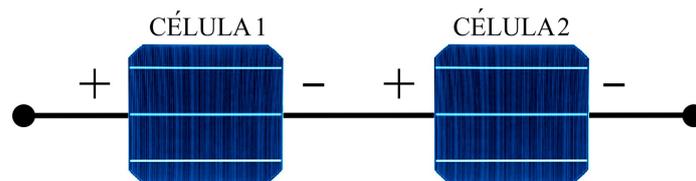


Figura 2.7: Associação de 2 células em série. Fonte: Adaptado de [5]

### Associação em paralelo

Na conexão em paralelo, os terminais positivos dos dispositivos são interligados entre si, assim como os terminais negativos. As correntes elétricas são somadas, permanecendo inalterada a tensão. Ou seja:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \dots + I_n \quad (2.17)$$

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \dots = V_n \quad (2.18)$$

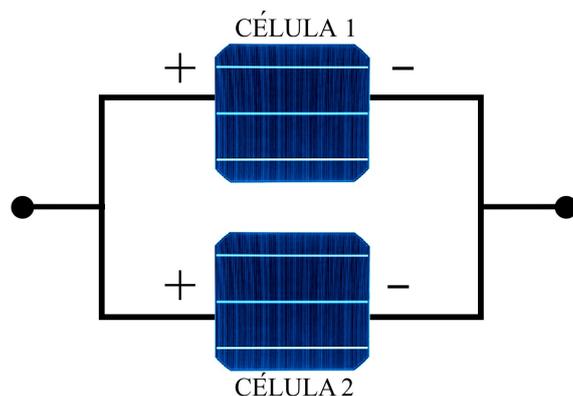


Figura 2.8: Associação de 2 células em paralelo. Fonte: Adaptado de [5]

## 2.5 Módulos Fotovoltaicos

As células fotovoltaicas são associadas eletricamente e encapsuladas para formar o módulo fotovoltaico. Um módulo pode ser constituído por um conjunto de 36 a 216 células fotovoltaicas associadas em série e/ou paralelo, associação esta que depende dos parâmetros elétricos (tensão, corrente e potência) mais adequados à aplicação a que o módulo se destina. Estas células são soldadas em tiras e depois encapsuladas, a fim de protegê-las das intempéries e proporcionar resistência mecânica ao módulo fotovoltaico.



Figura 2.9: Ligação em série das células fotovoltaicas

As células de um módulo fotovoltaico são montadas sobre uma estrutura rígida e conectadas eletricamente. Normalmente as células são conectadas em série para produzir tensões maiores. Os terminais superiores de uma célula são ligados ao terminal inferior da outra e assim suces-

sivamente, até formar um conjunto com a tensão de saída desejada, conforme apresentada na figura (2.9).



Figura 2.10: Módulo Fotovoltaico. Fonte: [13]

O módulo fotovoltaico é composto de uma moldura de alumínio, vidro temperado de alta transparência, películas encapsulantes para as células fotovoltaicas feita de acetato de etil vinila (EVA), filme posterior (Backsheet) com características de isolante. Na parte traseira o módulo recebe uma caixa de conexões elétricas, à qual são conectados os cabos elétricos (caixa de junção).

Os fabricantes de módulos fotovoltaicos disponibilizam folhas de dados com características elétricas, características mecânicas e outras informações relevantes sobre os módulos. Pode-se citar como exemplo a tabela de características elétricas STC (Standard Test Conditions) que refere-se às condições padronizadas de teste do módulo. Todos os fabricantes de módulos fotovoltaicos realizam testes nas mesmas condições, que são padronizadas por organismos internacionais de certificação, que consideram a irradiância solar de  $1000 \text{ W/m}^2$ , espectro solar AM1,5 e a temperatura da célula fotovoltaica de  $25^\circ\text{C}$ .

As características elétricas do módulo fotovoltaica podem ser definidas da seguinte forma:

**Tensão de circuito aberto ( $V_{oc}$ ):** é a tensão entre os terminais de uma célula fotovoltaica (ou do módulo fotovoltaico) quando não há corrente elétrica circulando e é a máxima tensão que uma célula fotovoltaica pode produzir.

**Corrente de curto-circuito ( $I_{sc}$ ):** é a máxima corrente que se pode obter e é medida na célula (ou módulo fotovoltaico) quando a tensão elétrica em seus terminais é igual a zero.

**Tensão de máxima potência ( $V_{mp}$ ):** é o valor da tensão nos terminais da célula (ou

módulo fotovoltaico) quando fornece sua potência máxima na condição padronizada de teste.

**Corrente de máxima potência ( $I_{mp}$ ):** é o valor da corrente nos terminais da célula (ou módulo fotovoltaico) quando fornece sua potência máxima na condição padronizada de teste.

**Potência de pico ou máxima potência ( $P_{max}$ ):** a potência de pico é máxima potência que a célula fotovoltaica (ou o módulo) pode fornecer na condição padronizada de teste (STC).

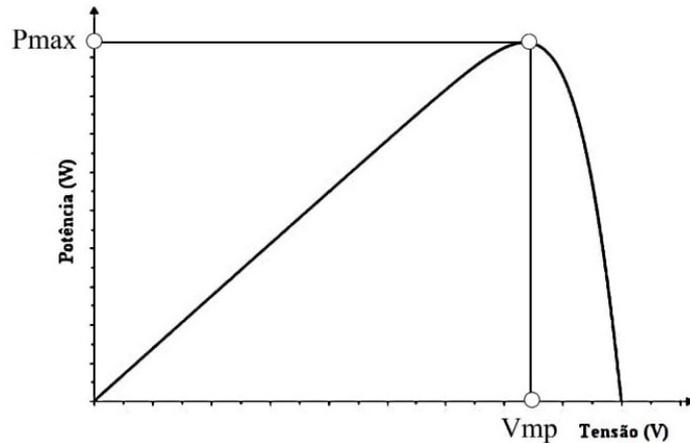


Figura 2.11: Curva de Máxima Potência

**Fator de forma (FF):** é a razão entre a máxima potência da célula e o produto da corrente de curto-circuito com a tensão de circuito aberto e é definido pela equação (2.19):

$$FF = \frac{P_{max}}{P} = \frac{I_m \cdot V_m}{I_{sc} \cdot V_{oc}} \quad (2.19)$$

O Fator de forma (FF) é a razão das áreas dos dois retângulos descatacados na figura (2.12). Quanto menores forem as perdas resistivas (série e paralelo), mais próxima da forma retangular será a curva V - I.

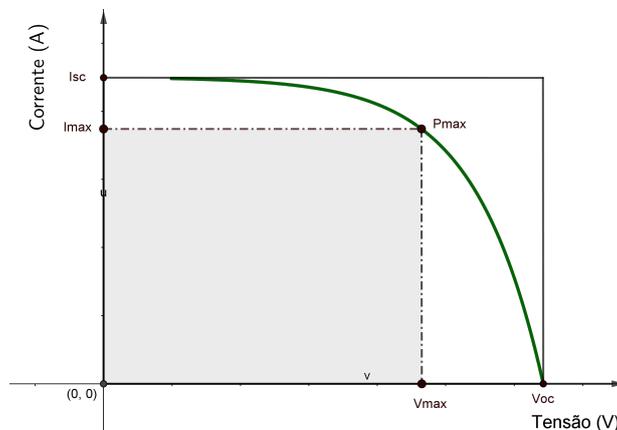


Figura 2.12: Fator de Forma

**Eficiência ( $\eta$ ):** é o parâmetro que define quão efetivo é o processo de conversão de energia solar em energia elétrica. Representa a relação entre a potência elétrica produzida pela célula fotovoltaica e a potência da energia solar incidente e pode ser definida pela equação (2.20):

$$\eta = \frac{I_{sc} \cdot V_{oc} \cdot FF}{A \cdot G} \cdot 100\% \quad (2.20)$$

Onde:

A = área da célula ( $\text{m}^2$ );

G = irradiância solar incidente ( $\text{W}/\text{m}^2$ );

# Capítulo 3

## Modelo Matemático da Célula Fotovoltaica

Este capítulo aborda dois modelos matemáticos: o modelo ideal e o modelo de um diodo. Estes modelos são baseados em circuitos elétricos que representam o comportamento das células fotovoltaicas e de seu conjunto (módulo fotovoltaico). Foram desenvolvidas equações com o objetivo de extrair valores dos parâmetros característicos de uma célula fotovoltaica e de um módulo fotovoltaico. As construções dos gráficos e os cálculos para solução das equações foram realizados com o programa Mathcad. As demonstrações, definições e aplicações foram retiradas de [4], [5], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22] e [23].

### 3.1 Modelo Ideal

O modelo ideal consiste em um único diodo conectado em paralelo com uma fonte de energia solar para fotocorrente gerada,  $I_f$ , e uma corrente de saída,  $I$ . Neste tipo de modelo, desprezam-se as resistências em série e paralelo que representam as perdas de potência da célula.

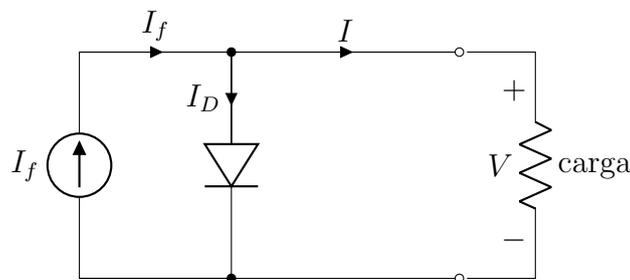
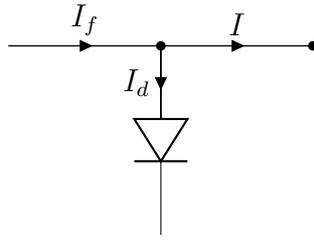


Figura 3.1: Modelo Ideal

Pelas Leis de Kirchhoff, o somatório das correntes em qualquer nó deve ser nula, ou seja:



$$I_f + I + I_d = 0$$

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot K \cdot T} \right) - 1 \right) \quad (3.1)$$

O valor máximo da corrente produzido pela célula é a corrente de curto-circuito ( $I_{sc}$ ) e é obtida sobre condições de curto-circuito, isto é,  $V = 0$ , e sendo igual a fotocorrente, ou seja,  $I_f = I_{sc}$ . A tensão de circuito aberto, que corresponde à máxima tensão fornecida pela célula, é a queda de tensão através do diodo quando é atravessado pela fotocorrente,  $I_f$ , sendo igual a  $I_d$ , quando a corrente gerada é  $I = 0$ . Com isso, pode-se reescrever a equação (3.1) da seguinte forma:

$$I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V_{oc}}{a \cdot V_t} \right) - 1 \right) = I_{sc} \quad (3.2)$$

A tensão térmica ( $V_t$ ) é calculada pela equação (3.3):

$$V_t = \frac{k \cdot T}{q} \quad (3.3)$$

Reescrevendo a equação (3.2), tem-se:

$$\exp \left( \frac{V_{oc}}{a \cdot V_t} \right) = \frac{I_{sc}}{I_o} + 1$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os lados da equação, obtêm-se:

$$V_{oc} = a \cdot V_t \cdot \ln \left( \frac{I_{sc}}{I_o} + 1 \right) \quad (3.4)$$

Em (3.4) é equação para cálculo da tensão de circuito aberto.

A Potência de saída ( $P$ ) de uma célula fotovoltaica é calculada pela equação:

$$P = I \cdot V$$

$$P = \left[ I_{sc} - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) \right] \cdot V \quad (3.5)$$

Aplicando a derivada na equação (3.5) em função de V e igualando-a a zero, obtêm-se a tensão externa,  $V_{mp}$ , que é a tensão que fornece a potência máxima de saída da célula fotovoltaica.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dV} &= 0 \\ \frac{d \left[ \left( I_{sc} - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) \right) \cdot V \right]}{dV} &= 0 \\ \frac{d \left[ I_{sc} \cdot V - I_o \cdot V \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) \right]}{dV} &= 0 \\ I_{sc} + I_o - I_o \cdot \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) - I_o \cdot V \cdot \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) \cdot \frac{q \cdot a \cdot k \cdot T}{(a \cdot k \cdot T)^2} &= 0 \\ I_{sc} + I_o &= I_o \cdot \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) + I_o \cdot V \cdot \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) \cdot \frac{q}{a \cdot k \cdot T} \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por  $I_o$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{I_{sc}}{I_o} + 1 &= \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) + V \cdot \exp \left( \frac{q \cdot V}{a \cdot k \cdot T} \right) \cdot \frac{q}{a \cdot k \cdot T} \\ \exp \left( \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T} \right) \cdot \left( 1 + \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T} \right) &= 1 + \frac{I_{sc}}{I_o} \end{aligned} \quad (3.6)$$

A equação (3.6) fornece a tensão máxima,  $V_{mp}$ , em termos de corrente de curto-circuito ( $I_{sc} = I_f$ ), corrente de saturação reversa ( $I_o$ ) e a temperatura absoluta da célula T. Porém, observe que:

$$P_{max} = I_{mp} \cdot V_{mp} \quad (3.7)$$

Sendo que:  $I_{mp} = I_{sc} - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right)$

onde:

$$\exp \left( \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T} \right) = \frac{1 + \frac{I_{sc}}{I_o}}{\left( 1 + \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T} \right)}$$

logo,

$$\begin{aligned} I_{mp} &= I_{sc} - I_o \cdot \left[ \frac{1 + \frac{I_{sc}}{I_o}}{\left( 1 + \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T} \right)} - 1 \right] \\ I_{mp} &= I_{sc} - I_o \cdot \left[ \frac{a \cdot k \cdot T \cdot (I_o + I_{sc})}{I_o \cdot (a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp})} - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{mp} &= \frac{I_{sc} \cdot (a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp}) - a \cdot k \cdot T \cdot (I_o + I_{sc}) + I_o \cdot (a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp})}{a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp}} \\
I_{mp} &= \frac{q \cdot V_{mp} \cdot I_{sc} + q \cdot V_{mp} \cdot I_o}{a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp}} \\
I_{mp} &= \left[ \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp}} \right] \cdot (I_{sc} + I_o) \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Da equação (3.7),  $P_{max} = I_{mp} \cdot V_{mp}$ , tem-se

$$P_{max} = \left[ \frac{q \cdot (V_{mp}^2)}{a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp}} \right] \cdot (I_{sc} + I_o) \tag{3.9}$$

### Aplicação do Modelo Ideal

Sabendo-se que a temperatura de uma célula fotovoltaica é 25°C (298 K), a densidade de corrente de curto-circuito é de 398,088 A/m<sup>2</sup> e sua tensão máxima ( $V_{mp}$ ) é de 0,555 V. Calcular a densidade da corrente de saturação reversa,  $J_o$ ; a tensão de circuito aberto,  $V_{oc}$ ; a densidade de corrente no ponto de máxima potência,  $J_{mp}$  e sua potência máxima,  $P_{max}$ . A eficiência máxima é a razão entre a potência máxima e a potência da radiação solar incidente, que é dada por:  $\eta = \frac{P_{max}}{P_{in}} = \frac{I_{mp} \cdot V_{mp}}{A \cdot G}$ . **Quais são as dimensões da célula fotovoltaica necessárias para obter uma potência de 5,5W, quando a radiação solar disponível é de 1000 W/m<sup>2</sup>? Considere a forma geométrica da célula fotovoltaica do enunciado um quadrado, o fator de idealidade da célula ( $a$ ) igual a 1 e a corrente elétrica uniformemente distribuída**

#### Solução:

A corrente elétrica pode ser obtida pela equação (3.10) [14]:

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \tag{3.10}$$

Para cada elemento da seção reta, o módulo  $J$  da densidade de corrente é igual à corrente dividida pela área do elemento. Pode-se escrever a corrente que atravessa o elemento de área como  $\vec{J} \cdot d\vec{A}$ , em que  $d\vec{A}$  é o vetor área do elemento, perpendicular ao elemento. Se a corrente for uniforme em toda a seção reta e paralela a  $d\vec{A}$ ,  $\vec{J}$  também é uniforme e paralela a  $d\vec{A}$ , ou seja,  $I = \int J \cdot dA = J \cdot dA$ , logo, pode-se calcular a densidade de corrente pela equação (3.11):

$$J = \frac{I}{A} \tag{3.11}$$

Para solução da aplicação serão utilizadas as equações (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) e (3.11).

A densidade de corrente de curto-circuito ( $J_{sc}$ ) é a razão entre a corrente de curto-circuito e a área da célula solar e o seu valor é de 398,088 A/m<sup>2</sup>.

A densidade de corrente de saturação reversa pode ser calculada pela equação (3.6):

$$J_o = \frac{J_{sc}}{\left( \exp\left(\frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T}\right) \cdot \left(1 + \frac{q \cdot V_{mp}}{a \cdot k \cdot T}\right) \right) - 1}$$

$q$  = carga eletrônica =  $1,602 \cdot 10^{-19}$  J/V;

$k$  = constante de Boltzmann =  $1,381 \cdot 10^{-23}$  J/K;

$a$  = fator de idealidade (valor varia conforme a construção da célula) = 1;

$T$  = temperatura absoluta da célula = 298 K;

$V_{mp}$  = tensão de máxima potência = 0,555 V;

$J_o$  = densidade de corrente de saturação reversa (A/m<sup>2</sup>).

$$J_o = 7,295 \cdot 10^{-9} A/m^2$$

Usando a equação (3.4),

$$V_{oc} = V_t \cdot \ln\left(\frac{J_{sc}}{J_o} + 1\right)$$

$$V_{oc} = 0,635V$$

A densidade de corrente no ponto de máxima potência é obtida pela equação (3.8):

$$J_{mp} = \left[ \frac{q \cdot V_{max}}{a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{max}} \right] \cdot (J_{sc} + J_o)$$

$$J_{mp} = 380,477 A/m^2$$

A potência máxima,  $P_{max}$ , é calculada pela equação (3.9):

$$P_{max} = \left[ \frac{q \cdot (V_{mp})^2}{a \cdot k \cdot T + q \cdot V_{mp}} \right] \cdot (J_{sc} + J_o)$$

$$P_{max} = 211,165 W/m^2$$

A área da célula necessária para ter uma saída de 5,5 W é:

$$\text{Área} = \frac{P_{solicitada}}{P_{max}} = \frac{5,5W}{211,165W/m^2} = 0,026046m^2$$

Como a área do quadrado é dada por  $\text{Área} = L^2$ , logo, as dimensões do quadrado são:

$L = \sqrt{0,026046} = 0,161388$  m, ou seja,  $L \approx 161,4$  mm, ilustradas na figura (3.2).

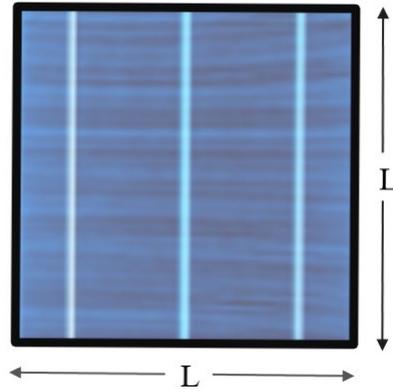


Figura 3.2: Dimensões da célula fotovoltaica

A eficiência da célula fotovoltaica é calculada da seguinte forma:

$$\eta = \frac{P_{max}}{P_{in}} = \frac{211,165W/m^2}{1000W/m^2} \approx 21,12\%$$

Desta maneira, obteve-se a densidade de corrente de saturação reversa ( $J_0$ ), a tensão de circuito aberto ( $V_{oc}$ ), a densidade de corrente no ponto de máxima potência ( $J_{mp}$ ), potência máxima ( $P_{max}$ ), a área, as dimensões e a eficiência da célula.

A corrente de máxima potência pode ser obtida pela equação (3.11).

$$I_{mp} = J_{mp} \cdot A = 380,477A/m^2 \cdot 0,026046m^2 \approx 9,91 A.$$

Os valores dos parâmetros da célula fotovoltaica estão especificados na tabela (3.1):

ESPECIFICAÇÕES DA CÉLULA FOTOVOLTAICA	
Potência Máxima	5,5 W
Voltagem Máxima de Potência $V_{mp}$ (V)	0,555 V
Corrente Máxima de Potência $I_{mp}$ (A)	9,91 A
Tensão de Circuito Aberto $V_{oc}$ (V)	0,635 V
Corrente de Curto Circuito $I_{sc}$ (A)	10,37 A
Dimensão da Célula	161,40 mm x 161,40 mm

Tabela 3.1: Especificações da Célula Fotovoltaica

Os gráficos das figuras (3.3) e (3.4) permitem fazer uma análise de três pontos significativos da célula fotovoltaica da aplicação que são: ponto de curto-circuito, ponto de tensão de circuito aberto e o ponto de máxima potência.

A figura (3.3) mostra a curva IV que é o gráfico que relaciona a corrente (I) e a tensão (V) da célula fotovoltaica. Note que quando o valor da tensão é igual a zero (eixo das abscissas), a curva corta o eixo das ordenadas no ponto  $I = I_{sc} = 10,37A$  (corrente de curto-circuito). Se o valor da corrente (I) é igual zero no eixo das ordenadas, o valor da tensão (V) é  $V_{oc} = 0,635V$  (tensão de circuito aberto).

A figura (3.4) ilustra a curva PV que é o gráfico que relaciona a potência (W) em função da tensão (V). O ponto mais alto do gráfico, cujo valor de  $P = 5,5W$ , é o ponto de máxima potência da célula que é calculada pela equação (3.7),  $P_{max} = I_{mp} \cdot V_{mp}$ . A tensão neste ponto é máxima e tem valor de  $V_{mp} = 0,555 V$ . Os demais comportamentos da curva PV é descrita pelos seguintes intervalos com diferentes valores para tensão V:

- No intervalo de  $]0, 0,555[$ , a curva PV é crescente;
- No ponto  $V = 0,555$  é a tensão de maior potência  $\left(\frac{dP}{dV} = 0\right)$ ;
- No intervalo de  $]0,555, 0,635[$  a curva PV é decrescente;
- Nos pontos de corrente de curto-circuito ( $I_{sc} = 10,37 A$ ) e de tensão de circuito aberto ( $V_{oc} = 0,635 V$ ) da célula fotovoltaica, os valores para potência são nulos.

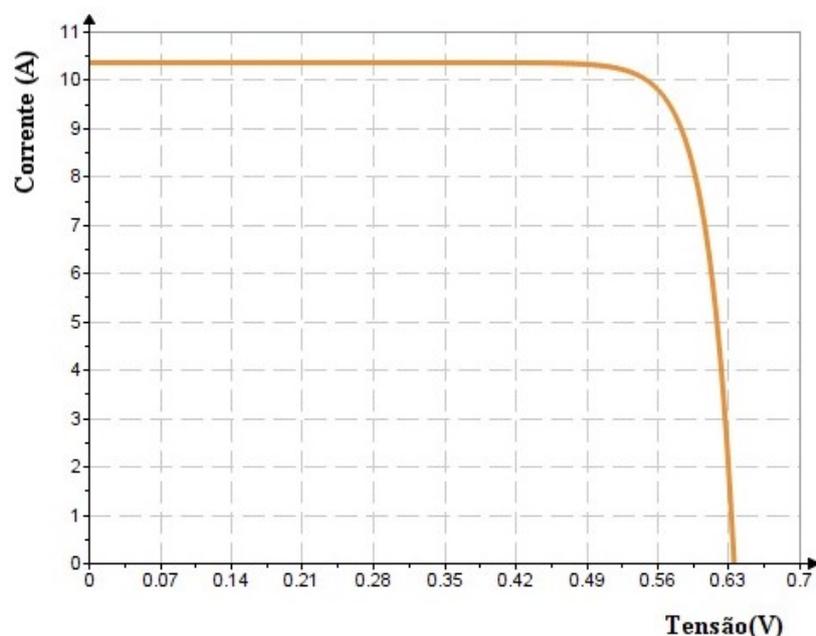


Figura 3.3: Curva corrente-tensão (I-V) da célula fotovoltaica

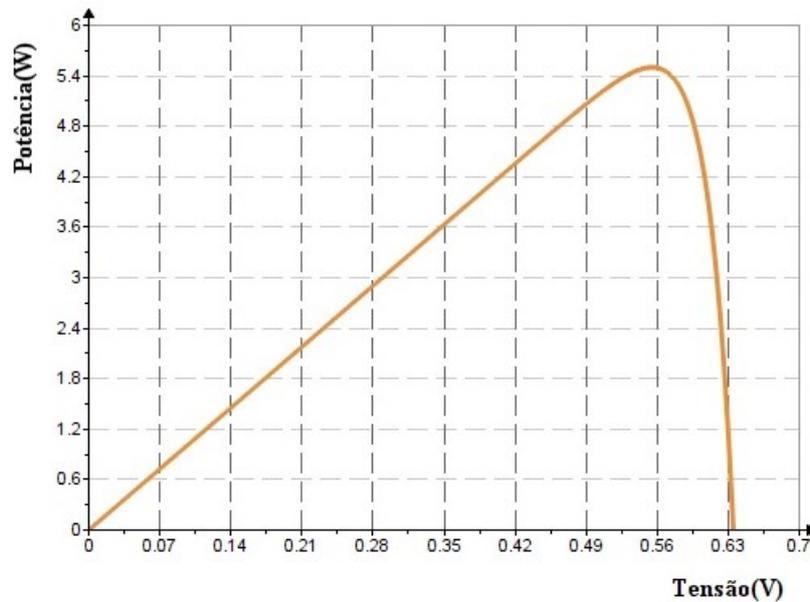


Figura 3.4: Curva de potência-tensão (P-V) da célula fotovoltaica

### 3.2 Modelo de um diodo

A célula solar e o módulo fotovoltaico podem ser representados por um circuito elétrico equivalente descrito na figura (3.5).

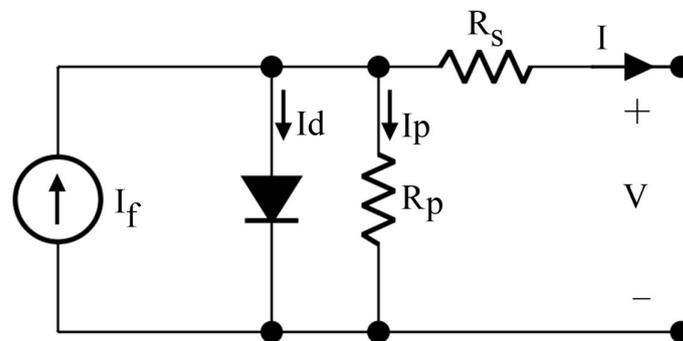


Figura 3.5: Circuito Elétrico - Célula Fotovoltaica

O circuito equivalente apresenta as resistências  $R_p$  (resistência paralela),  $R_s$  (resistência em série),  $I_f$  (fotocorrente), um diodo,  $I_p$  (corrente de perdas) e a  $I$  (corrente gerada).

As resistências série e paralelo de uma célula ou de um módulo fotovoltaico representam fatores de perda de potência de um dispositivo, logo, influem em sua eficiência. A resistência série ( $R_s$ ) origina-se na resistência do próprio material semiconductor nos contatos metálicos e na junção metal-semiconductor. A resistência paralela ( $R_p$ ) é causada por impurezas e defeitos

na estrutura, principalmente próximo às bordas, que produzem um caminho interno para uma corrente de fuga. A resistência série ( $R_s$ ) contribui para reduzir  $I_{SC}$  e o FF da célula, mas não afeta sua  $V_{OC}$ . O efeito de ( $R_p$ ) consiste em reduzir  $V_{OC}$  e o FF, sem influir na  $I_{SC}$ .

Pelas Leis de Kirchoff:

$$I_f = I_d + I_p + I \quad (3.12)$$

$$I = I_f - I_d + I_p \quad (3.13)$$

$$R_s \cdot I - V + I_p \cdot R_p = 0$$

$$I_p = \frac{V + R_s \cdot I}{R_p}$$

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot (V + I \cdot R_s)}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

A equação do diodo (2.13) é dada por:  $I_d = I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot (V + I \cdot R_s)}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right)$ , em que:

$k$  = constante de Boltzmann =  $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K;

$T$  = temperatura absoluta da célula (K);

$q$  = carga eletrônica =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  J/V;

$V$  = tensão aplicada através da célula (V);

$I_o$  = corrente de saturação reversa, que depende fortemente da temperatura (A).

$a$  = fator de idealidade (valor varia conforme a construção da célula);

Os parâmetros fator de idealidade ( $a$ ), resistência em série ( $R_s$ ) e resistência em paralelo ( $R_p$ ) não são fornecidos pela folha de dados dos fabricantes. A seguir, por meio de aplicação das derivadas, serão deduzidas equações para encontrar os valores destes parâmetros.

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot (V + I \cdot R_s)}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V + I \cdot R_s}{Vt} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p} \quad (3.14)$$

onde:

$$Vt = \frac{a \cdot k \cdot T}{q}$$

Derivando a equação (3.14) em função de  $V$  e sobre condições de curto-circuito, tem-se:

$$\frac{d}{dV} I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V + I \cdot R_s}{Vt} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

$$\frac{d}{dV}I = I_f - I_o \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) + I_o - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

$$\frac{dI}{dV} = -\frac{I_o}{Vt} \cdot \left(\exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) \cdot \left(1 + R_s \cdot \frac{dI}{dV}\right)\right) - \frac{1}{R_p} - \frac{R_s}{R_p} \cdot \frac{dI}{dV}$$

$$\frac{dI}{dV} \cdot \left(1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{I_o}{Vt} \cdot R_s \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right)\right) = -\frac{I_o}{Vt} \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) - \frac{1}{R_p}$$

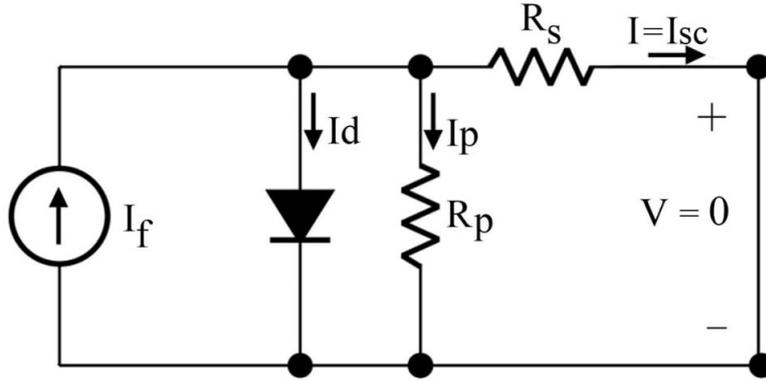


Figura 3.6: Circuito elétrico - em condições de curto-circuito. Fonte: Adaptado de [22]

Observação: Na figura (3.6), ilustra as condições de curto-circuito,  $V = 0$  e  $I = I_{sc}$ , a corrente de saturação ( $I_o$ ) possui valores ínfimos (da ordem de  $10^{-8}$ ) e  $R_s$  possui valores muito pequenos que não alteram a grandeza da exponencial, então:

$$I_o \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) = I_o \cdot \exp\left(\frac{I_{sc} \cdot R_s}{Vt}\right) \approx 0$$

E como

$$R_s \ll R_p$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dV} &= -\frac{1}{R_p} \\ R_p &= -\frac{dV}{dI} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Um outro parâmetro a ser definido é a fotocorrente ( $I_f$ ). A partir da equação (3.14) e em condições de curto-circuito,  $I = I_{sc}$  e  $V = 0$ , conforme figura (3.6), tem-se:

$$I = I_f - I_o \cdot \left(\exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) - 1\right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

$$I_{sc} = I_f - I_o \cdot \left( \exp\left(\frac{Vd}{Vt}\right) - 1 \right) - \frac{Vd}{R_p}$$

Para valores normais da resistência  $R_s$ , a tensão do diodo  $Vd = I_{sc} \cdot R_s$  é pequena e a corrente de saturação reversa ( $I_o$ ) é da ordem de  $10^{-8}A$ , então:

$$I_o \cdot \left( \exp\left(\frac{Vd}{Vt}\right) - 1 \right) \approx 0$$

e

$$\frac{Vd}{R_p} \approx 0$$

Conclui-se que:

$$I_f = I_{sc} \text{ (corrente de curto-circuito)}$$

A expressão para cálculo da resistência série  $R_s$  será deduzida sobre condições de circuito aberto, conforme apresentada na figura (3.7). Derivando a equação (3.14) em função de  $V$  e sobre condições de curto aberto, tem-se:

$$\frac{d}{dV}I = I_f - I_o \cdot \left( \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

$$\frac{dI}{dV} = -\frac{I_o}{Vt} \cdot \left( \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) \cdot \left(1 + R_s \cdot \frac{dI}{dV}\right) \right) - \frac{1}{R_p} - \frac{R_s}{R_p} \cdot \frac{dI}{dV}$$

$$\frac{dI}{dV} \left(1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{I_o \cdot R_s}{Vt} \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right)\right) = -\frac{I_o}{Vt} \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) - \frac{1}{R_p}$$

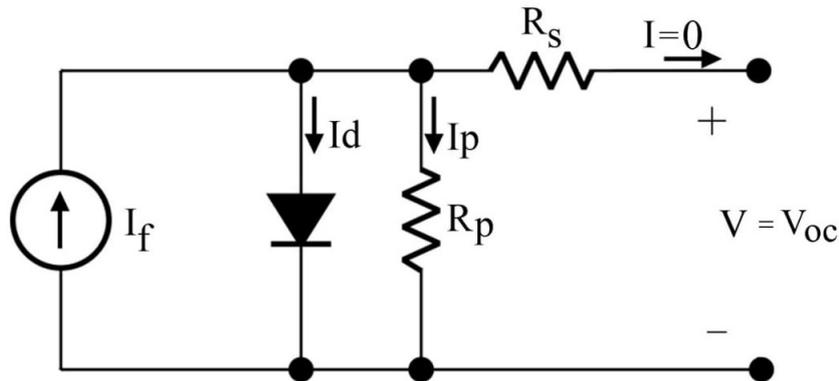


Figura 3.7: Circuito elétrico - em condições de curto aberto. Fonte: Adaptado de [22]

Fazendo uma análise sobre condições de circuito aberto, conforme figura (3.7),  $I = 0$  e  $V = V_{oc}$ , e como  $I_f = I_{sc}$ , então, tem-se:

$$I_o \cdot \exp\left(\frac{V + I \cdot R_s}{Vt}\right) = I_o \cdot \exp\left(\frac{Voc}{Vt}\right) = Isc$$

E como os valores da resistência Rp são bem maiores que a tensão Voc, por conseguinte:

$$\frac{Voc}{Rp} \approx 0$$

logo

$$\frac{dI}{dV} \left(1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s \cdot Isc}{Vt}\right) = - \left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right)$$

$$1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s \cdot Isc}{Vt} = - \frac{dV}{dI} \cdot \left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right)$$

$$1 + R_s \cdot \left(\frac{1}{R_p} + \frac{Isc}{Vt}\right) = - \frac{dV}{dI} \cdot \left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right)$$

$$R_s \cdot \left(\frac{1}{R_p} + \frac{Isc}{Vt}\right) = - \frac{dV}{dI} \cdot \left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right) - 1$$

Tem-se:

$$R_s = \frac{- \frac{dV}{dI} \cdot \left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right) - 1}{\left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right)}$$

$$R_s = - \frac{dV}{dI} - \frac{1}{\left(\frac{Isc}{Vt} + \frac{1}{R_p}\right)}$$

Como

$$\frac{1}{R_p} \ll \frac{Isc}{Vt}$$

$$R_s = - \frac{dV}{dI} - \frac{1}{\frac{Isc}{Vt}}$$

Ou seja,

$$R_s = - \frac{dV}{dI} - \frac{Vt}{Isc} \quad (3.16)$$

Sendo  $Isc = I_o \cdot \exp\left(\frac{Voc}{Vt}\right)$  e  $Vt = \frac{a \cdot k \cdot T}{q}$ .

A partir da equação (3.14), será desenvolvida uma equação para o cálculo da corrente de saturação reversa (Io). Logo, tem-se:

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V + I \cdot R_s}{Vt} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

em que:  $Vt = \frac{a \cdot k \cdot T}{q}$  e  $I_f = I_{sc}$

Em condições de circuito aberto:

$V = V_{oc}$  (tensão de circuito aberto)

$I = 0$

$$I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V + I \cdot R_s}{Vt} \right) - 1 \right) = I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V_{oc}}{Vt} \right) - 1 \right)$$

$$I_o = \frac{I_{sc} - \frac{V_{oc}}{R_p}}{\left( \exp \left( \frac{V_{oc}}{Vt} \right) - 1 \right)} \quad (3.17)$$

A corrente do Ponto de Máxima Potência, pode ser definida da seguinte maneira, a partir da equação (3.14):

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V + I \cdot R_s}{Vt} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p}$$

$I_f = I_{sc}$

$V = V_{mp}$

$I = I_{mp}$

$$I_{mp} = I_{sc} - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s}{Vt} \right) - 1 \right) - \frac{V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s}{R_p}$$

$$I_{mp} = I_{sc} - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{Vd}{Vt} \right) - 1 \right) - \frac{Vd}{R_p} \quad (3.18)$$

em que:

$$Vd = V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s \quad (3.19)$$

A ligação em série das células pode ser representada com circuitos elétricos, conforme ilustra a figura (3.8).

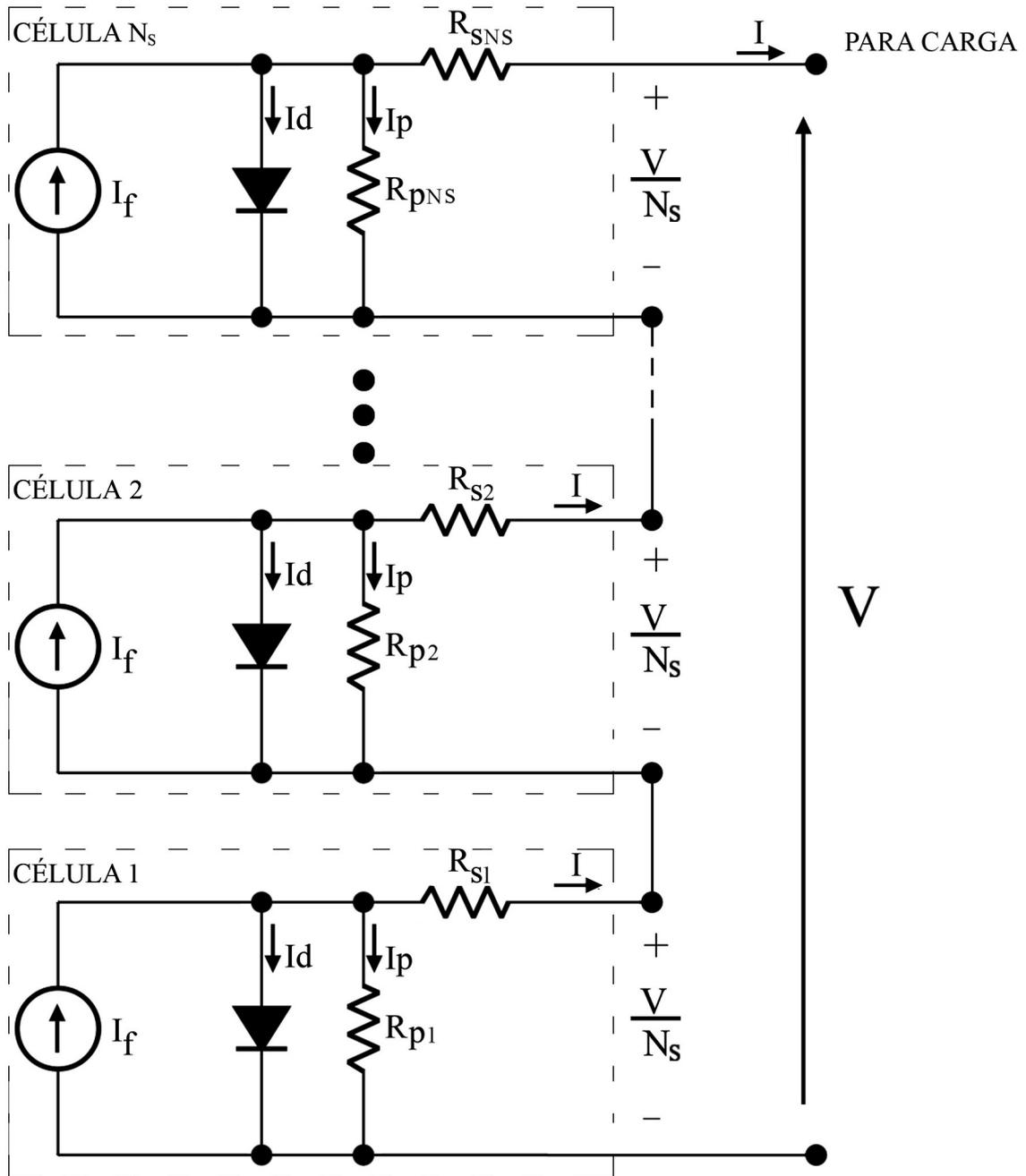


Figura 3.8: Circuito elétrico das células conectadas em série. Fonte: Adaptado de [16]

O terminal positivo de uma célula é conectado no terminal negativo de outra célula, assim por diante, até a última célula do conjunto  $N_s$ . Este tipo de ligação tem como finalidade o aumento de tensão do dispositivo. Neste tipo de associação o valor da corrente elétrica permanece inalterada.

A equação (3.20) calcula a corrente  $I$  para uma única célula que faça parte do conjunto.

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot \left( \frac{V}{N_s} + I \cdot R_{s1} \right)}{a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) - \frac{V}{N_s} + I \cdot R_{s1} \quad (3.20)$$

onde:  $R_{s1}$  é a resistência série de uma única célula e  $R_{p1}$  é a resistência paralela de uma única célula

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot (V + I \cdot N_s \cdot R_{s1})}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot N_s \cdot R_{s1}}{N_s \cdot R_{p1}}$$

$$R_s = N_s \cdot R_{s1}$$

$$R_p = N_s \cdot R_{p1}$$

$$V_t = N_s \cdot V_{t1}$$

Assumindo-se que todas as células que compõem o módulo são idênticas, a equação (3.21) é uma expressão do modelo equivalente de um módulo fotovoltaico completo para células fotovoltaicas conectadas em série.

$$I = I_f - I_o \cdot \left( \exp \left( \frac{q \cdot (V + I \cdot R_s)}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \right) - 1 \right) - \frac{V + I \cdot R_s}{R_p} \quad (3.21)$$

As equações (3.22), (3.23) e (3.24) são, respectivamente, para o cálculo da corrente de saturação reversa, da corrente máxima e da resistência série do módulo. Foram deduzidas a partir da equação (3.21), utilizando-se a mesma metodologia para dedução das equações (3.16), (3.17) e (3.18) que foram definidas para uma única célula. Note que a única diferença entre as equações é o aparecimento do termo  $N_s$  = número de células em série.

$$I_o = \frac{I_{sc} - \frac{V_{oc}}{R_p}}{\exp \left( \frac{q \cdot V_{oc}}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \right) - 1} \quad (3.22)$$

$$I_{mp} = I_{sc} - I_o \cdot \exp \left( \frac{q \cdot (V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s)}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \right) - \frac{V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s}{R_p} \quad (3.23)$$

$$R_s = \frac{-dV}{dI}_{oc} - \frac{1}{\frac{I_o \cdot q}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \cdot \exp \left( \frac{V_{oc} \cdot q}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \right)} \quad (3.24)$$

### Aplicação do Modelo de um diodo

Sabendo-se que um módulo fotovoltaico modelo TSM - 290 PC, da Empresa Trina Solar, composto por 72 (6x12) células de silício policristalino conectadas em série, com dados obtidos na condição padrão de teste (STC) que considera a irradiância =  $1000\text{W}/\text{m}^2$ , massa de ar (AM) = 1,5 e temperatura da célula  $25^\circ\text{C}$  (298 K), propicia uma potência máxima de 290W. As demais especificações estão citadas nas tabelas 3.2 e 3.3.

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS MÓDULO TSM - 290 PC	
Condições de Teste	STC
Potência Máxima de Pico	290
Voltagem Máxima de Potência $V_{mpp}$ (V)	36,1
Corrente Máxima de Potência $I_{mpp}$ (A)	8,04
Tensão de Circuito Aberto $V_{oc}$ (V)	44,9
Corrente de Curto Circuito $I_{sc}$ (A)	8,53

Tabela 3.2: Tabela especificações técnicas. Fonte: [18]

CARACTERÍSTICAS FÍSICAS - MÓDULO MÓDULO TSM - 290 PC	
Células Fotovoltaicas	72 células em série (6x12)
Tipo de Célula	Policristalina
Dimensão da Célula	156 x 156 mm (6 polegadas )
Dimensão do Módulo	1956 x 992 x 46 mm (77 x 39,05 x 1,81 polegadas)

Tabela 3.3: Tabela características físicas. Fonte: [18]

Desenvolver uma metodologia de cálculo para obter os valores da resistência paralela ( $R_p$ ), da resistência séria ( $R_s$ ), da corrente de saturação reversa ( $I_o$ ) e do fator de idealidade ( $a$ ) do módulo fotovoltaico. Construir as curvas características do referido módulo.

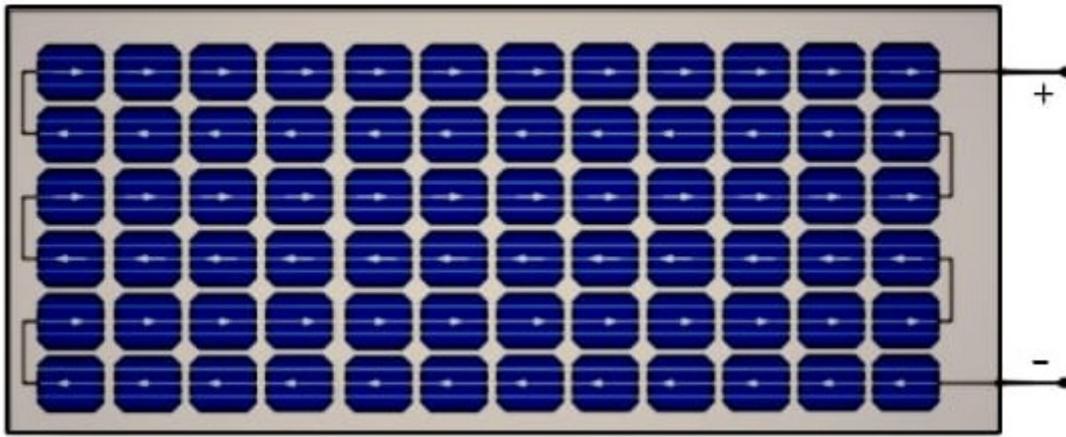


Figura 3.9: Módulo Fotovoltaico - células ligadas em série. Fonte: Adaptado de [17]

A aplicação será desenvolvida com o auxílio do Software Mathcad. Serão feitas simulações de cálculos referentes ao circuito elétrico adotado e plotagem de gráficos, inclusive, para comparar com as curvas obtidas pelo fabricante de modo experimental.

Na figura 3.10 são mostradas as curvas de teste do fabricante do módulo TSM - 290 PC, para os seguintes valores de irradiância:  $1000\text{W}/\text{m}^2$ ,  $800\text{W}/\text{m}^2$ ,  $600\text{W}/\text{m}^2$ ,  $400\text{W}/\text{m}^2$  e  $200\text{W}/\text{m}^2$ .

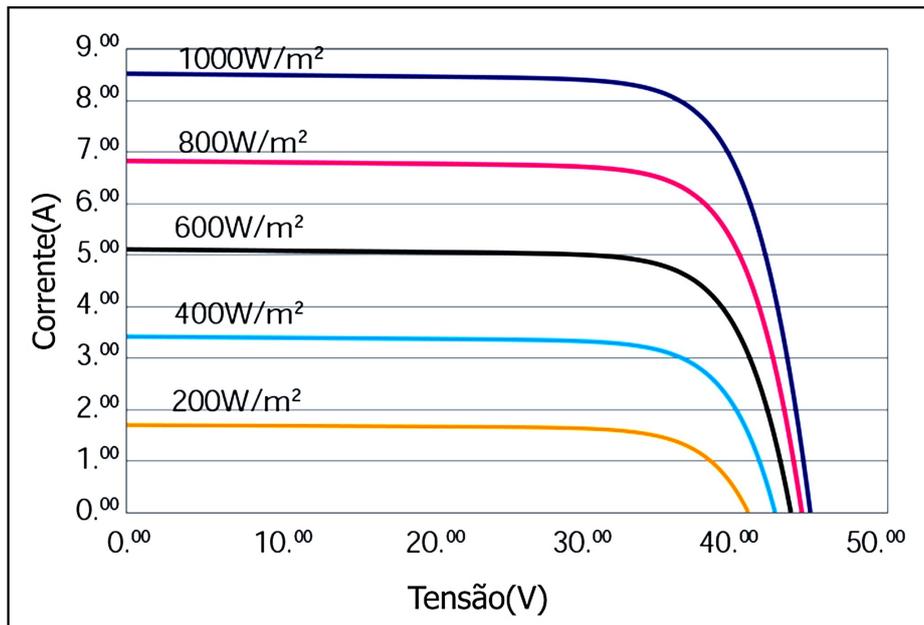


Figura 3.10: Curvas I-V - Módulo Fotovoltaico. Fonte: Adaptado de [18]

Para obter valores das inclinações das curvas foram necessárias técnicas de processamento de imagens ou recursos computacionais que consigam extrair esses dados. A forma realizada para obter as inclinações foi ampliar a curva I-V fornecida pela fabricante que possibilita-se a uma visão de um ângulo.

Os ângulos obtidos de declinação na curva foram de  $-0,55^\circ$  e de  $96,5^\circ$ , conforme figura 3.11.

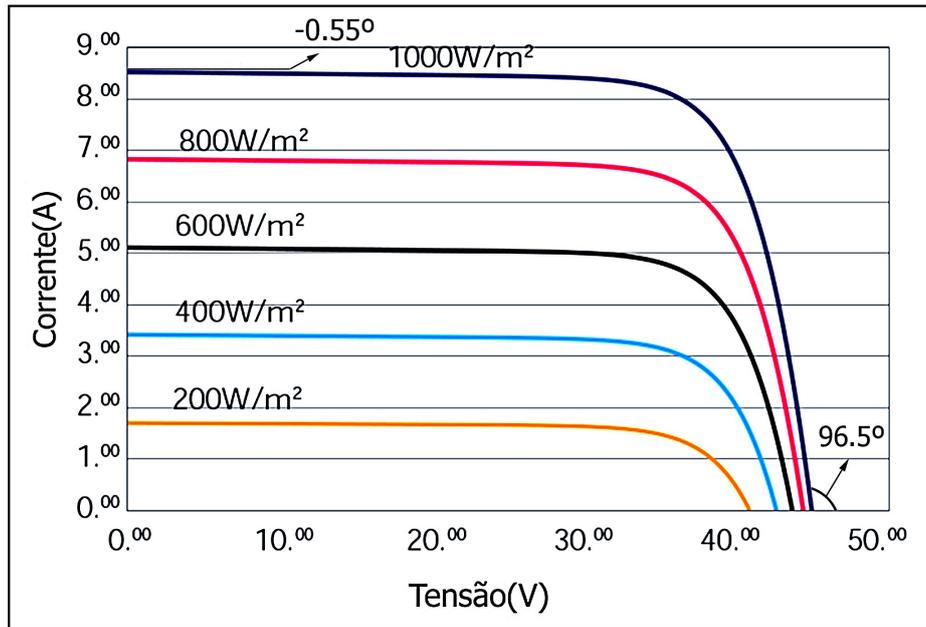


Figura 3.11: Ângulos estimados da Curva do Fabricante. Fonte: Adaptado de [18]

A resistência em paralelo do módulo é definida pela equação (3.15):

$$R_p = -\frac{dV}{dI_{SC}}$$

Para a correta interpretação dos valores das inclinações é necessário que os eixos horizontal e vertical estejam na mesma escala. Para isso, faz-se necessário, calcular o valor dessas variações em relação aos valores em cm do eixo das abscissas e do eixo das ordenadas. Os valores obtidos de adequação das escalas podem ser observados na figura (3.12)

Ângulo da curva I-V do fabricante:  $-0,55^\circ$

Escala da coordenada horizontal (eixo das abscissas - Tensão(V)): 10/14,351 V/cm

Escala da coordenada vertical (eixo das ordenadas - Corrente(A)): 1/5,5372 A/cm

$$\frac{dI}{dV_{SC}} = \operatorname{tg}(-0,55^\circ) \cdot \frac{1A}{5,5372cm} \cdot \frac{14,351cm}{10V} = -2,488 \cdot 10^{-3} \frac{A}{V}$$

$$R_p = -\frac{dV}{dI_{SC}} = \frac{1}{-2,488 \cdot 10^{-3} V} \frac{A}{V} = 401,934\Omega \approx 402\Omega$$

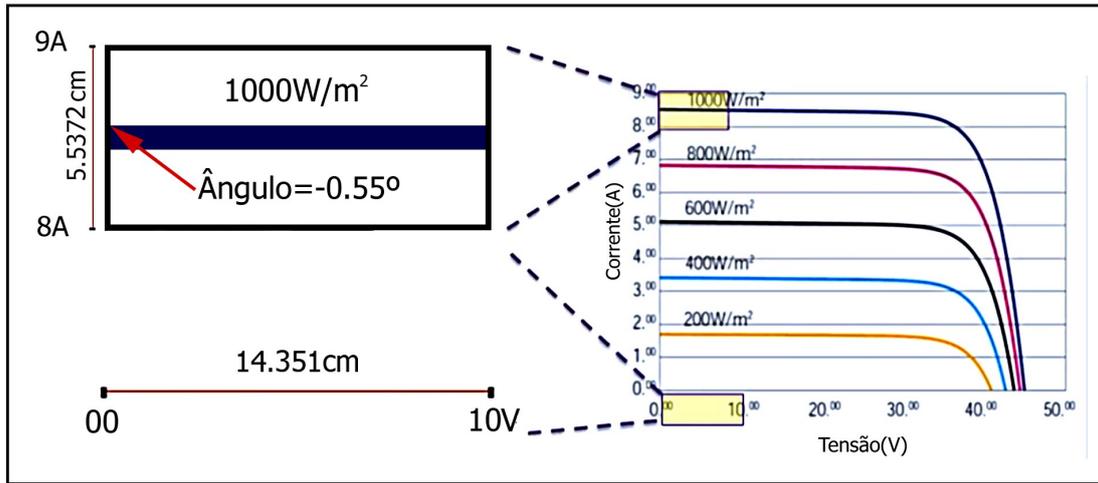


Figura 3.12: Cálculo da variação no ponto de curto-circuito. Fonte: Adaptado de [18]

Um dos itens importantes para o cálculo da resistência  $R_s$  é encontrar o valor de  $\frac{dI}{dV_{OC}}$ . Os valores para seu cálculo podem ser observados na figura (3.13).

Ângulo da curva I-V do fabricante:  $96,5^\circ$  (em relação ao eixo das abscissas)

Escala da coordenada horizontal (eixo das abscissas - Tensão(V)):  $10/16,3195$  V/cm

Escala da coordenada vertical (eixo das ordenadas - Corrente(A)):  $1/6,985$  A/cm

Traça-se uma perpendicular em relação ao eixo das abscissas para verificar o valor da inclinação da curva no ponto de circuito aberto.

$$\frac{dI}{dV_{OC}} = -\text{tg}(96,5^\circ - 90^\circ) \cdot \frac{6,985}{1} \cdot \frac{10V}{16,3195} = -0,48766 \cdot 10^{-3} \frac{V}{A}$$

$$R_s = -\frac{dV}{dI} - \frac{Vt}{Isc}$$

Para o cálculo da resistência em série será utilizada a equação (3.24)

$$R_s = \frac{-dV}{dI}_{OC} - \frac{1}{\frac{I_o \cdot q}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \cdot \exp\left(\frac{V_{oc} \cdot q}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T}\right)}$$

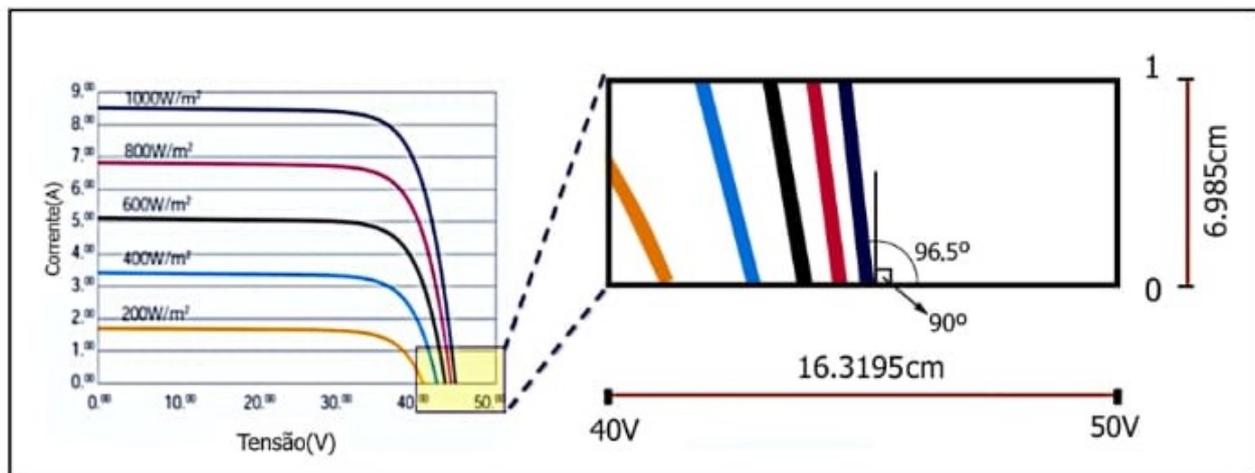


Figura 3.13: cálculo da variação no ponto de circuito aberto. Fonte: Adaptado de [18]

Para calcular os valores da corrente de saturação reversa ( $I_0$ ), da resistência série ( $R_s$ ) e do fator de idealidade ( $a$ ), serão utilizadas as equações não-lineares (3.22), (3.23) e (3.24). Para isso, serão utilizados os dados de entrada descritos conforme a Tabela (3.4).

DADOS DE ENTRADA - SIMULAÇÃO TSM - 290 PC	
Voltagem Máxima de Potência ( $V_{mp}$ )	36,1V
Corrente Máxima de Potência ( $I_{mp}$ )	8,04A
Tensão de Circuito Aberto ( $V_{oc}$ )	44,9V
Corrente de Curto Circuito ( $I_{sc}$ )	8,53A
Número de Células Fotovoltaicas em série ( $N_s$ )	72 (6x12)
Constante da carga eletrônica ( $q$ )	$1,6 \cdot 10^{-19}$ J/V
Constante de Boltzmann ( $k$ )	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K
Temperatura em Kelvin ( $T$ )	298K
Valor da variação da curva em circuito aberto ( $dV_{dLOC}$ )	-0,48766
Valor da Resistência em paralelo ( $R_p$ )	401,934 $\Omega$

Tabela 3.4: Tabela dados de entrada

Para inicializar os cálculos, atribui-se valores iniciais para as incógnitas  $R_s$  e fator de idealidade ( $a$ ). O valor de  $I_0$  (considerado também um valor inicial atribuído) é obtido através da equação (3.22), da tabela (3.4) e pelos valores atribuídos de  $R_s$  e de ( $a$ ).

VALORES DE ATRIBUIÇÃO	
Valor de suposição da Resistência Série (Rs)	0,3Ω
Valor de suposição do fator de idealidade (a)	1,2
$I_o = \frac{I_{sc} - \frac{V_{oc}}{R_p}}{\exp\left(\frac{q \cdot V_{oc}}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T}\right) - 1}$	$I_o = 1,394 \cdot 10^{-8} \text{A}$

Tabela 3.5: Tabela valores atribuídos - iniciais

Como um conjunto de equações não lineares pode ter várias soluções, os resultados obtidos dependem dos valores atribuídos inicialmente para as incógnitas. Os valores iniciais (valores de atribuição) das variáveis são essenciais para se obter os valores da resistência série Rs, da corrente de saturação reversa Io e do fator de idealidade. Os valores de atribuição são exigidos para a execução da função find (Mathcad) para resolver o conjunto das três equações não lineares (3.22), (3.23) e (3.24).

$$I_o = \frac{I_{sc} - \frac{V_{oc}}{R_p}}{\exp\left(\frac{q \cdot V_{oc}}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T}\right) - 1}$$

$$I_{mp} = I_{sc} - I_o \cdot \exp\left(\frac{q \cdot (V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s)}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T}\right) - \frac{V_{mp} + I_{mp} \cdot R_s}{R_p}$$

$$R_s = -dV_{dI_{OC}} - \frac{1}{\frac{I_o \cdot q}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T} \cdot \exp\left(\frac{V_{oc} \cdot q}{N_s \cdot a \cdot k \cdot T}\right)}$$

Solução = find(Io, a, Rs)

Os valores da solução das equações pelo comando find (Mathcad) podem ser observados na Tabela 3.6:

DADOS DE SAÍDA - SIMULAÇÃO TSM - 290 PC	
Corrente de saturação (Io)	$3,35176 \cdot 10^{-8} \text{A}$
Fator de idealidade (a)	1,25443
Resistência série (Rs)	0,2119Ω

Tabela 3.6: Tabela dados de saída

### 3.2.1 Construção das Curvas Características

A construção dos gráficos foi realizada no programa Mathcad. A simulação foi feita conforme os dados do catálogo do módulo fotovoltaico e dos resultados do método usado na solução das equações, conforme tabela 3.7. Os valores serão inseridos nas equações automaticamente pelo programa a fim de gerar as curvas.

DADOS PARA PLOTAGEM DOS GRÁFICOS	
Corrente de curto-circuito ( $I_{sc}$ )	8,53A
Corrente de saturação ( $I_o$ )	$3,35176 \cdot 10^{-8}A$
Fator de idealidade (a)	1,25443
Tensão de Circuito Aberto ( $V_{oc}$ )	44,9V
carga eletrônica (q)	$1,6 \cdot 10^{-19} J/V$
constante de Boltzmann (k)	$1,38 \cdot 10^{-23} J/K$
Temperatura (T)	298 K
Número de células fotovoltaicas em série ( $N_s$ )	72
Resistência em paralelo ( $R_p$ )	$401,934\Omega$
Resistência série ( $R_s$ )	$0,2119\Omega$

Tabela 3.7: Dados para plotagem dos gráficos

- $V_t = \frac{N_s \cdot a \cdot k \cdot T}{q}$

Equação da tensão térmica, sendo o valor de  $V_t = 2,321$

- $V_d = 0,0001 \cdot V_{oc}$

Expressão que executará uma varredura na tensão do diodo ( $V_d$ ), com valores de 0 até  $V_{oc} = 44,9V$ .

- $I(V_d) = I_{sc} - I_o \cdot \left( \exp\left(\frac{V_d}{V_t}\right) - 1 \right) - \frac{V_d}{R_p}$

Equação da corrente elétrica gerada em função da tensão do diodo ( $V_d$ ).

- $V(V_d) = V_d - I(V_d) \cdot R_s$

Equação da tensão gerada em função da tensão do diodo ( $V_d$ ) menos a queda de tensão através da resistência em série ( $R_s$ ).

- $P(Vd) = V(Vd) \cdot I(Vd)$

Equação da potência gerada pela célula.

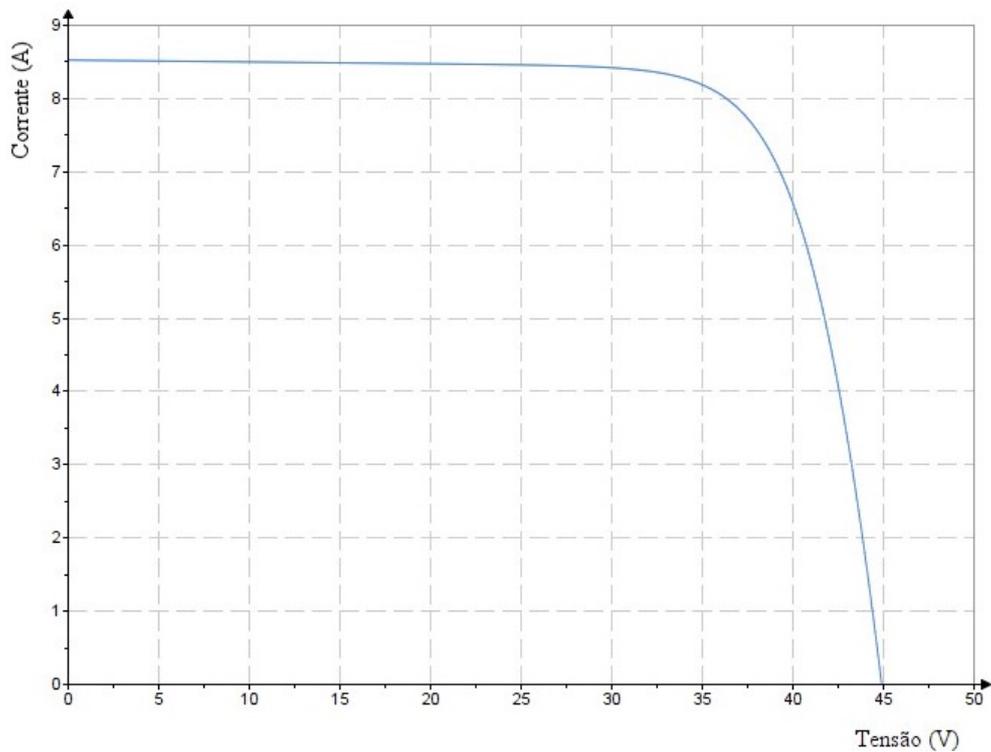


Figura 3.14: Curva Tensão X Corrente

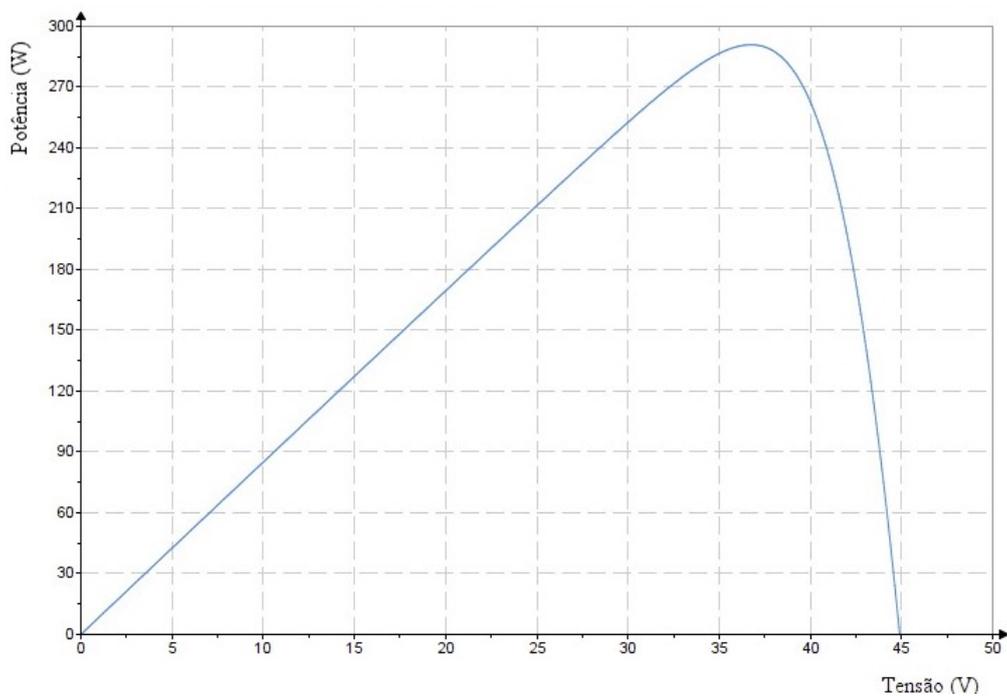


Figura 3.15: Curva Tensão X Potência

Foi realizada uma análise dos valores das inclinações  $\frac{dV}{dI_{OC}}$  e de  $\frac{dI}{dV_{SC}}$  nos pontos de circuito aberto e de curto-circuito, respectivamente. Os cálculos dos valores destas variações são descritos a seguir:

$$dV_{dI_{OC}}_{análise} = \frac{(V(V_{oc}) - V(V_{oc} - 0.0001))}{I(V_{oc}) - I(V_{oc} - 0,0001)}$$

$$dV_{dI_{OC}}_{análise} = -0,487$$

$$dI_{dV_{SC}}_{análise} = \frac{(I(0,001) - I(0))}{V(0,001) - V(0)}$$

$$dI_{dV_{SC}}_{análise} = -2,487 \cdot 10^{-3}$$

Foram construídas curvas referentes a diferentes valores de irradiância. Para isso, o valor da corrente de curto-circuito deve ser ajustado de acordo com cada nível de irradiância.

- $G = 1000, 800..200$

**Expressão usada para determinar os diferentes valores para irradiância que foram utilizados (1000W/m<sup>2</sup>, 800W/m<sup>2</sup>, 600W/m<sup>2</sup>, 400W/m<sup>2</sup> e 200W/m<sup>2</sup>).**

- $I_{sc}(G) = I_{sc} \cdot \frac{G}{1000}$

**Expressão usada para calcular as correntes de curto-circuito para cada nível de irradiância (1000W/m<sup>2</sup>, 800W/m<sup>2</sup>, 600W/m<sup>2</sup>, 400W/m<sup>2</sup> e 200W/m<sup>2</sup>). A corrente de curto-circuito é diretamente proporcional a irradiância.**

- $V_d = 0,0.001..V_{oc}$

**Expressão que executará uma varredura na tensão do diodo (V<sub>d</sub>), de 0 até V<sub>oc</sub> = 44,9V.**

- $I(V_d, G) = I_{sc}(G) - I_o \cdot \left( \exp\left(\frac{V_d}{V_t}\right) - 1 \right) - \frac{V_d}{R_p}$

**Equação da corrente elétrica gerada para cada nível de irradiância em função da tensão do diodo (V<sub>d</sub>).**

- $V(V_d, G) = V_d - I(V_d, G) \cdot R_s$

**Equação da tensão gerada em função da tensão do diodo (V<sub>d</sub>) menos a queda de tensão através da resistência em série (R<sub>s</sub>), para cada nível de irradiância.**

- $P(Vd,G) = V(Vd,G) \cdot I(Vd,G)$

Equação da potência gerada pela célula, para cada nível de irradiância.

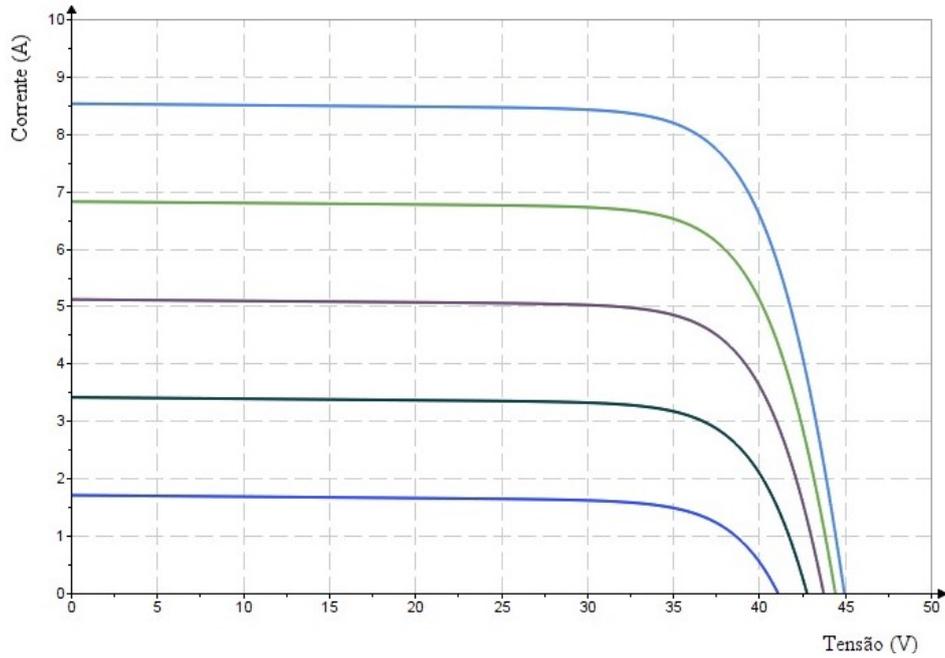


Figura 3.16: Curvas corrente versus tensão - irradiâncias

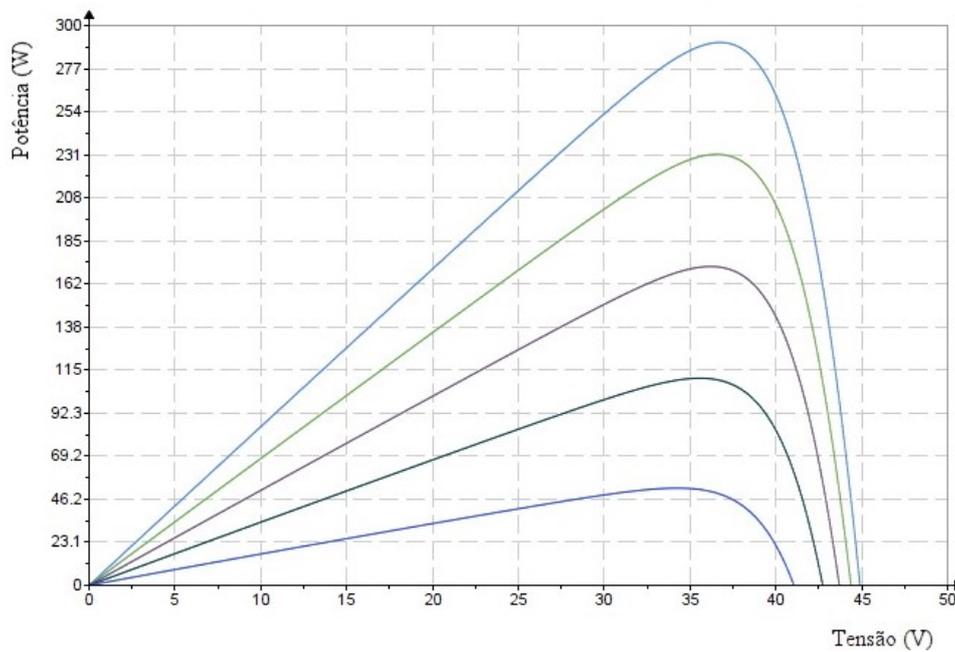


Figura 3.17: Curvas potência versus tensão - irradiâncias

Com a dedução das equações e pelo uso de um software de cálculos de engenharia foi possível a determinação das características elétricas de uma célula fotovoltaica e de um módulo fotovol-

taico. Os conhecimentos matemáticos foram uma importante ferramenta para o desenvolvimento dos modelos apresentados, principalmente o uso dos conceitos de derivadas. Ressalta-se que os cálculos que foram realizados no modelo de um diodo foram baseados na condição padrão de teste (STC), que tem os seguintes valores: irradiância =  $1000\text{W/m}^2$ , massa de ar (AM) = 1,5 e temperatura da célula  $25^\circ\text{C}$  (298 K). Para diferentes níveis de irradiância, deve-se ajustar os valores da corrente de curto-circuito, pois esta é diretamente proporcional à irradiância. Nota-se que para a resolução dos problemas desenvolvidos foram necessários o uso de recursos computacionais, que é de grande utilidade para solução de modelos matemáticos.

# Conclusão

O trabalho teve como finalidade apresentar uma proposta interdisciplinar, interagindo diversas áreas do conhecimento. Apresentou-se dois modelos matemáticos, o modelo ideal e o modelo de um diodo, baseados em circuitos elétricos, os quais podem ser usados para representar a célula fotovoltaica e, também, o módulo fotovoltaico. Os fundamentos matemáticos mostraram-se como instrumento importante na implementação dos modelos, com foco principal o uso dos conceitos de derivada.

Com a finalidade de facilitar a leitura do trabalho, procurou-se abordar no capítulo 2, uma fundamentação teórica que versa sobre energia solar, com conceitos e fórmulas, e outras áreas do conhecimento, com o intuito de aproximar os leitores acerca da temática.

Os modelos matemáticos apresentados no capítulo 3, permitiram a determinação de informações acerca do comportamento elétrico de uma célula fotovoltaica ou de seu conjunto (módulo fotovoltaico). Os resultados foram obtidos através do desenvolvimento de equações matemáticas, através da aplicação de derivadas, e do uso de recurso computacional, os quais possibilitaram a realização de cálculos importantes no desenvolvimento dos modelos e de construções dos gráficos.

Espera-se com o trabalho, contribuir para a compreensão da importância da matemática no cotidiano e motivar o desejo de aprendê-la, fornecendo uma colaboração de caráter interdisciplinar, desenvolvida a partir de um tema atual e inspirar a introdução de outros modelos matemáticos a fim de ajudar no ensino da matemática.

Para futuros trabalhos, procurar aprofundar-se sobre o tema energia fotovoltaica, para construção de novos modelos matemáticos com uso de recursos computacionais, com o objetivo de desenvolver uma ferramenta de aplicabilidade na questão do aproveitamento do recurso solar e de outros temas ligados a esta tecnologia.

# Referências Bibliográficas

- [1] BIEMBENGUR, Maria Sallet; HEIN, Nelson. Modelagem matemática no ensino. 5. ed. São Paulo, SP: Editora Contexto. 2009.
- [2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Ensino Médio e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC, 2000.
- [3] ENEM 2017 - Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 20 de març. 2018.
- [4] KALOGIROU, Soteris A. Engenharia de Energia Solar: Processos e Sistemas. 2ª Edição. Rio de Janeiro. Elsevier. 2016.
- [5] PINHO, João Tavares; GALDINO, Marco Antonio. Grupo de Trabalho de Energia Solar - GTES. Manual de Engenharia para Sistemas Fotovoltaicos. Edição Revisada e Atualizada. Rio de Janeiro. CEPEL - CRESESB. 2014.
- [6] NETO, Alberto H...[et al.]; organização Moreira, José R. S. Energias renováveis, geração distribuída e eficiência energética. 1 ed. [Reimpr.]. Rio de Janeiro. LTC. 2019.
- [7] ANEEL. Atlas de Energia Elétrica do Brasil. 2ª Edição. Disponível em: <https://www.aneel.gov.br/>. Acesso em 31 de fev. de 2019.
- [8] VILLALVA, Marcelo Gradella. Energia solar fotovoltaica conceitos e aplicações. 2ª Edição. São Paulo. Erica. 2015.
- [9] 6/12bis Projeto conceitual de uma usina termosolar / Prof. Paulo Seleglim. SELEGHIM, Paulo. Universidade de São Paulo - USP. Youtube. 6 de mai. 2019. 2h11min19seg. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=S3LrgGu2V5w>. Acesso em: 23 de ago. 2018.

- [10] MARQUES, Angelo Eduardo Battistini; CRUZ, Eduardo Cesar Alves; CHOUERI JR, Salomão. Dispositivos semicondutores: Diodos e Transistores. 13. ed. rev. São Paulo. Érica. 2012.
- [11] Microeletrônica - Aula 01 - Física dos semicondutores. FONSECA, Fernando Josepetti. Univesp - Universidade Virtual do Estado de São Paulo. Youtube. 18 de mai. 2017. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=1hGdS1us\\_9k](https://www.youtube.com/watch?v=1hGdS1us_9k)>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [12] GARCIA, Gilvan Antônio; ALMEIDA, José Luiz Antunes. Sistemas eletroeletrônicos: dispositivos e aplicações. 1. Edição. São Paulo - SP. Érica. 2014.
- [13] PORTAL SOLAR S.A. Passo a Passo da Fabricação do Painel Solar. Ilustração. Disponível em: <<https://www.portalsolar.com.br/passa-a-passo-da-fabricacao-do-painel-solar.html>>. Acesso em: 2 de mai. 2019.
- [14] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de física, volume 3: eletromagnetismo. Tradução Ronaldo Sérgio de Biasi. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- [15] PV model parameter extraction part2\_Rsh\_Rs. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de mar. 2013. 13min07seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=a4MWARveJFw>>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [16] PV model parameter extraction part3\_Rs\_a\_Io. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 8min33seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=7YVEoFN7M8c>>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [17] PV model parameter extraction part1. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 12min17seg. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=Ilp7\\_3TLvw4](https://www.youtube.com/watch?v=Ilp7_3TLvw4)>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [18] PV\_parameter\_extraction\_example\_TSM290. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 18min11seg. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=wNg4e6\\_QASw](https://www.youtube.com/watch?v=wNg4e6_QASw)>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [19] PV series connection. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 19min26seg. Disponível em: <[https://www.youtube.com/watch?v=\\_\\_ZTwFn1DKI](https://www.youtube.com/watch?v=__ZTwFn1DKI)>. Acesso em: 23 de ago. 2018.

- [20] PV\_parameter\_extraction\_validation\_part1. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 10min05seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=IcBBncsedZk>>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [21] Circuit simulation of PV cell part2. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 16min06seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=zklBcYdynZ0>>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [22] PV I V characteristics part1 Isc Voc. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 15min27seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=xD5PG-WOUcU>>. Acesso em: 23 de ago. 2018.
- [23] PV cell model part2. AYYANAR, Raja. Arizona State University. PsercAcademy.asu.edu. Youtube. 31 de jul. 2014. 14min49seg. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=RRRebGefCFps>>. Acesso em: 23 de ago. 2018.