Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

# Cálculo: um Estudo de suas Aplicações às Áreas Financeira e Econômica†

por

**Luiz Eduardo Wanderley Buarque de Barros**

sob orientação do

**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto**

sob co-orientação do

**Prof. Me. Gilmar Otávio Correia**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2013
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# Cálculo:um Estudo de suas Aplicações às Áreas Financeira e Econômica

por

**Luiz Eduardo Wanderley Buarque de Barros**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Cálculo Diferencial e Integral, Matemática Financeira, Matemática Aplicada à Economia.

Aprovada por:

**Prof. Dr. Carlos Bocker Neto** - UFPB (Orientador)

**Prof. Me. Gilmar Otávio Correia** - UFPB (Coorientador)

**Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza** - UFPB

**Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos** - UNIPÊ

Agosto/2013
João Pessoa - PB

# Agradecimentos

Construir uma dissertação não foi uma tarefa simples, fácil e individual, nem tão pouco feita ao meu exclusivo querer. É resultado de uma ação compartilhada e permitida. A concretização deste trabalho, em primeiro plano, se dá pela graça e vontade de Deus, o qual agradeço. E, é permeada pela participação de muitas pessoas colocadas por Ele, em diferentes momentos de minha vida, sem as quais jamais seria concretizada. Aqui destaco, meus especiais agradecimentos:

- aos meus familiares, em especial, minha esposa, filhos e mãe, por estarem sempre ao meu lado e compreender minha presente ausência durante estes dois anos e meio, consequência da necessidade de muita dedicação e esforço para atingir este objetivo;

- ao prof. Dr. Carlos Bocker Neto e prof. Me. Gilmar Otávio Correia pelos conselhos, orientações e privilégio em ser seu orientando e coorientando, respectivamente;

- a coordenação e professores do mestrado, pela dedicação e ensinamentos durante estes anos;

- a CAPES e a UFPB, pelos apoios financeiro, acadêmico e estrutural;

- aos meus colegas de Curso, em especial, aos amigos Cleiton Padilha, Eduardo Jorge e Gleidson Dumont, pela amizade e companheirismo durante esta jornada;

- aos amigos, por me apoiarem nos momentos que precisei; aos muitos colegas de trabalho, por servirem de exemplo para mim; e, aos meus alunos, que é por vocês nosso esforço de constante melhoria profissional.

**A todos, o meu muito obrigado!**

**O Autor**

# Dedicatória

*A Deus e ao maior presente que Ele me deu, minha família: Cinesia Buarque (esposa), Lucas, Maria Clara e João Paulo (filhos), Luizinda Buarque (mãe) e Paulo Barros (pai, in memoriam).*

# Resumo

Este trabalho de pesquisa trata da aplicação do cálculo diferencial e integral às teorias envolvidas na gestão de negócios, em especial nas áreas financeira e econômica. Utilizou-se, como ferramenta de apoio a pesquisa bibliográfica, diversas obras que versam sobre o Cálculo, Matemática Aplicada a Economia e Matemática Financeira. Para isso, foi realizado um desdobramento do cálculo e de teorias das áreas financeira e economica, no intuito de verificar suas ligações, além de propor sugestões de seu uso em sala de aula do ensino médio.

**Palavras-chave:** Cálculo Diferencial e Integral, Matemática Aplicada a Economia e Matemática Financeira.

# Abstract

This research work deals with the application of differential and integral calculus theories involved in the management businesses, particularly in the financial and economic areas. Several works were used as bibliographical research sources, including those focusing on Calculus, Mathematics Applied to Economics and Financial Mathematics. A detailed study of calculus and financial and economic theory was carried out, so as to study their relationships and then make suggestions as to their use in classroom teaching medium.

**Keywords:** Differential and Integral Calculus, Mathematics Applied to Economics and Financial Mathematics.

# Sumário

# Introdução

Na vida nos deparamos com inúmeras situações que exigem de nós decisões racionais e não racionais, de modo similar ocorre no mundo dos negócios. Porém, neste as pessoas buscam pelas informações que as conduza a soluções ou pensamentos inovadores. É fato, que atualmente essas decisões no mundo dos negócios têm sido pautadas com mais frequência nas orientações racionais da Matemática, em especial na Matemática das Finanças, que por sua vez, utiliza-se em diversas de suas teorias o suporte que o Cálculo oferta. Reforça Goldestein (vide [10] p. 153), quando afirma que:

> (...) em fase de uma imensa quantidade de dados estatísticos, dependendo de centenas ou mesmo de milhares de diferentes variáveis, analistas de negócios tem cada vez mais buscado métodos matemáticos para descrever o que está acontecendo, para prever os efeitos de várias políticas alternativas e decidir sobre estratégias razoáveis entre um enorme número de possibilidades. Entre os métodos empregados está o cálculo aplicado aos negócios.

Assegura, ainda, Feijo (vide [7] p. xii), que os modelos matemáticos utilizam do cálculo diferencial e integral para expressar relações financeiras. É, onde, o papel do emprego do cálculo nestes modelos tem por finalidade estruturar o processo decisório auxiliando pessoas a eliminar o improviso e ampliar o grau da certeza na opinião de escolhas.

Neste contexto, cresce a compreensão do uso instrumental do cálculo justificado não só pelo seu suporte às diversas atividades da gestão de negócios (produção, venda, financiamento, empréstimos e créditos), mas aliado às inovações tecnológicas. Nas quais, os métodos matemáticos aplicativos tornaram-se ferramenta de trabalho indispensável para diversos profissionais. Ou mesmo, passam a ser usados de forma automática no cotidiano de pessoas, que em muitas vezes não dominam as técnicas que lhe dão suporte as tomadas de decisões.

A intenção deste trabalho de investigação é levar a professores e alunos uma maior compreensão e aplicação dos instrumentos do Cálculo aos negócios, especialmente nas áreas financeira e econômica. Mediante o revelar da matemática que está subsidiando os conceitos e definições financeiro-econômicas que se busca entender suas ligações, bem como sua sedimentação através de exemplos e exercícios pertinentes e elucidativos. Para tanto, nossa pesquisa ficou organizada em cinco capítulos. No início do texto, capítulo 1 (das Preliminares), discute-se os conceitos que dão suporte a teoria financeira, incluindo as noções de limites, continuidade, derivada e integral de uma função real, destacando aspectos que consideramos relevante a este estudo.

No capítulo 2, intitulado *A Teoria do Juro*, apresentamos um breve levantamento dos conceitos básicos da Matemática Financeira, realizando um estudo comparativo entre a abordagem de capitalização descontínua ou discreta (onde o período de capitalização é espaçado) com a abordagem de capitalização contínua, esta última que é utilizada em uma série de modelos econômicos, particularmente os do mercado financeiro. Que nos revela resultados mais expressivos e aguça melhor o conceito de capitalização.

*A Teoria do Cálculo Aplicada as Séries de Capitais* é o título do capítulo 3. Neste são tratadas as séries finitas e infinitas de capitais uniformes que servirão de base conceitual as chamadas séries de capitais variáveis. Em que são analisados dois processos de avaliação de alternativas de investimento, o Valor Presente Líquido e a Taxa Interna de Retorno, neste último utilizamos para sua determinação o método de Newton-Raphson e aproveitamos para realizar uma crítica ao uso deste algoritmo por gestores financeiros. Encerrando com aplicabilidade das integrais nas séries contínuas.

Já o capítulo 4, chamado *A Teoria da Análise Marginal*, visa à aplicação das derivadas às funções econômicas: custo marginal, receita marginal, lucro marginal, elasticidade do preço/renda associados à demanda/receita e elasticidade do custo.

*A Teoria das Integrais em Aplicações Econômicas* denota o capítulo 5. No qual foi reservado à análise de questões que utilizam os conceitos de integral indefinida e definida, tais como: excedentes de consumo e da produção, o uso de antiderivação aplicada às funções econômicas marginais, valor médio de função e aplicação para obtenção de valores futuro e presente de um fluxo de renda em capitalização contínua.

Ao final, no Apêndice A, são apresentados exercícios organizados de acordo com a sequência desenvolvida do texto e intitulado Aplicações ao Ensino Médio. Em geral, são propostas interessantes de aplicações, podendo apresentar problemas de níveis mais difíceis, com foco destinado ao ensino médio, que julgamos pertinentes ao enriquecimento deste trabalho.

# Capítulo 1

# Preliminares

*"Tomando a matemática desde o início do mundo até o tempo de Newton, o que ele fez é de longe a melhor metade".*
Gottfried Wilhelm Leibniz

i

Este capítulo trata de uma introdução ao cálculo diferencial e integral, onde abordaremos conceitos envolvendo limite, derivada e integral de função de uma variável real. São os primeiros passos na direção de suas aplicações a área de negócios (Finanças e Economia), que serão realizadas posteriormente nos demais capítulos.

Vale ressaltar, que consideraremos as funções aqui tratadas definidas em um intervalo não degenerado de números reais, ou em uma união finita de intervalos não degenerados. Entende-se por intervalo não degenerado de números reais, aquele que não seja apenas um ponto, possuí tantos pontos quantias são as partes dos números naturais.

## 1.1 Limite de uma Função

**Definição 1.1** *Seja $a \in I$ ($I$ um intervalo aberto) e $f$ uma função definida para $x \in I - \{x_0\}$. Dizemos que o **limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $x_0$ será** $L$ e denotamos por*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

*se a afirmação a seguir for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$, tal que, se*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

**Teorema 1.1 (da Unicidade do Limite)** *Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.*

**Demonstração:** Provemos por redução ao absurdo. Suponha que $L_1 \neq L_2$, então $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$. Pela definição de limite existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon. \boxed{\text{I}}$$

e

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon. \boxed{\text{II}}$$

Tomando-se $\delta = \ min \ \{\delta_1, \delta_2\}$, temos que se $0 < |x - x_0| < \delta$ então, por $\boxed{\text{I}}$ e $\boxed{\text{II}}$,

$$|f(x) - L_1| < \epsilon \text{ e } |f(x) - L_2| < \epsilon.$$

Assim, usando a desigualdade triangular e a definição de $\epsilon$, temos:

$$2\epsilon = |L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$$

o que é um absurdo.

■

**Teorema 1.2 (Propriedades do Limite de uma Função)** *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, existirem, então:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = \alpha$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} [\alpha \cdot f(x)] = \alpha \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
4. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right] \left[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right]$.
5. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n$, *para* $n \in \mathbb{N}$.
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, *se* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

**Demonstração:** Seja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, então:

1. Teremos que provar:

   $$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \ tal \ que \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) - \alpha| < \epsilon.$$

   Como $\alpha \in \mathbb{R}$ e a função $f$ é definida por $f(x) = \alpha$, a afirmação acima é sempre verdadeira, pois

   $$|f(x) - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 < \epsilon.$$

2. Demonstraremos inicialmente para $\alpha = 0$. Se:

$$\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0 \; e \; \alpha \cdot L = 0 \cdot L = 0.$$

Pela propriedade 1, demonstrada, temos:

$$\lim_{x \to x_0} [\alpha \cdot f(x)] = \lim_{x \to x_0} 0 = 0 = \alpha \cdot L.$$

Agora, para $\alpha \neq 0$, devemos provar que:

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \; tal \; que \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha \cdot f(x) - \alpha \cdot L| < \epsilon.$$

Considerando $\frac{\epsilon}{|\alpha|}$, tem-se:

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \; tal \; que \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|\alpha|},$$

então

$$\exists \delta > 0 \; tal \; que \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha| \cdot |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|\alpha|} \cdot |\alpha| = \epsilon,$$

isto é,

$$\exists \delta > 0 \; tal \; que \; 0 < |x - x_0|, \delta \Rightarrow |\alpha \cdot f(x) - \alpha \cdot L| < \epsilon.$$

3. Provemos que $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$, o caso para sinal "menos" segue análogo. Para tanto, devemos provar que:

$$\forall \epsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \; tal \; que \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon.$$

Então $\forall \epsilon > 0$, considerando $\frac{\epsilon}{2}$, tem-se:

$$\exists \delta_1 > 0 \; ; \; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 > 0 \; ; \; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considerando $\delta = \; min \; \{\delta_1, \delta_2\}$ e, portanto, $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$, vem:

$$\delta = \; min \; \{\delta_1, \delta_2\} \; ; \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

E, pela desigualdade triangular, temos:

$$|f(x) - L| + |g(x) - M| \leq |(f(x) + g(x)) - (L + M)|.$$

Então,

$$\delta = \; min \; \{\delta_1, \delta_2\} \; ; \; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \epsilon.$$

4. Pela definição 1.1 e utilizando a desigualdade triangular, vem:

$$\begin{aligned}|f(x)\cdot g(x)-L\cdot M| &= |f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot M+f(x)\cdot M-L\cdot M|\\ &\leq |f(x)|\cdot|g(x)-M|+|M|\cdot|f(x)-L|.\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, dado $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ tal que $|f(x)-L|<\epsilon$ se $0<|x-x_0|<\delta_1$, assim $|f(x)|<|L|+1$ se $0<|x-x_0|<\delta_1$.

Por outro lado, $\exists\delta_2>0$ tal que $|f(x)-L|<\frac{\epsilon}{2(|M|+1)}$ se $0<|x-x_0|<\delta_2$.

Analogamente, $\exists\delta_3>0$ tal que $|g(x)-M|<\frac{\epsilon}{2(|L|+1)}$.

Sendo $\delta\leq\delta_1$, $\delta\leq\delta_2$ e $\delta\leq\delta_3$, então:

$$\begin{aligned}|f(x)\cdot g(x)-LM| &\leq |f(x)|\cdot|g(x)-M|+|M|\cdot|f(x)-L|\\ &\leq (|L|+1)K_1+(|M|+1)K_2<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,\end{aligned}$$

se $0<|x-x_0|<\delta$, onde $K_1=\dfrac{\epsilon}{2(|L|+1)}$ e $K_2=\dfrac{\epsilon}{2(|M|+1)}$.

5. A prova desta propriedade é decorrente do raciocínio apresentado para demostrar a propriedade 2, mas aqui para um produto de um número finito de funções, ou seja, se

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=L_1,\ \lim_{x\to x_0} f_2(x)=L_2,\cdots,\ \lim_{x\to x_0} f_n(x)=L_n.$$

Então, utilizando o princípio da indução finita, podemos verificar que:

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ \cdots\ \cdot f_n(x)]=L_1\cdot L_2\cdot\ \cdots\ \cdot L_n$$

E caso, $f_1(x)=f_2(x)=\cdots=f_n(x)$, então

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=L^n.$$

6. Primeiro, provemos que se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$.
De $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M\neq 0$, vem:

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0\ ;\ 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|g(x)-M|<\epsilon.$$

E, que

$$\exists\delta_1>0,\ \exists N>0\ ;\ 0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|g(x)|>N\Rightarrow\frac{1}{|g(x)|}<\frac{1}{N}.$$

Considerando $\epsilon \cdot |M| \cdot N$, tem-se:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0\ ;\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \epsilon \cdot |M| \cdot N$$

Sendo $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$, vem que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{g(x) - M}{g(x) \cdot M} \right| =$$

$$= |g(x) - M| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|M|} < \frac{\epsilon \cdot |M| \cdot N}{N \cdot |M|} = \epsilon.$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ e, usando a proposição 2, temos que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

■

### 1.1.1 Limites Infinitos

O símbolo de infinito, denotado por $\infty$, não expressa um número real, mas uma tendência do limite. Intuitivamente, podemos dizer que:

- quando $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ simboliza que $f(x)$ cresce ilimitadamente além de qualquer número real fixado, à medida que $x$ se aproxima de $x_0$.
- quando $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ simboliza que $f(x)$ decresce ilimitadamente, abaixo de qualquer número real fixado, quando $x$ se aproxima de $x_0$.

Já quando tomando o limite de $f(x)$ quando $x$ cresce (ou decresce) ilimitadamente utilizamos, respectivamente, os símbolos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Um resultado muito usual de limite infinito, que pode ser facilmente encontrado em livros de cálculo ou análise real, é apresentado a seguir:

$$\lim_{x \to +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

## 1.2 Continuidade de uma Função em um Ponto

**Definição 1.2** *Seja $f$ uma função e $x_0$ um ponto de seu domínio. Dizemos que $f$ é **contínua** em $x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Caso $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ não exista ou exista, mas seja diferente de $f(x_0)$ diremos que $f$ é **descontínua** em $x_0$.*

**Exemplo 1.1** *Sendo $R(q)$ a função receita total de $q$ unidades produzidas e vendidas de um produto, definida por:*

$$R(q) = \begin{cases} q & , \text{ se } 0 \leq q \leq 20; \\ 1,1 \cdot q & , \text{ se } q > 20. \end{cases}$$

*Utilizando a definição mostraremos que a função $R$ é descontínua em $q = 20$.*

**Solução:** De fato, temos $R(20) = 20$ mostrando que $R(q)$ existe, mas o $\lim\limits_{q \to 20} R(q)$ não existe, pois:

$$\lim_{q \to 20^+} R(q) = 1,1 \cdot 20 = 22.$$
$$\lim_{q \to 20^-} R(q) = 20.$$

Portanto, a função $R$ é descontínua em $q$.

Na Figura 1.1 a seguir esboçamos o comportamento da função $R(q)$.

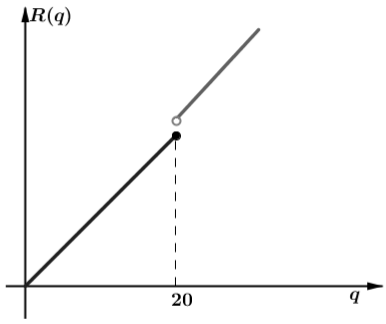


**Figura 1.1**

**Teorema 1.3** *Sejam $f$ e $g$ funções contínuas num ponto $x_0$. Então:*

1. $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ *são contínuas em* $x_0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $f \cdot g$ *é contínua em* $x_0$.
3. $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em* $x_0$, *desde que* $g(x_0) \neq 0$.

**Demonstração:** Sendo $f$ e $g$ funções contínuas em $x_0$, assim $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ e, valendo-se ainda, das propriedades operatórias dos limites, tem-se:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \lim\limits_{x \to x_0} [\alpha \cdot f(x)] + \lim\limits_{x \to x_0} [\beta \cdot g(x)] = \alpha \cdot f(x_0) + \beta \cdot g(x_0)$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f \cdot g) = \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = (f \cdot g)(x_0)$.
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right) = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)$.

■

## 1.3 Derivada de uma Função

**Definição 1.3 (da Derivada no ponto $x_0$)** *Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto $I$ e $x_0 \in I$. Caso exista e for finito o limite a seguir é denominado de* derivada de $f$ no ponto $x_0$*:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Sendo, $\Delta x = x - x_0$ então $x = \Delta x + x_0$ e, quando $x \to x_0$ temos $\Delta x \to 0$, com isso podemos reescrever a expressão acima na forma:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Notações**: utilizaremos neste estudo as seguintes notações para as derivadas:

- $f'(x)$ ou $y'$;

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- $\dfrac{dy}{dx}$, notação de Leibniz.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

**Exemplo 1.2** *Sendo a função $f(x) = x^2 - 3$, calcular $f'(5)$.*

**Solução:**

$$f'(5) = \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x^2 - 3) - 22}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = 10.$$

**Teorema 1.4** *Sejam $f$ uma função derivável em $x_0$, então $f$ é contínua em $x_0$.*

**Demonstração:** Note que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Então:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

E, portanto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f'(x_0).$$

E, por definição, $f$ é contínua no ponto $x_0$.

■

### 1.3.1 Derivada de Funções Básicas

A derivada de uma função $f$ constante é zero, isto é,

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0, \text{ onde } k \in \mathbb{R}.$$

De fato,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

**Teorema 1.5 (Derivada da Função Potência)** *Seja a função $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{N}^*$, vem que:*

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}.$$

**Demonstração:** Por definição,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n \right] \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}\Delta x + \binom{n}{3} x^{n-3}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1} \right] \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}.
\end{aligned}$$

■

**Teorema 1.6 (Derivada da Função Exponencial de Base $e$)** *Seja a função $f(x) = e^x$, tem-se que:*

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ e^x \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Onde, para obtermos o $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$, fazemos $u = e^x - 1 \Rightarrow \Delta x = \ln(1+u)$, assim:

$$\frac{e^x - 1}{\Delta x} = \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

E, como:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow u \to 0$$

Tem-se:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{ln\left[\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

Fazendo $u=\dfrac{1}{h}$, como $u\to 0\Rightarrow h\to\infty$ e, ainda, pela Definição 1.1.1, temos:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h}=e.$$

Logo:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}e^{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x}\cdot 1=e^{x}.$$

■

**Teorema 1.7 (Derivada da Função Logarítmo)** *Seja a função $f(x)=\ln(x)$, tem-se que:*

$$f(x)=\ln(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right].\end{aligned}$$

Fazendo $u=\dfrac{\Delta x}{x}\Rightarrow\Delta x=u\cdot x$ e como $\Delta x\to 0\Rightarrow u\to 0$ e, ainda, pela passagem demonstrada no Teorema 1.6, temos:

$$f'(x)=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]=\frac{1}{x}\cdot\ln e=\frac{1}{x}.$$

■

**Teorema 1.8 (Derivada da Soma e da Diferença)** *Sejam as funções $u(x)$ e $v(x)$, deriváveis no intervalo $(a,b)$, então $f(x)=u(x)\pm v(x)$ é derivável em $(a,b)$ e*

$$f'(x)=u'(x)\pm v'(x).$$

**Demonstração:** Por definição,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]+[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\\&=u'(x)+v'(x).\end{aligned}$$

Para $f(x) = v(x) - u(x)$, basta verificar que $f(x) = v(x) + [-u(x)]$ e, proceder analogamente, como a prova realizada para a derivada da soma.

■

**Teorema 1.9 (Derivada do Produto)** *Sejam as funções $u(x)$ e $v(x)$, deriváveis no intervalo aberto $(a,b)$, então $f(x) = u(x)\cdot v(x)$ é derivável em $(a,b)$ e*

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)\right]\frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - \\ &- u(x)\cdot v(x)]\frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left([u(x+\Delta x)-u(x)]\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot[v(x+\Delta x)-v(x)]\right)\frac{1}{\Delta x} \\ &= \left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\cdot v(x) + u(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x). \end{aligned}$$

■

**Corolário 1.9.1** *Seja a função $u(x)$, derivável no intervalo aberto $(a,b)$ e a função constante $v(x) = c$, então $f(x) = c\cdot u(x)$ é derivável em $(a,b)$ e*

$$f'(x) = c\cdot u'(x).$$

**Demonstração:** Utilizando-se as propriedades da derivada da função constante e a derivada do produto, temos:

$$f'(x) = v'(x)\cdot u(x) + v(x)\cdot u'(x) = 0\cdot u(x) + c\cdot u'(x) = c\cdot u'(x).$$

■

**Teorema 1.10 (Derivada do Quociente)** *Sejam as funções $u(x)$ e $v(x)$, deriváveis no intervalo aberto $(a,b)$, com $v(x)\neq 0$ então $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ é derivável em $(a,b)$ e*

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\right]\cdot\frac{1}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \Delta u \cdot \frac{v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} - \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} \cdot \Delta v \right] \cdot \frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\
&= u'(x) \cdot \frac{v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{u(x)}{[v(x)]^2} \cdot v'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}.
\end{aligned}
$$

■

### 1.3.2 Análise da Variação das Funções

**Definição 1.4** *Seja a função $f$ e o intervalo $(a,b)$, para o qual $f(x)$ esteja definida, dizemos que $c \in (a,b)$ é um* ***mínimo relativo*** *de $f$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x$ nesse intervalo. Analogamente, $c \in (a,b)$ é um* ***máximo relativo*** *de $f$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ nesse intervalo.*

Um **extremo relativo** de uma função $f$ é o valor mínimo relativo em $c$ ou um máximo relativo em $c$ da função no intervalo.

**Teorema 1.11 (de Fermat)** *Seja a função $f$ derivável em $(a,b)$ e $c$ um extremo relativo de $f$, onde $c \in (a,b)$, então $f'(c) = 0$.*

**Demonstração:** Suponhamos que $c$ seja um máximo local interior de $f$ que é derivável em $c$. Então há um intervalo $I = (c-\delta, c+\delta)$, tal que, para todo $x \in I$, tem-se:

$$
f(c) \geq f(x) \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \; para \; x < c, \\ \\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \; para \; x > c. \end{cases}
$$

Como a derivada de $f$ existe e é finito o seu limite, além de coincidir os limites laterias à esquerda e à direita de $c$, tem-se:

$$
\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c).
$$

Utilizando limites, tem-se:

$$
\left.\begin{aligned}
\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geq 0 \\
\\
\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leq 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(c) = 0.
$$

Segue análoga a demonstração para quando $c$ for um ponto de mínimo relativo de $f$.

■

**Definição 1.5** *Chamamos de* ***ponto crítico*** *de uma função $f$, o número $c$ do domínio de $f$ no qual $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir.*

**Definição 1.6** *A função $f$ terá um* ***mínimo absoluto****, se existir algum número $c \in D(f)$, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todos $x$ no domínio de $f$. Analogamente, a função $f$ terá um* ***máximo absoluto****, se existir algum número $c \in D(f)$, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todos $x$ no domínio de $f$.*

Caso a função $f$ possua um mínimo absoluto em $c$ ou um máximo absoluto em $c$, então diz-se que $f$ tem um **extremo absoluto** em $c$.

**Teorema 1.12 (de Rolle)** *Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $(a, b)$, com $f(a) = f(b) = 0$, então existe ao menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

**Demonstração:**

**Caso 1:** a função $f$ constante no intervalo $[a, b]$.
Como $f'(x) = 0$ em $(a, b)$, ou seja, $\forall c \in (a, b)$ temos $f'(c) = 0$.

**Caso 2:** a função $f$ não constante no intervalo $[a, b]$.
Neste caso $\exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como $f$ é contínua em $[a, b]$, $f$ tem um mínimo e um máximo em $[a, b]$. Se $\exists x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor de $f(a) = f(b)$ não é o máximo de $f$ em $[a, b]$; portanto, $f$ assume valor máximo em algum ponto $c \in (a, b)$ e, sendo $f$ derivável em $(a, b)$, temos $f'(c) = 0$. Se $\exists x \in (a, b)$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, a prova é análoga.

■

**Teorema 1.13 (do Valor Médio ou de Lagrange)** *Se $f$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b)$, então existe ao menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.*

**Demonstração:**

- Caso $f(a) = f(b)$.
  Para este caso, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ e, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0 = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

- Caso $f(a) \neq f(b)$.
  Considerando a função $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$. Note que:

  i. $g$ é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença entre $[f(x) - f(a)]$ e $\left[\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\right]$, que são contínuas em $[a, b]$;

ii. $g$ é derivável em $(a, b)$ e sua derivada é $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

iii. nos extremos do intervalo $[a, b]$, tem-se:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0,$$
$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0.$$

Portanto, $g(a) = g(b) = 0$. Sendo assim, é válido para a função $g$ o Teorema de Rolle: existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, isto é,

$$g'(x) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \text{ ou ainda } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

**Definição 1.7** *Diz-se que uma função $f$ definida em um intervalo é* ***crescente*** *nesse intervalo se, e somente se, $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde $x_1$ e $x_2$ são números quaisquer no intervalo.*

**Definição 1.8** *Diz-se que uma função $f$ definida em um intervalo é* ***decrescente*** *nesse intervalo se, e somente se, $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde $x_1$ e $x_2$ são números quaisquer no intervalo.*

**Observação 1** *Se uma função $f$ é crescente ou decrescente num intervalo, então dizemos que $f$ é monótona neste intervalo.*

**Teorema 1.14** *Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $(a, b)$:*

*i. se $f'(x) > 0$ para todo $x$ em $(a, b)$, então $f$ é crescente em $[a, b]$;*

*ii. se $f'(x) < 0$ para todo $x$ em $(a, b)$, então $f$ é decrescente em $[a, b]$.*

**Demonstração:** Provaremos o item i, já que o item ii é análogo sua demonstração. Sejam $x_1$ e $x_2$ dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Como $f$ é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $(x_1, x_2)$, pelo Teorema 1.13 (do Valor Médio) segue que existe um número $c$ em $(x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Como $x_1 < x_2$, então $x_2 - x_1 > 0$. Mas, por hipótese, $f'(x) > 0$, assim $f'(c) > 0$. Portanto, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, e com isso $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos, então que $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde $x_1$ e $x_2$ são números quaisquer no intervalo $[a, b]$. Portanto, da Definição 1.7 resulta que $f$ é **crescente** em $[a, b]$.

■

**Definição 1.9** *Se o gráfico de $f$ estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I$, então ele é dito* ***côncavo para cima*** *em $I$. Caso, o gráfico de $f$ estiver abaixo de todas as suas tangentes em $I$, então ele é* ***côncavo para baixo*** *em $I$.*

**Teorema 1.15** *Seja a função $f$ derivável até a segunda ordem no intervalo $[a,b]$, com $f''(x) \neq 0$ e, se $x_0 \in [a,b]$, então:*

*i. para $f''(x_0) > 0$, o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para cima em $[a,b]$.*

*ii. para $f''(x_0) < 0$, o gráfico de $f$ tem concavidade voltada para baixo em $[a,b]$.*

**Demonstração:** A prova deste teorema pode ser encontrado em Guidorizzi (vide [9] pp. 238-240).

■

### 1.3.3 Regra de L'Hospital

Inúmeras vezes ao calcularmos $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é possível se deparar com limites na forma $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$, não significando, necessariamente, que os mesmos não existam. Para tratar destes casos vamos nos valer do seguinte teorema:

**Teorema 1.16 (Regra de L'Hospital)** *Sejam $f$ e $g$ duas funções deriváveis no intervalo $I$, exceto possivelmente em um número $x_0 \in I$, com $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq x_0$. Nestas condições, se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

$$\text{ou que } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

*e se* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *então* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, *ou seja,* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

**Demonstração:** A prova deste teorema pode ser encontrado em Leithold (vide [12] pp. 652-657).

■

### 1.3.4 Método de Newton-Raphson

Consideremos a equação $f(x) = 0$, na qual a função $f$ é derivável. A aproximação (ou equivalente) de uma raiz desta equação, ou seja, um valor $\eta$ tal que $f(\eta) \cong 0$ pode ser obtido pela relação:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{se } f'(x_n) \neq 0. \tag{1.1}$$

Tal processo iterativo é denominado de **Método de Newton-Raphson**.

Realizaremos uma interpretação geométrica do método de Newton-Raphson. Como o processo é iterativo para realização de aproximações do possível valor da raíz da equação $f(x) = 0$. Primeiramente e, a partir do gráfico de $f$ (descrito na Figra 1.2), consideremos a reta $T_1$ tangente à curva de $y = f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$.

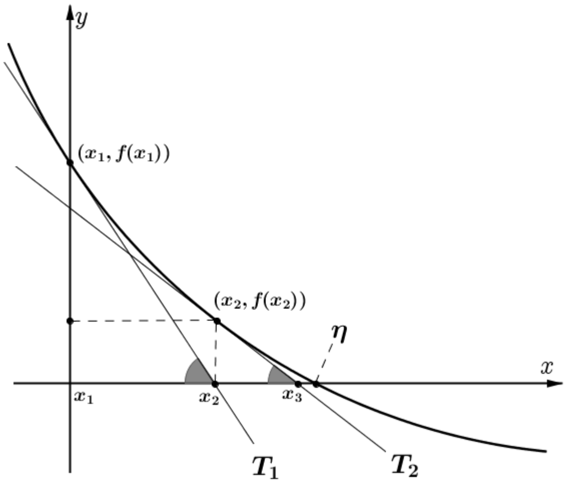


**Figura 1.2**

Observe que a reta tangente $T_1$ intercepta o eixo $x$ no ponto aqui denominado de $x_2$. A ideia básica do método de Newton-Raphson é que a reta tangente localiza-se proxima da curva no ponto que a mesma intercepta o eixo $x$ (ponto $\eta$, raiz da equação $f(x) = 0$). Como $T_1$ é uma reta tangente, podemos aplicar derivada para determinar a interceptação da reta no eixo $x$.

Para obter $x_2$, tendo em consideração que a inclinação de $T_1$ é $f'(x_1)$, assim procedemos:

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1).$$

Como $T_1$ intercepta $x$ em $x_2$, fazemos $y = 0$ e temos:

$$0 - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1).$$

Caso $f'(x) \neq 0$, então:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Usando assim, $x_2$ como uma primeira aproximação de $\eta$.

O processo é repetido, utilizado $x_2$ em substituíção a $x_1$, valendo-se da reta $T_2$ tangente a curva $y = f(x)$ no ponto $(x_2, f(x_2))$. Obtendo assim, a nova aproximação $x_3$, que é dada por:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \text{ caso } f'(x_2) \neq 0.$$

Repetindo o processo, obteremos uma sequência de aproximações $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, conforme Figura 1.2. Então as demais aproximações podem ser generalizadas pela relação:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad se\ f'(x_n) \neq 0.$$

Conforme Stewart (vide [16] p. 349), embora a sequência de aproximações sucessivas do método de Newton convirja para a raiz desejada, há certas circunstâncias que a sequência pode não convergir (...) podendo até mesmo uma aproximação cair fora do domínio de $f$. Por exemplo, observe a situação indicada na Figura 1.3. Onde $x_2$ é uma aproximação pior que $x_1$, ocorrendo que a aproximação $x_3$ possa cair fora do domínio de $f$.

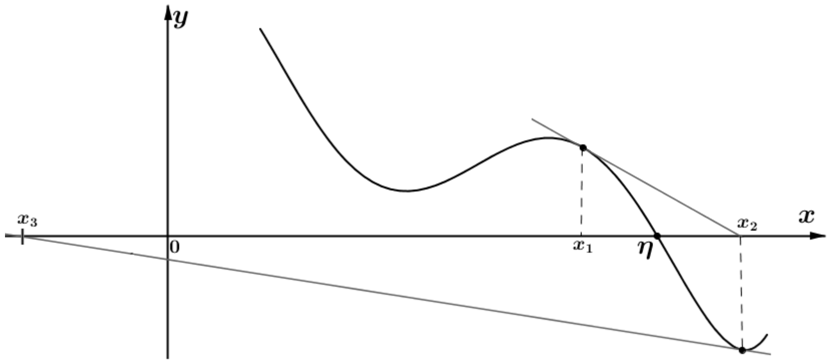


**Figura 1.3**

Dado uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e derivável em $(a, b)$. Uma condição suficiente para que o método de Newton-Raphson funcione é que:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$;

2. Se $f'$ e $f''$ são não nulas e preserva o sinal no intervalo analisado para a raiz.

O método de Newton-Raphson quando funciona, apresenta uma convergência rápida para a solução da raiz.

## 1.4 Noções de Integração

**Definição 1.10 (de Primitiva de uma Função)** *Seja $P$ e $f$ duas funções definidas num intervalo $I$. Quando a função $P$ satisfaz a condição $P'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, dizemos que $P$ é uma* ***primitiva da função*** *$f$.*

**Teorema 1.17** *Se $P$ é uma primitiva de $f$, definida num intervalo $I$ e, $C$ é uma constante real, então $P + C$ é também uma primitiva de $f$.*

**Demonstração:** Utilizando as propriedades da derivada, temos que:

$$[P(x) + C]' = P'(x) + C' = P'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

■

**Teorema 1.18** *Se $P_1$ e $P_2$ são duas primitivas de $f$, definidas num intervalo $I$, então $P_1 - P_2 = C$, onde $C$ é uma constante real.*

**Demonstração:**

$[P_1(x) - P_2(x)]' = P_1'(x) - P_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \ \forall x \in I \Rightarrow P_1(x) - P_2(x) = C.$

■

Estes dois últimos teoremas resultam da definição a seguir.

**Definição 1.11 (de Integral Indefinida)** *Se $P$ é uma primitiva de $f$, toda primitiva de $f$ é da forma $P+C$, onde $C$ é uma constante real arbitrária. A expressão $P+C$ denomina-se de* ***Integral Indefinida de*** *$f$. Cuja notação é:*

$$\int f(x)dx = P(x) + C.$$

A seguir apresentamos algumas regras de integração indefinida, úteis a este estudo:

1. $\displaystyle\int \alpha dx = \alpha \cdot x + C;$

2. $\displaystyle\int \alpha \cdot f(x)dx = \alpha \int f(x)dx;$

3. $\displaystyle\int [\alpha \cdot f_1(x) \pm \beta \cdot f_2(x)]dx = \alpha \int [f_1(x)]dx \pm \beta \int [f_2(x)]dx;$

4. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \ n \neq -1;$

5. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$

**Exemplo 1.3** *Calcule as integrais indefinidas valendo-se das regras apresentadas de integração indefinida.*

*1.* $\displaystyle\int x^4 dx;$

*2.* $\displaystyle\int (6x^2 + 4)dx;$

*3.* $\displaystyle\int (e^x - x^5)dx.$

**Solução:** Calcule as integrais indefinidas valendo-se das regras apresentadas acima.

1. Aplicando a regra 4 temos:
   $\displaystyle\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$, para $C \in \mathbb{R}$.

2. Aplicando as regras $1, 2, 3$ e $4$ temos:
   $\displaystyle\int (6x^2 + 4x)dx = 6 \int x^2 dx + \int 4dx = 2x^3 + 4x + C$, para $C \in \mathbb{R}$.

3. Aplicando as regras $2, 4$ e $5$ temos:
   $\displaystyle\int (e^x - x^5)dx = e^x - \frac{x^6}{6} + C$, para $C \in \mathbb{R}$.

### 1.4.1 Integral como Área

Consideremos o problema de determinar a medida da área de um região plana $R$, delimitada pelo gráfico de uma função $f$ contínua ($f(x) > 0$), pelo eixo $x$ e pelas duas retas $x = a$ e $x = b$ (conforme Figura 1.4).

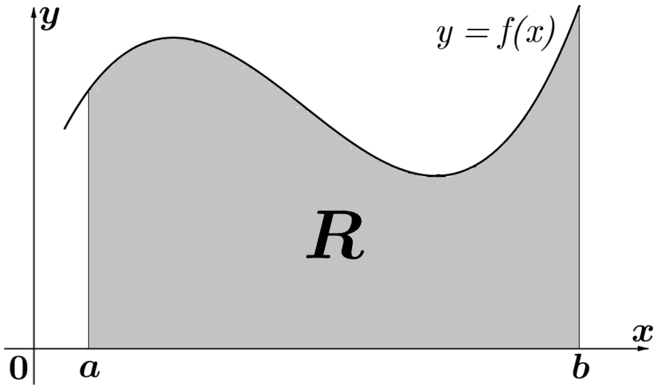


**Figura 1.4**

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos com o mesmo comprimento ($\Delta x$), onde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Os extremos destes intervalos, denotaremos de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, onde

$$x_0 = a, x_1 = a+\Delta x, x_2 = a+2\Delta x, \ldots, x_i = a+i\Delta x, \ldots, x_{n-1} = a+(n-1)\Delta x, x_n = b.$$

Seja $[x_{i-1}, x_i]$ o *i-ésimo* subintervalo e, como, $f$ é contínua em $[a, b]$, ela é contínua também nos subintervalos. Agora, escolhemos um ponto qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Por simplicidade, iremos escolher $c_i$ de modo que $f(c_i)$ seja mínimo no intervalo $[x_{n-1}, x_n]$. Para cada $i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, construímos um retângulo de base $\Delta x$ e altura $f(c_i)$ (ver Figura 1.5).

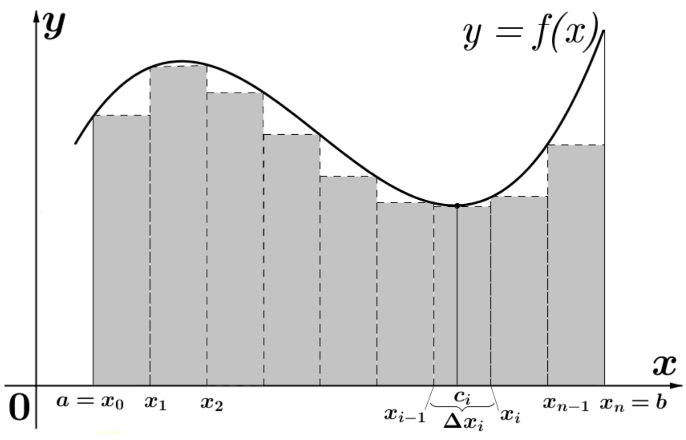


**Figura 1.5**

Seja $S_n$ a soma das $n$ áreas dos retângulos na figura 1.5 acima. Façamos agora $n$ dobrar, ver Figura 1.6.

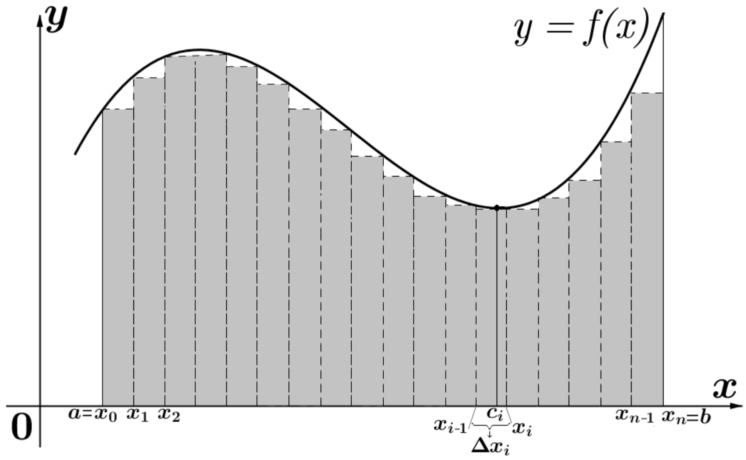


**Figura 1.6**

Consequentemente o número de retângulos irá dobrar e, comparando as duas figuras (1.5 e 1.6), notamos que $S_n$ na Figura 1.6 parece aproximar melhor da região $R$.

E, note que à medida que $n$ cresce, indefinidamente, a soma $S_n$ das áreas dos retângulos tende a um limite, que aproxima-se, intuitivamente, da medida da área da região $R$.

A soma das áreas dos $n$ retângulos, que representamos por $S_n$, é dada por:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \ldots + f(c_n)\Delta x.$$

Esta soma é chamada de **Soma de Riemann** da função $f$.

**Definição 1.12 (de Área sob a Curva de uma Função)** *Seja $f$ uma função positiva e contínua no intervalo $[a, b]$, nos quais os pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ definem uma subdivisão deste intervalo em intervalos parciais $[x_{i-1}, x_i]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de $a$ até $b$, é definida por:*

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

*onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Veremos adiante que tal limite sempre existe.*

O cálculo de áreas sob curvas pode ser obtido por integração, como será apresentado mais a diante.

## 1.4.2 Integral Definida

Inicialmente, chamemos de **partição de** $[a, b]$ qualquer decomposição de $[a, b]$ em subintervalos da forma:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i]$$

para um inteiro positivo $n$ e números $x_i$, tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

O comprimento de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ será denotado por $\Delta x_i$, isto é, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

**Definição 1.13 (de Integral de Riemann)** *Seja $f$ uma função no intervalo $[a, b]$ e $L \in \mathbb{R}$. Então, $L$ é denominado de integral de Riemann (ou integral definida) de $f$ em $[a, b]$ e denotado por $\int_a^b f(x)dx$, se*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L \right| < \epsilon$$

*para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$, com máx $\Delta x_i < \delta$ e para qualquer escolha dos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.*

Por definição, a integral definida de $f$, de $a$ até $b$, é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Quando tal limite existe dizemos que $f$ é integrável em $[a, b]$. Um fato geral, que não será demonstrado neste trabalho, é que toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$.

Vejamos algumas propriedades da integral definida. A demonstração destas propriedades está além dos objetivos destas noções de integrais, mas poderão ser encontradas em Guidorizzi (vide [9] pp. 303-305).

Sejam $f$ e $g$ funções integráveis no intervalo $[a, b]$ e $\alpha$ uma constante real, então:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0;$
2. $\int_a^b [\alpha f(x) \pm g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$
4. Se $c \in (a, b)$ e $f$ é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$
5. $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)$, se, e somente se, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$;
6. Se $f$ é contínua no intervalo $[a, b]$, então:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$$
onde $m = minf(x), x \in [a, b]$ e $M = maxf(x), x \in [a, b]$.

**Teorema 1.19 (do Valor Médio para Integrais)** *Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que*

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

**Demonstração:** Como $f$ é contínua em $[a, b]$, então:

- $\exists x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo da função em $[a, b]$;
- $\exists x_2 \in [a, b]$ tal que $f(x_2)$ é o valor máximo da função em $[a, b]$.

Portanto, tem-se $f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$, $\forall t \in [a, b]$.

Então, pela propriedade 6 de integral definida, tem-se:

$$f(x_1)(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq f(x_2)(b-a).$$

Logo,

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq f(x_2).$$

Como $f$ é contínua no intervalo $[a, b]$ de extremos $x_1$ e $x_2$, pelo Teorema do Valor Intermediário, então existe $x_0 \in [a, b]$ tal que:

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt.$$

■

### 1.4.3 Teorema Fundamental do Cálculo

**Teorema 1.20 (Fundamental do Cálculo)** *Seja $f$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, e*

1. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, *então $F$ é derivável e $F'(x) = f(x)$.*
2. $G$ *é tal que $G'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$, então* $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

**Demonstração:** Prova do item 1:

Seja $h \neq 0$, tal que $a \leq x + h \leq b$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Pelo Teorema 1.19, existe $t_h \in [a,b]$ de extremos $a = x$ e $b = x + h$ tal que:

$$\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(t_h).$$

Então:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(t_h).$$

E, como o $\lim\limits_{h\to 0} f(t_h) = f(x)$, já que $t_h$ está entre $x$ e $x+h$, tem-se:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0} f(t_h) = f(x).$$

Prova do item 2:

Seja $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, pelo que foi provado no item (1) desta demonstração, temos $F'(x) = f(x)$, então como $G'(x) = f(x)$, por hipótese, teremos $G'(x) = F'(x) \Rightarrow G(x) = F(x) + C$, onde $C \in \mathbb{R}$.

Então:

$$G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Sendo

$$G(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t)dt + C = 0 + C \Rightarrow G(a) = C$$

e

$$G(b) = F(b) + C = \int_a^b f(t)dt + C \Rightarrow G(b) = \int_a^b f(t)dt + G(a).$$

Segue que:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

■

Apresentaremos três casos (ilustrados na Figura 1.7) para determinação do cálculo de área utilizando integração, são eles:

**Caso I**: Área sob a curva do gráfico de uma função $f$ contínua em $[a,b]$ limitada pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo das abscissas, onde $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$ é dada por:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

**Caso II**: Área sob a curva do gráfico de uma função $g$ contínua em $[a, b]$ limitada pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo das abscissas, onde $g(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$ é dada por:

$$A = \left| \int_a^b g(x)dx \right|.$$

**Caso III**: Área da figura plana limitada pelas curvas dos gráficos das funções $f$ e $g$ contínuas em $[a, b]$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$ é dada por:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

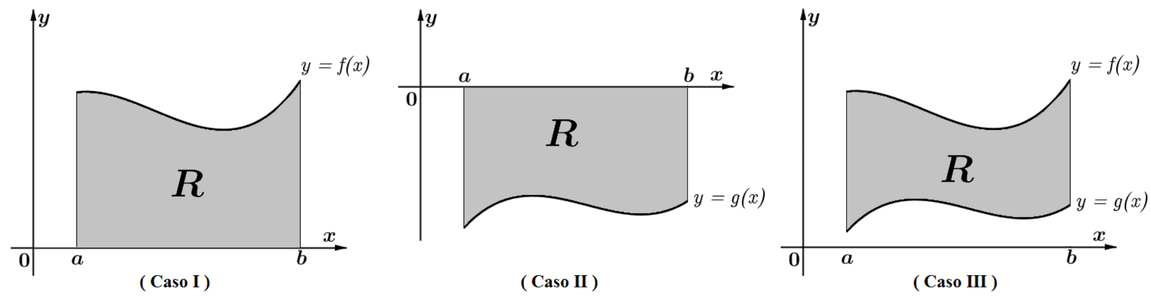


**Figura 1.7**

**Exemplo 1.4** *Calcular a área do conjunto de todos os pontos $(x, y)$ limitada pelas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.*

**Solução:** De acordo com o gráfico abaixo (Figura 1.8), note que área $(A)$ procurada esta compreendida no intervalo $[0, 1]$ e, é dada por:

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

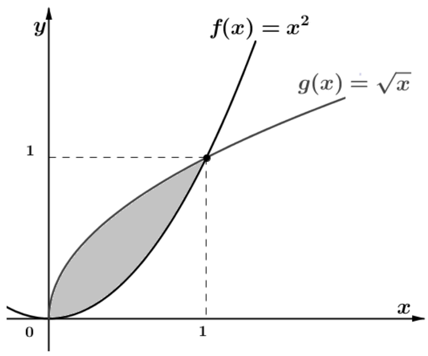


**Figura 1.8**

# Capítulo 2

# A Teoria do Juro

"*O juro composto é a maior invenção da humanidade, porque permite uma confiável e sistemática acumulação de riqueza*".
Albert Einstein

O interesse do homem pelos problemas envolvendo juro remota a época do início da escrita formal. Em Boyer (vide [2] p. 20), é relatado um problema descrito numa tábua de argila da Mesopotâmia, datada de 1.700 a. C. O problema pergunta quanto tempo levaria para certa quantia em dinheiro dobrar seu valor, a 20 por cento ao ano. A resolução proposta para este mesmo problema, por Maor (vide [14] p. 41), usa linguagem algébrica, percebendo que a soma cresce a cada ano a $1,2$ (acréscimo de 20%), então um crescimento de $(1,2)^n$, a $n$ anos. Como o objetivo do problema é chegar ao dobro do valor original, resumimos este à solução da equação $(1,2)^n = 2$. A resolução apresentada na tábua de argila pelo escriba é $3; 47, 13, 20$ (resposta no sistema sexagesimal, sendo igual a $3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3} \cong 3,7870$), onde provavelmente, ele utilizou interpolação linear entre os valores $(1,2)^3$ e $(1,2)^4$.

Inúmeras discussões sobre dinheiro perpassam pela ideia central de juros. E, como a exemplo da situação descrita acima, durante séculos diversos fatos cooperaram para uma maior atenção à lei dos juros, tais como: a expansão do comércio internacional, a industrialização, o aumento das transações financeiras e, atualmente, a globalização. A utilização do cálculo, como ferramenta no auxílio das tomadas de decisões financeiras, passa a ser de grande valia. Para entendimento desta importante contribuição, inicialmente apresentaremos alguns conceitos básicos da chamada Teoria do Juro: regime de capitalização descontínuo e contínuo, taxas de juros.i

## 2.1 Juro

Conforme Faro (vide [5] p. 3), **juro**, conceitualmente, é definido como a remuneração, a qualquer título, atribuída ao fator capital. Considerando que neste capital foi realizada uma operação financeira por determinado período de tempo.

Temos, então, a quantia monetária $C_0$ de **capital inicial** (principal ou valor presente) que é investida ao longo de um período de tempo. No final do período de investimento, um capital acumulado (montante ou valor futuro), é retornado. A diferença entre o capital acumulado e o capital inicial são os **juros** ($J_n$) auferidos. Para o **intervalo de tempo** de $n$ períodos, temos:

$$J_n = C_n - C_{n-1},$$

onde $C_n$ expressa o **capital acumulado** que cresce no período $n$.

Popularmente, o juro representa uma espécie de *aluguel* gerado mediante uma taxa de juros aplicada a um capital e cobrada ao longo de um intervalo de tempo. Esta **taxa de juros** $i_n$ (constante ou variável) referida a um certo período de tempo, representa o percentual incidente sobre o capital considerado. Também, $i_n$ é definida como a relação entre o montante dos juros durante o período para o valor acumulado no início do período:

$$i_n = \frac{C_n - C_{n-1}}{C_{n-1}} = \frac{J_n}{C_{n-1}} \text{ , onde } n \geq 1.$$

## 2.2 Regime de Capitalização

**Definição 2.1** ***(de Regime de Capitalização)****: O processo de formação dos juros ao longo do tempo, sua maneira ao qual são incorporados ao capital, recebe a denominação de* ***regime de capitalização****.*

Formalmente, temos dois regimes de capitalização: o descontínuo e o contínuo. No primeiro, o **regime de capitalização descontínuo**, segundo Feijó (vide [7] p. 49), a rigor, o juro só seria incorporado ao valor do capital ao final de um período elementar de tempo, de duração finita. Neste, há dois regimes de capitalização a considerar: o simples e o composto.

### 2.2.1 Regime de Capitalização Simples

No **regime de capitalização simples**, a taxa de juro incide sobre um único e determinado valor, o capital inicial ($C_0$). Este modelo de capitalização tem a propriedade de que o juro não é reinvestido para gerar juro adicional.

**Teorema 2.1** *No regime de capitalização simples de taxa constante $i$, um capital inicial $C_0$ transforma-se, após $n$ períodos de tempo, em um capital acumulado*

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n). \tag{2.1}$$

**Demonstração:** Seja $J_n$ o juro auferido, também denotado como a variação do capital acumulado $C_n$ a uma taxa de juros $i_n$, dada na mesma unidade temporal do intervalo $n$, no juro simples ela será:

$$J_n = C_0 \cdot i_{n+1}.$$

Pela definição de taxa de juros, o capital acumulado ao longo de $n$ períodos, será:

$$C_1 = C_0 + J_0 = C_0 \cdot (1 + i_1)$$
$$C_2 = C_1 + J_1 = C_0 \cdot (1 + i_1) + C_0 \cdot i_2 = C_0 \cdot (1 + i_1 + i_2)$$
$$C_3 = C_2 + J_2 = C_0 \cdot (1 + i_1 + i_2) + C_0 \cdot i_3 = C_0 \cdot (1 + i_1 + i_2 + i_3)$$
$$\ldots$$
$$C_n = C_{n-1} + J_{n-1} = C_0 \cdot (1 + i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_{n-1}) + C_0 \cdot i_n$$
$$C_n = C_0 \cdot (1 + i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_{n-1} + i_n),$$

*assim*,

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{n} i_k\right).$$

Para o caso particular, onde a taxa de juros aplicada é constante, ou seja:

$$i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_n = i.$$

Teremos:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + \underbrace{i + i + i + \ldots + i}_{n \quad vezes})$$
$$C_n = C_0 \cdot (1 + i \cdot n).$$

■

Observe que como o valor do tempo não pode ser negativo ($n > 0$), o uso de taxa negativa não convém ser aplicada, já que $i \cdot n > -1 \Rightarrow C_n < 0$, logo teríamos um valor acumulado a um dado período que nos traria perda de investimento.

Ao considerarmos a formação do juro ocorrendo ao final de cada período que vigora a taxa $i$, nos proporciona a evolução $C_n$ que ocorre de forma descontínua, ver Figura 2.1.

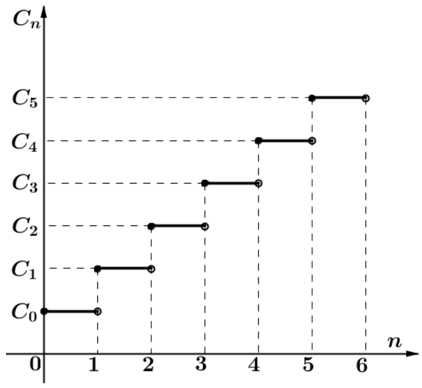


**Figura 2.1**

Para valores de $n$ fracionados, adota-se a convenção linear para determinar a formação do juro simples, ao longo de um período considerado. Bastando para tanto realizar uma interpolação linear entre os dois valores de $C_n$ e $C_{n+1}$, onde $n$ e $n + 1$ são valores inteiros. Utilizando a fórmula (2.1), semelhança de triângulos e o exposto na Figura 2.2, efetivaremos uma interpolação linear:

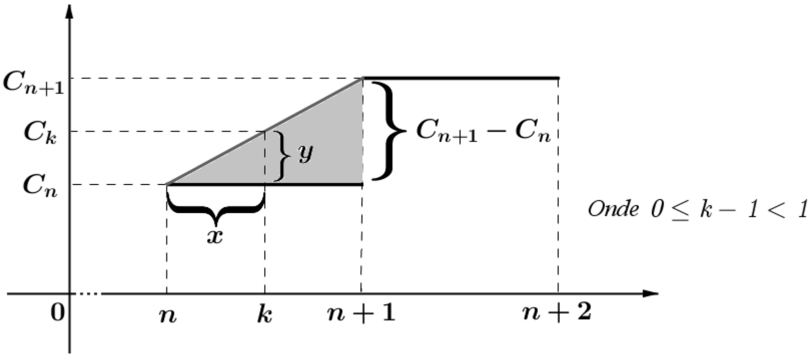


**Figura 2.2**

Note que, por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{y} = \frac{n + 1 - n}{x}$$

Como $C_{n+1} - C_n = C_0 \cdot i$, temos:

$$\frac{C_0 \cdot i}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = C_0 \cdot i \cdot x.$$

Observando também que:

$$C_k = C_n + y.$$

Então:

$$C_k = C_0 \cdot (1 + i \cdot n) + C_0 \cdot i \cdot x = C_0 \cdot (1 + i \cdot k),$$

ou seja,

$$C_k = C_0 \cdot (1 + i \cdot k). \tag{2.2}$$

Logo, concluímos que, pela convenção do resultado obtido na interpolação linear (equação (2.2)), que a equação (2.1) é válida, tanto para $n$ inteiro como para $n$ fracionado.

Perceba, Figura 2.3, que o juro simples é uma função linear de acumulação, com $n \geq 0$.

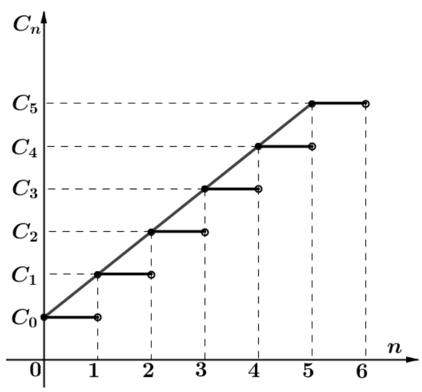


**Figura 2.3**

### 2.2.2 Regime de Capitalização Composta

No **regime de capitalização composta**, a taxa de juro incide, inicialmente, sobre o capital inicial, incorporando a este o valor do juro, gerando assim o valor acumulado. Daí em diante, aos demais períodos a soma é reinvestida, sendo a esta passando a incidir a taxa de juros. Este modelo de capitalização tem a propriedade de que os juros são reinvestidos para ganhar juros adicionais.

**Teorema 2.2** *No regime de capitalização composta de taxa constante $i$, um capital inicial $C_0$ transforma-se, após $n$ períodos de tempo, em um capital acumulado*

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n. \tag{2.3}$$

**Demonstração:** Seja $J_n$ a variação do capital acumulado $C_n$ a taxa de juros $i_n$, no juro composto, teremos:

$$J_n = C_{n-1} \cdot i_n.$$

Assim o capital acumulado será:

$$C_n = C_{n-1} + J_n = C_{n-1} + C_{n-1} \cdot i_n = C_{n-1} \cdot (1 + i_n).$$

Ao logo de $n$ períodos, teremos:

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + J_1 = C_0 \cdot (1+i_1) \\
&C_2 = C_1 + J_2 = C_0 \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \\
&\ldots \\
&C_n = C_{n-1} + J_n = C_0 \cdot (1+i_1) \cdot (1+i_2) \cdot (1+i_3) \cdot \ldots \cdot (1+i_n) \\
&C_n = C_0 \cdot \prod_{k=1}^{n} (1+i_k).
\end{aligned}$$

Para o caso particular, onde a taxa de juros aplicada é constante, ou seja:

$$i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_{n-1} = i_n = i.$$

Teremos:

$$C_n = C_0 \cdot \underbrace{(1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot \ldots \cdot (1+i)}_{n \quad vezes} = C_0 \cdot (1+i)^n.$$

■

Como na capitalização simples, no regime composto, o juro só será formado ao final de cada período de tempo, então a formação do capital acumulado se comportará de forma descontínua, levando em consideração $i > 0$.

Comparativamente, a Figura 2.1, a Figura 2.4 apresenta um crescimento onde os "degraus" não são iguais entre si, mas assumem valores maiores a cada período sucessivo, ou seja, o acréscimo sofrido no regime de capitalização composta é mais acentuado que no regime de capitalização simples (considerando para isso o mesmo capital inicial e mesma taxa de juros).

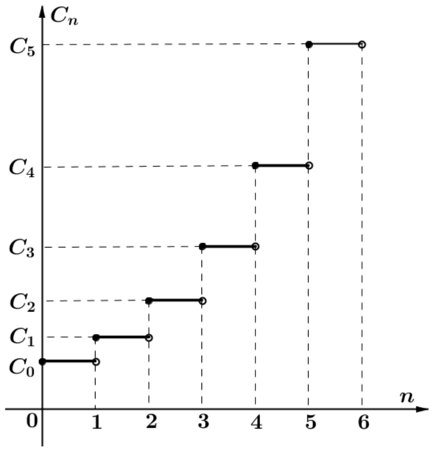


**Figura 2.4**

Diferentemente a capitalização simples, no regime de capitalização composta, conforme Faro (vide [5] p. 50), é adotado duas convenções distintas: a linear e a exponencial.

Para o caso da convenção linear, o procedimento é análogo ao apresentado através do exposto à Figura 2.2 para obtenção da equação (2.2), entre os dois períodos inteiros $n$ e $n+1$, resaltando que no caso composto o acréscimo é $\Delta C_n = C_{n-1} \cdot i$ e, deste, teremos:

$$\Delta C_{n+1} = C_n \cdot i.$$

Assim:

$$C_k = C_n + C_n \cdot i \cdot x = C_n \cdot (1 + i \cdot x) = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot x),$$

ou seja,

$$C_k = C_0 \cdot (1+i)^n \cdot (1 + i \cdot x).$$

E, ainda, novamente por Faro (vide [5] p. 50), esta convenção passa a representar uma mistura de juros simples e compostos. O prazo inteiro passa a ser empregada no regime composto, já a parte fracionada do prazo utilizada no regime simples, ambas sob a mesma taxa de juros.

Para a convenção exponencial no regime de capitalização composta e, lembrando que a função exponencial, por definição geral, é da forma: $f(x) = A \cdot \beta^x$ (considerando $A$ como um parâmetro), obtém-se uma solução geral da forma $C_n = A \cdot \beta^n$. E, valendo-se da descrição na convenção exponencial da Figura 2.5 a seguir, nos assegura afirmar que o acréscimo no capital ($\Delta C_n$) seja obtido pelo produto da taxa de juros $i$ sobre o capital anterior $C_n$:

$$\Delta C_n = C_n \cdot i.$$

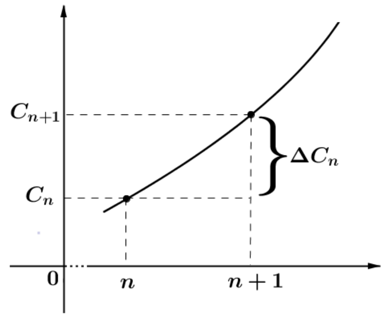


**Figura 2.5**

Além de que:

$$C_{n+1} = C_n + \Delta C_n = C_n + C_n \cdot i = C_n \cdot (1+i).$$

Ou seja:

$$C_{n+1} - C_n \cdot (1+i) = 0.$$

A última equação, em que está presente o valor da variável no instante $n+1$ e valor da variável no instante em $n$, recebe o nome de *equação de diferenças* (se ocorressem variações infinitesimais, como nos casos contínuos, a equação seria uma equação diferencial). Note que a equação possui: diferenças finitas (já que possui um número finito de termos), é linear (pois a variável é de grau 1) e é homogênea (pois o termo independente é igual a zero), cuja equação característica é dada por:

$$\beta - (1+i) = 0 \Rightarrow \beta = (1+i).$$

Aplicada na definição geral $C_n = A \cdot \beta^n$, que implica:

$$C_n = A \cdot (1+i)^n.$$

Para $n = 0$, na última equação, temos:

$$C_0 = A \cdot (1+i)^0 = A \cdot 1 = A.$$

Donde, concluímos que:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n.$$

Esta equação equivale à equação (2.3) obtida anteriormente. Assim, de acordo com Faro (vide [5] p. 51), na adoção da convenção exponencial, não faz sentido falar em capitalização descontínua, pois deixam de existir os pontos de descontinuidade. Note, Figura 2.6, que o juro composto é uma função exponencial de acumulação, com $n \geq 0$.

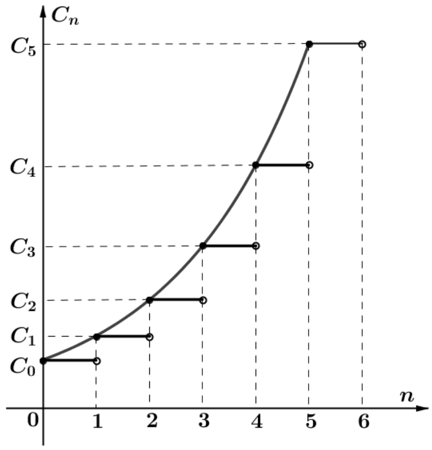


**Figura 2.6**

### 2.2.3 Regime de Capitalização Contínua

No **regime de capitalização contínua**, conforme Feijó (vide [7] p. 61), o juro é formado ao final de um período infinitesimal, isto é, ele é formado continuamente. Nesta modalidade como o período de tempo é considerado infinitesimal, então os períodos de capitalização são considerados instantâneos. Deste modo, a taxa de juros é chamada de taxa instantânea de juros.

**Teorema 2.3** *No regime de capitalização contínua de taxa constante $i$, um capital inicial $C_0$ transforma-se, após $n$ períodos de tempo, em um capital acumulado*

$$C_n = C_0 \cdot e^{i \cdot n}. \tag{2.4}$$

**Demonstração:** Intuitivamente, aumentar o período de capitalização é aumentar o capital acumulado ($C_n$). Utilizando da expressão (2.3) (capitalização composta) e considerando $m$ como o número de capitalizações que pretendemos aumentar, podemos reescrever a expressão citada, da seguinte forma:

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} = C_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}. \tag{2.5}$$

Na equação (2.5), almejamos que $m$ assuma valores cada vez maiores, ou seja, tenda ao infinito ($m \to \infty$), deste modo:

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ C_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} \right\} = C_0 \cdot \left[\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}.$$

Fixando $t = \dfrac{m}{i}$, então $\dfrac{1}{t} = \dfrac{i}{m}$. E, ainda, quando $m \to \infty$, então $t \to \infty$. Reescrevendo a expressão acima, teremos:

$$C_0 \cdot \left[\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t \cdot i}\right]^{n} = C_0 \cdot \left[\lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{n \cdot i}.$$

Onde, pelo resultado:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Assim:

$$C_0 \cdot \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{n\cdot i} = C_0 \cdot e^{n\cdot i}.$$

Observa-se que o período de capitalização ao crescer infinitamente, o capital acumulado aproxima-se de $C_0 \cdot e^{n\cdot i}$. Para tal situação os juros são chamados continuamente compostos. Logo:

$$C_n = C_0 \cdot e^{n\cdot i}.$$

■

Apresentaremos a seguir, um exemplo que ilustra os resultados de forma comparativa, entre os capitais acumulados aos regimes abordados: descontínua simples, descontínua composta e contínua.

**Exemplo 2.1** *Considerando diferentes prazos de aplicação, calcular o valor acumulado para um capital de R\$ 3.000, 00, inicialmente aplicado em um investimento que remunera à taxa de juros de 15% ao período. Apresente os resultados numa tabela para os regimes capitalização: (a) descontínua simples; (b) descontínua composta; (c) contínua.*

**Solução:** Obtemos os resultados descritos na Tabela 2.1, ao aplicar os valores fornecidos no exemplo nas equações (2.1), (2.3) e (2.4) no intuito de determinar seus respectivos capitais acumulados.

Tabela 2.1: Comparação numérica entre os vários regimes de capitalização

| n | Regime Descontínuo Simples (Fórmula 2.1) | Regime Descontínuo Composto (Fórmula 2.3) | Regime de Capitalização Contínuo (Fórmula 2.4) |
|---|---|---|---|
| 0 | 3.000,00 | 3.000,00 | 3.000,00 |
| 0,5 | 3.225,00 | 3.217,14 | 3.233,65 |
| 0,8 | 3.360,00 | 3.354,90 | 3.382,49 |
| 1 | 3.450,00 | 3.450,00 | 3.485,50 |
| 1,5 | 3.675,00 | 3.699,71 | 3.756,97 |
| 1,8 | 3.810,00 | 3.858,13 | 3.929,89 |
| 2 | 3.900,00 | 3.967,50 | 4.049,58 |
| 4 | 4.800,00 | 5.247,02 | 5.466,36 |
| 10 | 7.500,00 | 12.136,67 | 13.445,07 |
| 20 | 12.000,00 | 49.099,61 | 60.256,61 |
| 40 | 21.000,00 | 803.590,64 | 1.210.286,38 |
| 100 | 48.000,00 | 3.522.940.352,10 | 9.807.052.117,42 |

**Fonte:** Construção em Planilha Eletrônica Excel pelo próprio autor.

Observemos, inicialmente, na Tabela 2.1, que para prazos compreendidos entre 0 a 1 unidade ($0 < m < 1$), o regime de capitalização simples descontínuo passa a produzir resultados superiores ao produzido na capitalização composta descontínua. Para $m = 1$ os valores produzidos nestas duas modalidades são iguais. E, para $m > 1$, a modalidade composta supera os resultados da simples (Figura 2.7).

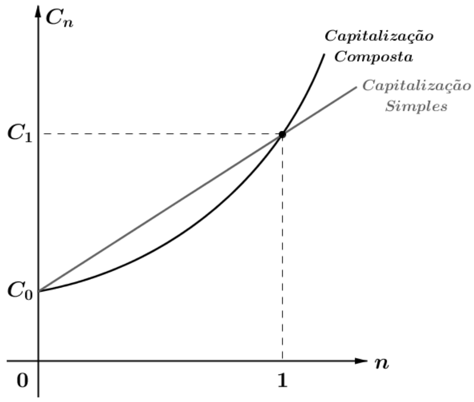


**Figura 2.7**

Mesmo assim, nenhuma das duas modalidades descontínua supera os valores acumulados na modalidade contínua.

**Teorema 2.4** *O capital acumulado ($C_n$) gerado na capitalização contínua é maior que o obtido na capitalização descontínua, considerando ambos os regimes operando à mesma taxa $i$ ($i \neq 0$) e ao mesmo prazo $n$.*

**Demonstração:** Comparativamente, entre os regimes de capitalização compostos contínuo e descontínuo, ambos possuem comportamento de uma Progressão Geométrica (PG), sendo que a primeira possui uma razão $e^i$, enquanto a segunda, uma razão $1 + i$. Para provar o teorema basta verificar que $e^i > 1 + i$ para todo $i$.

Considerando a função $f(x) = e^x - 1 - x$, onde $f'(x) = e^x - 1$. E, que:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainda, temos que:

$$f''(x) = e^x > 0.$$

Implica que $x = 0$ é um ponto de mínimo global. Então:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \; e \; f(x) > 0.$$

Logo

$$e^x - 1 - x > 0.$$

Deste modo, temos que:

$$e^i > 1 + i.$$

■

Pode-se perceber que a capitalização composta continuamente produzirá um maior valor de capital acumulado do que qualquer composição periódica para $m$ frequência, levando em consideração que se manteve para as modalidades o mesmo capital inicial $C_0$ e a mesma taxa de juros $i$. Ou seja, uma composição mais frequente irá produzir um maior valor acumulado do que numa composição de menos frequência, resaltando o caso comparativo entre a capitalização simples e composta descontínuas citada anteriormente.

## 2.3 Classificação das Taxas de Juros

As taxas de juros podem ser classificadas conforme o seu emprego específico nas diversas operações correntes do mercado financeiro, sendo de suma relevância o conhecimento sobre elas e seu correto emprego. Reforça Faro (vide [5] p. 85), ao afirmar que é de fundamental importância que os conceitos e definições pertinentes sobre as taxas de juros sejam bem entendidos, de modo que estejamos sempre seguros sobre o verdadeiro significado de cada tipo de taxa.

**Definição 2.2** ***(de Taxa Efetiva):*** *Seja a taxa de juros $i$ determinada no período de tempo $n$, chama-se de* taxa de juros efetiva *se a unidade referencial do período de tempo da taxa coincide com o da unidade de tempo da capitalização.*

São exemplos de taxas efetivas:

a. 48% ao ano, capitalizados anualmente;

b. 0,5% ao mês, capitalizados mensalmente.

**Definição 2.3** ***(de Taxa Nominal):*** *Seja a taxa de juros $i$ determinada no período de tempo $n$, chama-se de* taxa de juros nominal *se a unidade referencial do período de tempo da taxa não coincide com o da unidade de tempo da capitalização.*

São exemplos de taxas nominais:

a. 48% ao ano, capitalizados mensalmente;

b. 36,6% ao ano, capitalizados trimestralmente.

**Definição 2.4** ***(de Taxas Proporcionais):*** *Sejam duas taxa de juros distintas, $i_1$ e $i_2$, determinadas respectivamente nos períodos de tempo $n_1$ e $n_2$, chama-se de* taxa de juros proporcionais *ao ser averiquado a seguinte relação:*

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{2.6}$$

*Diz-se que $i_1$ e $i_2$ são taxas juros proporcionais entre si.*

Se considerarmos $m$ o número de vezes que o período de tempo menor cabe no período maior, e sendo $n_2$ dos dois períodos o período menor de tempo, então $n_1 = m \cdot n_2$, assim da equação (2.6) acima, teremos as taxas de juros $i$ e $i_m$ proporcionais quando

$$\frac{i}{i_m} = \frac{m \cdot n_2}{n_2},$$
$$i_m = \frac{i}{m}. \tag{2.7}$$

**Exemplo 2.2** *Determinar a taxa de juros bimestral proporcional a taxa de juros de* 48% *ao ano.*

**Solução:** Sendo $m = 6$, já que em um período anual existem 6 bimestres, teremos da equação (2.7):

$$i_6 = \frac{48}{6} = 8\% \ a.\ b.$$

**Definição 2.5** ***(de Taxas Equivalentes):*** *Sejam duas taxas de juros distintas, $i$ e $i_m$, com unidades de tempo distintos, chamamos* taxa de juros equivalentes *quando verifica-se que ambas as taxas aplicadas a um mesmo capital inicial durante um mesmo período de tempo geram o mesmo valor de capital acumulado.*

No regime de capitalização simples, considerando dois capitais iniciais $C_0$ iguais, aplicados no mesmo período $n$, um sob a taxa de juros $i$ e o outro sob a taxa $i_m$, os capitais acumulados $C_n$ e $C'_n$ resultante serão iguais se (utilizando a equação (2.1)):

$$C_0 \cdot (1 + i \cdot n) = C_0 \cdot (1 + i_m \cdot m \cdot n).$$
$$i_m = \frac{i}{m}.$$

Ao confrontarmos o resultado acima com a equação (2.7), verifica-se que no regime de capitalização simples as taxas de juros proporcionais são também taxas de juros equivalentes.

No regime de capitalização composta, considerando dois capitais iniciais $C_0$ iguais, aplicados no mesmo período $n$, um sob a taxa de juros $i$ e o outro sob a taxa $i_m$, os capitais acumulados $C_n$ e $C'_n$ resultante serão iguais se (utilizando a equação (2.3)):

$$C_0 \cdot (1 + i)^n = C_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}.$$

$$i = (1 + i_m)^m - 1. \tag{2.8}$$

**Exemplo 2.3** *A taxa de juros mensal de uma certa operadora de cartão de crédito é de* 17%. *Determine a taxa equivalente anual.*

**Solução:** Aplicando a equação (2.8), temos:

$$i = (1 + 0,17)^{12} - 1 \Rightarrow i \approx 558\% \ a.\ a.$$

### 2.3.1 Equivalência entre as Taxas Contínua e Composta

As taxas de juros dos regimes de capitalização contínua e composta apresentam resultados interessantes ao serem comparados. Para tanto, vamos nos valer da equação (2.8) e reescrevê-la da forma:

$$i = \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m - 1.$$

Onde, $i$ é a taxa efetiva anual e $t$ a taxa de juros nominal aplicada em $m$ capitalizações.

Do que decorre:

$$t = ((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1) \cdot m \Rightarrow t = \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}}.$$

Na última equação acima, o limite da taxa nominal $t$ quando $m \to \infty$ será a taxa instantânea $\delta$, assim:

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \left( \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m}} \right).$$

Note que no segundo membro da equação acima, temos uma indeterminação matemática para o limite apresentado.

Aplicando o Teorema 1.16 (Regra de L'Hospital), temos:

$$\delta = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{d}{dm}((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1)}{\frac{d}{dm}(\frac{1}{m})} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{d}{dm}((1+i)^{\frac{1}{m}})}{\frac{d}{dm}(\frac{1}{m})}.$$

Como:

$$\frac{d}{dm}(1+i)^{\frac{1}{m}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \times \ln(1+i) \times \frac{d}{dm}\left(\frac{1}{m}\right).$$

E

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{-1}{m^2}.$$

Obtém-se:

$$\frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} \times \ln(1+i) \times \frac{-1}{m^2}}{\frac{-1}{m^2}} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \times \ln(1+i).$$

Da expressão limite, temos:

$$\delta = \lim_{m\to\infty} ((1+i)^{\frac{1}{m}} \times \ln(1+i)),$$

ou seja,

$$\delta = \ln(1+i).$$

Logo, temos que:

$$1 + i = e^{\delta}. \tag{2.9}$$

Onde a equação (2.9) nos permite relacionar a taxa instantânea $\delta$ com a taxa efetiva $i$ de capitalização descontínua no regime composto.

A seguir, na Tabela 2.2, comparam-se as diversas taxas de juros (proporcionais, equivalentes e instantânea)conforme seu regime apresentado.

Tabela 2.2: Comparação entre as Taxas Proporcionais, Equivalentes e Instantâneas de Juros.

| **Taxa Efetiva Mensal** | **Regime Simples Taxa Proporcional Anual** | **Regime Composto Taxa Equivalente Anual** | **Regime Contínuo Taxa Instantânea Anual** |
|---|---|---|---|
| 1,00% | 12,00% | 12,68% | 11,94% |
| 5,00% | 60,00% | 79,59% | 58,55% |
| 10,00% | 120,00% | 213,84% | 114,37% |
| 15,00% | 180,00% | 435,03% | 167,71% |
| 20,00% | 240,00% | 791,61% | 218,79% |
| 25,00% | 300,00% | 1.355,19% | 267,77% |
| 50,00% | 600,00% | 12.874,63% | 486,56% |
| 100,00% | 1.200,00% | 409.500,00% | 831,78% |

**Fonte:** Construção em Planilha Eletrônica Excel pelo próprio autor.

# Capítulo 3

# A Teoria das Séries de Capitais com Aplicações do Cálculo

"*Se emprestares dinheiro a alguém de Meu povo, ao pobre que está contigo, não lhe serás como um credor: não lhe exigirás juros*".
Êxodo 22, 25

Conforme Lapponi (vide [11] p. 33), é fato que não se pode definir uma determinada quantidade de dinheiro sem fazer referência ao momento de sua ocorrência. Esta afirmação nos remete ao princípio básico da análise financeira: o de sempre avaliar capital no tempo.

Para as situações tratadas nesta pesquisa, utilizaremos um modelo gráfico, denominado Diagrama de Fluxo de Caixa (DFC), que é uma representação síntese do plano cartesiano Capital versus Tempo ($C \times n$), conforme Figura 3.1 abaixo. Onde a movimentação (fluxo) de uma série de capitais é descrita ao longo da linha de tempo.

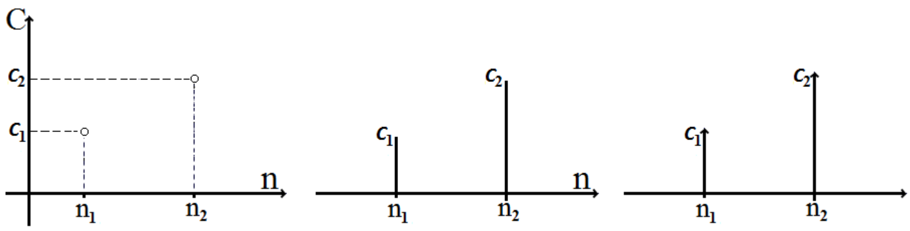


**Figura 3.1**

Neste capítulo, são estudados as séries de capitais classificadas em: *série de capitais uniformes* e *série de capitais variáveis*. Para simplificação, sem perda de generalização, as situações, aqui analisadas, consideraram a moeda e a taxa de juros desobrigada dos efeitos da inflação, além de tratar a taxa de forma constante durante a vida útil das séries estudadas.

## 3.1 Série de Capitais Uniformes

As séries de capitais uniformes têm por características possuiírem as prestações todas iguais e ocorrendo com a mesma periodicidade. E, são muito utilizados em operações financeiras de desconto de duplicatas, financiamento com pagamento em prestações, formação de fundo complementar de renda, etc. Em geral, podendo ser utilizado para fins de *Amortização* ou de *Capitalização.* Na *amortização* ocorre à equivalência entre os capitais da série e seu valor na data presente, é o caso de quando efetuamos um financiamento na data zero para quitar em prestações iguais e periódicas. Já na *capitalização*, ocorre mediante a equivalência entre os capitais da série e seu valor futuro na data $n$ qualquer, como quando aplicamos em renda fixa mensal para formação futura de um fundo. A série de capitais também pode ser classificada como *finitas*, quando temos um número $n$ de períodos a trabalhar, mas quando este número $n$ de períodos tende ao infinito, a série de capitais é dita *perpétua.*

E, ainda, conforme a data do primeiro capital na série uniforme, esta pode ser classificada em *postecipada* ou *antecipada.* A série de capitais uniforme postecipada é aquela em que o primeiro capital ocorre um período $n = 1$ (data 1), já a série de capitais uniforme antecipada, o primeiro capital ocorre no período $n = 0$ (data 0).

**Teorema 3.1** *O Valor Presente ($C_0$) de uma série de capitais uniformes postecipados de $n$ valores iguais ($P$), onde $i$ é a taxa de juros composto, é igual a:*

$$C_0 = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.1}$$

**Demonstração:** Seja o DFC a seguir (Figura 3.2) de uma série de capitais uniformes postecipados ($P$), para determinação do valor presente ($C_0$):

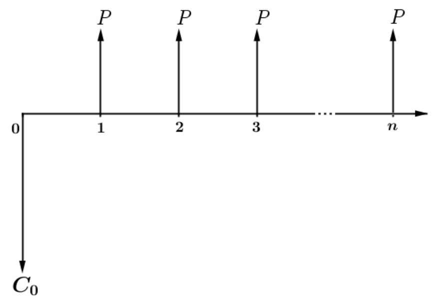


**Figura 3.2**

Valendo-se da equação (2.3), pode-se verificar que o valor presente equivalente da série de capitais na data zero, será:

$$C_0 = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

ou seja,

$$C_0 = P \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n}\right].$$

Onde dentro dos colchetes tem-se a soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão geométrica (PG), com primeiro termo e razão iguais a $\frac{1}{(1+i)}$. E, como a soma $(S_n)$ dos $n$ primeiros termos de uma PG é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}.$$

Teremos:

$$C_0 = P \cdot \left[ \frac{\frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{1+i}}{1 - \frac{1}{1+i}} \right] = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

■

**Corolário 3.1.1** *O Valor Presente ($C_0$) de uma série de capitais uniformes postecipados e perpétuos de valores iguais a $P$, sendo $i$ a taxa de juros, é igual a:*

$$C_0 = \frac{P}{i}. \tag{3.2}$$

**Demonstração:** Fazendo $n$ tender para infinito na equação (3.1), teremos:

$$\begin{aligned} C_0 &= \lim_{n\to\infty} \left( P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right) \\ &= \frac{P}{i} \lim_{n\to\infty} \left[ 1-(1+i)^{-n} \right] \\ &= \frac{P}{i}. \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.2** *O Valor Futuro ($C_n$) de uma série de capitais uniformes postecipados de $n$ valores iguais ($P$), onde $i$ é a taxa de juros composto, é igual a:*

$$C_n = P \cdot \frac{((1+i)^n - 1)}{i}. \tag{3.3}$$

**Demonstração:** Seja o DFC (Figura 3.3) de uma série de capitais uniformes postecipados ($P$).

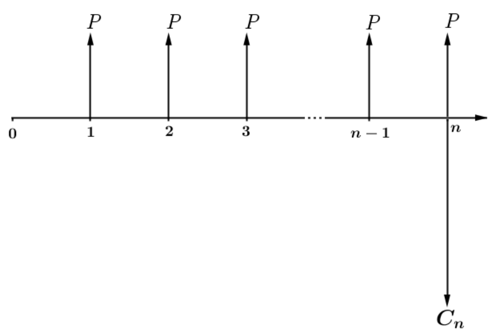


**Figura 3.3**

Para determinação do valor futuro ($C_n$), valendo-se da equação:

$$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow C_0 = C_n \cdot (1+i)^{-n}.$$

Substituindo-a na equação (3.1), tem-se:

$$C_n \cdot (1+i)^{-n} = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

logo,

$$C_n = P \cdot \frac{(1+i)^{n-1}}{i}.$$

■

Para as séries de capitais uniformes e perpétuas não cabe à determinação de valores futuros, já que como para taxas de juros positivas, este resultará num valor infinitamente grande.

**Teorema 3.3** *O Valor Presente ($C_0$) de uma série de capitais uniformes antecipados de $n$ valores iguais ($P$), onde $i$ é a taxa de juros composto, é igual a:*

$$C_0 = P \cdot (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.4}$$

**Demonstração:** Para uma série de capitais uniformes antecipados (ver Figura 3.4) pode-se, a partir de uma série de capitais uniformes postecipados, determinar seu valor presente deslocando todos os capitais ($P$) um período em direção a data zero. Tornando assim o valor do capital deslocado para a data anterior igual ao valor original dividido pelo fator $(1+i)$. Neste caso e, valendo-se da equação (3.1), tem-se:

$$C_0 = P \cdot (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

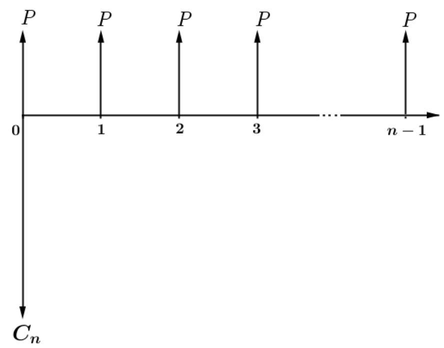


**Figura 3.4**

■

**Corolário 3.3.1** *O Valor Presente ($C_0$) de uma série de capitais uniformes antecipados e perpétuos de valores iguais a $P$, sendo $i$ a taxa de juros, é igual a:*

$$C_0 = P \cdot \frac{1+i}{i}. \tag{3.5}$$

**Demonstração:** Partindo do mesmo raciocínio realizado na demonstrar da equação (3.4) e utilizando-se da equação (3.2), tem-se:

$$C_0 = P \cdot \frac{1+i}{i}.$$

∎

**Teorema 3.4** *O Valor Futuro ($C_n$) de uma série de capitais uniformes antecipados de $n$ valores iguais ($P$), onde $i$ é a taxa de juros composto, é igual a:*

$$C_n = P \cdot (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{3.6}$$

**Demonstração:** Partindo do mesmo raciocínio realizado na demonstrar da equação (3.4) e utilizando-se da equação (3.3), tem-se:

$$C_n = P \cdot (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

∎

### 3.1.1 As Séries de Capitais Uniformes e a Amortização de Dívidai

Ao contrair uma dívidas, em geral, existem duas formas de quitação: uma é realizar um único pagamento ao final de um período; outra, é pagá-la parceladamente ao longo de diversos períodos. Segundo Lima (vide [13] p. 55), quando se paga parceladamente um débito, cada pagamento efetuado tem dupla finalidade. Uma parte do pagamento quita os juros e a outra amortiza (abate) a dívida. Se tais parcelas são iguais e devolvidas em períodos iguais, temos assim uma série de capitais uniformes; que constituem um dos elementos das chamadas planilhas de amortização de dívidas mui usual, a Tabela Price (ou Sistema de Amortização Francês).

**Teorema 3.5** *No sistema de amortização francês (SAF), sendo $n$ o número de pagamentos e $i$ a taxa de juros, temos:*

$$\begin{aligned}
P_k &= P = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}},\\
C_k &= C_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}},\\
J_k &= iC_{k-1},\\
A_k &= P_k - J_k,
\end{aligned}$$

*onde $P_k$, $C_k$, $J_k$ e $A_k$ são, respectivamente, a prestação, o saldo devedor após pagamento da prestação, a parcela de juros e a parcela de amortização.*

**Demonstração:** A primeira equação é a mesma apresentada no Teorema 3.1.

A segunda, representa a dívida a ser liquidada, posteriormente, por $n-k$ pagamentos sucessivos iguais a $P_k$ e, portanto, novamente da equação do Teorema 3.1, temos:

$$C_k = P_k\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de $P_k$, obteremos:

$$C_k = C_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\cdot\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i} = C_0\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

A terceira, representa a parcela de juros, onde são gerados a partir da incidência da taxa de juros sobre o saldo devedor no período anterior, logo: $J_k = iC_{k-1}$.

Na última, como a parcela é formada pelo juros com a amortização, temos que: $A_k = P_k - J_k$.

■

Há diversos sistemas de amortização utilizados no Brasil, além do SAF. Outro que destacamos aqui por causa de sua aceitação no mercado financeiro é o chamado Sistema de Amortização Constante (SAC). No qual, tem por principal característica as amortizações do saldo devedor sendo todas iguais ao longo do período.

**Teorema 3.6** *No sistema de amortização constante (SAC), sendo $n$ o número de pagamentos e $i$ a taxa de juros, temos:*

$$\begin{aligned} P_k &= A_k + J_k,\\ C_k &= C_0\frac{n-k}{n},\\ J_k &= iC_{k-1},\\ A_k &= \frac{C_0}{n}, \end{aligned}$$

*onde $P_k$, $C_k$, $J_k$ e $A_k$ são, respectivamente, a prestação, o saldo devedor após pagamento da prestação, a parcela de juros e a parcela de amortização.*

**Demonstração:** Como a dívida $C_0$ é devolvida em $n$ amortizações iguais, cada amortização é igual a:

$$A_k = \frac{C_0}{n}.$$

O saldo devedor, após $k$ amortizações, será:

$$C_k = C_0 - k\frac{C-0}{n} = C_0\frac{n-k}{n}.$$

As duas outras equações segue a mesma demonstração apresentada no Teorema 3.5.

■

## 3.2 Série de Capitais Variáveis

As séries de capitais variáveis têm por característica apresentar valores diferentes de capitais, além de poder, ou não, ocorrer periodicidade entre eles. Estas também são chamadas de séries diferidas. Utilizaremos a abordagem dos métodos do Valor Presente Líquido (VPL) e da Taxa Interna de Retorno (TIR) nas séries de capitais variáveis para resolução de situações que envolvam determinação do valor a investir inicialmente, ou para tomada de decisão em comprar, ou verificar a taxa que satisfaz a série de capitais, entre outras situações, até mesmo em séries de capitais uniformes.

### 3.2.1 Determinação do Valor Presente Líquido

**Definição 3.1 (de Valor Presente Líquido)** *Sendo $i > -1$ e para uma série de capitais onde o fluxo de caixa líquido é dado por $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, em que $a_0 < 0$, $a_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, é definida a função Valor Presente Líquido, denotada por $VPL(i)$, como:*

$$VPL(i) = \sum_{j=0}^{n} a_j (1+i)^{-j}. \tag{3.7}$$

De acordo com Zentgraf (vide [19] p. 392), o método do $VPL$ consiste em calcular o valor presente de cada capital gerado na série e, em seguida, subtrair do valor investido ($I$) que foi aplicado na data zero. Assim, o critério para aceitar ou rejeitar projetos de investimentos usando o método do $VPL$ será: quando $VPL \geq 0$, indica que quantia deve ser acrescentada ao investimento para que ele seja realizado, o projeto deve ser aceito; caso, $VPL < 0$, o valor encontrado será a quantia que o investidor deve diminuir do investimento, logo ele deve ser rejeitado.

**Exemplo 3.1** *Considere a série de capitais, projeto $M = \{-40, 10, 30, 30\}$ para o qual se deseja obter o $VPL$ considerando uma taxa de rentabilidade de $10\%$ ao período. Verificar a viabilidade financeira, deste projeto, aceitá-lo ou rejeitá-lo com base no método do $VPL$.*

**Solução:** A solução consiste em resolver a função $VPL$ para a taxa de 10%, ou seja:

$$\begin{aligned} VPL(10\%) &= -40 + 10 \cdot (1+0,10)^{-1} + 30 \cdot (1+0,10)^{-2} + 30 \cdot (1+0,10)^{-3} \\ &= 16,42. \end{aligned}$$

Como o valor do $VPL > 0$, o projeto apresenta viabilidade financeira, ou seja, ele deve ser aceito.

Caso supondo, a série de capitais constantes ($a_j = P$), o $VPL$ é dado por:

$$VPL(i) = a_0 + P \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}.$$

O $VPL$ representa, em ambos os casos (série de capitais variáveis ou série de capitais uniformes), o retorno ou lucro econômico, medido em valores monetários, no qual se deseja ter com o projeto de investimento.

### 3.2.2 Determinação da Taxa Interna de Retorno

**Definição 3.2 (de Taxa Interna de Retorno - TIR)** *Sendo $i > -1$ e para uma série de capitais onde o fluxo de caixa líquido é dado por $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, em que $a_0 < 0$, $a_j \geq 0$, para $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, é definida Taxa Interna de Retorno, denotada por $i^*$, a taxa de rentabilidade que anula a função Valor Presente Líquido, ou seja:*

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(1+i^*)^{-j} = 0. \tag{3.8}$$

Para Ferreira (vide [8] p. 398), a avaliação por este critério é simplesmente a determinação de uma taxa na equação representativa da função valor presente líquido comparando-a com a taxa mínima de atratividade ($i_{MIN}$) para o investidor. Ou seja, se $i^* \geq i_{MIN}$, o projeto deve ser aceito, já que a taxa supera ou iguala as expectativas da mínima taxa desejada; e, se $i^* < i_{MIN}$, o projeto deve ser rejeitado.

Mas o cálculo da $TIR$ consiste na determinação das raízes de um polinômio de grau $n$ e, como aponta Faro (vide [5] p. 58), o problema passa a ser o de determinar a existência e unicidade de uma raiz que corresponda a uma taxa de juros no intervalo considerado. Esta taxa pode existir, ou não, e, existindo pode não ser única.

Devido a esta dificuldade, limitamos nossos estudos as séries de capitais variáveis, de sequências de fluxos de caixa de $n$ períodos da forma $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, uma vez que ocorre um desembolso na data zero, igual a $a_0 = -I$ (onde $-I$ representa uma saída de recurso financeiro, ou seja, um investimento realizado), mediante incidência de uma taxa de rentabilidade $i$, que promova a equivalência financeira entre os conjuntos de capitais respectivamente formados pelo investimento e pela sucessão de receitas $a_j$ , $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, ao final de cada um dos $n$ períodos. Abordando assim, só as séries de capitais variáveis de investimentos tipo simples, onde $a_0 < 0$ e $a_j \geq 0$, ou seja, fluxos de caixa onde ocorre apenas uma mudança de sinal, além de que nestas séries o somatório das receitas supera o do investimento (ver Figura 3.5).

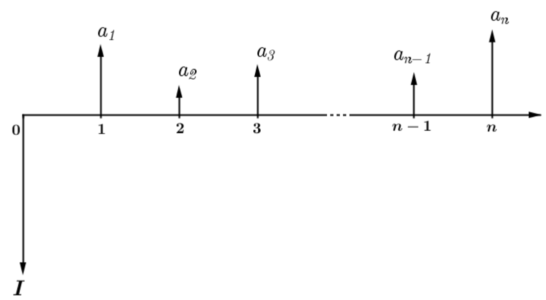


**Figura 3.5**

**Teorema 3.7** *A taxa interna de retorno $i^*$ de uma série de capitais para fluxos de investimento simples existe e é única.*

**Demonstração:** Consideremos a equação (3.8), temos:

$$VPL(i^*) = \sum_{j=0}^{n} a_j(1+i^*)^{-j} = 0.$$

Substituindo $x = \dfrac{1}{1+i^*}$ na equação anterior e reescrevendo-a, retirando da forma de somatório, teremos:

$$VPL(i^*) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n = 0.$$

Observe que como $i^* > -1$ (ter-se-ia $i^* = -1$ somente se não ocorresse rendimento periódico e, se o principal investido $a_0$ não fosse restituído), então tem-se $x > 0$. E, como os coeficientes da equação possuem uma única inversão de sinais, assim o Teorema de Descartes para regra de sinais, nos assegura a existência de uma única raiz real positiva para a equação acima. Ainda:

- Se $i \to -1$, então $VPL(i) = +\infty$, pois $a_n > 0$.
- Se $i = 0$, então $VPL = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n - I$.
- Se $i \to +\infty$, então $VPL(i) = a_0 < 0$.

Sendo que:

$$\frac{dVPL(i)}{di} = -\sum_{j=0}^{n} j \cdot a_j(1+i)^{-j-1} < 0, \text{ pois } a_j \geq 0 \text{ para } j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Assim, pela continuidade da função $VPL(i)$, ela é decrescente e se anula uma e somente uma vez para o campo ao qual foi definida.

∎

E, ainda, como a função $VPL$ tem concavidade voltada para cima, já que:

$$\frac{d^2VPL(i)}{di^2} = \sum_{j=0}^{n} j \cdot (j+1) \cdot a_j(1+i^*)^{-j-2} > 0$$

Temos, portanto, que a função $VPL(i)$ é decrescente, possui concavidade voltada para cima, assíntota em $a_0 = -I$ quando $i \to \infty$ e uma raiz real positiva $i^*$. Observe o gráfico da Figura 3.6 apresentado a seguir.

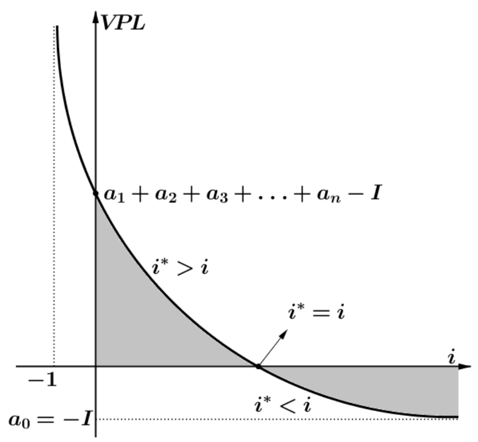


**Figura 3.6**

De forma resumida, ainda pelo exposto, para critério de decisão de investimento por base no $VPL$, temos:

- Se $VPL \geq 0$, então $i^* \geq i$ implica que o investimento é viável financeiramente.
- Se $VPL < 0$, então $i^* < i$ implica que o investimento é inviável financeiramente.

A determinação da Taxa Interna de Retorno de uma série de capitais quaisquer não é uma tarefa trivial. Neste estudo, será abordado um procedimento interativo para obtenção proximal da $TIR$, o Método de Newton-Raphson.

O uso deste algoritmo, como já apresentado no Capítulo 1, consiste em aproximar o valor da solução, neste caso da taxa desejada, substituindo a função $VPL(i)$ por sua tangente (derivada) em pontos que sabemos pertencer à curva desta função; fornecendo no processo um zero de $VPL$, ou seja, um número $i^*$ tal que $VPL(i^*) = 0$.

A partir de projetos do tipo investimentos simples apontado no Teorema 3.7, note que o comportamento da função $VPL(i)$ é estritamente convexa nestes casos (observe Figura 3.6), pois:

Graficamente, pode-se verificar a aplicação do método de Newton-Raphson a esta função, Figura 3.7. Perceba no gráfico que o número $i^*$ toca o eixo das abscissas. Para uma aproximação de $i^*$, escolhemos um número $i_0$, que pelo gráfico encontra-se próximo ao valor de $i^*$. Considerando então a reta tangente $T_1$ ao gráfico de $VPL$ no ponto $(i_0, VPL(i_0))$, que intercepta o eixo das abscissas no ponto $i_1$. O número $i_1$ serve como uma segunda aproximação de $i^*$. Repetindo então o processo com a reta tangente $T_2$ no ponto $(i_1, VPL(i_1))$, que intercepta o eixo das abscissas em $i_2$, que é um número com uma nova aproximação do número $i^*$. Os números $i_0$, $i_1$, $i_2$, e assim por diante, são aproximações que distam cada vez menos do número $i^*$.

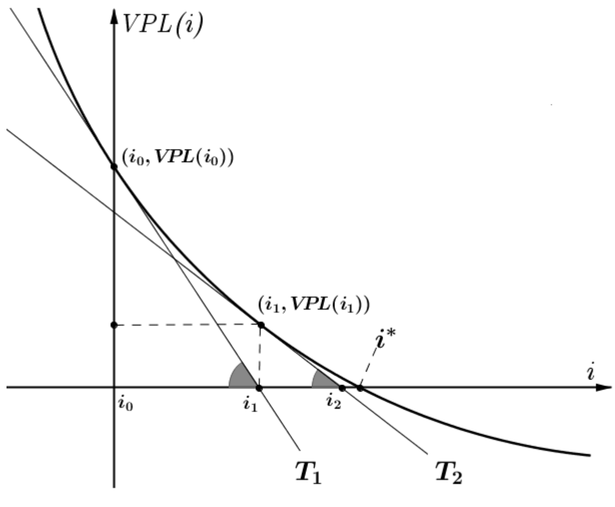


**Figura 3.7**

Para a determinação destas aproximações sucessivas $i_0$, $i_1$, $i_2$,... a partir da primeira aproximação $i_0$, ver Capítulo 1 subseção 1.3.4 desta trabalho. Poderemos, então, escrever nossa equação de aproximação recorrente da forma:

$$i_{n+1} = i_n - \frac{VPL(i_n)}{VPL'(i_n)} \text{ se } VPL'(i_n) \neq 0.$$

**Exemplo 3.2** *Obter uma aproximação para a taxa interna de retorno utilizando o algoritmo de Newton-Raphson e considerando o caso de um projeto de investimento, no qual chamaremos de projeto $K$ (ou simplesmente $K$), que será identificado pela sequência de séries de capitais líquidos:* $K = \{-100, 40, 50, 30\}$.

**Solução:** Primeiramente, é fácil ver que $K$ representa um fluxo de investimento simples, assim possibilitando a aplicação do Algoritmo de Newton-Raphson na obtenção da $TIR$, assim:

$$VPL(i) = -100 + 40 \cdot (1+i)^{-1} + 50 \cdot (1+i)^{-2} + 30 \cdot (1+i)^{-3},$$

onde a derivada da função $VPL(i)$, será:

$$VPL'(i) = -40 \cdot (1+i)^{-2} - 100 \cdot (1+i)^{-3} - 90 \cdot (1+i)^{-4}.$$

Para $i_0 = 0$, temos:

$$i_1 = i_0 - \frac{VPL(i_0)}{VPL'(i_0)} = \frac{-20}{-230} \approx 0,086956522.$$

A aproximação inicial para a taxa da série de capitais é $8,6956\%$ ao período $(< i^*)$.

Agora, partindo da função valor presente líquido e fazendo $x = \frac{1}{1+i}$, teremos:

$$i_2 = i_1 - \frac{VPL(i_1)}{VPL'(i_1)} = 0,086956522 - \frac{2,48064}{-176,2001664} \approx 0,101035056.$$

Nossa segunda aproximação é $10,1035\%$ ao período, ainda um resultado inferior a $i^*$.

Procedendo de maneira análoga, teremos o resultado descrito na Tabela 3.1 abaixo, elabora com auxílio de planilha eletrônica.

Tabela 3.1: Resultados de $i_1$ até $i_6$ pelo Método de Newton-Raphson

| **Interações** | $i_n$**(ao período)** |
|---|---|
| $i_0$ | $0,00000\%$ |
| $i_1$ | $8,69565\%$ |
| $i_2$ | $10,10351\%$ |
| $i_3$ | $10,13309\%$ |
| $i_4$ | $10,13310\%$ |
| $i_5$ | $10,13310\%$ |
| $i_6$ | $10,13310\%$ |

**Fonte:** Construção em Planilha Eletrônica Excel pelo próprio autor.

Como $VPL(i_3)$ apresenta um resultado suficientemente pequeno, podemos afirmar com precisão de quatro casas decimais de sua forma percentual, que a taxa interna de retorno do fluxo $K$ é $10,1331\%$ ao período.

No entanto, como nos alerta Faro (vide [5] p. 68), para certas operações financeiras, onde existem séries de capitais nos quais a taxa interna de retorno não existe ou não é única (...) que em tais situações, o conceito da taxa interna não deve ser adotado. Passando a sugerir o método do $VPL$.

**Exemplo 3.3** *Considere as duas séries de capitais (projetos) que representam alternativas de investimentos com mudanças de sinais em seus fluxos de caixa. Determine o valor da $TIR$ e comente o resultado obtido em cada fluxo como seleção de alternativa de investimento.*

**Projeto A**

| Ano | Fluxo de Caixa |
|---|---|
| 0 | $-\$1.000,00$ |
| 1 | $\$5.000,00$ |
| 2 | $-\$4.600,00$ |

**Projeto B**

| Ano | Fluxo de Caixa |
|---|---|
| 0 | $\$1.000,00$ |
| 1 | $-\$2.000,00$ |
| 2 | $\$1.500,00$ |

**Solução:** Calculando a $TIR$ do Projeto A, iguala-se a função $VPL$ a zero:

$$VPL(i^*) = -1000 + \frac{1400}{1+i^*} + \frac{1600}{(1+i^*)^2} = 0 \Rightarrow -1000 \cdot (1+i^*)^2 + 1400 \cdot (1+i^*) + 1600 = 0.$$

Usando a fórmula para determinação da equação quadrática acima, tem-se:

$$(1+i^*) = \frac{5150 \pm \sqrt{(5150)^2 - 4 \cdot 1000 \cdot 4600}}{2 \cdot 1000} \Rightarrow i^* = 15\% \; e \; i^* = 300\%.$$

Consequentemente, a função valor presente líquido, anula-se em dois pontos (15% e 300%), o que implica que o projeto A não pode ser avaliado pela aplicação estrita do método da TIR.

Analogamente, ao procedimento descrito acima, para o cálculo da $TIR$ do Projeto B, tem-se:

$$VPL(i^*) = 1000 - \frac{2000}{1+i^*} + \frac{1500}{(1+i^*)^2} = 0 \Rightarrow (1+i^*) = \frac{2000 \pm \sqrt{-2000000}}{2000}.$$

Note que a solução para a $TIR$ do projeto B é um número imaginário, logo inconsistente para o propósito de aplicação do método da $TIR$ para seleção de alternativa de investimento.

Como percebido nas séries de capitais para os projetos acima, projetos com fluxos de caixa não convencionais, o método da $TIR$ deve ser evitado. Sugere-se a utilização do método do $VPL$ como critério de seleção das alternativas.

## 3.3 Séries Contínuas

Abordaremos nesta seção duas situações gerais envolvendo séries contínuas aplicadas às áreas financeiras e econômicas. São elas: o seu uso nas séries uniformes discretas, com a diferença que nesta, a capitalização ocorrerá por taxa de juros contínuos e, não por taxa de juros composta discreta; já a outra utilização, envolvem situações que têm por uma estratégia encontrar a soma de depósitos em função contínua do tempo, para tanto, podemos aproximar tal soma usando integral definida.

### 3.3.1 Séries Uniformes Discretas com Capitalização Instantânea

Na uniformidade discreta, como visto anteriormente neste capítulo, temos dois processos a observar para séries de capitais: a postecipada e a antecipada. Agora, consideraremos os pagamentos a serem levados a valor futuro sendo capitalizados com taxa de juros contínuos.

**Teorema 3.8** *O capital acumulado $C_n$ numa série de capitais uniformes postecipados, após n depósitos discretos P remunerados à taxa de juros contínuos i será igual a:*

$$C_n = P \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right). \tag{3.9}$$

**Demonstração:** Como temos $n$ depósitos $P$, que serão levados a um instante futuro para gerarem $C_n$ a efeito de uma taxa de juros contínuos $i$, a sequência assim formada constitui uma progressão geométrica de razão $e^i$, cuja soma é:

$$C_n = P + Pe^i + Pe^{2i} + \cdots + Pe^{(n-1)i}.$$

O resultado é imediato ao calcularmos a soma de termos dessa PG finita, logo:

$$C_n = P \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right).$$

■

**Teorema 3.9** *O capital incial $C_0$ numa série de capitais uniformes postecipados, nescessário para gerar n pagamentos discretos P remunerados à taxa de juros contínuos i será igual a:*

$$C_0 = P \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right) \frac{1}{e^{i \cdot n}}. \tag{3.10}$$

**Demonstração:** Esta prova é o resultado imediato da aplicação da equação (2.4) na equação (3.9):

$$C_n = C_0 \cdot e^{i \cdot n} = P \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right) \Rightarrow C_0 = P \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right) \frac{1}{e^{i \cdot n}}.$$

■

**Teorema 3.10** *O capital acumulado $C_n$ numa série de capitais uniformes antecipados, após $n$ depósitos discretos $P$ remunerados à taxa de juros contínuos $i$ será igual a:*

$$C_n = Pe^i \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right). \tag{3.11}$$

**Demonstração:** Como a série antecipada encontra-se defasada de um período para os $n$ depósitos discretos $P$, sob incidência da taxa de juros contínua $i$, o capital acumulado será o resultado imediato do produto de $e^i$ na equação (3.9), logo:

$$C_n = Pe^i \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right).$$

■

**Teorema 3.11** *O capital incial $C_0$ numa série de capitais uniformes antecipados, nescessário para gerar $n$ pagamentos discretos $P$ remunerados à taxa de juros contínuos $i$ será igual a:*

$$C_0 = Pe^i \cdot \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{e^i - 1} \right) \frac{1}{e^{i \cdot n}}. \tag{3.12}$$

**Demonstração:** Esta prova é análoga a apresentada para equação (3.10).

■

### 3.3.2 Valor Presente e Valor Futuro de um Fluxo de Renda

De acordo com Bueno (vide [3] p. 63), nas séries contínuas, os depósitos são uma função contínua do tempo $P(t)$. A determinação do capital inicial neste tipo de série, resulta em encontrar a soma de todos os depósitos contínuos, levados cada um do período $t$ ao valor inicial, período $t = 0$, ou seja, cada valor de $P(t)$ deverá ser dividido por $e^{i \cdot n}$. E, é importante salientar, que não existe diferença nestas séries entre as séries antecipada e postecipada, já que trata-se de uma série com depósitos contínuos. Também, destacamos aqui o uso da equação de valor presente em substituição a denotação capital inicial ($C_0$) e, valor futuro, em lugar de capital acumulado ($C_n$).

**Teorema 3.12** *O valor presente $C_0$ de um fluxo de rendas fixas de $P(t)$ unidades monetárias por prazo de ganhos no período $n$, que remunera a taxa de juros compostos continuamente $i$, será dado por:*

$$C_0 = P \left( \frac{e^{i \cdot n} - 1}{i} \right) \frac{1}{e^{i \cdot n}}. \tag{3.13}$$

**Demonstração:** Como todos os depósitos contínuos são divididos por $e^{i \cdot n}$, então a função depósitos contínuos a valor presente será dada por $P(t)e^{-i \cdot n}$. E, para todos os valores da função $P(t)$ no instante $t = 0$, deslocados do instante $t = n$, podemos utilizar integral para determinação desta soma de depósitos:

$$C_0 = \int_0^n P(t)e^{-i \cdot n} dt.$$

Para o caso em que $P(t) = P$, ou seja, a renda é fixa, temos:

$$C_0 = \int_0^n Pe^{-i\cdot t}dt = P\int_0^n e^{-i\cdot t}dt = \frac{-P}{i}e^{-it}\Big|_0^n = \left(\frac{-P}{i}e^{-in}\right) - \left(\frac{-P}{i}\right)$$
$$= P\left(\frac{1-e^{-i\cdot n}}{i}\right) = P\left(\frac{e^{i\cdot n}-1}{i}\right)\frac{1}{e^{i\cdot n}}.$$

■

**Corolário 3.12.1** *Caso em receitas fixas que continuam indefinidamente, o valor presente total da renda é:*

$$C_0 = \frac{P}{i}. \tag{3.14}$$

**Demonstração:** É só verificar que para todos os valores da função $P(t)$ no instante $t = 0$, o deslocamento virá do instante $t \to \infty$, assim a soma de depósitos será:

$$C_0 = \int_0^\infty Pe^{-i\cdot t}dt = P\int_0^\infty e^{-i\cdot t}dt = \frac{-P}{i}e^{-it}\Big|_0^\infty = \frac{P}{i}.$$

■

**Exemplo 3.4** *Uma empresa está avaliando duas alternativas de investimento. A primeira, alternativa Alfa, propõe um investimento inicial de* $R\$$ 41.000,00*, já a segunda alternativa Beta, requer investimento inicial de* $R\$$ 87.000,00*. O setor financeiro responsável estimou que, adotado a alternativa Alfa, acarretaria um fluxo de renda líquida gerado à taxa* $R(n) = 45.000$ *reais por ano, no entanto a alternativa Beta acarretaria num fluxo de renda líquida gerada à taxa de* $R^*(n) = 58.500$ *reais por ano. Ambos pelos próximos quatro anos. Se a taxa de juros pelos próximos seis anos for de 9% ao ano, qual das duas alternativas de investimento geraria maior renda líquida ao final de quatro anos?*

**Solução:** **Alternativa Alfa:** Aplicando na equação (3.13), o desembolso inicial é de $R\$$ 41.000,00 (que será deduzido), a taxa de geração de renda $R(n) = 45.000$, a taxa de juros contínua $i = 0,09$ e o período de tempo considerado $T = 4$ anos, teremos:

$$C_{0_\alpha} = 45000\cdot\left(\frac{e^{0,09\cdot 4}-1}{0,09}\right)\cdot\frac{1}{e^{0,09\cdot 4}} - 41000 \cong 110.161.$$

**Alternativa Beta:** Aplicando novamente na equação (3.13), sendo agora o desembolso inicial de $R\$$ 87.000,00 (que será deduzido), a taxa de geração de renda $R^*(n) = 58.500$, a taxa de juros contínua $i = 0,09$ e o período de tempo considerado $T = 4$ anos, teremos:

$$C_{0_\beta} = 58500\cdot\left(\frac{e^{0,09\cdot 4}-1}{0,09}\right)\cdot\frac{1}{e^{0,09\cdot 4}} - 87000 \cong 109.510.$$

Resposta: A alternativa Alfa deverá ser escolhida, pois gera o fluxo de renda líquida maior que o obtido na Alternativa Beta.

**Exemplo 3.5** *Uma empresa espera que suas receitas fixas de R\$ 1.800,00 permaneçam continuamente. Determine o valor presente se estes recursos são aplicados a uma taxa anual de 9%, continuamente.*

**Solução:** Usando a equação (3.14), temos:

$$C_0 = \frac{1800}{0,09} = 20000.$$

**Teorema 3.13** *O valor futuro $C_n$ de um fluxo de rendas fixas de $P(t)$ unidades monetárias por prazo de ganhos no período $n$, que remunera a taxa de juros compostos continuamente $i$, é dado por:*

$$C_n = P\left(\frac{e^{i\cdot n}-1}{i}\right). \tag{3.15}$$

**Demonstração:** A prova é imediata pela substituição da equação (2.5) na equação (3.13), logo:

$$C_n = P\left(\frac{e^{i\cdot n}-1}{i}\right).$$

■

**Exemplo 3.6** *Uma série de pagamentos líquidos contínuos no valor de US\$ 2 milhões são efetuados por uma companhia pelo prazo de 10 anos. Obtenha o valor futuro dessas receitas, sendo conhecida a taxa de juros contínuos aplicado de 16% anual.*

**Solução:** Aplicando diretamente na equação (3.15), tem-se:

$$C_n = 2\cdot\left(\frac{e^{0,16\cdot 10}-1}{0,16}\right)$$
$$C_n \cong 49,4.$$

Resposta: aproximadamente U\$ 49,4 milhões.

### 3.3.3 Formação de Capital por Investimento

Consideremos $C(n)$ o valor futuro formado por um capital em cada instante $n$ e $i = i(n)$ a taxa de investimento líquido por período de tempo, então:

$$C(n) = \int i(n)dn$$

é o valor futuro acumulado existente ou fluxo do valor acumulado no instante $n$; logo, o valor acumulado no intervalo $n_1 \leq n \leq n_2$ será:

$$\int_{n_1}^{n_2} i(n)dn = C(n_2) - C(n_1).$$

**Exemplo 3.7** *Estima-se que um determinado investimento seja dado pela taxa* $i(n) = 10n^{\frac{2}{3}}$*, em milhões de dólares/ano e que seu capital inicial é* $C(0) = 100$*, milões de dólares. Determinar o fluxo para o valor acumulado existente deste investimento para o período do 1º ano ao final do 6º ano.*

**Solução:**

$$C(n) = \int 10n^{\frac{2}{3}} dn = 6n^{\frac{5}{3}}$$

Como, $1 \leq n \leq 6$, temos:

$$\int_1^6 10n^{\frac{2}{3}} dn = 6n^{\frac{5}{3}} \Big|_1^6 \approx 112,87.$$

# Capítulo 4

# A Teoria da Análise Marginal

"*Se eu vi mais (do que você e Descartes) é porque me coloquei sobre ombros de gigantes.*".
- Sir Isaac Newton para Robert Hooke

Para diversos campos das ciências a utilização das derivadas se faz presente. Mas essa aplicabilidade das derivadas terá uma interpretação específica no estudo financeiro. Neste, a derivada de uma função é a taxa de variação, que para a economia e administração, tem significado identificado como marginalidade. Segundo Murolo (vide [15] p. 258), em todas as análises, será necessário ter clareza do significado econômico da palavra marginal.

O uso das taxas de variação pode ser descrita pelos conceitos de média ou marginal (de margem). Conforme Leithold (vide [12] p. 169), o conceito de média expressa à variação de uma quantidade, enquanto que o conceito de marginal refere-se à variação instantânea na primeira quantidade que resulta de uma pequena variação instantânea na segunda quantidade.

A análise marginal proporciona o aporte necessário ao estudo de certas funções que trataremos neste capítulo, tais como: custo, receita e lucro; também ao conceito de elasticidade associada ao preço e à demanda de um produto em relação a sua receita ou despesa.

## 4.1 Custo Marginal

**Definição 4.1 (de Custo Marginal)** *O custo marginal de certo produto é aproximadamente a variação (acréscimo ou redução) do custo total ao se produzir uma unidade adicional deste produto.*

Assim, como o custo marginal é uma derivada, ou seja, a função custo marginal é definida como a derivada da função custo, seu valor fornece a taxa de variação instantânea do custo em relação ao nível de produção, quando o nível da produção variar em uma unidade. Sendo $C = C(x)$ a função custo total de produção para certo produto e, admita $C(x)$ diferenciável, então, o custo marginal é definido e representado por $C'(x)$.

Para uma produção de $q$ unidades de um produto, o custo marginal $C'(q)$ representa aproximadamente a quantidade $C(q+1) - C(q)$ que irá corresponder ao aumento do custo quando o nível da produção variar em uma unidade.

Vamos determinar o chamado *custo médio* da produção de cada unidade $q$ de um produto, bastando para isso dividir o custo total pelo número de unidades produzidas, ou seja:

$C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, onde $C_M$ é denotada por **função custo médio**.

Lembremos que se uma função $y = f(x)$, definida num intervalo $[x_1, x_2]$, então a sua derivada $\dfrac{dy}{dx}$ pode ser interpretada como a taxa de variação de $y$ com relação à $x$.

Ao variar $x$, de $x_1$ a $x_2$, temos que a variação em $x$ será:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

E, ao variar, correspondentemente $y$, teremos:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

O quociente destas variações será:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Esta é a taxa média de variação de $f(x)$ em relação à $x$, no intervalo $[x_1, x_2]$.

Para o caso em que $x_2 = x_1 + h$, onde $h$ é a variação sofrida de $x_1$ a $x_2$, então o valor de $x_2 - x_1$ é $(x_1 + h) - x_1$ ou $h$, sendo a taxa de variação média da função $f(x)$ no intervalo $[x_1, x_2]$ igual a:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

Geometricamente, este quociente pode ser interpretado como a inclinação de reta secante $PQ$ no ponto $P$, conforme Figura 4.1 a seguir.

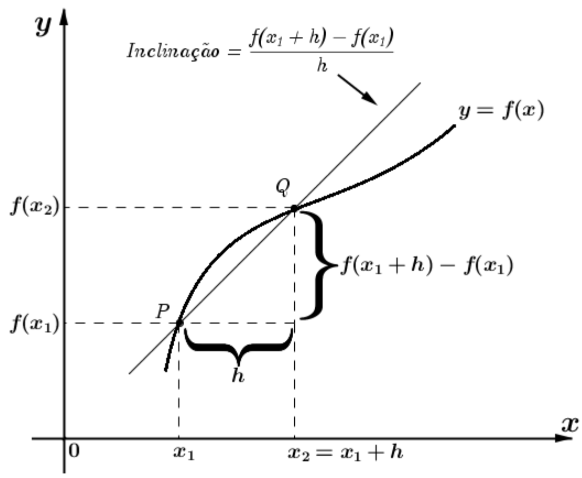


**Figura 4.1**

O limite quando $\Delta x \to 0$ é a derivada de $f$ em $x_1$. A mesma pode ser entendida como a taxa de variação instantânea de $y$ em relação à $x$ ou a inclinação da reta tangente no ponto $P(x_1, f(x_1))$. Desta forma, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

A derivada $f'(x_1)$ mede a taxa de variação de $f(x)$ em $x = x_1$.
Consideremos agora a aproximação:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \approx f'(x_1).$$

Multiplicamos ambos os membros por $h$, encontrando assim:

$$f'(x_1) \cdot h \approx f(x_1 + h) - f(x_1). \tag{4.1}$$

Se $x$ varia de $x_1$ a $x_1 + h$, então a variação no valor da função $f(x)$ é aproximadamente $f'(x_1)$ vezes a variação $h$ do valor de $x$.

A utilização principal desta ideia é obter o lado esquerdo da expressão (4.1) para assim estimar o valor do lado direito.

Geometricamente a expressão (4.1) pode ser interpretada, conforme Figura 4.2 a seguir.

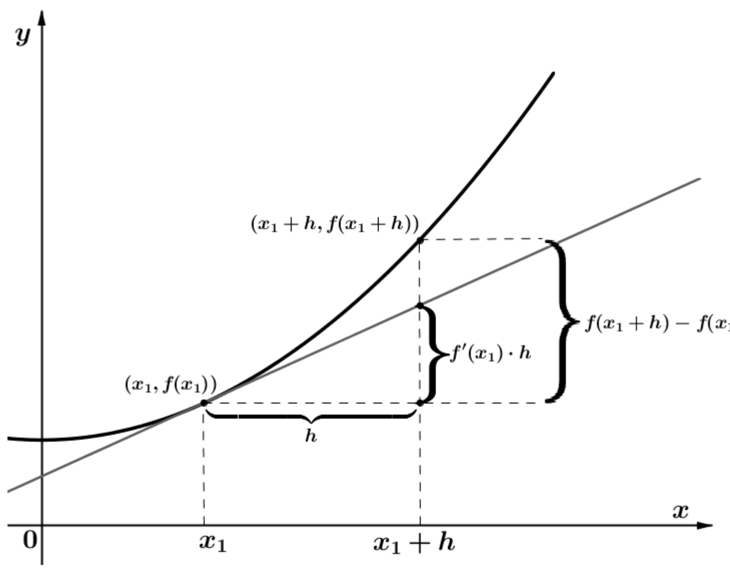


**Figura 4.2**

Observe que ao se dar uma pequena variação, chamada de $h$, em $x$, a quantidade $f'(x_1) \cdot h$ fornece a variação correspondente em $y$ ao longo da reta tangente em $(x_1, f(x_1))$. Já a quantidade $f(x_1 + h) - f(x_1)$ fornece a variação em $y$ ao longo da curva $y = f(x)$. Quando o valor de $h$ é muito pequeno, $f'(x_1) \cdot h$ é uma boa aproximação para a variação em $f(x)$.

Seja a função $C(q)$ que representa o custo total que certa empresa produz para $q$ unidades de certo produto. Para as condições normais de produção, os valores de $q$ unidades de um produto assume ser inteiro e não negativo. Se o número de itens produzidos estiver crescendo de $q_1$ para $q_2$ (onde $q_2 = q_1 + h$) e a partir de (4.1), o custo adicional será:

$$C'(q_1) \cdot h \approx C(q_1 + h) - C(q_1). \tag{4.2}$$

Fazendo $h = 1$ e aplicando em (4.2) para certa quantidade $q$ produzida, teremos:

$$C'(q) \approx C(q+1) - C(q). \tag{4.3}$$

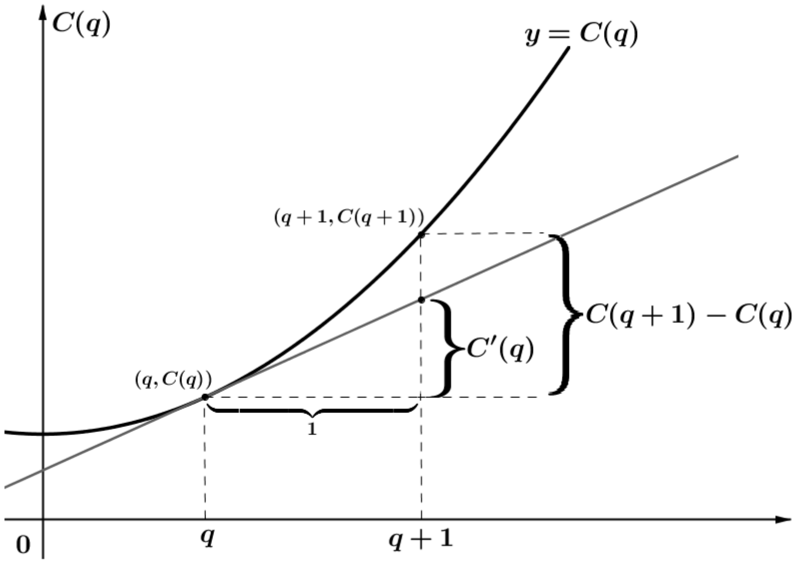


**Figura 4.3**

Observe na Figura 4.3, para circunstâncias normais, que os valores de $C(q)$ e $q$ são não negativos e apresentam a propriedade:

$$q_1 < q_2 \Rightarrow C(q_1) < C(q_2).$$

Então podemos verificar que o custo é uma função crescente da quantidade de unidades produzidas. Se $C(q)$ for derivável, teremos:

$$C'(q) > 0, \text{ para todo } q.$$

No entanto, a função custo marginal pode decrescer para certos valores de $q$. E, a função custo total deve apresentar intervalo de concavidade voltada para cima e intervalo concavidade voltada para baixo.

**Proposição 1** *Seja $C$ a função custo total e $C_M$ a função custo médio. Suponha de classe $C^1$, então:*

1. *se $C'(q) > C_M(q)$, então $C_M$ é crescente.*

2. *se $C'(q) < C_M(q)$, então $C_M$ é decrescente.*

3. *$q_0$ é um ponto crítico de $C_M = C_M(q)$ se, e somente se $C_M(q_0) = C'(q_0)$.*

**Demonstração:**

1. O custo médio de produção de $q$ unidades de um produto é dado por:
$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}. \tag{4.4}$$
E, como, por hipótese, $C'(q) > C_M(q)$ e $q > 0$, temos:
$$C'(q) > \frac{C(q)}{q},$$
assim
$$C'(q) \cdot q - C(q) > 0.$$
Logo:
$$C'_M(q) = \frac{C'(q) \cdot q - C(q)}{q^2} > 0.$$
Daí $C_M$ é crescente.

2. Analogamente ao item 1.

3. A partir da demonstração do item 1 e igualando o custo médio marginal a zero, temos:
$$\begin{aligned} C'_M(q_0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{C'(q_0) \cdot q_0 - C(q_0) \cdot 1}{q_0^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow C'(q_0) \cdot q_0 - C(q_0) \cdot 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow C'(q_0) = \frac{C(q_0)}{q_0} \\ &\Leftrightarrow C'(q_0) = C_M(q_0). \end{aligned}$$

■

**Corolário 4.0.1** *Seja $C$ é uma função de classe $C^2$, se $C_M(q_0) = C'(q_0)$ e $C''(q_0) > 0$, então o custo médio é mínimo em $q_0$.*

**Demonstração:** Sendo $C_M(q_0) = C'(q_0)$, pelo item 3 da proposição 1 $q_0$ é um ponto crítico de $C_M$. A partir da segunda derivada da equação (4.4), temos:
$$C''_M(q) = \frac{(C''(q) \cdot q + C'(q) - C'(q)) \cdot q^2 - (C'(q) \cdot q - C(q)) \cdot 2q}{qt}.$$
Avaliando em $q_0$, obtemos:
$$C''_M(q) = \frac{C''(q_0)}{q_0} > 0.$$
Logo $q_0$ é ponto mínimo de $C_M$.

■

**Exemplo 4.1** *Em uma indústria são produzidos $q$ unidades de certo produto, no qual o custo total desta produção é expresso por $C(q) = 3q^2 + 120q + 300$. Em que nível de produção o custo médio é mínimo?*

**Solução:** O custo marginal será determinado derivando a função custo total:

$$C'(q) = 6q + 120.$$

Agora, calculemos o custo médio, bastando dividir a função custo médio por $q$:

$$C_M(q) = \frac{3q^2 + 120q + 300}{q} = 3q + 120 + \frac{300}{q}.$$

Assim:

$$C'(q_0) = C_M(q_0),$$

ou seja,

$$6q + 120 = 3q + 120 + \frac{300}{q},$$

então

$$q_0 = 10.$$

E, como $C''(10) > 0$. O custo médio é mínimo em $q = 10$ e o custo $C(10) = 1800$.

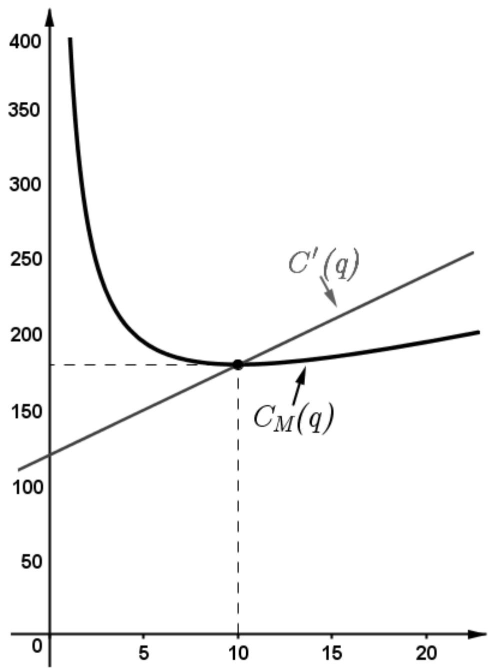


**Figura 4.4**

É de grande utilidade para a tomada de decisões financeiras analisar as variações de uma grandeza relacionada ao acréscimo de uma unidade desta grandeza. Assim, conforme Murolo (vide [15] p.262), também é muito útil e comum estender para outras situações práticas e análises os raciocínios desenvolvidos que nos levam a conceituar o Custo Marginal. Dessa forma, tais situações podem ser estendidas para conceitos como: Receita Marginal e Lucro Marginal.

## 4.2 Receita Marginal

**Definição 4.2 (de Receita Marginal)** *A receita marginal de certo produto é aproximadamente a variação (acréscimo ou redução) da receita ao se vender uma unidade adicional deste produto.*

No universo financeiro a preocupação não se aplica apenas nos custos envolvidos na produção de um bem, mas também no faturamento que esta produção deva gerar. A Receita Marginal é determinada pela derivada da função receita. E, a receita pode ser assim representada:

$R(q) = q \cdot p$, onde $q$ representa a quantidade de um produto vendido e $p$ o preço atribuído a este produto.

Assim, podemos entender que a receita marginal nos forneça a variação do faturamento correspondente à variação de uma unidade na venda de um produto. Então a receita marginal será expressa por $R'(q)$.

Uma situação interessante se dá quando associamos a perspectiva da teoria da demanda de preço para determinar a função receita e, a partir desta, fazer uma análise sobre que intervalo de preço pode-se obter uma receita máxima.

Pela teoria econômica, consumidores irão comprar mais de um produto se o preço unitário deste for menor e reciprocamente, adquirir menos, se o preço unitário for maior. Para cada quantidade $q$ de um produto, tomemos $f(q)$ à função demanda que representa o maior preço unitário que se deseja adquirir. Então, a função $f(q)$ é decrescente, já que para grandes quantidades devemos pela teoria econômica ter preços menores.

$$q_1 < q_2 \Leftrightarrow p_2 = f(q_2) < f(q_1) = p_1.$$

Caso a função seja diferenciável, não constante, obtemos:

$$\frac{dp}{dq} < 0, \text{ para todo } q.$$

Assim, a função receita pode ser rescrita da forma:

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot f(q).$$

Utilizemos uma situação para melhor compreensão do exposto.

**Exemplo 4.2** *Uma empresa de turismo oferece diversos pacotes turísticos para a praia de Porto de Galinhas e região circunvizinha.*

*No setor financeiro da empresa foi verificado que um destes pacotes tem um preço calculado pela função*

$$p = \frac{1}{12}q^2 - 10q + 300$$

*para uma quantidade $q$ demanda estimada no intervalo de $[0, 60]$ pessoas.*

*Determinar a quantidade $q$ máxima que resulta na receita máxima deste pacote. Assim como, o preço máximo que deve ser oferecido a este pacote turístico.*

**Solução:** Para esta situação, a função receita $R(q)$ é dada por:

$$R(q) = q \cdot p = q \cdot \left(\frac{1}{12}q^2 - 10q + 300\right) = \frac{1}{12}q^3 - 10q^2 + 300q.$$

A receita marginal será dada por:

$$R'(q) = \frac{1}{4}q^2 - 20q + 300.$$

O gráfico de $R(q)$ é dada na Figura 4.5 a seguir, nele existem duas retas tangentes horizontais no valor de $q$ para o qual $R'(q) = 0$.

$$R'(q) = \frac{1}{4}q^2 - 20q + 300 = 0 \Rightarrow q' = 20 \text{ e } q'' = 60.$$

E, como $R'(q)$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, cuja as raízes são $q' = 20$ e $q'' = 60$, valores que estão contidos no intervalo considerado $[0, 60]$ e observando o gráfico, podemos perceber que para o valor de $q = 60$ a função não assume o valor máximo, temos, então que:
$R(20) = \dfrac{1}{12} \cdot (20)^3 - 10 \cdot (20)^2 + 300 \cdot (20) \approx 2.666,67$ é o valor máximo de $R$.

Logo, a quantidade $q$ máxima é 20, consequentemente o preço máximo para o pacote turístico será:

$$p(20) = \frac{1}{12} \cdot (20)^2 - 10 \cdot (20) + 300 \approx 133,33.$$

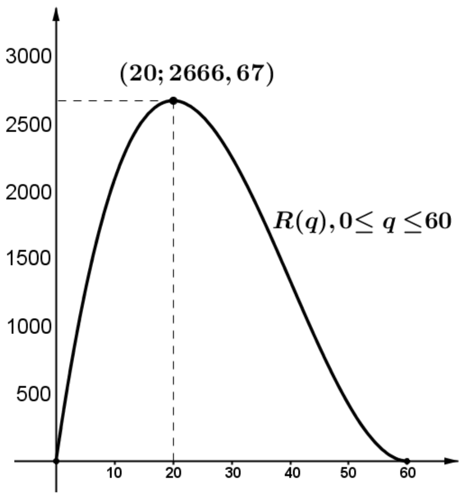


**Figura 4.5**

## 4.3 Lucro Marginal

Outro conceito importante é o da função lucro marginal. Denotemos aqui por $L(q)$ a função lucro total e, a partir do conhecimento da função custo total $C(q)$ e da função receita total $R(q)$, podemos definir a função lucro total como a diferença entre as funções receita total e custo total. Assim:

$$L(q) = R(q) - C(q).$$

**Definição 4.3 (de Lucro Marginal)** *O lucro marginal de certo produto é aproximadamente a variação (acréscimo ou redução) do lucro total ao se vender uma unidade adicional deste produto.*

Sendo $L = L(q)$ a função lucro total da venda para certo produto e admita $L(q)$ diferenciável, então, o lucro marginal é definido e representado por:

$$L'(q) = R'(q) - C'(q).$$

Conforme Murolo (vide [15] p. 266), na análise do lucro na comercialização de um produto, é interessante avaliar a quantidade a ser comercializada para obter o lucro máximo. Observe que como em circunstâncias normais, os valores de $L(q)$ e $q$ são não negativos e apresentam a propriedade:

$$q_1 < q_2 \Rightarrow L(q_1) < L(q_2).$$

Então podemos verificar que o lucro cresce mediante o crescimento do consumo. Se $L(q)$ for derivável, teremos:

$$L'(q) > 0, \text{ para todo } q.$$

**Proposição 2** *Seja $L$ a função lucro de classe $C^1$.*

1. *Se $R'(q) > C'(q)$, então $L$ é crescente.*
2. *Se $R'(q) < C'(q)$, então $L$ é decrescente.*
3. *$q_0$ é um ponto crítico de $L'(q)$ se, e somente se $R'(q_0) = C'(q_0)$.*
4. *Sendo $C$ uma função de classe $C^2$, então o lucro é máximo em $q_0$, se $C_M(q_0) = C'(q_0)$.*

**Demonstração:** O item 1 da Proposição 2 nos permite observar que, caso $R'(q) > C'(q)$ ocasionando um lucro crescente, então a próxima unidade do produto pode ser produzida. Já o item 2 da mesma Proposição, no caso $R'(q) < C'(q)$, nos assegura que a próxima unidade do produto não deva ser produzida, já que o lucro será decrescente.

Ao derivar a função lucro total, teremos:

$$L'(q) = R'(q) - C'(q) \Rightarrow L'(q_0) = 0 \Leftrightarrow R'(q_0) = C'(q_0).$$

Como a maximização do lucro total depende de duas outras otimizações, a maximização da receita total e a minimização do custo total. Podemos assim descrever:

$$R''(q_0) < 0 \text{ e } C''(q_0) > 0, \text{ logo } L''(q_0) < 0.$$

No entanto, o lucro será maximizado em $q_0$ se:

$$R''(x_0) < C''(x_0).$$

Em níveis de produção no qual o lucro total é máximo, implica que a receita marginal é igual ao custo marginal.

■

**Exemplo 4.3** *Uma companhia de software planeja lançar no mercado um novo produto para atender a empresas de calçados. O setor financeiro estimou dois fatores para este produto:*

1. *Sua demanda:* $p = -0,04q + 600$, $q \in [0, 3000]$;
2. *O custo total envolvido na fabricação do produto:* $C(q) = 0,06q^2 + 200q + 60000$.

*onde p representa o preço unitário do produto e q a quantidade demandada. Pede-se: maximize o lucro.*

**Solução:** Neste caso a receita será:

$$R(q) = -0,04q^2 + 600q.$$

A receita marginal:

$$R'(q) = -0,08q + 600.$$

O custo marginal:

$$C'(q) = 0,12q + 200.$$

Logo:

$$R'(q) = C'(q) \Rightarrow -0,08q + 600 = 0,12q + 200 \Rightarrow q = 2000.$$

Contudo, como:

$$R''(q) = -0,08 < C''(q) = 0,12.$$

Concluímos então que, a função lucro será máxima quando $q = 2.000$ (já que este é um ponto de máximo). E, como a função lucro é dada por:

$$L(q) = -0,10q^2 + 400q - 60000.$$

Onde no valor de $q = 2.000$, teremos um lucro de:

$$L(2000) = -0,10 \cdot (2000)^2 + 400 \cdot (2000) - 60000 = 340000.$$

Ver Figura 4.6, a seguir:

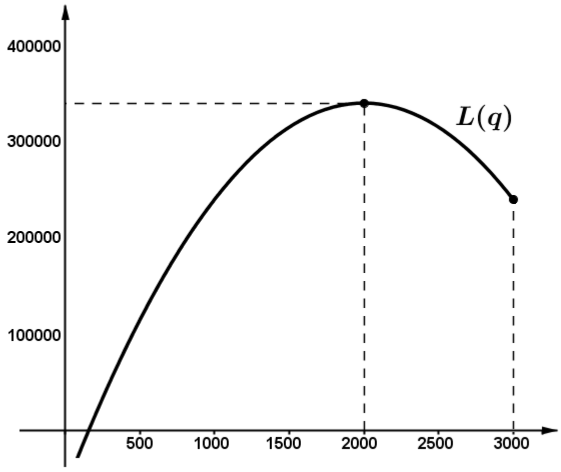


**Figura 4.6**

## 4.4 Elasticidade

A elasticidade pode ser definida como a reação que as mudanças de uma variável provocam a outra variável. Sendo assim, afirmar o oposto, que uma variável é inelástica, significa que a mesma não reage (ou reage insignificantemente) às alterações sofridas por outras variáveis.

### 4.4.1 Elasticidade-preço da Demanda

**Definição 4.4 (de Elasticidade-Preço da Demanda)** *A elasticidade-preço de demanda, denotada por $\varepsilon_{(p)}$, para a função de demanda a um preço $p$, denotada por $q = f(p)$, mede o quanto esta demanda responde a variação de preço e, é assim expressa por:*

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)}. \tag{4.5}$$

O conceito de elasticidade-preço, em demanda, por exemplo, é utilizada para verificar as alterações da demanda de um produto mediante as mudanças dos preços.

Considerando a função de demanda $q = f(p)$ que relaciona a quantidade em demanda com o preço e, partindo do pressuposto de que ocorreu uma variação nesta demanda, onde pode ser expressa como variação percentual da forma:

$$100 \cdot \frac{\Delta q}{q}.$$

Como $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e $q = f(p)$, temos:

$$f'(p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}.$$

Pode-se afirma, por aproximação, que a derivada é dada por:

$$f'(p) \approx \frac{\Delta q}{\Delta p} \Rightarrow \Delta q \approx f'(p) \cdot \Delta p.$$

Aplicando $\Delta q$ na variação percentual, teremos:

$$100 \cdot \frac{f'(p) \cdot \Delta p}{q}.$$

Segundo Murolo (vide [15] p. 274), esta expressão pode ser usada para avaliar a elasticidade da demanda em relação ao preço. E, os economistas costumam avaliar a variação da demanda em relação ao aumento de 1% no preço, o que dá uma variação de preço $\Delta p = 0,01p$. Assim:

$$100 \cdot \frac{f'(p) \cdot 0,01p}{q} = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)}.$$

E, denotando por $\varepsilon_p$ a elasticidade da demanda, logo:

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)}.$$

A equação acima nos fornece, aproximadamente, o quanto a variação percentual demandada responde a variações de 1% no preço.

De acordo com Goldstein (vide [10] p. 226), como $f'(p)$ é sempre negativa para uma função de demanda típica, a quantidade $\dfrac{p \cdot f'(p)}{f(p)}$ também será negativa para todos os valores de $p$. Por uma questão de conveniência dos economistas em trabalhar com números positivos, a elasticidade de demanda fica definida como sendo essa quantidade multiplicada por $-1$. A equação (4.5) poderia assim ser reescrita:

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{-p \cdot f'(p)}{f(p)}. \tag{4.6}$$

E ainda, pode-se utilizar a notação de Leibniz para reescrever a equação (4.6). Como $q = f(p)$ e $f'(p) = \dfrac{dq}{dp}$, a equação passaria a ser escrita:

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{-p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}. \tag{4.7}$$

**Exemplo 4.4** *Determinado produto apresenta uma demanda expressa pela função $q = 40 - 4p$, em que $p$ é o preço do produto, para o intervalo de $[0, 10]$ e, $q$ a quantidade demandada. Encontre e forneça uma interpretação da elasticidade-preço da demanda para os casos em que: (i) $p = 3$; (ii) $p = 5$; (iii) $p = 9$.*

**Solução:** Inicialmente, determinemos a função elasticidade-preço da demanda, utilizando a equação (4.5).

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(p)} &= \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)} \\
&= \frac{p \cdot (40 - 4p)'}{40 - 4p} \\
&= \frac{-4p}{40 - 4p}.
\end{aligned}$$

Agora, determinemos o resultado da elasticidade-preço da demanda para os dados valores de $p$:

(i) Para $p = 3$.

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{-4 \cdot 3}{40 - 4 \cdot 3} \approx -0,43.$$

(ii) Para $p = 5$.

$$\varepsilon_{(5)} = \frac{-4 \cdot 5}{40 - 4 \cdot 5} = -1.$$

(iii) Para $p = 9$.

$$\varepsilon_{(9)} = \frac{-4 \cdot 9}{40 - 4 \cdot 9} = -9.$$

Quando $\varepsilon_{(3)} \approx -0,43$, indica que, se ocorrer um aumento percentual de 1% no preço $p = 3$ do produto, a demanda sofrerá uma queda de 0,43% (aproximadamente). Para $\varepsilon_{(5)} = -1$, ao subir em 1% o preço $p = 5$, a demanda reduzirá em 1%. Já para $\varepsilon_{(9)} = -9$, indica que o aumento em 1% do preço $p = 9$, implica uma redução na demanda de cerca de 9%.

**Definição 4.5** *Seja $\varepsilon_{(p)}$ elasticidade-preço da demanda.*

1. *Se $|\varepsilon_{(p)}| > 1$, então a demanda é **elástica** em relação ao preço;*

2. *Se $|\varepsilon_{(p)}| = 1$, então a demanda tem **elasticidade unitária** em relação ao preço;*

3. *Se $|\varepsilon_{(p)}| < 1$, então a demanda é **inelástica** em relação ao preço.*

Economistas classificam a elasticidade-preço da demanda, conforme definição 4.5. No exemplo 4.4, a elasticidade-preço da demanda é inelástica quando $p$ assume valor \$ 3,00, já unitária para $p =$ \$ 5,00, e elástica para $p =$ \$ 9,00.

Conforme Vilches (vide [18] p. 302), na demanda-preço a classificação:

> (...) quando elásticas, implica em que a variação percentual da quantidade demandada seja maior que a variação percentual do preço. (...) quando elasticamente unitária, implica em que a variação percentual da quantidade demandada seja igual à variação percentual do preço. (...) quando inelástica, implica em que a variação percentual da quantidade demandada seja menor que a variação percentual do preço.

A elasticidade é um conceito que pode ser estendido à comparação entre outras variáveis. No caso da demanda, a comparação pode ocorrer, além do preço, também com o custo, a produção, a oferta e a renda.

### 4.4.2 Elasticidade-renda da Demanda

**Definição 4.6 (de Elasticidade-Renda da Demanda)** *A elasticidade-renda de demanda, denotada por $\varepsilon_{(R)}$, para a função de demanda a uma renda $R$, mede o quanto esta demanda responde a variação da renda do consumidor, e é assim expressa (utilizando a notação de Leibniz) por:*

$$\varepsilon_{(R)} = \frac{R}{q} \cdot \frac{dq}{dR}.$$

Como a função renda é tipicamente positiva, já que para a maioria dos produtos, a demanda aumenta quando a renda aumenta, a elasticidade-renda da demanda será considerada positiva. E, assim classificada pelos economistas:

**Definição 4.7** *Seja $\varepsilon_{(R)}$ elasticidade-renda da demanda.*

1. *Se $\varepsilon_{(R)} > 1$, então a demanda é* ***elástica*** *em relação à renda;*

2. *Se $\varepsilon_{(R)} = 1$, então a demanda tem* ***elásticidade unitária*** *em relação à renda;*

3. *Se $\varepsilon_{(R)} < 1$, então a demanda é* ***inelástica*** *em relação à renda.*

### 4.4.3 Elasticidade-receita da Demanda e do Preço

Uma excelente aplicação do conceito de elasticidade é dada quando se estuda como a receita ($R(q)$) responde a variações do preço. Lembrando que:

$$R(q) = q \cdot f(q)$$

onde $p = f(q)$ é uma função de preço, assim:

$$\begin{aligned} R'(q) &= (q \cdot f(q))' \\ &= q' \cdot f(q) + q \cdot f'(q) \\ &= 1 \cdot f(q) + q \cdot f'(q) \\ &= p + q \cdot f'(q). \end{aligned}$$

Utilizando a notação de Leibniz, temos:

$$\begin{aligned} R'(q) &= p + q \cdot \frac{dp}{dq} \\ &= p \cdot \left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq}\right). \end{aligned}$$

Valendo-se da equação (4.7), teremos:

$$R'(q) = p \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{(p)}}\right). \tag{4.8}$$

A utilização da equação (4.8) se dá, na relação de análise do comportamento da receita, mediante valores obtidos da elasticidade.

Outra relação pode ser obtida quando consideramos a receita em função do preço, $R(p)$, na qual $R(p) = p \cdot f(p)$, onde $q = f(p)$ é uma função demanda. Analogamente ao processo de determinação da equação (4.8), tem-se:

$$R'(p) = q \cdot \left(1 - \varepsilon_{(p)}\right). \tag{4.9}$$

A partir da equação (4.9) e para um $p_0$ qualquer, podemos verificar que:

–Se a demanda é **elástica**, ou seja, $\varepsilon_{(p_0)} > 1$, então $1 - \varepsilon_{(p_0)} < 0$. E, como $q > 0$, então $R'(p_0) < 0$. Pela primeira regra da derivada, $R(p)$ é decrescente em $p_0$. Assim, se a demanda de um produto constar na parte elástica da demanda poderá resultar nas situações: (1) um aumento no preço provocará uma redução na receita; ou (2) uma redução no preço provocará um aumento na receita;

–Se a demanda é **inelástica**, ou seja, $\varepsilon_{(p_0)} < 1$, então $1 - \varepsilon_{(p_0)} > 0$. E, como $q > 0$, então $R'(p_0) > 0$. Mais uma vez, pela primeira regra da derivada, tem-se $R(p)$ crescente em $p_0$. Neste caso, para demanda de um produto pertencente a parte inelástica da demanda resultará: (1) uma redução no preço provocará uma redução na receita; ou (2) um aumento no preço provocará um aumento na receita.

Podemos concluir que é de interesse de quem produz que ocorra uma redução no preço quando a demanda encontrar-se na parte elástica e um aumento quando a demanda estiver na parte inelástica, pois assim resultará, em ambos os casos, num aumento da receita.

E ainda, para o caso de $\varepsilon_{(p_0)} = 1$, então $R'(p_0) = 0$, logo a receita total permanecerá constante.

**Exemplo 4.5** *Considere a função $q = 300 - 3p$ que representa a demanda $q$ estimada para certo produto, onde $p$ é preço compreendido no intervalo* $[0, 100]$. *Analisar os intervalos nos quais a demanda é elástica, unitária e inelástica, descrevendo o comportamento da receita, inclusive graficamente.*

**Solução:** Valendo-se da equação a seguir e calculando o valor de $\varepsilon_{(p)}$, temos:

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)},$$

ou seja,

$$\varepsilon_{(p)} = \frac{p \cdot (300 - 3p)'}{300 - 3p} = \frac{-3p}{300 - 3p}, \text{ onde } (p \neq 100).$$

Vamos agora, determinar os intervalos onde à demanda é unitária, elástica e inelástica.

Para uma demanda com elasticidade unitária, temos $|\varepsilon_{(p)}| = 1$ (proposição 4.5), assim:

$$|\varepsilon_{(p)}| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{-3p}{300 - 3p} \right| = 1.$$

Como $p \in [0, 100]$ e $p \neq 100$, temos que $300 - 3p > 0$, implicando em:

$$\frac{-3p}{300 - 3p} < 0.$$

Assim:
$$\left|\frac{-3p}{300-3p}\right| = -\left(\frac{-3p}{300-3p}\right) = \frac{3p}{300-3p}.$$
Então:
$$\left|\frac{-3p}{300-3p}\right| = 1 \Rightarrow \frac{3p}{300-3p} = 1 \Rightarrow p = 50.$$
Logo, a demanda tem elasticidade unitária quando $p = 50$.
A demanda será inelástica quando $|\varepsilon_{(p)}| < 1$:
$$\left|\frac{-3p}{300-3p}\right| < 1 \Rightarrow \frac{3p}{300-3p} < 1 \Rightarrow p < 50.$$
Logo a demanda será inelástica para $0 \leq p < 50$, já que $p \in [0, 100]$.
A demanda será elástica quando $|\varepsilon_{(p)}| > 1$:
$$\left|\frac{-3p}{300-3p}\right| > 1 \Rightarrow \frac{3p}{300-3p} > 1 \Rightarrow p > 50.$$
Logo a demanda será inelástica para $50 < p < 100$, já que $p \in [0, 100]$ e $(p \neq 0)$.

Para os intervalos obtidos temos: $0 \leq p < 50$ e $|\varepsilon_{(p)}| < 1$,então a receita aumenta neste intervalo; $50 < p < 100$ e $|\varepsilon_{(p)}| > 1$, então a receita diminui neste intervalo; $p = 50$ e $|\varepsilon_{(p)}| = 1$, então a receita permanece constante neste intervalo. E por base nas indicações anteriores, concluí-se que $p = 50$, a receita é máxima.

Sabemos que a receita em função do preço é dada por $R(p) = q \cdot p$. Como do problema, conhecemos a demanda, $q = 300 - 3p$, temos:
$$R(p) = p \cdot (300 - 3p) = 300p - 3p^2.$$
Onde, para $R(p) = 0$, tem-se:
$$300p - 3p^2 = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ ou } p = 100.$$
E, como a receita é máxima em $p = 50$, onde $R(50) = 300 \cdot (50) - 3 \cdot (50)^2 = 7500$.

Segue os gráficos (Figura 4.7) da demanda com os respectivos intervalos para a elasticidade e, da receita com os intervalos de crescimento e ponto de máximo:

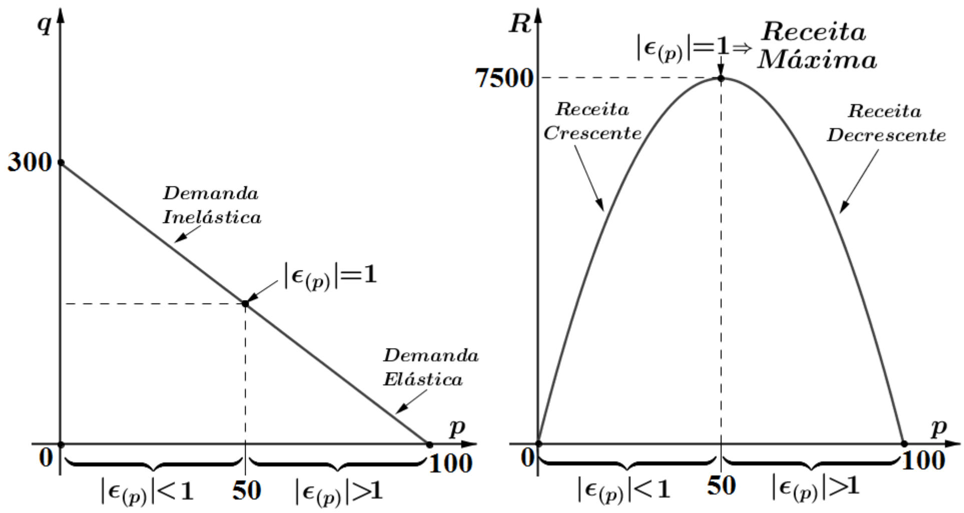


**Figura 4.7**

### 4.4.4 Elasticidade do Custo

**Definição 4.8 (de Elasticidade do Custo)** *A elasticidade-custo, denotada por $\varepsilon_C(q)$, é a razão entre o custo marginal $(C'(q))$ e o custo médio $(C_M(q))$ de produção de q unidades.*

$$\varepsilon_C(q) = \frac{C'(q)}{C_M(q)}.$$

**Definição 4.9** *Seja $\varepsilon_C(q)$ elasticidade-custo.*

1. *Se $\varepsilon_C(q) > 1$, então a elasticidade é dita **elástica** em relação ao custo;*

2. *Se $\varepsilon_C(q) = 1$, então a elasticidade é dita **elasticidade unitária** em relação ao custo;*

3. *Se $\varepsilon_C(q) < 1$, então a elasticidade é dita **inelástica** em relação ao custo.*

Para Vilches (vide [18] p. 308), se $\varepsilon_C(q) < 1$, então o custo de produção da seguinte unidade será menor que o custo médio das unidades já produzidas; reciprocamente, se $\varepsilon_C(q) > 1$, então o custo médio por unidade cresce quando uma unidade adicional for produzida.

**Exemplo 4.6** *Em uma fábrica de móveis, o custo para produz q unidades de uma cadeira é dada pela função $C(q) = 2000 + 5q_2$. Verificar a elasticidade-custo quando os níveis de produção para q forem de: (i)10 unidades; (ii) 20 unidades; (iii) 40 unidades.*

**Solução:** Calculando o custo marginal, temos:

$$C'(q) = 10q.$$

A elasticidade-custo, será:

$$\begin{aligned}\varepsilon_C(q) &= \frac{C'(q)}{C_M(q)}\\ &= \frac{10q}{\dfrac{2000+5q^2}{q}}\\ &= \frac{10q^2}{2000+5q^2}.\end{aligned}$$

Para os níveis de produção solicitados, teremos:

$$\varepsilon_C(q) = \begin{cases} 0,40, & \text{se} \quad q = 10, \\ 1, & \text{se} \quad q = 20, \\ 1,38, & \text{se} \quad q = 40. \end{cases}$$

Assim teremos a elasticidade-custo classificada em:

i. inelástica, quando o nível de produção for de $q = 10$ unidades;

ii. unitária, quando $q = 20$ unidades;

iii. elástica, quando $q = 40$ unidades.

Ver Figura 4.8 aseuir, que apresenta um esboço da situação apresentada.

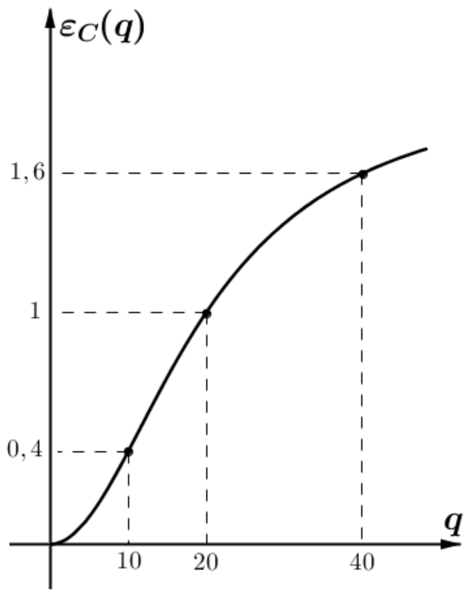


**Figura 4.8**

# Capítulo 5

# A Teoria Econômica com Aplicações das Integrais

"*A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos, como também para auxiliar as artes e poupar trabalho do homem.*".
René Descartes

Conforme Barbanti (vide [1] p. 137), ao se dar um olhar mais livre ao conceito de funções e algumas operações sobre funções, verifica-se que o cálculo da função num ponto $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$), fornece-nos informações sobre valores calculados, no exato (presente) ponto $k$ (...) já a derivada, por sua vez, nos dá ideia do que vai acontecer a partir do ponto $k$ (futuro) (...) e, a integral nos trará informação em relação ao que ocorreu, antes de $k$ (passado). Estas três etapas, tornam-se cada vez mais claras quando avançamos os estudos para a aplicabilidade do cálculo a modelos matemáticos de fenômenos em diversas áreas do conhecimento.

Neste capítulo, trataremos de excedente (consumo, produção e total), integração das funções marginais e valor médio de funções. O estudo destes modelos elementares aplicados a economia perpassa, em certas circunstâncias, em determinar a primitiva de funções específicas analisadas, ou mesmo em calcular o "processo inverso" da derivação, a integração.

## 5.1 Excedentes

### 5.1.1 Excedente de Consumo

Para fixarmos o conceito de excedentes de consumo, partiremos da análise de uma situação.

Seja $p = f(q)$ a função demanda que estabelece uma relação entre o preço unitário $p$ de um produto e a quantidade $q$ demandada. Como também, supondo que seja prescrito um preço fixo de mercado para o produto em questão, onde denotaremos este preço por $\overline{p}$, no qual se relaciona a quantidade demandada $\overline{q}$ unidades. Aos consumidores predispostos a pagar $p$ pela aquisição do produto, onde $p > \overline{p}$, na prática estariam economizando.

O "resto" ou excedente do consumo corresponde à diferença entre o que os consumidores estariam interessados a pagar por $\overline{q}$ unidades do produto e o que realmente eles pagariam por prescrição do mercado.

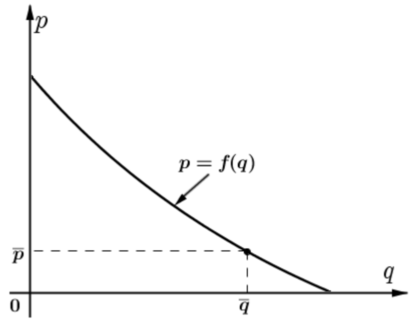


**Figura 5.1**

Para a situação em análise, vamos considerar que o consumidor realize a compra de um número $\overline{q}$ do produto. Estamos aqui interessados na variação da quantidade do produto no intervalo $0 \leq q \leq \overline{q}$, que na prática, segundo Murolo (vide [15] p. 368), o excedente do consumidor é calculado para quantidades comercializadas que variam de 0 até a quantidade que estabelece o preço de mercado.

Dividamos o intervalo $[0, \overline{q}]$ em $n$ subintervalos de comprimento $\Delta q = \dfrac{\overline{q}}{n}$, onde denotaremos os extremos direitos destes subintervalos por $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n = \overline{q}$.

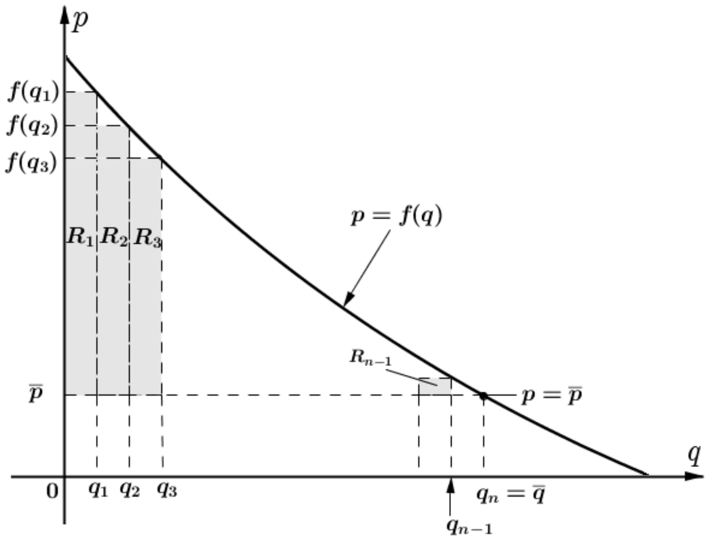


**Figura 5.2**

A importância que os consumidores estariam interessados em pagar, por cada variação $\Delta q$ na quantidade de produtos $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ a serem adquiridos, respectivamente é $f(q_1) \cdot \Delta q, f(q_2) \cdot \Delta q, f(q_3) \cdot \Delta q, \ldots, f(q_n) \cdot \Delta q$.

Já a real importância paga por cada variação $\Delta q$ adquirida será:

$$f(\overline{q}) \cdot \Delta q = \overline{p} \cdot \Delta q.$$

Assim, a quantia economizada por esses consumidores é próxima a:

$$f(q_1)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q, f(q_2)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q, f(q_3)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q,\ldots,f(q_n)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q.$$

Que correspondem, respectivamente, as áreas dos retângulos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ da Figura 5.2. Podemos somar a quantia economizada para cada variação $\Delta q$, e então aproximar o excedente do consumidor total:

$$\begin{aligned}&f(q_1)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q+f(q_2)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q+\ldots+f(q_n)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\Delta q\\&=[f(q_1)\cdot\Delta q+f(q_2)\cdot\Delta q+f(q_3)\cdot\Delta q+\ldots+f(q_n)\cdot\Delta q]-n\cdot\overline{p}\cdot\Delta\\&=[f(q_1)+f(q_2)+f(q_3)+\ldots+f(q_n)]\cdot\Delta q-n\cdot\overline{p}\cdot\Delta q.\end{aligned}$$

Como $\Delta q=\dfrac{\overline{q}}{n}\Rightarrow\overline{q}=\Delta q\cdot n$, reescrevemos a última expressão acima, assim:

$$=[f(q_1)+f(q_2)+f(q_3)+\ldots+f(q_n)]\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\overline{q}. \tag{5.1}$$

Fazendo $n\to\infty$, observemos que na expressão (5.1) o seu primeiro termo é a soma de Riemann da função demanda $p=f(q)$, no caso para o intervalo de $[0,\overline{q}]$:

$$\begin{aligned}&=[f(q_1)+f(q_2)+f(q_3)+\ldots+f(q_n)]\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\overline{q}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(q_1)\cdot\Delta q-\overline{p}\cdot\overline{q}=\int_0^{\overline{q}}f(q)dq-\overline{p}\cdot\overline{q}.\end{aligned}$$

Assim obteremos o excedente do consumo.

**Definição 5.1 (de Excedente do Consumo)** *O excedente do consumo, denotado por $E_C$, para a função de demanda $p=f(q)$ de um produto a um preço $p$, é assim expresso*

$$E_C=\int_0^{\overline{q}}f(q)dq-\overline{p}\cdot\overline{q}. \tag{5.2}$$

*onde $\overline{p}$ é o preço unitário estabelecido pelo mercado e $\overline{q}$ a quantidade vendida do produto.*

Graficamente o excedente do consumo é fornecido pela área da região limitada superiormente pela curva demanda $p=f(q)$ e inferiormente pela reta $p=\overline{p}$, no intervalo de $[0,\overline{q}]$ (Figura 5.3).

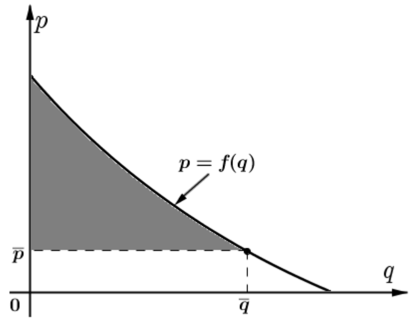


**Figura 5.3**

**Exemplo 5.1** *Na aquisição de um modelo de geladeira durante a redução do IPI, a função demanda é dada por $f(q) = 1200 - 60q$. Obter o excedente do consumo, considerando que o preço de mercado para este modelo é de $R\$600,00$ e que prevaleça o equilíbrio do mercado.*

**Solução:** Observe que $600 = 1200 - 60q$, então $\overline{q} = 10$ e $\overline{p} = 600$, valendo-se da equação (5.2), teremos:

$$\begin{aligned} E_C &= \int_0^{10} (1200 - 60q)dq - 600 \cdot 10 \\ &= \left(1200q - 30q^2\right)\Big|_0^{10} - 6000 \\ &= 9000 - 6000 = 3000. \end{aligned}$$

O excedente do consumo será de $R\$\ 3.000,00$.

## 5.1.2 Excedente de Produção

Na economia, a teoria da oferta afirma que preços maiores despertam o interesse do produtor de aumentar a oferta de seu produto, já preços menores geram menos quantidade ofertada dos produtos. Mesmo ocorrendo o interesse do produtor de que seu produto seja ofertado por um determinado preço $p$, o preço praticado pelo mercado $\overline{p}$ para este produto pode ser superior ($\overline{p} > p$). A diferença entre os preços que o produtor realmente recebe pela venda com preço praticado pelo mercado para o preço no qual ele estaria disposto a receber na venda do produto é chamada de excedente de produção.

Seja $p = g(q)$ a função da oferta para um produto, visto que foi ofertada uma quantia de $q$ unidades dispostas no mercado a um preço unitário $p$. Denotemos por $\overline{p}$ o preço praticado pelo mercado a correspondente quantia de $\overline{q}$ unidades.

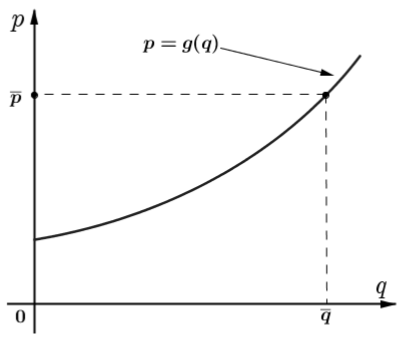


**Figura 5.4**

Para deduzir a equação que expresse o excedente de produção, pode-se agir de modo análogo ao desenvolvido para obtenção da equação de excedente de consumo a partir da análise da oferta de mercado.

**Definição 5.2 (de Excedente da Produção)** *O excedente da produção, denotada por $E_P$, para a função de oferta $p = g(q)$ de um produto a um preço $p$, é assim expressa*

$$E_P = \overline{p} \cdot \overline{q} - \int_0^{\overline{q}} g(q)dq. \tag{5.3}$$

*onde $\overline{p}$ é o preço unitário estabelecido pelo mercado e $\overline{q}$ a quantidade vendida do produto.*

Graficamente, o excedente de produção corresponde a região limitada superiormente pela reta $p = \overline{p}$ e inferiormente pela curva da função oferta $p = g(q)$, no intervalo de $[0, \overline{q}]$ (Figura 5.5).

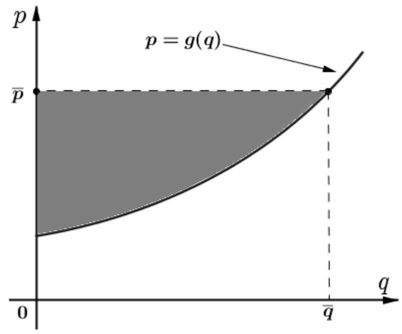


**Figura 5.5**

**Exemplo 5.2** *Encontrar o excedente de produção para uma TV de LED cuja modelo custa $R\$$ 1.800,00 e tem como função de oferta $g(q) = 600 + 80q$ e que prevaleça o equilíbrio do mercado.*

**Solução:** Note que $1800 = 600 + 80q$, então $\overline{q} = 15$ e $\overline{p} = 1800$, valendo-se da equação (5.3), teremos:

$$E_P = 1800 \cdot 15 - \int_0^{15} (600 + 80q)\, dq.$$

O excedente da produção será de $R\$$ 9.000,00.

### 5.1.3 Excedente Total

A soma do excedente do consumo com o excedente de produto resulta no chamado excedente total (denotado por $E_T$), expresso para a economia de um mercado, onde o preço de mercado $\overline{p}$ é obtido quando $f(q) = g(q)$, ou seja, resulta quando o preço de mercado é igual ao chamado preço de equilíbrio (este último é ponto de interseção da função demanda $p = f(q)$ com a função oferta $p = g(q)$) (Figura 5.6).

$$E_T = E_C + E_P. \tag{5.4}$$

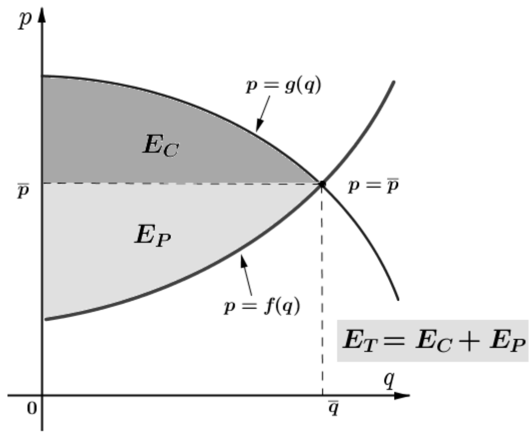


**Figura 5.6**

**Exemplo 5.3** *O setor financeiro de uma empresa que produz aparelhos de celulares realizou uma pesquisa de mercado sobre um novo modelo lançado e avaliado no primeiro trimestre deste ano. Foi detectado pelo setor que a função demanda é dada por*

$$p = f(q) = -0,002q^2 + 500.$$

*A função oferta para este produto é dada por*

$$p = g(q) = 0,0012q^2 + 0,04q + 200$$

*onde, para ambas as equações, p representa o preço unitário em reais e q denota o número de modelos deste celular que o fornecedor colocará no mercado, em unidades de milhar. Determine o excedente de consumo e o excedente de produção se o preço de mercado do novo modelo de celular é igual ao preço de equilíbrio.*

**Solução:** O equilíbrio de mercado ocorrerá quando o preço de equilíbrio é o preço unitário do bem, ou seja, determinando o ponto de intersecção entre as funções demanda e oferta de mercado.

$$f(q) = -0,002q^2 + 500 = 0,0012q^2 + 0,04q + 200 = g(q)$$

$$0,0032q^2 + 0,04q - 300 = 0.$$

Da última equação obtemos $q_1 = -312,5$ e $q_2 = 300$. O primeiro resultado não satisfaz ao intervalo em questão, logo o segundo valor nos fornece

$$p = f(300) = -0,002(300)^2 + 500 = 320.$$

O preço de equilíbrio será $(300, 320)$, ou seja, a quantidade de equilíbrio será de 300.000 unidades e o preço de equilíbrio de $R\$ \; 320,00$. Valendo-se das equações (5.2) e (5.3), para determinação do excedente do consumo e de excedente de produto, respectivamente, teremos:

$$E_C = \int_0^{300} (-0,002q^2 + 500)dq - 320 \cdot 300 = 132000 - 96000 = 36000$$

e

$$E_P = 320 \cdot 300 - \int_0^{300} \left(0,0012q^2 + 0,04q + 200\right) dq = 96000 - 72600 = 23400.$$

Utilizando a equação (5.4), obtemos o valor do excedente total do mercado:

$$E_T = 36000 + 23400 = 59400,$$

ou seja, $R\$ \ 59.400,00$.

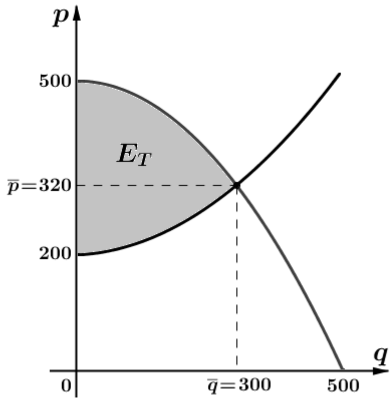


**Figura 5.7**

## 5.2 Integração das Funções Marginais

As derivadas de algumas funções econômicas, chamadas de funções marginais, tais como custo, receita e lucro, foram exploradas no Capítulo 4 deste trabalho e abordadas como taxa de variação destas funções. Agora estamos dispostos a estudar o problema inverso ao da análise marginal, ou seja, desejamos obter a partir de uma função marginal e, aplicando técnicas de integração, o resultado para certa situação envolvendo a função econômica.

De modo geral, o uso do Teorema 1.20 (Teorema Fundamental do Cálculo) nos proporciona a obtenção deste resultado, de forma satisfatória.

### 5.2.1 Integração do Custo Marginal

**Definição 5.3 (de Integração da Função Custo Marginal)** *A integral da função custo marginal ($C'(q)$), em um dado intervalo, como a variação total do custo nesse intervalo, será:*

$$\int_a^b C'(q)dq = [C(x)]_a^b = C(b) - C(a). \tag{5.5}$$

**Exemplo 5.4** *Na comercialização, em reais, de $q$ unidades de determinado produto, foi solicitado detectar a variação total do custo $C = C(q)$, quando o número produzido deste produto estiver no intervalo de 2 a 6 unidades, sendo seu custo marginal ($C'(q)$) dado por $C'(q) = 10q$.*

**Solução:** Empreguemos para a determinação da variação diretamente a equação (5.5):

$$\int_2^6 C'(q)dq = \int_2^6 (10q)dq = \left[5q^2\right]_2^6 = 5 \cdot 6^2 - 5 \cdot 2^2 = 180 - 20 = 160.$$

Logo a variação do custo no intervalo será de $R\$$ 160,00, conforme Figura 5.8 a seguir:

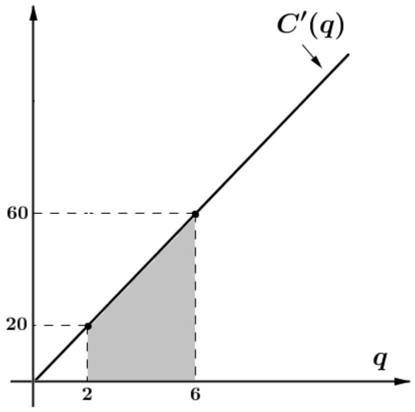


**Figura 5.8**

### 5.2.2 Integração da Receita Marginal

**Definição 5.4 (de Integração da Função Receita Marginal)** *A integral da função receita marginal ($R'(q)$), em um dado intervalo, como a variação total da receita nesse intervalo, será:*

$$\int_a^b R'(q)dq = [R(x)]_a^b = R(b) - R(a). \tag{5.6}$$

**Exemplo 5.5** *Na comercialização, em reais, de $q$ unidades de determinado produto, a receita marginal ($R'(q)$) é fornecida: $R'(q) = -10q + 120$, para um intervalo de $q \in [2, 6]$. Obter a variação total da receita.*

**Solução:** Através do uso da equação (5.6), calculemos a variação total da receita:

$$\int_2^6 R'(q)dq = \int_2^6 (-10q + 120)dq = \left[-5q^2 + 120q\right]_2^6$$
$$= -5 \cdot (6)^2 + 120 \cdot 6 - [-5 \cdot (2)^2 + 120 \cdot 2] = 320.$$

Logo a variação da receita no intervalo é de $R\$$ 320,00. Veja o gráffico da Figura 5.9 a seguir:

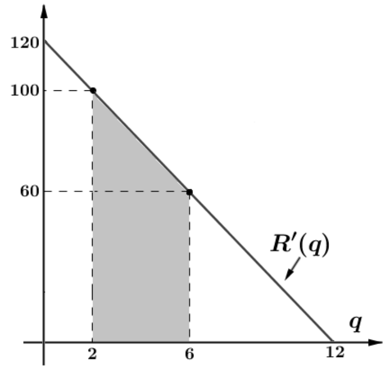


**Figura 5.9**

### 5.2.3 Integração do Lucro Marginal

**Definição 5.5 (de Integração do Lucro Marginal)** *A integral da função lucro marginal ($L'(q)$), em um dado intervalo, como a variação total do lucro nesse intervalo, será:*

$$\int_a^b L'(q)dq = [L(x)]_a^b = L(b) - L(a). \tag{5.7}$$

**Exemplo 5.6** *Utilizando os dados dos exemplos 5.4 e 5.5, determinar a variação total do lucro dentro do intervalo estabelecido para as q unidades produzidas, $2 \leq q \leq 6$. Realizando a interpretação gráfica desta variação.*

**Solução:** Valendo-se da equação (5.7) e sabendo que $L'(q) = R'(q) - C'(q)$, temos:

$$\begin{aligned}\int_2^6 L'(q)dq = \int_2^6 [R'(q) - C'(q)] = \int_2^6 (-20q + 120)dq = \left[-10q^2 + 120q\right]_2^6 \\ = -10 \cdot (6)^2 + 120 \cdot 6 - \left[-10 \cdot (2)^2 + 120 \cdot 2\right] = 360 - 200 = 160.\end{aligned}$$

Logo a variação do lucro no intervalo é de $R\$160,00$.

A área sombreada da Figura 5.10 abaixo, compreendida entre a curva da receita marginal e o custo marginal, nos fornece o lucro total entre os intervalos de variações fornecida.

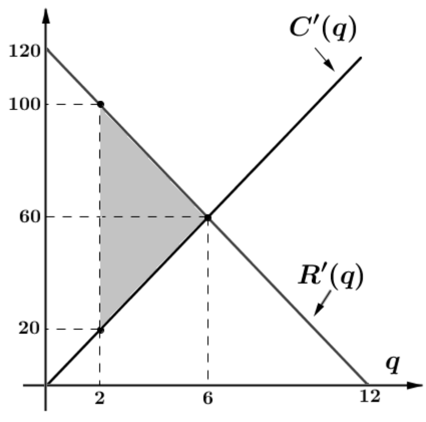


**Figura 5.10**

## 5.3 Valor Médio de uma Função

O valor médio de uma função num dado intervalo nos permite uma aplicação interessante das integrais definidas junto as funções econômicas e financeiras. Antes vejamos a definição do chamado Valor Médio de uma função, denotado por $V_M(f)$.

**Definição 5.6 (do Valor Médio de uma Função)** *seja $f$ uma função integrável no intervalo $[a,b]$, o valor médio de $f$ em $[a,b]$ é definido por:*

$$V_M(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx. \tag{5.8}$$

Para dedução a equação acima pode-se proceder da seguinte forma a seguir.
O valor médio do conjunto de números $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, é:

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n}{n}.$$

Seja $f$ uma função contínua e definida no intervalo $[a,b]$. Dividindo este intervalo $[a,b]$ em $n$ subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Agora, utilizando os pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ no primeiro, no segundo, no terceiro, ..., e no n-ésimos subintervalos, respectivamente. Assim, o valor médio dos números $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$, será dado por:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

que é uma boa aproximação da média de todos os valores de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$. a expressão acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{b-a} \cdot \left[ f(x_1) \cdot \frac{1}{n} + f(x_2) \cdot \frac{1}{n} + f(x_3) \cdot \frac{1}{n} + \ldots + f(x_n) \cdot \frac{1}{n} \right] \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \left[ f(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_2) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_3) \cdot \frac{b-a}{n} + \cdots + f(x_n) \cdot \frac{b-a}{n} \right] \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \left[ f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x \right].
\end{aligned}$$

Note que à medida que $n$ aumenta, a expressão acima tem um valor cada vez "melhor" do aproximado ao valor médio de $f(x)$ em $[a,b]$. Porém, perceba que a parte entre colchetes desta expressão representa a Soma de Riemann da função $f(x)$ em $[a,b]$. Daí provém que:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} \left[ \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)}{n} \right] \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{n \to \infty} \left[ f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x \right] \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

**Exemplo 5.7** *O custo, em reais, para a produção q unidades de certo equipamento eletrônico é dado por* $C(q) = 20 - 0,4q + 0,6q^2 + 0,02q^3$*. Encontrar o valor médio do custo para uma produção de* $q = 10$ *a* $q = 30$ *unidades.*

**Solução:** Como:

$$V_M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

E, o intervalo em análise é $[10, 30]$, teremos:

$$\begin{aligned} V_M[C(q)] &= \frac{1}{30-10} \cdot \int_{10}^{30} (20 - 0,4q + 0,6q^2 + 0,02q^3)dq \\ &= \frac{1}{20} \cdot \left(20q - 0,2q^2 + 0,2q^3 + 0,005q^4\right)\Big|_{10}^{20} \\ &= \frac{1}{20} \cdot (9870 - 430) = 472. \end{aligned}$$

O custo médio da produção no intervalo desejado será de $R\$ \ 472,00$.

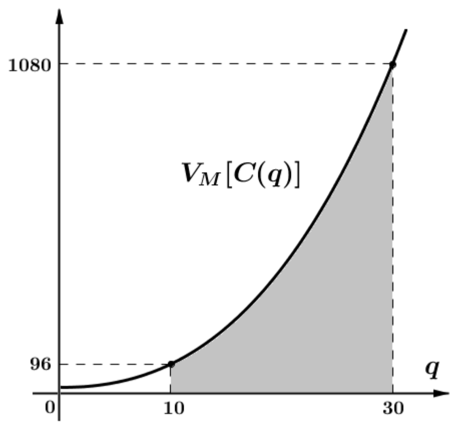


**Figura 5.11**

Podemos estender a aplicação do valor médio para diversas situações além da aplicabilidade nas funções econômicas. Vejamos algumas situações propostas a seguir.

**Exemplo 5.8** *Uma Companhia Financeira auferiu taxas de juros sobre empréstimos para aquisição de certo produto durante o período de 8 meses no ano de 2012, estipulado pela função* $i(n) = \frac{-1}{16}n^3 + \frac{9}{16}n^2 - n + 11$*, para* $0 \leq n \leq 8$*, onde n representa o período medido em meses e* $i(n)$ *o percentual anual cobrado. Determinar a taxa média concedida pela Companhia Financeira ao longo do intervalo de tempo em questão.*

**Solução:** Aplicando a equação (5.8) para obter diretamente a taxa média, teremos:

$$\begin{aligned} V_M[i(n)] &= \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 (\frac{-1}{16}n^3 + \frac{9}{16}n^2 - n + 11)dn \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left( \frac{-1}{64}n^4 + \frac{3}{16}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + 11n \right) \Big|_0^8 \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left[ \frac{-1}{64} \cdot (8)^4 + \frac{3}{16} \cdot (8)^3 - \frac{1}{2} \cdot (8)^2 + 11 \cdot (8) \right] = 11. \end{aligned}$$

Que nos fornece a taxa média de 11% ao ano.

**Exemplo 5.9** *(Ver problema em Tan (2005, p. 426))O preço mediano de uma casa num estado do sudeste americano entre* $1^o$ *de janeiro de* 1995 *a* $1^o$ *de janeiro de* 2000 *é aproximado pela função:*

$$f(n) = n^3 - 7n^2 + 17n + 190 (0 \leq n \leq 5)$$

*onde* $f(n)$ *é medido em milhares de dólares e* $n$ *é expresso em anos (*$n = 0$ *corresponde ao início de* 1995*). Determine o preço mediano médio de uma casa durante aquele intervalo de tempo.*

**Solução:** O preço mediano médio de uma casa durante o intervalo de tempo em questão é dado por:

$$\begin{aligned} V_M[f(n)] &= \frac{1}{5-0} \cdot \int_0^5 (n^3 - 7n^2 + 17n + 190)dn \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1}{4}n^4 - \frac{7}{3}n^3 + \frac{17}{2}n^2 + 190n \right) \Big|_0^5 \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left[ \frac{1}{4} \cdot (5)^4 - \frac{7}{3} \cdot (5)^3 + \frac{17}{2} \cdot (5)^2 + 190 \cdot (5) \right] = 205,417. \end{aligned}$$

Ou seja, $US\$$ 205.417.

# Apêndice A

# Aplicações ao Ensino Médio

Apresentamos neste apêndice situações aplicativas dos conceitos aqui relatados para que possam servir de sugestões a serem utilizadas em sala de aula pelos professores. Essas sugestões, de longe retratam o jeito certo de ensinar matemática e suas aplicações, já que tal fato exige do professor ir além da simples capacidade de execução de uma atividade meticulosa e bem preparada. A intenção é trazer situações que possam ilustrar as teorias tratadas neste trabalho, porém de forma "acessível" ao aluno do ensino médio, eximindo alguns conteúdos que não estariam ao nível desta modalidade de ensino. Estigando-o e envolvendo-o com o "fazer" matemático no sentido que possamos vivenciar situações contextualizadas e inusitadas, em que eles possam conjecturar e investigar a partir de um texto provocativo e de questões propostas.

## A.1 Investindo no Mercado de Ações

**Situação A.1** *: VAMOS INVESTIR NO MERCADO DE AÇÕES?*

*No mundo dos negócios uma forma de investimento muito conhecida é o mercado de ações. Você já ouviu falar? Se sim, sabe como ele funciona? E, o que ocorre quando se compra uma ação de uma empresa? Vamos tentar esclarecer estas questões de uma forma simples.*

*Uma* ***ação*** *de uma empresa é um pedaço dessa empresa, financeiramente falando. A empresa emite suas ações no mercado para que possam ser negociadas e gerem dinheiro para ela, a fim de que os recursos levantados possam ser aplicados em seus projetos ou para que a empresa torne-se cada vez mais autofinanciada. As pessoas que investem em ações (acionistas) compram-na para ganhar dinheiro, em forma de lucro (a chamada valorização da ação). Assim, se o preço das ações adquiridas aumenta, o investidor as vende com um lucro. Algumas empresas pagam também os chamados "dividendos" aos seus acionistas, que representam um ganho na participação dos lucros dela. Então, uma ação é considerada uma aplicação de renda variável, onde seus benefícios podem ser sua valorização e seus dividendos (este algumas vezes).*

*O **mercado de ações** é o ambiente organizado para a negociação pública de títulos mobiliários, as ações por exemplo. Podendo as transações ser feitas por intermédio das bolsas de valores ou dos mercados de balcão[1], com intermediação de corretores (profissionais preparados para fazer todo o trabalho por você) ou não, pode-se fazer via internet. Mas esse mercado sofre muitas vezes com altos e baixos da economia, é o chamado balanço do mercado, que pode derrubar o preço de uma ação. Porém, a empresa também pode sofrer algum problema que farão o preço de suas ações despencarem. Há investidores que estão preparados e dispostos a encarar as oscilações do mercado de ações. Recomenda-se, para iniciantes, que invistam em empresas onde se conheça sua procedência e operação.*

*Todas as aplicações em ações são, a longo prazo, um problema de Matemática Financeira aplicada aos negócios, onde é possível medir valores desta operação. Vamos partir da seguinte situação ilustrativa ao texto:*

*Um investidor realiza uma aplicação financeira em ação de uma empresa (onde $P$ é o preço da ação), que propicia dividendos ($D$) anuais, no qual ele deseja um retorno de $i$ (% ao ano). O preço desta ação,então, pode ser expressa por:*

$$P = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \frac{D_3}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{D_n}{(1+i)^n}.$$

*Admitindo que os dividendos distribuídos anualmente por ação desta empresa sejam constantes ($= D$), assim a expressão acima pode ser reescrita:*

$$P = \frac{D}{1+i} + \frac{D}{(1+i)^2} + \frac{D}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{D}{(1+i)^n}.$$

*Agora, cosiderando que a empresa seja estável, logo seu fluxo de dividendos pode ser considerado infinito. Neste caso, os dividendos formam uma Progressão Geométrica de termos infinitos (uma série perpétua). A última expressão pode, então, ser dada por:*

$$P = \frac{D}{i}.$$

*Com essa simples expressão é possível calcular o preço de uma ação, nas condições apresentadas.*

*Agora, preparado para investir no mercado de ações?*

*Como desafio, propomos os seguintes problemas:*

1. *Uma empresa esta pagando dividendos anuais de suas ações, cada por $R\$ \ 6,00$. Uma pessoa, potencial acionista, deseja adquirir um lote destas ações. Qual o valor justo, por ação, que ele deveria pagar, sabendo que o mesmo define em 15% ao ano sua taxa mínima de retorno exigida?*

[1] Que tal ampliar seus conhecimentos? Faça uma pesquisa sobre bolsas de valores e mercados de balcão.

2. *Detalhe as passagens feitas no texto para se chegar na expressão* $P = \dfrac{D}{i}$.

3. *Outra interessante situação envolvendo negociações com ações e séries perpétuas é o chamado modelo de Gordon*[2]*. Neste modelo, é considerado que os dividendos da ação cresçam periodicamente a uma taxa constante* $g$*. Como os pagamentos são infinitos, o preço da ação na série geométrica é dado por:*

$$P = \frac{D(1+g)}{1+i} + \frac{D(1+g)^2}{(1+i)^2} + \frac{D(1+g)^3}{(1+i)^3} + \ldots.$$

*Admitindo por hipótese que a taxa* $g < i$*, temos a expressão reescrita da forma:*

$$P = \frac{D}{i-g} \text{ (Modelo de Gordon).}$$

*Pede-se: detalhar as passagens realizadas para se chegar ao modelo de Gordon.*

4. *O dividendo anual pago por uma empresa está fixado por* $R\$\ 6,00$ *para o próximo ano e a um certo lote de ações. O setor financeiro da empresa prevê a possibilidade de remunerar melhor seus acionistas, propiciando-lhes um crescimento anual permanente de* $3\%$*. Admitindo-se que os acionistas dessa empresa obtém uma taxa de retorno mínima de* $15\%$ *ao ano. Estime o preço justo a se pagar pelas ações deste lote da empresa.*

5. *Considere que para uma ação negociada na bolsa de valores são estimados os dividendos anuais por ação de* $R\$\ 1,20$*,* $R\$\ 1,50$*,* $R\$\ 1,80$ *e* $R\$\ 2,00$*, e, o preço da ação ao final de quatro anos de* $R\$\ 6,00$*. Para uma taxa de rentabilidade de* $20\%$ *a.a. desejada por um investidor, qual deve ser o preço justo pago por ação?*

6. *Na questão anterior, considerando o valor a ser pago inicialmente pela ação em* $R\$\ 6,00$*, obtenha, com auxílio de uma planilha eletrônica, o valor do preço líquido para as seguintes taxas anuais:* $0\%$, $5\%$, $10\%$, $15\%$, $20\%$, $25\%$, $30\%$, $35\%$ *e* $40\%$ *(expresse os resultados numa tabela). Represente os resultados obtidos num gráfico* $P \times i$ *e, observe neste, se é possível verificar para qual valor de i (aproximadamente) o valor de* $P$ *é nulo?*

Conversando com o professor:

Perceba, que a partir desta última questão, seria um momento indicado para introduzir noções de derivada de funções polinomiais mais simples. E, desta noção, utilizar o Método de Newton-Raphson para obter uma melhor aproximação para o problema de determinação da taxa que anula o valor de $P$.

[2]Vamos realizar mais essa pesquisa! Que tal procurar saber quem foi Gordon?

# A.2 Desvendando o Programa Minha Casa Minha Vida

**Situação A.2 : *DESVENDANDO A MATEMÁTICA POR TRÁS DO PROGRAMA MINHA CASA MINHA VIDA***

*Criado em 2009, o Programa Minha Casa Minha Vida, é uma iniciativa do Governo Federal e está ligado a Secretaria Nacional de Habitação do Ministério das Cidades, onde tem por objetivo a redução no déficit de habitação no Brasil, tornando acessível à aquisição de moradia às famílias com certa renda por apresentar taxas de juros diferenciadas e outras características que discutiremos a seguir[3]. Os dados apresentados a seguir foram obtidos na cartilha do programa, no site do Banco do Brasil no endereço www.bb.com.br.*

***Fundo Garantidor da Habitação Popular (FGHab):*** *funciona como um seguro com cobertura para morte e invalidez permanente, danos físicos ao imóvel e garantia no pagamento das prestações para o caso de perda ou redução de renda. O pagamento será efetuado pelo cliente com uma parte fixa (0,5%) mais uma parte variável, de acordo com os valores constantes no quadro abaixo:*

| Faixa Etária | % de comissão pecuniária variável em relação ao valor de prestação |
|---|---|
| Até 25 anos | 1,50% |
| Acima dos 25 anos e até os 30 anos | 1,54% |
| Acima dos 30 anos e até os 35 anos | 1,64% |
| Acima dos 35 anos e até os 40 anos | 1,82% |
| Acima dos 40 anos e até os 45 anos | 2,59% |
| Acima dos 45 anos e até os 50 anos | 3,02% |
| Acima dos 50 anos | 6,64% |

***Carência:*** *para imóveis prontos não existe carência e o pagamento deve começar após 30 dias da assinatura do contrato, na data base escolhida. Para imóveis na planta, o prazo de carência é o mesmo da execução das obras.*

***Taxas e Tarifas:*** *conforme quadros a seguir. Para proponentes de financiamento habitacional titulares de conta vinculada do FGTS, com no mínimo 03 (três) anos sob regime do FGTS, a taxa nominal de juros será reduzida em 0,5% (cinco décimos por cento) ao ano.*

[3] Não é do interesse desta atividade apresentarmos todas as características do programa, tais como: pré-requisitos para aderir ao programa; como utilizar o FGTS; benefícios detalhados; entre outros. Para tanto convidamos os alunos a aprofundarem seus conhecimentos realizando uma pesquisa mais detalhada.

| Renda Familiar Mensal | Taxa Nominal | Taxa Efetiva |
|---|---|---|
| Até $R\$ \ 2.455,00$ | 4,50% a. a. + TR | 4,594% a. a. + TR |
| De $R\$ \ 2.455,01$ até $R\$ \ 3.275,00$ | 5,50% a. a. + TR | 5,641% a. a. + TR |
| De $R\$ \ 3.275,01$ até $R\$ \ 5.000,00$ | 6,66% a. a. + TR | 6,867% a. a. + TR |

| Tarifas | Periodicidade | Valor |
|---|---|---|
| Administração/ Manutenção do Contrato[4] | Mensal | $R\$ \ 25,00$ |
| Avaliação Física da Garantia[5] | Evento | 1% do valor do financiamento |

***Sistema de amortização do financiamento:*** *as modalidades de pagamento das prestações podem ser executadas conforme regras dos Sistemas: Sistema de Amortização Constante (SAC), onde as amortizações são constantes e os juros decrescem, provocando prestações decrescentes; e, o Sistema Price, onde as amortizações aumentam e os juros decrescem, provocando prestações fixas.*

| Tipo de Operação | Prestação | Sistema |
|---|---|---|
| Pós-fixada | Sempres iguais | Price |
| Pós-fixada | Decrescentes | SAC |

***Reajuste das prestações:*** *o saldo devedor e as prestações serão atualizados pela TR, mesmo índice de remuneração da poupança. A prestação é atualizada mensalmente, considerando o saldo devedor atualizado e o prazo remanescente da operação.*

*Analisemos uma situação prática, onde uma pessoa (fictícia) já previamente aprovada no programa realizará uma simulação das prestações. Sejam os dados:*

- *Data de nascimento do solicitante:* 15/12/1975;
- *Renda bruta do solicitante:* $R\$ \ 4.500,00$;
- *Possui 3 anos de trabalho sob regime do FGTS: Não;*
- *Valor do imóvel:* $R\$ \ 40.000,00$;
- *Valor financiado:* $R\$ \ 32.000,00$ *(80% liberado);*
- *Valor de entrada:* $R\$ \ 8.000,00$;
- *Prazo de carência:* 0*;*
- *Prazo da amortização:* 360 *meses (*30 *anos);*
- *Juros nominais:* $6,66\%$ *ao ano* $= 0,555\%$ *ao mês.*

### *Sistema de Amortização: SAC*

- *Cálculo da amortização constante (A):* $A = \frac{SD}{n} = \frac{32000}{360} = 88,89$;
- *Cálculo dos juros do 1º mês:* $J_1 = i\% \cdot SD_0 = 0,555\% \cdot 32000 = 177,60$;
- *Cálculo da 1ª prestação ($P_1$):* $P_1 = A + J_1 = 88,89 + 177,60 = 266,49$;
- *Saldo Devedor ($SD_n$) do 1º mês:* $SD_1 = SD_0 - A = 32000 - 88,89 = 319111,11$;
- *Seguro FGHab 1º mês ($S_1$):*
  *Parte fixa + Parte Variável para faixa etária de 38 anos:* $0,5\% + 1,82\% = 2,32\%$
  $$S_1 = 2,32\% \cdot 266,49 = 6,18;$$
- *Tarifa fixa (T):* $R\$ \, 25,00$;
- *Prestação Final ($PF_1$):* $PF_1 = P_1 + S_1 + T = 266,49 + 6,18 + 25 = 297,67$.

*Para os demais meses o cálculo é análogo. A seguir, apresentamos os resultados, de forma abreviada, na tabela A.1.*

Tabela A.1: Planilha Parcial de Amortização - SAC

| n | Data | Amortização | Juros | Prestação | Seguro FGHab | Tarifas | Prestação Final | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 30/05/13 | - | - | - | - | - | - | 32.000,00 |
| 1 | 30/06/13 | 28,04 | 177,60 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 297,67 | 31.971,96 |
| 2 | 30/07/13 | 28,20 | 177,44 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 297,17 | 31.943,76 |
| 3 | 30/08/13 | 28,35 | 177,29 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 296,66 | 31.915,41 |
| 4 | 30/09/13 | 28,51 | 177,11 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 296,16 | 31.886,90 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 357 | 28/02/43 | 201,14 | 4,50 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 117,97 | 610,14 |
| 358 | 30/03/43 | 202,25 | 3,39 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 117,46 | 407,88 |
| 359 | 30/04/43 | 203,38 | 2,26 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 116,96 | 204,51 |
| 360 | 30/05/43 | 204,51 | 1,14 | 205,64 | 4,77 | 235,41 | 113,89 | - |

**Fonte:** Construção em Planilha Eletrônica Excel pelo próprio autor.

### *Sistema de Amortização: SAF (Price)*

- *Cálculo das prestações constantes (P):*
  $$P = \frac{C_0 \cdot i}{1 - (1+i)^n} = \frac{32000 \cdot 0,00555}{1 - (1 + 0,00555)^{360}} = 205,64;$$
- *Cálculo dos juros do 1º mês:* $J_1 = i\% \cdot SD_0 = 0,555\% \cdot 32000 = 177,60$;

- *Cálculo da amortização (A):* $A_1 = P - J_1 = 205,64 - 177,60 = 28,04$;
- *Saldo Devedor ($SD_n$) do 1º mês:* $SD_1 = SD_0 - A_1 = 32000 - 28,04 = 31971,96$;
- *Seguro FGHab 1º mês ($S_1$):*
*Parte fixa + Parte Variável para faixa etária de 38 anos:* $0,5\% + 1,82\% = 2,32\%$
$$S_1 = 2,32\% \cdot 205,64 = 4,77;$$
- *Tarifa fixa (T):* R\$ $25,00$;
- *Prestação Final ($PF_1$):* $PF_1 = P + S_1 + T = 205,64 + 4,77 + 25 = 235,41$.

*Demais meses segue análogo o cálculo.*

Tabela A.2: Planilha Parcial de Amortização - SAF

| n | Data | Amortização | Juros | Prestação | Seguro FGHab | Tarifas | Prestação Final | Saldo Devedor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 30/05/13 | - | - | - | - | - | - | 32.000,00 |
| 1 | 30/06/13 | 88,89 | 177,60 | 266,49 | 6,18 | 25,00 | 297,67 | 31.911,11 |
| 2 | 30/07/13 | 88,89 | 177,11 | 266,00 | 6,17 | 25,00 | 297,17 | 31.822,22 |
| 3 | 30/08/13 | 88,89 | 176,61 | 265,50 | 6,16 | 25,00 | 296,66 | 31.733,33 |
| 4 | 30/09/13 | 88,89 | 176,12 | 265,01 | 6,15 | 25,00 | 296,16 | 31.644,44 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 357 | 28/02/43 | 88,89 | 1,97 | 90,86 | 2,11 | 25,00 | 117,97 | 266,27 |
| 358 | 30/03/43 | 88,89 | 1,48 | 90,37 | 2,10 | 25,00 | 117,46 | 177,38 |
| 359 | 30/04/43 | 88,89 | 0,98 | 89,87 | 2,09 | 25,00 | 116,96 | 88,49 |
| 360 | 30/05/43 | 88,89 | - | 88,89 | - | 25,00 | 113,89 | - |

**Fonte:** Construção em Planilha Eletrônica Excel pelo próprio autor.

*Sugestão de atividade:*

*1º) Use a planilha eletrônica Excel do Laboratório de Informática e monte a planilha de amortização para as duas modalidades SAC e Price.*

*2º) Faça um gráfico onde você possa comparar o valor das prestações nos dois sistemas, SAC e SAF.*

*3º) Na sua opinião, qual das duas modalidade de sistemas de amortização é mais viável para o investidor? Justifique sua resposta.*

*4º) Experimente criar um novo sistema de amortização, com regras matemáticas claras e prepare uma planilha de amortização deste. Apresente seu resultado a turma.*

*5º) O quadro de taxas, trás os resultados das taxas nominais e das taxas efetivas. Demonstre como foram obtidos os resultados deste quadro.*

*6º) Modele um sistema de amortização, onde possa ser utilizado capitalzação contínua como base.*

# Referências Bibliográficas


[1] Barbanti, Luciano e Malacrida Jr, Sérgio Augusto. *Matemática superior: um primeiro curso de cálculo.* São Paulo : Pioneira, (1999).

[2] Boyer, Carl B. *História da matemática.* 2a. ed. São Paulo : Edgar Blücher, (2001).

[3] Bueno, Rodrigo de Losso da Silveira et all. *Matemática financeira moderna.* São Paulo : Cengage Learning, (2011).

[4] Faro, Clovis de. *O critério da taxa interna de retorno e o caso dos projetos do tipo investimento puro.* Revista de Administração de Empresas, Rio de Janeiro, p. 57-63, set./out. (1976).

[5] —. *Fundamentos de matemática financeira: uma introdução ao cálculo financeiro e à análise de investimentos de risco.* São Paulo : Saraiva, (2006).

[6] Faro, Clovis de e Lachtermacher, Gerson. *Introdução à matemática financeira.* Rio de Janeiro : Editora FGV, (2012).

[7] Feijó, Ricardo. *Matemática financeira com conceitos econômicos e cálculo diferencial: utilização da HP-12C e planilha eletrônica.* São Paulo : Atlas, (2009).

[8] Ferreira, Roberto G. *Matemática financeira aplicada: mercado de capitais, administração financeira, finanças pessoais.* 6a. ed. São Paulo : Atlas, (2008).

[9] Guidorizzi, H. L.*Um curso de cálculo, volume I.* 5a. ed. Rio de Janeiro : LTC, (2008).

[10] Goldstein, Larry J. Lay, David L. e Schneider, David I.Berchio, E. *Matemática aplicada: economia, administração e contabilidade R.* Trad. Henrique Von Dreifus. Porto Alegre : Bookman, (2000).

[11] Lapponi, Juan Carlos. *Matemática financeira: redesenho organizacional para o crescimento e desempenho máximo.* Colaboração: André Luís Galvão Lapponi. Rio de Janeiro : Elsevier, (2005).

[12] Leithold, Louis. *O cálculo com geometria analítica, volume I.* 3a. ed. São Paulo : Harbra, (1994).

[13] Lima, Elon Lages et all. *A matemática do ensino médio, volume 2.* 3a. ed. Rio de Janeiro : SBM, (2000).

[14] Maor, Eli. *E: a história de um número*. Trad.: Jorge Calife. 5a. ed. Rio de Janeiro : Record, (2008).

[15] Murolo, A. C. e Bonetto, G. A. *Matemática aplicada à administração, economia e contabilidade*. São Paulo : Pioneira Thomson Learning, (2004).

[16] Stewart, J. *Cálculo, volume I*. São Paulo : Cengage Learning, (2009).

[17] Tan, S. T. *Matemática aplicada à administração e economia*. Trad.: Edson de Faria. 5a. ed. americana. São Paulo : Pioneira Thomson Learning, (2005).

[18] Vilches, M. A.*Cálculo para economia e administração: volume I*. Disponível em: www.ime.uerj.br/˜ calculo. Acesso em: 28/01/2013.(2009).

[19] Zentgraf, Walter.*Matemática financeira: com emprego de funções e planilhas, modelo Excel*. Rio de Janeiro : Elsevier, (2007).