

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL**

REGINALDO SOUZA DE ABREU

**MASSA-MOLA: MODELO FÍSICO ADEQUADO PARA DESCREVER O
COMPORTAMENTO DE ALGUNS SISTEMAS REAIS**

Campo Grande - MS

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

REGINALDO SOUZA DE ABREU

MASSA-MOLA: MODELO FÍSICO ADEQUADO PARA DESCREVER O
COMPORTAMENTO DE ALGUNS SISTEMAS REAIS

ORIENTADOR: PROF. DR. EDSON RODRIGUES CARVALHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2019

**MASSA-MOLA: MODELO FÍSICO ADEQUADO PARA DESCREVER O
COMPORTAMENTO DE ALGUNS SISTEMAS REAIS**

REGINALDO SOUZA DE ABREU

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul- INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Edson Rodrigues Carvalho (Orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Celso Correia de Souza (Avaliador externo)
Universidade Anhanguera – UNIDERP

Prof. Dr. Samuel Leite Oliveira
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. Mustapha Rachidi
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Campo Grande – MS, 30 de outubro de 2019

Agradecimentos

Agradeço à dedicação do meu orientador, professor Edson, exemplo de pessoa e profissional, pela paciência e pelo conhecimento compartilhado, sem ele esse trabalho não poderia ser realizado. Obrigado por tudo.

Agradeço aos professores do PROFMAT pelo comprometimento e conhecimentos repassados.

Agradeço ao meu filho Ravi e a minha amada esposa Deyne, mulher guerreira, amiga, companheira de todas as horas, que compreenderam a importância desse projeto na minha vida. Obrigado por serem a razão da minha vida. AMO VOCÊS.

“A linguagem da matemática possibilita à ciência se aprofundar em teorias com visão e previsão mais amplas que a linguagem comum, pois ela tem regras embutidas de raciocínio e lógica que aumentam seu significado, permitindo desdobramentos inesperados.”

Leonard Mlodinov.

Resumo

Esta dissertação utiliza os princípios da modelagem matemática para analisar a estrutura de um sistema físico massa-mola. Alguns sistemas reais nos quais os agentes interagem de forma semelhante ao sistema massa-mola e cujos modelos matemáticos são descritos por equações diferenciais foram estudados. A análise do sistema físico massa-mola permite a extensão do conhecimento adquirido de modo que pode ser aplicado em outros fenômenos que ocorrem em campos diversos.

Palavras-chave: Sistema Massa-Mola; Modelagem Matemática; Sistemas Reais.

Abstract

This dissertation uses the principles of mathematical modeling to analyze the structure of a spring-mass physical system. Some real systems in which agents interact similarly to the spring-mass system and whose mathematical models are described by differential equations were studied. The study of the spring-mass physical system allows the extension of the acquired knowledge so that it can be applied to other phenomena that occur in different fields.

Keywords: Spring Mass System; Mathematical modeling; Real systems.

Sumário

Agradecimentos	2
Resumo	4
Abstract	5
Sumário	6
Lista de Figuras	8
Capítulo 1 - Introdução.....	10
Capítulo 2 – Sistemas, Modelos e Modelagem Matemática	12
2.1 Sistemas e Modelos	12
2.2. Modelagem Matemática.....	14
Capítulo 3 – Sistema Massa-Mola.....	20
3.1 Um Sistema Massa-Mola com Um Grau de Liberdade	20
3.1.1 Definições	21
3.1.2 Análise do Sistema.....	21
3.1.3 Modelação	22
3.1.4 Simulação	24
3.1.5 Validação.....	40
3.2 Um Sistema Massa-Mola com Dois Graus de Liberdade	40
3.2.1 Definições	41
3.2.2 Análise do Sistema.....	41
3.2.3 Modelação	42
3.2.4 Simulação	43
3.2.4.1 Solução da Equação (39)	45
3.2.4.2 Solução da Equação (40)	48
3.2.4.3 Obtendo as Equações do Movimento	50
3.2.5 Validação.....	61
Capítulo 4 – Aplicações.....	62
4.1. Viga engastada e em balanço	62
4.1.1 Definições	62
4.1.2 Análise do sistema	63

4.1.3	Modelação	63
4.1.4	Simulação:	64
4.1.5	Validação	66
4.2	Circuito RLC	66
4.2.1	Definições:	66
4.2.2	Análise do sistema:	67
4.2.3	Modelação:	68
4.2.4	Simulação:	68
4.2.5	Validação	72
4.3	Sistema Predador-Presa	72
4.3.1	Definições:	72
4.3.2	Análise do Sistema:	73
4.3.3	Modelação:	73
4.3.3.1	Modelo Matemático:	74
4.3.4	Simulação:	76
4.3.5	Validação:	80
Capítulo 5 – Conclusão		81
Capítulo 6 – Referências Bibliográficas		82

Lista de Figuras

Figura 1: Roteiro para Modelagem Matemática.	16
Figura 2: Queda de corpos.	17
Figura 3: Roteiro para Modelagem Matemática.	18
Figura 4: Sistema Massa-Mola em Equilíbrio.	21
Figura 5: (a) Modelo aproximado do Sistema, (b) Diagrama de Corpo Livre: bloco de massa m , (c) Diagrama de Corpo Livre: Mola e amortecedor,(d) Diagrama de Corpo Livre: bloco de massa m , considerando a Força da Mola e Força de Amortecimento, a $F(t)$ (Força Externa) será considerada nula, conforme suposição.	22
Figura 6: Deslocamento resultante do exemplo 1.	34
Figura 7: Deslocamento resultante do exemplo 2.	37
Figura 8: Deslocamento resultante do exemplo 3.	40
Figura 9: Dois blocos acoplados a três molas.	41
Figura 10: Diagrama de corpo isolado do bloco de massa m_1	42
Figura 11: Diagrama de corpo isolado do bloco de massa m_2	43
Figura 12: Sistema acoplado em equilíbrio.	51
Figura 13: Sistema acoplado em equilíbrio, com k_3 com valor muito próximo de zero.	52
Figura 14: Gráfico dos deslocamentos dos blocos de massas m_1 e m_2	53
Figura 15: Sistema Massa-Mola com 2 blocos de massas m e 3 molas.	54
Figura 16: Gráfico dos deslocamentos dos blocos de massas m_1 e m_2	56
Figura 17: Sistema Massa-Mola com um grau de Liberdade.	57
Figura 18: Duas massas acopladas a três molas.	57
Figura 19: Ajuste do sistema com 2 graus de liberdade para um sistema com 1 grau de liberdade.	58
Figura 20: Gráfico do deslocamento da massa m_1	60
Figura 21: Viga de seção transversal retangular com carregamento na extremidade.	63
Figura 22: Gráfico demonstrando o deslocamento dinâmico da extremidade da viga, considerando o sistema livre e não amortecido.	66

Figura 23: Circuito RLC.	67
Figura 24: Gráfico demonstrando o comportamento do circuito RLC.	71
Figura 25: Gráfico do comportamento do sistema predador-presa.	79

Capítulo 1 - Introdução

Este trabalho tem dois objetivos:

1. Utilizar os princípios da modelagem matemática na análise da estrutura de um sistema massa-mola, bem como nas aplicações envolvendo sistemas reais que se comportam como massa-mola.
2. Estudar alguns sistemas reais em que os agentes interagem de forma semelhante ao sistema massa-mola e cujos modelos matemáticos são descritos por equações diferenciais.

Estudar a mecânica do sistema massa-mola com detalhes, cujo legítimo representante é o oscilador harmônico, é muito importante porque este sistema tem análogos que lhe são muito próximos, em outros campos do conhecimento. Além disso, as equações que governam o comportamento deste sistema são muito parecidas com as equações que governam comportamentos semelhantes de fenômenos que ocorrem em outras ciências. Deste modo, o estudo detalhado do sistema físico massa-mola pode permitir a extensão do conhecimento adquirido para ser aplicado em outros fenômenos que ocorrem em campos diversos.

O sistema massa-mola que vamos estudar tem como modelo matemático uma equação diferencial, que também é um modelo matemático para uma série de fenômenos vistos em diferentes áreas. Como exemplo, temos as vibrações de um diapasão que está gerando ondas sonoras; as vibrações análogas dos elétrons em um átomo, que geram ondas de luz; as equações para o funcionamento de sistemas de controle automático, tais como um termostato tentando ajustar a temperatura; interações complicadas em reações químicas; o crescimento de uma colônia de bactérias em interação com a fonte de comida e os venenos que as bactérias produzem; raposas comendo coelhos que comem grama e assim por diante (FEYNMAN, 2008).

Com isto em mente, o desenvolvimento deste trabalho ocorrerá em quatro etapas (capítulos), que passamos a descrever.

No capítulo 2, definiremos o conceito de sistema tendo por base diferentes definições estampadas na literatura, com ênfase nos sistemas mecanicistas. A seguir, descreveremos alguns sistemas reais cujos modelos matemáticos levam a equações diferenciais. Finalmente,

trataremos sobre o conceito envolvendo modelagem matemática de sistemas reais definindo os principais estádios a serem seguidos para a solução de problemas reais.

No capítulo 3, trataremos do aspecto central deste trabalho, que é o sistema massa-mola. A análise da estrutura deste sistema será feita com alguns detalhes, abordando diferentes modelos físicos, utilizando a metodologia da modelagem matemática e o software MAXIMA, como auxílio computacional.

No capítulo 4, serão propostos alguns problemas reais, tratados à luz do modelo físico massa-mola e da metodologia de modelagem matemática. Os problemas escolhidos passaram por um processo de modelagem para definir o modelo matemático adequado. Uma relação será estabelecida com o modelo físico massa-mola e as soluções são analisadas por meio de simulações, utilizando o software MAXIMA.

Capítulo 2 – Sistemas, Modelos e Modelagem Matemática

Neste capítulo, discorreremos sobre conceitos básicos e ideias que incluem a definição de termos como sistema, modelos, modelagem e modelagem matemática. Estas noções básicas são necessárias para todo aquele que pretende trabalhar com a complexidade dos problemas tratados nas ciências em geral. De fato, as dificuldades que surgem ao tratar um problema real são provenientes da complexidade dos sistemas e os modelos são uma ferramenta adequada para quebrar esta complexidade e tornar os problemas tratáveis (VELTEN, 2007).

2.1 Sistemas e Modelos

Um sistema não é fácil de definir. Podemos apenas esboçar uma ideia do que poderia representá-lo. Existe, na literatura, um número razoável de diferentes conceitos sobre sistema. Neste trabalho, pensaremos em “sistema” como sendo “algo” presente no mundo real (mundo não matemático), cujas propriedades queremos estudar. Assim, entenderemos “sistema” como sendo nosso objeto de interesse, que segundo (VELTEN, 2007), pode ser uma parte da natureza (tal como uma célula de uma planta, um átomo, uma galáxia, etc.) ou um sistema tecnológico complexo (*e.g.*, processadores de computador).

Sistemas físicos são, em geral, muito complexos e difíceis de analisar. De fato, na maioria das vezes eles são compostos por um grande número de componentes agindo como entidades isoladas. Para analisar tais sistemas, os vários componentes precisam ser identificados e suas propriedades físicas determinadas. Estas propriedades que governam o comportamento do sistema, geralmente são determinadas por meios experimentais. Os sistemas podem ser classificados como contínuos ou discretos no tempo. Modelos discretos possuem um número finito de graus de liberdade, enquanto que os modelos contínuos possuem infinitos graus de liberdade. O número de graus de liberdade de um sistema é definido como o número de coordenadas independentes requeridas para descrever completamente o seu movimento (MEIROVITCH, 1986).

Na literatura existem diversas definições de sistemas e tipos de sistemas. Seguem algumas delas (VELTEN, 2007):

1 – Sistema é uma coleção de entidades, por exemplo, pessoas ou máquinas, que agem e interagem em conjunto para a realização de algum fim lógico.

2 – Sistema é uma coleção de objetos e relações entre objetos.

3 – Um sistema é uma potencial fonte de dados.

4 – Um sistema é um objeto ou uma coleção de objetos cujas propriedades queremos estudar.

Neste trabalho, adotamos a definição 4, ou seja, “sistema” é “algo” presente no mundo real (mundo não matemático), cujas propriedades queremos estudar.

Um modelo é uma descrição simplificada de um sistema. O modelo aprofunda nossa compreensão do sistema. De fato, não importa qual seja o problema que queiramos resolver, teríamos sérias dificuldades se resolvêssemos atacá-lo diretamente, sem decidir quais aspectos do problema são mais importantes reter. Isto porque a situação real associada àquele sistema possui tantas facetas que não poderíamos levar todas em consideração. Um modelo pode ser físico ou conceitual. Modelos conceituais são aqueles que usamos para resolver problemas do dia a dia, como por exemplo, o esboço da planta de uma casa. Neste caso, o modelo está em nossa mente e podemos retratá-lo esboçando-o em um papel. Modelos físicos, por outro lado, referem-se a problemas mais complexos e que exigem experimentação. De fato, modelos deste tipo não estão só em nossa mente, mas correspondem também a uma parte real do mundo físico. Modelos físicos são aplicados, em geral, por cientistas e engenheiros de forma semelhante. Considere, por exemplo, o problema de entender o processo da fotossíntese em plantas. Semelhante a um engenheiro, o cientista estabelecerá um cenário experimental simplificado, que pode ser um recipiente com uma cultura de células vegetais, no qual ele pode facilmente observar e medir as variáveis importantes, como CO₂, água, luz e assim por diante. Neste caso, o sistema seria a planta, enquanto que o modelo seria o cenário experimental (VELTEN, 2007)

O conceito de modelo que estamos apresentando sugere que modelar é uma atividade que exige que pensemos a respeito e esboçemos um cenário físico adequado para descrever como os dispositivos ou objetos de interesse se comportam. Existem muitas maneiras de se descrever isto. De fato, podemos utilizar palavras, esboços, modelos físicos, implementações computacionais ou fórmulas matemáticas. Portanto, existem muitas representações possíveis para fazer a atividade de modelagem, inclusive simultaneamente (ALDER, 2001).

Listamos abaixo alguns exemplos de sistemas reais cujos modelos matemáticos são equações diferenciais (THOMAS, 2013):

1. Capitalização de investimentos: é uma aplicação utilizada no Sistema Financeiro;
2. Oscilador harmônico amortecido: é uma aplicação utilizada na Física e Engenharias em geral;
3. Circuito RLC (tipo de circuito elétrico encontrado especialmente em rádios, sendo constituído por um resistor de resistência R , um indutor de indutância L , um capacitor de capacitância C e uma fonte de tensão;
4. Dispersão de uma medição encapsulada em um organismo vivo.

2.2. Modelagem Matemática

A matemática é um meio de comunicação poderoso, no sentido de que representa uma linguagem concisa e exata, permitindo soluções criativas de problemas. Além disso, envolve observação, representação, investigação e comparações de padrões que atingem os fenômenos físicos e sociais. De fato, em seu nível atual de desenvolvimento, a matemática está sendo utilizada em praticamente todos os ramos da atividade humana, sendo essencial para o desenvolvimento científico e tecnológico, permitindo a interpretação e análise de informações, bem como modelando situações problemas do mundo real. Neste sentido, a modelagem matemática trabalha como sendo aquela parte que liga os problemas reais que queremos resolver, com aqueles problemas que exigem respostas quantitativas, sejam eles oriundos das indústrias, da medicina, da economia, da biologia, da geofísica, etc.

Segundo (FOWLER, 2005), existem três espécies de modelos: Estatístico, discreto e contínuo. Os modelos estatísticos são diagnósticos, isto é, tentam interpretar o processo a partir de dados mensurados. Já os modelos discretos e contínuos são prognósticos, ou seja, eles propõem um modelo descritivo para um fenômeno e, então, predizem o que ocorrerá no futuro. Todos estes modelos exigem validação. Um modelo discreto proporá uma equação de diferenças para a variável que está sob investigação, enquanto que o modelo contínuo descreverá o mesmo processo utilizando equações diferenciais. A razão para os modelos contínuos repousa na **hipótese do contínuo**, a qual afirma que o comportamento atual de uma variável discreta pode ser precisamente representado pela evolução de uma variável contínua (usualmente diferenciável).

Neste contexto estaremos interessados, particularmente, em utilizar a matemática para descrever situações problemas detectadas em situações reais, observando os principais estádios que envolvem este procedimento (modelagem matemática) e direcionar estas ideias no sentido de aplicá-las a diferentes áreas do conhecimento. Em particular, estamos interessados em

revisitar o sistema massa-mola, pela sua importância como modelo físico adequado na descrição de alguns fenômenos físicos, aplicando os princípios da modelagem matemática.

Iniciaremos esta sessão apresentando os conceitos envolvidos na modelagem matemática, ilustrando os principais estádios para a solução de problemas do mundo real. De maneira geral, VELTEN (2007) sugere um roteiro para a investigação de um sistema complexo utilizando modelos:

1. Definições

- (a) Definir um problema a ser resolvido e/ou uma questão a ser respondida.
- (b) Definir o sistema, isto é, a parte da realidade que é pertinente ao problema ou à questão.

2. Análise do sistema

- Identificar quais são os aspectos do sistema que são relevantes para o problema em questão.

3. Modelação

- Desenvolver um modelo do sistema baseado na análise dos aspectos relevantes do sistema.

4. Simulação

- (a) Aplicar este modelo ao problema em questão: Simulações computacionais
- (b) Desenvolver uma estratégia para resolver o problema ou responder à questão.

5. Validação

- A estratégia desenvolvida na simulação resolve o problema ou responde à questão para o sistema real?

Um análogo deste roteiro pode ser mostrado na figura 1:

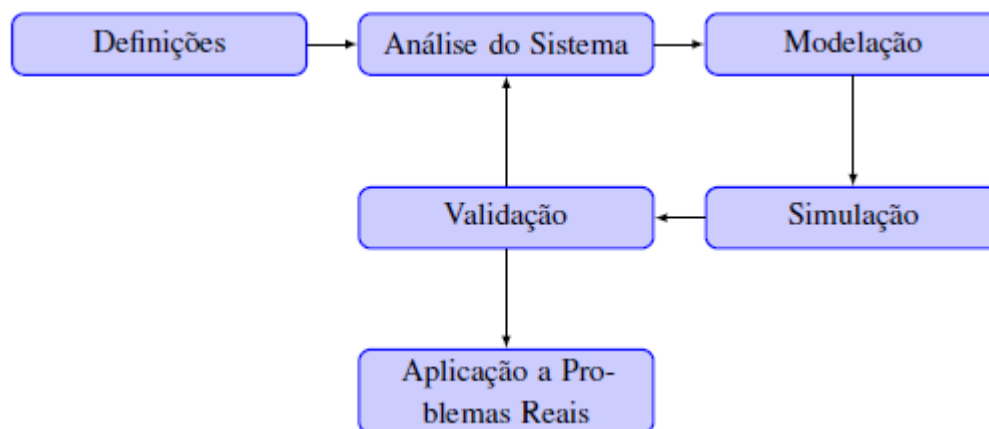


Figura 1: Roteiro para Modelagem Matemática.

Fonte: VELTEN (2007).

Vamos aplicar este roteiro utilizando um exemplo que pode ser encontrado em MEYER (1984).

1. Definição do problema.

(a) Por que os objetos caem na Terra? Esta foi uma das primeiras questões específicas sobre a gravidade. No tempo de Galileu, as pessoas começaram a perguntar “como os objetos caem na terra”, ao invés de por que. O próprio Galileu queria descrever uma forma que mostrasse como os objetos ganham velocidade quando eles caem. Então, Galileu formulou duas perguntas:

- i. Qual fórmula descreve o ganho de velocidade de um corpo quando ele cai?
- ii. Qual fórmula descreve até que ponto um corpo cai em um dado intervalo de tempo?

(b) O sistema, neste caso, é constituído por objetos que caem em queda livre sobre a Terra. Observação: No tempo de Galileu, o cálculo diferencial não havia, ainda, sido formalizado, entretanto, utilizaremos a notação moderna destes conceitos para melhor ilustrar a aplicação do roteiro.

2. Análise do sistema

(a) Os fatores relevantes que Galileu decidiu considerar foram: distância, tempo e velocidade. Então, sua primeira suposição, baseada nestes fatores relevantes, foi:

3. Modelação

- (a) Se um corpo cai, a partir do repouso, então sua velocidade em qualquer ponto é proporcional à distância já percorrida.
- (b) O próprio Galileu percebeu mais tarde que esta suposição estava errada. Entretanto, antes de descartá-la ele completou o processo de investigação.

Modelo Matemático: Consideremos uma escala vertical em que x mede a distância ao longo desta escala. Em um certo instante no tempo, digamos, $t = 0$, começamos a observar o objeto caindo. Por conveniência, seja $x = 0$ o ponto inicial de observação. Consideremos $x(t)$ a distância do objeto após t segundos de queda. A figura 2 descreve esta situação.

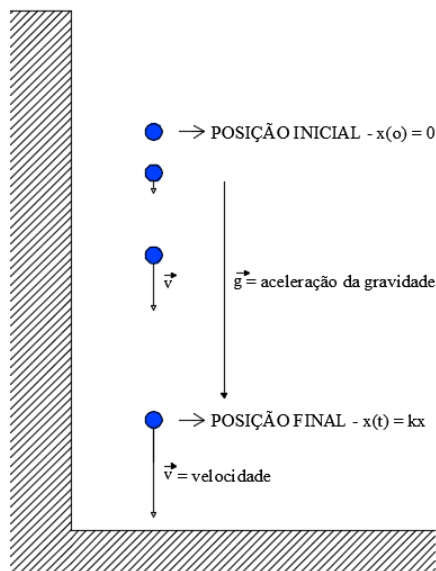


Figura 2: Queda de corpos.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Entre os instantes de tempo t_0 e $t_0 + t$ a distância percorrida pelo objeto é dada por $\frac{x(t_0+t)-x(t_0)}{h}$.

Se fizermos $h \rightarrow 0$ o quociente se aproxima de $\frac{dx}{dt}$, avaliado em t_0 . Assim, a descrição matemática (modelo matemático) da suposição de Galileu é:

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{1}$$

Em que a é uma constante a ser determinada.

4. Simulação

(a) A solução da equação (1) é

$$x(t) = ke^{at} \quad (2)$$

Podemos calcular a constante de integração k , utilizando o fato de que em $t = 0$ o objeto está em repouso. Assim, $x = 0$ quando $t = 0$. Substituindo na Equação (2), obtemos

$$0 = ke^0 = k.$$

Portanto,

$$x(t) = 0, \text{ para todo } t. \quad (3)$$

5. Validação

De acordo com a equação (3), o objeto nunca se moverá, não importa quanto tempo esperemos.

Como a conclusão contraria a suposição feita na modelação e não houve erros no processo de resolução do modelo matemático, então, é preciso retornar à análise do sistema e reformular as suposições.

É evidente que Galileu também chegou à conclusão da ineficiência deste modelo e o reformulou.

BURGHES (1981, pp. 13-14), também apresenta os principais estádios na modelagem de problemas reais e os ilustram conforme a Figura 3, a seguir:

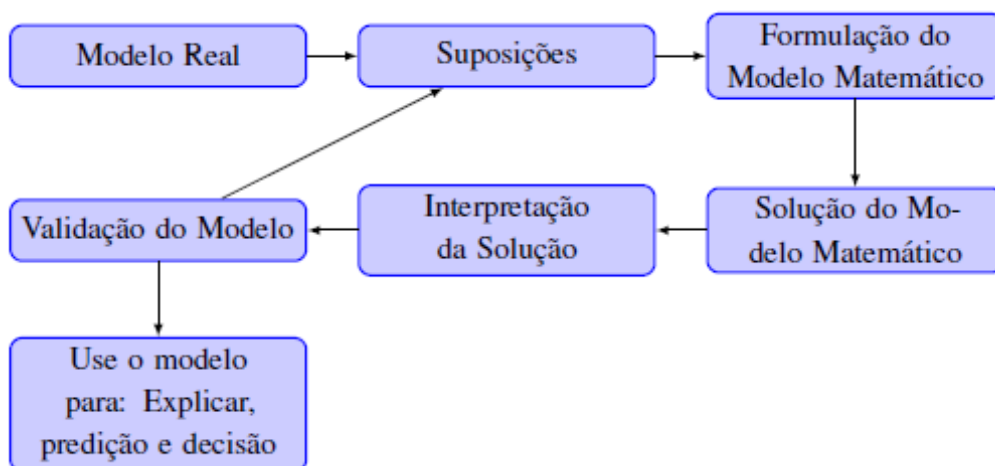


Figura 3: Roteiro para Modelagem Matemática.

Fonte: BURGHES & BORRIE (1981).

Neste diagrama, o problema relacionado ao mundo real pode ser explicar alguns dados obtidos por observação, fazer previsões ou tomar uma decisão. Para se conseguir isto é necessário fazer algumas suposições e simplificações, definindo variáveis importantes e as relações entre elas. Isto deve levar à formulação de um modelo matemático que seja passível de ser tratado. A seguir, utilizando técnicas matemáticas adequadas, o problema é resolvido. Após a solução, esta deve ser interpretada em termos do problema real, de modo que o modelo possa ser validado. Uma vez validado, o modelo pode ser utilizado para explicar, fazer previsão ou tomar decisão. Como menciona BURGHEES & BORRIE (1981), no diagrama, a primeira coluna representa o mundo real, a última coluna, o mundo matemático e a coluna do meio, as conexões entre estes dois mundos.

Como pode-se observar, tanto o roteiro apresentado por VELTEN (2007), quanto o apresentado por BURGHEES & BORRIE (1981), estabelecem uma relação entre o mundo real e o mundo matemático que passa pelo estabelecimento de conexões, que compreendem uma simplificação do problema real (sistema) de modo a possibilitar a construção de um modelo que permita um tratamento adequado das equações que aproximam a solução daquele modelo e conseqüentemente do problema real. Na continuidade deste trabalho estaremos tratando de situações reais e modelos tendo por substrato os conceitos apresentados neste capítulo

Capítulo 3 – Sistema Massa-Mola

Um sistema massa-mola é uma estrutura mecânica sujeita a forças cuja grandeza, direção ou ponto de aplicação varia com o tempo. É um sistema bem conhecido na literatura, principalmente nas áreas da física e das engenharias e pode ser utilizado para retratar comportamentos de sistemas naturais.

É neste sentido que, neste capítulo, analisamos especificamente dois modelos representando, respectivamente, um sistema com um grau de liberdade e outro com dois graus de liberdade, isto é, sistemas que são descritos por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem ou por um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Procuraremos desenvolver os dois modelos aplicando as noções estabelecidas no capítulo 2, referentes à modelagem matemática. A intenção é utilizar os resultados deste capítulo para mostrar como estes sistemas físicos se relacionam com modelos associados a alguns sistemas reais.

Assim, o objetivo deste capítulo é estudar o comportamento deste sistema sujeito a pequenos deslocamentos. O comportamento, aqui referido, é caracterizado pelo movimento causado por um dado deslocamento em relação ao ponto de equilíbrio e referido como resposta do sistema. A descrição do movimento do sistema será feita pelo deslocamento e a excitação ocorrerá na forma de um deslocamento inicial.

3.1 Um Sistema Massa-Mola com Um Grau de Liberdade

A análise do comportamento dinâmico deste sistema, tem como finalidade nos conduzir a um modelo matemático do mesmo. Para isto, vamos seguir o roteiro sugerido por VELTEN (2007), apresentado no capítulo anterior.

3.1.1 Definições

(a) Definição do Sistema

Consideremos um sistema mecânico de um grau de liberdade composto por um bloco de massa m sobre uma superfície plana, interligada a uma mola de comprimento l , presa a uma estrutura fixa. Sob as componentes deste sistema atuam forças como mostra o modelo representado na Figura 4.

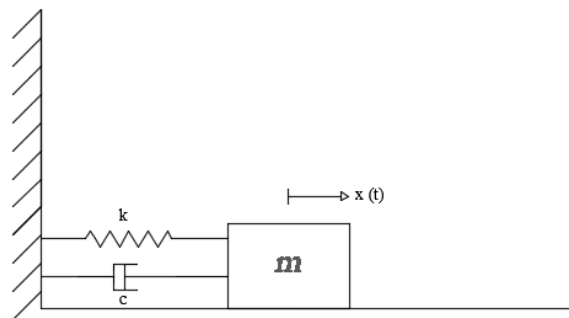


Figura 4: Sistema Massa-Mola em Equilíbrio.

Fonte: Elaborado pelo Autor (Autocad)

(b) Questões a serem respondidas

- i. Considere que o sistema foi deslocado por uma quantidade x_0 e depois foi solto. Qual é o tipo de movimento resultante?
- ii. Que fórmulas descrevem este comportamento?

3.1.2 Análise do Sistema

A fim de simplificar a análise do sistema, representado na figura 4, adotaremos as seguintes suposições:

- (a) O atrito entre a massa e a superfície é considerado desprezível.
- (b) Forças externas não serão consideradas, isto é, $\sum F_e = 0$.
- (c) A massa da mola é desprezível.
- (d) A força da mola obedece à Lei de Hooke, isto é, $F_k = -kx$.
- (e) A força de amortecimento é dada por $F_c = -b \frac{dx}{dt}$.

3.1.3 Modelação

Considerando as simplificações feitas no item anterior, nosso modelo aproximado do sistema é mostrado na Figura 5, que inclui o diagrama de corpo livre.

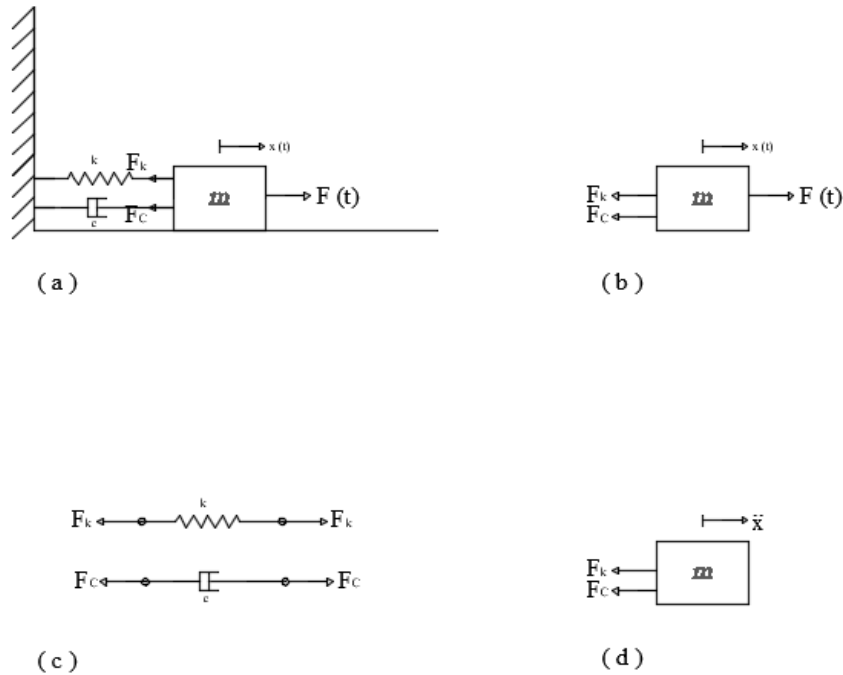


Figura 5: (a) Modelo aproximado do Sistema, (b) Diagrama de Corpo Livre: bloco de massa m , (c) Diagrama de Corpo Livre: Mola e amortecedor, (d) Diagrama de Corpo Livre: bloco de massa m , considerando a Força da Mola e Força de Amortecimento, a $F(t)$ (Força Externa) será considerada nula, conforme suposição.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Para obter a equação do movimento, vamos utilizar a segunda Lei de Newton em conjunção com o diagrama de corpo livre mostrado na Figura 5(b). No caso da mola, assumida sem massa, a força F_k que age de um lado da mola deve ser balanceada por uma força F_k agindo do outro lado da mola, que é igual em módulo, mas de direção oposta (Figura 5(c)). Devido à força F_k , a mola sofre um alongamento igual à diferença entre os deslocamentos x_2 e x_1 dos pontos finais. Para pequenos valores de $x_2 - x_1$, a força pode ser vista como proporcional ao alongamento, em que a constante de proporcionalidade é a inclinação k . Portanto, no domínio

em que a força é proporcional ao alongamento, a relação entre a força da mola e o alongamento é dada por

$$F_K = k(x_2 - x_1) = kx(t) \quad (4)$$

em que estamos definindo $x(t) = x_2 - x_1$. A constante k é chamada de **constante da mola** ou **rigidez da mola**. No caso da força de amortecimento, a força F_c , que sempre atua na direção oposta do movimento da massa, deve ser balanceada por uma força F_c , agindo do outro lado do amortecedor, que é igual em módulo, mas de direção oposta (Figura 5(c)).

Segundo BOYCE & DIPRIMA (1998, pp. 127), esta força pode ser devida às propriedades viscosas do meio no qual o corpo se move (resistência do ar, por exemplo), ou o corpo pode estar ligado a um dispositivo mecânico, como um absorvedor de choques, que proporciona uma força resistiva ao movimento. Este dispositivo é frequentemente denominado **amortecedor**. Em qualquer caso, vamos admitir que a força resistiva seja proporcional à velocidade escalar (dx/dt) do bloco. Os resultados experimentais verificam que esta hipótese é razoavelmente precisa no caso de corpos que se deslocam, não muito rapidamente. Se $dx/dt > 0$, então x está crescendo e o bloco está se deslocando no sentido adotado como positivo. A relação entre a força resistiva do amortecedor e a velocidade é dada por:

$$F_c(t) = -b \frac{dx}{dt}(t), \quad (5)$$

Onde b é uma constante de proporcionalidade positiva, conhecida como constante de amortecimento.

A componente que relaciona força com aceleração é a massa. Esta relação tem a forma

$$F_m = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (6)$$

A equação (6) representa a segunda lei do movimento de Newton, segundo a qual, a força resultante sobre o bloco F_m é proporcional a aceleração $\frac{d^2x}{dt^2}$, medida com relação a um sistema de referência inercial, em que a constante de proporcionalidade é simplesmente a massa m . Assim, considerando o diagrama de corpo livre (Figura 5(b)), a análise dos componentes do sistema e invocando a segunda Lei de Newton, temos

$$F(t) - F_k - F_C = m \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (7)$$

Utilizando as Equações (4) e (5) e lembrando que não existem forças externas atuando no sistema ($F(t) = 0$), obtemos (BOYCE & DIPRIMA, 1998):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (8)$$

que é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes. Os coeficientes constantes m , b e k representam os parâmetros do sistema. No caso do modelo do sistema mostrado na Figura 5(a), a posição de equilíbrio coincide com a posição na qual a mola está não esticada.

A Equação (8) representa o modelo matemático aproximado do sistema físico cujo modelo é mostrado na Figura 4. O próximo passo é encontrar uma solução para o modelo matemático em questão.

3.1.4 Simulação

A Equação (8) tem coeficientes constantes (reais) arbitrários e procuraremos soluções do tipo exponencial para ela. Assim, vamos supor que $x = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Vem então que:

$$x' = r e^{rt} \text{ e } x'' = r^2 e^{rt} \quad (9)$$

levando as expressões de x , de x' e x'' na Equação (8), obteremos

$$(mr^2 + br + k)e^{rt} = 0. \quad (10)$$

como $e^{rt} \neq 0$, para qualquer r e t ,

$$mr^2 + br + k = 0 \quad (11)$$

A Equação (11) é a equação característica da equação diferencial (8). O seu significado está em, no caso de r ser uma raiz da equação polinomial (10), $x = e^{rt}$ será uma solução desta

equação diferencial. Uma vez que a Equação (10) é uma equação quadrática com os coeficientes reais, tem duas raízes (r_1 e r_2) que podem ser reais e diferentes, reais e iguais ou complexas conjugadas. Logo

$$x_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^{r_2 t} \quad (12)$$

são soluções da Equação (8); Portanto **a combinação linear das duas, também é solução da Equação (8).**

Teremos, portanto, como SOLUÇÃO GERAL da Equação (8):

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (13)$$

Onde c_1 e c_2 são constantes.

- Consideremos a hipótese das raízes da equação característica (11) serem reais e diferentes, ou seja $b^2 - 4mk$ ser um número maior do que zero. Assim sendo, vamos denotá-las por r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$. (CASO SUPERAMORTECIDO)

Essa situação, em termos físicos, implica na condição $b > 2\sqrt{km}$. Nessa situação o sistema não oscila mais e, ao ser deslocado e libertado, retorna para sua posição de equilíbrio mais lentamente do que no caso de amortecimento crítico.

Temos que a solução geral da Equação (8) é dada pela Equação (13) e na hipótese acima considerada, teremos:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (14)$$

Temos ainda que:

$$x'(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} \quad (15)$$

Suponhamos agora que desejamos encontrar um certo membro da família de soluções (13) que satisfaça às condições iniciais:

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad x'(t_0) = v_0 \quad (16)$$

Pela substituição $t = t_0$ e $x = x_0$ na Equação (13), obtemos

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = x_0 \quad (17)$$

Analogamente, fazendo $t = t_0$ e $x'(t_0) = v_0$ na Equação (13), vem

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = v_0 \quad (18)$$

A resolução simultânea das Equações (17) e (18), em termos de c_1 e c_2 , fornece

$$c_1 = \frac{v_0 - x_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \quad c_2 = \frac{x_0 r_1 - v_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0} \quad (19)$$

Assim, quaisquer que sejam as condições iniciais estipuladas, ou seja, quaisquer que sejam os valores de t_0 , de x_0 e de v_0 , é sempre possível determinar c_1 e c_2 , de modo a satisfazer às condições iniciais. Além disso, só há uma escolha possível de c_1 e de c_2 para cada conjunto de condições iniciais. Substituindo os valores de c_1 e c_2 dados pela equação (19) e r_1 e r_2 dados pela Equação (14), na Equação (13), teremos resolvido o problema do valor inicial e teremos a solução da equação (8),

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

para esta hipótese, ou seja, sujeita às condições iniciais

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (20)$$

- Consideremos a hipótese de as raízes da equação característica (11) sejam números complexos conjugados, ou seja, $b^2 - 4mk$ ser um número menor do que zero.

(CASO SUBAMORTECIDO)

Essa situação, em termos físicos, implica na condição $b < 2\sqrt{km}$. Nessa situação o sistema oscila com uma amplitude que diminui continuamente.

Calculando os valores de r_1 e r_2 , utilizando a Equação (14), teremos que r_1 e r_2 serão números na forma:

$$r_1 = \lambda + i\mu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\mu, \quad (21)$$

onde λ e μ são números reais. As expressões correspondentes a $x_1(t)$ e $x_2(t)$, dadas pela Equação (12), substituindo r_1 e r_2 pela Equação (21), serão:

$$x_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], \quad x_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \quad (22)$$

A Fórmula de Euler: A fim de ter um significado para as expressões das Equações (22), precisamos ter a definição de uma função exponencial complexa. Como é claro, queremos que a definição se reduza à função exponencial real, bem conhecida, quando o expoente for real. Há várias formas de conseguir esta extensão da função exponencial. Vamos usar um método baseado nas séries infinitas. Com isto em mente, consideremos a série:

$$\begin{aligned} e^{i\mu t} &= 1 + i\mu t + \frac{1}{2!}(i\mu t)^2 + \frac{1}{3!}(i\mu t)^3 + \frac{1}{4!}(i\mu t)^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(\mu t)^2 + \frac{1}{4!}(\mu t)^4 - \dots + i\left(\mu t - \frac{1}{3!}(\mu t)^3 + \frac{1}{5!}(\mu t)^5 - \dots\right) \\ &= \cos(\mu t) + i\sin(\mu t). \end{aligned} \quad (23)$$

analogamente, temos que:

$$e^{-i\mu t} = \cos(\mu t) - i\sin(\mu t). \quad (24)$$

A Equação (23) é conhecida como fórmula de Euler.

Queremos agora generalizar a definição de função exponencial para expoentes complexos arbitrários da forma $(\lambda + i\mu)t$.

Uma vez que desejamos que as propriedades usuais da função exponencial tenham validade para expoentes complexos, certamente queremos que $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ satisfaça a

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t}. \quad (25)$$

Assim, ao substituir $e^{i\mu t}$ pela expressão da Equação (23), obteremos

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)t} &= e^{\lambda t} (\cos\mu t + i\sin\mu t) \\ &= e^{\lambda t} \cos\mu t + ie^{\lambda t} \sin\mu t. \end{aligned} \quad (26)$$

Agora, tomamos a Equação (26) como a definição de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$. O valor da função exponencial com um expoente complexo é um número complexo cujas partes real e imaginária são dadas pelas parcelas no segundo membro da Equação (26). Observemos que as partes real e imaginária de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ estão expressas inteiramente em termos de funções elementares reais.

As funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ dadas pelas Equações (22) e com significado expresso pela Equação (8), são solução da Equação (8) quando as raízes da equação característica (11) forem números complexos. Infelizmente, as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções complexas, enquanto, em geral, se fosse possível, teríamos preferência por soluções reais. Estas soluções podem ser encontradas considerando que, se x_1 e x_2 forem soluções da Equação (8), então qualquer combinação linear de x_1 e x_2 é também uma solução. Em particular, façamos a soma e depois a diferença de x_1 e x_2 . Temos:

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= e^{\lambda t} (\cos\mu t + i\sin\mu t) + e^{\lambda t} (\cos\mu t - i\sin\mu t) \\ &= 2e^{\lambda t} \cos\mu t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= e^{\lambda t} (\cos\mu t + i\sin\mu t) - e^{\lambda t} (\cos\mu t - i\sin\mu t) \\ &= 2ie^{\lambda t} \sin\mu t \end{aligned} \quad (27)$$

então, desprezando os fatores 2 e $2i$, em cada expressão, obtivemos um par de soluções reais

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad v(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t \quad (28)$$

Observemos que u e v são simplesmente a parte real e a parte imaginária de x_1 .

Se as raízes da equação forem números complexos $\lambda \pm i\mu$, com $\mu \neq 0$, então a solução geral da Equação (8) é:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t \quad (29)$$

- Consideremos agora a hipótese das raízes r_1 e r_2 da equação característica (6) sejam iguais.

(CASO AMORTECIMENTO CRÍTICO)

Essa situação, em termos físicos, implica na condição $b = 2\sqrt{km}$. Nessa situação o sistema não oscila mais e, ao ser deslocado e libertado, retorna para sua posição de equilíbrio sem oscilar.

$$r_1 = r_2 = -b/2m \quad (30)$$

e a solução da Equação será:

$$x(t) = c_1 t e^{-bt/2a} + c_2 e^{-bt/2a} \quad (31)$$

OBSERVAÇÃO: Algumas considerações acerca de Oscilações amortecidas:

Segundo YOUNG & FREEDMAN (2008, pp. 56), os sistemas reais sempre possuem alguma força não conservativa, contudo a amplitude das oscilações vai diminuindo com o tempo, a menos que seja fornecida alguma energia para suprir a dissipação da energia mecânica.

A diminuição da amplitude provocada por uma força dissipativa denomina-se amortecimento e o movimento correspondente denomina-se oscilação amortecida. O caso mais simples ocorre com um oscilador harmônico simples tendo uma força de atrito amortecedora diretamente proporcional à velocidade do corpo que oscila. Esse comportamento ocorre no escoamento de um fluido viscoso, tal como em um amortecedor ou um caso de atrito entre superfícies lubrificadas com óleo. Nesse caso, existe uma força de atrito adicional que atua sobre o corpo, dada por $F_x = -b \frac{dx}{dt}$, onde $\frac{dx}{dt}$ representa a velocidade e b é uma constante que

descreve a intensidade da força de amortecimento. O sinal negativo indica que a força possui sempre um sentido contrário ao da velocidade.

A frequência angular ω é dada por (BOYCE & DIPRIMA, 1998):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Faremos a simulação das três hipóteses elencadas, através dos exemplos 1, 2 e 3 abaixo, cabendo as seguintes considerações:

- Usaremos o software MAXIMA para simulação, onde escrevemos o algoritmo de resolução das equações no software, visando mostrar o passo-a-passo das etapas de resolução, mostrando, primeiramente a modelagem do sistema massa-mola com um grau de liberdade e por último uma sequência para resolução de equações diferenciais homogêneas de segunda ordem.

- Para as três hipóteses do cálculo das raízes da equação (8), algumas etapas são as mesmas:

- 1) Identificar quem representa a massa (m), o coeficiente de amortecimento (b) e a constante de rigidez da mola (k);
- 2) Determinar o valor de $b^2 - 4mk$, cuja raiz quadrada denominamos de discriminante (Δ) delta, para verificar em qual dos casos iremos recair (superamortecimento: $\Delta > 0$, subamortecimento: $\Delta < 0$ e amortecimento crítico: $\Delta = 0$);
- 3) A frequência natural dar-se-á pela relação:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

- 4) As condições iniciais, ou seja, para o tempo inicial (t_0) deveremos informar x_0 e v_0 (dx/dt).

- As equações da posição resultante $x(t)$ serão específicas para cada caso, o que determinará uma sequência diferente de resolução para cada hipótese.

- a) Considerando a primeira hipótese ($\Delta > 0$), caso denominado de superamortecimento, após a inclusão das condições iniciais, obteremos um sistema linear resultante da imposição das condições iniciais, em que serão determinados os coeficientes c_1 e c_2 . O

deslocamento resultante será a combinação linear dos resultados x_1 e x_2 , obtidos em função das raízes reais já determinadas no início da validação.

- b) Considerando a segunda hipótese ($\Delta < 0$), caso denominado de subamortecimento, após a inclusão das condições iniciais obteremos como resultado duas raízes complexas conjugadas, e teremos que separar, determinando por λ e μ , os coeficientes da parte real e da parte imaginária; isto porque o deslocamento resultante depende destes dois coeficientes. Como na hipótese anterior, obteremos um sistema linear resultante da imposição das condições iniciais, em que serão determinados os coeficientes c_1 e c_2 . O deslocamento resultante será a combinação linear dos resultados x_1 e x_2 , obtidos em função das raízes complexas conjugadas, já determinadas no início da validação.
- c) Considerando a terceira hipótese ($\Delta = 0$), caso denominado de amortecimento crítico, após a inclusão das condições iniciais, obteremos como resultado duas raízes reais iguais. Como nas hipóteses anteriores, teremos um sistema linear resultante da imposição das condições iniciais, em que serão determinados os coeficientes c_1 e c_2 . O deslocamento resultante será a combinação linear dos resultados x_1 e x_2 .

Validaremos os três casos, citando exemplos de sistema massa-mola para cada um deles, e compararemos o gráfico do deslocamento resultante com a bibliografia consultada.

Exemplo 1. Adaptado (BOYCE & DIPRIMA, 1998 – pp.87)

Considere o sistema massa-mola mostrado anteriormente na Figura 5(a) e reapresentado abaixo, com os seguintes parâmetros:

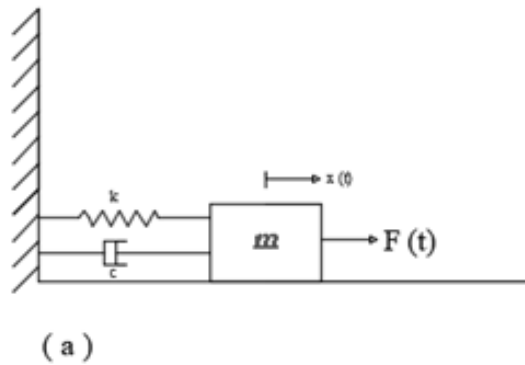


Figura 5 (a) – Sistema massa-mola com amortecimento.

massa do sistema é $m = 1\text{kg}$, o coeficiente de amortecimento é $b = 5\text{ kg/s}$ e o coeficiente de rigidez da mola é $k = 6\text{ N/m}$. Determinar a solução geral do sistema:

Solução:

Substituindo os parâmetros fornecidos para o problema na equação (8), adotada como modelo para o sistema com um grau de liberdade, temos:

$$1 \frac{d^2x}{dt^2} + 5 \frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

Usando o software MAXIMA,

```

EXEMPLO:
1. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, sexta edição -
Boyce e Diprima, pp. 87

--> [m,b,k]:[1,5,6];
(%o7) [1, 5, 6]

Cálculo do discriminante delta da equação característica

--> [delta]:[(b*b-4*m*k)];
(%o8) [1]

calculo das raízes r1 e r2

--> [r1]:[(-b+sqrt(delta))/(2*m)];
(%o9) [-2]

--> [r2]:[(-b-sqrt(delta))/(2*m)];
(%o10) [-3]

cálculo da frequência natural

--> calculo da frequência

--> [w]:[sqrt((k/m)-((b*b)/(4*m*m)))]];
(%o11) [ $\frac{\sqrt{5}}{1}$ ]

```

caso 1: delta > 0 SUPERAMORTECIMENTO

```
caso 1: delta > 0 SUPERAMORTECIMENTO
```

```
--> CONDIÇÕES INICIAIS... (0 linhas escondidas)
```

```
--> [t0,x0,v0]:[0,2,3];  
(%o6) [0,2,3]
```

```
--> [alfa1]:[c1*exp(r1*t0)+c2*exp(r2*t0)];  
(%o7) [c2+c1]
```

```
--> x0=alfa1;  
(%o8) 2=c2+c1
```

```
--> [alfa2]:[c1*r1*exp(r1*t0)+c2*r2*exp(r2*t0)];  
(%o9) [-3 c2-2 c1]
```

```
--> v0=alfa2;  
(%o10) 3=-3 c2-2 c1
```

```
--> algsys([x0=alfa1, v0=alfa2], [c1,c2]);  
(%o11) [[c1=9, c2=-7]]
```

```
--> ALIMENTANDO VALORES DE c1 e c2
```

```
--> [c1,c2]:[9,-7];  
(%o12) [9, -7]
```

```
--> DESLOCAMENTOS X1 E X2
```

```
--> [x1]:[exp(r1*t)];  
(%o13) [%e-2 t]
```

```
--> [x2]:[exp(r2*t)];  
(%o14) [%e-3 t]
```

```
--> DESLOCAMENTO RESULTANTE
```

```
--> x(t):=c1*x1+c2*x2;  
(%o15) x(t):=c1 x1+c2 x2
```

```
--> PLOT DO DESLOCAMENTO
```

```
--> plot2d([x(t)], [t,0,3]);  
(%o16)
```

obtemos a Figura 6, abaixo, que mostra o deslocamento do bloco em função do tempo, considerando o caso superamortecido.

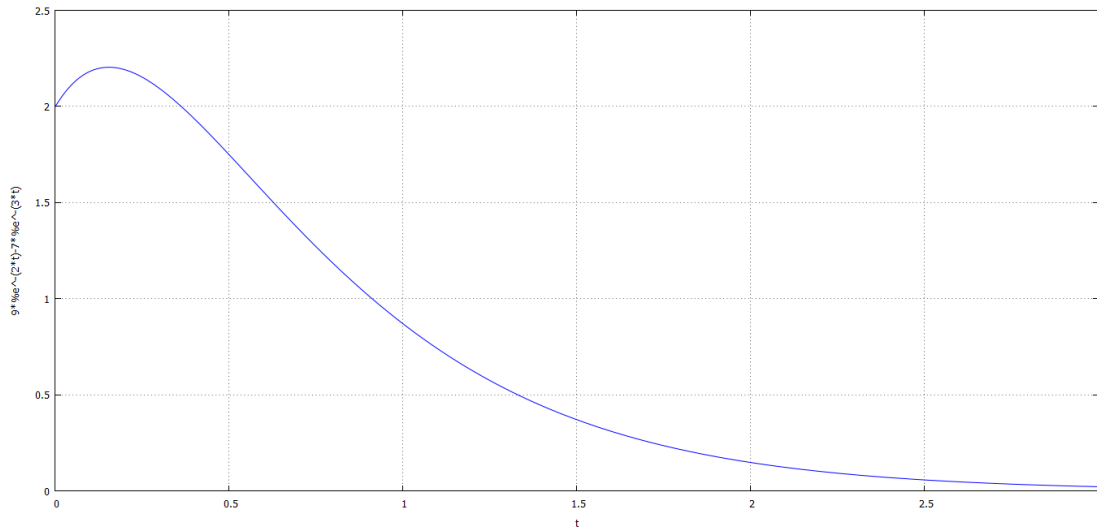


Figura 6: Deslocamento resultante do exemplo 1.

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 6 é equivalente ao resultado apresentado em BOYCE & DIPRIMA (1998, pp. 87).

Exemplo 2. Adaptado (BOYCE & DIPRIMA, 1998 – pp.131)

Considere o sistema massa-mola mostrado anteriormente na Figura 5(a) e representado abaixo, com os seguintes parâmetros:

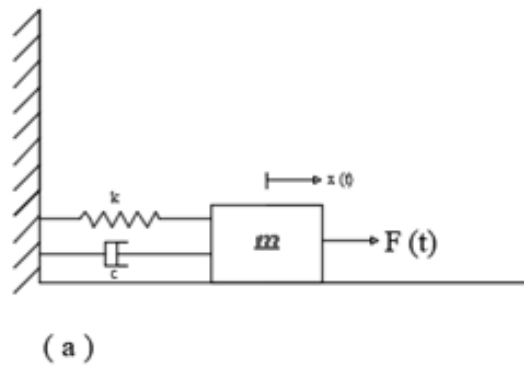


Figura 5 (a) – Sistema massa-mola com amortecimento.

a massa do sistema é $m = 1\text{kg}$, o coeficiente de amortecimento é $b = 0.125\text{kg/s}$ e o coeficiente de rigidez da mola é $k = 1\text{N/m}$. Determinar a solução geral do sistema:

Solução:

Substituindo os parâmetros fornecidos para o problema na equação (8), adotada como modelo para o sistema com um grau de liberdade, temos:

$$1 \frac{d^2x}{dt^2} + 0.125 \frac{dx}{dt} + 1x = 0$$

Usando o software MAXIMA,

```

EXEMPLO:
1. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, sexta edição -
Boyce e Diprima, pp. 131

(%i1) [m,b,k]:[1,0.125,1];
(%o1) [1, 0.125, 1]

Cálculo do discriminante delta da equação característica

(%i2) [delta]:[(b*b-4*m*k)];
(%o2) [-3.984375]

calculo das raizes r1 e r2

(%i3) [r1]:[(-b+sqrt(delta))/(2*m)];
(%o3) [1.996089927833914 %i -0.125]
      2

(%i4) [r2]:[(-b-sqrt(delta))/(2*m)];
(%o4) [-1.996089927833914 %i -0.125]
      2

--> lambda corresponde à parte real de r1 e r2

(%i5) [lambda]:[-b/(2*m)];
(%o5) [-0.0625]

```

```

--> mi corresponde à parte imaginária de r1 e r2

(%i6) [mi]:[sqrt(-delta)/(2*m)];
(%o6) [0.99804496391696]

cálculo da frequência natural

--> calculo da frequência

(%i7) [w]:[sqrt((k/m)-((b*b)/(4*m*m)))]];
(%o7) [0.99804496391696]

□ caso 2: delta < 0 SUBAMORTECIMENTO

caso 2: delta < 0 SUBAMORTECIMENTO

--> CONDIÇÕES INICIAIS

(%i9) [t0,x0,v0]:[0,2,0];
(%o9) [0,2,0]

(%i10) [alfa1]:[c1*exp(lambda*t0)*cos(mi*t0)+c2*exp(lambda*t0)*sin(mi*t0)];
(%o10) [c1]

(%i11) x0=alfa1;
(%o11) 2=c1

(%i12) [c1]:[2];
(%o12) [2]

(%i13) [alfa2]:[c2*sin(mi*t0)*lambda*%e^(t0*lambda)+c1*cos(mi*t0)*lambda*%e^(t0*lambda)-c1*mi*sin(mi*t0)*%e^(t0*lambda)+c2*mi*cos(mi*t0)*%e^(t0*lambda)];
(%o13) [0.99804496391696 c2-0.125]

(%i14) v0=alfa2;
(%o14) 0=0.99804496391696 c2-0.125

(%i15) algsys([v0=alfa2], [c2]);
(%o15) [[c2= $\frac{1023}{8168}$ ]]

--> ALIMENTANDO VALORES DE c1 e c2

(%i16) [c1,c2]:[2,1023/8168];
(%o16) [2, $\frac{1023}{8168}$ ]

--> DESLOCAMENTO RESULTANTE

(%i17) x(t):=c1*exp(lambda*t)*cos(mi*t)+c2*exp(lambda*t)*sin(mi*t);
(%o17) x(t):=c1 exp(lambda t) cos(mi t)+c2 exp(lambda t) sin(mi t)

--> PLOT DO DESLOCAMENTO

(%i18) plot2d([x(t)], [t,0,50]);

```

obtemos a Figura 7, abaixo, que mostra o deslocamento do bloco em função do tempo, considerando o caso subamortecido.

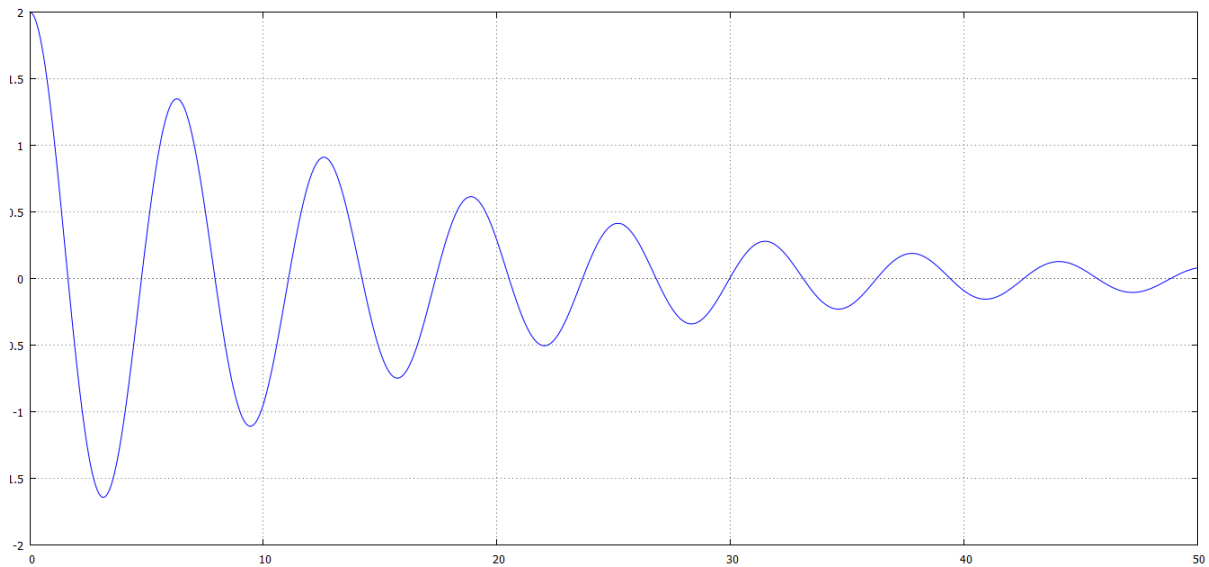


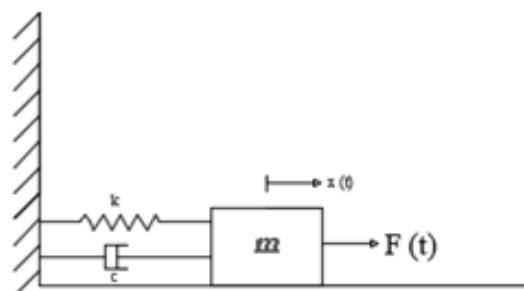
Figura 7: Deslocamento resultante do exemplo 2.

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 7 é equivalente ao resultado apresentado em BOYCE & DIPRIMA (1998, pp. 131).

Exemplo 3. Adaptado (BOYCE & DIPRIMA, 1998 – pp.109)

Considere o sistema massa-mola mostrado anteriormente na Figura 5(a) e representado abaixo, com os seguintes parâmetros:



(a)

Figura 5 (a) – Sistema massa-mola com amortecimento.

a massa do sistema é $m = 1\text{kg}$, o coeficiente de amortecimento é $b = 4\text{ kg/s}$ e o coeficiente de rigidez da mola é $k = 4\text{ N/m}$. Determinar a solução geral do sistema:

Solução:

Substituindo os parâmetros fornecidos para o problema na equação (8), adotada como modelo para o sistema com um grau de liberdade, temos:

$$1 \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

Usando o software MAXIMA,

```

EXEMPLO:
1. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, sexta edição -
Boyce e Diprima, pp. 107

--> [m,b,k]:[1,4,4];
(%o1) [1,4,4]

Cálculo do discriminante delta da equação característica

--> [delta]:[(b*b-4*m*k)];
(%o2) [0]

calculo das raízes r1 e r2

--> [r1]:[(-b+sqrt(delta))/(2*m)];
(%o3) [-2]

--> [r2]:[(-b-sqrt(delta))/(2*m)];
(%o4) [-2]

cálculo da frequência natural

--> calculo da frequência

--> [w]:[sqrt((k/m)-((b*b)/(4*m*m)))]];
(%o5) [0]

```


caso 3: delta = 0 CRITICO

```
caso 3: delta = 0 AMORTECIMENTO CRITICO
```

```
--> CONDIÇÕES INICIAIS
```

```
(%i6) [t0,x0,v0]:[0,1,1];  
(%o6) [0,1,1]
```

```
(%i7) [alfa1]:[c1*t0*exp(-(b*t0)/(2*m))+c2*exp(-(b*t0)/(2*m))];  
(%o7) [c2]
```

```
(%i8) x0=alfa1;  
(%o8) 1=c2
```

```
(%i9) [c2]:[1];  
(%o9) [1]
```

```
(%i10) [alfa2]:[(b*c1*t0*exp(-(b*t0)/(2*m))-b*c2*exp(-(b*t0)/(2*m)))/(2*m)+c1*exp(-(b*t0)/(2*m))];  
(%o10) [c1-2]
```

```
(%i11) v0=alfa2;  
(%o11) 1=c1-2
```

```
(%i12) algsys([v0=alfa2], [c1]);  
(%o12) [[c1=3]]
```

```
(%i11) v0=alfa2;  
(%o11) 1=c1-2
```

```
(%i12) algsys([v0=alfa2], [c1]);  
(%o12) [[c1=3]]
```

```
--> ALIMENTANDO VALORES DE c1 e c2
```

```
(%i13) [c1,c2]:[3,1];  
(%o13) [3,1]
```

```
--> DESLOCAMENTO RESULTANTE
```

```
(%i14) x(t):=c1*t*exp(-(b*t)/(2*m))+c2*exp(-(b*t)/(2*m));  
(%o14) x(t):=c1 t exp\left(\frac{-b t}{2 m}\right)+c2 exp\left(\frac{-b t}{2 m}\right)
```

```
--> PLOT DO DESLOCAMENTO
```

```
--> plot2d([x(t)], [t,0,2.5]);  
(%o17)
```

obtemos a Figura 8, abaixo, que mostra o deslocamento do bloco em função do tempo, considerando o caso de amortecimento crítico.

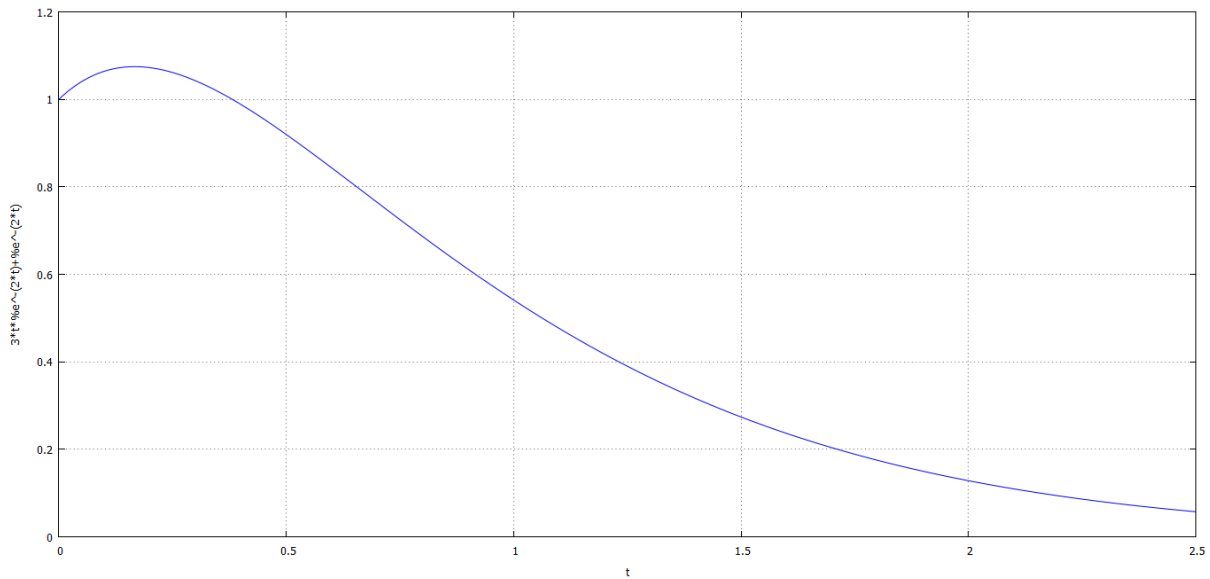


Figura 8: Deslocamento resultante do exemplo 3.

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 8 é equivalente ao resultado apresentado em BOYCE & DIPRIMA (1998, pp. 107).

3.1.5 Validação

Os exemplos 1, 2 e 3 apresentaram resultados em gráficos que descrevem os deslocamentos dos blocos ao longo do tempo similares àqueles previstos nas bibliografias consultadas, validando, portanto, a simulação.

3.2 Um Sistema Massa-Mola com Dois Graus de Liberdade

Consideremos o sistema mostrado na Figura 7, que na ausência de amortecimento e forças externas, é conhecido como um sistema conservativo porque não existe um mecanismo que dissipe ou adicione energia. O sistema é descrito completamente por duas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$, as quais fornecem as posições das massas m_1 e m_2 , respectivamente, para qualquer tempo arbitrário t . Os deslocamentos $x(t)$ e $y(t)$ são admitidos pequenos o suficiente, de modo que o sistema opera de forma linear.

3.2.1 Definições

Consideremos um modelo físico que tenha dois blocos de massas m_1 e m_2 , respectivamente, acopladas por três molas distintas, com constantes de rigidez iguais a k_1, k_2 e k_3 , respectivamente. Considere ainda as massas das molas desprezíveis.

O movimento oscilatório descrito pelos blocos de massas m_1 e m_2 , interligadas pelas molas, descreverá deslocamentos apenas na direção horizontal, considerando a posição inicial da massa m_1 sendo $x(t)$ e a posição inicial da massa m_2 sendo $y(t)$. Como o movimento se dará em apenas uma direção, no caso o eixo x , para cada uma das massas, diremos que o sistema tem grau dois de liberdade.

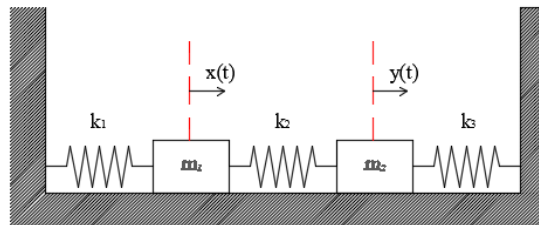


Figura 9: Dois blocos acoplados a três molas.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

3.2.2 Análise do Sistema

Consideraremos desprezíveis os efeitos do atrito dos blocos com a superfície de contato, bem como desprezíveis a massa da mola e não adotaremos amortecimento no sistema determinado.

Chamaremos as massas dos blocos 1 e 2, de massas m_1 e m_2 . O acoplamento das massas se dará por interligação com molas interligadas pelas molas de constantes de rigidez iguais a k_1, k_2 e k_3 , respectivamente e consideraremos a posição inicial da massa m_1 sendo $x(t)$ e a posição inicial da massa m_2 sendo $y(t)$. Em virtude desta dependência devemos esperar que o movimento da massa m_1 influencie o movimento da massa m_2 , e vice-versa, exceto se $k_2 = 0$, pois não teremos sistema com dois graus de liberdade, mas sim dois sistemas de um grau de liberdade, completamente independentes.

3.2.3 Modelação

À primeira vista o sistema determinado na Figura 7 se mostra mais complexo, porém determinaremos uma maneira de estabelecer uma modelagem para um sistema deste tipo. Para isto, dividiremos o problema em várias situações de mola única e usaremos a lógica do modelo com mola única. Como não existe nenhuma força externa aplicada a qualquer massa e não estamos considerando atrito (ou amortecimento), significa que o movimento do bloco é determinado apenas pela força da mola.

As Figuras 8 e 9 mostram diagramas de corpo livre para cada um dos blocos. Uma análise das forças que atuam em cada um dos blocos permite a modelação do sistema, traduzindo-o em um modelo matemático composto por um conjunto de equações diferenciais.

Para o bloco de massa m_1 , temos:

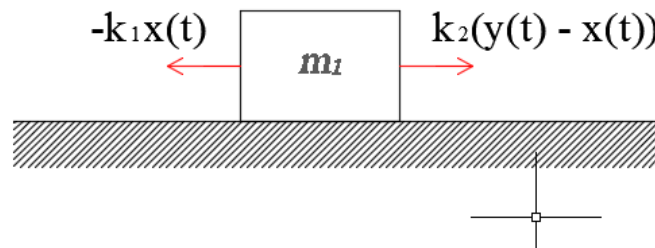


Figura 10: Diagrama de corpo isolado do bloco de massa m_1 .

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned}m_1 \frac{d^2x}{dt^2} &= -k_1x(t) + k_2(y(t) - x(t)) \\-k_1x(t) + k_2y(t) - k_2x(t) &= m_1 \frac{d^2x}{dt^2} \\-(k_1 + k_2)x(t) + k_2y(t) &= m_1 \frac{d^2x}{dt^2} \\-m_1 \frac{d^2x}{dt^2} - (k_1 + k_2)x(t) + k_2y(t) &= 0 \\m_1 \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x(t) - k_2y(t) &= 0\end{aligned}$$

Para o bloco de massa m_2 , temos:

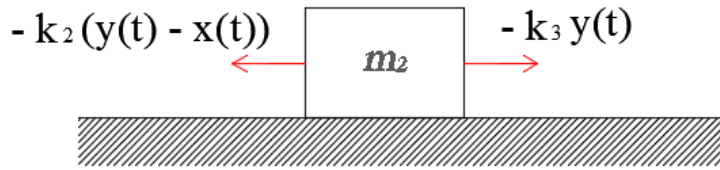


Figura 11: Diagrama de corpo isolado do bloco de massa m_2 .

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Aplicando a 2ª Lei de Newton, temos:

$$\begin{aligned}
 m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k_2(x(t) - y(t)) + k_3 y(t) \\
 -k_2 y(t) + k_2 x(t) - k_3 y(t) &= m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} \\
 k_2 x(t) - (k_2 + k_3) y(t) &= m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} \\
 -m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + k_2 x(t) - (k_2 + k_3) y(t) &= 0 \\
 m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} - k_2 x(t) + (k_2 + k_3) y(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Através do processo descrito acima, temos duas equações diferenciais, que colocaremos como equações diferenciais simultâneas (sistema de equações):

$$\begin{cases}
 m_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + (k_1 + k_2)x(t) - k_2 y(t) = 0 \\
 m_2 \frac{d^2 y}{dt^2} - k_2 x(t) + (k_2 + k_3)y(t) = 0
 \end{cases} \quad (32)$$

3.2.4 Simulação

As equações (32) podem ser convenientemente postas na forma matricial. De fato, sejam

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$X = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes M e K dos coeficientes são conhecidas como matriz da massa e matriz de rigidez, respectivamente, enquanto que X representa a matriz dos deslocamentos e 0 a matriz nula. Com esta notação, o sistema (32) pode ser escrito na forma

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (33)$$

Em virtude do acoplamento é difícil encontrar uma solução do sistema (32). Assim, vamos procurar a existência de um tipo especial de solução em que as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ aumentam e diminuem na mesma proporção em que o tempo progride. Este tipo de movimento é conhecido como movimento sincronizado, porque, neste caso, a dependência do tempo de $x(t)$ e $y(t)$ é a mesma. Portanto, o tipo de movimento que buscamos é aquele em que a razão entre os dois deslocamentos permanece constante durante o movimento. Este padrão de deslocamento chamamos de configuração do sistema. Isto significa que a forma da configuração do sistema não muda durante o movimento, embora a amplitude dos deslocamentos, sim.

Com estas suposições, vamos denotar a dependência do tempo de $x(t)$ e $y(t)$ por $f(t)$. Então a solução procurada, para cada deslocamento, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x(t) &= U_x f(t) \\ y(t) &= U_y f(t) \end{aligned} \quad (34)$$

Em que U_x e U_y são as amplitudes correspondentes aos deslocamentos $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

Substituindo (34) em (32), obtemos

$$\begin{aligned} m_1 U_x \frac{d^2 f}{dt^2} + [(k_1 + k_2)U_x + k_2 U_y] f(t) &= 0 \\ m_2 U_y \frac{d^2 f}{dt^2} + [k_2 U_x + (k_2 + k_3)U_y] f(t) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Para que a Equação (35) possua solução, devemos ter:

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} f(t) = \frac{(k_1 + k_2)U_x + k_2 U_y}{m_1 U_x} \quad (36)$$

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} f(t) = \frac{k_2 U_x + (k_2 + k_3)U_y}{m_2 U_y} \quad (37)$$

Portanto,

$$\frac{(k_1+k_2)+k_2U_y}{m_1U_x} = \frac{k_2U_x+(k_2+k_3)U_y}{m_2U_y} = \lambda \quad (38)$$

Em que λ é uma constante real porque $m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, U_x$ e U_y são constantes reais.

Assim, o movimento sincronizado só será possível se:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \lambda f(t) = 0 \quad (39)$$

e

$$\begin{aligned} [(k_1 + k_2) - \lambda m_1]U_x + k_2U_y &= 0 \\ k_2U_x + [(k_2 + k_3) - \lambda m_2]U_y &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Neste momento, temos que resolver separadamente as Equações (39) e (40).

3.2.4.1 Solução da Equação (39)

Suponhamos que a solução de (39) seja $f(t) = Ae^{rt}$. Substituindo esta solução em (39), obtemos:

$$(r^2 + \lambda)Ae^{rt} = 0 \quad (41)$$

Como Ae^{rt} nunca se anula, então, $r^2 + \lambda = 0$. Resolvendo esta última equação, obtemos que:

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \quad (42)$$

Portanto,

$$f(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} = A_1e^{\sqrt{-\lambda}t} + A_2e^{-\sqrt{-\lambda}t} \quad (43)$$

Observemos que $-\lambda$ tem que ser menor do que zero. De fato, se $\lambda < 0$ os expoentes de $\sqrt{-\lambda}t$ e $-\sqrt{-\lambda}t$ seriam números reais, iguais em valor, mas de sinais opostos. Neste caso, quando $t \rightarrow \infty$ o primeiro termo de $f(t)$, em (43) tende ao infinito e o segundo termo tende a zero. Mas isto é inconsistente com o conceito de sistema oscilatório, para o qual o movimento nunca pode reduzir-se a zero e nem crescer sem limites. Assim, a possibilidade de $\lambda < 0$ tem que ser descartada.

Definindo $\lambda = \omega^2$, em que ω é real, a equação (42) assume a forma

$$r = \pm i\omega \quad (44)$$

De modo que a solução (43) assume a forma

$$f(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \quad (45)$$

Em que A_1 e A_2 são constantes de integração e, em geral, constantes complexas. Os valores de A_1 e A_2 dependem do deslocamento inicial $f(0)$ e da velocidade inicial $f'(0)$. A equação (45) está definida em termos complexos. No entanto, em bases físicas, pode-se argumentar que a solução deve ser real. Portanto, vamos reduzir esta solução em termos reais. Para isto, consideremos a série

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= 1 + i\omega t + \frac{1}{2!}(i\omega t)^2 + \frac{1}{3!}(i\omega t)^3 + \frac{1}{4!}(i\omega t)^4 + \frac{1}{5!}(i\omega t)^5 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(\omega t)^2 + \frac{1}{4!}(\omega t)^4 - \dots + i \left[\omega t - \frac{1}{3!}(\omega t)^3 + \frac{1}{5!}(\omega t)^5 - \dots \right] \\ &= \cos(\omega t) + i\text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (46)$$

Analogamente, podemos verificar que

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\text{sen}(\omega t) \quad (47)$$

Substituindo (46) e (47) em (45), obtemos

$$f(t) = (A_1 + A_2)\cos(\omega t) + i(A_1 - A_2)\text{sen}(\omega t) \quad (48)$$

Definindo

$$A_1 + A_2 = A \cos \emptyset \quad (49)$$

$$i(A_1 - A_2) = A \sin \emptyset \quad (50)$$

Lembrando que

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad (51)$$

A solução $f(t)$ em (48) torna-se

$$f(t) = A \cos \emptyset \cos(\omega t) + A \sin \emptyset \sin(\omega t) = A \cos(\omega t - \emptyset) \quad (52)$$

As constantes de integração A e \emptyset são conhecidas como amplitude e ângulo de fase, respectivamente. Como A e \emptyset dependem de A_1 e A_2 , elas também podem ser vistas como dependentes das condições iniciais $f(0)$ e $f'(0)$. A Equação (52) descreve o movimento mais simples de vibração e o sistema executa um movimento harmônico simples com frequência ω . Se \vec{A} representa um vetor de grandeza A e o vetor faz um ângulo $\omega t - \emptyset$ com relação ao eixo vertical $f(t)$, então, a projeção do vetor \vec{A} sobre o eixo $f(t)$ representa a solução $f(t) = A \cos(\omega t - \emptyset)$. O ângulo $\omega t - \emptyset$ cresce linearmente com o tempo e o vetor gira no sentido anti-horário, com velocidade angular ω . Quando o vetor gira, a projeção varia harmonicamente, tal que o movimento é repetido toda vez que o vetor \vec{A} completa um giro de 2π . O tempo necessário para completar um ciclo do movimento define o período T , dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (53)$$

com ω medido em radianos por segundo e T medido em segundos. Fisicamente, T representa o tempo necessário para que uma oscilação completa aconteça. Ele é igual à diferença entre dois tempos consecutivos para os quais o oscilador atinge o mesmo estado, isto é, a mesma posição e velocidade.

Vamos, agora, calcular as constantes de integração A e \emptyset em termos das condições iniciais. Sejam $f(0) = F_0$ e $f'(0) = V_0$ em que F_0 é o deslocamento inicial e V_0 a velocidade inicial. Utilizando a equação (52), temos:

$$f(0) = A \cos \phi = F_0 \quad (54)$$

$$f'(0) = A \omega \sin \phi = V_0 \quad (55)$$

Portanto, comparando as equações (52), (54) e (55), obtemos a equação do movimento, considerando as condições iniciais F_0 e V_0 ,

$$f(t) = F_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (56)$$

A amplitude A e o ângulo de fase ϕ expressos em termos das condições iniciais podem ser obtidos das Equações (54) e (55). De fato, são dadas por:

$$A = \sqrt{F_0^2 + \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2} \quad (57)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{V_0}{F_0 \omega} \right) \quad (58)$$

3.2.4.2 Solução da Equação (40)

O sistema (40) pode ser reescrito em termos do parâmetro ω , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [(k_1 + k_2) - \omega^2 m_1] U_x + k_2 U_y &= 0 \\ k_2 U_x + [(k_2 + k_3) - \omega^2 m_2] U_y &= 0 \end{aligned} \quad (59)$$

As equações em (59) correspondem a um sistema de duas equações algébricas simultâneas nas incógnitas U_x e U_y , com ω desempenhando o papel de um parâmetro. Inicialmente precisamos encontrar o parâmetro ω de modo que o sistema (59) possua soluções não triviais. Este problema é conhecido como *problema de valor característico* ou *problema do autovalor algébrico*.

De acordo com conceitos da álgebra linear, o sistema (59) admite uma solução apenas se o determinante da matriz dos coeficientes U_x e U_y for zero, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - \omega^2 m_1 & k_2 \\ k_2 & (k_2 + k_3) - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

Expandindo o determinante acima, obtemos

$$[(k_1 + k_2) - \omega^2 m_1][(k_2 + k_3) - \omega^2 m_2] - k_2^2 = 0 \quad (60)$$

Após algumas manipulações algébricas na equação característica (ou equação da frequência) (60), obtemos suas raízes, isto é,

$$\omega^2 = \frac{m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3) \pm \sqrt{[m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3)]^2 - 4m_1m_2}}{2m_1m_2} \quad (61)$$

Assim, existem apenas dois modos para os quais o movimento sincronizado é possível. De fato, um deles caracterizado pela frequência ω_1

$$\omega_1^2 = \frac{m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3) + \sqrt{[m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3)]^2 - 4m_1m_2}}{2m_1m_2} \quad (62)$$

E o outro caracterizada pela frequência ω_2

$$\omega_2^2 = \frac{m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3) - \sqrt{[m_2(k_1+k_2)+m_1(k_2+k_3)]^2 - 4m_1m_2}}{2m_1m_2} \quad (63)$$

Que são conhecidos como as frequências naturais do sistema.

Resta, agora, determinar os valores das constantes U_x e U_y . Vamos alterar nossa notação de modo a estabelecer uma relação das constantes com as frequências naturais. Assim, vamos definir as constantes correspondentes a ω_1 por U_{11} e U_{21} e as correspondentes a ω_2 por U_{12} e U_{22} em que o primeiro índice identifica a posição das massas e o segundo índice indica se o movimento sincronizado corresponde à frequência ω_1 ou ω_2 . Com esta nova notação, vamos inserir ω_1 e ω_2 nas Equações (59), obtendo:

Para ω_1 :

$$\begin{aligned} [(k_1 + k_2) - \omega_1^2 m_1]U_{11} + k_2 U_{21} &= 0 \\ k_2 U_{11} + [(k_2 + k_3) - \omega_1^2 m_2]U_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Para ω_2 :

$$\begin{aligned} [(k_1 + k_2) - \omega_2^2 m_1]U_{12} + k_2 U_{22} &= 0 \\ k_2 U_{12} + [(k_2 + k_3) - \omega_2^2 m_2]U_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

Como o problema é homogêneo, nos interessa apenas as razões $\frac{U_{21}}{U_{11}}$ e $\frac{U_{22}}{U_{12}}$, isto é,

$$\frac{U_{21}}{U_{11}} = -\frac{(k_1+k_2)-\omega_1^2 m_1}{k_2} = -\frac{k_2}{(k_2+k_3)-\omega_1^2 m_2} \quad (66)$$

$$\frac{U_{22}}{U_{12}} = -\frac{(k_1+k_2)-\omega_2^2 m_1}{k_2} = -\frac{k_2}{(k_2+k_3)-\omega_2^2 m_2} \quad (67)$$

As razões $\frac{U_{21}}{U_{11}}$ e $\frac{U_{22}}{U_{12}}$ determinam a forma assumida pelo sistema durante o movimento sincronizado com frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente.

Podemos definir um valor arbitrário para um elemento em cada razão e, com isto, o valor do outro elemento seguirá automaticamente. Os pares de números resultantes (U_{11} , U_{21}) e (U_{12} , U_{22}) são conhecidos como modos naturais de vibração do sistema.

3.2.4.3 Obtendo as Equações do Movimento

Para obter as equações do movimento no tempo vamos utilizar as equações (46) e as equações (34), respectivamente, para os dois possíveis movimentos sincronizados:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 U_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 U_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ C_1 U_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 U_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{bmatrix} \quad (68)$$

As amplitudes C_1 e C_2 e os ângulos de fase ϕ_1 e ϕ_2 são determinados pelas condições iniciais, que são os deslocamentos iniciais e as velocidades iniciais das massas m_1 e m_2 .

Sejam X_0 e Y_0 os deslocamentos iniciais e V_x e V_y as velocidades iniciais das duas massas. Admitindo que $V_x = V_y = 0$ para $t = 0$, temos para os deslocamentos $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 U_{11} \cos(\phi_1) + C_2 U_{12} \cos(\phi_2) = X_0 \\ y(0) &= C_1 U_{21} \cos(\phi_1) + C_2 U_{22} \cos(\phi_2) = X_0 \end{aligned} \quad (69)$$

Resolvendo para C_1 e C_2 , obtemos:

$$C_1 = \frac{U_{22}X_0 - U_{12}Y_0}{(U_{11}U_{22} - U_{21}U_{12})\cos(\theta_1)}$$

$$C_2 = \frac{X_0}{U_{12}\cos(\theta_2)} - C_1 \frac{U_{11}\cos(\theta_1)}{U_{12}\cos(\theta_2)} \quad (70)$$

Exemplo 1. Adaptado (NAGLE, EDWARD & SNIDER, 2004 – pp. 224):

Em uma superfície horizontal lisa, uma massa $m_1 = 2\text{ kg}$ está presa a uma parede fixa por uma mola com constante de mola $k_1 = 4\text{ N/m}$. Outra massa $m_2 = 1\text{ kg}$ está presa ao primeiro objeto por uma mola com constante de mola $k_2 = 2\text{ N/m}$. Os objetos estão alinhados na horizontal, de modo que as molas são seus comprimentos naturais. Se os dois objetos forem deslocados 3 m para a direita de suas posições de equilíbrio e depois soltos, como será o gráfico do movimento das duas massas?

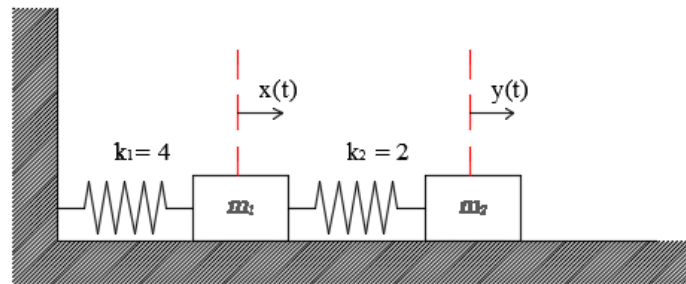


Figura 12: Sistema acoplado em equilíbrio.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Para aplicação da implementação feita no software MAXIMA, iremos adotar adotar para a terceira mola, um coeficiente $k_3 = 0.0000001$, obtendo a figura abaixo:

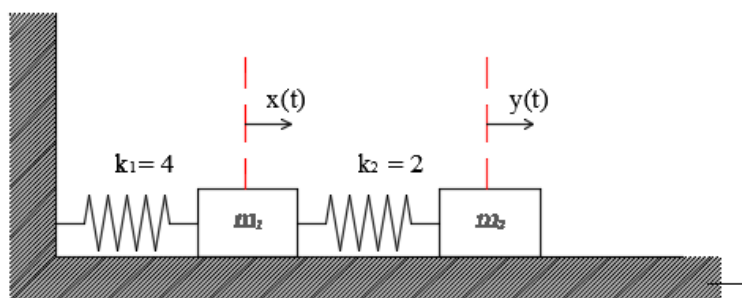


Figura 13: Sistema acoplado em equilíbrio, com k_3 com valor muito próximo de zero.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Usando o software MAXIMA,

```

□ Sistema Massa-Mola com dois graus de liberdade
┌ Entrada de Dados:
│ 1. R. Keng Nagle, Edward B. Saff e Arthur David Snider, Equações Diferenciais, pág. 224,
│ m1=2, m2=1, k1=4, k2=2, e  $k_3 \ll k_1$  e  $k_3 \ll k_2$ ,  $k_3=0.0000001$ ,  $u_{10}=3$ ,  $u_{20}=3$ ,  $v_{10}=v_{20}=0$ .
└

(%i1) [m1,m2]:[2,1];
      [k1,k2,k3]:[4,2,0.0000001];
      k4:1/k2;
(%o1) [2, 1]
(%o2) [4, 2, 9.9999999999999995 10-8]
(%o3)  $\frac{1}{2}$ 

┌ Cálculo de Lambda
│
│ (%i10) [a,b,c]:[m1*m2,m1*(k2+k3)+m2*(k1+k2),(k1+k2)*(k2+k3)-k2*k2];
│         p:b/a;
│         r:c/a;
│         lamb1:0.5*p+sqrt(0.25*p*p-r);
│         lamb2:0.5*p-sqrt(0.25*p*p-r);
│
│ (%o10) [2, 10.0000002, 8.0000006]
│ (%o11) 5.0000000999999999
│ (%o12) 4.0000003
│ (%o13) 4.000000033333333
│ (%o14) 1.0000000666666666
└

┌ Frequências Naturais
│
│ (%i15) [w1,w2]:[sqrt(lamb1),sqrt(lamb2)];
│
│ (%o15) [2.0000000083333333, 1.000000033333332]
└

┌ Cálculo dos modos... (0 linhas escondidas)
│
│ (%i16) [U11,U12]:[1,1];
│         [aux11,aux12]:[((k1+k2)-w1*w1*m1)*k4,((k1+k2)-w2*w2*m1)*k4];
│         beta1:aux11*U11;
│         beta2:aux12*U12;
│
│ (%o16) [1, 1]
│ (%o17) [-1.0000000333333333, 1.999999933333334]
│ (%o18) -1.0000000333333333
│ (%o19) 1.999999933333334
└

```

```

Condição Inicial
(%i20) [u10,u20,v10,v20]:[3,3,0,0];
      11c:beta2*v10-v20;
      12c:beta2*u10-u20;
      13c:-beta1*v10+v20;
      14c:-beta1*u10+u20;
      det:beta2-beta1;
      C1:sqrt((11c/(w1*det))^2+(12c/det)^2);
      C2:sqrt((13c/(w1*det))^2+(14c/det)^2);
      [phi1,phi2]:[atan(11c/(w1*12c)),atan(13c/(w2*m2c))];
(%o20) [3,3,0,0]
(%o21) 0
(%o22) 2.9999998000000003
(%o23) 0
(%o24) 6.0000000999999998
(%o25) 2.9999999666666667
(%o26) 0.9999999444444444
(%o27) 2.0000000555555555
(%o28) [0.0,0.0]

--> kill(all);
(%o0) done

1 Deslocamentos para o Modo 1
(%i29) u1(t):=C1*cos(w1*t-phi1)+C2*cos(w2*t-phi2);
(%o29) u1(t):=C1 cos(w1 t-phi1)+C2 cos(w2 t-phi2)

2 Deslocamentos para o Modo 2
(%i30) u2(t):=beta1*C1*cos(w1*t-phi1)+beta2*C2*cos(w2*t-phi2);
(%o30) u2(t):=beta1 C1 cos(w1 t-phi1)+beta2 C2 cos(w2 t-phi2)

Plot dos modos 1 e 2
(%i31) plot2d([u1(t),u2(t)],[t,0,20]);

```

obtemos a Figura 14, abaixo, que mostra o deslocamento (eixo vertical) dos blocos de massa m_1 (em azul) e de massa m_2 (em vermelho), em função do tempo (eixo horizontal).

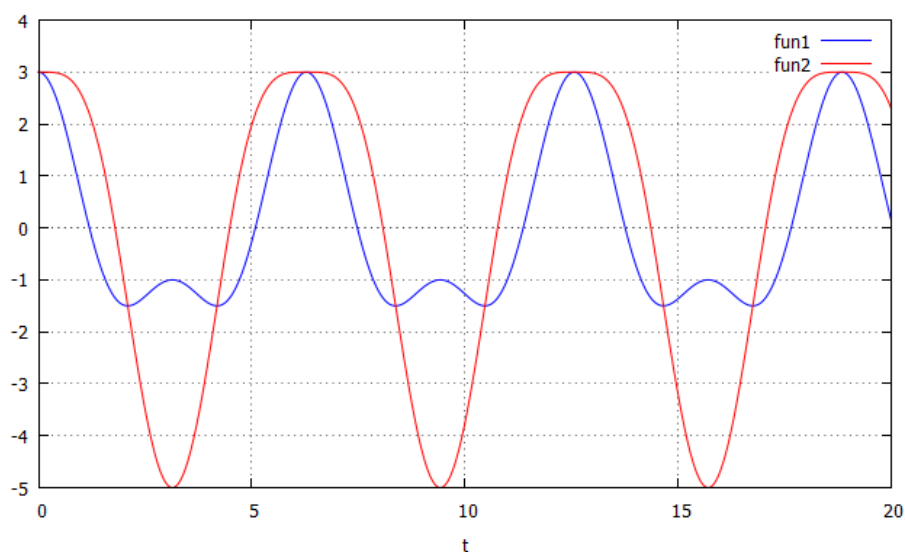


Figura 14: Gráfico dos deslocamentos dos blocos de massas m_1 e m_2

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 14 é equivalente ao resultado apresentado em NAGLE, EDWARD & SNIDER (2004, pp. 225)

Exemplo 2: Adaptado (CRAIG, 1981 – pp.278):

Obtenha a frequência natural e formas de modo do sistema mostrado. As equações do movimento são:

$$m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0$$

$$m\ddot{u}_2 - ku_1 + 2ku_2 = 0$$

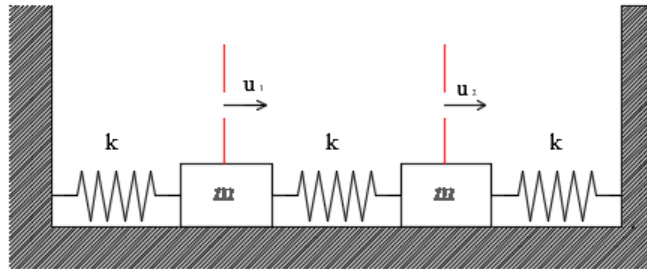


Figura 15: Sistema Massa-Mola com 2 blocos de massas m e 3 molas.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Para aplicação das equações obtidas para sistema Massa-Mola com 2 graus de liberdade, adotaremos $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1\text{ N/m}$ e todas as condições iniciais iguais a zero.

Usando o software MAXIMA,

Sistema Massa-Mola com dois graus de liberdade

Entrada de Dados:

1. Roy R. Craig, Structural Dynamics, pp. 278, $k_1=k_2=k_3=1$, $m_1=m_2=1$, $u_{10}=0$, $u_{20}=2$, $v_{10}=v_{20}=0$.

```
(%i1) [m1,m2]:[1,1];
      [k1,k2,k3]:[1,1,1];
      k4:1/k2;
(%o1) [1, 1]
(%o2) [1, 1, 1]
(%o3) 1
```

Cálculo de Lambda

```
(%i9) [a,b,c]:[m1*m2,m1*(k2+k3)+m2*(k1+k2),(k1+k2)*(k2+k3)-k2*k2];
      p:b/a;
      r:c/a;
      lamb1:0.5*p+sqrt(0.25*p*p-r);
      lamb2:0.5*p-sqrt(0.25*p*p-r);
(%o9) [1, 4, 3]
(%o10) 4
(%o11) 3
(%o12) 3.0
(%o13) 1.0
```

Frequências Naturais

```
(%i14) [w1,w2]:[sqrt(lamb1),sqrt(lamb2)];
(%o14) [1.732050807568877, 1.0]
```

Cálculo dos modos... (0 linhas escondidas)

```
(%i19) [U11,U12]:[1,1];
      [aux11,aux12]:[((k1+k2)-w1*w1*m1)*k4,((k1+k2)-w2*w2*m1)*k4];
      beta1:aux11*U11;
      beta2:aux12*U12;
(%o19) [1, 1]
(%o20) [-1.0, 1.0]
(%o21) -1.0
(%o22) 1.0
```

Condição Inicial

```
(%i38) [u10,u20,v10,v20]:[0,2,0,0];
      l1c:beta2*v10-v20;
      m1c:beta2*u10-u20;
      l2c:-beta1*v10+v20;
      m2c:-beta1*u10+u20;
      det:beta2-beta1;
      C1:sqrt((l1c/(w1*det))^2+(m1c/det)^2);
      C2:sqrt((l2c/(w1*det))^2+(m2c/det)^2);
      [phi1,phi2]:[atan(l1c/(w1*m1c)),atan(l2c/(w2*m2c))];
(%o38) [0, 2, 0, 0]
(%o39) 0
(%o40) -2
(%o41) 0
(%o42) 2
(%o43) 2.0
(%o44) 1.0
(%o45) 1.0
(%o46) [0.0, 0.0]
```

```
--> kill(all);
(%o0) done
```

1 Deslocamentos para o Modo 1

```
(%i47) u1(t):=C1*cos(w1*t-phi1)+C2*cos(w2*t-phi2);
(%o47) u1(t):=C1 cos(w1 t-phi1)+C2 cos(w2 t-phi2)
```

```

□ 2 Deslocamentos para o Modo 2
┌ (%i48) u2(t):=beta1*C1*cos(w1*t-phi1)+beta2*C2*cos(w2*t-phi2);
└ (%o48) u2(t):=beta1 C1 cos(w1 t-phi1)+beta2 C2 cos(w2 t-phi2)
□ Plot dos modos 1 e 2
☞ (%i49) plot2d([u1(t),u2(t)], [t,0,15]);

```

obtemos a Figura 16, abaixo, que mostra o deslocamento (eixo vertical) dos blocos de massa m_1 (em azul) e de massa m_2 (em vermelho), em função do tempo (eixo horizontal).

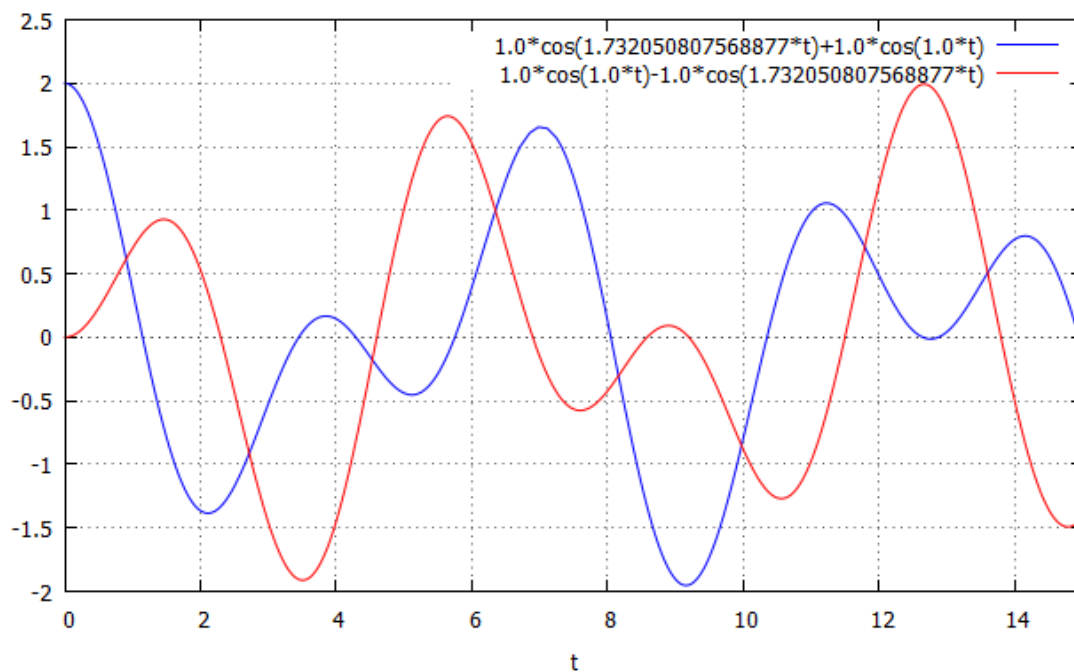


Figura 16: Gráfico dos deslocamentos dos blocos de massas m_1 e m_2 .

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 16 é equivalente ao resultado apresentado em CRAIG (1981, pp.278).

Exemplo 3. Demonstração de que a modelagem desenvolvida para resolução de sistema com 2 graus de liberdade sem amortecimento pode ser utilizada para resolução de sistema com 1 grau de liberdade, sem amortecimento.

Consideremos a situação descrita na Figura 17, que consiste em uma massa de $1/8$ kg presa a uma mola com rigidez $k = 16$ N/m. Adaptado de NAGLE, EDWARD & SNIDER (2004 , pp. 165)

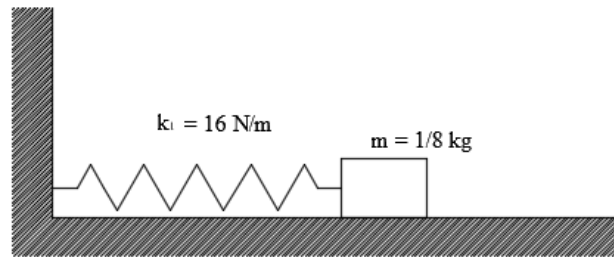


Figura 17: Sistema Massa-Mola com um grau de Liberdade.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

A massa é deslocada 0,5 metros para a direita do ponto de equilíbrio e recebe uma velocidade para fora (para direita) de $\sqrt{2}$ m/s. Desconsiderando qualquer amortecimento ou forças externas que possam estar presentes, determine a equação do movimento da massa, bem como sua amplitude e frequência natural.

Para aplicação utilizando o software MAXIMA, iremos adotar algumas considerações com relação à massa m_2 e aos coeficientes k_2 e k_3 , lembrando que a implementação no software MAXIMA foi feita baseada nas equações diferenciais obtidas na figura abaixo:

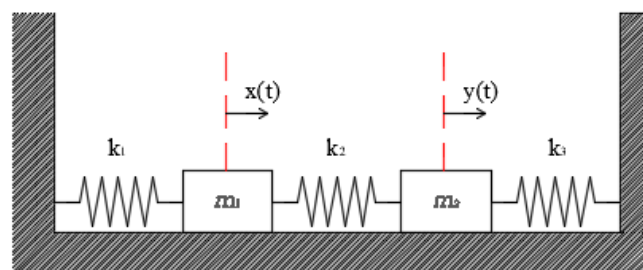


Figura 18: Duas massas acopladas a três molas.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Teremos que adotar condições para que a Figura 16 seja equivalente à Figura 15. Para isso, adotaremos um valor mínimo para m_2 ($m_2 = 0,00000001 \text{ kg}$) e valores mínimos também para k_2 e k_3 ($k_2 = 0,00000001 \frac{N}{m}$ e $k_3 = 0,00000001 \frac{N}{m}$), criando a situação abaixo:

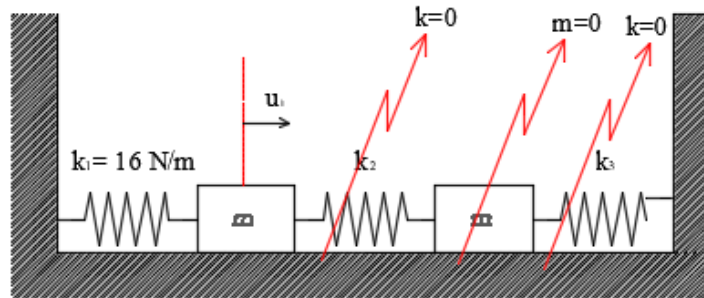


Figura 19: Ajuste do sistema com 2 graus de liberdade para um sistema com 1 grau de liberdade.

Fonte: Elaborada pelo Autor (Autocad).

Usando o software MAXIMA,

```

□  Sistema Massa-Mola com dois graus de liberdade 
┌ Entrada de Dados:
│ 1. Equações Diferenciais, R. Kent Nagle, Edward B Saff e Arthur D. Snider, pág. 165:
│ Exemplo de acoplamento fraco: k2 e k3 << k1, com k1=1, k2=0.0000001 e k3=0.0000001; m1=1/8
│ e m2=0.0000001; u10=1/2; u20=0.0; v10=1.4142 e v20=0;
└
--> [m1,m2]:[0.125,0.0000001];
      [k1,k2,k3]:[16,0.0000001,0.0000001];
      k4:1/k2;
(%o58) [0.125,0.001]
(%o59) [16,9.9999999999999995 10^-8,9.9999999999999995 10^-8]
(%o60) 10000000.0
┌ Cálculo de Lambda
│ (%i71) [a,b,c]:[m1*m2,m1*(k2+k3)+m2*(k1+k2),(k1+k2)*(k2+k3)-k2*k2];
│          p:b/a;
│          r:c/a;
│          lamb1:0.5*p+sqrt(0.25*p*p-r);
│          lamb2:0.5*p-sqrt(0.25*p*p-r);
└
(%o71) [1.25 10^-4,0.0160000251,3.2000000100000001 10^-6]
(%o72) 128.0002008
(%o73) 0.02560000008
(%o74) 128.0000008000006
(%o75) 1.9999999937425628 10^-4

```

Frequências Naturais

```
(%i76) [w1,w2]:[sqrt(lamb1),sqrt(lamb2)];  
(%o76) [11.31370853434013, 0.014142135601608]
```

Cálculo dos modos... (0 linhas escondidas)

```
(%i77) [U11,U12]:[1,1];  
[aux11,aux12]:[((k1+k2)-w1*w1*m1)*k4, ((k1+k2)-w2*w2*m1)*k4];  
beta1:aux11*U11;  
beta2:aux12*U12;  
(%o77) [1, 1]  
(%o78) [-7.815970093361102 10-7, 1.5999975100000077 108]  
(%o79) -7.815970093361102 10-7  
(%o80) 1.5999975100000077 108
```

Condição Inicial

```
(%i81) [u10,u20,v10,v20]:[0.5,0,1.4142,0];  
l1c:beta2*v10-v20;  
m1c:beta2*u10-u20;  
l2c:-beta1*v10+v20;  
m2c:-beta1*u10+u20;  
det:beta2-beta1;  
C1:sqrt((l1c/(w1*det))^2+(m1c/det)^2);  
C2:sqrt((l2c/(w1*det))^2+(m2c/det)^2);  
[phi1,phi2]:[atan(l1c/(w1*m1c)),atan(l2c/(w2*m2c))];  
(%o81) [0.5, 0, 1.4142, 0]  
(%o82) 2.2627164786420107 108  
(%o83) 7.9999875500000387 107  
(%o84) 1.1053344906031271 10-6  
(%o85) 3.907985046680551 10-7  
(%o86) 1.5999975100000155 108  
(%o87) 0.5153879123678  
(%o88) 2.51766423658156 10-15  
(%o89) [0.24497640590889, 1.565796320519269]
```

```
--> kill(all);  
(%o0) done
```

□ **1 Deslocamentos para o Modo 1**

```
(%i90) u1(t):=C1*cos(w1*t-phi1)+C2*cos(w2*t-phi2);  
(%o90) u1(t):=C1 cos(w1 t-phi1)+C2 cos(w2 t-phi2)
```

□ **2 Deslocamentos para o Modo 2**

```
(%i91) u2(t):=beta1*C1*cos(w1*t-phi1)+beta2*C2*cos(w2*t-phi2);  
(%o91) u2(t):=beta1 C1 cos(w1 t-phi1)+beta2 C2 cos(w2 t-phi2)
```

□ **Plot dos modos 1 e 2**

```
(%i93) plot2d([u1(t),u2(t)],[t,0,2*%pi]);  
(%o93)
```

```
-->
```

obtemos a Figura 20 abaixo, que mostra o deslocamento (eixo vertical) do bloco de massa m , em função do tempo (eixo horizontal).

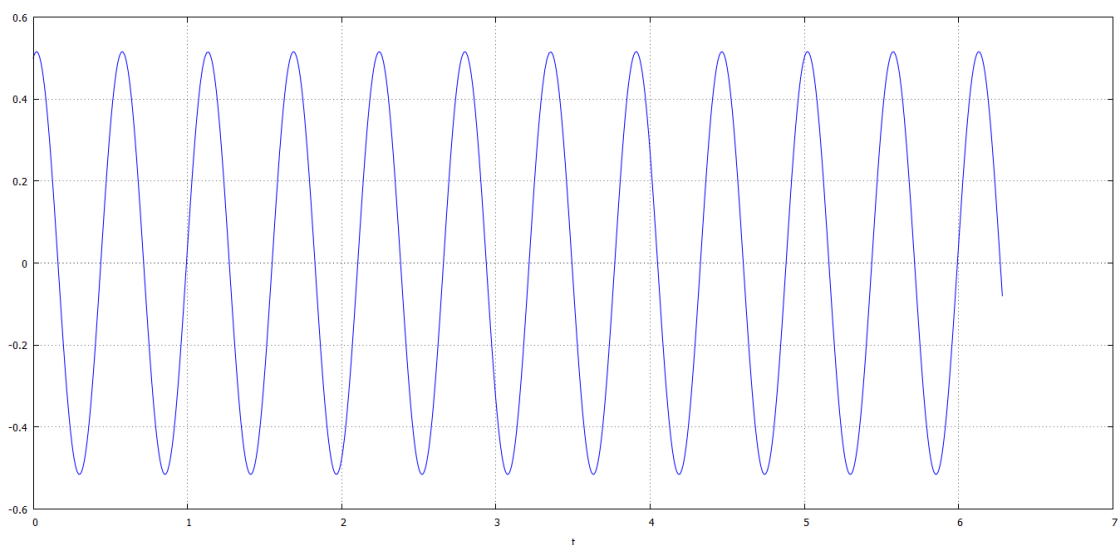


Figura 20: Gráfico do deslocamento da massa m_1 .

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 20 é equivalente ao resultado apresentado em NAGLE, EDWARD & SNIDER (2004 , pp. 165).

O resultado demonstra que podemos utilizar o modelo adotado, com aplicação do software MAXIMA, com dois graus de liberdade para aplicar, com condições iniciais previamente estabelecidas, para um modelo com um grau de liberdade.

3.2.5 Validação

Os exemplos 1, 2 e 3 apresentaram resultados em gráficos que descrevem os deslocamentos dos blocos ao longo do tempo similares àqueles previstos nas bibliografias consultadas, validando, portanto, a simulação.

Capítulo 4 – Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos exemplos de sistemas reais, cujo comportamento se assemelha ao comportamento de um sistema físico massa-mola. No desenvolvimento destes exemplos seguiremos o roteiro apresentado no capítulo 2, referente à modelagem matemática de sistemas.

4.1. Viga engastada e em balanço

Exemplo Adaptado de BRASIL & SILVA, 2013 – pp.30.

4.1.1 Definições

Definição do problema a ser resolvido:

Considere a viga engastada e em balanço, mostrada na Figura 27. A viga possui comprimento $L = 10 \text{ m}$, e seção transversal retangular de medidas $b \times h$ ($20 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$). O material que compõe a viga é concreto armado com módulo de elasticidade longitudinal $E = 20 \text{ GPa}$ ($1 \text{ GPa} = \frac{10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} = 203943 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$) e densidade de $2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. No ponto A , para uma força estática F aplicada, a figura mostra o deslocamento u resultante. Considerando coeficiente de amortecimento $b = 883.8835 \text{ kg/s}$, determinar o deslocamento dinâmico da extremidade da viga.

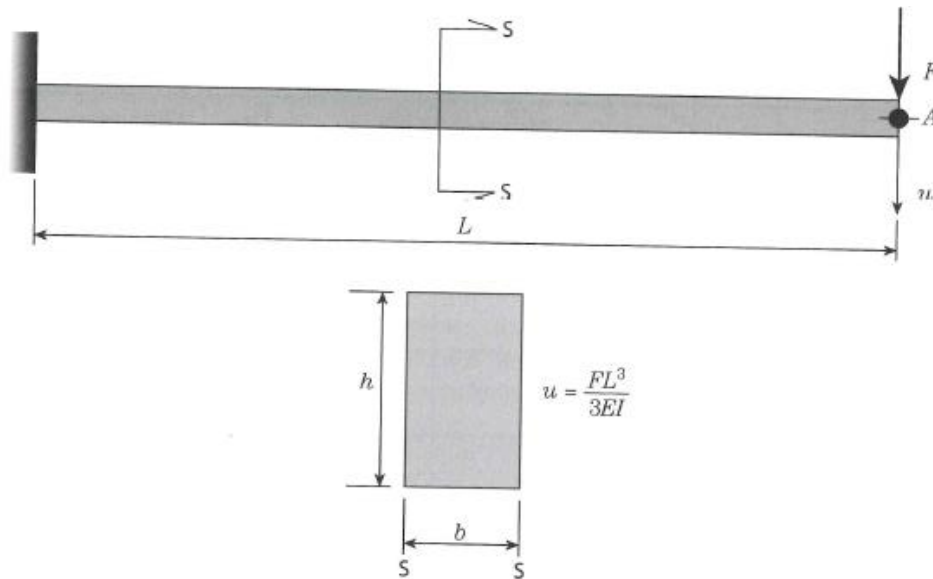


Figura 21: Viga de seção transversal retangular com carregamento na extremidade.

Fonte: BRASIL & SILVA, 2013 – pp. 30.

4.1.2 Análise do sistema

Para a transformação do modelo contínuo em um modelo discreto de 1 grau de liberdade, adotaremos como hipótese que um quarto da massa total da viga seja concentrado no ponto A, sendo então esta massa $M = 625 \text{ kg}$. Este valor é uma regra prática simples e tem sua origem em aplicações do Método dos Elementos Finitos. Como uma simplificação adicional, considera-se plano o modelo, permitindo-se apenas o deslocamento vertical.

São dados o deslocamento inicial de $0,1 \text{ mm}$ e a velocidade inicial de 2 mm/s .

A rigidez, ou constante elástica, da estrutura para a carga aplicada e deslocamento no ponto A é dada por:

$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Sendo que, para uma seção retangular, tem-se o momento de inércia $I = \frac{bh^3}{12}$.

4.1.3 Modelação

Iremos utilizar a Equação (8) que representa o **modelo matemático** aproximado do sistema físico cujo modelo é mostrado na Figura 4.

A Equação (8) é dada por $m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$, portanto teremos que determinar os parâmetros m, b e k , para resolução.

A massa m , conforme hipótese estabelecida na análise do sistema, será de $m = 625 \text{ kg}$.

O coeficiente de amortecimento é fornecido: $b = 883,8835 \text{ kg/s}$

Substituindo-se E, I e L na expressão de k , tem-se:

$k = 125.000 \text{ N/m}$.

4.1.4 Simulação:

Usando o software MAXIMA,

```
□ Sistema Massa-Mola com um grau de liberdade
EXEMPLO:
1. Introdução à Dinâmica das Estruturas para a Engenharia Civil, BRASIL & SILVA, pp. 29 a 33
--> [m,b,k]:[625,883.8835,125000];
(%o1) [625, 883.8835, 125000]
Cálculo do discriminante delta da equação característica
--> [delta]:[(b*b-4*m*k)];
(%o2) [-3.1171874995842773 10^8]

calcula das raízes r1 e r2
(%i3) [r1]:[(-b+sqrt(delta))/(2*m)];
(%o3) [17655.5586136046 %i -883.8835 / 1250]
(%i4) [r2]:[(-b-sqrt(delta))/(2*m)];
(%o4) [-17655.5586136046 %i -883.8835 / 1250]
--> lambda corresponde à parte real de r1 e r2
(%i5) [lambda]:[-b/(2*m)];
(%o5) [-0.7071068]
--> ni corresponde à parte imaginária de r1 e r2
(%i6) [ni]:[sqrt(-delta)/(2*m)];
(%o6) [14.12444689088368]
```

```

[ cálculo da frequência natural
--> calculo da frequência
(%i8) [w]:[sqrt((k/m)-((b*b)/(4*m*m)))]
(%o8) [14.12444689088368]
□ caso 2: delta < 0 SUBAMORTECIMENTO
[ caso 2: delta < 0 SUBAMORTECIMENTO
--> CONDIÇÕES INICIAIS
(%i9) [t0,x0,v0]:[0,0.0001,0.002];
(%o9) [0,1.0 10-4,0.002]
(%i10) [alfa1]:[c1*exp(lambda*t0)*cos(ni*t0)+c2*exp(lambda*t0)*sin(ni*t0)];
(%o10) [c1]
(%i11) x0=alfa1;
(%o11) 1.0 10-4=c1
(%i12) [c1]:[0.0001];
(%o12) [1.0 10-4]

(%i13) [alfa2]:[c2*sin(ni*t0)*lambda*%e^(t0*lambda)+c1*cos(ni*t0)*lambda*%e^(t0*lambda)-c1*ni*sin(ni*t0)*%e^(t0*lambda)+c2
*ni*cos(ni*t0)*%e^(t0*lambda)];
(%o13) [14.12444689088368 c2-7.0710680000000013 10-5]
(%i14) v0=alfa2;
(%o14) 0.002=14.12444689088368 c2-7.0710680000000013 10-5
(%i15) algsys([v0=alfa2],[c2]);
(%o15) [[c2= $\frac{262612}{1791292865}$ ]]
--> ALIMENTANDO VALORES DE c1 e c2
(%i16) [c1,c2]:[0.0001,262612/1791292865];
(%o16) [1.0 10-4, $\frac{262612}{1791292865}$ ]
--> DESLOCAMENTO RESULTANTE
(%i17) x(t):=c1*exp(lambda*t)*cos(ni*t)+c2*exp(lambda*t)*sin(ni*t);
(%o17) x(t):=c1 exp(lambda t) cos(ni t)+c2 exp(lambda t) sin(ni t)
--> PLOT DO DESLOCAMENTO
--> plot2d([x(t)],[t,0,4.5]);
(%o18)

```

obtemos a Figura 22 abaixo, que mostra o deslocamento (eixo vertical) do bloco de massa m , em função do tempo (eixo horizontal).

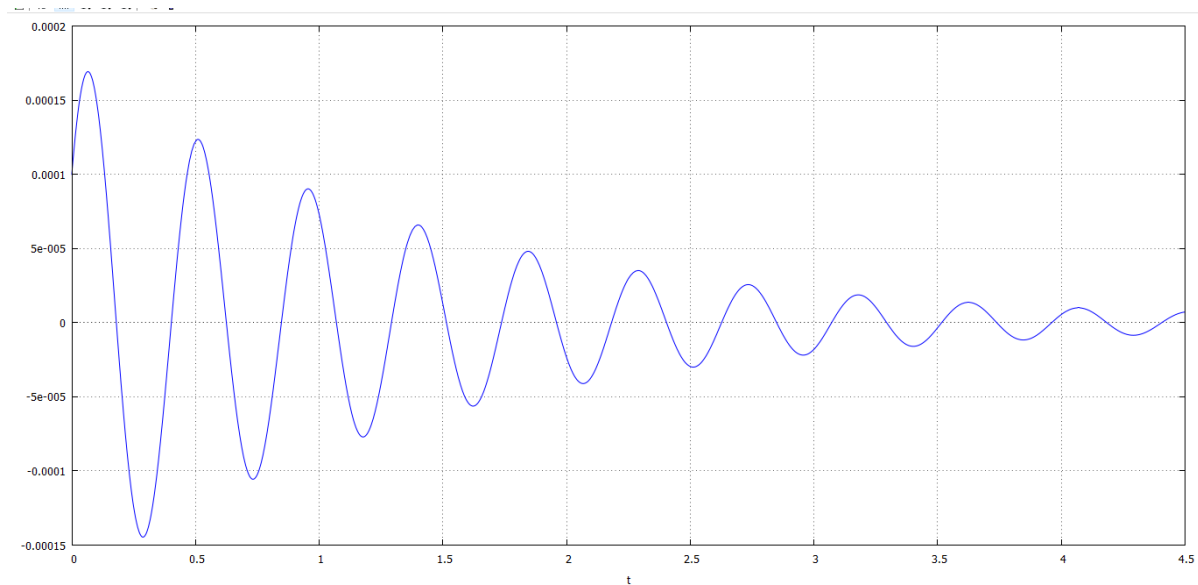


Figura 22: Gráfico demonstrando o deslocamento dinâmico da extremidade da viga, considerando o sistema livre e não amortecido.

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 22 é equivalente ao resultado apresentado em BRASIL & SILVA (2013, pp. 30).

4.1.5 Validação

O resultado obtido na figura 22 descreve o deslocamento dinâmico da extremidade da viga, considerando o sistema livre e não amortecido, sendo o resultado equivalente ao deslocamento previsto na bibliografia.

4.2 Circuito RLC

4.2.1 Definições:

Conforme REBELLO (2012), o circuito RLC representa uma unidade básica para construção de diversos sistemas elétricos imprescindíveis no nosso dia a dia: televisão, rádio, controle remoto, máquina de lavar roupa, elevadores, GPS e por aí vai. O problema aqui é determinar um modelamento para compreensão do que ocorre no circuito em questão.

4.2.2 Análise do sistema:

Num circuito elétrico fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão dos componentes.

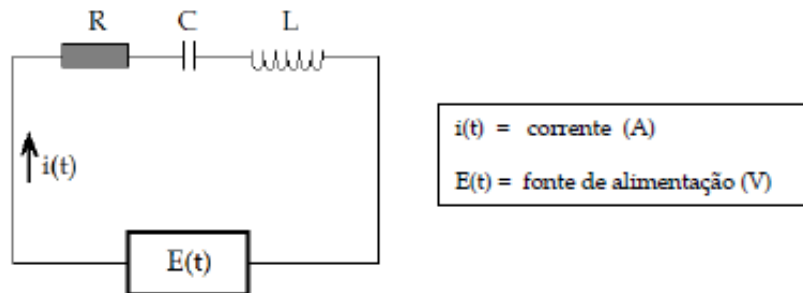


Figura 23: Circuito RLC.

Fonte: Notas de Aula – Aplicações EDO 2ª Ordem.

Então, vamos entender a quantificação da queda de tensão em cada componente.

Resistor: No resistor, a queda de tensão é proporcional à intensidade da corrente. Em simbologia matemática fica:

$$E_R = R \cdot I, \text{ onde } R = \text{Resistência elétrica, e sua unidade de medida é Ohm (} \Omega \text{)}.$$

Indutor: No indutor, a queda de tensão é proporcional à taxa de variação da corrente em função do tempo. Matematicamente pode ser representada por:

$$E_L = L \cdot \frac{dI}{dt}, \text{ onde } L = \text{Indutância, e sua unidade de medida é o Henry (H)}$$

Capacitor: No capacitor, a queda de tensão é proporcional à carga elétrica armazenada. Em termos matemáticos:

$$E_C = \frac{1}{C} \cdot Q, \text{ onde } C = \text{Capacitância, e sua unidade de medida é o Farad (F)}$$

4.2.3 Modelação:

Pela Lei de Kirchoff: $E_L + E_R + E_C = E(t)$

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad (71)$$

Como, por definição:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) \quad , \text{ podemos diferenciar (63) e obter:} \quad (72)$$

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (73)$$

Que resulta numa equação diferencial similar à Equação (8), gerando os mesmos tipos de soluções e com as mesmas classificações, apenas com diferença na escala de valores. Isto é impressionante, pois são aplicações físicas tão diferentes, e que do ponto de vista matemático são de mesma natureza.

4.2.4 Simulação:

A analogia entre o sistema mecânico e o sistema elétrico representa um conhecimento fundamental para a engenharia. Muitas simulações mecânicas foram feitas através de circuitos elétricos análogos, em função do custo de construção e da dificuldade de fazer aquisição de dados do ponto de vista mecânico (posição e velocidade em função do tempo).

Analogia entre os sistemas mecânico e elétrico:

Sistema Mecânico	Sistema Elétrico
Massa (m)	Indutância (L)
Constante de amortecimento (b)	Resistência elétrica (R)
Constante de rigidez da mola (k)	Recíproco da Capacitância ($\frac{1}{C}$)
Deslocamento	Corrente elétrica

Exemplo (BURGHES and BORRIE, 1981 - pp. 112).

Considere um Circuito RLC e suponha que: $L = 1\text{henry}$, $R = 100\text{ohms}$, $C = 10^{-4}\text{farads}$, $E = 1000\text{volts}$. As condições iniciais são, para $t(0) = 0$, $i(0) = 0$ e $i'(0) = 1000$.

Iremos considerar a equação (63), utilizando as analogias consideradas na modelação do circuito, teremos então:

$$1 \frac{d^2 I}{dt^2} + 100 \frac{dI}{dt} + 10^4 I = 0$$
, e usando o Software MAXIMA,

Sistema Massa-Mola com um grau de liberdade

EXEMPLO:

1. Linear First Order Differential Equationso -
xxxxxxxxxx, pp. 113

```
(%i1) [m,b,k]:[1,100,10000];  
(%o1) [1,100,10000]
```

Cálculo do discriminante delta da equação característica

```
(%i2) [delta]:[(b*b-4*m*k)];  
(%o2) [-30000]
```

calculo das raízes r1 e r2

```
(%i3) [r1]:[(-b+sqrt(delta))/(2*m)];  
(%o3) [ $\frac{100\sqrt{3}\%i-100}{2}$ ]  
(%i4) [r2]:[(-b-sqrt(delta))/(2*m)];  
(%o4) [ $\frac{-100\sqrt{3}\%i-100}{2}$ ]
```

```

> --> lambda corresponde à parte real de r1 e r2
-
> (%i5) [lambda]:[-b/(2*m)];
-
(%o5) [-50]
-
> --> ni corresponde à parte imaginária de r1 e r2
-
> (%i6) [ni]:[sqrt(-delta)/(2*m)];
-
(%o6) [50*sqrt(3)]
-

```

cálculo da frequência natural

```

> --> calculo da frequência
-
> (%i7) [w]:[sqrt((k/m)-((b*b)/(4*m*m)))]];
-
(%o7) [50*sqrt(3)]
-

```

caso 2: delta < 0 SUBAMORTECIMENTO

caso 2: delta < 0 SUBAMORTECIMENTO

```

> --> CONDIÇÕES INICIAIS
-

```

```

> --> [t0,x0,v0]:[0,0,1000];
-
(%o9) [0,0,1000]
-

```

```

[ (%i10) [alfa1]:[c1*exp(lambda*t0)*cos(ni*t0)+c2*exp(lambda*t0)*sin(ni*t0)];
[ (%o10) [c1]
[
[ (%i11) x0=alfa1;
[ (%o11) 0=c1
[
[ (%i12) [c1]:[0];
[ (%o12) [0]
[
[ (%i14) [alfa2]:[c2*sin(ni*t0)*lambda*%e^(t0*lambda)+c1*cos(ni*t0)*lambda*%e^(t0*lambda)-c1*ni*sin(ni*t0)*%e^(t0*lambda)+c2
*ni*cos(ni*t0)*%e^(t0*lambda)];
[ (%o14) [50*sqrt(3)*c2]
[
[ (%i15) v0=alfa2;
[ (%o15) 1000=50*sqrt(3)*c2
[
[ (%i16) algsys([v0=alfa2], [c2]);
[ (%o16) [[c2=-20/sqrt(3)]]
[
[ --> ALIMENTANDO VALORES DE c1 e c2
[
[ (%i17) [c1,c2]:[0,11.5470];
[ (%o17) [0,11.547]
[

```



```

[ (%i15) v0=alfa2;
[ (%o15) 1000=50*sqrt(3)*c2

[ (%i16) algsys([v0=alfa2],[c2]);
[ (%o16) [[c2=20/sqrt(3)]]

[ --> ALIMENTANDO VALORES DE c1 e c2

[ (%i18) [c1,c2]:[0,11.5470];
[ (%o18) [0,11.547]

[ --> DESLOCAMENTO RESULTANTE

[ (%i19) x(t):=c1*exp(lambda*t)*cos(ni*t)+c2*exp(lambda*t)*sin(ni*t);
[ (%o19) x(t):=c1 exp(lambda t) cos(ni t)+c2 exp(lambda t) sin(ni t)

[ --> PLOT DO DESLOCAMENTO

[ --> plot2d([x(t)],[t,0,0.1]);
[ (%o18)

[ (%i1) kill(all);
[ (%o0) done

```

obtemos a Figura 24 abaixo, que mostra o comportamento do circuito RLC, com a corrente elétrica I (eixo vertical), em função do tempo (eixo horizontal).

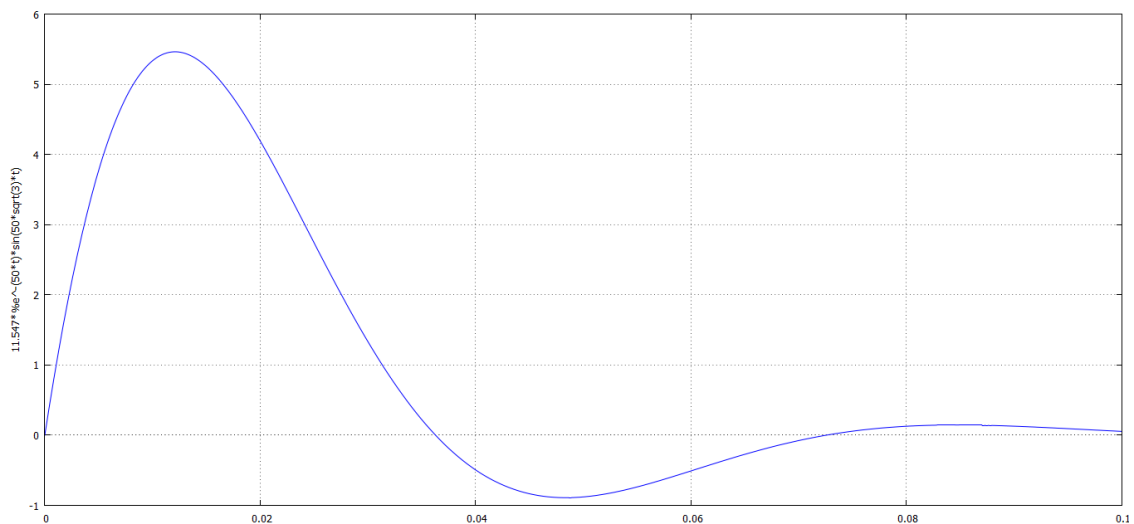


Figura 24: Gráfico demonstrando o comportamento do circuito RLC.

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 24 é equivalente ao resultado apresentado em BURGHEES and BORRIE, 1981, pp.113.

4.2.5 Validação

O gráfico que demonstra o comportamento da corrente elétrica I do circuito RLC apresentado, em função do tempo, sendo ao previsto na bibliografia.

4.3 Sistema Predador-Presa

O modelo de crescimento logístico mostra que, de uma forma não linear, o crescimento ou decaimento exponencial de uma única população pode ser limitado. No caso de duas espécies interagindo uma com a outra, o modelo de crescimento populacional de Lotka-Volterra nos fornece informações sobre o que acontece neste caso. Os modelos de interação entre espécies, também devido a Lotka-Volterra serviram de base para os modelos posteriores utilizados para descrever a dinâmica de sistemas do tipo presa-predador (Chasnov, 2009). Sistemas envolvendo presa-predador são exemplos de oscilações periódicas que ocorrem na área biológica. Um problema deste tipo pode ser modelado obedecendo os principais estádios relativos ao processo de modelagem matemática.

4.3.1 Definições:

Exemplos adaptado (CORNETTE & ACKERMAN, 2013).

O problema consiste em analisar o comportamento de duas populações que interagem como predador e presa em um meio ambiente que está razoavelmente isolado.

Sejam $U(t)$ e $V(t)$ os números de presas e predadores, respectivamente, interagindo uns com os outros no sistema (meio ambiente). Vamos admitir que os valores de equilíbrio sejam U_e e V_e , que correspondem ao ponto no qual as taxas populacionais dU/dt e dV/dt se anulam e as duas populações estão em equilíbrio estático, uma com relação à outra. Sob estas condições, gostaríamos de responder a questões como:

- (i) Nas proximidades do ponto de equilíbrio, qual é o comportamento das duas populações?
- (ii) Que tipo de comportamento é este?

4.3.2 Análise do Sistema:

Para simplificar a análise do sistema, vamos fazer as seguintes suposições:

- (i) A taxa de diminuição da população de presas é proporcional ao excesso da população de predadores.
- (ii) A taxa de aumento da população de predadores é proporcional ao excesso da população de presas.
- (iii) O número de interações entre as duas espécies é proporcional ao produto $U(t)V(t)$. Entretanto, suporemos que este número é suficientemente pequeno, que possa ser desprezado.

4.3.3 Modelação:

Imaginemos, agora, que em um dado tempo t , as populações não estejam em equilíbrio. Neste caso, consideremos que

$$\begin{aligned} u(t) &= U(t) - U_e \\ v(t) &= V(t) - V_e \end{aligned} \quad (74)$$

Meçam as diferenças entre as respectivas quantidades de presas e predadores em relação à posição de equilíbrio. Por fim, vamos supor que:

- (i) A população $V(t)$ de predadores cresce, por exemplo, com uma eventual imigração para o sistema em equilíbrio, de alguns predadores. Isto acarretaria uma captura maior de presas, causando uma diminuição inesperada na população de presas.
- (ii) A população de presas torna-se eventualmente mais numerosa. Neste caso, os predadores teriam um maior suprimento de alimentos e sua quantidade também poderia aumentar.

4.3.3.1 Modelo Matemático:

Para pequenos desvios, $u(t)$ e $v(t)$, a partir do equilíbrio, assumimos, no item 4.3.2, que:

1. A taxa de diminuição da população de presas, $-U'(t)$, é proporcional ao excesso de predadores na população, $v(t)$.
2. A taxa de aumento da população de predadores, $V'(t)$, é proporcional ao excesso de população de presas, $u(t)$.

Logo:

$$-U'(t) = a \cdot v(t) \quad \text{ou} \quad U'(t) = -a \cdot v(t), \text{ com } a > 0. \quad (75)$$

Pela Equação (75), se a população de predadores excede o equilíbrio, $V(t) > V_e$ ($v(t) > 0$), então $U'(t) < 0$ e a população de presas diminuirá. No entanto, se a população de predadores é menor que o normal, $V(t) < V_e$ ($v(t) < 0$), então $U'(t) > 0$ e a população de presas aumenta. Para este modelo, ambas as populações devem ser consideradas próximas ao equilíbrio. Por exemplo, uma população de presas excedendo o equilíbrio U_e , pode suportar uma população de predadores ligeiramente acima do equilíbrio V_e e ainda crescer, pois:

$$u(t) = U(t) - U_e, \quad U(t) = U_e + u(t) \quad \text{e} \quad U'(t) = u'(t). \quad \text{Assim,}$$
$$u'(t) = -av(t).$$

Similarmente, $v'(t) = bu(t)$, onde $b > 0$, é uma constante de proporcionalidade.

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\begin{aligned} u'(t) &= -av(t) \\ v'(t) &= bu(t), \end{aligned} \quad (76)$$

descreve a dinâmica das populações predador - presa.

De fato, este modelo matemático aproximado para descrever a realidade das duas populações interagindo em seu meio ambiente, indica que a população de predadores reduz o crescimento da população de presas, enquanto que, a presença de presas na segunda equação

de (76) torna mais lenta a diminuição da população de predadores. O sistema (76) constitui um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, cujo acoplamento é devido às variáveis dependentes $u(t)$ e $v(t)$, que aparecem em ambas as equações.

Adotaremos um procedimento geral para obtenção de uma única equação envolvendo apenas u ou v .

$$u'(t) = -av(t) \quad \text{Primeira equação original}$$

$$[u'(t)]' = [-av(t)]' \quad \text{Primeira equação diferencial}$$

$$u''(t) = -av'(t)$$

$$u''(t) = -a(bu(t)) \quad \text{Substituindo na segunda equação diferencial, obtemos}$$

$$u''(t) + (ab)u(t) = 0 \quad (77)$$

Definindo $\omega = \sqrt{ab}$, de modo que $\omega^2 = ab$, podemos reescrever (77) na forma:

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad (78)$$

Por um processo semelhante podemos chegar à equação

$$v''(t) + \omega^2 v(t) = 0, \quad (79)$$

As equações diferenciais (78) ou (79) são equivalentes à equação diferencial do sistema que corresponde a uma massa m ligada por uma mola de constante de mola k . A fim de completar a analogia, precisamos definir condições iniciais $u(0)$ e $u'(0)$ (o processo para a segunda equação (79) é semelhante).

Suponhamos, então, que temos um sistema de populações de presa e predador e que, em virtude de alguma perturbação no meio ambiente (por exemplo, tempestade, frio em excesso ou fogo) as populações passem a ser, respectivamente, $U(0)$ e $V(0)$, ligeiramente diferentes dos valores de equilíbrio $U(e)$ e $V(e)$. Sejam

$$u_0 = U_0 - U_e$$

$$v_0 = V_0 - V_e,$$

Então, definimos $u(0) = u_0$ e da primeira equação de (76), $u'(0) = av_0$. Assim, o problema de valor inicial assume a forma

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2x(t) = 0$$

sujeito a

$$u(0) = -au_0 \quad \text{e} \quad v'(0) = bv_0$$

Para a solução destas equações, precisamos de condições iniciais $u(0)$ e $u'(0)$.

Suponhamos que temos um par de populações predador-presa e por causa de alguma perturbação ao ambiente (chuva, frio ou fogo, por exemplo), $t = 0$, as populações estão em (U_0, V_0) , próximos mas diferentes dos valores de equilíbrio (U_e, V_e) . Para o equilíbrio devemos ter:

$u_0 = U_0 - U_e$ e $v_0 = V_0 - V_e$, então teremos $u(0) = u_0$. Além disso, de $u'(t) = -av(t)$, nós conseguiremos $u'(0) = -av(0) = -av_0$.

Assim, teremos o sistema completo:

$$u(0) = u_0 \quad u'(0) = -av_0 \quad u''(t) + \omega^2u(t) = 0$$

4.3.4 Simulação:

Exercício (CORNETTE & ACKERMAN, 2013 – pp. 323):

Os três exercícios anteriores mostram que para $a = b = 1$, $u_0 = 3$ e $v_0 = 4$.

$$u(t) = -4 \sin(t) + 3 \cos(t)$$

$$v(t) = 3 \sin(t) + 4 \cos(t)$$

Usando o software MAXIMA, adotamos para a segunda mola, um coeficiente $k_3 = 0.0000001$.

Usando o software MAXIMA, temos:

Sistema Massa-Mola com dois graus de liberdade

Entrada de Dados:

1. Presa-Predador: Exemplo de acoplamento fraco: $k_2 \ll k_1 = k_3$, com $k_1 = k_3 = 1$, $k_2 = 0.0000001$; $m_1 = m_2 = 1$;
James L. Cornette and Ralph A. Ackerman, Calculus for Life Sciences: A modeling Approach, vol. 1, pp 323

```
i3) [m1,m2]:[1,1];  
    [k1,k2,k3]:[1,0.0000001,1];  
    k4:1/k2;  
o1) [1,1]  
o2) [1,1.0 10^-7,1]  
l) 10000000.0
```

Cálculo de Lambda

```
i8) [a,b,c]:[m1·m2,m1·(k2+k3)+m2·(k1+k2),(k1+k2)·(k2+k3)-k2·k2];  
    p:b/a;  
    r:c/a;  
    lamb1:0.5·p-sqrt(0.25·p·p-r);  
    lamb2:0.5·p+sqrt(0.25·p·p-r);  
o4) [1,2.0000002,1.0000002]  
    2.0000002  
    1.0000002  
mb1) 1.0000000000039972  
mb2) 1.000000199960028
```

Frequências Naturais

```
(%i9) [w1,w2]:[sqrt(lamb1),sqrt(lamb2)];  
(%o9) [1.000000000019986, 1.000000099980009]
```

Cálculo dos modos ... + 0 hidden lines

```
(%i13) [U11,U12]:[1,1];  
[aux11,aux12]:[(((k1+k2)-w1·w1·m1)·k4),(((k1+k2)-w2·w2·m1)·k4)];  
beta1:aux11·U11;  
beta2:aux12·U12;  
(%o10) [1, 1]  
(%o11) [0.9996002803269732, -0.9996002781065272]  
(beta1) 0.9996002803269732  
(beta2) -0.9996002781065272
```

Condição Inicial

```
(%i22) [u10,u20,v10,v20]:[3,4,-4,3];  
l1c:beta2·v10-v20;  
m1c:beta2·u10-u20;  
l2c:-beta1·v10+v20;  
m2c:-beta1·u10+u20;  
det:beta2-beta1;  
C1:sqrt((l1c/(w1·det))^2+(m1c/det)^2);  
C2:sqrt((l2c/(w1·det))^2+(m2c/det)^2);  
[phi1,phi2]:[atan(l1c/(w1·m1c)),atan(l2c/(w2·m2c))];  
(%o14) [3, 4, -4, 3]  
(l1c) 0.9984011124261087  
(m1c) -6.998800834319582  
(l2c) 6.998401121307893  
(m2c) 1.00119915901908  
(det) -1.9992005584335  
(C1) 3.536240870374638  
(C2) 3.536240874232806  
(%o22) [-0.1416971537049131, 1.428699358388556]
```

```
→ kill(all);
```

```
(%o0) done
```


(/000) uone

1 Deslocamentos para o Modo 1

(%i23) $u1(t) := C1 \cdot \cos(w1 \cdot t - \text{phi}1) + C2 \cdot \cos(w2 \cdot t - \text{phi}2);$


(%o23) $u1(t) := C1 \cos(w1 t - \text{phi}1) + C2 \cos(w2 t - \text{phi}2)$

2 Deslocamentos para o Modo 2

(%i24) $u2(t) := \text{beta}1 \cdot C1 \cdot \cos(w1 \cdot t - \text{phi}1) + \text{beta}2 \cdot C2 \cdot \cos(w2 \cdot t - \text{phi}2);$

(%o24) $u2(t) := \text{beta}1 C1 \cos(w1 t - \text{phi}1) + \text{beta}2 C2 \cos(w2 t - \text{phi}2)$

Plot dos modos 1 e 2

 (%i26) $\text{plot2d}([u1(t), u2(t)], [t, 0, 8]);$

obtemos a Figura 25 abaixo, que mostra o comportamento do sistema predador-presa (eixo vertical), em função do tempo (eixo horizontal).

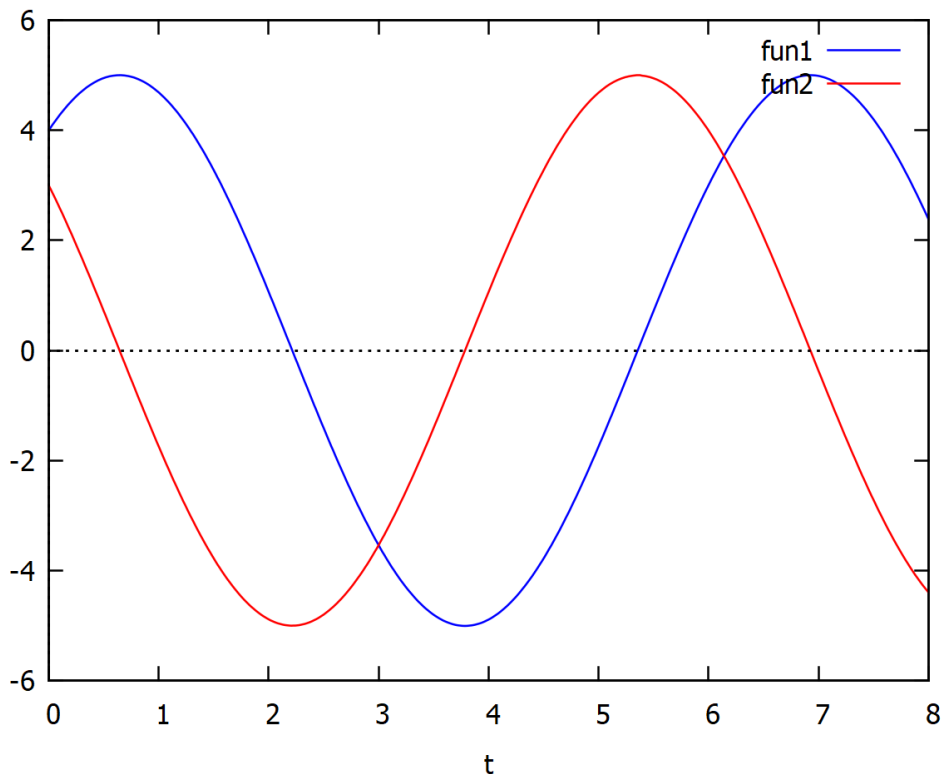


Figura 25: Gráfico do comportamento do sistema predador-presa.

Fonte: Software MAXIMA.

A solução mostrada na Figura 25 é equivalente ao resultado apresentado em CORNETTE & ACKERMAN, 2013 – pp. 330.

4.3.5 Validação:

O gráfico que demonstra o comportamento do sistema predador-presa (eixo vertical) em função do tempo (eixo horizontal) representou de forma equivalente o previsto na bibliografia.

Capítulo 5 – Conclusão

Este trabalho tinha dois objetivos: Um deles era analisar a estrutura de um sistema físico massa mola, à luz dos princípios da modelagem matemática, obedecendo um roteiro pré-estabelecido. O outro, era mostrar que em certos sistemas reais os agentes interagem da mesma forma que o sistema massa-mola, de modo que o modelo matemático é o mesmo. Para atender estes objetivos, apresentamos, inicialmente, conceitos básicos sobre termos como sistema, modelos e modelagem matemática. Estas noções são necessárias para aquele que pretende trabalhar com a complexidade de problemas reais encontrados nas engenharias, física, química, biologia, economia, etc. Estabelecemos um roteiro, que utiliza os principais estádios para a solução de problemas reais, bem como conceitos envolvidos na modelagem matemática. Este procedimento foi utilizado na análise do sistema físico massa-mola e utilizado também na análise de alguns sistemas reais, cujo comportamento mostrou ser o mesmo do sistema físico em questão.

Assim, entendemos que os objetivos traçados inicialmente foram plenamente atendidos.

Na análise do sistema físico massa-mola, nos limitamos à resposta livre de um oscilador harmônico com um e dois graus de liberdade, sem envolver uma excitação externa. No caso de dois graus de liberdade, desprezamos, ainda, a força de amortecimento. Estas limitações, impediram que pudéssemos encontrar uma variedade maior de exemplos reais, que pudessem ser enquadrados no contexto do sistema massa-mola. Isto significa que este trabalho pode ser complementado para a solução de problemas mais complexos, com a utilização de ferramentas poderosas de análise (por exemplo, com ênfase na análise modal e nas equações de Lagrange) e em técnicas aproximadas, tal como o Método de Rayleigh-Ritz.

Capítulo 6 – Referências Bibliográficas

ALDER, M.D. *An Introduction to Mathematical Modelling*, [recurso eletrônico]. Edição única. HeavenForBooks.com, HeavenForBooks.com, 2001.

BOYCE, E.W.; DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 6ª edição. JC Editora, 1998.

BRASIL, R.M.L.R.F; SILVA, M.A. *Introdução à Dinâmica das Estruturas Para a Engenharia Civil*. Editora Blucher, 2013.

BURGHES, D.N.; BORRIE, M.S. *Modelling With Differential Equations*. Ellis Horwood Limited, West Sussex, England, 1rd edition, 1981.

CHASNOV, J.R. *Mathematical Biology Lecture Notes for Math 4333*. The Hong Kong University of Science and Technology, 2009.

CLINE, D. *Variational Principles in Classical Mechanics*. University of Rochester, 2017.

CORNETTE, J.L.; ACKERMAN, R.A. *Calculus for the Life Sciences: A Modeling Approach*-Vol. I, *Creative Designs* [online] Available at: <<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/legalcode>>, pp. 323-330, 2013

CRAIG Jr, R.R. *Structural Dynamics*. The University of Texas at Austin, 1981.

FEYNMANN, R. *Lições de Física, Vol. I*, [recurso eletrônico]. Bookman, tradução: Adriana V. R. Da Silva e Kaline R. Coutinho, Porto Alegre, edição definitiva, 2008.

MEYER, W.J. *Concepts of Mathematical Modeling*. Dover Publications, Mineola, New York, 1rd edition, 1984.

NAGLE, R.K.; EDWARD, B.S.; Snider, A. D. *Equações Diferenciais*. Editora Pearson, São Paulo, 4ª edição, 2004.

REBELLO. *Notas de Aula – Aplicações EDO 2ª Ordem*, 2012.

ROQUE, A. *Ondas, Fluidos e Termodinâmica-USP, aula 1*. [recurso eletrônico], <https://docplayer.com.br/404706-5910170-fisica-ii-ondas-fluidos-e-termodinamica-usp-prof-antonio-roque-aula-1.html> - consulta realizada em 09/07/2019.

SANTOS, B. *Introdução ao Software MAXIMA*, 2009.

THOMAS, L.R. *O uso de Equações Diferenciais na Modelagem de Sistemas Naturais e Outros*. TCC. Faculdade UNB Planaltina, 2013.

ULGUIM e VIANA. *Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem*, 2003.

VELTEN, K. *Mathematical Modeling and Simulation*, [recurso eletrônico], edição única. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007.

ZILL, D.G.; CULLEN, M.R. *Equações Diferenciais*, Vol. 1, ed. Pearson, São Paulo, 2001

Consulta internet:

http://www.sharetechnote.com/html/DE_Modeling_Example_SpringMass.htm - em 09/07/2019.

<https://www.significados.com.br/software-livre/> - em 25/07/2019.

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod_resource/content/1/RLC_caos.pdf - em 08/09/2019.