UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ - UTFPR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

SCHEILA ODISI FLEISCHMANN

O ORIGAMI E SUAS DOBRAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2019

SCHEILA ODISI FLEISCHMANN

O ORIGAMI E SUAS DOBRAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná em Curitiba - PROFMAT-UTCT como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre".

Orientadora: Profa. Dra. Olga Harumi Saito

CURITIBA

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Fleischmann, Scheila Odisi
O origami e suas dobras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos [recurso eletrônico] / Scheila Odisi Fleischmann. -- 2019.
1 arquivo texto (116 f.) : PDF ; 13,3 MB.

Modo de acesso: World Wide Web.
Título extraído da tela de título (visualizado em 10 dez. 2019).
Texto em português com resumo em inglês
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2019
Bibliografia: f. 95-97.

1. Matemática - Dissertações. 2. Origami - Matemática. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Matemática - Problemas, exercícios, etc. 5. Geometria - Estudo e ensino. 6. Álgebra - Estudo e ensino. 7. Axiomas. 8. Trabalhos em papel. 9. Atividades criativas na sala de aula. I. Saito, Olga Harumi. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD: Ed. 23 – 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba
Bibliotecário: Adriano Lopes CRB-9/1429

TERMO DE APROVAÇÃO DE DISSERTAÇÃO Nº 71

A Dissertação de Mestrado intitulada **"O origami e suas dobras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos"**, defendida em sessão pública pela candidata **Scheila Odisi Fleischmann**, no dia 29 de novembro de 2019, foi julgada para a obtenção do título de Mestre, área de concentração Matemática, e aprovada em sua forma final, pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Olga Harumi Saito - Presidente – UTFPR

Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani – UTFPR

Profa. Dra. Adriana Luiza do Prado – UFPR

A via original deste documento encontra-se arquivada na Secretaria do Programa, contendo a assinatura da Coordenação após a entrega da versão corrigida do trabalho.

Curitiba, 29 de novembro de 2019.

Carimbo e Assinatura do(a) Coordenador(a) do Programa

AGRADECIMENTOS

- A Deus, pois graças a fé, atingi os meus objetivos.
- À minha família que me incentivou: meu marido Edinei que sempre valorizou minhas conquistas; meus filhos Eduardo e Henrique que mantiveram a minha autoestima elevada nos momentos de cansaço e para os quais procuro ser exemplo; meus pais Agostinho e Claudete, que me educaram e me apoiaram em todas as minhas escolhas.
- À minha orientadora, profa. Dra. Olga Harumi Saito, pela dedicação, alegria sempre presente e competência inspiradora.
- Aos professores que tive no PROFMAT, que reforçaram o quanto a Matemática é cativante e inspiradora.
- Aos meus alunos que são o incentivo para eu me aperfeiçoar. Busco sempre mais conhecimentos para atender os seus anseios.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que, na busca da melhoria do ensino de matemática na Educação Básica, viabilizou a implementação do PROFMAT.
- À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.
- O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

ODISI FLEISCHMANN, Scheila. **O origami e suas dobras no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos**. 116 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2019.

Apresentamos neste trabalho a técnica de dobradura de papel, o origami, aplicando os axiomas de Huzita-Hatori, os teoremas de Haga e as aproximações de Fujimoto para frações do tipo $1/n$. Após uma pesquisa diagnóstica com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de Santa Catarina, desenvolvemos com esses estudantes oficinas introduzindo o origami com aplicações no retângulo áureo e no estudo de frações, entre outros. Os trabalhos provenientes dessas oficinas foram apresentados em uma Feira de Conhecimentos, obtendo o primeiro lugar na categoria Ensino Médio. Concluímos que as oficinas com origami permitem, sob diferentes abordagens, a apresentação e discussão de uma variedade de conteúdos que possibilitam o aprofundamento do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Ensino de Geometria; Ensino de Álgebra; Axiomas de Huzita-Hatori; Teoremas de Haga; Aproximações de Fujimoto.

ABSTRACT

ODISI FLEISCHMANN, Scheila. **Origami folding in teaching and learning mathematical content**. 116 f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2019.

We present in this work the paper folding technique, origami, applying Huzita-Hatori axioms, Haga theorems and Fujimoto approximations for fractions of type $1/n$. After a diagnostic research with elementary and high school students of a public school in the State of Santa Catarina, we developed with these students workshops introducing origami with applications in the golden rectangle and in the study of fractions, among others. The works from these workshops were presented at a Knowledge Fair, obtaining the first place in the High School category. We conclude that origami workshops allow, under different approaches, the presentation and discussion of a variety of contents that allow the deepening of mathematical knowledge.

Keywords: Teaching Geometry; Teaching Algebra; Huzita-Hatori Axioms; Haga's Theorems; Fujimoto Approach.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESCOLHA DO TEMA

A aprendizagem ocorre quando os alunos estão inseridos no contexto que estão estudando. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), documento que define os conhecimentos essenciais, de acordo com a idade, independente a escola que estudem, os estudantes devem ser incentivados a expandir os ensinamentos que já trazem na sua bagagem, investigando o conhecimento informal para torná-lo eficaz e científico:

> "O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo." (Brasil, 2018, p 463)

Diante disso, usando a arte do origami, que é uma cultura antiga e bastante difundida, podemos desenvolver conceitos matemáticos desde os mais simples até conceitos mais complexos, partindo da prática, do lúdico como forma de motivação. A BNCC (Brasil, 2018), também evidencia que: "Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte da nossa cultura e da nossa história.". Trazer a Matemática para a vida do aluno, com um relevante aprendizado, é uma maneira de inseri-lo, prepará-lo para a vida adulta, para a cidadania. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (Ministério da Educação, 1998), temos que:

> "Para que ocorram as inserções dos cidadãos no mundo do trabalho, no mundo das relações sociais e no mundo da cultura e para que desenvolvam a crítica diante das questões sociais, é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estrutura do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a problemas, situações de vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares". (Ministério da Educação, 1998)

Justamente o anseio de fazer dos educandos, cidadãos capazes de progredir como trabalhadores, empreendedores, cientistas ou qualquer futuro que os façam realizados, é o que se pretende. Com isso, tornar o ensino da Matemática mais dinâmico, unindo a prática a conteúdos aparentemente abstratos foi a motivação do uso do origami como instrumento para incentivar os estudantes a assimilar conteúdos matemáticos. Trabalhar com o origami, possibilita enriquecer o ensino da Geometria, além de colaborar também com o ensino da Álgebra. Assim apresentamos, no decorrer do trabalho, sugestões para contribuir com a aprendizagem, pretendendo-se que sejam apenas incentivos para despertar em outros professores, maneiras de se ensinar na disciplina de Matemática.

1.2 JUSTIFICATIVA

Muitos alunos, pais e até professores questionam a importância da Matemática. Para que ensinar e cobrar uma disciplina tão difícil? Existem várias respostas para essa pergunta, como as justificativas mais amplas e abrangentes dadas pelo matemático Geraldo Ávila (AVILA, 2010, p 28):

> "A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa. O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemática na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia. O estudo da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo de outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade." (Ministério da Educação, 1998, p 28)

Assim, buscar-se-á nesse trabalho trazer uma contribuição para tirar da disciplina de Matemática um olhar de pura dificuldade e inacessibilidade e também contribuir para que o ensino seja agradável. Isso é possível porque a Matemática com origami vai despertando interesse, tornando o conteúdo mais palpável, visível e a aprendizagem mais prazerosa.

Ensinar conteúdos matemáticos através de dobraduras de papel, é para o professor uma maneira de ajudá-lo a articular os questionamentos frequentes dos alunos. E, segundo Geraldo:

> "Trazendo frequentemente à suas aulas, histórias, problemas e questões interessantes, o professor desperta no aluno uma crescente admiração pelo largo alcance da Matemática, estimulando seu interesse pela disciplina. E assim procedendo, ele se antecipa às perguntas dos alunos sobre a relevância da Matemática, a ponto de eles nem terem tanta necessidade de fazê-las." (AVILA, 2010, p 9)

E, além desse projeto ter esse caráter de apoio pedagógico, ele também vem colaborar com os docentes dentro das mudanças exigidas na educação, pois a legislação vai se modificando, perante os resultados obtidos no decorrer dos anos. E, os professores precisam se adequar, sem, na maioria das vezes, serem orientados de como deve agir. Assim, a ideia é trazer sugestões de como aproximar a Matemática da realidade.

Na área de Matemática, a BNCC retoma a importância do ensino de Geometria, colocando lado a lado com a Álgebra em todos os anos escolares. " Outro ponto a ser destacado é a aproximação da Álgebra com a Geometria, desde o início do estudo do plano cartesiano, por meio da geometria analítica... Assim, a geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume..." (Brasil, 2018, p 270). Ou seja, o projeto contempla exatamente esse elo da Geometria com a Álgebra através de um contexto lúdico, capaz de envolver os alunos nos conteúdos estudados.

Além da BNCC, a ludicidade da Matemática como ponto imprescindível para a aprendizagem real da disciplina, é demonstrada nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCNs): "Hoje se sabe que no processo de aprendizagem a área cognitiva está inseparavelmente ligada à afetiva e à emocional. Pode dizer que tanto o prazer como a fantasia e o desejo estão imbricados em tudo o que fazemos" (Ministério da Educação, 2013, p 116). Assim o projeto com origami vai enaltecer os planejamentos dos professores preocupados com a real aprendizagem dos seus alunos. Não se trata de uma receita, mas de dicas e sugestões de ensinamentos através da prática do origami em sala de aula.

Para intensificar essa importância do processo ensino-aprendizagem envolvido com a realidade dos alunos, ainda nas DCNs:

> "Os estudos sobre a vida diária, sobre o homem comum e suas práticas, desenvolvidos em vários campos do conhecimento e, mais recentemente, pelos estudos culturais, introduziram no campo do currículo a preocupação de estabelecer conexões entre a realidade cotidiana dos alunos e os conteúdos curriculares" (Ministério da Educação, 2013, p 116).

A arte do origami não é uma cultura nacional, justamente por isso enriquece ainda mais os conhecimentos adquiridos através dela, pois num mundo globalizado, onde os alunos tem acesso a diferentes culturas, estudá-las e conectá-las com conteúdos curriculares faz com que os alunos saiam da monotonia. Por isso, em forma de projeto pode ajudar as escolas e professores que buscam diversificar seus métodos de ensino. Como nas DCNs: " As escolas devem propiciar aos alunos condições de desenvolver a capacidade de aprender, como quer a Lei nº 9.394/96, em seu artigo 32, mas com prazer e gosto, tornando suas atividades desafiadoras, atraentes e divertidas" (Ministério da Educação, 2013, p 117).

E, ainda as DCNs colocam que:

> “A escola, face às exigências da Educação Básica, precisa ser reinventada, ou seja, priorizar processos capazes de gerar sujeitos inventivos, participativos, cooperativos, preparados para diversificadas inserções sociais, políticas, culturais, laborais, e, ao mesmo tempo, capazes de intervir e problematizar as formas de produção e de vida. A escola tem, diante de si, o desafio de sua própria recriação, pois tudo que a ela se refere constitui-se como invenção: os rituais escolares são invenções de um determinado contexto sociocultural em movimento” (Ministério da Educação, 2013, p 152).

Visando uma educação de qualidade, apresentamos uma coletânea de sugestões de trabalhos com origami, trazendo também a parte histórica e outras informações pertinentes, possibilitando que a arte da dobradura de papel contribua para uma aprendizagem com elos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

- Obter conhecimentos em Matemática, na área de Álgebra e Geometria, através do origami.
- Tornar o ensino de Matemática mais atrativo, através de atividades práticas.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender algumas formalizações matemáticas através da dobradura de papéis.
- Utilizar tipos de dobras de papel na apropriação de conhecimentos matemáticos.
- Apropriar conhecimentos matemáticos com o desenvolvimento de origamis.
- Compreender, de maneira prática, os Axiomas Huzita-Hatori, os Teoremas de Haga e as aproximações de Fujimoto.
- Estudar os números metálicos com ênfase no número de ouro, fazendo dobradura que determine esse valor.
- Desenvolver oficinas em sala de aula com alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, com projetos pedagógicos que envolvam dobraduras de papel.
- Estimular projetos sociais com a confecção de artesanatos feitos de origami.

1.4 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho, primeiramente pesquisamos sobre as novas legislações que norteiam a Educação Básica no Brasil e posteriormente sobre a arte do origami, bem como suas contribuições para o ensino da Matemática. Procuramos seguir as ideias apresentadas na BNCC, procurando formas de diversificar e contribuir no ensino de conteúdos matemáticos.

Na sequência são apresentados alguns conteúdos que podem ser trabalhados através do origami e como fazê-lo. As sugestões são fundamentadas em pesquisas em diversos trabalhos, assim o leitor pode investigar mais a fundo os assuntos de maior interesse.

Todas as sugestões de desenvolvimento de projetos envolvendo a sala de aula, foram aplicadas com alunos, portanto foi feita uma análise do comportamento dos alunos perante a proposta sugerida, além de apresentar comparações com o ensinamento do mesmo conteúdo sem a colaboração do origami. Essas comparações foram realizadas através de avaliações e diagnósticos.

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

No Capítulo 1 apresentamos a introdução e justificativa com ênfase na fundamentação teórica no projeto, no que se refere às legislações que serviram para nortear o trabalho; apresentamos os objetivos, a metodologia usada e estrutura do trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos a parte histórica sobre o origami e o que se relaciona a arte de dobradura de papéis, como os tipos de papéis, ideias de dobras usadas. Além disso, mostramos alguns benefícios que a arte do origami proporciona para aqueles que a costumam praticar.

No Capítulo 3 discorremos sobre alguns conteúdos de Geometria e de Álgebra que podem ser explorados através de dobraduras em uma folha de papel.

No Capítulo 4 mostramos as oficinas realizadas em sala de aula, desenvolvidas com turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio e, apresentadas na Feira de Conhecimentos da escola.

E, finalmente, no Capítulo 5 colocamos algumas considerações e conclusões sobre o uso do origami em sala de aula no ensino de conteúdos de Matemática.

Ainda, no Apêndice apresentamos os questionários diagnósticos aplicados e os retornos obtidos.

Para iniciar os trabalhos percebemos que é importante conhecer alguns “porquês” do origami: da onde veio, quando surgiu, como surgiu, sua importância no ensino, enfim, uma base histórica sobre o origami.

2 HISTÓRIA DO ORIGAMI

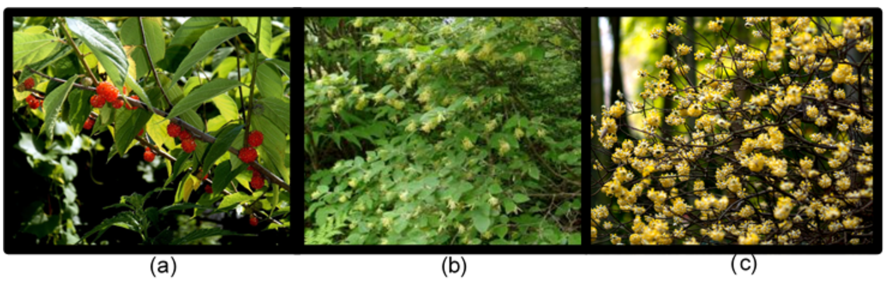
A história do surgimento da arte de dobradura de papel, origami, não é bem definida. Alguns historiadores acreditam que a técnica surgiu com a descoberta do papel, na China: "Os estudiosos acreditam que essa arte de fazer pequenas esculturas com dobraduras de papel tenha nascido junto com a própria matéria-prima que ela utiliza. Os primeiros registros do surgimento do papel vêm da China do ano de 105 d.C." (Mundo Estranho, 2011). Mas, não há relatos que os chineses usavam o papel para dobraduras. "Os registros sobre a sua origem não são claros, mas a ideia de que teria surgido na China junto com a invenção do papel é descartada, pois as evidências sugerem que lá a sua função foi para escrever." (HAYASAKA; NISHIDA, 2019).

Há aqueles que acreditam que o origami surgiu no Japão, quando os monges budistas levaram o papel para o Japão:

> "No Japão, o papel foi introduzido pelos monges budistas coreanos, em torno de ano de 610 e os japoneses desenvolveram a sua própria tecnologia usando fibras vegetais extraídas de plantas nativas: o *kozo* para papel resistente, o *gampi* para os nobres e *mitsumata*, para os mais delicados. O papel tipicamente japonês ficou conhecido como **washi** e sobre ele podia-se escrever ou usá-lo para várias finalidades, inclusive para o origami." (HAYASAKA; NISHIDA, 2019)

A Figura 2.1 mostra essas plantas, das quais pode ser extraído o *washi*.

Figura 2.1: Plantas nativas do Japão usadas para extrair o *washi*: (a) *kozo*; (b) *gampi*; (c) *mitsumata*



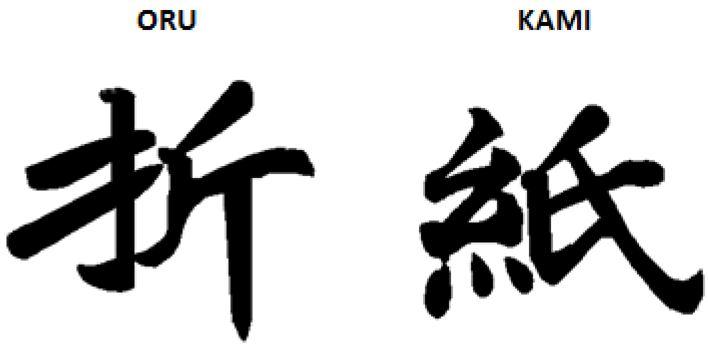
Fonte: (a) (SZYMANSKI, 2018); (b) (Khartasia,); (c) (Kunihiko, 2015)

Independentemente de onde surgiu o origami, o importante é que atualmente ele está presente em quase todos os países, proporcionando entretenimento, saúde mental e educação.

2.1 ORIGEM DA PALAVRA E A LENDA DOS 1000 TSURUS

A palavra origami significa exatamente a técnica de dobrar papel e vem do japonês *ORU* que é o verbo "dobrar" e *KAMI* que significa "papel", como mostra os ideogramas (kanjis) na Figura 2.2.

Figura 2.2: Ideogramas que representam a escrita da palavra "origami" em japonês



Fonte: (KAWANAMI, 2011b)

No Japão, a arte do origami geralmente representa os animais, a natureza, podendo ter um significado para suas esculturas de papel. Por exemplo, o sapo significa amor e felicidade e o tsuru - origami mais famoso no Japão - simboliza a paz, a felicidade, a boa sorte e a saúde. E através da história de Sadako Sasaki ficou mundialmente conhecido: "A História de Sadako Sasaki 1000 tsurus" (KUBO, 2019).

Segundo Carlos Kubo (KUBO, 2019), Sadako foi uma menina que morava no Japão, em Hiroshima, quando em 6 de agosto de 1945, uma bomba atômica foi lançada sobre a cidade. Na época do ataque ela tinha 2 anos e como morava distante do local onde a bomba caiu, ela, sua mãe e irmão não foram atingidos diretamente mas, foram alcançados pela chuva radioativa que atingiu as pessoas que tentavam fugir da cidade.

Como consequência, Sadako teve leucemia e acabou passando parte da infância num hospital. Em 3 de agosto de 1955, uma amiga de Sadako, Chizuko Hamamoto, foi visitá-la e lhe contou sobre a lenda dos mil tsurus. De acordo com essa lenda, quem dobrar essa quantidade desse pássaro, tem um desejo alcançado. Então, Sadako iniciou sua jornada de confeccionar os 1000 tsurus e seu desejo foi, além da recuperação de sua saúde, a paz mundial. Afinal, sua saúde foi afetada devido a bomba e à falta de paz entre as nações.

Sadako faleceu em 25 de outubro de 1955, antes de confeccionar os 1000 tsurus.

Contudo, seus amigos não só terminaram a tarefa, como também se empenharam em campanhas para arrecadar fundos e conseguiram construir um monumento pela paz mundial para homenageá-la. Esse monumento, Figura 2.3, fica na Praça da Paz em Hiroshima, onde ficaram gravadas as palavras: “Esse é nosso grito, esta é a nossa oração, paz na Terra!”

Figura 2.3: Monumento pela Paz Mundial: homenagem à Sadako Sasaki, Hiroshima, Japão

Fonte: (KAWANAMI, 2011a)

2.2 AKIRA YOSHIZAWA - PAI DO ORIGAMI MODERNO

Outro japonês bastante conhecido graças a sua incrível habilidade e paixão em fazer origami, foi Akira Yoshizawa. Ele nasceu em 14 março de 1911 e faleceu em 14 de março de 2005. Desde criança gostava de origami mas, a partir dos 26 anos resolveu dedicar-se quase que exclusivamente a arte de dobradura. “De acordo com uma estimativa em 1989, ele criou mais de 50 mil modelos, das quais apenas algumas centenas de projetos foram diagramados em seus 18 livros” (KAWANAMI, 2012).

Praticar o origami não foi passatempo para Akira, ele era rigoroso ao praticar essa arte.

> “As inquietações criativas e inovadoras do mestre de origami, **Akira Yoshisawa** eram incessantes: ele padronizou regras para representação gráfica das dobras do origami, sistematizou um conjunto de dobras que servem de base para vários origamis e quebrou paradigmas tradicionais introduzindo a técnica do ***wet folding***, ou seja, dobrar com o papel molhado.” (HAYASAKA; NISHIDA, 2019).

O trabalho de Akira, Figura 2.4, ficou tão conhecido que é lembrado como Pai do Origami Moderno.

Figura 2.4: Akira Yoshizawa e seus origamis

Fonte: (KAWANAMI, 2012)

2.2.1 PAPIROFLEXIA

Além dos japoneses, outro povo que mostrou fortes traços na dobradura de papéis, no século XIX foram os mouros. Segundo o professor Edenilson Moraes (MORAES, 2010) eles eram mulçumanos, da religião do islamismo e tinham muita experiência em navegação. Ocuparam a Península Ibérica durante quase 800 anos, deixando em Portugal e Espanha muitas heranças da sua cultura. Os mouros já conheciam a técnica de dobradura de papéis e inicialmente confeccionavam apenas figuras geométricas porque a religião mulçumana não permitia que representassem animais (HAYASAKA; NISHIDA, 2019). E surgiu um sinônimo para origami: papiroflexia.

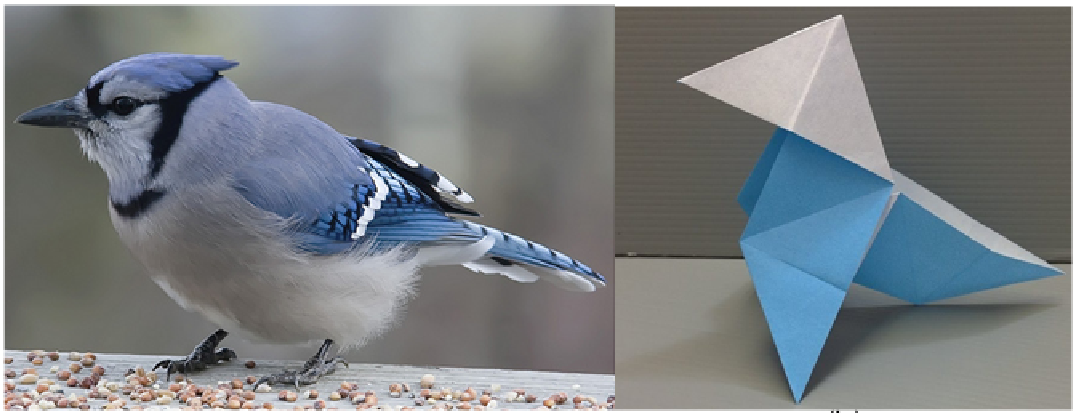
O filósofo e escritor espanhol Miguel de Unamuno (1864-1936) tinha grande afeição por dobraduras de papel. Foi ele que, por volta de 1930, impulsionou o origami nos países de língua espanhola sendo o primeiro a tirar gravatas borboletas de papel. Unamuno deixou de forma relevante sua contribuição para a história do origami, escreveu livros contemplando o tema e propôs uma nova ciência, a Cocotologia, que trata da construção de passarinhos de papel:

> “Outro aspecto pelo qual ele se destacou foi escrever, além de uma infinidade de obras literárias de grande relevância, uma espécie de tratado sobre ’cocotologia’; termo criado pelo próprio Unamuno para designar origami, que deriva de ’cocotte’, que significa algo como ’galinha’ ou ’gravata borboleta’ em francês. Além disso, Miguel de Unamuno publicou vários livros dobráveis, incluindo o ensaio “Amor e pedagogia”, onde ele fala sobre origami no apêndice”. (BAQUERO, 2015)

A importância dada ao origami, era diferente para os japoneses e para os espanhóis, pois enquanto os primeiros usavam em ocasiões religiosas e cerimoniais, os espanhóis tinham-no como um passatempo, uma brincadeira.

Atualmente, na Espanha, todo tipo de dobradura é permitida, tanto é que também há uma dobradura de uma ave, a “pajarita” que é bastante popular entre os espanhóis a ponto de ser sinônimo de papiroflexia, como o tsuru para os japoneses, Figura 2.5 e Figura 2.6.

Figura 2.5: Pajaritas: (a) Pajarita; (b) Origami Pajarita



(a) (b)

Fonte: (a) (ALANYA, 2011); (b) (MANIA, 2019)

Figura 2.6: Tsurus: (a) Tsuru (grou) ; (b) Origami Tsuru

(a) (b)

Fonte: (a) (HIRAFUJI, 2017); (b) (HIRAFUJI, 2017)

No dia 11 de novembro é comemorado o **Dia Mundial do Origami**, que é o dia em que o tsuru foi considerado o símbolo da paz. Nos Estados Unidos essa data é comemorada dia 24 de outubro, data de nascimento da origamista Lilian Oppenheimer, fundadora do primeiro grupo de origami na América e também foi cofundadora da *British Origami Society* e da *Origami USA* (YAMASHITA, 2014).

2.3 TIPOS DE PAPÉIS

As pessoas que passam a praticar o origami, inicialmente, podem não notar a diferença entre os papéis que são usados. À medida que o interesse aumenta, mais etapas são necessárias e passam a notar que papéis muito grossos quebram com mais facilidade ou são muito difíceis de vincar; muito finos podem rasgar quando dobrados muitas vezes, ou seja, a experiência traz novas observações, entre elas a importância da espessura do papel. Para essa espessura dá-se o nome de gramatura que é uma medida de peso que representa a densidade do papel em gramas por metro quadrado (g/m²).

Os papéis mais usados para confeccionar um origami são:

- **Papel sulfite**: gramatura de 75g/m². Escolhido por ter um preço acessível, mas com pouca disponibilidade de cores, Figura 2.7.

Figura 2.7: Papel sulfite

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel de presente (ou fantasia)**: há várias disponibilidades de tamanho, estampa e gramaturas, por isso é importante testar alguns para escolher um papel fantasia ideal para determinada dobradura. Como eles são coloridos ou estampados de um lado e brancos do outro, fazem com que a dobradura feita fique bonita e também facilita a realização das dobras para iniciantes, Figura 2.8.

Figura 2.8: Papel fantasia

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel espelho (ou gessado/dobradura)**: tem a gramatura parecida com a do sulfite, porém encontra-se de várias cores, tem um lado da folha colorida e outra branca e define bem os vincos. É o segundo papel mais utilizado para fazer origami, Figura 2.9.

Figura 2.9: Papel espelho

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel Origami (Importado do Japão)**: é o melhor papel, pois é feito especificamente para essa arte. Porém, como é importado torna-se muito caro, recomenda-se usá-lo depois de adquirir certa experiência, Figura 2.10.

Figura 2.10: Papel Origami

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel Color Plus**: é encontrado em diversas gramaturas e cores. A tonalidade do papel é dada durante a fabricação, com isso, os vincos não ficam brancos, Figura 2.11.

Figura 2.11: Papel Color Plus

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

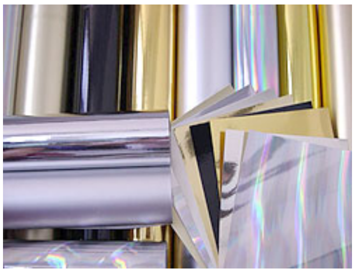
- **Papel Color Set**: possui em diversas gramaturas. É tingido dos dois lados, o faz ter vincos esbranquiçados, Figura 2.12.

Figura 2.12: Papel Color Set

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel laminado (ou metalizado)**: os origamis feitos com esse papel ficam muito bonitos pelo brilho proporcionado. Porém, apesar de ser de fácil dobradura, é um trabalho delicado pois, devido sua fragilidade pode deixar marcas nos vincos, além de rasgar com facilidade. Tem gramatura igual a 60g/m², Figura 2.13.

Figura 2.13: Papel laminado



Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel vegetal**: de diversas gramaturas, porém geralmente tem poucas cores. São ótimos para origami pois aceitam bem as dobras (vincos), Figura 2.14.

Figura 2.14: Papel vegetal

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel Kraft**: a gramatura é diversa nesse papel. No origami, o kraft aceita bem as dobras, mas não aceita bem as modelagens, portanto deve ser usado apenas, para algumas dobraduras, Figura 2.15.

Figura 2.15: Papel Kraft

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Papel Sanduíche**: tem esse nome porque são coladas duas folhas de seda com uma de alumínio no meio. A gramatura varia de 50 a 80g/m². É ótimo para origamis com muitas dobras, pois é resistente, mas tem facilidade de ficar com aparência de amassado quando é apertado, Figura 2.16.

Figura 2.16: Papel Sanduíche

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

2.4 TIPOS DE ORIGAMI

A arte do origami, visto que é uma cultura antiga, foi evoluindo com o passar do tempo. Alguns origamistas - pessoas que fazem origamis - foram alterando, ampliando, inventando novas maneiras para criar sua arte a partir da dobradura de papéis. Assim, existem muitos tipos de origami que são classificados de acordo com suas características, dentre eles:

- **Origami Tradicional**: é aquele onde são feitas apenas dobraduras, não é permitido cortar, nem colar. Existem inúmeros origamis feitos de maneira tradicional, o tsuru é um exemplo, Figura 2.17.

Figura 2.17: Origami Tradicional: tsuru

Fonte: (RIBEIRO, 2010)

- **Block Folding**: obtém um objeto em 3D, encaixando-se várias peças iguais, previamente feitas em formato triangular. Também é conhecido como origami modular, Figura 2.18.

Figura 2.18: Block Folding: cisne

Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Kusudama**: é um tipo de origami modular, mas, nesse caso o objeto formado tem o formato de uma bola, por isso o nome kusudama (kusuri = remédio e tama = bola). Antigamente eram colocadas ervas medicinais dentro das bolas para trazer saúde e espantar os maus espíritos; hoje em dia, ainda são penduradas mais para enfeitar o ambiente, Figura 2.19.

Figura 2.19: Kusudama, conhecido como Morning Dew

Fonte: (HAYASAKA; NISHIDA, 2019)

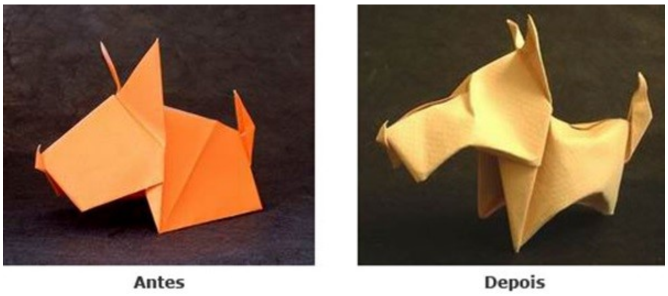
- **Dollar Bill Folding**: o papel utilizado nesse caso é uma nota de dólar, como sugere o nome, Figura 2.20.

Figura 2.20: Origami feito de notas de dólar

Fonte: (HAYASAKA; NISHIDA, 2019)

- **Wet Folding**: nesse tipo de origami molha-se o papel para que o papel fique mais moldável, deve ser usado um papel resistente para que não rasgue nas dobraduras, Figura 2.21.

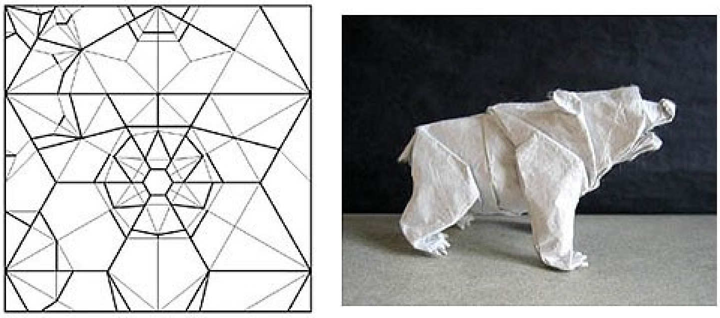
Figura 2.21: Origami do tipo Wet Folding



Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Crease Pattern**: obtém-se um origami a partir das marcas de dobraduras gravadas no papel, ou seja, realiza vincos em um papel a partir de uma sequência de dobras, abre-se o papel e, seguindo as marcas dos vincos deixados, constrói-se o origami, Figura 2.22. Trata-se de uma técnica bastante complexa.

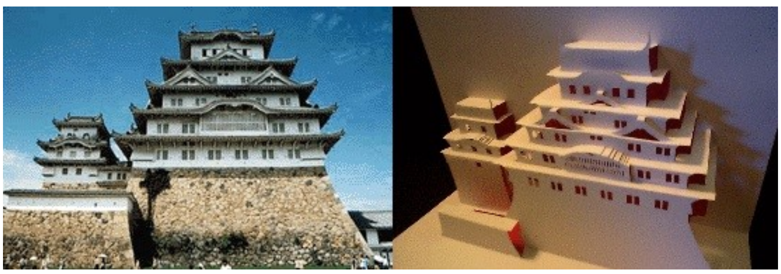
Figura 2.22: Crease Pattern de um urso em origami



Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Kirigami**: é preciso cortar o papel, como o nome sugere (kiri = cortar e kami = papel). É também conhecido como origami arquitetônico. É a transformação de uma imagem bidimensional, em um papel, em um objeto tridimensional, Figura 2.23.

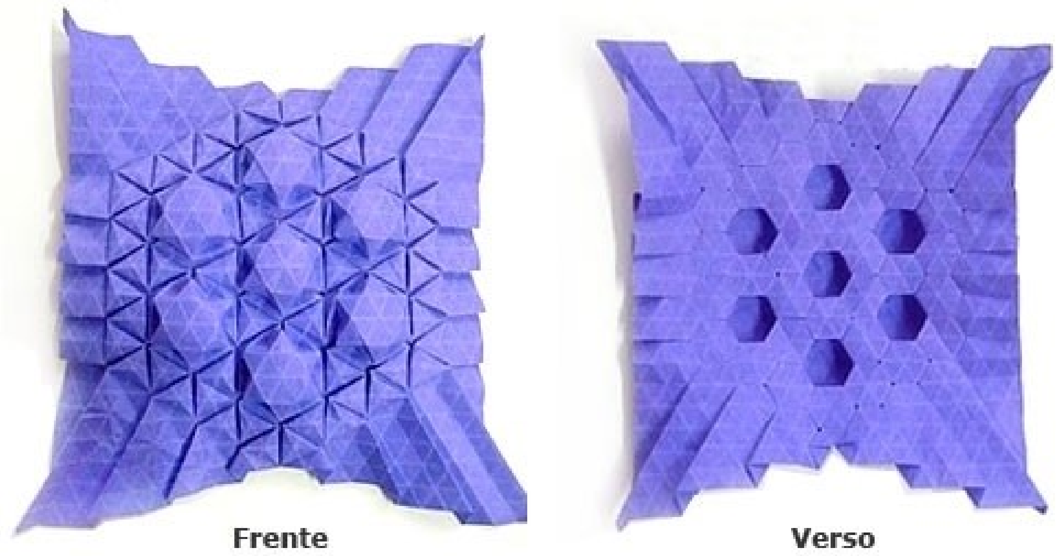
Figura 2.23: Kirigami: Castelo Himeji, Japão



Fonte: (HAYASAKA; NISHIDA, 2019)

- **Origami Tessellation**: trata-se de dobras padrões numa folha de papel, através de uma grade de linhas bases formando quadrados, hexágonos, triângulos ou outras figuras geométricas. A foto do exemplo é chamada de Star Puff, Figura 2.24.

Figura 2.24: Tesselation: Star Puff



Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

- **Oribana**: se baseia na arte da ikebana - técnica japonesa para montagem de arranjos de flores - porém feita somente com papel, as flores, vasos ou qualquer outro ornamento usado no arranjo, Figura 2.25.

Figura 2.25: Oribana

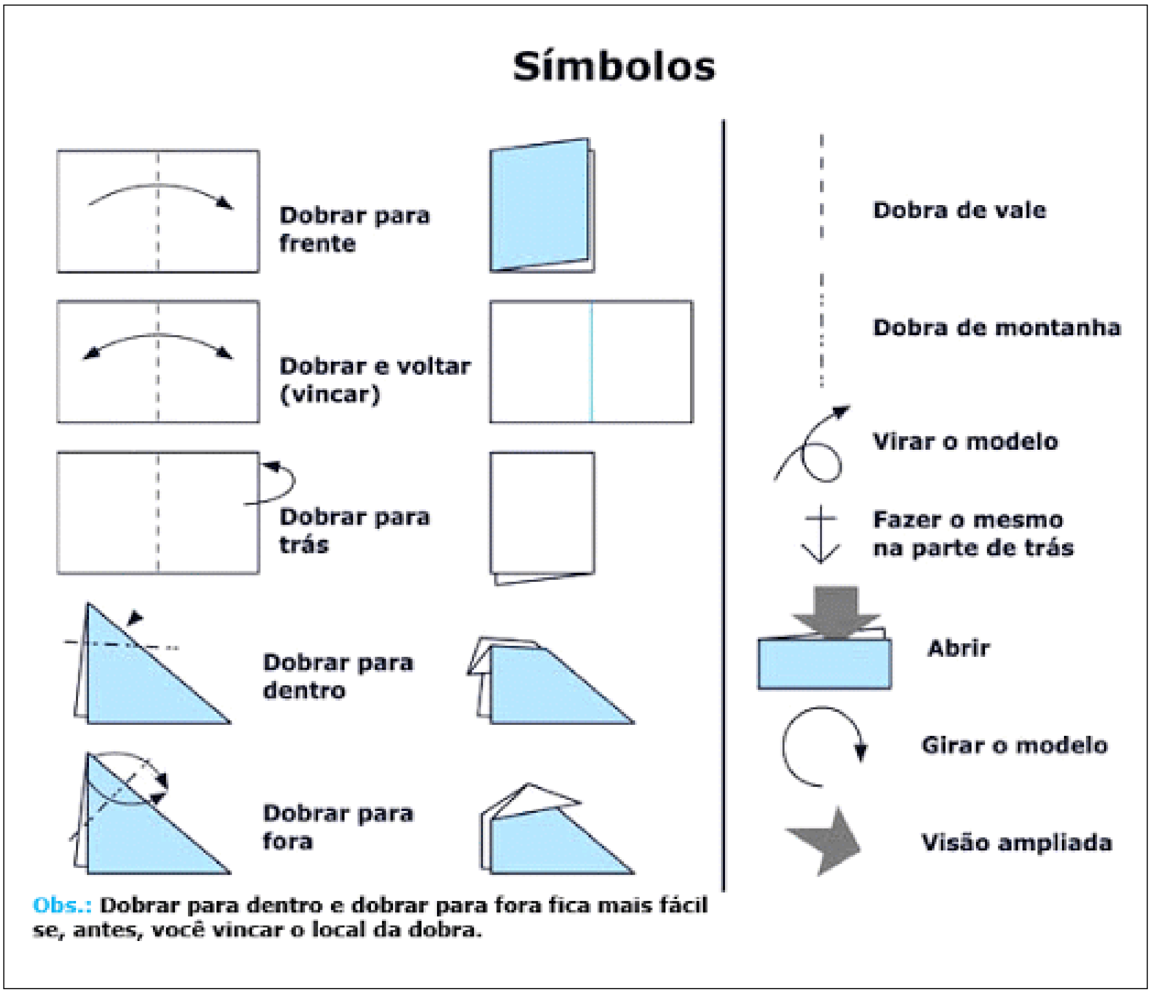
Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

2.5 TIPOS DE DOBRAS EMPREGADAS NO ORIGAMI

Nos dias atuais, com o uso da tecnologia, ficou fácil construir origamis. Muitos vídeos com ótimas explicações, são encontrados ao se acessar a internet, fazendo com que as pessoas que demonstram interesse e tem alguns pedaços de papel, consigam dobrar e obter diversas formas, simplesmente repetindo os passos que outra pessoa deixou gravado. Contudo, as dobraduras já existiam, antes da internet, assim, para se fazer um origami era preciso seguir um passo a passo, deixado através de imagens, que mostravam a sequência de dobras que deveriam ser feitas. Esse passo a passo foi chamado de diagrama.

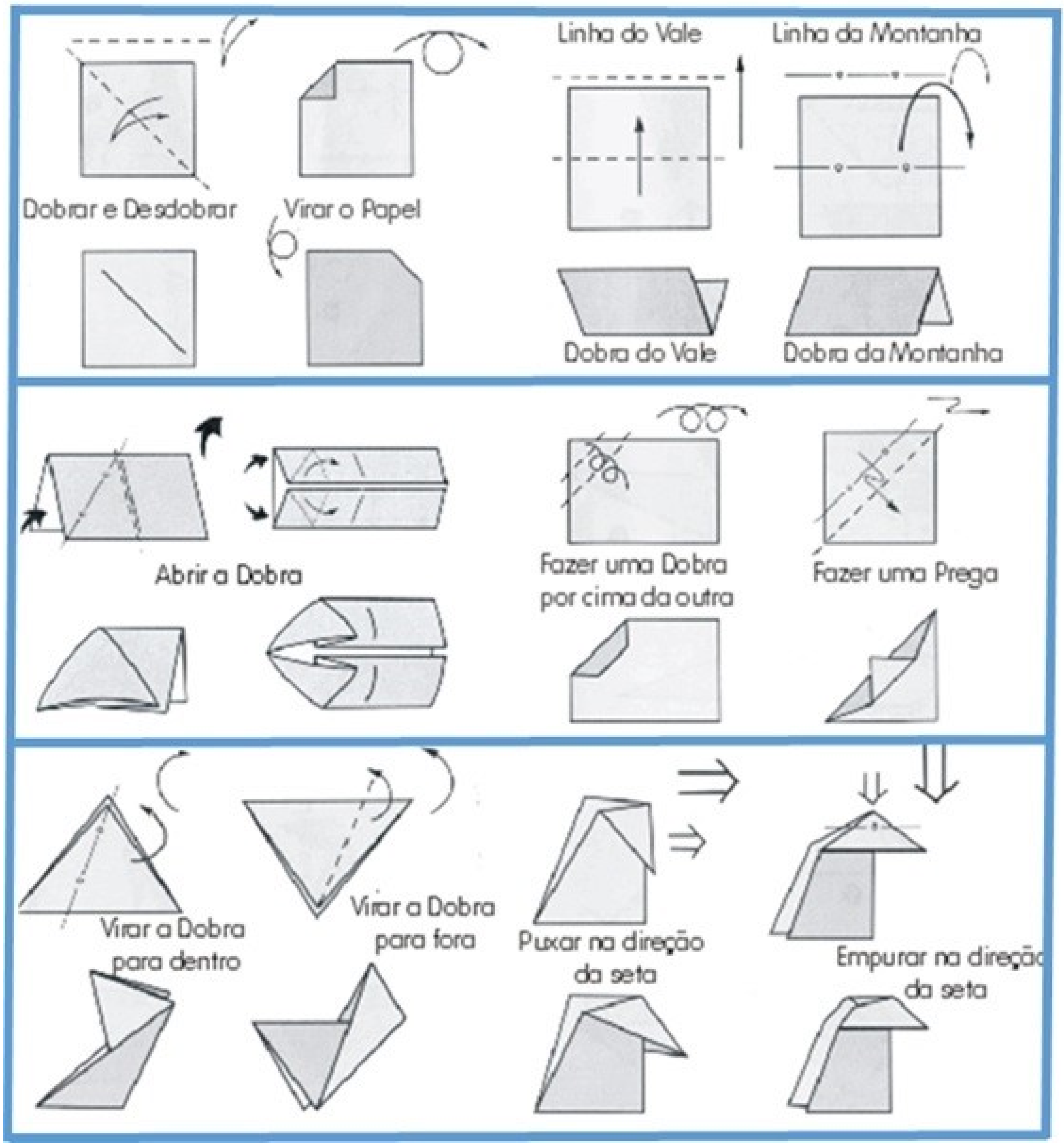
Ainda hoje, os diagramas ajudam os adeptos do origami. Na Figura 2.26 e na Figura 2.27, são apresentados alguns símbolos das dobras a serem feitas durante a confecção de origamis.

Figura 2.26: Símbolos do diagrama - primeira versão



Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

Figura 2.27: Símbolos do diagrama - segunda versão



Fonte: (Oficina do Origami, 2011)

2.6 BENEFÍCIOS DO ORIGAMI

A arte do origami vai muito além das técnicas de dobraduras mostradas. A história trouxe para a atualidade não apenas formas de transformar papel em verdadeiras obras primas, mas também uma maneira de melhorar a qualidade de vida humana.

O amadurecimento pessoal vem de diversas formas. Pode ser no campo emocional, físico, social, cognitivo, ou seja, ser praticante de origami faz com o que parece uma brincadeira, torne-se grande aliado no desenvolvimento do ser humano.

A prática do origami é, sem dúvida, uma arte. Quem ocupa um pouco do seu tempo fazendo origamis, está criando peças que podem servir de decoração, podem servir para presentear pessoas queridas, além de poder vender sua obra de arte, pois é um artesanato. Além disso, vai sempre aprimorando suas técnicas, pois trabalha com diferentes modelos, gramaturas e cores de papel.

Porém, o mais importante é que a medida que a pessoa vai se envolvendo com o origami, melhora seu grau de concentração, sua criatividade, sua autoestima, enfim, praticar origami é uma terapia. Nas palavras da professora de artes do Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (SEBRAE), Eleni Pereira, "na execução das peças, é necessário concentração e sequência ordenada de cada etapa ou dobra. Adquire-se então persistência, disciplina e calma" (SILVA,).

Trabalhar com as mãos para construção de origamis, faz com que o origamista interaja com a arte que está sendo feita:

> "A especialista acredita que o origami estimula sentimentos de amor, paciência, calma, criatividade e paz interior e explica que isso acontece porque nossas mãos estão diretamente ligadas às nossas emoções. Em um aperto de mão podemos, às vezes, perceber se uma pessoa é serena ou não. Se sim, o toque será leve. Outro exemplo sobre a sensibilidade da mão é quando a massageamos. Já reparou que isso geralmente ajuda a acalmar pessoas tristes e ansiosas?" (SILVA,)

O fato de ter na arte de praticar o origami a capacidade de desenvolver a concentração, criatividade, coordenação motora, vê-se a importância dessa técnica na educação. Em qualquer idade pode ser usado origami para ajudar os estudantes a desenvolver e aprimorar as qualidades citadas. Associado a tudo isso, o origami é um excelente aliado no ensino de conteúdos matemáticos.

3 ORIGAMI NA MATEMÁTICA

O origami pode ser empregado em diversas situações na disciplina de Matemática, auxiliando o professor no seu papel de mediador do conhecimento, contribuindo para que os alunos aprendam conceitos matemáticos essenciais para evolução e compreensão dessa disciplina e interagir com as outras disciplinas.

Um dos princípios norteadores para a área de Matemática são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): "a aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, à atribuição e apreensão de significados; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe identificar suas relações com outros objetos ou acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas" (Ministério da Educação, 1998).

Apresentamos abaixo alguns conteúdos, possíveis de se trabalhar de maneira prática utilizando o origami como ferramenta auxiliar na transmissão do conhecimento e contribuir no processo ensino-aprendizagem.

3.1 POSIÇÃO RELATIVA ENTRE RETAS

Para trabalhar com figuras geométricas, áreas e perímetros, um dos trabalhos iniciais é a compreensão da ideia de reta e suas posições relativas, que podem, no plano, serem paralelas, concorrentes ou perpendiculares.

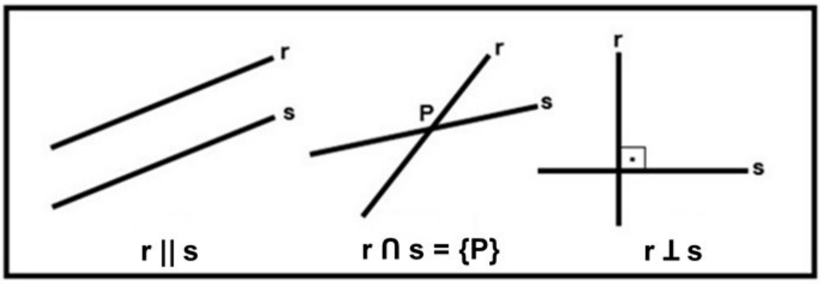
Segundo Caminha:

> "Dadas duas retas no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou elas tem um ponto em comum ou não tem nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são **paralelas**." (NETO, 2013)

E, ainda cita: "Suponha que duas retas r e s formem um ângulo de 90^{o}. Se forem retas coplanares, então, como em Geometria Plana, diremos que r e s são **perpendiculares** ou, ainda, que r é perpendicular a s (ou vice-versa); por outro lado, se forem retas reversas, diremos que são retas **ortogonais**.".

Na Figura 3.1, as retas paralelas são representadas por $r \parallel s$, as retas concorrentes são aquelas que possuem um ponto em comum, $r \cap s = \{P\}$, e o seu caso particular, retas perpendiculares, são representadas por $r \perp s$.

Figura 3.1: Posição relativas entre retas



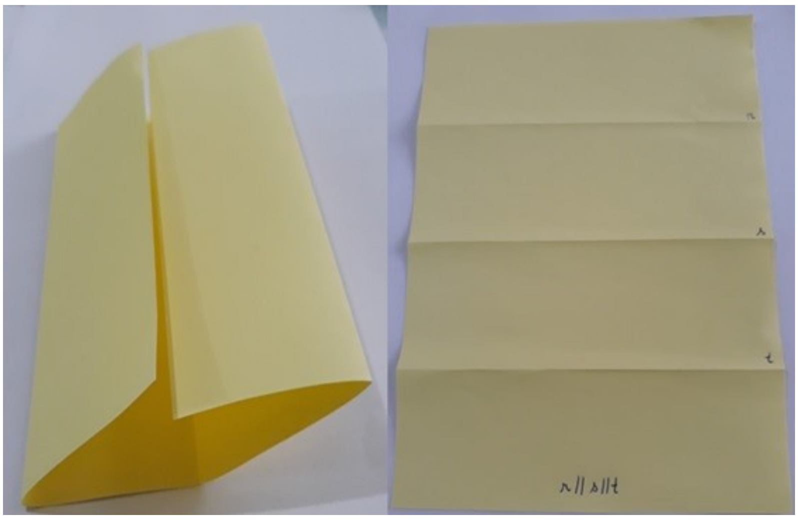
Fonte: O autor

Com um pedaço de papel e uma caneta para representar alguns pontos, os conceitos citados podem ser compreendidos pelos discentes. De acordo com Andrini (ANDRINI, 1989), livro didático adotado pela escola, temos conceitos que podem ser mais facilmente compreendidos pelos alunos:

- **RETAS PARALELAS**

  Quando não possuem ponto em comum. Para mostrar pela dobradura, basta unir lados opostos da folha e vincar. Depois abrir e levar os mesmos lados até a marca da dobradura e vincar novamente. Isso pode ser feito quantas vezes desejar, representando retas paralelas, Figura 3.2.

Figura 3.2: Construção das retas paralelas com origami



Fonte: O autor

- **RETAS CONCORRENTES**

  Quando as retas possuem um único ponto comum. Para mostrar pela dobradura, fazemos uma dobra em qualquer ponto da folha e depois, abrimos a folha e fazemos mais uma dobra, sobrepondo a anterior. O lugar onde se interceptam marcamos o ponto em comum, representando retas concorrentes, Figura 3.3.

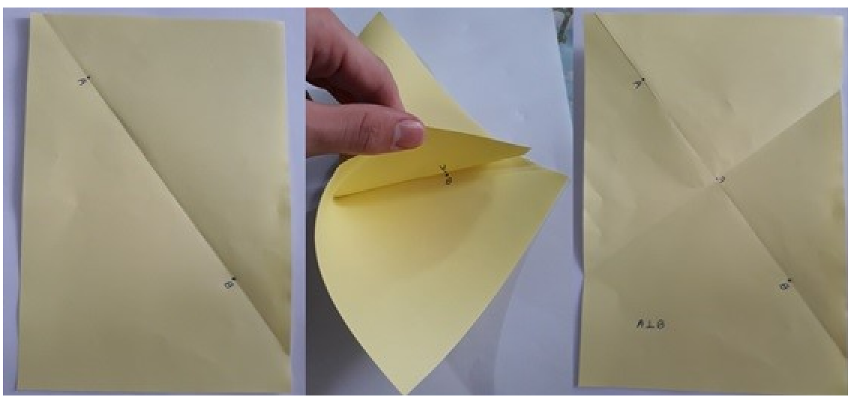
Figura 3.3: Construção das retas concorrentes com origami

Fonte: O autor

- **RETAS PERPENDICULARES**

  Quando duas retas se interceptam formando ângulos retos. São retas concorrentes em que no ponto de intersecção, formam quatro ângulos retos. Para mostrar pela dobradura, colocamos dois pontos distintos na folha e fazemos uma dobra, a única possível passando por esses dois pontos. Então é preciso unir (sobrepor) esses dois pontos e dobrar a folha fazendo um vinco no ponto médio desse segmento. Os vincos que representam as duas retas formadas nessa folha são perpendiculares, Figura 3.4.

Figura 3.4: Construção das retas perpendiculares com origami



Fonte: O autor

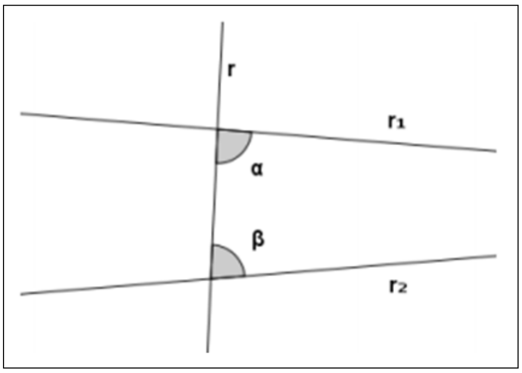
3.2 AXIOMAS DE HUZITA-HATORI

Uma das mais antigas e famosas obras que nortearam e ainda regem o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos é “Os Elementos”. Para Viglione (SANTOS; VIGLIONI, 2011), representa um tratado matemático e geométrico escrito pelo matemático grego Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. Essa obra é composta por treze volumes, assim distribuídos: Geometria Plana (volumes 1 a 6), Teoria dos Números (volumes 7 a 10) e Geometria Espacial (volumes 11 a 13).

Dentro dos volumes de Geometria Plana, Euclides elencou cinco axiomas, que segundo Almeida (ALMEIDA, 2016) são:

- dois pontos determinam uma reta;
- a partir de qualquer ponto de uma reta dada é possível marcar um segmento de comprimento arbitrário;
- é possível descrever um círculo com centro arbitrário e raio arbitrário;
- todos os ângulos retos são iguais;
- se uma reta r corta outras duas retas r_1 e r_2 (no mesmo plano) de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de r é menor que dois retos, então r_1 e r_2 quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r, Figura 3.5.

Figura 3.5: Quinto Axioma de Euclides



Fonte: (ALMEIDA, 2016)

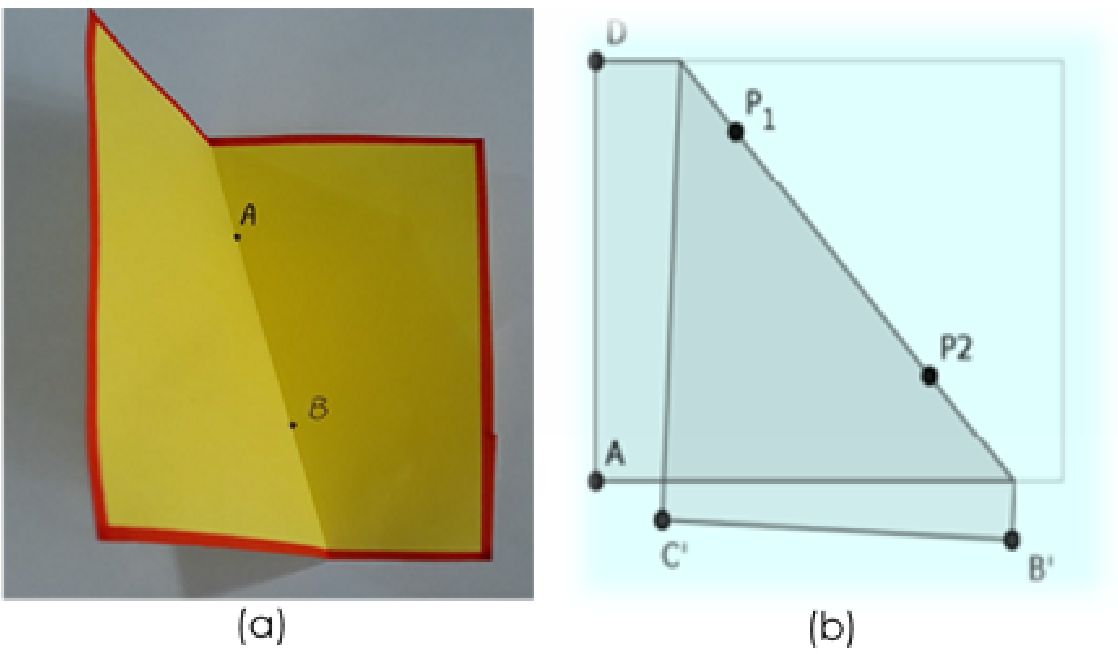
Ainda, segundo Almeida (ALMEIDA, 2016), o quinto axioma de Euclides não é evidente, portanto ao buscar uma demonstraçao para prová-lo, como se fosse um teorema, os matemáticos definiram as bases das Geometrias Não-Euclidianas.

Todo esse conteúdo da área de Geometria, ao ser passado aos alunos da Educação Básica, é bastante abstrato e assim, é difícil a assimilação por parte dos discentes, segundo Pin (PIN; URIBE, 2016), “... ela não precisa ser mostrada somente através de lousa e giz: existem métodos lúdicos e divertidos de ensinar geometria. Um deles é o origami, método criativo de ensinar e utilizar conceitos aprendidos em sala de aula para a construção de figuras”.

O matemático Humiaki Huzita, por volta dos anos 1970, descreveu operações básicas que podem ser realizadas com origami e permitem caracterizar formalmente o tipo de construções geométricas que é possível fazer com a técnica de dobradura de papel, facilitando a compreensão dos axiomas de Euclides. Essas operações ficaram conhecidas como Axiomas de Huzita. Segundo Pin (PIN; URIBE, 2016) Humiaki Huzita descreveu seis operações básicas para construção de figuras por meio de dobraduras e Jaques Justin, em 1989 escreveu um artigo acrescentando mais um axioma que fora descrito por Koshiro Hatori, assim esses axiomas são conhecidos como “SETE AXIOMAS DE HUZITA-HATORI".

Axioma 1: pontos, A e B, há apenas uma dobra que passa pelos doiDados dois s pontos, Figura 3.6.

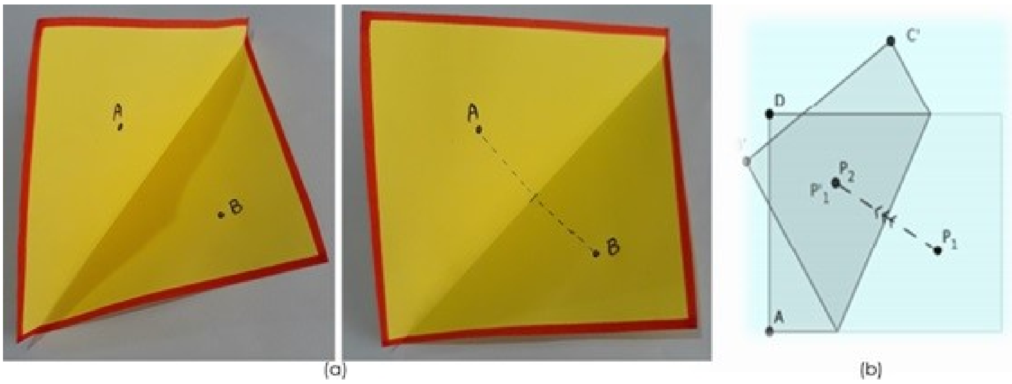
Figura 3.6: Huzita-Hatori: (a) vinco representando o Axioma 1; (b) dobra representando o Axioma 1



Fonte: (a) O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

Axioma 2: Dados dois pontos A e B existe uma única dobra que coloca A sobre B, Figura 3.7.

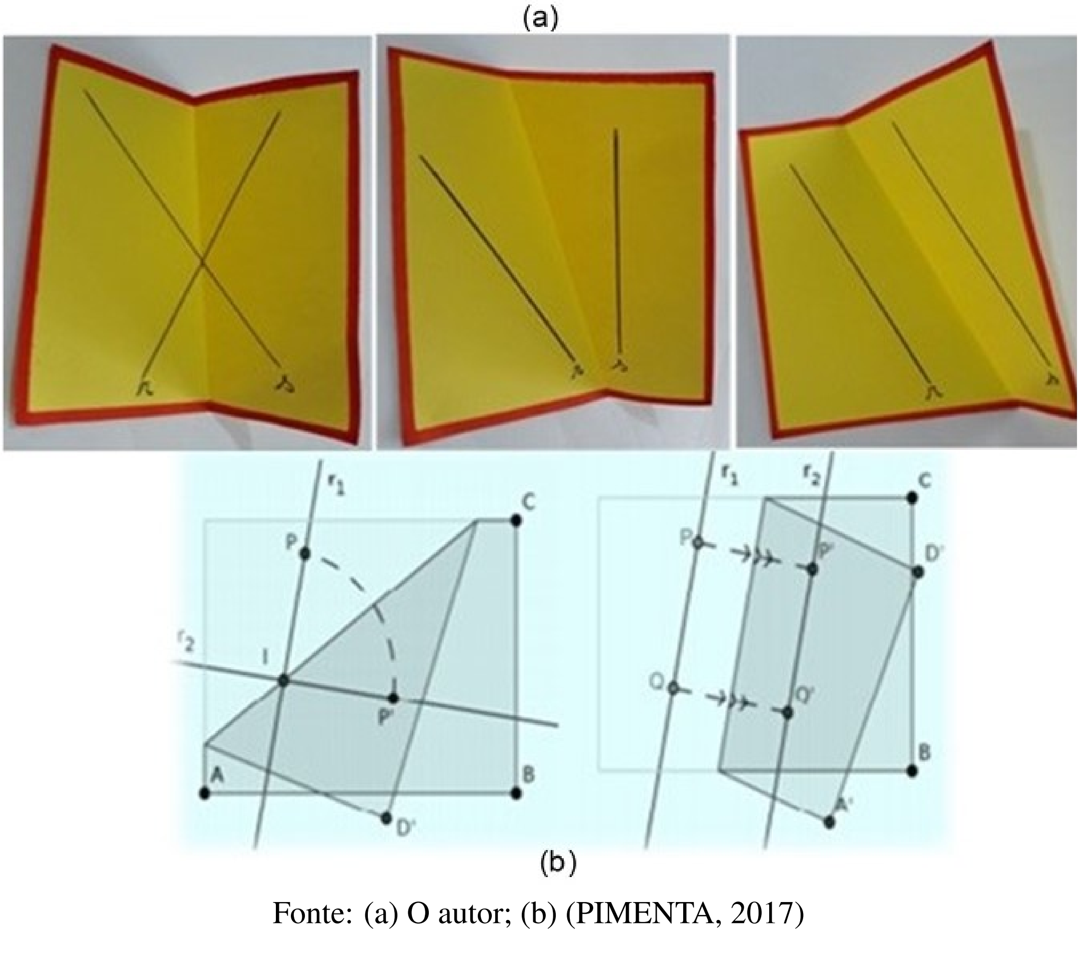
Figura 3.7: Huzita-Hatori: (a) vinco representando o Axioma 2; (b) dobra representando o Axioma 2



Fonte: (a) O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

Axioma 3: Dadas as retas *r* e *s*, existe uma só dobra que coloca *r* sobre *s*, Figura 3.8.

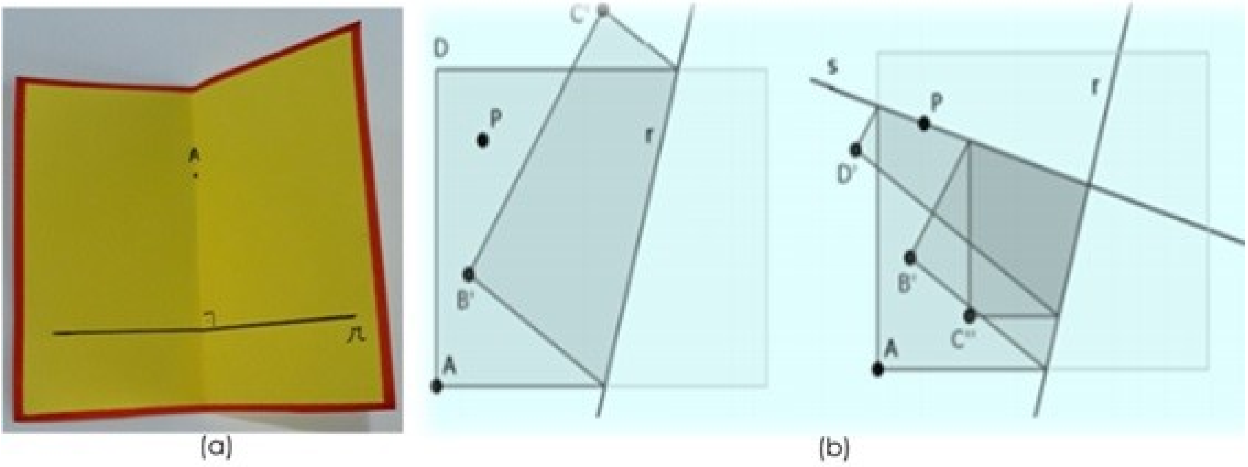
Figura 3.8: Huzita-Hatori: (a) vinco representando o Axioma 3; (b) dobra representando o Axioma 3



Fonte: (a) O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

Axioma 4: Dados um ponto A e uma reta *r*, existe uma única dobra, perpendicular à *r*, que passa por A, Figura 3.9.

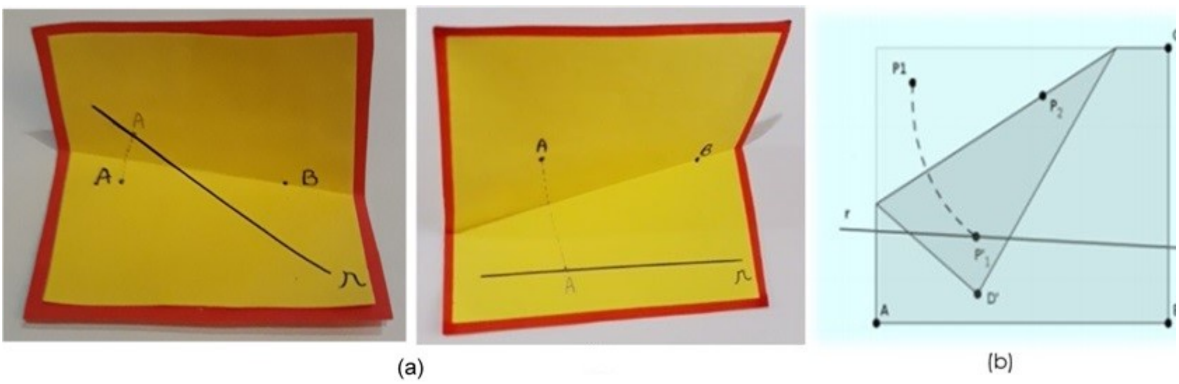
Figura 3.9: Huzita-Hatori: (a) vinco representando o Axioma 4; (b) dobra representando o Axioma 4



Fonte: (a) O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

Axioma 5: Dados dois pontos A e B e uma reta *r*, desde que a distância de A a B seja superior ou igual à distância de B à *r*, existe uma dobra que leva A até *r* e passa por B, Figura 3.10.

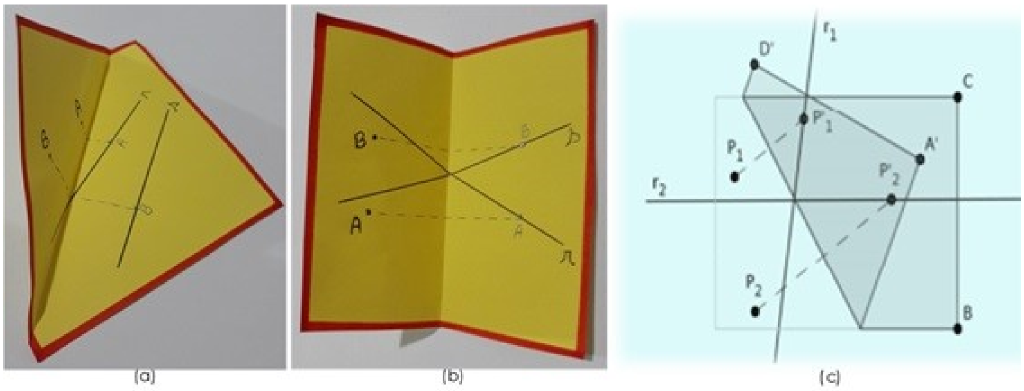
Figura 3.10: Huzita-Hatori: (a) vincos representando o Axioma 5; (b) dobra representando o Axioma 5



Fonte: (a) O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

Axioma 6: Dados dois pontos A e B e duas retas *r* e *s*, desde que *r* e *s* não sejam paralelas e a distância entre as retas não seja superior à distância entre os pontos, existe uma dobra que leva A até *r* e B até *s*, Figura 3.11.

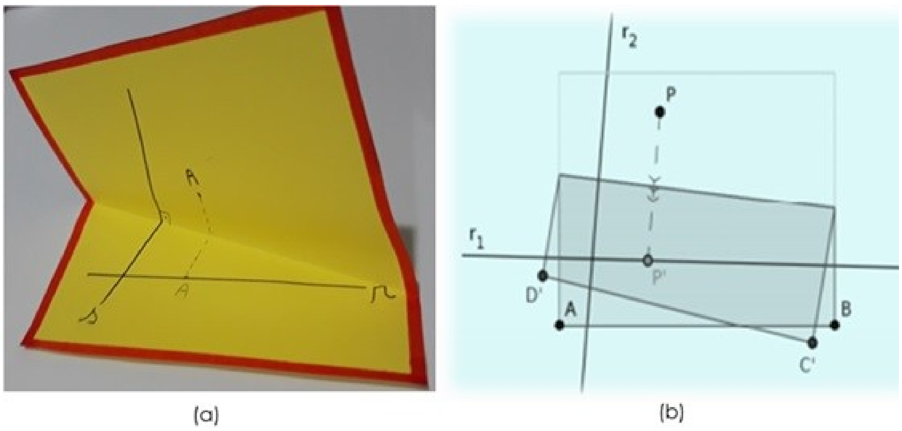
Figura 3.11: Huzita-Hatori: (a) vinco representando o Axioma 6; (b) dobra representando o Axioma 6



Fonte: O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

Axioma 7: Dados um ponto A e duas retas *r* e *s*, não paralelas, existe uma dobra, perpendicular à *s*, que leva A até *r*, Figura 3.12.

Figura 3.12: Huzita-Hatori: (a) vinco representando o Axioma 7; (b) dobra representando o Axioma 7

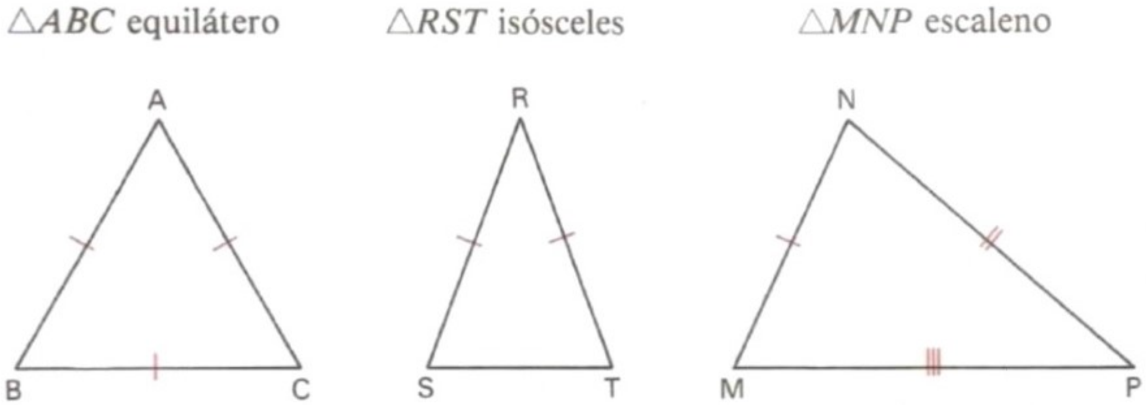


Fonte: (a) O autor; (b) (PIMENTA, 2017)

3.3 CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

De acordo com Caminha (NETO, 2013), temos que um triângulo ABC é denominado de **equilátero**, se $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$; **isósceles**, se ao menos dois dentre $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ forem iguais e **escaleno**, se $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$. Também de acordo com Dolce (DOLCE; POMPEO, 2013), temos que os triângulos são **equiláteros** se, e somente se, tem os três lados congruentes; **isósceles** se, e somente se, tem dois lados congruentes e, **escalenos** se, e somente se, dois quaisquer lados não são congruentes, Figura 3.13.

Figura 3.13: Classificação dos triângulos quanto aos lados



Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2013)

Utilizando um papel quadrado ou retangular, podemos construir facilmente triângulos com os lados de tamanhos diversos e os alunos podem compreender a classificação dos triângulos e, também construí-los com papel, régua e compasso.

Segundo Andrini (ANDRINI, 1989),os triângulos, de acordo com a medida de seus três lados, são chamados de:

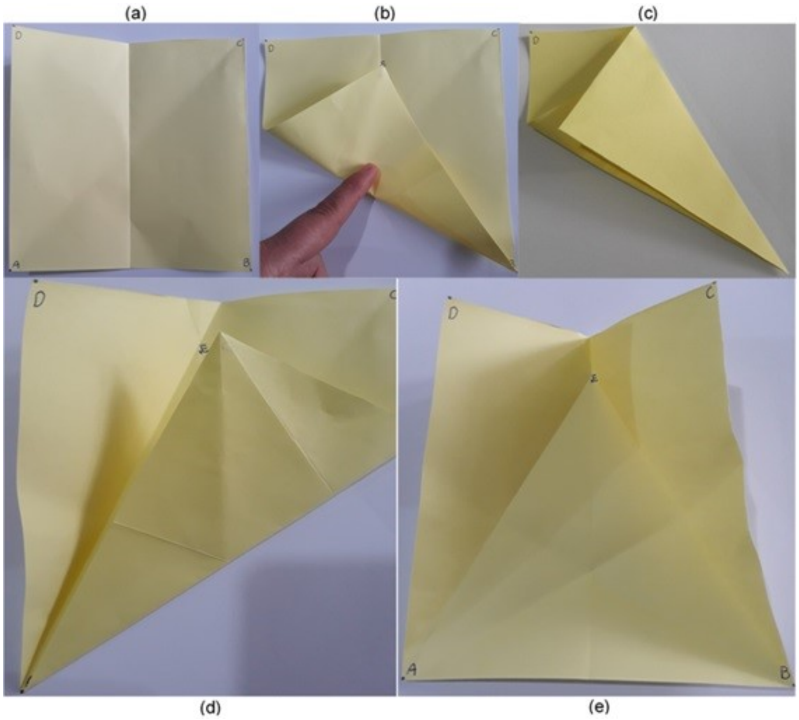
- **TRIÂNGULO EQUILÁTERO**: os três lados são congruentes e os três ângulos internos são congruentes, medindo 60º cada um.

  Construção

  Para construir um triângulo equilátero, basta dobrar a folha quadrada ABCD ao meio, formando um eixo central que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, Figura 3.14 (a). Em seguida, levar o ponto A até esse eixo obtendo o ponto E, cuidando para que seja formado o segmento $\overline{BE}$, Figura 3.14 (b). Nesse momento, se vincar o segmento $\overline{BE}$, notamos que ele é a bissetriz do ângulo formado em B, Figura 3.14 (c). Depois, voltando ao quadrado inicial, levamos o ponto B até o eixo central, repetindo o processo anterior, Figura 3.14 (d). O triângulo ABE é equilátero, ou seja, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ e $\overline{EB}$ são congruentes, Figura 3.14 (e).

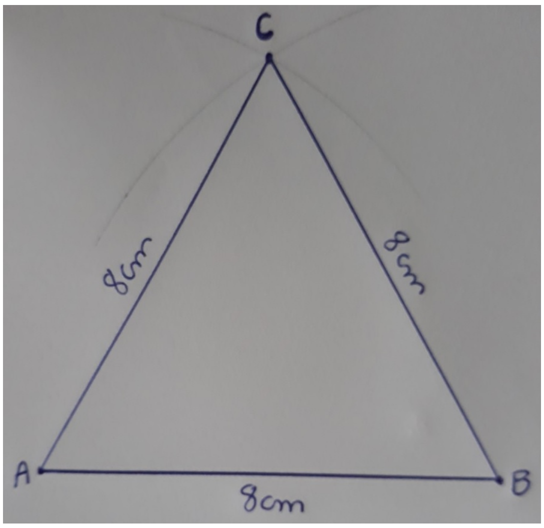
  E a Figura 3.15 ilustra um dos trabalhos realizados pelos alunos utilizando régua e compasso, construção de um triângulo equilátero.

Figura 3.14: Triângulo equilátero através de dobraduras



Fonte: O autor

Figura 3.15: Triângulo equilátero construído com régua e compasso



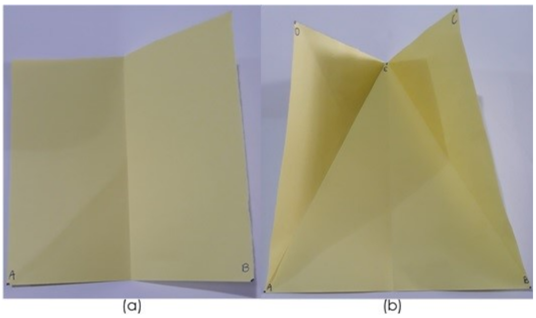
Fonte: O autor

- **TRIÂNGULO ISÓSCELES**: dois lados são congruentes e os dois ângulos da base são congruentes.

  Construção

Para construir um triângulo isósceles, basta dobrar a folha quadrada ABCD ao meio, formando um eixo central que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, Figura 3.16 (a). No exemplo dado, foram feitos segmentos $\overline{EB}$ e $\overline{EA}$ com o próprio ponto médio de $\overline{CD}$ (b). Porém a ideia foi mostrar que, desde que esteja no eixo central, qualquer lugar pode ser escolhido para ser o ponto E. Assim, o triângulo ABE é isósceles, e, em um único ponto desse eixo central, ele também é equilátero.

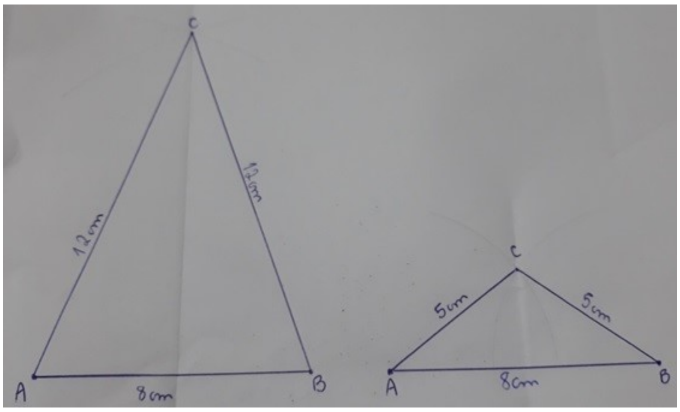
Figura 3.16: Triângulo isósceles através de dobraduras



Fonte: O autor

A Figura 3.17, apresenta um trabalho realizado com os alunos, a construção do triângulo isósceles com régua e compasso. O vinco da figura foi feito para comprovação da simetria do triângulo isósceles.

Figura 3.17: Triângulo isósceles construído com régua e compasso



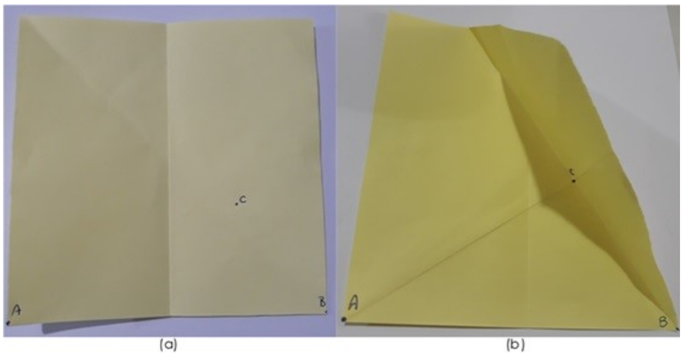
Fonte: O autor

- TRIÂNGULO ESCALENO: possui uma medida diferente para cada lado e para cada ângulo.

Construção

Para construir um triângulo escaleno, basta dobrar a folha quadrada ao meio, formando um eixo central que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$, Figura 3.18 (a). Então, colocando o ponto C em um lugar aleatório do quadrado, fora do eixo central, temos um triângulo escaleno (b). Serão formados triângulos isósceles, apenas se o ponto escolhido estiver nos arcos formados com centro em A ou B e raio $\overline{AB}$.

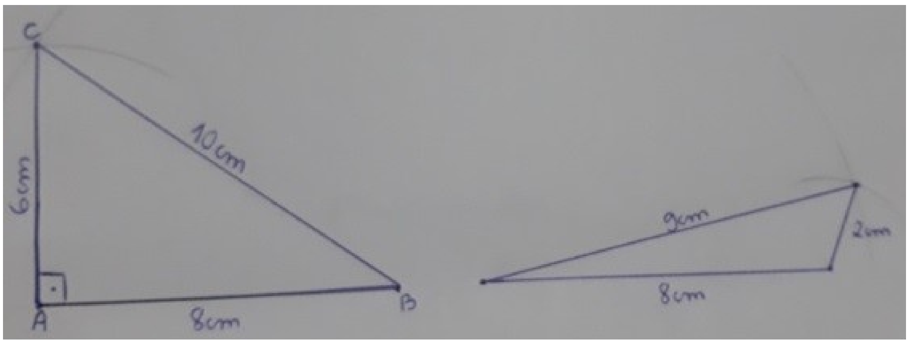
Figura 3.18: Triângulo escaleno através de dobraduras



Fonte: O autor

A Figura 3.19 representa o trabalho realizado com os alunos, a construção do triângulo escaleno com régua e compasso.

Figura 3.19: Triângulo escaleno com régua e compasso

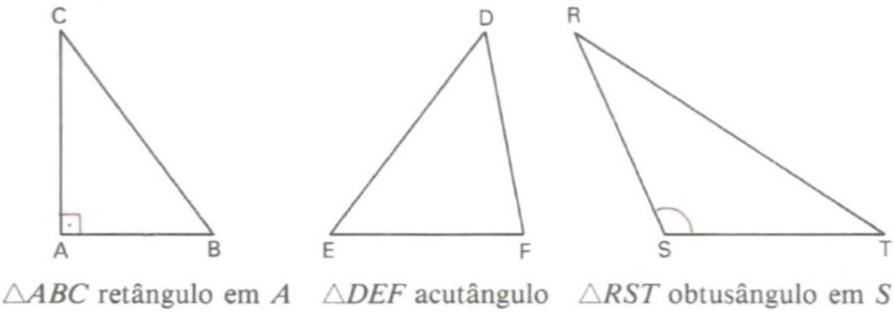


Fonte: O autor

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS QUANTO AOS ÂNGULOS

De acordo com as medidas dos ângulos internos dos triângulos, segundo Caminha (NETO, 2013) um triângulo é **acutângulo** se todos os seus ângulos internos forem agudos, **retângulo** se tiver um ângulo reto e **obtusângulo** se tiver um ângulo obtuso. Também, trazendo a definição segundo Dolce, os triângulos são classificados como **retângulos** se, e somente se, tem um ângulo reto; **acutângulo** se, e somente se, tem os três ângulos agudos e, **obtusângulo** se, e somente se, tem um ângulo obtuso, Figura 3.20.

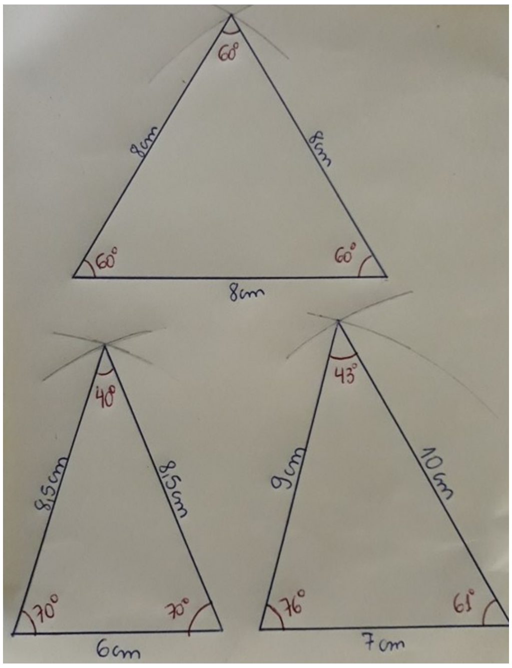
Figura 3.20: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos



Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2013)

- TRIÂNGULO ACUTÂNGULO: os três ângulos internos são agudos, ou seja, menores que 90º. É interessante ressaltar, através da construção dos triângulos e do uso do transferidor, que, obviamente, todo triângulo equilátero é acutângulo e que podem ser formados triângulos acutângulos isósceles e escalenos, Figura 3.21.

Figura 3.21: Triângulo acutângulo: trabalho realizado com alunos

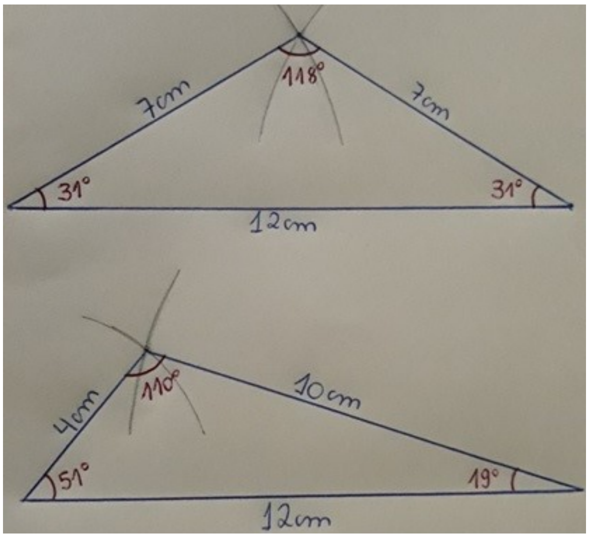


Fonte: O autor

- TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO: possui um ângulo interno obtuso, ou seja, maior que 90º.

  Na Figura 3.22, estão representados triângulos obtusângulos isósceles e escaleno.

Figura 3.22: Triângulo obtusângulo: trabalho realizado com alunos

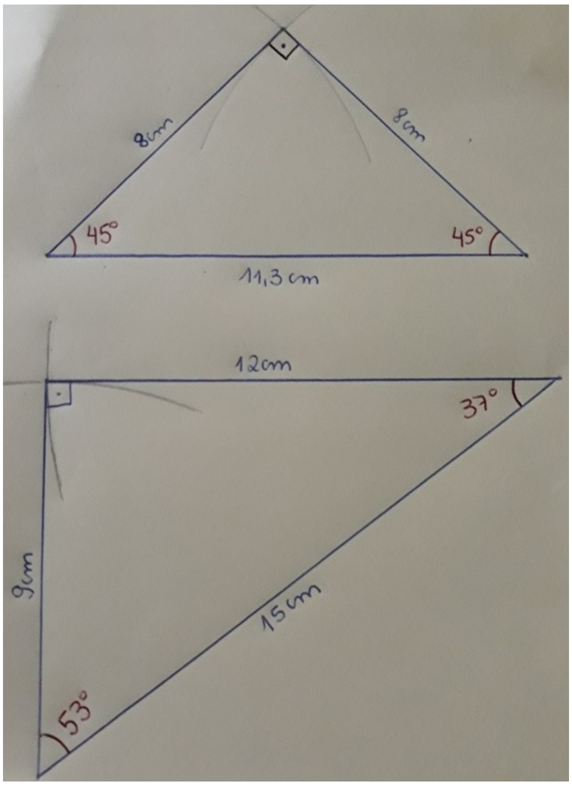


Fonte: O autor

- TRIÂNGULO RETÂNGULO: possui um ângulo igual a 90º.

  Na Figura 3.23, estão representados triângulos retângulos isósceles e escaleno.

Figura 3.23: Triângulo retângulo: trabalho realizado com alunos



Fonte: O autor

3.4 TRISSECÇÃO DE UM ÂNGULO

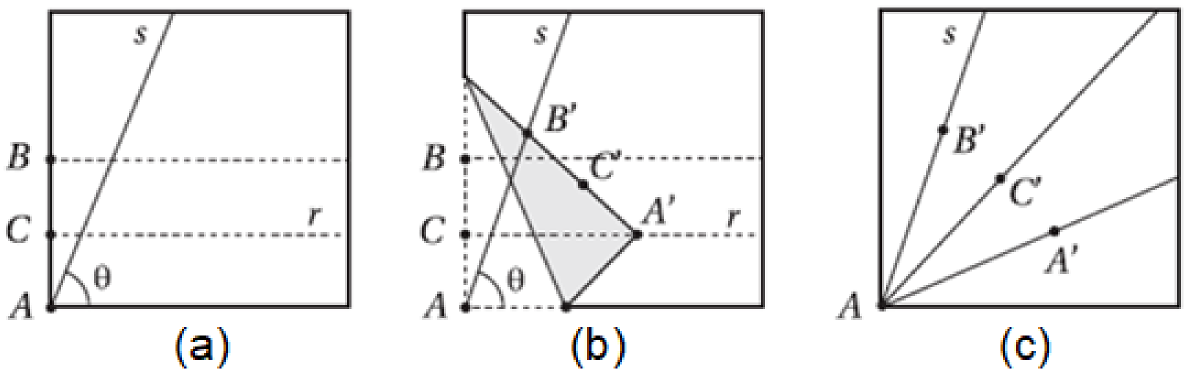
É um dos problemas clássicos da Matemática que não é possível ser resolvido apenas com régua e compasso. Segundo Guanabara (MEDEIROS; GUANABARA, 2017) esse tema foi estudado pelos gregos por muitos séculos. Muito tempo depois, com o uso de dobraduras, foi possível solucioná-lo exatamente.

> "Acreditamos que ele tenha surgido no contexto de problemas de construção de polígonos regulares, tendo em vista que a construção de um polígono de nove lados envolve a trissecção do ângulo de 60º e que há evidências na literatura que levam a supor que a construção de polígonos regulares foi um assunto bastante estudado pelos matemáticos da Grécia Antiga, talvez incentivados pela descoberta da construção do pentágono regular pelos Pitagóricos." (MEDEIROS; GUANABARA, 2017).

A trissecção de um ângulo usando dobraduras é uma técnica simples. Apesar de ter sido implícita no início do século XX, em 1936 por M. Beloch, passou a ser amplamente divulgada por Hisashi Abe por volta de 1980, conforme Shima (SHIMA, 2013).

Kumayama (KUMAYAMA, 2013) apresenta um passo a passo para a trissecção de um ângulo com dobraduras, Figura 3.24 (a), (b) e (c).

Figura 3.24: Trissecção de um ângulo: indicação dos vincos

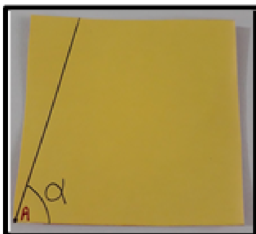
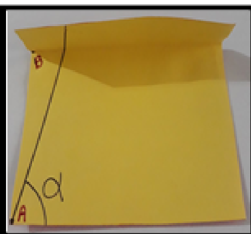
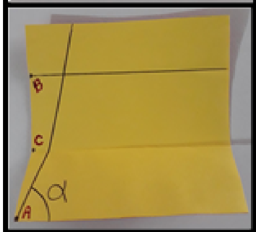
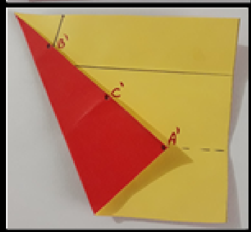
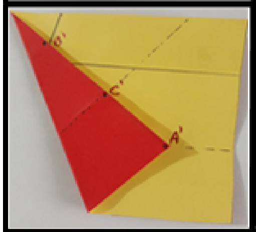
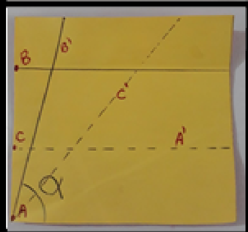
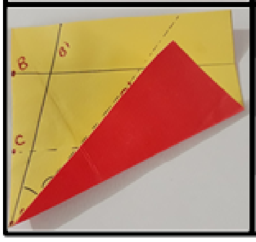
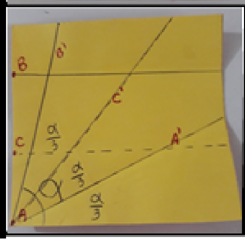


Fonte: (KUMAYAMA, 2013)

Detalhes do passo a passo:

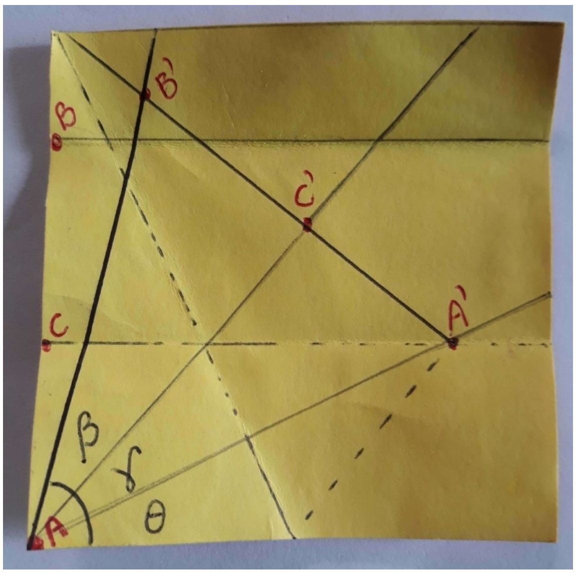
A Figura 3.25 apresenta os detalhes do passo a passo da divisão de um ângulo agudo em três em partes congruentes.

Figura 3.25: Passo a passo da trissecção de um ângulo

	1) Em um vértice do quadrado marque o ponto A, a partir dele trace uma reta que demarca o ângulo que será dividido em 3 ângulos congruentes.		2) Faça uma dobra horizontal em qualquer lugar, então marque o ponto B.
	3) Marque o ponto C, fazendo outra dobra horizontal no ponto médio de AB.		4) Dobre, levando o ponto A até a linha pontilhada que sai do ponto C e, levando o ponto B até a reta marcada para o ângulo (passo 1).
	5) Seguindo o vinco feito no passo 3, faça um segmento (representará um terço do ângulo).		6) Abra a dobradura e termine o pontilhado até o vértice A.
	7) Leve o lado inferior do quadrado até a linha pontilhada.		8) Tem-se assim, o ângulo dividido em 3 ângulos congruentes.

Fonte: O autor

Figura 3.26: Trissecção de um ângulo: destaque dos triângulos formados pelos vincos



Fonte: O autor

Demonstração:

A demonstração da trissecção de um ângulo é realizada utilizando os triângulos formados pelas dobras, Figura 3.26.

Para mostrar que $\alpha = \beta + \gamma + \theta$, onde $\beta = \gamma = \theta$, é trivial apresentar, pelo passo 7), da Figura 3.25 que $\gamma = \theta$. Então, verificamos que os triângulos $AB'C'$ é congruente a $AA'C'$, pois do passo 4) temos que $\overline{B'C'} = \overline{C'A'}$, já que $\overline{BC} = \overline{CA}$, onde C é o ponto médio de $\overline{AB}$. Do passo 5), temos que $\overline{AC'}$ é perpendicular a $\overline{B'C'}$. Então $\beta = \gamma$.

Logo, $\beta = \gamma = \theta$.

3.5 DUPLICAÇÃO DO CUBO

A duplicação do cubo também é conhecida como o Problema Deliano, devido a uma lenda ocorrida na ilha de Delos. "Conta Eratóstenes que, certa vez na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado" (LUCERO, 2006).

Para encontrar a solução desse problema, consideramos um cubo de aresta b e desejamos obter outro cubo de aresta a que tenha o dobro do volume do primeiro cubo, ou seja:

$$V_a = 2V_b;$$
$$a^3 = 2b^3;$$
$$\frac{a^3}{b^3} = 2;$$
$$\frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}.$$

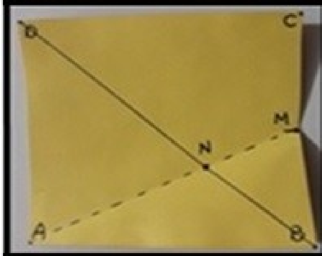
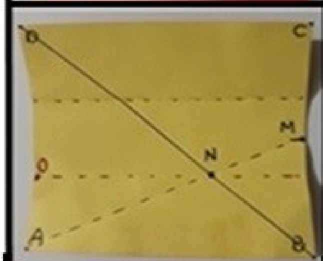
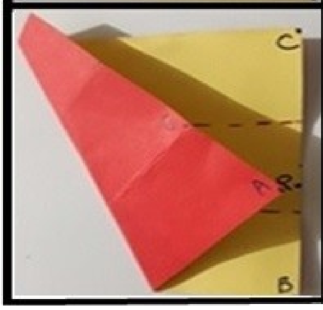
Por muitos séculos buscou-se a solução para esse problema. Segundo Lucero (LUCERO, 2006), somente no século XIX foi demonstrado que é impossível chegar ao resultado utilizando a régua e o compasso como ferramentas.

Porém, com o uso de dobraduras em uma folha de papel é possível encontrar a solução desse problema.

Procedimento:

Observe a sequência das dobras, Figura 3.27, para obtenção de dois segmentos que representam as arestas de cubos onde o volume de um é o dobro do outro.

Figura 3.27: Passos da duplicação do volume do cubo com origami

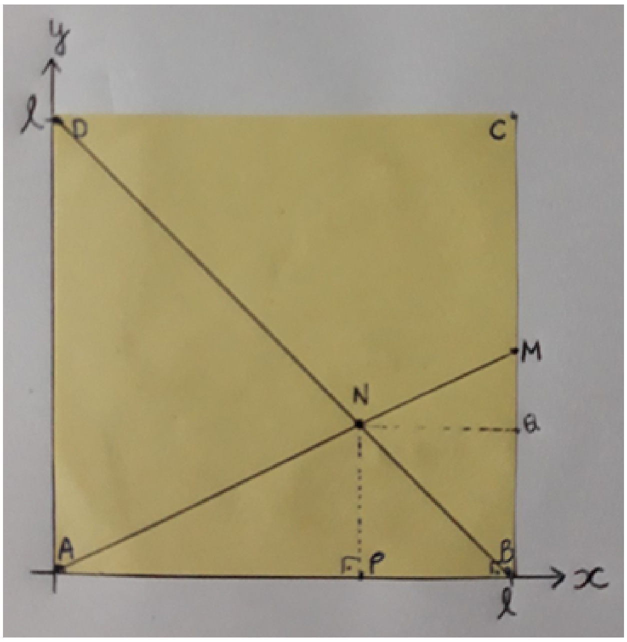
	<u>1º Passo:</u> Marcar com M, o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. <u>2º Passo:</u> Faça um vinco, dobrando o segmento $\overline{AM}$.
	<u>3º Passo:</u> Vinque a diagonal $\overline{DB}$ e marque o ponto N na intersecção entre $\overline{DB}$ e $\overline{AM}$.
	<u>4ºPasso:</u> Leve o segmento $\overline{CD}$, paralelamente a $\overline{AB}$, até o ponto N, fazendo um vinco nessa dobra.
	<u>5º Passo:</u> Faça um vinco também no ponto N, trazendo o segmento $\overline{AB}$ até o vinco do passo anterior.
	<u>6 º Passo:</u> Então marque o ponto O acima de A. Nesse momento tem-se o lado do quadrado dividido em três partes congruentes
	<u>7º Passo:</u> Leve o ponto O até o vinco do passo 4, de modo que o ponto A tangencie o segmento $\overline{BC}$, marcando então o ponto R. Assim, $\overline{CR}$ e $\overline{BR}$ são os valores das arestas dos cubos do problema.

Fonte: O autor

Demonstração:

A duplicação do cubo, iniciando com a divisão do lado do quadrado em 3 partes iguais, Figura 3.28.

Figura 3.28: Demonstração da terça parte do lado do quadrado



Fonte: O autor

Sendo $\overline{PB} = \overline{QB} = s$, observamos os pontos $N = (\ell - s, s)$ e $M = \left(\ell, \dfrac{\ell}{2}\right)$ e, por semelhança dos triângulos ANP e AMB, temos:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{NP}}{\overline{MB}};$$

$$\frac{\ell - s}{\ell} = \frac{s}{\frac{\ell}{2}};$$

$$\frac{\ell - s}{\ell} = \frac{2s}{\ell};$$

$$\ell = 2s + s;$$

$$\ell = 3s.$$

Logo,

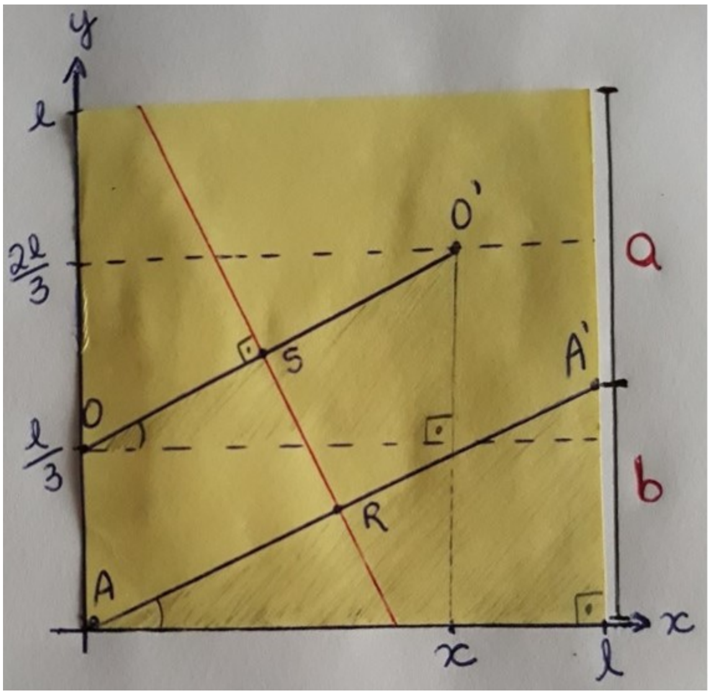
$$s = \frac{\ell}{3}.$$

Ou seja, demonstramos assim que s representa $\dfrac{1}{3}$ do lado do quadrado ABCD. E, pelo 4º e 5º passos, vemos que, os outros dois vincos paralelos a $\overline{AB}$, representam $\dfrac{1}{3}$ do lado do quadrado.

Observe agora, que o último passo realmente determina que os dois segmentos apresentados do lado direito da dobradura, representam as arestas de dois cubos de arestas a e b, demonstrando que $\dfrac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

A Figura 3.29 apresenta os pares ordenados dos pontos $A = (0,0)$; $A' = (\ell, b)$; $O = \left(0, \dfrac{\ell}{3}\right)$ e $O' = \left(x, \dfrac{2\ell}{3}\right)$ além de se poder observar que $a = \ell - b$.

Figura 3.29: Problema Deliano: elementos obtidos pela dobradura



Fonte: O autor

Como $\overline{AA'}$ e $\overline{OO'}$ são paralelos, por semelhança de triângulos, temos que $\dfrac{b}{\ell} = \dfrac{\dfrac{2\ell}{3} - \dfrac{\ell}{3}}{x}$, assim $\dfrac{b}{\ell} = \dfrac{\dfrac{\ell}{3}}{x}$, então $x = \dfrac{\ell^2}{3b}$. (I)

Temos ainda os pontos R, que é o ponto médio de $\overline{AA'}$ onde $R = \left(\dfrac{\ell + 0}{2}, \dfrac{b + 0}{2}\right)$, logo $R = \left(\dfrac{\ell}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ e S que é o ponto médio de $\overline{OO'}$, assim $S = \left(\dfrac{x+0}{2}, \dfrac{\dfrac{2\ell}{3} + \dfrac{\ell}{3}}{2}\right)$, logo $S = \left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{\ell}{2}\right)$.

O coeficiente angular das retas pode ser dado por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, onde m é a tangente do ângulo dado.

Na reta que passa por R e S, temos $m_1 = \dfrac{\dfrac{\ell}{2} - \dfrac{b}{2}}{\dfrac{x}{2} - \dfrac{\ell}{2}}$ e assim, $m_1 = \dfrac{\ell - b}{x - \ell}$.

Na reta que passa por A e A', o coeficiente angular é $m_2 = \dfrac{b-0}{\ell-0}$ e assim, $m_2 = \dfrac{b}{\ell}$.

Pela sobreposição de A em A' e O em O', sabemos que os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{RS}$ são perpendiculares, então $m_1 \times m_2 = -1$. Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\ell-b}{x-\ell} \times \frac{b}{\ell} &= -1;\\
\frac{\ell b-b^2}{x\ell-\ell^2} &= -1;\\
\ell b-b^2 &= -x\ell+\ell^2;\\
\ell^2-x\ell-b\ell+b^2 &= 0. \qquad (II)
\end{aligned}$$

Substituindo (I) em (II), temos que:

$$\begin{aligned}
\ell^2-\frac{\ell^2}{3b}\ell-b\ell+b^2 &= 0;\\
3\ell^2b-\ell^3-3b^2\ell+3b^3 &= 0.
\end{aligned}$$

E, reorganizando, obtemos:

$$2b^3+b^3-3b^2\ell+3\ell^2b-\ell^3 = 0;$$

$$\begin{aligned}
2b^3+(b-\ell)^3 &= 0;\\
2b^3 &= (\ell-b)^3.
\end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{(\ell-b)^3}{b^3};\\
\sqrt[3]{2} &= \frac{\ell-b}{b}.
\end{aligned}$$

O que equivale a $\dfrac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$, demonstrando o Problema Deliano através de dobraduras.

3.6 MÉTODO DE FUJIMOTO PARA APROXIMAÇÕES DE $\frac{1}{N}$ ATRAVÉS DE DOBRADURAS

Na década de 1970, o japonês Shuzo Fujimoto desenvolveu um método de dobradura para localizar em uma tira de papel a porção referente a $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{7}$ ou ainda em $\dfrac{1}{n}$. No mesmo período, independente de Fujimoto, James Brunton desenvolveu a sua técnica, porém esse procedimento ficou conhecido como "técnica de aproximação de Fujimoto" (VEENSTRA, 2009).

O Método de Aproximação de Fujimoto consiste em encontrar $\frac{1}{n}$ em uma tira de papel através de dobraduras, onde os vincos que definem as partes da tira de papel representam, a cada processo, uma maior exatidão da parte desejada do papel.

3.6.1 MÉTODO DE FUJIMOTO PARA N ÍMPAR

De maneira geral, para a técnica de aproximação de Fujimoto para qualquer n ímpar, primeiro colocamos uma marca de vinco na tira de papel em uma aproximação da parte desejada, definimos a localização do primeiro vinco na provável posição da n-ésima parte, que produz certo erro de aproximação. A partir desse primeiro vinco é que a sequência de dobraduras acontece, buscando encontrar o tamanho mais próximo para essas partes. A cada repetição do processo, o erro vai sendo divido pela metade. Então podemos repetir o processo até que não haja diferença perceptível nas marcas de vinco sucessivas para $\frac{1}{n}$, e assim, $\frac{1}{n}$ é encontrado com a maior precisão possível.

Exemplo: Encontrar a quinta parte de uma tira de papel, ou seja, $\frac{1}{n}$ com $n = 5$.

Usaremos uma tira de papel para facilitar a parte gráfica da demonstração. Assim, essa tira representa o inteiro que possui 1 como unidade de comprimento, além disso utilizaremos a letra e para representar o suposto erro que cometemos ao dividir aleatoriamente uma tira de papel de 5 partes congruentes.

Passos do método:

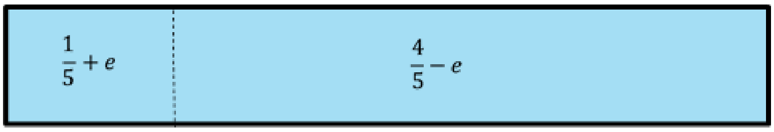
1. Tomamos uma tira inteira de papel, Figura 3.30;

Figura 3.30: Tira de papel representando uma unidade de comprimento

Fonte: O autor

2. Encontramos a suposta quinta parte desse inteiro, fazendo uma dobra, Figura 3.31. A essa parte chamamos de $\frac{1}{5} + e$, onde e representa o erro cometido pela suposta quinta parte; ao tirar essa parte do inteiro temos que $1 - \left(\frac{1}{5} + e\right) = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} - e = \frac{4}{5} - e$;

Figura 3.31: Separação da tira em $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$, aproximadamente

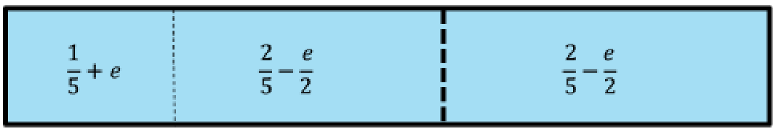


Fonte: O autor

3. Fazemos um novo vinco, dobrando $\frac{4}{5}$ do papel ao meio, Figura 3.32, para encontrar $\frac{2}{5}$ dessa tira de papel (sempre levando em consideração o erro cometido e). Dessa forma, temos:

$$\frac{\left(\frac{4}{5}-e\right)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}-e\right)=\frac{2}{5}-\frac{e}{2};$$

Figura 3.32: Dobrando à direita, $\frac{4}{5}$ ao meio

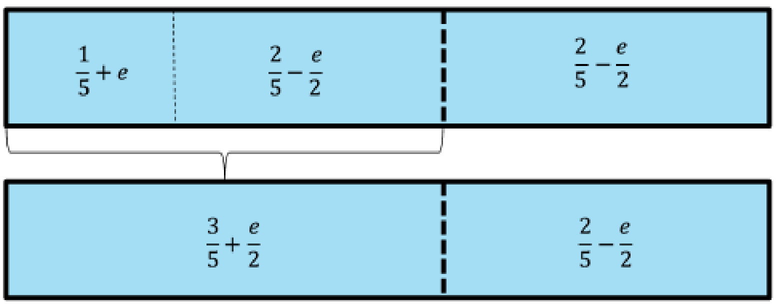


Fonte: O autor

4. Então, olhando essa tira sobre nova perspectiva temos $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$, Figura 3.33. Ou seja:

$$\frac{1}{5}+e+\frac{2}{5}-\frac{e}{2}=\frac{3}{5}+\frac{e}{2}.$$

Figura 3.33: Unindo o $\frac{1}{5}$ com um dos $\frac{2}{5}$



Fonte: O autor

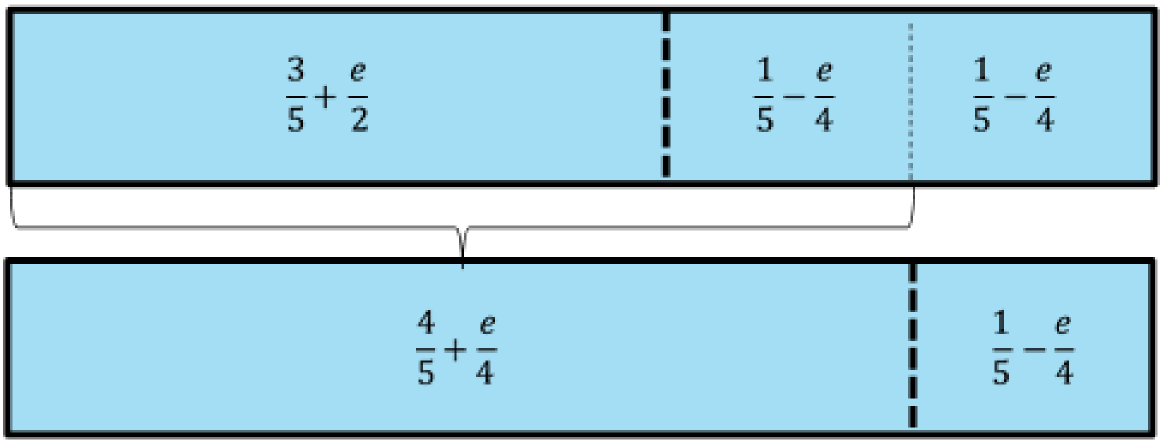
5. Fazemos outro vinco, dobrando a parte que representa $\frac{2}{5}$ pela metade, isso nos dará um novo pedaço de papel representando a quinta parte que é almejada:

$$\frac{\left(\frac{2}{5}-\frac{e}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{5}-\frac{e}{4}.$$

Logo, tirando essa quinta parte do inteiro, temos, Figura 3.34:

$$1-\left(\frac{1}{5}-\frac{e}{4}\right)=\frac{5}{5}-\frac{1}{5}+\frac{e}{4}=\frac{4}{5}+\frac{e}{4}.$$

Figura 3.34: Unindo $\frac{3}{5}$ ao $\frac{1}{5}$



Fonte: O autor

6. Ao repetirmos, agora no lado esquerdo da tira todos os passos anteriores, encontramos a quinta parte dessa tira de papel com uma melhor aproximação. Temos:

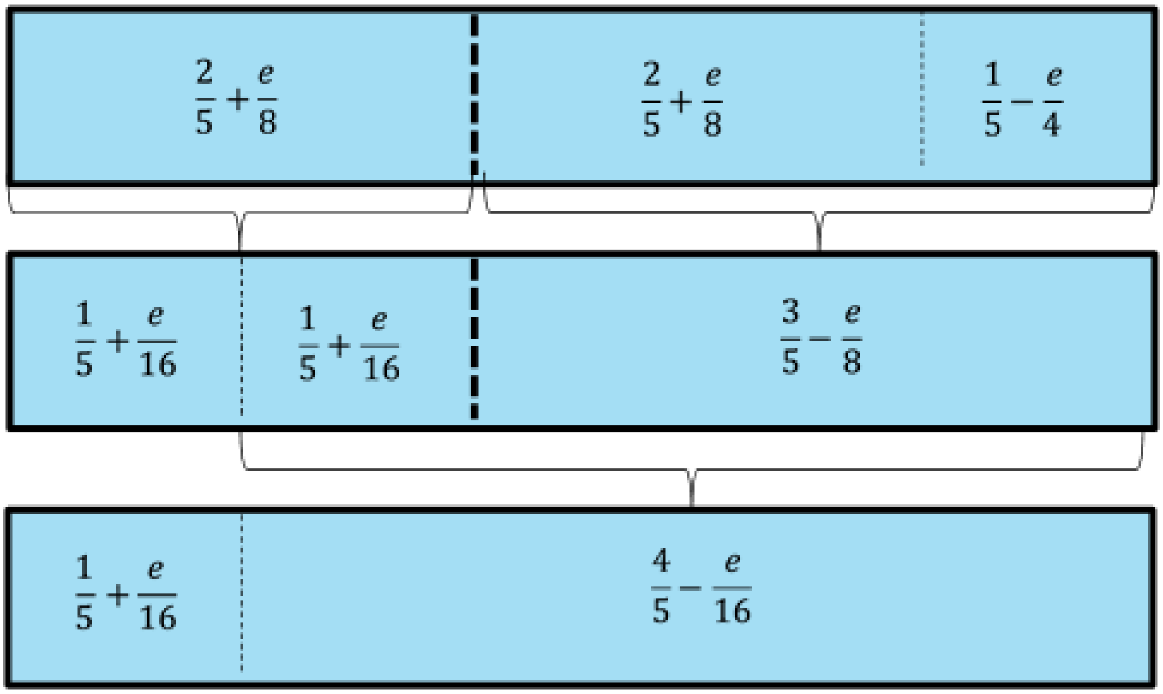
$$\frac{\left(\frac{4}{5}+\frac{e}{4}\right)}{2}=\frac{2}{5}+\frac{e}{8}.$$

E, essa parte dobrada pela metade representa:

$$\frac{\left(\frac{2}{5}+\frac{e}{8}\right)}{2}=\frac{1}{5}+\frac{e}{16}.$$

Ou seja, o fator de erro já está na casa 16, Figura 3.35.

Figura 3.35: Repetindo os processos até $\frac{1}{5}$ estar no lado esquerdo



Fonte: O autor

Assim, usando as dobraduras, pelo Método de Aproximação de Fujimoto, encontramos a quinta parte da tira de papel, cada vez mais próximo ao valor real.

3.6.2 BASE BINÁRIA E AS APROXIMAÇÕES DE FUJIMOTO

As divisões feitas através das aproximações de Fujimoto podem ser escritas na base 2 (base binária), seguindo a sequência das dobras necessárias para se obter um erro cada vez menor. Ao observar a sequência das dobras usadas nos diagramas, vemos que elas seguem o padrão descrito a seguir:

- a primeira dobra é aleatória, aquela que é feita supondo ser a quinta parte da tira de papel. Deixando essa parte do lado esquerdo, conforme Figura 3.31, temos sempre a mesma sequência;
- nesse momento, a fração com numerador par está à direita. Quando é feita a segunda dobra (à direita), Figura 3.32, a fração com numerador par ainda está à direita;
- é feita então, a próxima dobra, no lado direito, e a fração com numerador par está à esquerda, Figura 3.34;

- agora, serão feitas duas, dobras do lado esquerdo, porque as frações de numerador par estão à esquerda, observando a Figura 3.35;
- a partir desse momento as frações apresentadas são idênticas ao começo, assim a sequência inteira é repetida, quantas vezes for necessário até se obter a quinta parte desejada.

Temos então, a Tabela 3.1, mostrando a sequência de dobras e as frações surgidas.

Tabela 3.1: Sequência de dobras e frações

Esquerda da dobra	**Direita da dobra**	**Direção da próxima dobra**
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\leftarrow$ Esquerda
$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\leftarrow$ Esquerda
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\rightarrow$ Direita
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\rightarrow$ Direita
$\frac{1}{5}$		

Fonte: O autor

Além da representação pela tabela, a sequência (direita-direita-esquerda-esquerda) é observada na formação de frações de denominador de base 2 (que representa a exponencial que o erro vai diminuindo a cada novo processo de dobras nas tiras de papel), já o numerador é igual a **0** ou **1**, representando o sistema binário.

O $\dfrac{1}{5}$ real da tira de papel será a soma dos erros, cada vez menores, no exponencial de base 2, alcançando a cada novo processo de dobras.

Assim:

$$\frac{1}{5} = \frac{i_1}{2^1} + \frac{i_2}{2^2} + \frac{i_3}{2^3} + \frac{i_4}{2^4} + \frac{i_5}{2^5} + \frac{i_6}{2^6} + \ldots$$

sendo i_j = 0 ou 1 e representa a posição dos elementos.

Detalhando temos:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{2} \rightarrow i = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + \ldots$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{4} \rightarrow i = 0 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \ldots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{8}{40} > \frac{1}{8} = \frac{5}{40} \rightarrow i = 1 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \ldots$$

$$\frac{1}{5} = \frac{16}{80} > \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{10+5}{80} = \frac{15}{80} \rightarrow i = 1 \rightarrow \frac{1}{5} = 0 + 0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$\frac{1}{5}=\frac{32}{160}<\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{5+20+10}{160}=\frac{35}{160}\rightarrow i=0\rightarrow\frac{1}{5}=0+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+0+...$$

$$\frac{1}{5}=\frac{64}{320}<\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{10+40+20}{320}=\frac{70}{320}\rightarrow i=0\rightarrow\frac{1}{5}=0+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+0+0+...$$

$$\frac{1}{5}=\frac{128}{640}>\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}=\frac{80+40+5}{640}=\frac{125}{640}\rightarrow i=1\rightarrow\frac{1}{5}=0+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+0+0+\frac{1}{128}+...$$

$$\frac{1}{5}=\frac{256}{1280}>\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=\frac{160+80+10+5}{1280}=\frac{255}{1280}\rightarrow i=1\rightarrow\frac{1}{5}=0+0+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+0+0+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+...$$

Nesse momento começou a repetir o processo, ou seja a base dois aparece na ordem $(\overline{0011})_2$, que representa exatamente a indicação das dobras direita-direita-esquerda-esquerda.

Além da divisão da tira de papel em 5 partes congruentes, a aproximação de Fujimoto serve para qualquer $\frac{1}{n}$, com n ímpar. Denotamos o n como ímpar, porque a divisão em n partes pares iniciamos dobrando a folha ao meio e a partir daí ou divide-a ao meio novamente ou é um número ímpar.

Outro exemplo do método da Aproximação de Fujimoto, para $n=3$, onde:

$$\frac{1}{3}=\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{2^2}+\frac{i_3}{2^3}+\frac{i_4}{2^4}+...\rightarrow\frac{1}{3}=\frac{i_1}{2}+\frac{i_2}{4}+\frac{i_3}{8}+\frac{i_4}{16}+...$$

Assim, temos que:

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\rightarrow i_1=0\rightarrow\frac{1}{3}=0+...$$

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{4}\rightarrow i_2=1\rightarrow\frac{1}{3}=0+\frac{1}{4}...$$

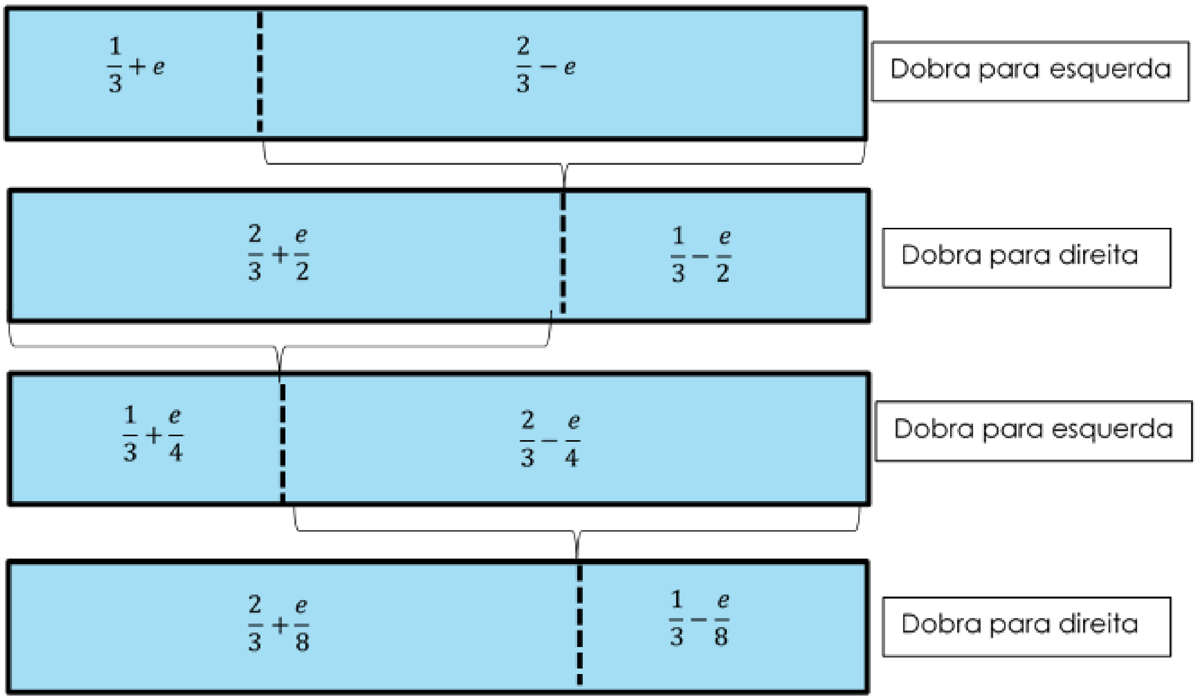
$$\frac{1}{3}=\frac{8}{24}<\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{6+3}{24}=\frac{9}{24}\rightarrow i_3=0\rightarrow\frac{1}{3}=0+\frac{1}{4}+0...$$

$$\frac{1}{3}=\frac{16}{48}>\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{12+3}{48}=\frac{15}{48}\rightarrow i_4=1\rightarrow\frac{1}{3}=0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{16}+...$$

$$\frac{1}{3}=\frac{32}{96}<\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{24+6+3}{96}=\frac{33}{96}\rightarrow i_5=0\rightarrow\frac{1}{3}=0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{16}+0+...$$

Observamos que a sequência binária é $(\overline{01})_2$, ou seja, uma dobra para a esquerda e uma para a direita, representada na Figura 3.36.

Figura 3.36: Divisão em $\frac{1}{n}$ para $n = 3$



Fonte: O autor

E assim, podem ser feitas divisões em outras n quantidades, usando o método da Aproximação de Fujimoto para encontrar a fração desejada sempre mais próxima do valor real.

3.6.3 OS NÚMEROS BINÁRIOS

Como podemos observar, as aproximações por Fujimoto empregam a base binária, usando apenas 2 algarismos: 0 e 1. Essa é a base do sistema binário que se baseia na Álgebra Boole, do matemático inglês George Boole e permite fazer operações lógicas e aritméticas usando apenas dois dígitos, 1 ou 0.

Segundo o Portal Educação (PORTAL EDUCAÇÃO,), o sistema numérico binário usado atualmente foi documentado por Gottfried Leibniz no século XVIII em um artigo chamado *"Explication de l'Arithmétique Binaire"*. O sistema de Leibniz utilizou 0 e 1, tal como o sistema numérico binário corrente nos dias de hoje.

Para transformar um número binário para um número escrito no sistema de numeração decimal basta multiplicar cada dígito (0 e 1) por 2 (base binária), onde cada número 2 tem um expoente, colocados em ordem crescente da direita para a esquerda.

Exemplos:

a) representando o número binário $(10100)_2$ na base decimal:

$(10100)_2 = \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} * 2^1 + \mathbf{0} \times 2^0 =$

$\mathbf{1} \times 16 + \mathbf{0} \times 8 + \mathbf{1} \times 4 + \mathbf{0} \times 2 + \mathbf{0} \times 1 =$

$16 + 0 + 4 + 0 + 0 = \mathbf{20}$.

E, fazendo o caminho inverso, para transformar um número do sistema de numeração decimal para o sistema binário, devemos fazer divisões sucessivas por 2 (base binária) do número escolhido e seus quocientes até obter quociente 1. Novamente, o número binário é representado pelos números 1 e 0, também da direita para esquerda, ou, de baixo para cima, a partir do último quociente (1), Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Transformando o número decimal 20 em binário

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
20	2	10	**0**
10	2	5	**0**
5	2	2	**1**
2	2	**1**	**0**

Fonte: O autor

Logo, $20 = (10100)_2$.

b) representando o número binário $(1011)_2$ na base decimal:

$(1011)_2 = \mathbf{1} \times 2^3 + \mathbf{0} \times 2^2 + \mathbf{1} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0 =$

$\mathbf{1} \times 8 + \mathbf{0} \times 4 + \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{1} \times 1 =$

$8 + 0 + 2 + 1 = \mathbf{11}$

O caminho inverso, é feito da mesma maneira, Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Transformando o número decimal 11 em binário

Dividendo	Divisor	Quociente	Resto
11	2	5	**1**
5	2	2	**1**
2	2	**1**	**0**

Fonte: O autor

Logo, $11 = (1011)_2$.

Os métodos de representação numérica foram surgindo no decorrer da história, assim além do sistema decimal e binário citados, existem outros que ainda hoje são usados como o duodecimal, sistema de base 12, em contagem por dúzias e por grosa (dúzia de dúzias). Para se contar o tempo, horas, minutos e segundos e os ângulos, é usado também, o sistema de base 60, chamado sexagesimal. O matemático Georges Ifrah coloca que uma das possíveis razões que os sumérios tiveram para usar a base 60 é união de hábitos de contar por dúzias e contar por dezenas, onde o mínimo múltiplo comum entre essas bases é 60.

Portanto, apesar da técnica de aproximação de Fujimoto remeter ao estudo do sistema binário de numeração, vemos que existem outros sistemas de numeração e suas importâncias.

3.7 NÚMERO DE OURO E ORIGAMI

Os números são agrupados em conjuntos, de acordo com suas características. Entre esses conjuntos numéricos, existe os números irracionais que têm em comum, o fato de que não podem ser escritos como razão de dois números inteiros: $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$. Geralmente, nos livros didáticos, o exemplo dado para o conjunto numérico dos irracionais é o π que é a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Além dele, o número de ouro também, devido a sua vasta presença na natureza, na arquitetura, vem sendo apresentado como exemplo de número irracional.

O número de ouro pertence conjunto dos números metálicos, ou seja, existe uma família de números que seguem as características que serão apresentadas a seguir.

3.7.1 NÚMEROS METÁLICOS

Em 1994, a professora argentina da Universidade de Buenos Aires, Dra. Vera Martha Winitzky de Spinadel, nascida em 1929, definiu os números metálicos como sendo o conjunto dos números que resultam das raízes positivas de equações da forma $x^2 - px - q = 0$, onde $p,\ q \in \mathbb{N}$ (VINAGRE, 2009).

Ao resolver a equação pela fórmula de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x^2 - px - q &= 0; \\ \Delta &= (-p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-q); \\ \Delta &= p^2 + 4q. \end{aligned}$$

Logo, a equação possui duas raízes reais e além disso, como $p^2+4q > p^2$, então $x = \dfrac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é a raiz negativa e $x = \dfrac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ é a raiz positiva. Ou seja, podemos afirmar que a equação apresentada possui uma "única" raiz positiva e essa origina um "único" número metálico. Assim, os números metálicos possuem a forma dada por:

$$\left\{\theta_{p,q} = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2};\ p,\ q \in \mathbb{N}\right\}.$$

Colocando valores específicos aos coeficientes p e q, encontramos os números metálicos. Entre os números metálicos, os mais conhecidos são o de ouro, prata e bronze.

É possível observar que os números metálicos de ouro, prata e bronze são encontrados quando se fixa o valor de $q = 1$ e substitui em p os valores 1, 2 e 3, respectivamente.

- Número de Ouro: $p = 1$ e $q = 1$

$$\theta_{1,1} = \frac{1+\sqrt{1^2+4\cdot 1}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803399...$$

- Número de Prata: $p = 2$ e $q = 1$

$$\theta_{2,1} = \frac{2+\sqrt{2^2+4\cdot 1}}{2} = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2} = 2,41421356...$$

- Número de Bronze: $p = 3$ e $q = 1$

$$\theta_{3,1} = \frac{3+\sqrt{3^2+4\cdot 1}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3,30277564...$$

Os valores dos números metálicos cobre, níquel e platina são encontrados, substituindo $p = 1$ e $q = 2$; $p = 1$ e $q = 3$ e $p = 2$ e $q = 2$, respectivamente na equação geral dada. A Figura 3.37 mostra uma tabela onde é possível verificar os valores desses números.

Figura 3.37: Números metálicos obtidos através da equação $\frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$

p	q	Símbolo	Nome Número	Valor exato	Valor aproximado (com 8 c.d.)
1	1	$\phi = \sigma_{1,1}$	Número de ouro	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,61803399
2	1	$\sigma_{Ag} = \sigma_{2,1}$	Número de prata	$1+\sqrt{2}$	2,41421356
3	1	$\sigma_{Br} = \sigma_{3,1}$	Número de bronze	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,30277564
1	2	$\sigma_{Cu} = \sigma_{1,2}$	Número de cobre	2	2
1	3	$\sigma_{Ni} = \sigma_{1,3}$	Número de níquel	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	2,30277564
2	2	$\sigma_{Pt} = \sigma_{2,2}$	Número de platina	$1+\sqrt{3}$	2,73205081

Fonte: (VINAGRE, 2009)

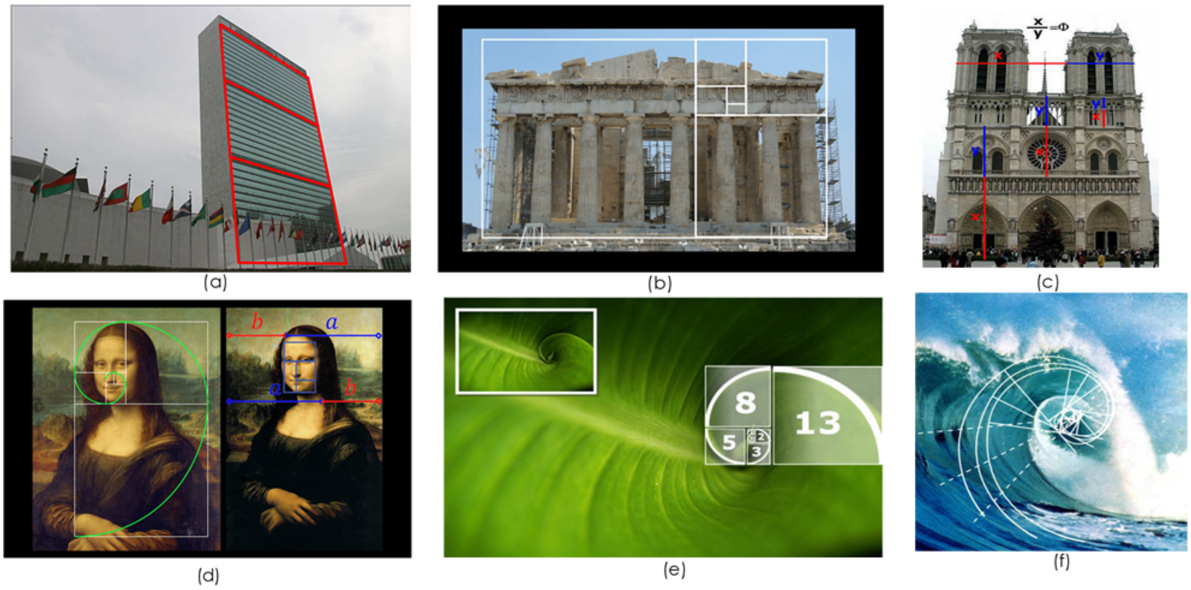
Existem, portanto, infinitos números metálicos e propriedades matemáticas envolvidas. A ênfase dada aqui, contudo, será para o número de ouro, que também pode ser representado pela letra grega ϕ.

Em séculos de história, na natureza, na arquitetura (antiga ou contemporânea), no corpo humano e nas obras de arte, diversos artistas, construtores e historiadores viram no número de ouro e, consequentemente, na razão áurea, a oportunidade de ter suas criações com mais perfeição e harmonia. O comentário de Dante sobre o número de ouro afirma que:

> "Para os gregos, o número de ouro representava harmonia, equilíbrio e beleza. Por esse motivo, muitas construções gregas tinham como base esse número. Mas foi no século XIII que o matemático Fibonacci constatou que o número de ouro está presente também na natureza." (DANTE, 2014)

A Figura 3.38 apresenta alguns exemplos da presença do número de ouro no dia a dia. Porém, sua frequência é muito maior que a ilustrada, sendo um assunto bastante interessante e com grande campo de aprofundamento.

Figura 3.38: Presença do número de ouro: (a) prédio da ONU; (b) Parthenon; (c) Catedral de Notre Dame; (d) Monalisa; (e) folha de uma planta; (f) onda do mar

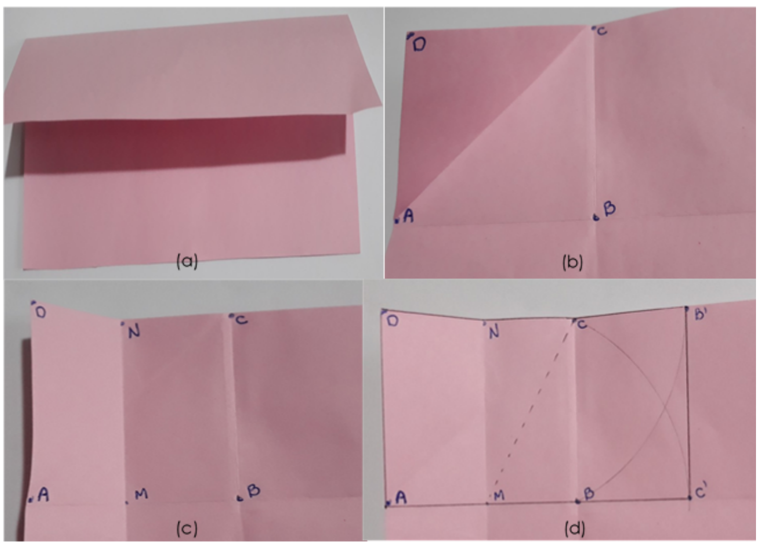


Fonte: (a) (DA-RIN, 2007); (b) (MATTOS,); (c) (DA-RIN, 2007); (d) (MATTOS,); (e) (CARVALHO,); (f) (BONSAI, 2009)

3.7.2 DOBRADURA DO RETÂNGULO ÁUREO

O retângulo áureo pode ser construído com dobraduras de papel e a razão entre suas dimensões é o número de ouro. Uma forma de se obter o retângulo áureo é através de dobradura, Figura 3.39.

Figura 3.39: Passos da dobradura do retângulo áureo



Fonte: O autor

Procedimento:

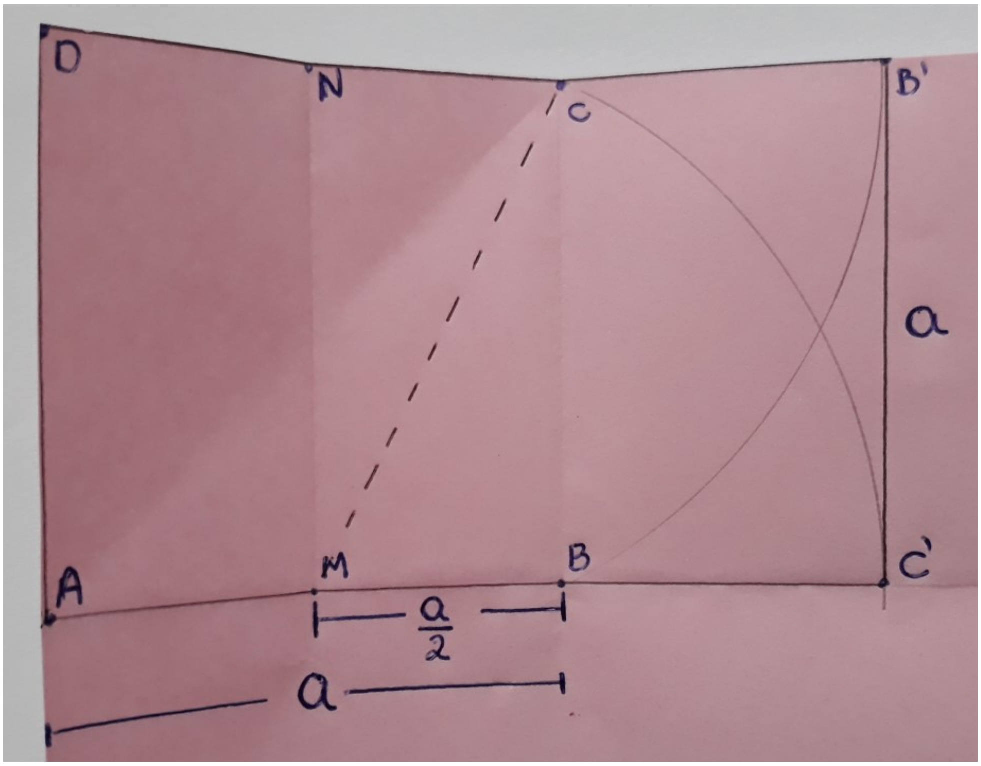
- (a) faça, em qualquer ponto, um vinco paralelo ao lado da folha;
- (b) a partir desse vinco, dobre um quadrado ABCD;
- (c) marque o segmento $\overline{MN}$ nos pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com um novo vinco;
- (d) com um compasso, coloque a ponta seca em M e o grafite em C, para marcar o ponto C', repita o processo com a ponta seca em N e o grafite em B, para marcar o ponto B'.

E, o retângulo $AC'B'D$ obtido é conhecido como retângulo áureo.

Demonstrando a razão áurea no retângulo $AC'B'D$

A razão áurea, no retângulo, obtida com a ajuda da dobradura pode ser demonstrada através de operações algébricas a partir da Figura 3.40.

Figura 3.40: Demonstração da razão áurea no retângulo $AC'B'D$



Fonte: O autor

Sendo a o lado do quadrado ABCD, temos o triângulo retângulo MBC. A hipotenusa $\overline{MC}$ desse triângulo é calculada através do Teorema de Pitágoras:

$$(\overline{MC})^2 = (\overline{MB})^2 + (\overline{BC})^2;$$
$$(\overline{MC})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2;$$
$$(\overline{MC})^2 = \left(\frac{a^2}{4}\right) + a^2.$$

Logo,

$$(\overline{MC})^2 = \frac{5a^2}{4};$$
$$\overline{MC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Assim, o segmento $\overline{MC'}$ equivale a $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ e o lado $\overline{AC'}$ do retângulo é igual a $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, ou seja, $\overline{AC'} = \dfrac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Como $\overline{B'C'} = a$, temos que a razão:

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \times \frac{1}{a}$$
$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{B'C'}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Como $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\ldots$, mostramos que a razão entre os lados do retângulo é a razão áurea e o número obtido é $\phi = 1,618\ldots$.

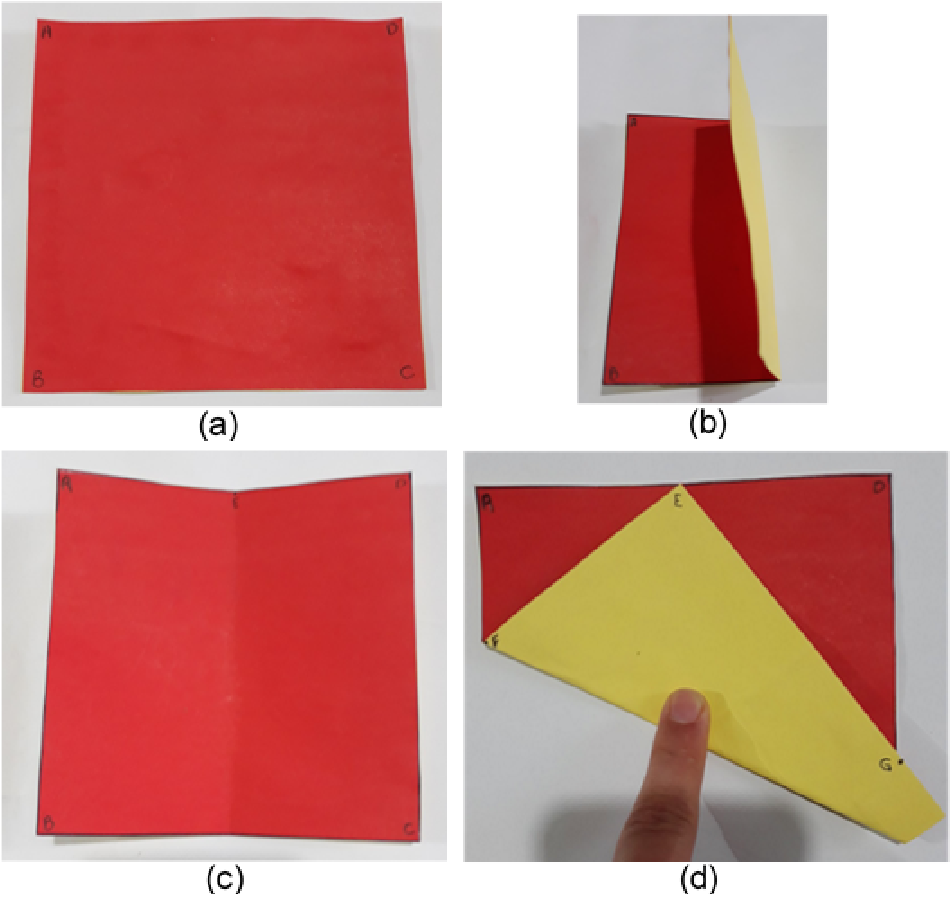
3.8 TEOREMA DE HAGA

O teorema de Haga mostra que um conjunto de construções pode ser usado para dividir um quadrado em várias partes. Às vezes, são necessárias poucas dobras para dividir o quadrado em um número ímpar de partes. Segundo Jaema Krier (KRIER, 2007) o nome, Teorema de Haga, é uma homenagem ao professor aposentado, Kazuo Haga, de Biologia da Universidade de Tsukuba, no Japão.

• **Primeiro Teorema de Haga**

O Primeiro Teorema de Haga é definido a partir da dobra de um papel quadrado, através do simples processo de dobra que coloca um vértice do quadrado sobre o ponto médio do lado oposto do quadrado. Por exemplo, o vértice esquerdo inferior sobre o ponto médio do lado superior. Assim, cada lado do papel é dividido em uma determinada proporção, Figura 3.41, (a), (b), (c) e (d).

Figura 3.41: Passos do Primeiro Teorema de Haga: (a) folha quadrada; (b) determinando o ponto médio; (c) vinco e ponto médio E; (d) vértice inferior no ponto médio do lado oposto



Fonte: O autor

Conforme ilustrado na Figura 3.41, chamamos de E o ponto médio de $\overline{AD}$. Quando o ponto C é sobreposto sobre o ponto E, o quadrado passa a ter as seguintes proporções:

a) o lado esquerdo é dividido, pelo ponto F, em dois segmentos, $\overline{AF}$ e $\overline{FB}$ (congruente a $\overline{FE}$), com $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{8}$ respectivamente, do lado original. Sendo o lado do quadrado igual a unidade, chamada aqui de n, temos o triângulo retângulo AEF com as seguintes medidas: $\overline{AE} = \frac{n}{2}$ e $\overline{AF}$ e $\overline{FE}$ de medidas desconhecidas, porém, se $\overline{AF} = x$, então $\overline{FE} = n - x$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras observamos as razões entre os dois segmentos formados no lado $\overline{AD}$:

$$(\overline{AE})^2 + (\overline{AF})^2 = (\overline{FE})^2;$$

$$\frac{n^2}{4} + x^2 = n^2 - 2nx + x^2 \cdot$$

Subtraindo x^2 e multiplicando por $\frac{4}{n}$, ambos os membros, obtemos:

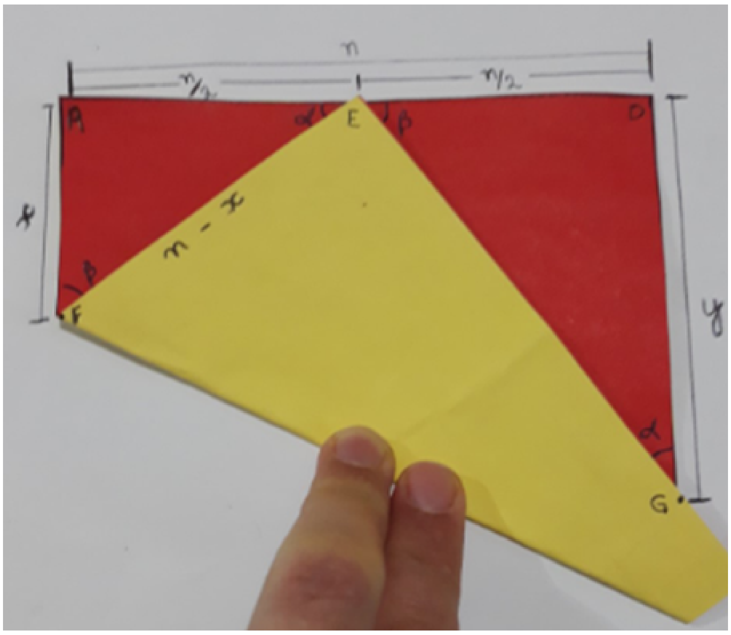
$$n = 4n - 8x;$$

$$x = \frac{3n}{8}.$$

Logo, $\overline{AF}$ representa $\frac{3}{8}$ e $\overline{FE} = \overline{FB}$ é igual a $\frac{5}{8}$ do lado $\overline{AB}$.

b) o lado direito, do segmento $\overline{DC}$ ficou dividido, pelo ponto G, em dois segmentos, $\overline{DG}$ e $\overline{GC}$ com $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3}$ do lado n. Sendo assim, o Primeiro Teorema de Haga mostra como dividir um quadrado em três partes iguais.

Figura 3.42: Teorema de Haga e seus elementos



Fonte: O autor

De fato, o ponto E forma um ângulo raso, Figura 3.42, ele é $\alpha + 90^o + \beta = 180^o$. Assim, os triângulos AFE e DEG são semelhantes, pois $F\hat{A}E \approx E\hat{D}G = 90^o$, $A\hat{F}E \approx D\hat{E}G = \beta$ e $A\hat{E}F \approx D\hat{G}E = \alpha$. Então, chamando $\overline{DG} = y$, temos que:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DG}};$$

$$\frac{\frac{3n}{8}}{\frac{n}{2}} = \frac{\frac{n}{2}}{y};$$

$$\frac{3ny}{8} = \frac{n^2}{4}.$$

Multiplicando ambos os membros por $\frac{4}{n}$:

$$\frac{3y}{2} = n;$$

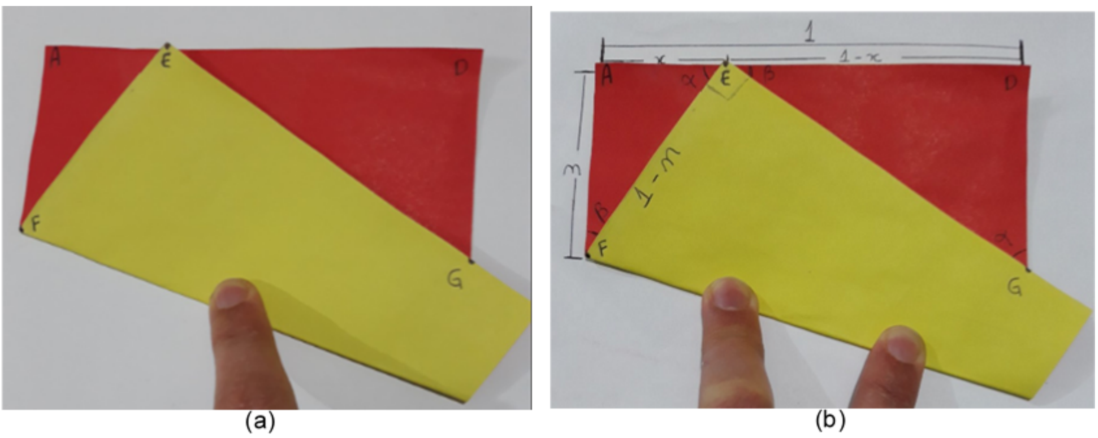
$$y = \frac{2n}{3}.$$

O segmento $\overline{DG}$ equivale a $\frac{2}{3}$ do lado n do quadrado, portanto $\overline{GC}$ representa $\frac{1}{3}$. Assim, se dobrar o quadrado, no ponto G, paralelamente ao lado $\overline{BC}$, temos a terça parte do quadrado.

Segundo Rubio Vernes (VERNES, 2005), o Primeiro Teorema de Haga não serve apenas para encontrar $\frac{1}{3}$ de uma folha quadrada de papel. Ao colocar o vértice em outros pontos, não necessariamente o ponto médio, podemos generalizar o Teorema de Haga, servindo assim para dividir o quadrado em um número ímpar de partes.

Para isso, supomos que o lado do quadrado tem medida igual a uma unidade de comprimento (1 uc). Conforme Figura 3.43, temos que, se $\overline{AD} = 1$, tomando $\overline{AE} = x$, o valor de $\overline{ED}$ será $(1-x)$. Da mesma forma, se $\overline{AF} = n$, o valor do segmento $\overline{FE}$ é $(1-n)$.

Figura 3.43: Generalização do Teorema de Haga: (a) vértice num ponto qualquer do lado oposto; (b) medidas dos segmentos obtidos



Fonte: O autor

Usando o Teorema de Pitágoras, calculamos o valor de n em função de x:

$$(1-n)^2 = n^2 + x^2;$$

$$1 - 2n + n^2 = n^2 + x^2.$$

Subtraindo n^2 em ambos os membros:

$$1 - x^2 = 2n;$$

$$n = \frac{1-x^2}{2}.$$

Depois, sabendo que $AEF \approx DGE$, pela semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{n}{x} = \frac{1-x}{y}.$$

Substituindo n por $\frac{1-x^2}{2}$, calculamos:

$$\frac{\frac{1-x^2}{2}}{x} = \frac{1-x}{y};$$

$$x(1-x) = y(\frac{1-x^2}{2});$$

$$y = \frac{x(1-x)}{\frac{1-x^2}{2}};$$

$$y = \frac{x(1-x)2}{1-x^2}.$$

Fatorando $1-x^2$, temos:

$$y = \frac{2x(1-x)}{(1-x)(1+x)},$$

assim:

$$y = \frac{2x}{1+x}.$$

Assim, escolhendo valores diferentes para x, dividimos o quadrado em n partes, estabelecidas a partir do valor de y.

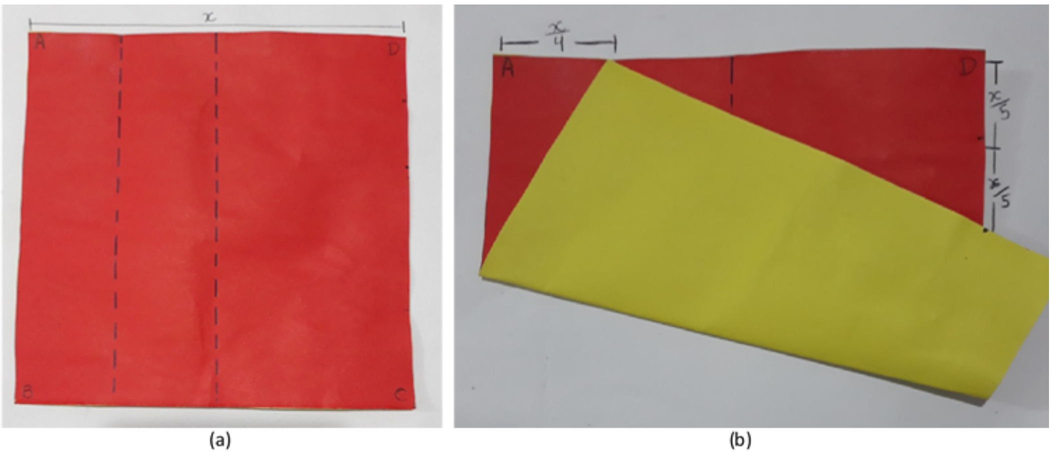
Exemplos: Determinando a medida correspondente igual a $n = \frac{2}{5}, \frac{2}{9}, \frac{6}{7}$ e $\frac{6}{11}$ do lado da folha quadrada.

Sendo $x = \frac{1}{4}$, temos:

$$y = \frac{2x}{1+x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

Logo, dividindo ao meio, encontramos a medida correspondente a $\frac{1}{5}$ do lado do quadrado, Figura 3.44.

Figura 3.44: Divisão em $\frac{1}{4}$: (a) folha de papel quadrada; (b) aplicação do Primeiro Teorema de Haga



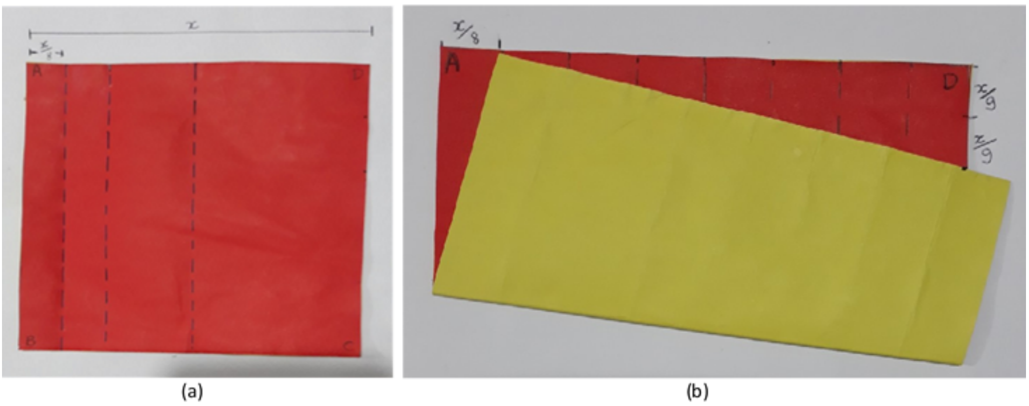
Fonte: O autor

Sendo $x = \frac{1}{8}$, temos:

$$y = \frac{2x}{1+x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{9}.$$

Assim, dividindo ao meio, encontramos a medida que corresponde a $\frac{1}{9}$ do lado do quadrado, Figura 3.45.

Figura 3.45: Divisão em $\frac{1}{8}$: (a) folha de papel quadrada; (b) aplicação do Teorema de Haga



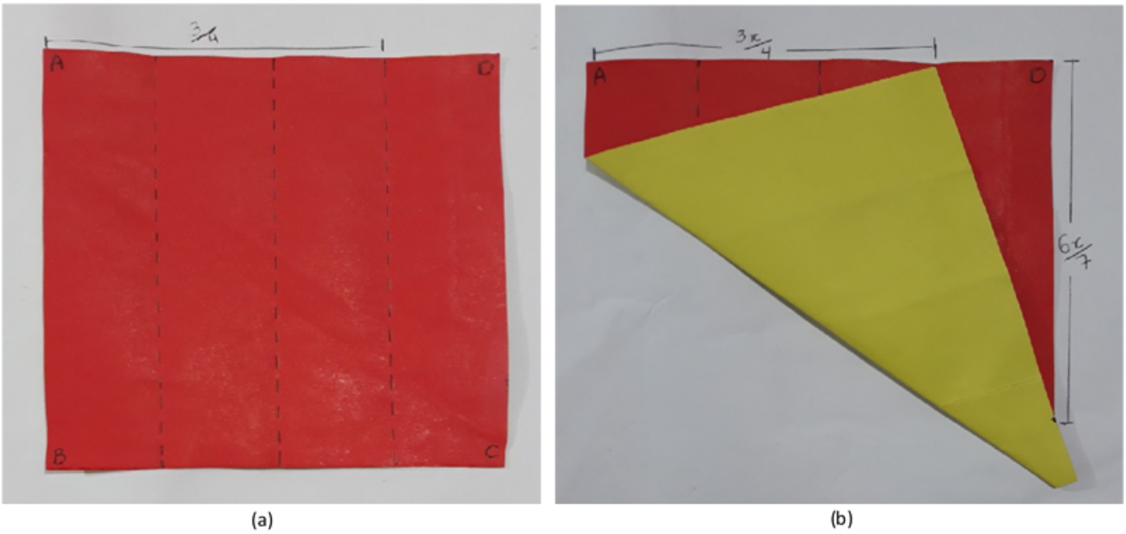
Fonte: O autor

Sendo $x = \frac{3}{4}$, temos:

$$y = \frac{2x}{1+x} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{7}.$$

E, a parte que sobra representa $\frac{1}{7}$ da medida do lado do quadrado, Figura 3.46.

Figura 3.46: Divisão em $\frac{3}{4}$: (a) folha de papel quadrada; (b) aplicação do Teorema de Haga



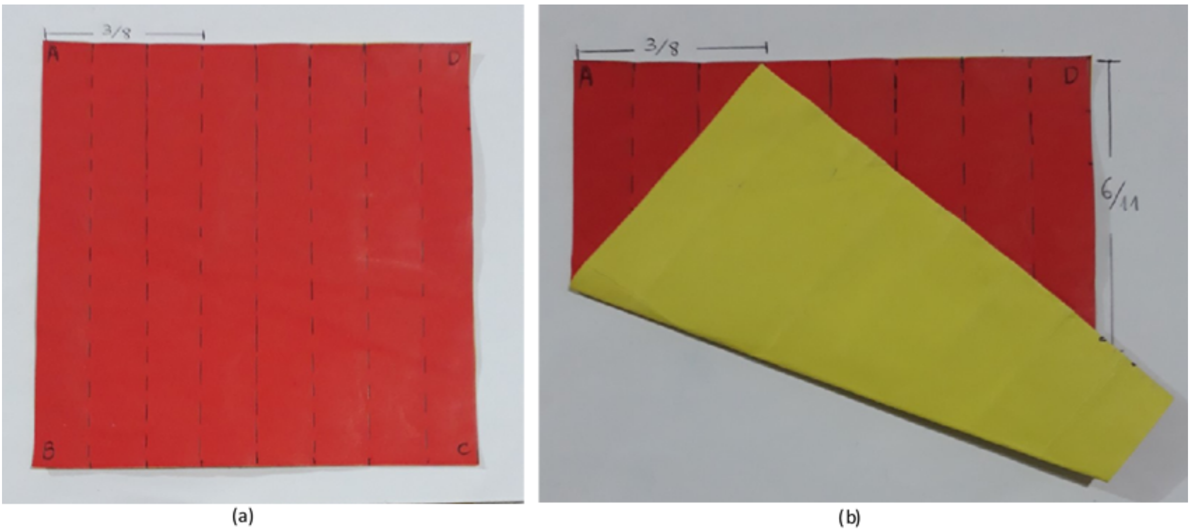
Fonte: O autor

Sendo $x = \frac{3}{8}$, temos:

$$y = \frac{2x}{1+x} = \frac{2 \cdot \frac{3}{8}}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{11}{8}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11}.$$

Como $y = \frac{6}{11}$, dividindo essa parte ao meio, encontramos $\frac{3}{11}$ da medida do lado quadrado. Então, a parte que sobra representa $\frac{8}{11}$. A partir desse ponto basta dividir essa parte ao meio três vezes consecutivas para obter $\frac{1}{11}$, permitindo dividir o quadrado em retângulos onde, um dos lados é a medida do lado do quadrado e o outro é $\frac{1}{11}$ desse lado, Figura 3.47.

Figura 3.47: Divisão em $\frac{3}{8}$: (a) folha de papel quadrada; (b) aplicação do Teorema de Haga



Fonte: O autor

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE HAGA

Os exemplos dados mostram alguns cálculos e imagens do Teorema de Haga. Porém, além desses, o lado do quadrado pode ser dividido em outras partes como a generalização apresentada, Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Generalização do Teorema de Haga: dividindo o lado do quadrado em 5, 9 ou 17 partes

Valor de *x*	**Valor de *y***	**Número de partes do lado do quadrado**
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	5
$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{9}$	9
$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{17}$	17

Fonte: O autor

Ao colocar um vértice no lado oposto, dividindo-o em 4 ou 8 partes obtemos outras frações para o lado do quadrado. A Tabela 3.5, apresenta outras possibilidades do Teorema de Haga.

Tabela 3.5: Generalização do Teorema de Haga: dividindo o lado do quadrado em 7, 11, 13 ou 15 partes

Valor de x	**Valor de y**	**Número de partes do lado do quadrado**
$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{7}$	7
$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{11}$	11
$\frac{5}{8}$	$\frac{10}{13}$	13
$\frac{7}{8}$	$\frac{14}{15}$	15

Fonte: O Autor

Outro fator interessante do Teorema de Haga, é que os valores apresentados na tabela, gerados pela generalização desse teorema, podem ser obtidos quando observamos alguns detalhes. O papel é dividido ao meio sucessivas vezes, podendo então, a quantidade de divisões feitas, ser chamada de 2^r, com $r \in \mathbb{N}$. Além disso, nessa quantidade de divisões feitas, escolhemos onde colocar um dos vértices do lado oposto, ou seja, colocamos o vértice na n-ésima divisão. Logo, a fração que representa o valor de x, na Tabela 3.4 e na Tabela 3.5, é representado por $\dfrac{n}{2^r}$. Substituindo na fórmula da generalização $y = \dfrac{2x}{x+1}$, temos:

$$y = \frac{2 \cdot \dfrac{n}{2^r}}{\dfrac{n}{2^r} + 1} = \frac{\dfrac{2n}{2^r}}{\dfrac{n+2^r}{2^r}} = \frac{2n}{n+2^r}$$

Temos então, que a parte escolhida, $\dfrac{n}{2^r}$, para colocar o vértice oposto, gera a fração $\dfrac{2n}{n+2^r}$, onde $n+2^r$ representa a quantidade de partes que o quadrado é dividido.

Chamando $n+2^r$ de z é possível decidir em quantas partes dobrar o lado do quadrado e assim saber onde colocar o vértice para a primeira dobra do teorema. A seguir, apresentamos alguns exemplos.

1) Dividir o quadrado em 3 partes, $(z = 3)$.

Como $z = n+2^r$, temos que $3 = n+2^r$. Logo, $3 = 1+2^1$, ou seja, $n = 1$, $2^r = 2$, $2n = 2$. Concluímos que quando dobramos o vértice até $\dfrac{1}{2}$ da folha obtemos $\dfrac{2}{3}$ desse quadrado.

2) Dividir o quadrado em 5 partes, $(z = 5)$.

Como $z = n+2^r$, temos que $5 = n+2^r$. Logo, $5 = 1+2^2$, ou seja, $n = 1$, $2^r = 4$, $2n = 2$. Assim, quando dobramos o vértice até $\dfrac{1}{4}$ da folha obtemos $\dfrac{2}{5}$ desse quadrado. Basta dobrar esse pedaço ao meio e conseguimos $\dfrac{1}{5}$ do quadrado.

3) Dividir o quadrado em 7 partes, $(z = 7)$.

Como $z = n + 2^r$, temos que $7 = n + 2^r$. Logo, $7 = 3 + 2^2$, ou seja, $n = 3$, $2^r = 4$, $2n = 6$. Então, quando dobramos o vértice até $\frac{3}{4}$ da folha obtemos $\frac{6}{7}$ desse quadrado.

4) Dividir o quadrado em 9 partes, $(z = 9)$.

Como $z = n + 2^r$, temos que $9 = n + 2^r$. Logo, $9 = 1 + 2^3$, ou seja, $n = 1$, $2^r = 8$, $2n = 2$. Ou seja, quando dobramos o vértice até $\frac{1}{8}$ da folha obtemos $\frac{2}{9}$ desse quadrado. Basta dobrar esse pedaço ao meio e conseguimos $\frac{1}{9}$ do lado do quadrado.

5) Dividir o quadrado em 15 partes, $(z = 15)$.

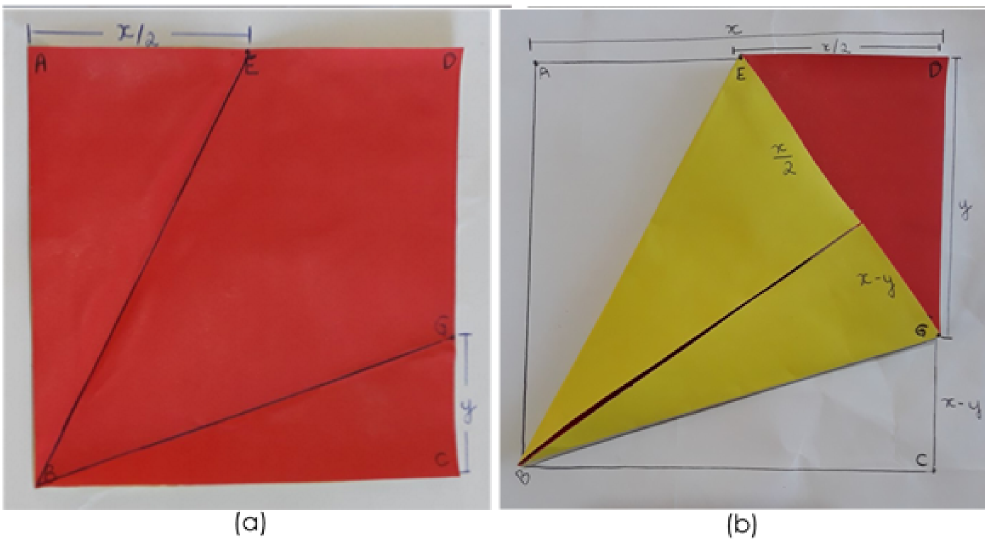
Como $z = n + 2^r$, temos que $15 = n + 2^r$. Logo, $15 = 7 + 2^3$, ou seja, $n = 7$, $2^r = 8$, $2n = 14$. Concluimos que dobramos o vértice até $\frac{7}{8}$ da folha obtemos $\frac{14}{15}$ desse quadrado.

Sendo assim, escolhemos z ímpar de partes que desejamos dividir todo o quadrado e calculamos onde o vértice deve ser dobrado.

• Segundo Teorema de Haga

O Segundo Teorema de Haga é uma variação do primeiro, servindo também para demonstração da divisão do quadrado em três partes iguais. Na Figura 3.48 temos que $\overline{AD} = x$. Como E representa o ponto médio de $\overline{AD}$, assim $\overline{AE} = \overline{ED} = \frac{x}{2}$. Além disso, $\overline{DG} = y$, então $\overline{GC} = x - y$.

Figura 3.48: Dobra do Segundo Teorema de Haga: (a) preparação para o Segundo Teorema de Haga; (b) aplicação do Segundo Teorema de Haga



Fonte: O autor

Logo, ao dobrar $\overline{BE}$ e $\overline{BG}$, formamos o segmento $\overline{EG}$. O triângulo DEG é retângulo em D. Usando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x}{2} + x - y\right)^2;$$
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \left(\frac{3x}{2} - y\right)^2;$$
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{9x^2}{4} - 3xy + y^2.$$

Subtraindo y^2 em ambos os membros:

$$\frac{9x^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 3xy.$$

Dividindo ambos os membros por x:

$$\frac{8x}{4} = 3y;$$
$$2x = 3y;$$
$$y = \frac{2x}{3}.$$

Logo, o valor de y representa $\frac{2}{3}$ do valor do lado do quadrado, então $\overline{CG} = \frac{1}{3}$ do lado do quadrado.

• **Terceiro Teorema de Haga** É, também, mais uma adaptação do teorema para dividir a folha em n partes, no caso apresentado, em três partes.

Neste caso, devemos tangenciar o lado $\overline{AB}$ no ponto médio E do lado $\overline{AD}$, de modo a tangenciar o lado $\overline{DC}$ com o ponto B, marcando nesse lado o ponto G, formando dois triângulos retângulos EDG e GCH, Figura 3.49. Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{GC}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{GD}}$$

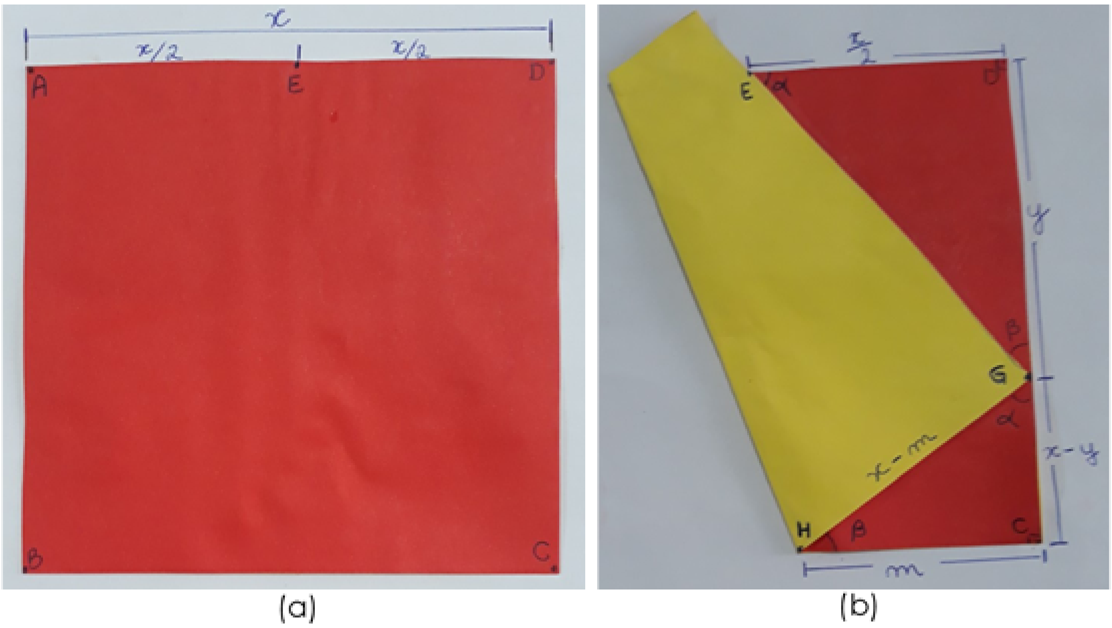
Logo,

$$\frac{x-y}{m} = \frac{\frac{x}{2}}{y};$$
$$m.\frac{x}{2} = y.(x-y);$$
$$m = y.\frac{2}{x}.(x-y).$$

Ou seja:

$$m = \frac{2y(x-y)}{x}\cdot$$

Figura 3.49: Dobra do Terceiro Teorema de Haga: (a) definindo os elementos; (b) dividindo em $n = 3$ partes



Fonte: O autor

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo GCH, temos:

$$(x-m)^2 = (x-y)^2 + m^2;$$

$$x^2 - 2xm + m^2 = x^2 - 2xy + y^2 + m^2\cdot$$

Subtraindo x^2 e m^2 em ambos os membros e substituindo m por $\dfrac{2y(x-y)}{x}$:

$$-2x\left(\frac{2y(x-y)}{x}\right) = -2xy + y^2;$$

$$y^2 - 2xy + 4xy - 4y^2 = 0;$$

$$3y^2 - 2xy = 0;$$

$$y.(3y - 2x) = 0;$$

$$y = 0 \text{ ou } 3y - 2x = 0\cdot$$

Como $y = 0$, é um absurdo, pois y representa a medida de uma parte do lado do quadrado, temos $y = \dfrac{2x}{3}$. Sendo assim, o Terceiro Teorema de Haga também mostra como dividir um quadrado em 3 partes iguais.

4 OFICINAS DE ORIGAMI COM OS ESTUDANTES

Neste capítulo descrevemos algumas das atividades desenvolvidas com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental e dos três anos do Ensino Médio da Escola de Educação Básica Jorge Zipperer, da cidade de Rio Negrinho, Santa Catarina. Como foram diversas turmas de diferentes idades envolvidas, realizamos atividades com temas variados utilizando o origami. Todas as atividades propostas foram realizadas no decorrer do primeiro semestre do ano letivo de 2019, e os alunos apresentaram o resultado final na Feira de Conhecimentos da escola, que aconteceu em agosto/2019.

Antes de introduzir a técnica de dobraduras de papel, fizemos uma pesquisa através de um questionário aplicado aos alunos da Escola de Educação Básica Jorge Zipperer, Apêndice A.1, buscando conhecer a familiaridade que os estudantes tinham com o origami e também o interesse deles na prática dessa arte. Após análise das respostas dos alunos, foram realizadas as oficinas, usando as dobraduras de papel para desenvolver conteúdos pertinentes à série que estudam.

Os alunos confeccionaram materiais pedagógicos em equipes, de acordo com a idade escolar. Os conceitos matemáticos foram ensinados, ocorrendo a aprendizagem com o envolvimento e comprometimento de todos. Nenhum aluno se recusou a participar, todos aceitaram o desafio de construir as dobraduras propostas.

4.1 OFICINA I: **BRINCADEIRA DE CRIANÇA**

A Oficina I foi realizada com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental utilizando um conteúdo essencial dessa fase, as frações. As dobraduras foram usadas para dar uma introdução ao assunto, para relembrarem o conceito de fração, que é a forma de dividir usando a razão de dois números inteiros.

Inicialmente, os alunos fizeram sucessivas dobras ao meio em uma tira de papel com o objetivo de representar uma reta numérica, onde as dobras enfatizam a necessidade de distâncias iguais entre os números naturais, o que também é preciso quando se demonstram as frações através de figuras. Depois, os alunos começaram a aprender a noção de frações, recebendo pedaços de papel e sendo instigados a dividi-los em duas, três, quatro e cinco partes iguais, pintando uma delas e apresentando a fração formada, Figura 4.1 (a) e (b). Depois, para fixar o assunto, organizaram as frações em papel quadriculado Figura 4.1 (c), escrevendo como são lidas.

Figura 4.1: Frações: trabalho dos alunos desenvolvidos na Oficina I

Fonte: O autor

Para se obter um equilíbrio entre o mundo virtual, os conteúdos relacionados ao currículo escolar e o trabalho prático que tem o objetivo de ajudar na compreensão desse conteúdo, os alunos buscaram, através de pesquisa na internet, algumas ideias para trabalhar o origami em sala de aula, entre várias sugestões, ficou decidido em conjunto, trabalhar com o hexaflexágono[1].

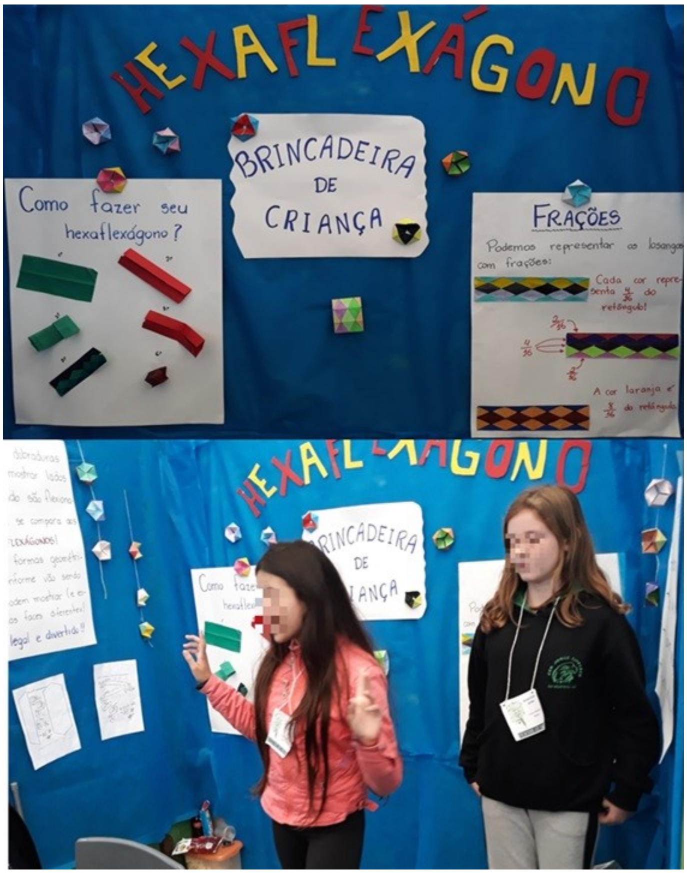
Os flexágonos são brinquedos obtidos através de dobras sequenciais em tiras de papel, que são decoradas em diversas cores e figuras que, ao serem dobradas e manipuladas, exibe as faces escondidas. Os hexaflexágonos são flexágonos que durante a dobradura, apresenta um hexágono.

Durante a confecção do hexaflexágono, os alunos foram dobrando, colorindo as faces ocultas com mesmas cores e formando frações com a quantidade de polígonos pintados. O

[1]https://www.youtube.com/watch?v=Uwkje5foZfU

resultado do trabalho foi apresentado na Feira de Conhecimentos da escola, Figura 4.2 e obteve o segundo lugar na categoria do Ensino Fundamental.

Figura 4.2: Apresentação dos alunos do 6º ano na Feira de Conhecimentos



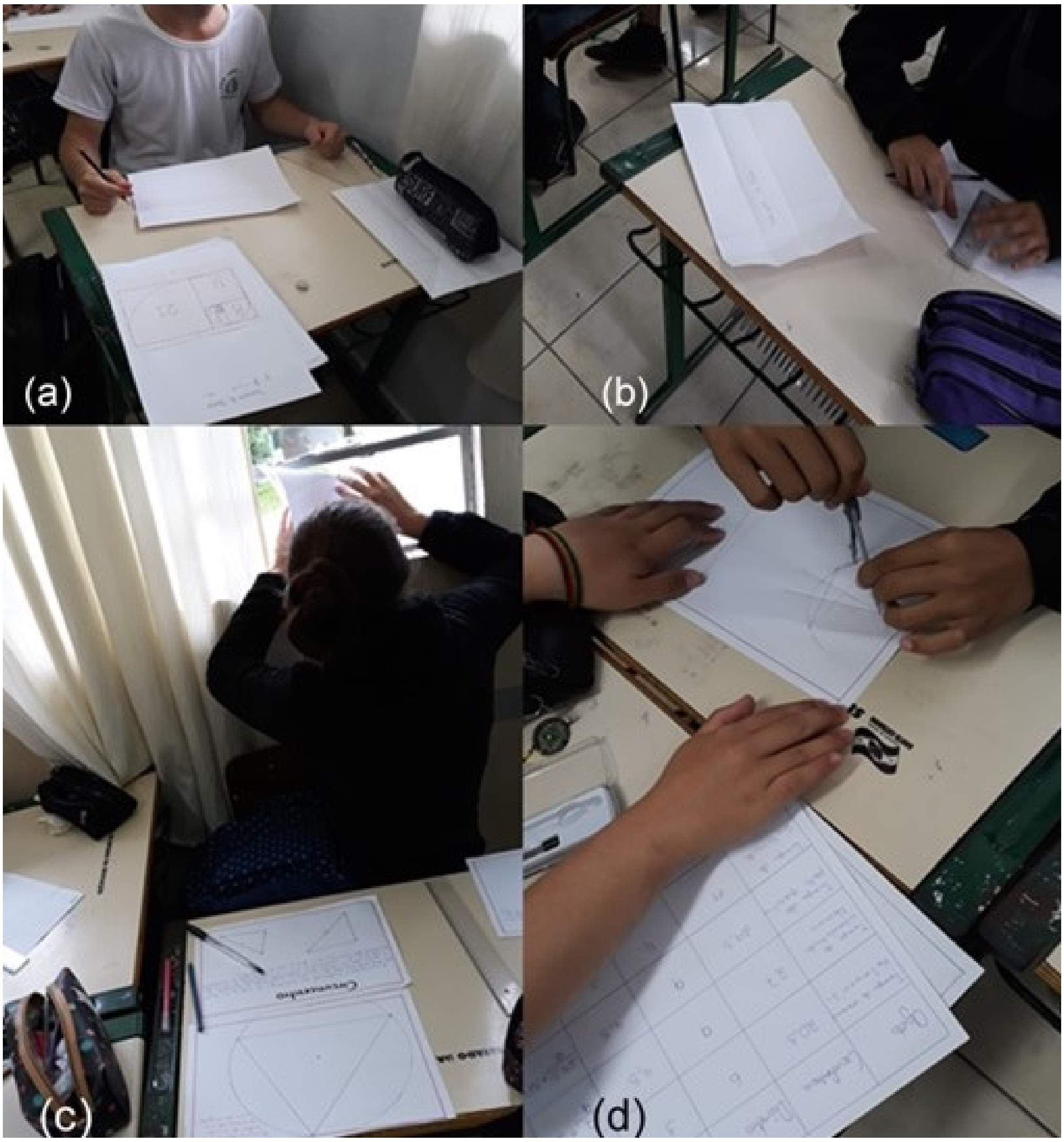
Fonte: O autor

4.2 OFICINA II: **CURIOSIDADES DA MATEMÁTICA PERFEITA**

Nessa oficina, estudamos os pontos notáveis dos triângulos, através de dobraduras. Ainda, estudaram o círculo e a razão entre a circunferência e o seu diâmetro. Para finalizar, o número de ouro foi apresentado e as intrigantes percepções de sua existência no decorrer da história e na natureza foram observadas através das pesquisas que os alunos realizaram.

A Oficina II, necessitou de várias aulas para ser concretizada, visto que trabalhou com vários conteúdos de forma concreta. Em uma atividade com a 1ª série do Ensino Médio, foi apresentada a razão áurea e o valor de ϕ de maneira concreta, para aproveitar o assunto de conjuntos numéricos que é estudado nessa fase. Na Figura 4.3 (a), os alunos, após construírem a sequência de Fibonacci e a razão entre seus valores, transformaram essa sequência em um retângulo de razão áurea e a sua espiral. Então, na Figura 4.3 (b), fizeram, com dobraduras, o retângulo de ouro e mostraram que a razão entre suas dimensões equivale a aproximadamente $\phi = 1,618$, sendo ϕ o símbolo para o número de ouro. Na Figura 4.3 (c), a aluna usou sua criatividade e a claridade da janela para sobrepor os vértices de um triângulo, para fazer a dobradura das mediatrizes e assim encontrar o circuncentro, comprovado com o uso do compasso, Figura 4.3 (d).

Figura 4.3: Trabalho dos alunos: encontrando o valor de ϕ (número de ouro) e os pontos notáveis dos triângulos



Fonte: O autor

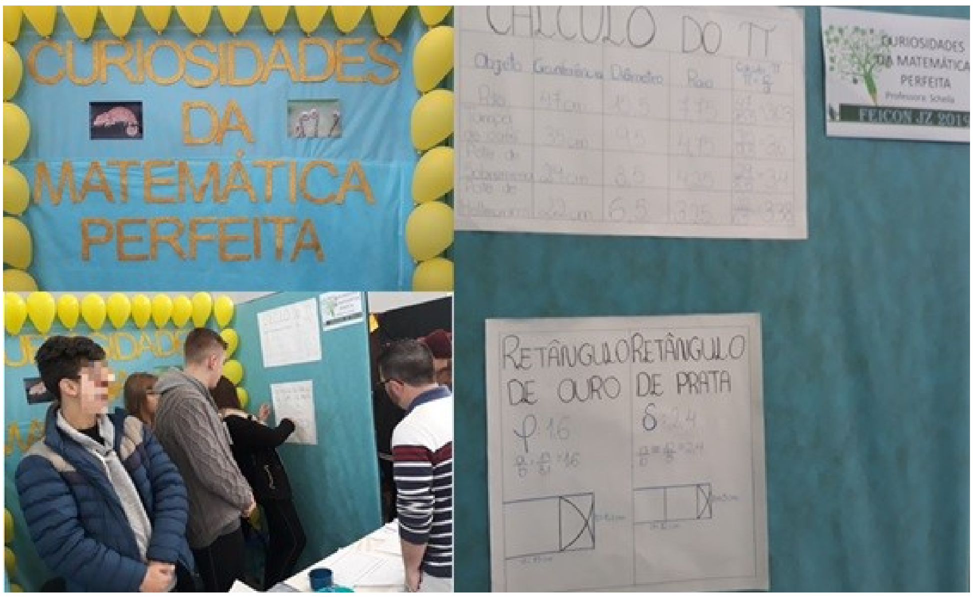
O valor de π foi encontrado de maneira prática, já que também se trata de um número irracional. Na Figura 4.4, os alunos estão medindo objetos circulares com o uso de barbante para comprovarem que a razão entre a circunferência e o diâmetro corresponde a $\pi = 3,14...$.

Figura 4.4: Trabalho dos alunos: encontrando o valor de π

Fonte: O autor

Nessa oficina houve interação dos adolescentes com os assuntos estudados, mostrando a possibilidade de trabalhar a Matemática de maneira lúdica e prática. A apresentação dos alunos na Feira de Conhecimentos, Figura 4.5, foi bastante participativa, rendendo o primeiro lugar na categoria "Ensino Médio”.

Figura 4.5: Apresentação dos alunos na Feira de Conhecimentos



Fonte: O autor

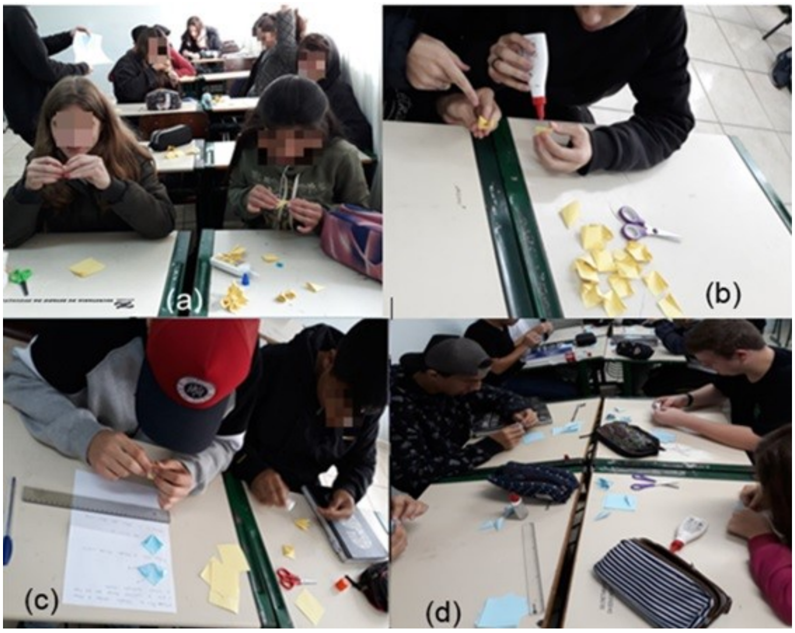
4.3 OFICINA III: **FLORES E ORIGAMI**

Essa oficina também foi realizada com alunos da primeira série do Ensino Médio. O objetivo inicial foi trabalhar com o origami em sala de aula com o intuito de observar se a técnica de dobrar papéis ajudaria na concentração nessa fase escolar.

Escolhemos a confecção de flores[2] e, na primeira parte, entregamos uma folha A4 para cada aluno e ele deveria determinar a maior quantidade de quadrados iguais possíveis nessa folha quando era fornecida a medida de seu lado. A partir dessa atividade, os alunos organizaram tabelas onde relacionavam a quantidade de quadrados adquiridos com a quantidade de folhas usadas e o conteúdo de funções foi apresentado, relacionando estes dois valores. Assim eles perceberam que o assunto está no dia-a-dia de todo ser humano e possíveis de uma compreensão inicial.

Depois dessa atividade, a segunda parte foi organizar um portfólio com cada etapa da dobradura das pétalas das flores. A Figura 4.6 (a), (b), (c) e (d), apresenta a Matemática presente no decorrer das dobras, focando nas figuras geométricas formadas, nas medidas dos lados e ângulos presentes.

Figura 4.6: Trabalho dos alunos: confecção das Flores e portfólio



Fonte: O autor

O resultado desse trabalho foi apresentado na Feira de Conhecimentos da escola, Fi-

[2] https://www.youtube.com/watch?v=o21QbUvexx8

gura 4.7.

Figura 4.7: Apresentação do portfólio Flores e Funções na Feira de Conhecimentos

Fonte: O autor

4.4 OFICINA IV: **TSURU - UM PROJETO DE PAZ**

Nessa oficina falamos sobre o Monumento à Paz Mundial que está localizado em Hiroshima, no Japão dedicado à Sadako Sasaki e sobre a lenda da confecção dos mil tsurus, que quem confeccioná-los terá o seu desejo realizado.

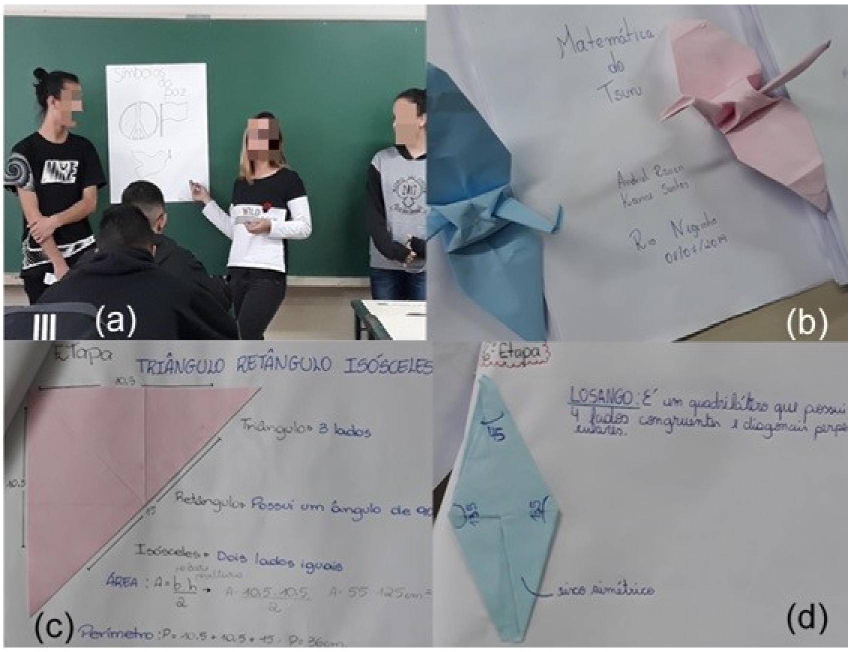
Discutimos a necessidade de cada pessoa fazer sua parte na promoção da paz e apresentamos o diagrama para a construção do tsuru, peça fundamental do origami japonês, cujas dobras iniciais fazem parte de muitos outros modelos de origami.

Na confecção dos tsurus[3], podemos visualizar as figuras geométricas e os ângulos formados além da relação entre as áreas das figuras obtidas a cada vinco.

Esse trabalho, realizado com alunos da segunda série do Ensino Médio, foi muito produtivo. O envolvimento de todos foi grande, não apenas na parte matemática durante a construção do tsuru mas também nas pesquisas relacionadas à paz. Conforme Figura 4.8, os alunos fizeram e apresentaram um trabalho sobre a paz mundial (a); depois aprenderam a fazer a dobradura dos tsurus para então organizarem uma apostila (b) com os conteúdos matemáticos associados a cada etapa da dobradura (c) e (d).

[3]https://www.youtube.com/watch?v=PAKmxBTSajg

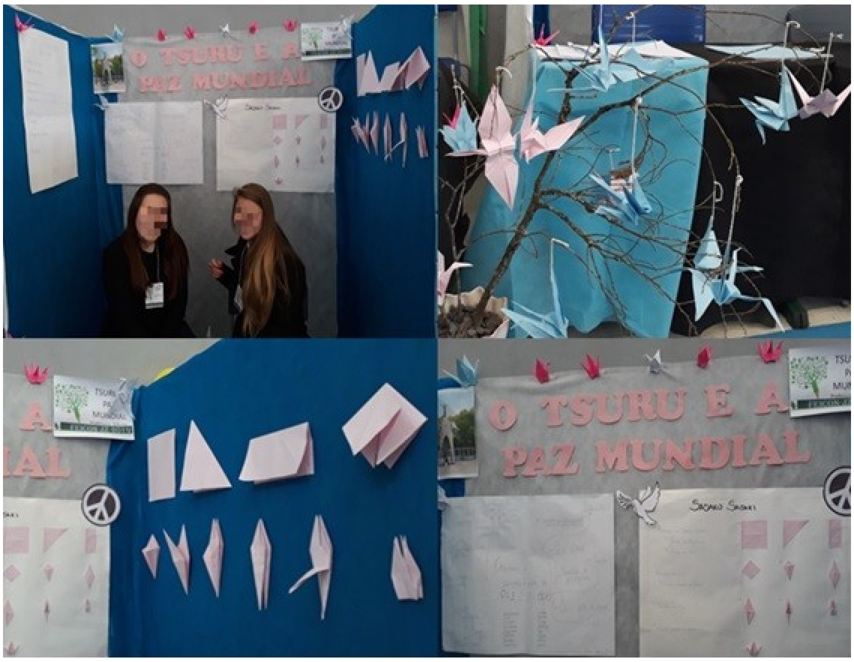
Figura 4.8: Trabalho dos alunos na Oficina “Tsuru - um projeto de paz”



Fonte: O autor

Essa oficina “Tsuru - um projeto de paz” foi uma das mais envolventes. A apresentação dos resultados durante a Feira de Conhecimentos aconteceu com a interação dos expositores com os visitantes, que aprenderam a construir o tsuru durante a visitação, Figura 4.9.

Figura 4.9: Apresentação dos alunos na Feira de Conhecimentos: tsuru



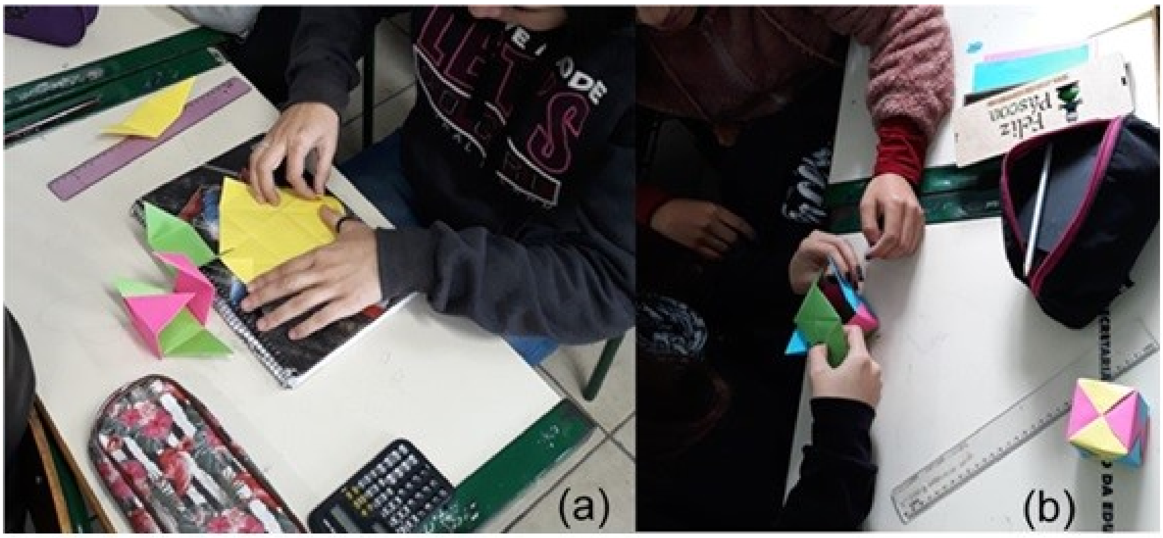
Fonte: O autor

4.5 OFICINA V: **CUBOS**

Nessa oficina, utilizamos o origami para construir um cubo concomitante com o assunto áreas e volumes de paralelepípedos com situações próximas da realidade dos alunos como determinar o volume de pequenas caixas, a área em construções, reformas nas moradias ou cálculo de cubagem em caminhões.

Para trabalhar com cubos, a Oficina V trouxe a oportunidade de fazer os alunos da terceira série do Ensino Médio, confeccionarem os cubos[4] com origami modular e depois calcularem o volume. Na Figura 4.10 (a), os alunos estão dobrando os módulos para depois montarem o cubo, Figura 4.10 (b).

Figura 4.10: Alunos confeccionando os cubos durante a oficina



Fonte: O autor

Essa oficina mostrou que a união de diferentes técnicas no processo ensino-aprendizagem oportuniza associar a arte e a concretização do conhecimento. Para que as atividades realizadas fossem socializadas, a oficina foi apresentada na Feira de Conhecimentos, Figura 4.11.

[4]https://www.youtube.com/watch?v=xrIm5AE8xMs

Figura 4.11: Apresentação sobre áreas e volumes na Feira de Conhecimentos

Fonte: O autor

4.6 OFICINA VI: **PORTFÓLIO DE GEOMETRIA**

Tratamos nessa oficina da introdução à geometria plana, usando instrumentos que fazem o estudo ser manual e construtivo utilizando os Axiomas de Hatori-Huzita. Ainda, fizemos um estudo sobre a condição de existência dos triângulos, soma dos ângulos internos e classificação dos mesmos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Todo o processo foi registrado em portfólios elaborados pelos alunos, mostrando os detalhes de cada assunto a cada página e aproveitando para rever/aprender a utilizar outras ferramentas como a régua, o compasso e o transferidor, sendo que para muitos era uma novidade.

Na Figura 4.12 (a), os alunos estão usando as dobraduras e os Axiomas de Hatori-Huzita. Na Figura 4.12 (b), é possível observar o interesse pela atividade, pois apreciaram aprender os conceitos matemáticos de maneira concreta e manual e também, através de dobraduras. A Figura 4.12 (c), mostra os alunos observando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.

Figura 4.12: Trabalho dos alunos em sala de aula: elaborando o portfólio de Geometria

Fonte: O autor

O resultado final também foi apresentado na Feira de Conhecimentos, Figura 4.13. E, os alunos que se dispuseram a apresentar o trabalho na feira, montando o *stand* e apresentando corretamente os conceitos matemáticos envolvidos foram aqueles que apresentavam maiores dificuldades na disciplina.

Figura 4.13: Portfólio de Geometria na Feira de Conhecimentos

Fonte: O autor

4.7 OFICINA VII: **COELHOS E ROSAS - ATIVIDADES EM DATAS COMEMORATIVAS**

No trabalho realizado com os sextos anos do Ensino Fundamental, construção de coelhos e de rosas em origami, envolveu datas comemorativas importantes para os estudantes, unindo a prática e temas matemáticos.

Durante a confecção, os alunos estudaram as noções sobre posições relativas das retas através dos vincos formados e as figuras geométricas criadas a cada dobra. As áreas e os perímetros também foram explorados.

A oficina realizada próxima da Páscoa teve o objetivo de trazer, além dos conteúdos matemáticos, a parte solidária, social do aluno. O origami coelho de Páscoa[5], confeccionado pelo aluno foi entregue a outra pessoa, com o intuito de se doar para fazer a alegria de outra pessoa, mesmo sem saber para quem seria.

Figura 4.14: Origami e Confraternização de Páscoa na escola

Fonte: O autor

Os estudantes aprenderam a dobradura do coelho e depois ensinaram a outros alunos,

[5]https://www.youtube.com/watch?v=hdKzV9-VUqw

e todos do Ensino Fundamental foram envolvidos na atividade: confeccionaram um coelho, personalizaram e devolveram. No dia destinado às comemorações da Páscoa, além de outras atividades preparadas pela escola, houve o compartilhamento dos coelhos confeccionados pelos alunos. Na Figura 4.14 (a) e (b), os alunos do sexto ano, mostrando seus coelhos, quando aprenderam a dobrá-los e na Figura 4.14 (c), o dia da confraternização de Páscoa entre todos os estudantes.

Outra atividade dessa oficina com o sexto ano, foi a construção de rosas feitas com módulos de dobraduras em papel. Essa atividade foi realizada em sala com todos os alunos, onde eles contabilizaram as quantidades de folhas necessárias de acordo com o tamanho das pétalas e relembraram os tipos de retas, formadas pelos vincos necessários, que haviam aprendido durante a Páscoa. Nesse momento, os próprios alunos foram anotando as figuras geométricas formadas e ajudando aqueles que tinham esquecido algum conceito aprendido na primeira parte da oficina.

Os alunos do sexto ano usaram a dobradura para construírem as flores (rosas)[6] que foram usadas para agradarem as mães no seu dia. Na Figura 4.15 (a), os alunos estavam dobrando os módulos que ao serem unidos (b) formam as rosas. Por fim, colocaram num palito e ficou pronto (c). Cada aluno confeccionou sua própria flor, porém a ajuda entre eles foi fundamental para que o objetivo individual fosse atingido.

Figura 4.15: Trabalho dos alunos: rosas de origami

Fonte: O autor

[6]https://www.youtube.com/watch?v=CgqhFDg8q1Q

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscar meios para que os alunos assimilem os conteúdos disponibilizados no currículo escolar é papel do professor, como mediador para que as informações se transformem em conhecimento. Assim, para contribuir, desenvolvemos um trabalho utilizando a arte do origami como ferramenta auxiliar no ensino-aprendizagem em Matemática.

O origami com o auxílio da régua e do compasso possibilitou trabalharmos conteúdos de Matemática associando a Geometria com a Álgebra na construção do retângulo áureo, de frações, oportunizando os alunos aprenderem os conceitos descobrindo, visualizando, analisando e também criando conjecturas em um processo em que a aprendizagem passa a ser mais significativa. Verificamos que tudo isso é possível de maneira natural com a compreensão dos conceitos e consequentemente, a memorização.

Além disso, houve uma aproximação natural dos alunos com a professora, mais envolvimento nas aulas e colaboração, como guardar os materiais após as oficinas e atitudes simples como tirar os materiais para aula da mochila sem nenhuma cobrança.

Comparando com os anos anteriores, percebemos o interesse dos alunos em saber mais sobre os conteúdos com as atividades desenvolvidas nas oficinas do 1º semestre de 2019 e apresentadas na Feira de Conhecimento da escola rendendo um primeiro lugar na categoria Ensino Médio.

Ainda, no primeiro semestre tivemos duas datas especiais nas quais aproveitamos os trabalhos realizados nas oficinas e ampliamos a atividade envolvendo a comunidade escolar: uma delas foi a Páscoa e a outra foi o Dia das Mães. Nas duas ocasiões, houve comprometimento dos alunos que buscaram aprender com suas obras e aperfeiçoá-las; enfatizamos a eles que eram presentes para outras pessoas, ou seja, além de ensinarmos os conteúdos matemáticos, trabalhamos também a integração e a fraternidade.

Buscamos, também, proporcionar algumas contribuições matemáticas tanto para os professores quanto para os acadêmicos nessa área. Uma delas são os Axiomas de Huzita-Hatori e as noções primitivas da Geometria Plana; a construção de um Portfólio de Geometria; o estudo dos números metálicos, em especial o número de ouro e a construção do retângulo de ouro; os Teoremas de Haga associando a Geometria com a Álgebra através do origami. E, finalmente as Aproximações de Fujimoto e o interessante processo de dobradura de uma tira de papel e números binários na representação da fração 1/n, esse último com pouca literatura em português.

Assim, podemos afirmar que trabalhar com o origami vinculado aos conteúdos matemáticos cabíveis foi muito gratificante, trazendo mais segurança para ensinar e uma abertura para aprender. Mas, cabe a cada professor intermediador conduzir seu trabalho de acordo com sua realidade.

REFERÊNCIAS

ALANYA, A. **Foro de Papiroflexia**. Asosiancion Espanola de Papiroflexia, 2011. Disponível em: <http://www.pajarita.org/foro/viewtopic.php?f=6t=2116>. Acesso em: 21 de janeiro de 2019.

ALMEIDA, T. A. S. de. A Demonstração no Ensino de Geometria. 2016.

ANDRINI Álvaro. **Praticando Matemática**. Guarulhos - SP: Editora do Brasil S/A, 1989.

AVILA, G. **Várias Faces da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BAQUERO, I. V. **Origami At The School**. 2015. Disponível em: <https://papiroflexiaenlaescuela.blogspot.com/p/historia-de-la-papiroflexia.html>. Acesso em: 30 de setembro de 2019.

BONSAI, A. **A equação Áurea de Fibonacci**. 2009. Disponível em: <https://aidobonsai.com/2009/09/06/a-harmonia-da-solidao/>. Acesso em: 24 de julho de 2019.

Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: [s.n.], 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias>. Acesso em: 31 de janeiro de 2019.

CARVALHO, V. **A proporção áurea está em tudo! Na natureza, na vida e em você**. Disponível em: <https://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/>. Acesso em: 24 de julho de 2019.

DA-RIN, B. P. **Um número muito especial VIII**. 2007. Disponível em: <https://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>. Acesso em: 24 de julho de 2019.

DANTE, L. R. **Matemática, Contexto e Aplicações**. São Paulo - SP: Editora Ática, 2014.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9 - Geometria Plana**. São Paulo - SP: Atual Editora, 2013.

HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. **Pequena História Sobre Origami and ORIGAMI e suas variações**. 2019. Disponível em: <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm>. Acesso em: 17 de janeiro de 2019.

HIRAFUJI, C. **Grou: conheça o valor simbólico dessa ave no Japão**. 2017. Disponível em: <https://www.coisasdojapao.com/2017/03/grou-conheca-o-valor-simbolico-dessa-ave-no-japao/>. Acesso em: 30 de setembro de 2019.

KAWANAMI, S. **História da Estátua das Crianças da Bomba Atômica**. 2011. Disponível em: <https://www.japaoemfoco.com/historia-e-significado-do-monumento-da-paz-das-criancas/>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2019.

KAWANAMI, S. **Origem do Origami (Significado)**. 2011. Disponível em: <https://www.japaoemfoco.com/origem-do-origami-significado/>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2019.

KAWANAMI, S. **Akira Yoshizawa, o pai do origami moderno**. 2012. Disponível em: <https://www.japaoemfoco.com/akira-yoshizawa-o-pai-do-origami-moderno/>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2019.

Khartasia. **Ao Gampi**. Disponível em: <http://khartasia-crcc.mnhn.fr/en/commonnamesen/ao-gampi>. Acesso em: 26 agosto de 2019.

KRIER, J. L. **Mathematics and Origami: The Ancient Arts Unite**. 2007.

KUBO, C. **Sadako**. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2OIUiOsLu9o>. Acesso em: 21 de janeiro de 2019.

KUMAYAMA, H. **Matemática versus origami: trissecção de uma ângulo agudo**. 2013. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/of1.pdf>. Acesso em: 31 de agosto de 2019.

Kunihiko. **From The Garden of Zen**. 2015. Disponível em: <https://www.thegardenofzen.com/2015/04/mitsumata-edgeworthia-chrysantha.html>. Acesso em: 26 agosto de 2019.

LUCERO, J. C. A Trissecção de um Ângulo. 2006.

MANIA, P. **Pajarita**. 2019. Disponível em: <https://www.papiroflexiamania.com/pajaritas-de-papel>. Acesso em: 21 de janeiro de 2019.

MATTOS, W. **Proporção Áurea – Guia sobre a Proporção Áurea no Design**. Disponível em: <https://www.chiefofdesign.com.br/proporcao-aurea/>. Acesso em: 24 de julho de 2019.

MEDEIROS, F.; GUANABARA, L. **O problema da trissecção do ângulo**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2017.

Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília: [s.n.], 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 31 de janeiro de 2019.

Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica / Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral.** Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file>. Acesso em: 11 de janeiro de 2019.

MORAES, E. **Mouros, cristãos e povos do Oriente**. 2010. Disponível em: <http://mestresdahistoria.blogspot.com/2010/05/mouros-cristaos-e-povos-do-oriente.html>. Acesso em: 30 de setembro de 2019.

Mundo Estranho. **Como Surgiu o Origami**. Super Interessante, 2011. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-surgiu-o-origami/>. Acesso em: 17 de janeiro de 2019.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Oficina do Origami. **Qual papel usar para origami**. 2011. Disponível em: <http://oficinadoorigami.blogspot.com/2011/03/qual-papel-usar-para-origami.html>. Acesso em: 25 de fevereiro de 2019.

PIMENTA, A. L. **A Geometria com Origami**. PUC, 2017. Disponível em: <http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20180202150554.pdf>.

PIN, O. J.; URIBE, E. B. O. Os Axiomas de Huzita-Hatori e o Ensino da Geometria Euclidiana Plana Através da Construção de Polígonos. Três Lagoas, MS, 2016.

PORTAL EDUCAÇÃO. **Código Binário: o que é?** Disponível em: <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/farmacia/codigo-binario-o-que-e/53475>. Acesso em: 25 de julho de 2019.

RIBEIRO, D. **Tsuru, Grou ou Cegonha**. 2010. Disponível em: <https://simplesmentearte.wordpress.com/2010/12/01/tsuru-grou-ou-cegonha/>. Acesso em: 30 de setembro de 2019.

SANTOS, A. R. S.; VIGLIONI, H. H. de B. Geometria Euclidiana Plana. 2011.

SHIMA, H. Elementary algebra for origami: the trisection problem revisited. **American Journal of Applied Mathematics**, v. 1, n. 4, p. 39–43, 2013. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/8bb7/3cb01144172573f4e99c37c13e085a321cd8.pdf>. Acesso em: 8 de agosto de 2018.

SILVA, L. **Arte e terapia com origamis and 10 benefícios do origami para crianças**. Centro De Produções Técnicas – CURSOS CTP. Disponível em: <https://www.cpt.com.br/noticias/arte-e-terapia-com-origamis>. Acesso em: 28 de junho de 2019.

SZYMANSKI, W. M. **Dwarf Paper Mulberry and Kozo-Broussonetia monoica**. 2018. Disponível em: <http://unusualediblesandtheirwildrelatives.blogspot.com/2018/02/dwarf-paper-mulberry-kozo-broussonetia.html>. Acesso em: 26 agosto de 2019.

VEENSTRA, T. B. **Fujimoto, Number Theory and a New Folding Technique**. 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/237118540_Fujimoto_Number_Theory_and_a_New_Folding_Technique>. Acesso em: 9 de outubro de 2019.

VERNES, J. P. R. **Generalización del primer teorema de Haga**. 2005. Disponível em: <http://vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=comcontentview=articleid=7973:6-generalizaciel-primer-teorema-de-hagacatid=65:papiroflexia-y-matemcasdirectory=67>. Acesso em: 25 de julho de 2019.

VINAGRE, F. **Quase-cristais e Números Metálicos**. Escola Secundária da Azambuja, 2009. Disponível em: <http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1364>. Acesso em: 23 de julho de 2019.

YAMASHITA, T. **Dia do Origami**. 2014. Disponível em: <https://yamashitatereza.wordpress.com/2014/10/26/dia-do-origami/>. Acesso em: 30 de setembro de 2019.

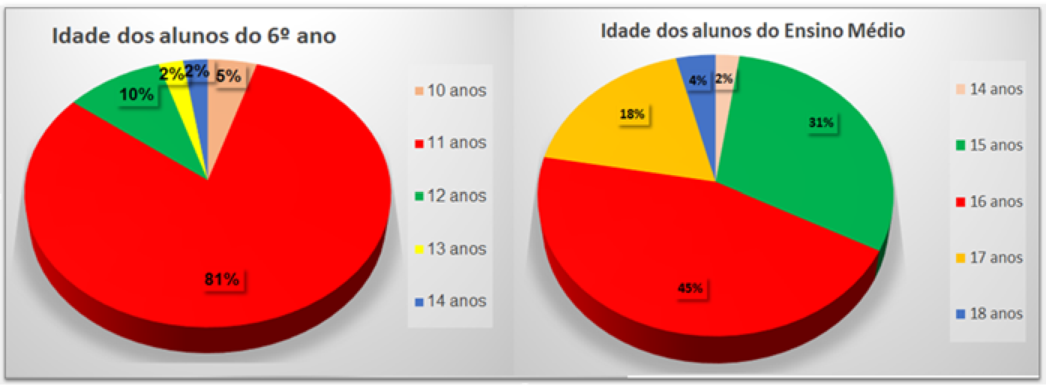
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INVESTIGATIVO SOBRE O ORIGAMI

Com o intuito de verificar o conhecimento dos estudantes sobre os origamis e também de sua associação com a Matemática, foram realizados questionários com os alunos da Escola de Educação Básica Jorge Zipperer, tanto do Ensino Fundamental (sexto ano) quanto com as três séries do Ensino Médio. A primeira etapa ocorreu no início do ano letivo de 2019 e as questões versavam sobre as dobraduras e a exploração do origami na disciplina de Matemática, com o objetivo de situar e delinear o trabalho através da sondagem. A etapa seguinte foi realizar as oficinas, apresentadas no Capítulo 4 e, posteriormente aplicamos outro questionário para verificar a contribuição do trabalho com as dobraduras no ensino de Matemática.

A.1 QUESTIONÁRIO INICIAL

A faixa etária dos participantes foi entre 10 e 19 anos. No Ensino Fundamental a pesquisa foi realizada com os alunos do sexto ano, enquanto que no Ensino Médio, envolveu as três séries, Figura A.1.

Figura A.1: Idade dos alunos participantes da pesquisa



Fonte: O autor

O questionário inicial, Figura A.2, abordou de forma objetiva o tema, com perguntas que deram a noção do conhecimento e interesse dos alunos em relação ao origami.

Figura A.2: Questionário Inicial

Escola de Educação Básica Jorge Zipperer

Série que frequenta:_______________ Idade:___________

QUESTIONÁRIO

1) Você sabe o que é origami?

(   ) Sim. O que é origami?

____

____

(   ) Não.

2) Você sabe construir algo a partir da dobradura de papel?

(   ) Sim. O que sabe construir? ______________________________________

____

(   ) Não sei. Gostaria de aprender? (   ) Sim. (   ) Não.

3) Na escola, você já fez algum tipo de dobradura de papel?

(   ) Sim. Em que disciplina? ____

____

( ) Não.

4) Na disciplina de Matemática, você já usou dobradura de papel ao aprender algum conteúdo?

(   ) Sim. Em qual(ais) conteúdo(s)? __________________________________

____

(   ) Não.

Fonte: O autor

Compilando os resultados, obsevamos que a maioria dos alunos tinham algum conhecimento sobre o origami por terem feito dobraduras como avião, barco, balão e similares, principalmente nas aulas de Artes ou fora das atividades escolares. E, mesmo aqueles que não tinham esse conhecimento prévio sobre o assunto, mostraram interesse em aprender.

• Análise das respostas obtidas em relação às perguntas do questionário investigativo:

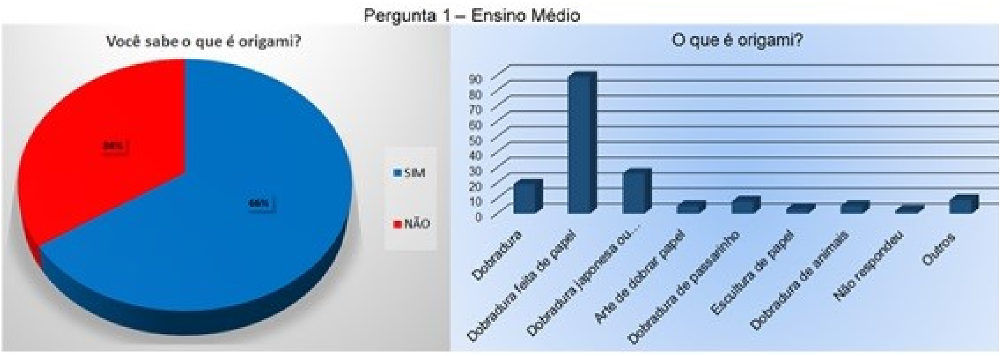
• PERGUNTA 1: **Você sabe o que é origami?**

A primeira pergunta foi referente ao conhecimento sobre o origami e sua definição. Foi possível observar que a maioria dos alunos já ouviu falar sobre o origami e sabe que está relacionado à dobras de papel, Figura A.3 e Figura A.4, porém colocaram isso por escrito, de maneira bem sucinta, em frases curtas e diretas.

Figura A.3: Conceito de origami segundo os alunos do sexto ano

Fonte: O autor

Figura A.4: Conceito de origami segundo os alunos do Ensino Médio

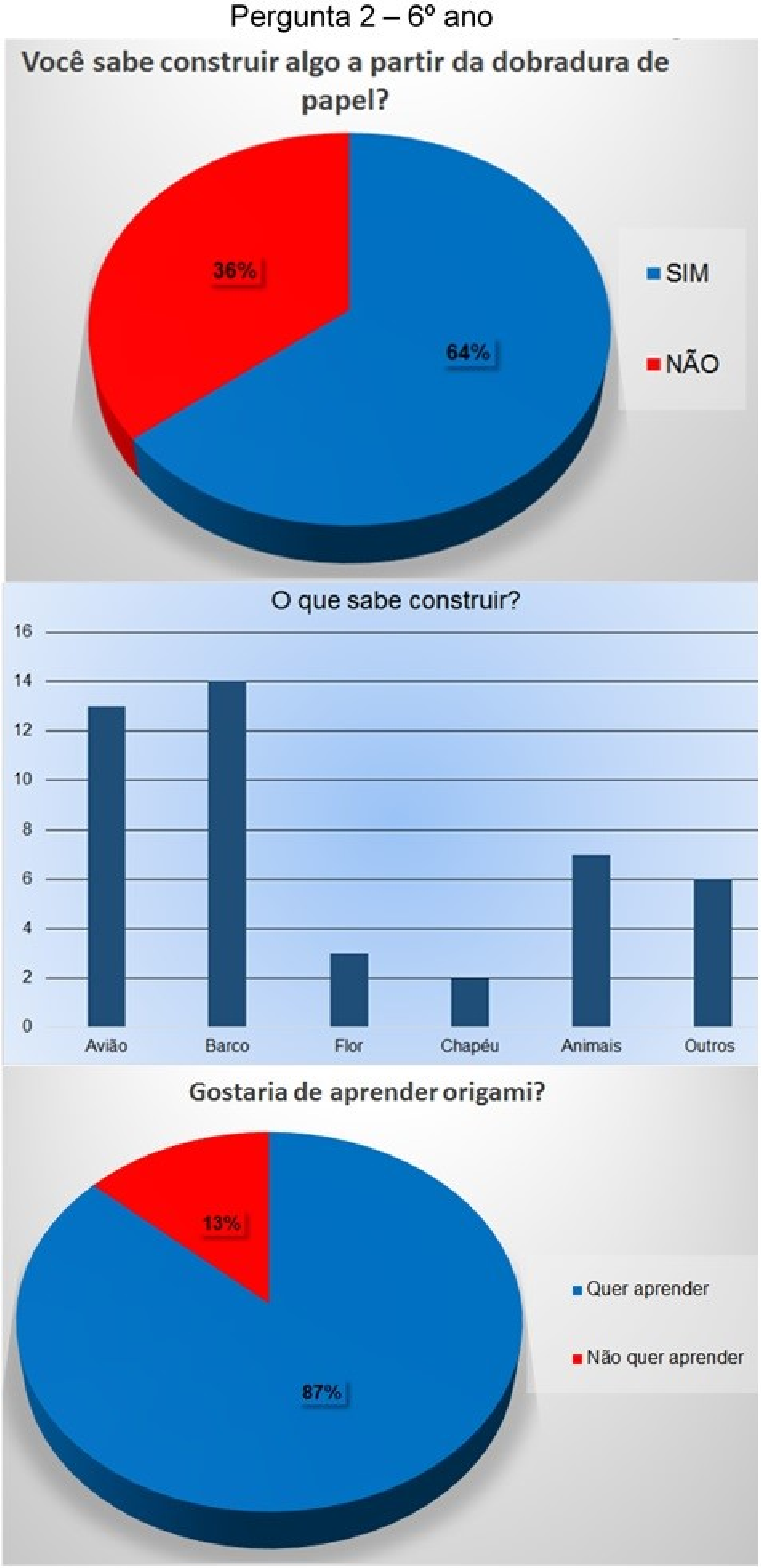


Fonte: O autor

• PERGUNTA 2: **Você sabe construir algo a partir da dobradura de papel?**

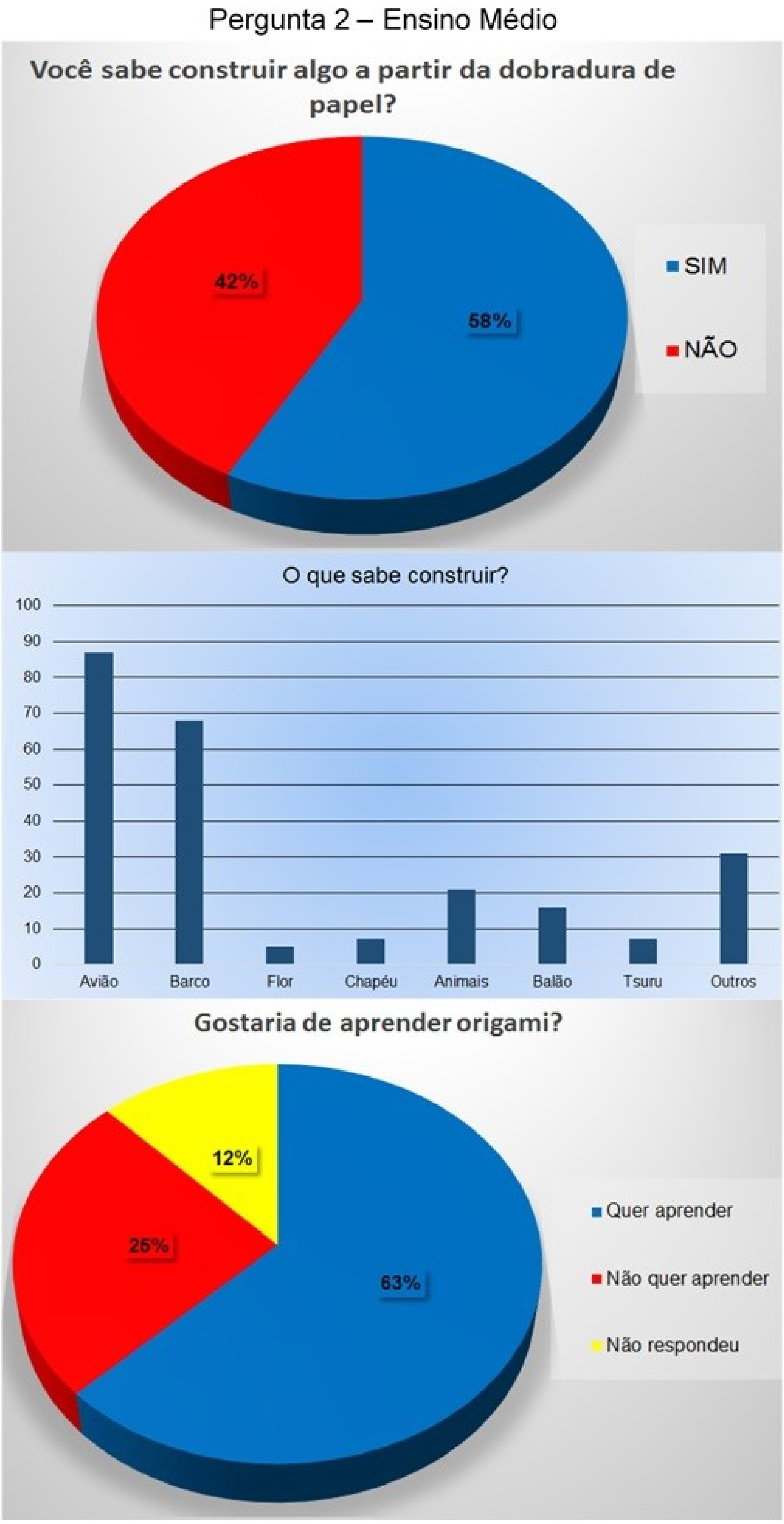
A segunda pergunta focou diretamente na dobradura de papel abordando sobre o interesse dos alunos que não sabem construir nenhum objeto a partir de dobras, em aprender o origami. Diversos tipos de dobraduras foram citadas, porém dobrar um barco ou um avião de papel foram as respostas mais comuns, Figura A.5 e Figura A.5. Alguns alunos comentaram, também, saber construir origami que representam cachorros, sapos, gatos ou passarinhos.

Figura A.5: Resultado da investigação do conhecimento sobre origami pelos alunos do sexto ano



Fonte: O autor

Figura A.6: Resultado da investigação do conhecimento sobre origami pelos alunos do Ensino Médio

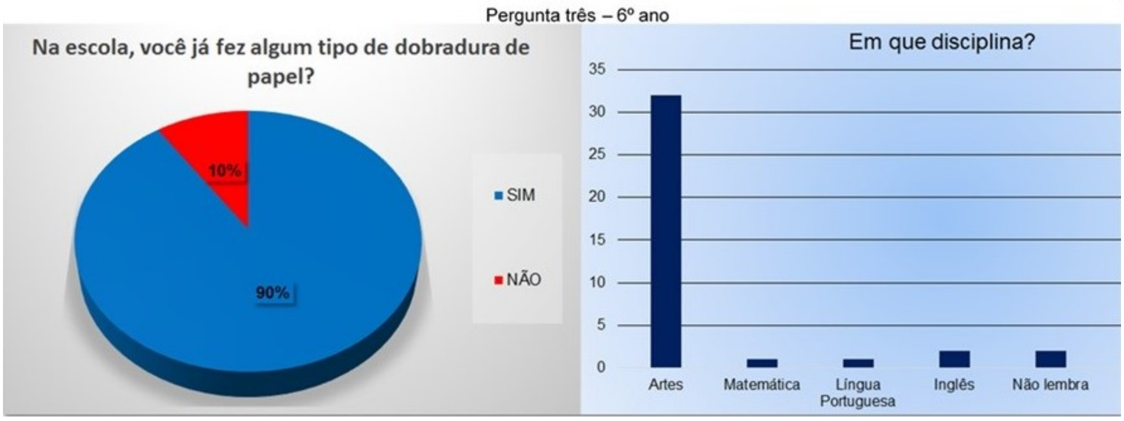


Fonte: O autor

• PERGUNTA 3: **Na escola, você já fez algum tipo de dobradura de papel?**

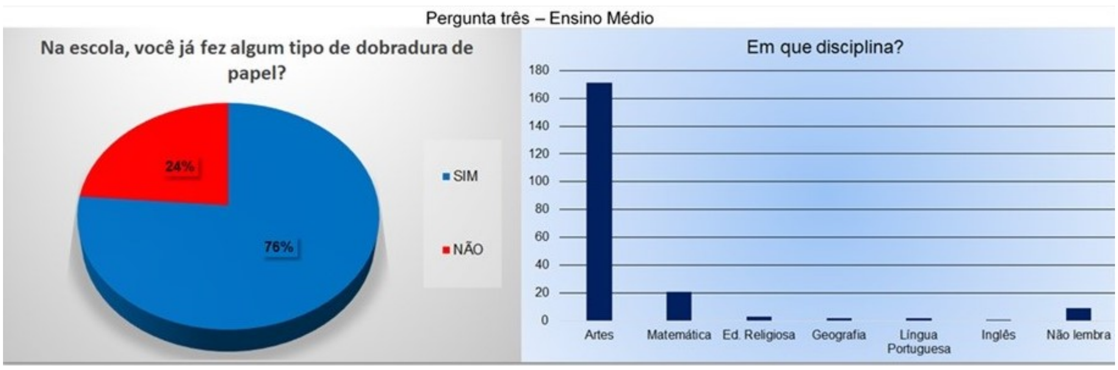
Na terceira pergunta, os alunos relataram sobre o uso do origami na escola, relacionando com alguma disciplina do currículo escolar e a que apareceu em maior destaque foi Artes. As demais respostas foram bem aleatórias e dispersas, poucos alunos citaram as outras disciplinas, o que soa como uma vaga lembrança desses estudantes, pois como todos estudam juntos há vários anos, o retorno deveria ser mais consistente, Figura A.7. Isso aconteceu tanto com os alunos do Ensino Fundamental quanto com o Ensino Médio, Figura A.8.

Figura A.7: Resultado da experiência com o origami na escola, pelos alunos do sexto ano



Fonte: O autor

Figura A.8: Resultado da experiência com o origami na escola, pelos alunos do Ensino Médio



Fonte: O autor

• PERGUNTA 4: **Na disciplina de Matemática, você já usou dobradura de papel ao aprender algum conteúdo?**

Finalmente, focando na disciplina de Matemática, a quarta pergunta questionou o uso do origami na escola em conteúdos matemáticos. Novamente os estudantes, quando lembram que usaram o origami em alguma disciplina, têm dificuldades para relacionar com um conteúdo específico. A curiosidade no sexto ano com o conteúdo de retas numéricas, citadas por eles, deve-se a razão que usaram uma tira de papel, foram dobrabando sucessivas vezes ao meio, para preencher a reta numérica, observando a necessidade de espaços iguais entre os números inteiros da reta, Figura A.9. No Ensino Médio, a maioria dos alunos não lembra do conteúdo matemático que aprendeu com o origami, Figura A.10.

Figura A.9: Resultado do uso de origami em Matemática pelo sexto ano

Fonte: O autor

Figura A.10: Resultado do uso de origami em Matemática pelo Ensino Médio

Fonte: O autor

A.2 QUESTIONÁRIO FINAL - REALIZADO APÓS AS OFICINAS

Após a realização das oficinas concomitante com os conteúdos, outro questionário foi aplicado, Figura A.11, para visualizar a contribuição do uso de materiais como o origami e as pesquisas realizadas pelos estudantes sobre os conteúdos, a contextualização e os assuntos envolvidos ao iniciar um item do programa da disciplina de Matemática.

Figura A.11: Questionário aplicado após as Oficinas de Origami e Matemática

Escola de Educação Básica Jorge Zipperer

Série que frequenta:_______________ Idade:___________

QUESTIONÁRIO

1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.

(   ) Sim. ____

____

(   ) Não. ____

____

2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.

(   ) Sim. ____

____

(   ) Não. ____

____

3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.

(   ) Sim. ____

____

(   ) Não. ____

____

4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.

(   ) Sim. ____

____

(   ) Não. ____

____

Fonte: O autor

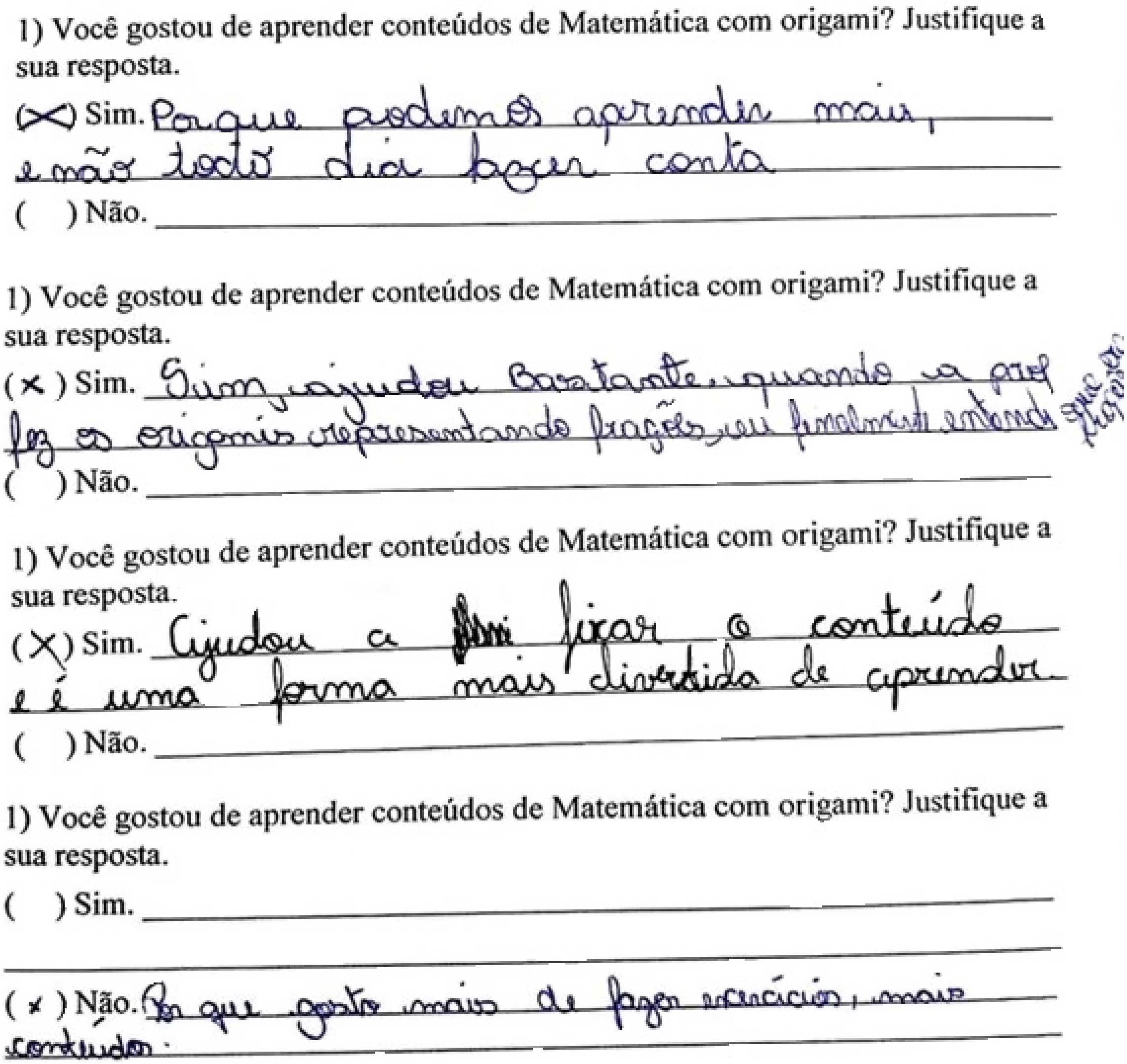
Análise das respostas: sexto ano

Fazendo uma análise das respostas fornecidas pelos alunos do sexto ano, pudemos observar que o retorno foi positivo.

• PERGUNTA 1: **Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami?**

Pouquíssimas respostas foram negativas, apresentando como argumento o gosto pelo tradicional, pelos exercícios feitos no caderno após a explicação dos conteúdos. A grande maioria respondeu positivamente e a Figura A.12 destaca algumas das opiniões.

Figura A.12: Opiniões dos alunos do sexto ano sobre aprender conteúdos matemáticos com origami


1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Porque podemos aprender mais, e não todo dia fazer conta
( ) Não.

1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
(x) Sim. Sim, ajudou bastante, quando a prof fez os origamis representando frações, eu finalmente entendi frações
( ) Não.

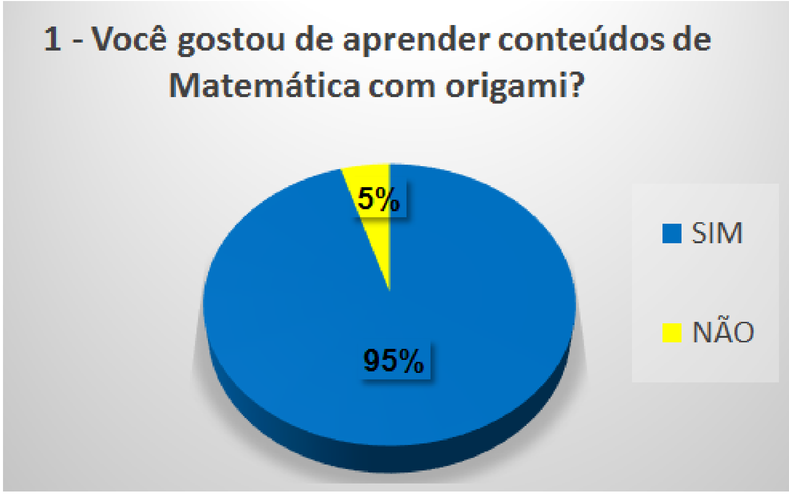
1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Ajudou a fixar o conteúdo e é uma forma mais divertida de aprender
( ) Não.

1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
( ) Sim.
(x) Não. Porque gosto mais de fazer exercícios, mais conteúdos.

Fonte: O autor

As respostas dos alunos mostraram que eles simpatizam com aulas diferenciadas, Figura A.13, que mudar a rotina pode contribuir para a aprendizagem.

Figura A.13: Retorno dos alunos do sexto ano sobre aprender Matemática com origami

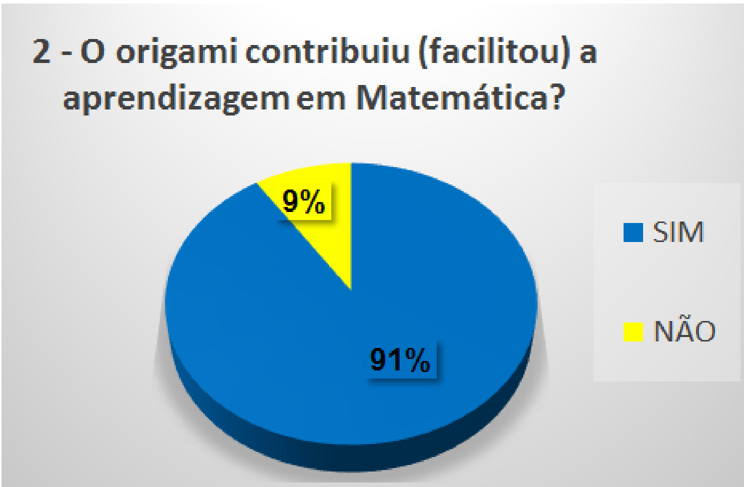


Fonte: O autor

- PERGUNTA 2: **O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem de Matemática?**

A maioria dos estudantes responderam positivamente a essa pergunta, Figura A.14.

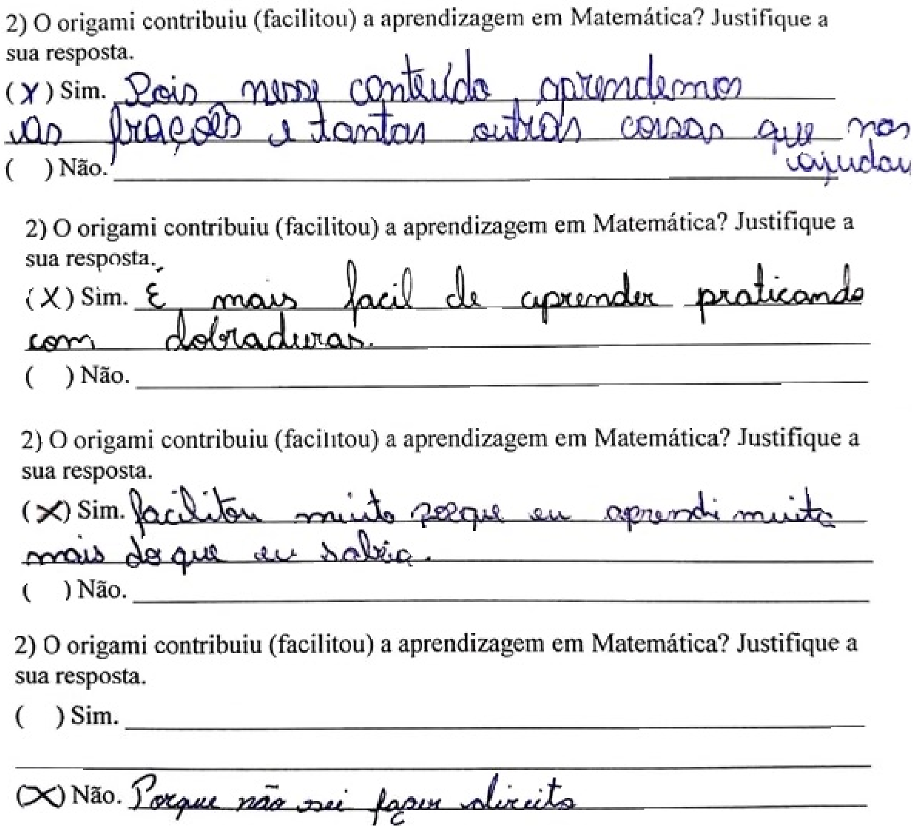
Figura A.14: Retorno dos alunos do sexto ano sobre a contribuição do origami na aprendizagem



Fonte: O autor

Os estudantes colocaram a facilidade de ocorrer a aprendizagem matemática com a contribuição do origami. Novamente as respostas negativas, vieram daqueles que apresentam resistência ao novo, o receio de errar, mesmo que seja em dobrar um pedaço de papel, Figura A.15.

Figura A.15: Opiniões dos alunos do sexto ano sobre a contribuição do origami na aprendizagem


2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Pois nesse conteúdo aprendemos as frações e tantas outras coisas que nos ajudou
(   ) Não.

2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. É mais facil de aprender praticando com dobraduras.
(   ) Não.

2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. facilitou muito porque eu aprendi muito mais do que eu sabia.
(   ) Não.

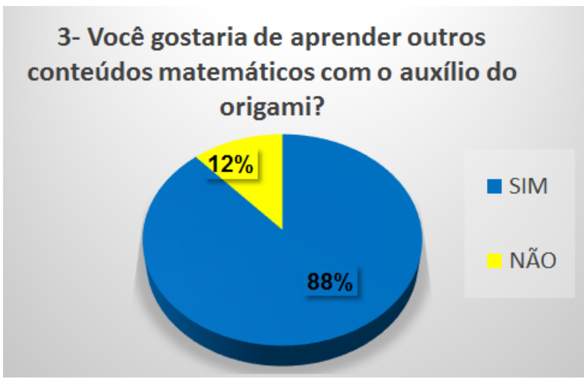
2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(   ) Sim.
(X) Não. Porque não sei fazer direito

Fonte: O autor

• PERGUNTA 3: **Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami?**

Novamente a grande maioria dos alunos reagiram bem a essa pergunta, Figura A.16.

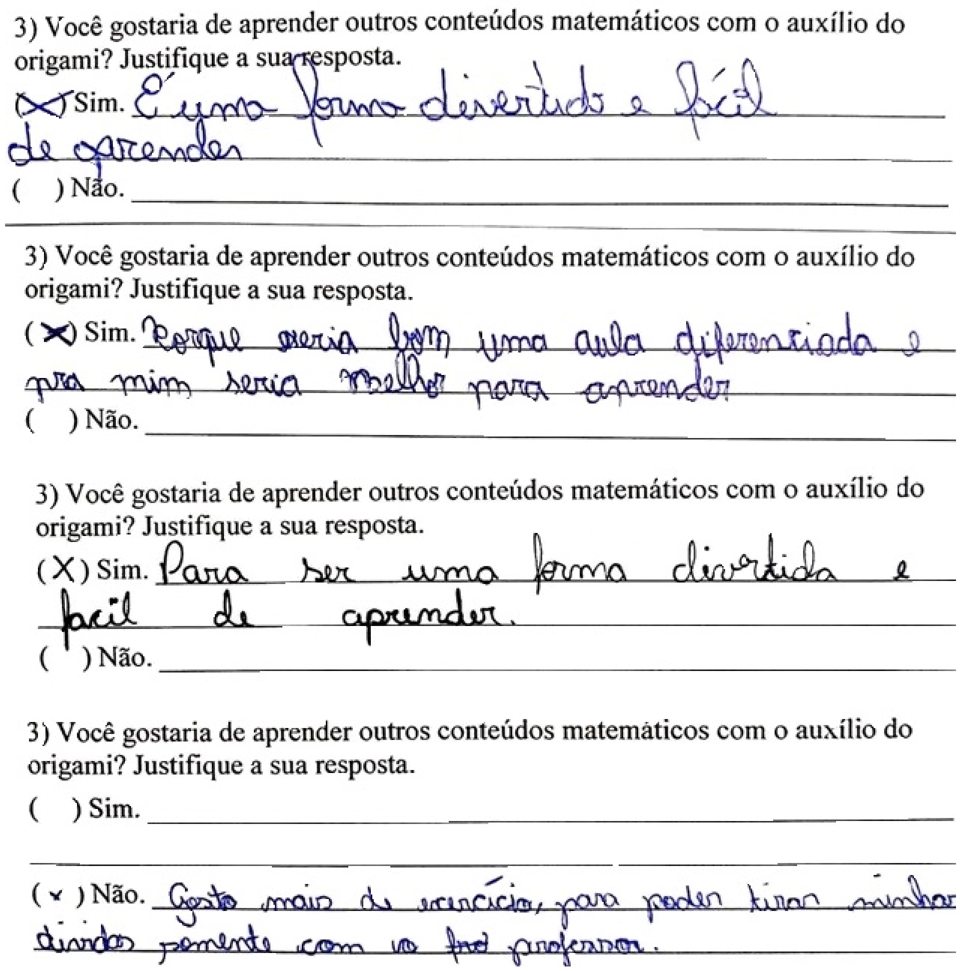
Figura A.16: Retorno dos alunos do sexto ano sobre aprender outros conteúdos Matemáticos com origami



Fonte: O autor

Os alunos do sexto ano ainda são crianças e enfatizaram o desejo de aprender brincando, pois as respostas afirmativas a essa questão trouxeram a palavra “divertida” como a mais comum nas suas justificativas. E, aqueles que gostam de trabalhar sozinhos, não apreciam ainda os trabalhos em equipe, optaram por responder “não” ao fato de usar origami para novos aprendizados, Figura A.17.

Figura A.17: Opiniões dos alunos do sexto ano sobre aprender outros conteúdos Matemáticos com origami



3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. É uma forma divertida e fácil de aprender
( ) Não.

3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Porque seria bom uma aula diferenciada e pra mim seria melhor para aprender
( ) Não.

3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Para ser uma forma divertida e fácil de aprender.
( ) Não.

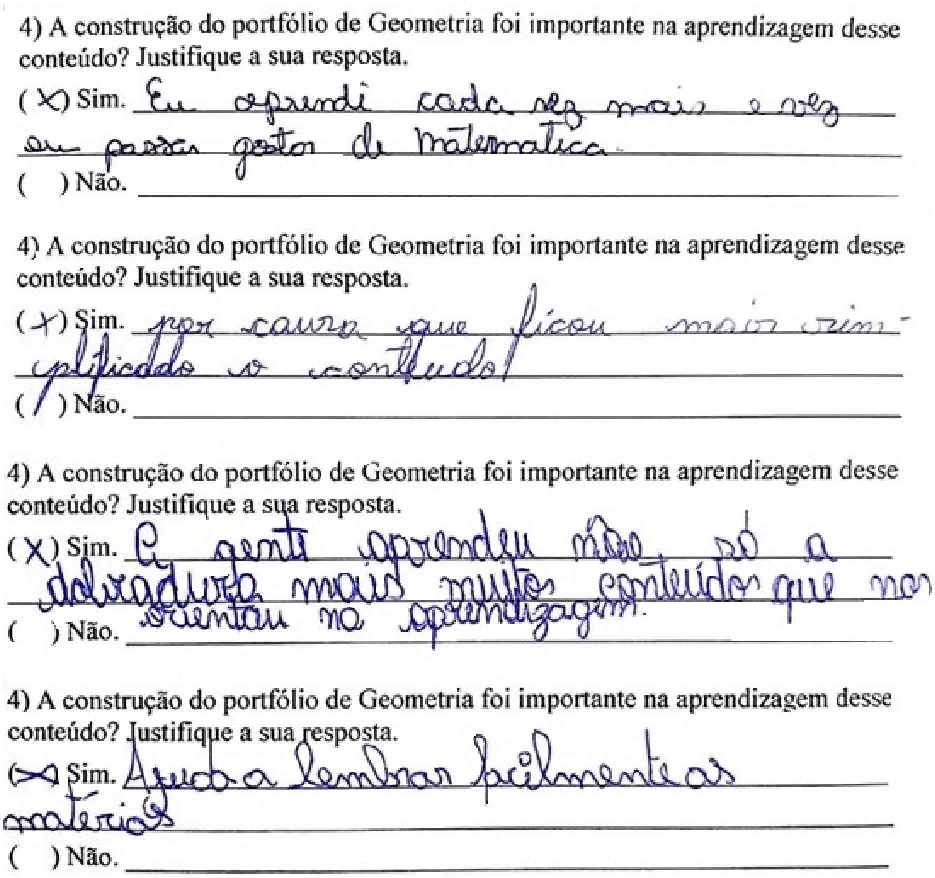
3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
( ) Sim.
(x) Não. Gosto mais de exercício, para poder tirar minhas dúvidas somente com o ~~pro~~ professor.

Fonte: O autor

• PERGUNTA 4: **A construção do Portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo?**

Usar um portfólio para colocar os conteúdos estudados durante o trabalho com origamis, ajudou os alunos a se organizarem, como mostra o retorno à pergunta 4 do questionário final, Figura A.18. Assim, além de aprender os assuntos envolvidos com as dobraduras, também foram assimilando uma maneira de obterem um material de fácil acesso para as pesquisas ou simplesmente, para recordarem algum conceito.

Figura A.18: Opiniões dos alunos do sexto ano sobre construir um portfólio usando origami


4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Eu aprendi cada vez mais e vez eu passei gostar de matemática.
( ) Não.

4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. por causa que ficou mais simplificado o conteúdo!
(/) Não.

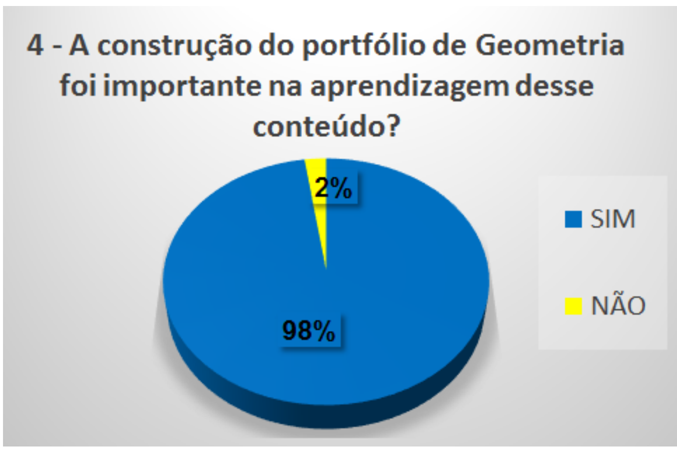
4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. A gente aprendeu não só a dobradura mais muitos conteúdos que nos orientou na aprendizagem.
( ) Não.

4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Ajuda a lembrar facilmente as matérias
( ) Não.

Fonte: O autor

Os alunos do sexto ano gostaram de construir um portfólio com uso de origamis, Figura A.19.

Figura A.19: Retorno dos alunos do sexto ano sobre construir um portfólio usando origami



Fonte: O autor

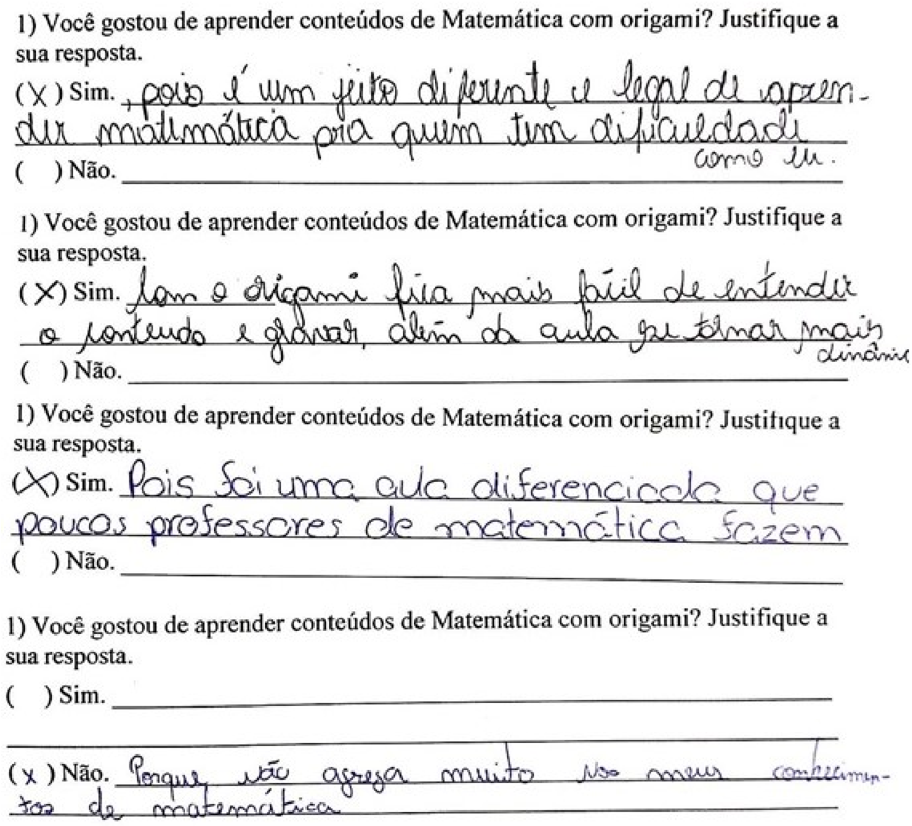
Análise das respostas: Ensino Médio

E, analisando as respostas apresentadas pelos alunos do Ensino Médio, às mesmas perguntas do questionário final obtivemos um retorno semelhante.

• PERGUNTA 1: **Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami?**

Alguns, dos poucos alunos que responderam que não gostaram das aulas com dobraduras, alegaram que o tempo das aulas com dobraduras foi muito longo. Acreditam que os assuntos poderiam ser apenas explicados pelo professor, sem precisar do concreto, do origami. Porém, a maioria dos estudantes viu no origami uma maneira diferente de aprender os conteúdos de matemática. As aulas, para muitos alunos, ficaram mais dinâmicas e atrativas, e fazer as dobraduras ajudou na aprendizagem, como mostra os depoimentos apresentados na Figura A.20.

Figura A.20: Opiniões dos alunos do Ensino Médio sobre aprender conteúdos de Matemática com o origami


1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. pois é um jeito diferente e legal de apren-der matemática pra quem tem dificuldade como eu.
( ) Não.

1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Com o origami fica mais fácil de entender o conteudo e gravar, além da aula se tornar mais dinâmica
( ) Não.

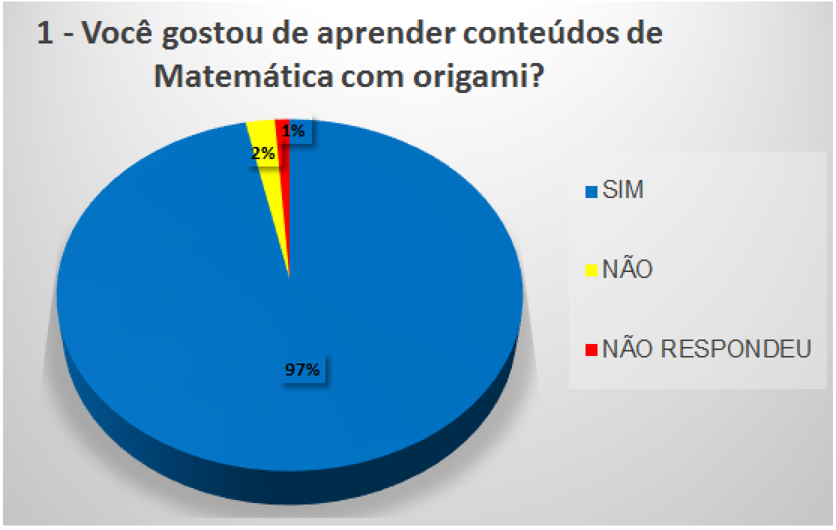
1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Pois foi uma aula diferenciada que poucos professores de matemática fazem
( ) Não.

1) Você gostou de aprender conteúdos de Matemática com origami? Justifique a sua resposta.
( ) Sim.
(x) Não. Porque não agrega muito nos meus conhecimen-tos de matemática

Fonte: O autor

A maioria dos alunos dos três anos do Ensino Médio também gostaram da experiência de se apropriar de alguns conceitos matemáticos com o auxílio do origami, Figura A.21, apesar de alguns comentários contrários.

Figura A.21: Retorno dos alunos do Ensino Médio sobre aprender Matemática com origami

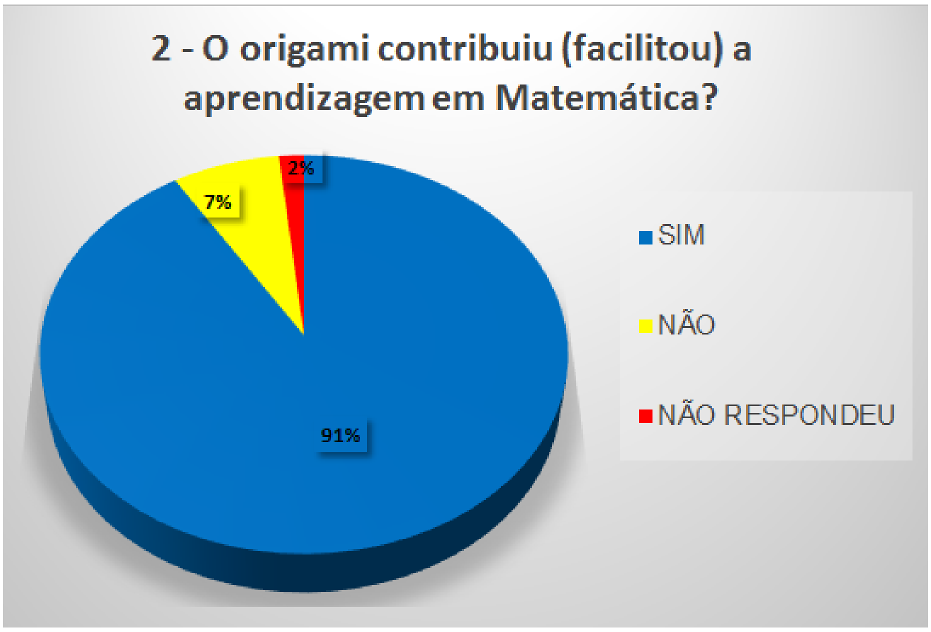


Fonte: O autor

• PERGUNTA 2: **O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática?**

Reforçando a resposta à pergunta 1, a maioria dos alunos do Ensino Médio, respondeu que o origami contribui para a aprendizagem matemática, A.22 .

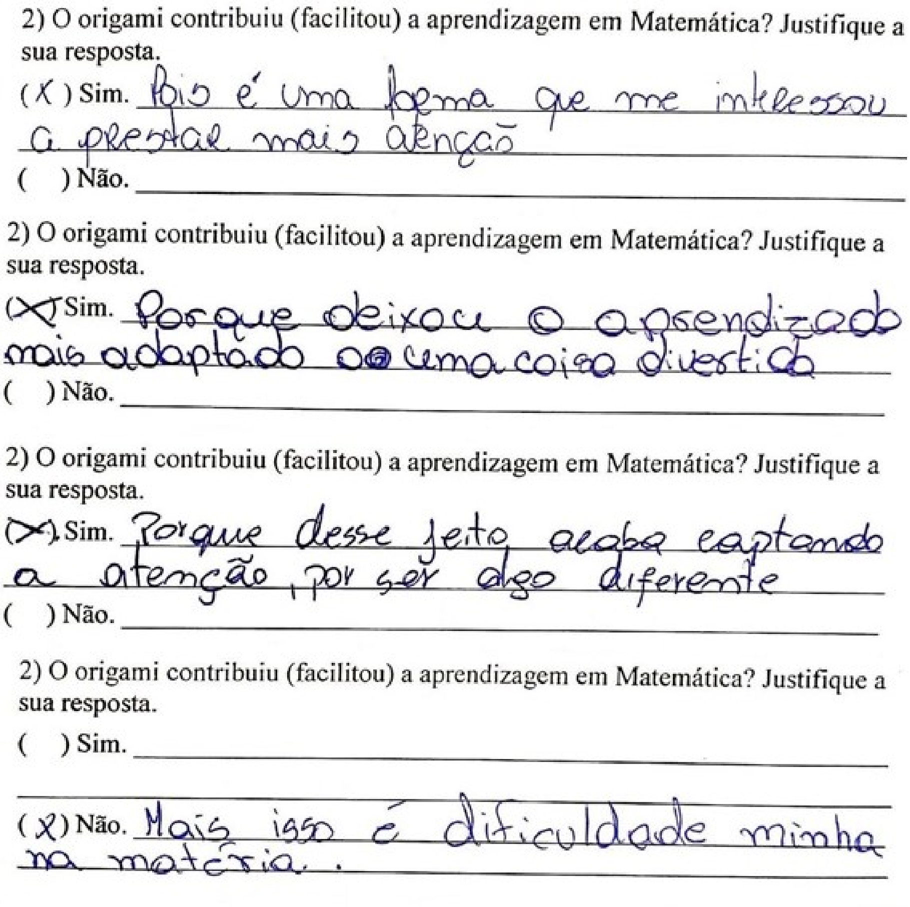
Figura A.22: Retorno dos alunos do Ensino Médio sobre a contribuição do origami na aprendizagem



Fonte: O autor

As respostas dos estudantes para essa questão, apresentaram o oposto das respostas negativas apresentadas na pergunta anterior, Figura A.20, pois eles comentaram que o interesse pelas aulas, a atenção que tinham ao conteúdo foi maior. Logo, a aprendizagem também é mais relevante. A maioria dos alunos que responderam "não" a essa questão elencaram uma dificuldade individual em relação à Geometria ou mesmo à dobradura de papel, Figura A.23.

Figura A.23: Opiniões dos alunos do Ensino Médio sobre a contribuição do origami na aprendizagem


2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Pois é uma forma que me interessou a prestar mais atenção
( ) Não.

2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Porque deixou o aprendizado mais adaptado ao uma coisa divertida
( ) Não.

2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Porque desse jeito acaba captando a atenção, por ser algo diferente
( ) Não.

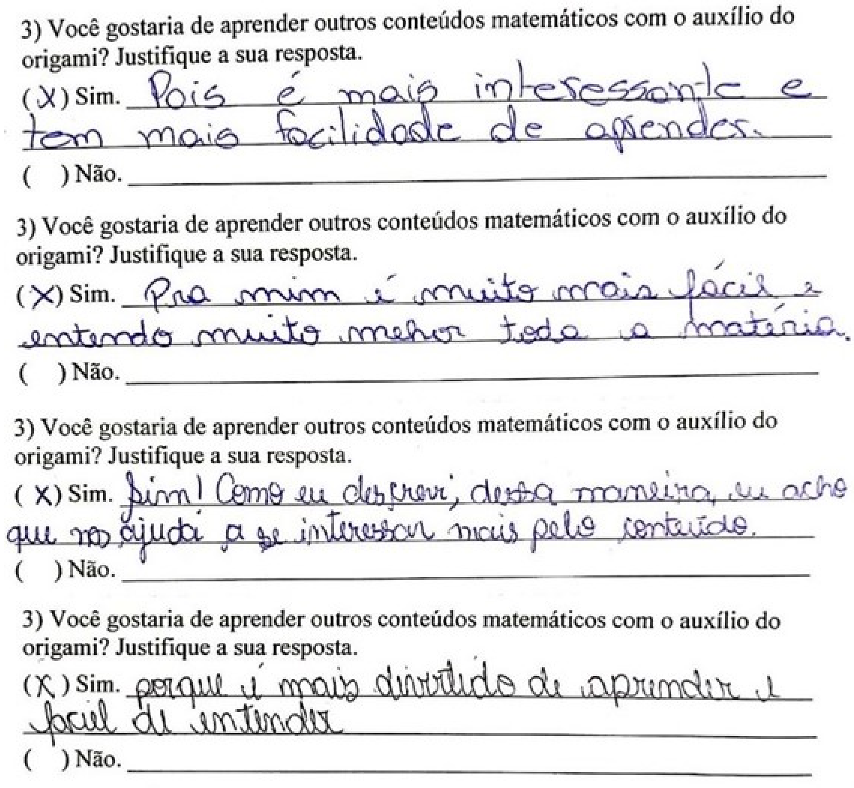
2) O origami contribuiu (facilitou) a aprendizagem em Matemática? Justifique a sua resposta.
( ) Sim.
(X) Não. Mais isso é dificuldade minha na matéria.

Fonte: O autor

• PERGUNTA 3: **Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami?**

Muitos dos alunos que gostariam de continuar usando o origami para compreender novos conceitos matemáticos, afirmaram que essa prática facilita a aprendizagem e a torna mais agradável. Alguns alunos, responderam "não", afirmando que preferem trabalhar com mais conteúdos que podem ser usados nos vestibulares.

Figura A.24: Opiniões dos alunos do Ensino Médio sobre aprender outros conteúdos Matemáticos com origami



3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Pois é mais interessante e tem mais facilidade de aprender.
(   ) Não.

3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Pra mim é muito mais fácil e entendo muito melhor toda a matéria.
(   ) Não.

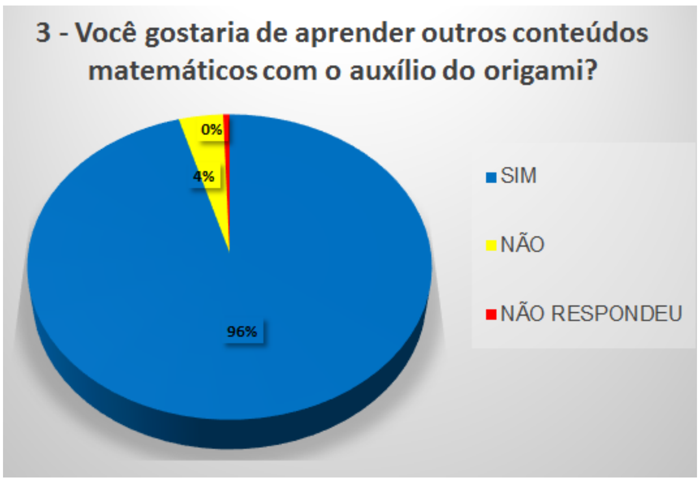
3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Sim! Como eu descrevi, desta maneira, eu acho que nos ajuda a se interessar mais pelo conteúdo.
(   ) Não.

3) Você gostaria de aprender outros conteúdos matemáticos com o auxílio do origami? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. porque é mais divertido de aprender e fácil de entender
(   ) Não.

Fonte: O autor

Mesmo assim, pela Figura A.25 percebemos que alunos do Ensino Médio mostraram grande interesse de continuar com aulas diferenciadas, como por exemplo, usando o origami.

Figura A.25: Retorno dos alunos do Ensino Médio sobre aprender outros conteúdos Matemáticos com origami

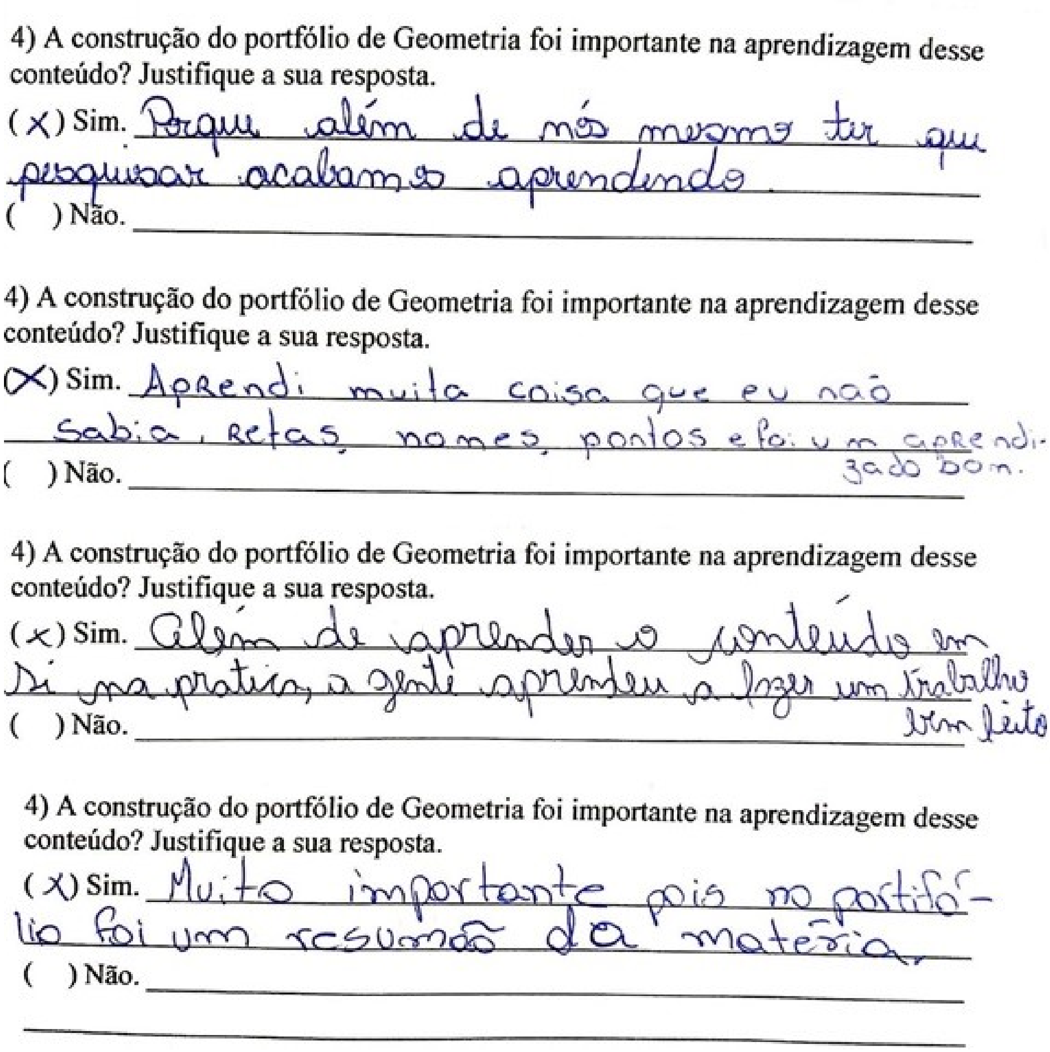


Fonte: O autor

• PERGUNTA 4: **A construção do Portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo?**

O interessante em muitas das respostas dadas pelos alunos na quarta questão, foi o fato de terem realmente feito o trabalho, inclusive a pesquisa, não ter sido apenas uma reprodução, as páginas do portfólio foram produto do trabalho de cada um, das dobras, dos conhecimentos adquiridos e finalmente, de maneira bem organizada como mostra alguns dos depoimentos da Figura A.26. Assim eles criaram um amplo material de pesquisa sobre geometria, com conceitos, que apesar de básicos, nem sempre eram compreendidos.

Figura A.26: Retorno dos alunos do Ensino Médio sobre construir um portfólio usando origami


4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Porque além de nós mesmos ter que pesquisar acabamos aprendendo.
( ) Não.

4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Aprendi muita coisa que eu não sabia, retas, nomes, pontos e foi um aprendizado bom.
( ) Não.

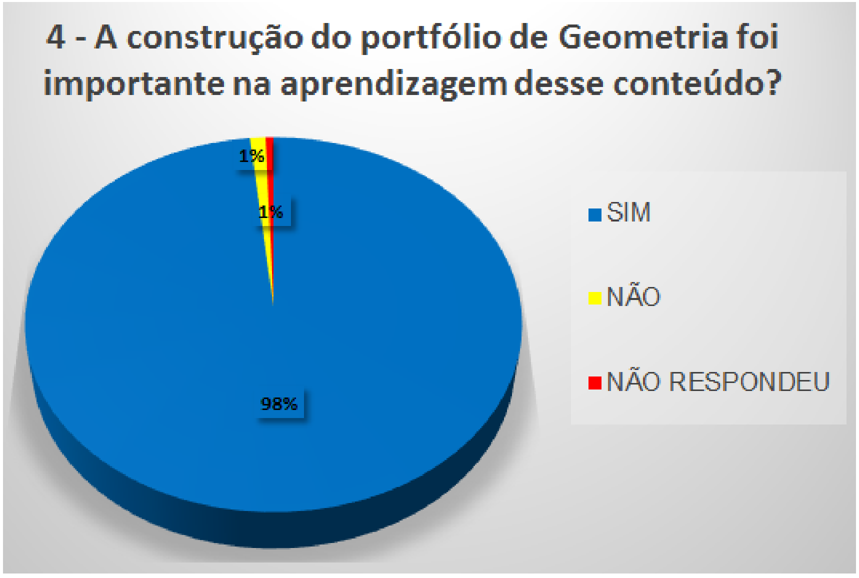
4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Além de aprender o conteúdo em si na prática, a gente aprendeu a fazer um trabalho bem feito
( ) Não.

4) A construção do portfólio de Geometria foi importante na aprendizagem desse conteúdo? Justifique a sua resposta.
(X) Sim. Muito importante pois no portifó-lio foi um resumão da matéria.
( ) Não.

Fonte: O autor

Sendo confirmado na Figura A.27 em que praticamente todos os alunos do Ensino Médio concordaram com a contribuição da construção de um portfólio com o uso do origami.

Figura A.27: Retorno dos alunos do Ensino Médio sobre construir um portfólio usando origami



Fonte: O autor