Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

O uso do Geogebra no trabalho pedagógico de desenvolvimento do raciocínio proporcional

Por

Luiz Geraldo da Silva

Agosto /2019
João Pessoa – PB

O uso do Geogebra no trabalho pedagógico de desenvolvimento do raciocínio proporcional

Por

Luiz Geraldo da Silva

sob a orientação do

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMATCCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto /2019
João Pessoa – PB

Catalogação na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S586u Silva, Luiz Geraldo da.
O uso do Geogebra no trabalho pedagógico de desenvolvimento do raciocínio proporcional / Luiz Geraldo da Silva. - João Pessoa, 2019.
144 f. : il.

Orientação: Bruno Henrique Carvalho Ribeiro.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/Matemática.

1. Proporcionalidade. 2. Razão. 3. Raciocínio Proporcional. 4. Geogebra. I. Ribeiro, Bruno Henrique Carvalho. II. Título.

UFPB/BC

O uso do Geogebra no trabalho pedagógico de desenvolvimento do raciocínio proporcional

Por

Luiz Geraldo da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro -UFPB (Orientador)

Eudes Mendes Barboza

Prof. Dr. Eudes Mendes Barboza - UFRPE

Flank David Morais Bezerra

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra - UFPB

Agosto/2019

Agradecimentos

À minha mãe Maria José, meus irmãos Lúcia, Liana, Carlos e Beto e a meu sobrinho Pedro, por serem um porto seguro na minha existência.

A meus professores que me deram uma base sólida.

A meus colegas nesta turma de mestrado, especialmente João Gonçalves que me apoiou num momento muito difícil.

Ao professor Bruno Ribeiro, meu orientador, por sua paciência e encorajamento.

A Norma Thornburg, que me mostrou o mundo da educação com tecnologia.

Aos professores Verônica Gitirana, Alina Galvão Spinillo, Ana Isabel Silvestre e William Vieira Gonçalves, principais nomes de referência neste trabalho.

Aos meus caríssimos alunos por seu ânimo e interesse nas minhas "experimentações"

Meu mais sincero

Obrigado.

Dedico este trabalho

A minha mãe

Que teve que lutar muito

para que a gente, eu e meus irmãos,

pudesse ser gente

"La vi quemar el agua
La vi mojar el fuego
La vi crecer las manos
Velando nuestros sueños
Mi madre fue mi padre
Mi voz y mi alimento"

"Cuanto Trabajo", música de Gloria Martín

"Yo soy yo y mis circunstancia,
y si no la salvo a ella no me salvo yo.

José Ortega y Gasset (1883-1955)

Resumo

Neste trabalho, a partir do estudo sobre o raciocínio proporcional e seu desenvolvimento, dentro de uma visão construtivista do processo educativo e tomando como principais referências a Teoria dos Campos Conceituais, de Gérard Vergnaud e os trabalhos do *The Rational Number Project*, criamos um livro virtual com, atualmente, 13 aplicativos (dos quais 9 são aqui apresentados e discutidos), elaborados com o software Geogebra, que visam contribuir no trabalho educacional para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Nesta dissertação procuramos cobrir uma gama de diferentes tipos de problemas (problemas de valor omisso, de comparação, problemas de ampliação/redução e do tipo parte:parte:todo); problemas nos quais se pudessem empregar diferentes estratégias de resolução que se utilizassem tanto de números inteiros quanto racionais, na sua forma decimal ou fracionária; problemas de caráter quantitativo e também qualitativo; com o uso de grandezas contínuas ou discretas; problemas que usassem os mais diferentes tipos de representações, quais sejam tabelas, gráficos, expressões algébricas, linguagem técnica matemática ou mesmo a linguagem usual. Este conjunto de aplicativos, ainda em construção, se pretende mais uma ferramenta motivadora e eficiente na nossa ação educativa com a matemática.

Abstract

In this paper, based on the study of proportional reasoning and its development, within a constructivist view of the educational process and using as main references Gérard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields and the work of The Rational Number Project, we created a virtual book with 13 applications (9 of which are presented and discussed here), developed using Geogebra software, which aim to contribute in the educational work in the development of proportional reasoning. We cover a range of different types of problems (missing value, comparison, enlargement / reduction, and part: part: whole problems); problems that could employ different resolution strategies and use both integer and rational numbers in their decimal or fractional form; quantitative and qualitative problems; with the use of continuous or discrete quantities; problems that used the most different types of representations, such as tables, graphs, algebraic expressions, technical mathematical language or even usual language. This set of applications, which is still in development, is intended as another motivating and efficient tool in our educational action in mathematics.

Sumário

Índice das Figuras

Índice das Tabelas

Introdução

Durante os primeiros quinze anos de minha vida profissional, fui professor de matemática e desenho geométrico nos anos finais do Ensino Fundamental. Nesse período alguns temas da matemática se sobressaíam em termos das dificuldades encontradas para se conseguir o almejado sucesso nas aprendizagens de meus alunos. Entre eles se encontravam os números racionais e a proporcionalidade. Sempre tive a sensação de que me faltavam as ferramentas necessárias para lidar com o grau de complexidade destes assuntos. O grande número de fatores envolvidos, tais como a variedade de formas em que os problemas eram apresentados, a amplitude de aplicações e a quantidade de diferentes representações me faziam sentir muitas vezes impotente e frustrado. Sentia que me faltavam materiais manipuláveis que possibilitassem a criação de visualizações poderosas nas mentes dos alunos. Os livros didáticos, por outro lado, faziam crer que aprender proporcionalidade não era mais do que aplicar a famosa regra de três e que o trabalho com números racionais se reduzia a um conjunto de regras.

Nos anos seguintes, durante a década de 90, comecei a ter contato e trabalhar com o que na época denominava-se Informática Educacional. As emergentes tecnologias da informação começavam a ser vistas como possíveis ferramentas educacionais. A experiência com o emprego de tecnologias digitais no trabalho de formação de professores e na lida com os alunos, me fizeram perceber as potencialidades dessas tecnologias para o aprimoramento do trabalho pedagógico.

O aparecimento de programas como o Cabri Géomètre e depois, o Geogebra, veio ao encontro de meus anseios em busca de melhores e mais poderosas ferramentas de trabalho no ensino de matemática.

Depois de trabalhar vários anos no uso e na criação de pequenos apps com o Geogebra, me aventurei na criação de um livro virtual que servisse como uma espécie de caixa de ferramentas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Assim nasceu o livro, virtual e em desenvolvimento, **Proporcionalidade Com O Geogebra** localizado em *https://www.geogebra.org/m/mh4vgspf.*

Este livro é formado por um conjunto de pequenos programas, chamados também de apps (do inglês *application*, aplicativo), feitos no ambiente do Geogebra e que abordam diferentes problemas relacionados ao tema do raciocínio proporcional.

Esta dissertação tem como objetivo principal apresentar este livro virtual e dar a devida fundamentação teórica, objetivos e princípios que nortearam a criação do mesmo (Figura 1)

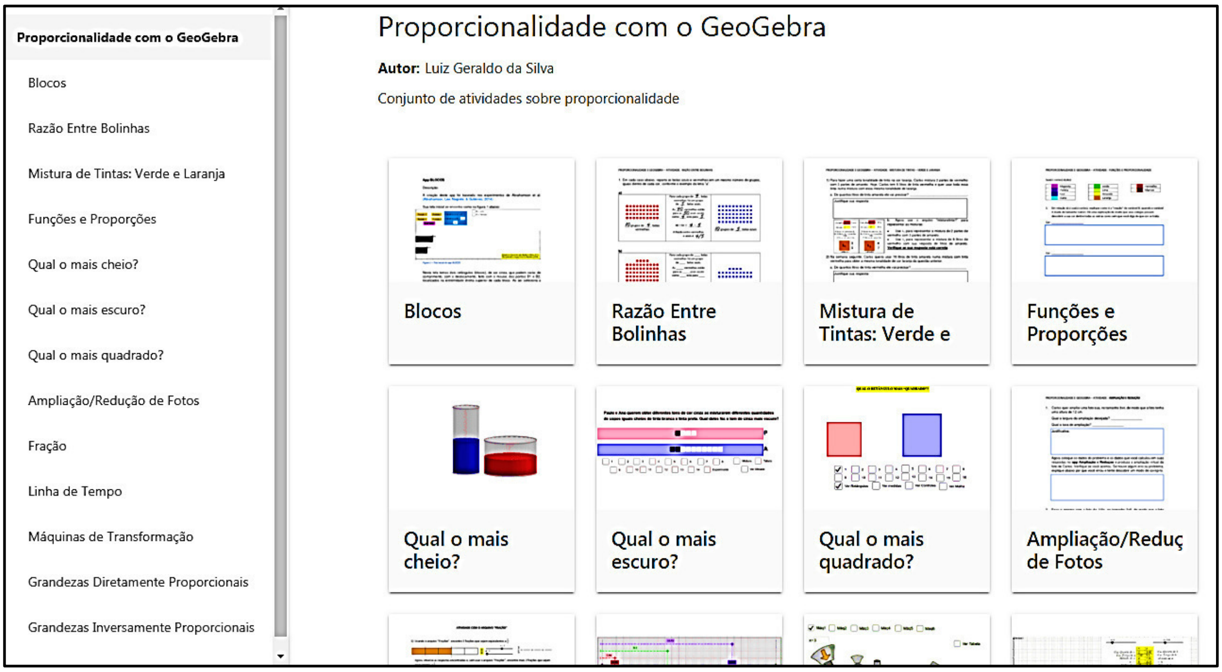


Figura 1 - Tela Inicial do Livro Virtual Proporcionalidade Com O Geogebra

Este trabalho começou a ser pensado a partir de uma tripla constatação:

1. A importância do tema para o desenvolvimento futuro da vida acadêmica e privada dos alunos.
2. O baixo nível de sucesso por parte dos alunos na resolução dos vários problemas em que este tipo de raciocínio pode ser usado
3. A possibilidade de inovação no trabalho pedagógico que o uso de tecnologias digitais pode trazer para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

No Capítulo 1, é feita a fundamentação teórica abordando o tema do Raciocínio Proporcional. Discutimos primeiro a sua relevância. É ressaltada a sua importância não só em termos da aprendizagem da matemática, mas também de outras disciplinas que se utilizam da proporcionalidade. Nas palavras de Lesh et al. (1988), *“consideramos o raciocínio proporcional com um conceito pivot. Por um lado, é o culminar dos alunos da escola primária e por outro lado, é o alicerce de tudo o que segue*”. Na segunda seção deste capítulo abordamos a conceitualização do raciocínio proporcional. Tomando por base o trabalho de Silvestre (2012), que agrupou os principais aspectos relacionados a este conceito amplo e complexo, apresentamos uma tabela resumo deste conceito (Tabela 1, p. 18)

Na terceira seção do capítulo 1 apresentamos alguns estudos que descrevem o desenvolvimento do raciocínio proporcional nas crianças e adolescentes. As duas principais linhas de pesquisa são apresentadas e discutidas. Mostramos que há uma série de trabalhos que colocam o início desse desenvolvimento ainda na infância e ressaltam a importância de fomentar esse processo com atividades apropriadas.

Em seguida, na quarta e na quinta seção, fazemos um levantamento de como vários autores classificaram os diferentes tipos de problemas relacionados ao raciocínio proporcional e das várias estratégias utilizadas nas suas resoluções. O trabalho de Gérard Vergnaud com a Teoria dos Campos Conceituais é referência fundamental na classificação e descrição dos tipos de problemas e estratégias de solução usadas.

No capítulo 2, fazemos um estudo sobre algumas das relações possíveis entre o uso de Tecnologias da informação e a educação, particularmente a educação matemática. Vários autores e trabalhos são apresentados, mas destacamos aqueles que veem a tecnologia como uma ferramenta e não como um fim em si mesma. Em seguida é apresentado um breve relato histórico sobre a criação e desenvolvimento do Geogebra e uma pequena descrição do programa.

No terceiro e último capítulo apresentamos o livro virtual e reservamos uma seção para cada um dos aplicativos que lá se encontram. Na primeira parte há uma discussão sobre os princípios que regeram a sua criação. Os apps são concebidos como ambientes de exploração orientada, de visualização e de experimentação. Aprofundamos o significado destes dois últimos termos e caracterizamos o estilo de trabalho por parte do professor e do aluno que estes apps pressupõem.

Finalmente fazemos uma descrição de cada um dos apps, de suas ferramentas e suas características. Discutimos também as atividades propostas para cada um deles, algumas das possíveis estratégias de resolução dos problemas propostos e apresentamos alguns estudos específicos que fundamentam teoricamente a criação e uso desses aplicativos.

Capítulo 1 - O Raciocínio Proporcional

A relevância do raciocínio proporcional

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), "*os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de* ***ideias fundamentais*** *que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem,* ***proporcionalidade****, interdependência, representação, variação e aproximação".* Observe que a proporcionalidade não é colocada aqui como apenas um dos conteúdos importantes, mas muito mais que isso, como uma das ideias fundamentais, ideias essas que perpassam os diferentes conteúdos, estando presentes em muitos e diferentes momentos do currículo dessa disciplina.

De acordo com vários autores — (DOUGHERTY, BRYANT, BRYANT, & SHIN, 2016), (SILVESTRE, 2012), (LESH, POST, & BEHR, 1988), entre outros — o raciocínio proporcional é fundamental para a aprendizagem e o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos mais variados conteúdos não só da matemática e das ciências naturais, mas também das outras áreas do conhecimento e mesmo na solução de problemas da vida diária. Ele está diretamente ligado a conteúdos como escalas, densidade, semelhança de figuras, inclinação, probabilidade, porcentagens, equivalência de números racionais, taxas de variação, trigonometria, crescimento, velocidade, consumo, receitas, descontos, juros etc.

Interessante observar que, como afirma Ojose (2015), "o *conceito também facilita a aprendizagem de mais matemática".*

Sobre a proporcionalidade, novamente a BNCC, (BRASIL, 2017) afirma que "*deve estar presente no estudo de operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc."* Mais adiante, a proporcionalidade é citada explicitamente na BNCC nas habilidades que se quer desenvolver nos alunos desde o 4º até o 9° ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). Lesh et al. (1988), afirmam que o raciocínio proporcional *"é, ao mesmo tempo, o culminar da aritmética elementar do Ensino Fundamental e por outro lado, é o alicerce de tudo o que segue."*

Raciocinar proporcionalmente é reconhecer a possibilidade ou não de se poder associar, a uma determinada situação, uma das mais importantes e gerais estruturas da matemática, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e desenvolver habilidades e flexibilidade na aplicação das mais diferentes estratégias de operação sobre essa mesma estrutura. Gigante e Santos (2012) destacam*: "por ser um conceito estruturante do currículo de matemática do ensino fundamental, a proporcionalidade (...) faz conexões entre o pensamento algébrico, o aritmético, o geométrico e o estatístico probabilístico. O pensamento proporcional é desenvolvido desde a escola infantil, a partir de atividades que possibilitem comparar razões e resolver situações-problemas que tratam de proporções".*

Silvestre (2012), em sua exaustiva pesquisa bibliográfica, faz um resumo dos fatores que justificam a importância fundamental do tema:

- *Influência decisiva no desempenho futuro dos estudantes no estudo da matemática*
- *Forte influência na compreensão de conceitos de outras áreas do conhecimento tais como química, física, astronomia e geografia*
- *Importância na compreensão de conceitos práticos do cotidiano e na resolução de problemas relacionados a estes conceitos "como, por exemplo, na redução e aumento da quantidade dos ingredientes de uma receita culinária e no cálculo de descontos, aplicados ao preço de objetos e serviços"*

Já nos anos 80, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980) indicava que o raciocínio proporcional é tão importante que nenhum tempo e esforço despendido para garantir a seu desenvolvimento seria excessivo.

Outro ponto a se destacar sobre a relevância do tema é que o raciocínio proporcional também está relacionado a alguns dos principais conteúdos problemáticos do currículo da matemática, como afirmam, Lesh et al. (1988), destacando pontos, tais como:

- Equivalência de frações: 5/3 = n/m
- Algoritmo da divisão longa: 805/23 = n/1

- Valor de posição e percentagem: n% = 75/100
- Conversão métrica: n dólar = (2/3) m dólar canadense
- Razão e taxa: 15 pés / 2 segundos = n milhas por hora"

Devido à importância do estudo das proporções, o *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM, 2010) fez do raciocínio proporcional um ponto crítico do currículo de matemática do sexto e do sétimo ano, nomeando-o como uma das quatro áreas-chave às quais o tempo pedagógico deveria ser dedicado (LARSON, 2013).

Finalizando, Lesh et al. (1988), sobre a importância do raciocínio proporcional no currículo escolar, afirmam que "*o raciocínio proporcional é o culminar da aritmética elementar e o alicerce de tudo o que se segue. Consequentemente ocupa uma posição pivô nos programas escolares de Matemática (e das Ciências)*"

Conceituando o Raciocínio Proporcional

Apesar de seu uso amplamente difundido nas mais variadas áreas da ciência, há uma dificuldade em se definir o que seja o raciocínio proporcional de uma maneira simples, isso porque trata-se de um conceito complexo, mais próximo de um campo conceitual, os seja ele abrange um conjunto de conceitos, habilidades e procedimentos. Lammon (1999), citado por Johnson (2010), declara que o raciocínio proporcional está relacionado a "*uma enorme teia de conhecimentos"* e que ele se origina no processo de "*se construir competências em várias áreas práticas e matemáticas*". Desse modo não é possível dizer em poucas e precisas palavras nem o que é, nem como alguém aprende o raciocínio proporcional. Ainda de acordo com Lammon (JOHNSON, 2010):

> *Uma maneira de definir o raciocínio proporcional é dizer que é a capacidade de reconhecer, explicar, pensar, fazer conjecturas, representar graficamente, transformar, comparar, fazer julgamentos, representar ou simbolizar relacionamentos."*

Em vez de tentar definir o que seja o raciocínio proporcional, Silvestre (2012) prefere delimitar e caracterizar os aspectos que ele envolve, aspectos esses, reveladores da evolução da investigação que tem sido realizada nesta área. Na tabela abaixo (Tabela 1) agrupamos os principais aspectos e autores, de acordo com Silvestre, (2012)

Tabela 1- Desenvolvimento dos aspectos relacionados ao Raciocínio Proporcional

Autores	Aspectos que caracterizam o Raciocínio Proporcional
Lesh, Post e Behr (1988) Post, Cramer, Harel, Kieren e Lesh (1988)	• Sentido de covariação, (que nos remete ao conceito de função) • Múltiplas comparações, inclusive comparações de comparações (relações de relações, ou seja, relações de segunda ordem) • Aptidão para reunir e processar mentalmente diversos conjuntos de informação • Pensamento qualitativo e quantitativo • Relações holísticas entre duas expressões racionais, abrangendo a apropriação e síntese mentais dos vários termos destas expressões. • Aptidão para inferir sobre a sua igualdade ou desigualdade • Habilidade de produzir com sucesso as componentes omissas, independentemente dos aspetos numéricos do problema. • Flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens aos problemas sem ser afetado pelos seus dados numéricos e contexto.
Vergnaud (1983) Behr, Harel, Post e Lesh (1992) Singer, Kohn e Resnick (1997)	• Trabalho no Campo Conceitual da Multiplicação • Dois ou mais espaços de medida • Compreensão e capacidade de utilização das estruturas multiplicativas. • Habilidade para pensar fluentemente dentro e entre espaços de medida.
Spinillo (1997)	• (Perspectiva piagetiana) • Capacidade de estabelecer relações de primeira e segunda ordem, reconhecendo a existência dessas relações na resolução de problemas que envolvem uma proporção. • As relações de primeira ordem são: ○ Relações parte:parte (razão);

	○ Relações parte:todo (fração). • As relações de segunda ordem envolvem comparações entre duas relações de primeira ordem. • As relações de segunda ordem são o cerne do raciocínio proporcional.
Lamon (1995)	• Capacidade de analisar relações entre grandezas • Compreensão da relação constante entre estas e a noção de que ambas variam em conjunto. • Perceber que, na equivalência entre razões, há algo que muda na mesma proporção (quantidades absolutas) e algo que se mantém constante.
Cramer et al. (1993)	• Compreender os quatro aspetos da relação matemática presente nas situações que envolvem proporcionalidade direta: ○ A natureza multiplicativa; ○ A representação gráfica, isto é, a reta que passa na origem; ○ A equivalência das razões; ○ A representação pela equação $y = mx$, em que m é o declive, a razão unitária e constante de proporcionalidade.
Lamon (2005) Lamon (2007)	• Compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. • Vai muito além da mecanização de estratégias formais de resolução de problemas • Compreensão de que há uma relação que é constante entre duas grandezas (invariância) e a noção de que estas grandezas variam em conjunto. • Se traduz na justificação (argumentos e explicações) de afirmações sobre relações estruturais entre quatro quantidades num contexto que envolva, simultaneamente, covariância de quantidades e invariância de razões ou produtos • Capacidade de distinguir relações multiplicativas entre duas quantidades bem como alargar esta relação a outros pares de quantidades.

Silvestre e Ponte (2009, 2010, 2011, 2012)	• Envolve três aspetos: o Capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; o Compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; o Capacidade para resolver vários de tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo fenómenos descrito no contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, imagens, gráficos, tabelas, razões).

Ainda de acordo com Langrall (2000), citado por Larson (2013), um aluno que esteja raciocinando proporcionalmente em um nível formal deve ser capaz de exibir as seguintes características:

1. Reconhecer a diferença entre relações aditivas e relações multiplicativas
2. Reconhecer situações em que o uso de razões e proporções é razoável e apropriado
3. Capacidade para determinar uma unidade de referência adequada à situação ou ao problema, ou seja, uma "taxa unitária" (*Ability to unitize a situation*).
4. Capacidade de analisar situações e relações em termos relativos ao invés de absolutamente.

Observemos a grande variação de enfoques dados pelos pesquisadores na tentativa de conceituar o raciocínio proporcional. Mas notemos também que não são aspectos excludentes, mas pelo contrário, somam-se para formar uma complexa rede de significados que abarcam desde o reconhecimento da possibilidade de uso de estruturas proporcionais numa situação-problema, passando pelas várias propriedades que estas estruturas apresentam, até a utilização das mais variadas estratégias para a resolução desses problemas. Passa também pela compreensão e flexibilidades de uso de diferentes representações das estruturas proporcionais, quais sejam texto em linguagem coloquial, texto técnico-matemático, texto algébrico, tabela, gráfico ou outras formas pictóricas.

Cabe salientar que, como afirmam Lesh et al. (1988), uma pessoa pode resolver um problema que aborde proporções ou proporcionalidade e não estar necessariamente utilizando um raciocínio proporcional. Realmente, esta pessoa poderia estar apenas:

- identificando no problema uma relação numérica simples (do tipo, se A é a metade de B, então C é a metade de D)
- utilizando automaticamente e sem reflexão/compreensão, um algoritmo do tipo Regra de três ou Produto cruzado

Os autores acrescentam ainda uma grave crítica contra o ensino da Regra de Três afirmando que experimentos investigativos e a própria experiência comprovaram que esse método é:

a) mal compreendido pelos alunos.
b) raramente se transformou em um método de resolução (Hart, 1984)
c) frequentemente usado pelos alunos mais para evitar o raciocínio proporcional do que para o facilitar.

Chegando mesmo a sugerir que "*o uso deste procedimento impossibilita o uso do raciocínio proporcional e não envolve só por si este tipo de raciocínio*".

O Desenvolvimento do Raciocínio Proporcional

Pode-se identificar, na literatura, duas linhas teóricas explicativas sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional (SILVESTRE, 2012): a primeira, iniciada com os estudos de Piaget e Inhelder, relaciona o "aparecimento" do raciocínio proporcional à transição do estágio operatório concreto para o estágio operatório formal. A segunda linha teórica indica uma evolução desse raciocínio que se inicia já na infância. Boyer e Levine (2012) fazem um interessante comentário sobre estas duas linhas. De acordo com eles o uso do raciocínio proporcional exige "*uma compreensão das operações formais*" que só surgiria, no desenvolvimento cognitivo humano, por volta dos 11-12 anos de idade. Assim sendo, qualquer acerto nas atividades que necessitassem do raciocínio proporcional não seria produto de uma verdadeira compreensão, mas sim o resultado de "*estratégias idiossincráticas e intuições ingênuas informais*". Ainda de acordo com estes autores, linhas de pesquisa mais recentes abordariam o desenvolvimento do raciocínio proporcional como uma lenta transformação do menos ao mais completo e cada vez mais, um raciocínio generalizado e menos dependente do contexto, dando-se o devido valor e reconhecendo-se a eficácia das "*capacidades intuitivas primárias*" das crianças. Nessa linha de pesquisa "*o sucesso de crianças pequenas em problemas matemáticos pode ser baseado em um senso numérico inerente e pode ser útil em níveis matemáticos mais formais*."

Os autores observam que não há por quê desprezar o "entendimento intuitivo" das relações proporcionais já que este entendimento continua a se manifestar mesmo depois de termos "aprendido" as operações formais, "*como mostrado por fenômenos como o efeito de distância (por exemplo, é mais fácil discriminar 2 de 9 do que discriminar 8 de 9)"* . Assim sendo, o desenvolvimento formal do raciocínio proporcional, poderia ser visto como o resultado de uma instrução/experimentação ou aprendizagem que é feita sobre a "*compreensão intuitiva inicial"* das crianças sobre as relações proporcionais.

Várias pesquisas identificaram uma sensibilidade infantil ou senso inicial referente às relações proporcionais (BOYER & LEVINE, 2012). Além disso esse senso inicial teria algumas características tais como:

- Podemos observar um melhor desempenho em problemas nos quais as crianças possam fazer comparações utilizando a noção de metade e dobro, ao invés de problemas que envolvam outras proporções
- Crianças pequenas têm mais facilidade em fazer julgamentos proporcionais utilizando escalas analógicas
- Lidam melhor com relações proporcionais de grandezas contínuas em oposição a grandezas discretas.
- Quando lidam com quantidades contáveis, as crianças costumam errar por levar em consideração somente um dos elementos da relação, ou o numerador ou o denominador (*por exemplo, respondendo que 2/8 é proporcionalmente equivalente a 2/4 em vez de 1/4*). (BOYER & LEVINE, 2012).

Sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional, Silvestre (2012), afirma que, a partir da experiência pessoal das crianças com as muitas e variadas situações que envolvem relações de proporcionalidade direta no seu cotidiano, vai se formando um senso de invariância e covariação em esquemas mentais, denominados por

Resnik e Singer (1993) de "*esquemas protoquantitativos*". Este mesmos autores, citados por Silvestre e Ponte (2008) "*desenvolvem ... a hipótese de que o conhecimento sobre como relacionar quantidades resulta contingentemente da experiência física e linguística, e leva à formação de esquemas relacionais protoquantitaivos*". É através do uso desses esquemas que as crianças tomam decisões de resolução dos problemas ordinários que necessitem de alguma solução proporcional. Entretanto observa-se que, ao começar a quantificar as situações, as crianças costumam abandonar seus *esquemas relacionais protoquantitaivos* em favor de estratégias aditivas de resolução. A compreensão de que as estruturas proporcionais são de natureza multiplicativa é o principal ponto então a ser buscado no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Os tipos de problemas e suas estratégias de resolução

Na literatura, vários autores fizeram classificações dos tipos de problemas que se relacionam com o raciocínio proporcional. Iremos citar alguns que nos interessam particularmente no âmbito desse trabalho.

1. Richard Lesh, Thomas Post e Merlyn Behr

Lesh et al. (1988), "classificam os problemas sobre proporcionalidade em sete tipos diferentes, de acordo com sua semelhança estrutural:

1. Problemas de valor omisso

   $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ com três valores conhecidos (uma razão completa) e o objetivo é encontrar o valor desconhecido da razão incompleta.

2. Problemas de comparação

   $\frac{A}{B}\ ?\ \frac{C}{D}$, em que são dadas duas razões e se deseja avaliar qual das situações é verdadeira: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$; $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ou $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$

3. Problemas de transformação

   a) Alteração de raciocínio:

      É dada uma equivalência da forma $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Depois aumenta-se ou diminui-se uma certa quantidade de um ou dois dos quatro valores A, B, C ou D e o objetivo é decidir qual relação (<, > ou =) é agora verdadeira.

b) Transformações para obter uma igualdade:

É dada uma desigualdade sob a forma $\frac{A}{B} < \frac{C}{D}$. Depois, para um dos quatro valores A, B, C ou D, um valor x deve ser determinado, de modo que, por exemplo, $\frac{A+x}{B} = \frac{C}{D}$

4. Problemas do valor médio

São dados dois valores e o objetivo é encontrar um terceiro:

(a) Média geométrica: $\frac{A}{x} = \frac{x}{B}$

(b) Média harmónica: $\frac{A}{B} = \frac{A-x}{x-B}$

5. Proporções que envolvem a conversão entre razões, taxas e frações

A razão entre meninos e meninas em uma turma é de 15 para 12. Qual é a fração de rapazes nessa turma?

6. Proporções que envolvem unidades de medida assim como números

$$\frac{3\, metros}{2\, segundos} = \frac{x\, quilômetros}{1\, hora}$$

7. Problemas de conversão entre sistemas de representação

A razão (fração, taxa ou quociente) é dada num sistema de representação e o objetivo é representar essa mesma relação noutro sistema de representação."

Sobre essa classificação, Silvestre (2012) observa que:

> *"não é claro o que, para os autores, significa "semelhança estrutural". No entanto, tendo em consideração a descrição dos problemas, parece que se referem ao contexto. Segundo Lesh et al. (1988), apenas os dois primeiros tipos de problemas são comuns nos manuais escolares e os restantes são pouco frequentes nos manuais e na investigação, embora, na sua perspectiva, estejam associados a fenômenos usuais no quotidiano e aos*

processos apresentados pelos alunos na resolução de tarefas envolvendo proporcionalidade."

2. Gérard Vergnaud e a Teoria dos Campos Conceituais

Vergnaud, citado por Silvestre (2012), afirma que um conceito é composto por um trio de conjuntos – *C = (S.I.R)* – onde:

(i) S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito;
(ii) I é o conjunto dos invariantes operacionais que podem ser usados pelos sujeitos para dar significado a essas situações (objetos, propriedades e relações);
(iii) R é o conjunto das representações simbólicas, linguísticas, gráficas e gestuais que podem ser usadas para representar invariantes, situações e procedimentos.

De acordo com Vergnaud (1993), "*um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se nos interessarmos por sua aprendizagem e seu ensino. É através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.*" Assim sendo, na aprendizagem de um conceito, um aluno precisa entrar em contato com um máximo de situações diferentes que abordem os diferentes aspectos desse conceito. Por outro lado, por mais simples que seja, qualquer situação, ela envolve muitos conceitos diferentes, relacionados nessa situação. Além disso, qualquer conceito pressupõe uma série de outros conceitos intimamente relacionados. Logo, ao invés de nos referirmos à aprendizagem de um conceito, faz mais sentido falar na aprendizagem de um campo conceitual.

Para Vergnaud, citado por Moreira (2002), "*o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, por parte do sujeito, ocorre ao longo de um largo período de tempo, através de experiência, maturidade e aprendizagem*" (1982, p. 40). Um Campo conceitual pode então ser entendido como a reunião, em constante formatação de "*problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição*" (ibid.). A aprendizagem de um Campo Conceitual ocorre durante um período razoavelmente longo do desenvolvimento de uma pessoa. Se queremos que nossos alunos cheguem a dominar um Campo

Conceitual, eles precisam entrar em contato, frequentemente, com novos problemas e novas situações desse Campo durante vários anos ao longo de sua vida escolar.

Um dos campos conceituais mais importantes, definido e investigado por Vergnaud e vários outros estudiosos do tema da psicologia cognitiva e da educação matemática, é o Campo Conceitual Multiplicativo ou Campo das Estruturas Multiplicativas. Esse campo conceitual inclui, entre outros, os conceitos, problemas e propriedades, relacionados aos conceitos de multiplicação, divisão, fração, divisibilidade, razão, proporção e número racional. Os problemas e situações ligados ao raciocínio proporcional fazem parte, portanto, desse campo conceitual.

Magina et al. (2012), no que concerne à classificação de problemas multiplicativos, fizeram um esquema do que Vergnaud chama de estruturas multiplicativas. Essa síntese é representada na Figura 2, abaixo. De acordo com essa classificação, os problemas das estruturas multiplicativas poderiam estar associados a dois tipos de Relações: Terciárias e Quaternárias. Cada uma dessas Relações está dividida em dois Eixos, que estão divididos em Classes que, por sua vez, estão divididas em Tipos. As relações terciárias fogem do escopo deste trabalho e não serão tratadas aqui. As relações quaternárias compreendem os problemas ligados ao raciocínio proporcional.

No seguinte problema: Com R$ 4,50 posso comprar 1 kg de arroz, quanto pagarei por 4 kg desse mesmo arroz? Temos a relação entre duas grandezas (também chamadas, por Vergnaud de espaços de medida), peso e preço, que

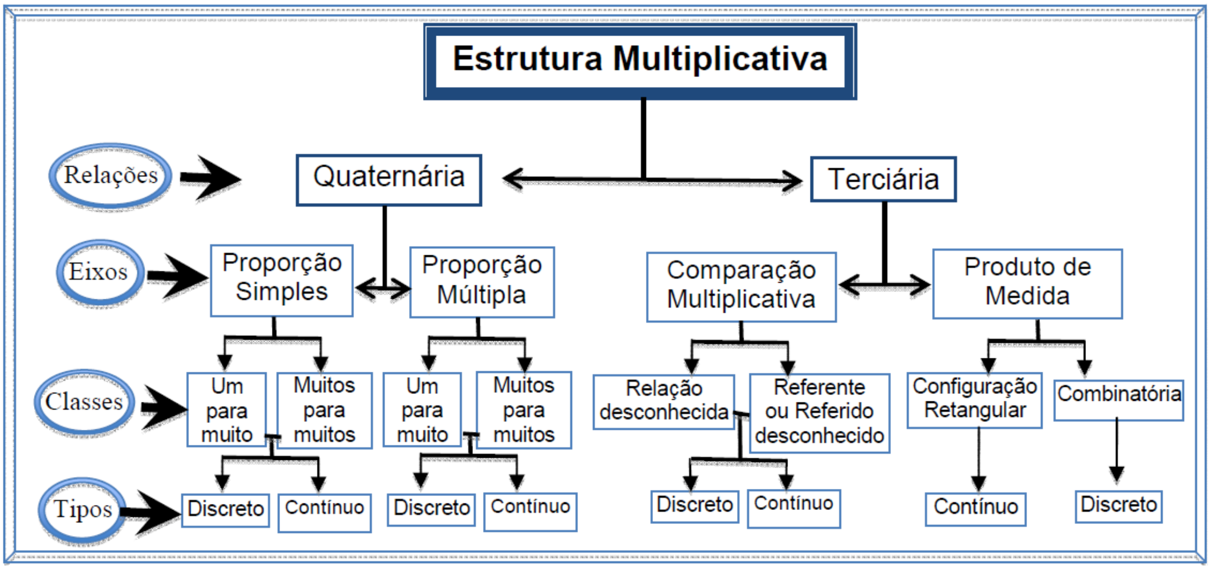


Figura 2 – Campo Conceitual Multiplicativo - Fonte: Magina, Merlini, & Santos, 2012

guardam uma relação (função) entre si; e 3 valores (1Kg, 4,50 reais e 4 kg) que devem "gerar", através do raciocínio, um quarto valor: a solução do problema. A seguinte estrutura pode representar esta situação:

Grandezas	
G1	*G2*
a	b
c	d

Neste específico problema, essa estrutura tomaria a seguinte forma:

Peso (Kg)	*Preço (Reais)*
1	*4,50*
4	*x*

Vergnaud identifica 3 estratégias multiplicativas principais de resolução dessa situação:

1. Produto cruzado

Corresponde à famosa e criticada Regra de Três. A solução vem da expressão:

$$a \times d = b \times c \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}50 \times 4$$

Essa estratégia dificilmente é usada naturalmente pelos alunos e dificilmente é um sinal indicativo de compreensão do problema.

2. Fator escalar

Surge a partir da percepção de uma covariação entre as grandezas G1 e G2, onde a razão entre os valores a e c tem o mesmo valor que a razão entre b e d. Assim existe um fator m, tal que:

$$\times m \quad \begin{array}{c|c} G1 & G2 \\ \hline a & b \\ c & d \end{array} \quad \times m$$

No caso de nosso problema:

$$\times 4 \quad \begin{array}{cc} 1 & 4{,}5 \\ 4 & x \end{array} \quad \times 4$$

Este fator m também é conhecido como *fator de mudança*, já que representa a quantificação da mudança ocorrida em cada uma das variáveis:

$$(\text{a está para c tantas vezes quanto b está para d} \Rightarrow \text{c} = \text{ma e d} = \text{mb})$$

3. Fator Funcional

Nesse caso a percepção de que G2 é uma função de G1, cria as condições para perceber que há uma constante k, tal que:

$$\begin{array}{c|c} G1 & G2 = f(G1) \\ \hline & \times k \\ a & b = f(a) \\ c & d = f(c) \\ & \times k \end{array} \quad ou\ seja \quad \begin{array}{ccc} & \times 4{,}5 & \\ 1 & & 4{,}5 \\ 4 & & x \\ & \times 4{,}5 & \end{array}$$

Essa constante k, coincide com o que chamamos de razão unitária ou $f(1) = k$

Vale ressaltar que, nos casos em que k é inteiro, também é possível se obter uma solução a partir de uma estratégia aditiva (onde não se usa um raciocínio proporcional), como a que segue abaixo:

$$4{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5$$

Vergnaud, citado por Silvestre (2012), ressalta também que a dificuldade de um problema é bastante influenciada por vários outros fatores tais como (1) a natureza dos valores (números muito grandes ou muito pequenos, fatores escalares ou funcionais não inteiros em forma de frações ou decimais, etc.), (2) se o fator escalar ou funcional multiplica ou divide o valor conhecido ou (3) os tipos de grandezas envolvidas (grandezas contínuas ou discretas, familiares ou desconhecidas, numéricas ou não).

3. Kathleen Cramer e Thomas Post no âmbito do Rational Number Project

Estes autores, (Cramer & Post, 1983), identificaram 3 tipos diferentes de problemas que se relacionam com a proporcionalidade direta:

- Problemas de valor omisso
- Problemas de comparação de razões
- Problemas de predição ou comparação qualitativa

Nos **problemas de valor omisso**, são conhecidos 3 dos 4 valores que formam uma proporção e, ao aluno, é dada a tarefa de determinar este valor restante. Temos, portanto, uma razão completa (dois valores conhecidos) e uma razão incompleta (com apenas 1 elemento conhecido), por exemplo, *Diana percorre uma estrada com 20 km em 15 minutos. Se mantiver a velocidade, quanto tempo levará para percorrer 50 km?*

Nos **problemas de comparação** são conhecidas duas razões completas e se deseja saber qual delas é maior ou se são iguais:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}\ , \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad ou \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{d}$$

Por exemplo: *Carla misturou 3 porções de tinta amarela com 2 porções de tinta vermelha para obter um tom de laranja. Tomás misturou 5 porções de amarelo com 3 porções de vermelho. Qual deles produziu o laranja mais "avermelhado"?*

Problemas de predição ou comparação qualitativa são aqueles em que não são conhecidos os valores numéricos das grandezas que estão em proporção. Nesses problemas, a tarefa consiste em prever determinados resultados ou deduzir propriedades a partir de informações numa situação de grandezas em proporcionalidade. Por exemplo: *Jonas e Rodrigo martelaram linhas com a mesma quantidade de pregos em duas ripas de madeira. A ripa de Jonas é mais curta que a ripa de Rodrigo. Em qual ripa os pregos estão mais próximos uns dos outros?*

4. Susan J. Lamon

Lamon, 1993, citado por Langrall e Swafford (2000) identificou 4 diferentes tipos de problemas relacionados às proporções:

- Problemas do tipo Parte : Parte : Todo
- Problemas com Taxas ou Grandezas Conhecidas
- Problemas com Conjuntos Associados
- Problemas de Crescimento/Redução ou de Semelhança

Nos **problemas do tipo Parte:Parte:Todo** um subconjunto B de um conjunto A, é posto em relação com o seu complementar C (parte : parte, por exemplo, meninos e meninas de uma turma, questões certas e questões erradas de uma prova), ou com o próprio conjunto A (parte : todo, por exemplo crianças com óculos num total de alunos na turma, partidas ganhas num total de partidas jogadas num campeonato)

Problemas com Taxas ou Grandezas Conhecidas tratam de grandezas ou razões que, na experiência dos alunos, já são bastante usadas e conhecidas, por exemplo, velocidade (associação de distância e tempo), ou preço unitário (associação entre determinado item e reais). Estes problemas são normalmente fáceis de resolver, inclusive com estratégias aditivas que não utilizam o raciocínio proporcional. Portanto, acertos de questões desse tipo de problema podem não ser indicativos de bom nível de raciocínio proporcional. Exemplo desse tipo seria: *Carlos dirige o seu carro por 60 km usando 5 litros de gasolina. Com esse mesmo consumo ele conseguiria percorrer 300 km com 32 litros no tanque?*

Problemas com Conjuntos Associados tratam de grandezas que não são associadas normalmente na experiência diária dos alunos tais como *chocolates e caixas* ou *pessoas e pizzas*. Dizem respeito a quantidades específicas de grandezas associadas em uma determinada situação, como *nº de lápis e nº de alunos*, ou quantidade de pessoas e nº de doces.

Nos **problemas de crescimento/redução ou semelhança**, grandezas de medidas contínuas (comprimento, altura, área, largura) são postos em relações de ampliação ou redução. Experimentos têm mostrado que problemas de semelhança com grandezas contínuas representam uma dificuldade extra para os alunos (LANGRALL & SWAFFORD, 2000).

5. Problemas não proporcionais e pseudoproporcionais

Uma das habilidades mais importantes, relacionadas ao raciocínio proporcional é a capacidade de reconhecer a presença da proporcionalidade em uma situação-problema. Assim sendo, para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, é fundamental que o aluno entre em contato com várias situações onde este raciocínio não se adequa. Alguns autores relatam a existência de problemas que, apesar de não tratarem de grandezas proporcionais costumam serem tratados como se assim o fossem.

De acordo com Silvestre (2012), estes problemas pseudoproporcionais costumam induzir nos alunos, a existência de uma proporcionalidade que não existe. De modo geral esta tendência está associada a uma formulação do problema (sintaxe), própria dos problemas de proporcionalidade direta. São problemas que "*apresentam uma relação aditiva, uma relação de proporcionalidade inversa ou situações em que não existe uma relação aditiva nem de proporcionalidade direta ou de proporcionalidade inversa.*" Por exemplo:

- "*4 pessoas levam 2 horas para assistir a um determinado filme. Quantas horas seriam necessárias para que 8 pessoas assistissem ao mesmo filme?"* Este problema, pela forma que é formulado, faz crer que exista alguma relação proporcional entre o número de pessoas e o tempo de duração do filme.
- "*5 trabalhadores pintam um muro em 2 horas. Quanto tempo levaria para que 15 trabalhadores pintassem o mesmo muro?*" Este é, na verdade, um problema de proporcionalidade inversa, mas costuma ser tratado pelos alunos como se fosse de proporcionalidade direta.
- "*Victor e Ana correm numa pista circular. Os dois correm à mesma velocidade, mas Ana começou a corrida mais tarde. Quando Ana fez 5 voltas, Victor completou 15 voltas. Quando a Ana tiver corrido 30 voltas, quantas voltas terá corrido o Victor? (Van Dooren et al. 2005)*. Neste problema temos uma relação aditiva, mas novamente, alguns alunos tratariam este problema aplicando erradamente a proporção:

$$\begin{array}{ccccc} Ana & & Victor & & \\ \dfrac{5}{30} & = & \dfrac{15}{x} & \Rightarrow & x = 90 \end{array}$$

As estratégias e as dificuldades dos alunos.

De acordo com vários estudiosos do assunto, citados por Silvestre (2012), o desenvolvimento do raciocínio proporcional passa por 3 fases importantes:

1. **Fase do pensamento qualitativo**

Nessa fase, as estratégias de resolução de problemas são qualitativas e informais, baseadas em argumentos comparativos do tipo “maior ou menor que” ou “mais ou menos que”. Spinillo (1992) afirma que, nessa fase, “*o referencial de "metade" tem sido estratégia frequente em julgamentos sobre proporção*” e que esse referencial “*consiste em uma categoria limite que desempenha papel crucial na emergência do raciocínio proporcional em crianças*”. Em outro trabalho, (2002), a mesma autora declara que o trabalho com problemas de proporcionalidade pode e deve se iniciar mais cedo do que o tradicional (11-12 anos) e que o recurso a estratégias usando estimativas e o referencial de metade pode ser um valioso aliado no trabalho pedagógico:

> *Esta estratégia pode tornar-se um recurso didático poderoso para o ensino de proporção nas séries iniciais; uma ferramenta que, inserida em um ambiente propício para discussões matemáticas, permitiria enfatizar os aspectos cruciais ao raciocínio proporcional: a distinção entre quantidade absoluta e quantidade relativa, e as relações de primeira e de segunda-ordem.* (SPINILLO, 2002)

No capítulo 3, voltaremos a esse assunto ao discutirmos a criação e o uso de alguns dos app’s no Geogebra criados para esse trabalho.

2. **Fase das estratégias de composição (build-up/build down strategy)**

Nessa fase as crianças utilizam-se de seus conhecimentos sobre adições e subtrações para resolverem os problemas de proporcionalidade, às vezes de forma equivocada:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, bend left, "+4"] & 6 \\ 5 \arrow[r, bend right, "+4"'] & x \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad x = 9$$

Outras vezes de forma satisfatória, porém não raciocinando proporcionalmente (não reconhecendo a estrutura multiplicativa ou fazendo uma composição de adição e multiplicação) e com uma estratégia limitada a razões inteiras.

$$\begin{array}{ccc} & \overset{+2+2}{\curvearrowright} & \\ 2 & & 6 \\ 5 & & x \\ & \underset{+5+5}{\curvearrowright} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = 15$$

Fase das estratégias de raciocínio multiplicativo

Nessa fase, os alunos já começam a perceber e compreender a natureza multiplicativa da proporcionalidade e, assim sendo, começam a se utilizar de estratégias multiplicativas.

Vários autores fizeram classificações dessas estratégias multiplicativas. De modo geral podemos distinguir:

- Estratégia da razão unitária ou fator funcional – a mais intuitiva das estratégias multiplicativas e geralmente usada normalmente pelas crianças mais novas.
- Estratégia do fator de mudança ou fator escalar – seu uso é muito influenciado pela natureza dos números envolvidos e é mais utilizada nos casos em que os valores dentro de uma das grandezas envolvidas no problema são múltiplos um do outro.
- Estratégia de comparação de razões – utilizada nos problemas de comparação, consiste em uma série de pequenas estratégias de comparação de frações ou um método geral de comparação do resultado de duas divisões.
- Estratégia da regra de três simples ou do produto cruzado – embora seja um método bastante eficiente, é muito criticado pela dificuldade de se conseguir um sentido para o seu uso dentro da situação-problema. Sobre o ensino da Regra de três, Lesh et al. (Proportinal reasoning., 1988) afirmam que:

> *A investigação e a experiência têm mostrado que a Regra de Três:*
>
> - *é mal compreendida pelos alunos*
> - *raramente “transforma-se “naturalmente” em um método de resolução*
> - *é frequentemente usada pelos alunos mais para evitar o raciocínio*

proporcional do que para o facilitar

Estes autores chegam mesmo a declarar que "*o uso deste procedimento impossibilita o uso do raciocínio proporcional e não envolve só por si o raciocínio proporcional.*"

- Estratégia da interpretação gráfica. Podemos nos utilizar de gráficos cartesianos para determinar o valor omisso de uma proporção ou mesmo para verificar a igualdade entre duas razões (POST, BEHR, & LESH, 1988). Vejamos, por exemplo o problema: Carlos quer ampliar sua foto 3 x 4, de modo

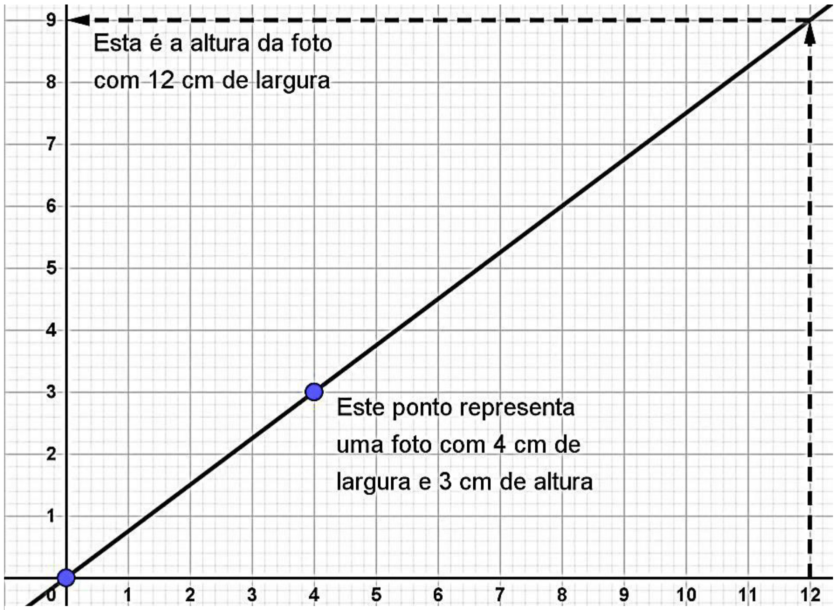


Figura 3- Estratégia de Interpretação Gráfica. Baseada em Post, Behr, & Lesh, 1988

que a ampliação tenha uma largura de 12 cm. Qual deve ser a altura da ampliação?

Para esta estratégia é necessária a percepção de que proporcionalidade direta se traduz numa função linear cujo gráfico passa sempre na origem dos eixos coordenados. O ponto (0,0), nesse caso, indicando que uma foto com 0 cm de largura terá 0 cm de altura. O ponto (4,3) representa a razão conhecida entre as grandezas altura e largura. A equação da reta é $y = 0{,}75x$, onde 0,75 representa, ao mesmo tempo, sua declividade e a razão unitária (0,75 cm de altura para cada 1 cm de largura).

De acordo com Silvestre (2012) há uma rede complexa de fatores que influenciam as dificuldades que os alunos podem ter na resolução de problemas de proporcionalidade. Porém esses fatores podem ser classificados em 4 grupos principais: (1) o contexto, (2) os números e a estrutura numérica, (3) as grandezas e (4) as representações.

O **contexto** (ou estrutura contextual) pode influenciar as estratégias tomadas pelos alunos na resolução de problemas. Particularmente problemas de misturas podem representar um grande desafio.

A **estrutura numérica** tem maior influência que o contexto. Dados envolvendo números inteiros, razões inteiras e respostas inteiras facilitam muito a compreensão do problema e o uso de estratégias mais sofisticadas. Howe, Nunes e Bryant (2010) estudaram alguns aspectos da relação entre a aprendizagem de números racionais e o desenvolvimento do raciocínio proporcional nos estudantes. Sobre isso observam que:

> *Nos EUA, o desempenho no uso de números decimais e frações no Teste de Aptidão Escolar está consistentemente abaixo da média geral (Carey, 2009). O Painel Consultivo Nacional de Matemática dos EUA aconselha que "o ensino das frações deve ser reconhecido como criticamente importante e melhorado" (National Mathematics Advisory Panel, 2007, p. 19). Documentos políticos no Reino Unido identificaram Razões e Porcentagens como áreas prioritárias de preocupação (Scottish Executive, 2002). Além disso, longe de melhorar com o tempo, pesquisas recentes no Reino Unido sugerem que a situação pode estar piorando.* (HOWE, NUNES, & BRYANT, 2010)

Mais adiante, os mesmos autores (2010) assinalam que:

> *Os problemas que os estudantes experimentam com números racionais têm implicações para o raciocínio proporcional. Isso ocorre porque o raciocínio proporcional gira em torno de razões e, portanto, um tipo de número racional.* (HOWE, NUNES, & BRYANT, 2010)

Nota-se, portanto, que o trabalho com a aprendizagem de números racionais (sobretudo as frações) tem grande importância no desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Sobre **as grandezas**, sabemos que o fato de utilizarmos grandezas discretas ou contínuas podem influenciar a dificuldade dos problemas, principalmente para as crianças menores e para os problemas de comparação. Outro fator importante é o fato de usarmos grandezas intensivas ou extensivas nos problemas. Chamamos de grandezas intensivas, aquelas que são a razão entre outras duas grandezas, por exemplo, velocidade (distância por tempo), nº de garrafas por caixa, nº de pessoas por sala, densidade (massa por volume), etc. Já as grandezas extensivas se referem a uma única entidade numérica. Em um experimento em escolas da Escócia, o uso de grandezas intensivas revelou um maior desenvolvimento do raciocínio proporcional. Silvestre (2012).

Finalmente, sobre **as representações**, vários experimentos demonstram que o uso variado de diferentes representações (representação algébrica, manipuláveis, tabelas, representações pictóricas etc.) tem tido influência positiva nas habilidades ligadas ao raciocínio proporcional.

Capítulo 2 – A tecnologia, o Geogebra e a educação matemática

Tecnologia e educação

Estamos vivendo em um tempo de grande efervescência na produção de conhecimentos nas áreas da Matemática e da Educação Matemática. A formação de um bom profissional de educação está exigindo, tanto no campo da matemática quanto no campo pedagógico, cada vez mais conhecimentos e habilidades do professor. Mudanças são propostas nos conteúdos a serem trabalhados, na organização desses conteúdos, na sua contextualização e enfoques dados. De acordo com Freitas at al., citado por Kozelski e Arruda (2017)

> *Dentre os vários elementos norteadores que estão sendo propostos, pode-se destacar a problematização contextualizada, articulação dos conteúdos, valorização de conhecimentos prévios dos alunos, abordagem dos conteúdos em forma de espiral, pesquisa e elaboração própria, incorporação de avanços científicos e tecnológicos, avaliação processual e permanente, estímulo ao raciocínio e à socialização de conhecimentos (FREITAS; BITTAR; ARNALDI, 2004) abud* (KOZELSKI & ARRUDA, 2017)

Todos estes elementos estão fortemente interligados entre si numa grande teia didático-pedagógica. Os objetivos do ensinar matemática passam a ser definidos sob uma perspectiva multifacetada que envolve conceitos, habilidades, procedimentos e valores. De acordo com Oliveira (O lúdico como motivação nas aulas de Matemática, 2007), deve-se ter o foco, entre outras coisas em:

- desenvolver o raciocínio lógico,
- estimular o pensamento independente e a criatividade
- desenvolver capacidade de resolver problemas
- desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração,
- estimular as interações do sujeito com outras pessoas.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), não se pode reduzir o ensino da matemática a um processo hipotético-dedutivo, baseado apenas na comunicação de axiomas e postulados, teoremas e suas demonstrações. É muito importante que o aluno possa ver a matemática como uma ciência também experimental, criada socialmente com levantamento de hipóteses, testes, reflexões, argumentações, justificativas e conclusões, tudo isso inserido numa atividade de resolução de problemas que sejam significativos para o aluno. Este documento afirma que:

> *No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas.* (BRASIL, 2017)

Por outro lado, vivemos em uma sociedade que cada vez mais tem, nas tecnologias, um elemento fundamental para a seu desenvolvimento. Apesar de sua resistência e seu conservadorismo, a Escola também é cada vez mais influenciada por este mundo tecnológico e precisa saber se utilizar deste meio para o seu fortalecimento e sucesso.

Conforme já colocava Kawamura, citado por Rezende (2002),

> *Na virada do século, não se trata mais de nos perguntarmos se devemos ou não introduzir as novas tecnologias da informação e da comunicação no processo educativo. ... Atualmente, professores de várias áreas reagem de maneira mais radical, reconhecendo que, se a educação e a escola não abrirem espaço para essas novas linguagens, elas poderão ter seus espaços definitivamente comprometidos (Kawamura, 1998) abud* (REZENDE, 2002)

De acordo com Goldenberg (2000) um dos fatores mais influentes na evolução atual das matemáticas e de seu ensino e aprendizagem é o poder das novas tecnologias. Na matemática, campos de estudo inteiramente novos surgiram devido à eclosão desses novos recursos tecnológicos. Na educação, a sua influência poderia ser sintetizada nos seguintes efeitos: certas ideias ganharam uma nova e maior importância; alguns temas, problemas e resoluções ficaram mais acessíveis; novas formas de representar e processar informações matemáticas surgem, criando ou dando suporte a novas abordagens pedagógicas.

Goldenberg (2000) observa ainda que, nesses novos recursos tecnológicos, o pequeno espaço da tela possibilita a abordagem de uma gama mais ampla e variada de ideias matemáticas, com novas e múltiplas formas de representá-las e processá-las. De acordo com ele, "*essa versatilidade também acomoda uma maior variedade de estilos de aprendizagem e ensino*", oferecendo as mais diversas interfaces educacionais, tais como: quebra-cabeças, micromundos (ambientes interativos projetados especificamente para educação), sistemas de tutoria, ambientes de programação matemática e visualizações em diversos domínios matemáticos, ferramentas de construção geométrica dinâmica e muito mais.

Dentre a vasta oferta de sistemas, plataformas e software, as questões sobre o que usar, quando usar, como usar e para quê usar se tornam as mais relevantes. Sobre isso, Dullius e Haetinger (2005) nos afirmam que a questão da utilização dos recursos pedagógicos é central no trabalho educacional. Precisamos refletir sobre o nosso fazer educacional e criar modos, processos e métodos que incluam as tecnologias de informação e comunicação, "*adequando-as ao atendimento destas necessidades de demanda, utilizando-as especialmente como ferramenta a serviço da formação permanente e continuada das pessoas na busca do conhecimento.*"

Gómez (1997) afirma que, *"mesmo que o uso das tecnologias não seja a solução para os problemas de ensino e de aprendizagem da Matemática, há indícios de que ela se converterá lentamente em um agente catalizador do processo de mudança na educação matemática".* Ele observa que as novas tecnologias nos trazem a possibilidade de criar objetos matemáticos que podem ser manipulados dinamicamente e apresentados em diferentes sistemas de representação conectados simultaneamente. A tecnologia nos dá condições de oferecer aos nossos alunos experiências novas num ambiente de exploração, trazendo para a matemática um novo empirismo virtual.

E mais adiante:

> *O uso da tecnologia permite o gerenciamento dinâmico de múltiplos sistemas de representação de objetos matemáticos. Esta é uma das suas características relevantes do ponto de vista da aprendizagem da matemática. Os sistemas de representação, internos e externos ao sujeito, são um aspecto central da compreensão que um aluno tenha de determinados objetos matemáticos e seus relacionamentos e das atividades matemáticas que ele executa ao realizar tarefas que têm a ver com esses objetos.* (GÓMEZ, 1997)

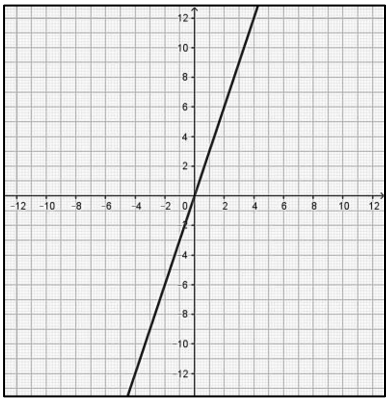
De acordo com este pesquisador, podemos classificar as ações que um sujeito executa sobre os seus sistemas de representação em 4 tipos:

1. Transformações sintáticas dentro de um sistema de representação:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

2. Transformações sintáticas entre sistemas de representação (Figura 4):

$$y = 3x$$



x	y
4	12
3	9
2	6
1	3
0	0
−1	−3
−2	−6
−3	−9
−4	−12

Figura 4 - Transformação Sintática Entre Sistemas de Representação

3. Situações reais (comprar e pagar 3 quilogramas de batatas) são modeladas matematicamente expressando suas características fundamentais em um sistema de representação matemática (por exemplo, expressando a situação como uma relação entre duas variáveis - massa e preço - de acordo com uma expressão simbólica ou gráfica).
4. O quarto tipo de atividade é a materialização de entidades específicas ou relacionamentos em objetos conceituais sobre os quais é possível realizar outras operações. No caso da aritmética, essa atividade permite ao sujeito deixar de ver a adição como uma operação que permite produzir um número a partir de outros dois, para ver a adição como uma operação com características próprias, como comutatividade e associatividade. Esta última atividade é diferente na natureza das três anteriores. Enquanto as três primeiras têm a ver com o uso de sistemas de representação, a última atividade refere-se à maneira pela qual a gestão processual pode evoluir e servir de base para a construção de uma visão conceitual de objetos e relações matemáticas. A compreensão do sujeito pode evoluir ao longo de dois eixos: um eixo horizontal em que se progride na gestão de sistemas de representação de um conceito matemático e um eixo vertical no qual se faz progresso no processo de materialização (procedimento conceitual) desse mesmo conceito (GÓMEZ, 1997).

E assim ele conclui:

Vimos como os objetos matemáticos podem ser representados em vários *sistemas de representação externa e como a compreensão em matemática depende da evolução das representações internas e como a percepção desses conceitos evolui a partir de uma perspectiva operacional (procedimentos) para uma perspectiva estrutural (conceitos). A tecnologia, como agente didático que organiza o encontro entre o sujeito e o meio de modo a gerar perturbações do sistema, pode contribuir de maneira significativa nesses dois aspectos da compreensão em matemática.* (GÓMEZ, 1997)

Obviamente não é o caso de se acreditar que as tecnologias, por si só, seriam capazes de gerar novas formas de ensinar e aprender. Tecnologias são ferramentas e aqueles que as usam podem criar efeitos bem diferentes uns dos outros. Além de novas tecnologias, novas formas pedagógicas exigem novas formas de se pensar o trabalho do professor e do aluno e daquilo que se deseja ensinar.

O trabalho que aqui se apresenta foi pensado em termos de uma visão construtivista do ensino e da aprendizagem. Assim, se faz necessário esclarecer sobre alguns aspectos do professor e do aluno que se supõe no trabalho com os apps que criamos.

Rezende (2002) observa que, talvez, o aspecto mais marcante daqueles que trabalham com a educação numa concepção construtivista seja a percepção do indivíduo como agente ativo de seu próprio conhecimento. Nesse sentido as atenções se voltam para o processo de aprendizagem em si, e a reflexão sobre o ensino, foco principal numa visão tradicional, se ressignifica em função de facilitar o processo de aprendizagem. Numa concepção construtivista da educação o conhecimento não pode nunca ser adquirido ou transmitido, mas é uma construção do sujeito a partir de suas experiências e das representações que cria, no contato com suas realidades.

Ainda de acordo com Rezende (2002) "*assumir esses pressupostos significa mudar alguns aspectos centrais do processo de ensino-aprendizagem em relação à visão tradicional*" (Figura 5).

Abordagens tradicional e construtivista da aprendizagem

ABORDAGEM TRADICIONAL	ABORDAGEM CONSTRUTIVISTA
Enfoque no professor	Enfoque no aluno
Enfoque no conteúdo	Enfoque na construção individual de significados
A mente do aluno funciona como uma "tabula rasa"	A aprendizagem é uma construção do aluno sobre conhecimentos prévios
O aluno é receptor passivo de conhecimento	Ênfase no controle do aluno sobre sua aprendizagem
Memorização de conhecimento	Habilidades e conhecimento são desenvolvidos no contexto onde serão utilizados

Figura 5 - Abordagem tradicional e construtivista da aprendizagem (Rezende, 2002)

Quanto ao material tecnológico que se pode propor aos alunos, a mesma autora argumenta que estes materiais devem ter, como uma de suas características fundamentais o "*passar para as mãos do estudante o controle de sua aprendizagem, tornando possível uma interação na qual ele "ensina" à tecnologia (Valente, 1993) mais do que aprende com ela*". Os ambientes tecnológicos de aprendizagem criados para um trabalho educacional construtivista devem facilitar ou possibilitar a criatividade do aluno e o seu envolvimento ativo na realização de suas atividades grupais ou individuais bem como sua contextualização. Para isso devemos ofertar "*ferramentas e meios para criação e manipulação de artefatos ao invés de apresentarem conceitos prontos ao estudante*".

Perkins (1991) faz uma interessante classificação de toda a parafernália de coisas e pessoas que compõem o ambiente de aprendizagem escolar, normalmente a sala de aula, mas não se resumindo a ela. Ele define 5 categorias em que podemos classificá-las: (1) bancos de informação, (2) utensílios para processamento simbólico, (3) ferramentas de construção, (4) estruturas de observação e estudo de fenômenos e (5) gerenciadores de Tarefas.

E então ele faz uma análise sobre o possível impacto que a presença de itens cada uma dessas categorias pode provocar no modus operandi da sala de aula.

- Bancos de informação

Banco de informação é qualquer recurso que tenha como finalidade principal, naquele ambiente, fornecer informações sobre um determinado tópico. O banco de informação clássico nas salas de aula é o livro-texto, mas dicionários e enciclopédias também servem como exemplos. Mesmo o professor, principalmente nos ambientes mais tradicionais, pode ser um importante banco de informações. As novas tecnologias da informação e comunicação facilitam o acesso e permitem um aumento exponencial da quantidade de informação disponível. Bancos de dados e a própria internet são exemplos também de bancos de informações em forma de vídeo, imagem, imagem estática, som e texto.

- Utensílios para processamento simbólico

A função básica de um utensílio para processamento simbólico é fornecer uma superfície para a criação e manipulação de símbolos, sendo o caderno do aluno e o quadro branco (ou negro) os exemplos mais óbvios. Com o uso desses recursos os alunos fazem anotações, resolvem equações, elaboram explicações, desenham esquemas, figuras e tabelas. Planilhas eletrônicas, editores de texto e de imagens são exemplos desses utensílios criados pelas novas tecnologias que expandem as possibilidades de edição e organização de textos e imagens tornando esses processos mais rápidos e flexíveis.

- Ferramentas de construção

Nas classes dos anos iniciais da Educação Básica, brinquedos do tipo LEGO, ábacos, e blocos lógicos são exemplos típicos de ferramentas de construção. Laboratórios de ciências também costumam ter recursos que permitem a construção de variados experimentos. As tecnologias da informação trouxeram um aumento significativo no leque de possibilidades desses recursos, tais como linguagens de programação, ambientes de simulação interativa, jogos de manipulação e construção ou objetos matemáticos num software de matemática dinâmica.

Ferramentas de construção podem ser confundidas com utensílios para processamento simbólico e realmente a diferença pode estar apenas na ênfase dada aos usos desse recurso. Por exemplo, um editor de texto pode se transformar em uma ferramenta de construção na criação de um texto literário ou, ao contrário, uma tarefa de construção de LEGO, seguindo uma receita passo a passo, predeterminada, pode transformar essa ferramenta em um simples utensílio para processamento simbólico.

- Estruturas de observação e estudo de fenômenos

  Parte do ambiente de aprendizagem, às vezes, é composto por recursos que têm, como principal objetivo, apresentar aos alunos certos fenômenos e permitir a observação, análise e manipulação de aspectos e fatores influentes desse fenômeno. São exemplos a presença de terrários, aquários, minhocários e hortas em ambiente escolar. Entre as tecnologias da informação e na internet temos vários exemplos de micromundos virtuais que têm essa mesma função. Software de simulação de fenômenos físicos, químicos e biológicos que permitem a criação, observação e interação com fenômenos dessas respectivas áreas e jogos de simulação (do tipo SimCity) que permitem a visualização e manipulação de fenômenos sociais complexos, tais como guerras e formações de civilizações são exemplos de possibilidades de recursos dessa categoria.

- Gerenciadores de Tarefas

  Qualquer recurso que tenha como foco administrar a atribuição de tarefas, agendar e às vezes auxiliar em sua execução, regular o processo de aprendizagem e disponibilizar informações sobre avaliação, regulamentos, e produtos estão colocados nessa categoria. O próprio professor é um exemplo clássico de elemento dessa categoria. Vários documentos de orientação e regulação também são gerenciadores de tarefas. Num ambiente construtivista, os próprios alunos estão incluídos nessa categoria pois a eles são dadas responsabilidades de gerir certa parte de seu aprendizado.

Perkins (1991) observa que em uma sala de aula tradicional o ensino é baseado principalmente em fornecer e registrar informações (bancos de informação e utensílios de processamento de símbolos) e ao aluno cabe pouca responsabilidade em administrar sua aprendizagem (o professor é o grande gerenciador de tarefas). Numa visão construtivista, a tecnologia é usada principalmente como ferramenta de construção ou como recurso de observação e manipulação de fenômenos.

Assim, na nossa opinião, materiais educacionais tecnológicos voltados para o ensino da matemática, devem poder dar suporte a tarefas pautadas na possibilidade do aluno visualizar e experimentar, refletir, tomar decisões, trabalhar em grupo, justificar, argumentar, criar, falar e escrever matemática. Tarefas que tenham maior probabilidade de engajar ativamente a participação do aluno facilitando na criação de novos significados.

O Geogebra: origem, desenvolvimento e características

Segundo Preiner (2008, p.36), citado por Gonçalves (2016), o Geogebra foi criado durante o trabalho de mestrado de Markus Hohenwarter no ano de 2001, junto à Universidade Salzburg, na Áustria. Sua intenção inicial foi disponibilizar um software capaz de lidar de forma dinâmica, e simultaneamente, com as representações algébricas e geométricas, voltando-se para os níveis escolares que chamamos de Ensino Médio e Universitário.

No site oficial do software podemos encontrar as seguintes informações (Geogebra.org, s.d.)

> *O Geogebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. O Geogebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O Geogebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.*
>
> *Fatos Rápidos*
>
> - *Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estão interconectadas e são totalmente dinâmicas*
> - *Interface fácil de se usar e, ainda assim, com muitos recursos poderosos*
> - *Ferramentas de desenvolvimento para a criação de materiais didáticos como páginas web interativas*
> - *Disponível em vários idiomas para nossos milhões de usuários ao redor do mundo*
> - *Software de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais*

Em 2002 foi lançado e disponibilizado gratuitamente pela internet. Desde então o software já recebeu mais de 16 importantes prêmios internacionais e a aprovação de milhões de usuários em todo o mundo. Na instalação de uma das suas interfaces, o Geogebra Clássico 6, temos a possibilidade de escolha entre 73 idiomas diferentes.

A página oficial, no Facebook, do Geogebra contava em julho/2019, com 101000 seguidores. No Brasil, os dois principais grupos de usuários do software, o "O Geogebra" e o "Geogebra Brasil", totalizavam, em 21/07/2019, 6968 e 7267 membros, respectivamente.

Hoje, a denominação Geogebra se refere a uma família de aplicativos: Calculadora Gráfica, 3D Calculator, Geometria, Realidade Aumentada, Geogebra Clássico 6 e Geogebra Clássico 5. Todos eles desenvolvidos para os sistemas iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux, em formatos para notebooks, tablets ou celulares.

O Geogebra é um software de acesso livre, (pode-se utilizar, copiar e distribuir o aplicativo para fins não comerciais). Arquivos feitos em Geogebra podem ser vistos através de app instalados, apps online ou mesmo incorporados a páginas da internet onde podem ser usados sem a necessidade da instalação do software.

O Geogebra clássico 6 apresenta 7 interfaces visuais: 2 janelas de visualização geométrica 2D; 1 janela de visualização geométrica 3D; 1 Janela de visualização das representações algébricas; 1 planilha eletrônica; 1 janela CAS (**c**omputer **a**lgebra **s**ystem) de processamento ou cálculo de representações algébricas e 1 Calculadora de probabilidades. Todas estas janelas então conectadas e interligadas em tempo real. Todos os objetos matemáticos criados em uma delas tem representações nas outras (quando for possível matematicamente) e suas propriedades matemáticas e visuais podem ser configuradas de várias formas.

Um mesmo objeto pode ser modificado, clicando-se diretamente em sua representação geométrica (2D ou 3D) ou sua representação algébrica. Podemos também criar e modificar objetos através de comandos digitados. Estes comandos "utilizam uma sintaxe com notação matemática próxima à linguagem usual dos meios científicos e escolares". Gonçalves (2016).

Assim sendo, e ainda de acordo com Gonçalves (2016), o Geogebra "*reúne* *funcionalidades específicas para: geometria bi e tridimensional; álgebra elementar e linear; gráficos cartesianos, polares e isométricos; probabilidade; estatística e matemática financeira, em um único pacote."*

Capítulo 3 - Os Apps

Característica Gerais e Princípios Norteadores

Como foi posto na introdução deste trabalho, temos como objetivo dar a devida fundamentação teórica e explicar os objetivos e princípios que nortearam a criação do livro virtual "Proporcionalidade com o Geogebra", em *https://www.geogebra.org/m/mh4vgspf* (Figura 6), onde podemos acessar treze

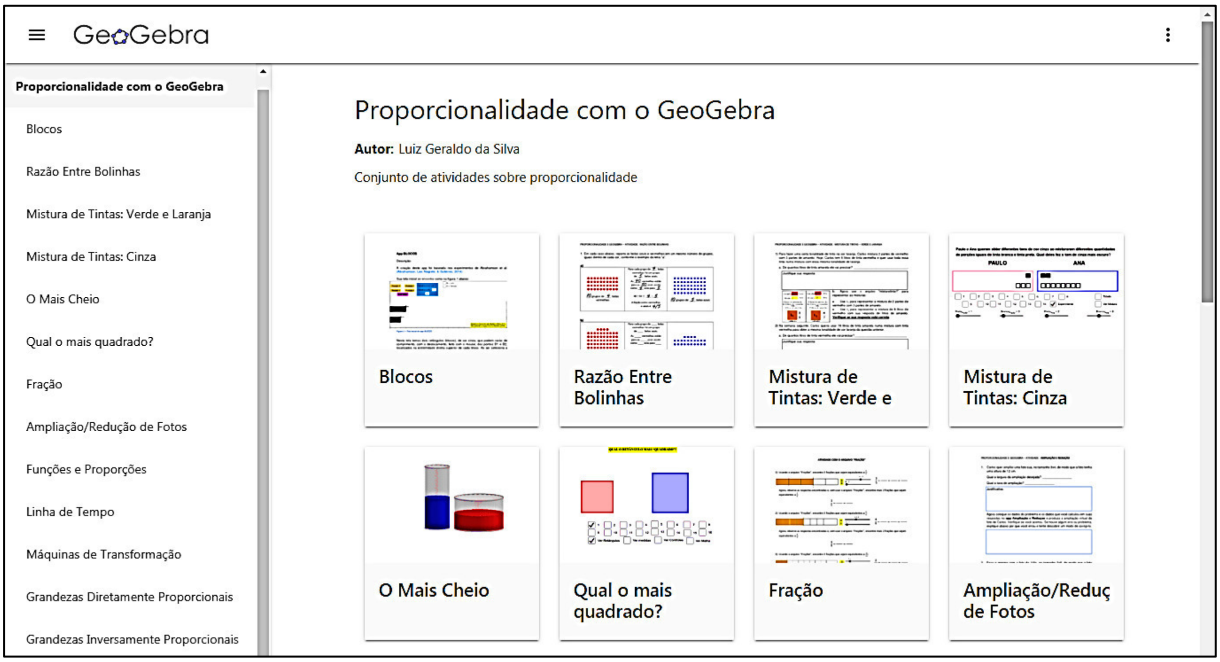


Figura 6 - Tela inicial do livro virtual Proporcionalidade como Geogebra

aplicativos para notebooks ou desktops, aqui denominados de apps (sigla para "*application*", do inglês, que significa aplicativo, programa ou software). Trata-se de ambientes ou micromundos virtuais que foram criados no ambiente Geogebra, para o trabalho de desenvolvimento do raciocínio proporcional. Com esse trabalho, não temos a intenção de criar um plano de aula ou uma unidade temática para um determinado ano do Ensino Fundamental. Nossa intenção foi criar um conjunto de programas que se prestassem ao trabalho pedagógico construtivista de diferentes aspectos do raciocínio proporcional. Alguns desses apps podem ser usados por crianças do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, outros são mais indicados para os anos finais de Ensino Fundamental ou mesmo para os anos iniciais do Ensino Médio.

Cada um destes apps foi pensado como um ambiente de exploração orientada. Pretende-se que o aluno (ou, preferencialmente, dupla ou grupo) interaja com o ambiente na busca da solução para uma série de questões/problemas através de uma sequência de ações, reflexões sobre as ações executadas e reações baseadas "nas respostas" (feedbacks) dadas pelo programa, através de levantamento de hipóteses, registro dessas hipóteses, teste das hipóteses com o uso do ambiente e aplicação, das propriedades deduzidas, em novas situações. Sendo assim, estes programas foram concebidos como ambientes de ***visualização*** e ***experimentação***. É necessário, entretanto, um maior esclarecimento sobre o significado que damos a cada um destes dois aspectos/finalidades dos apps.

A Visualização

Como já foi dito, um dos objetivos dos apps criados nesse trabalho é o de possibilitar a gênese de "visualizações mentais" que possam se transformar em formas potentes de representação das relações proporcionais. Conforme Delinda van Garderen (2006), no campo matemático, muitos estudiosos assumem que o uso de visualizações pode ser um importante recurso na resolução de todos os tipos de problemas, inclusive aqueles com nenhuma relação geométrica evidente. Relata também que as visualizações são um importante fator no estabelecimento do significado de um problema, canalizando abordagens para a sua resolução e tendo grande influência nas construções cognitivas do aluno.

Os Parâmetros curriculares nacionais para o terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental (BRASIL, 1998) registram que:

> *A visualização e a leitura de informações gráficas em Matemática são aspectos importantes, pois auxiliam a compreensão de conceitos e o desenvolvimento de capacidades de expressão gráficas. A disponibilidade de modernos recursos para produzir imagens impõe a necessidade de atualização das imagens matemáticas, de acordo com as tendências tecnológicas e artísticas, incorporando a cor, os gráficos, a fotografia, assim como a importância de ensinar os alunos a fazer uso desses recursos. (BRASIL, 1998, p. 46).*

Nas palavras de Santos (2014): "*Imaginar, tocar, manipular são fatores que influenciam no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, dando estrutura para o entendimento de determinados conceitos*". De acordo com a autora, quando não se tem a possibilidade de tocar e manipular a realidade que se quer conhecer, "*a visualização pode conduzir a uma tentativa de dar concretude ao pensamento,* *construindo uma imagem mental, um significado ao significante*". Sendo assim, o esforço e investimento em se implementar uma visualização de certos conteúdos em sala de aula está diretamente associado ao desenvolvimento das habilidades mentais e visuais dos alunos.

Goldenberg (1998) afirma que, em matemática,

> *os tipos de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de: criar, manipular e "ler" imagens mentais de aspectos comuns da realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados com objetos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objetos ou ideias que nunca foram vistos.* (GOLDENBERG, 1998)

Obviamente, para que as imagens mentais sejam criadas, os alunos necessitam passar por experiências reais (ou virtuais) de manipulação de "objetos" que sirvam como base ou modelo dessas mesmas imagens. As tecnologias da informação nos trouxeram a possibilidade da construção de objetos virtuais em lugar dos objetos reais que não tínhamos condições de fornecer em sala de aula.

Nas palavras de Sampaio (2018): "*Entende-se que o aluno produz conhecimento com o computador por meio da investigação e, no estar-com-o-objeto, intencionado, percebe aspectos e propriedades que anteriormente não estavam visíveis*". Assim sendo, como afirma Bicudo e Rosa (2010), aquilo que o aluno experimenta na manipulação de objetos virtuais, tem possibilidades de gerar imagens, ações e conhecimentos tanto quanto a manipulação de objetos reais.

A Experimentação

De acordo com Almeida e Malheiro (2019), entre as metodologias de ensino e aprendizagem, a experimentação ocupa um lugar diferenciado devido à potencialidade de despertar o interesse dos alunos e ter uma influência positiva num estilo de aprendizagem onde "*as falas, concepções e ideias dos estudantes são valorizadas, contribuindo na construção do conhecimento matemático e na promoção do pensamento crítico-reflexivo".*

A experimentação é um processo onde o aluno se relaciona com o objeto de estudo de um modo investigativo, podendo criar perguntas e hipóteses para suas respostas, criar ou experimentar estratégias de resolução de problemas, avaliar processos e resultados, compartilhar dúvidas, ideias, estratégias com seus colegas, dialogar, argumentar, ouvir. Ou seja, atividades experimentais podem promover raciocínio, reflexão, análise e síntese na construção de conhecimento significativo.

Os apps foram criados para funcionar junto a uma ou algumas situações-problemas. Na página de cada um dos apps, encontram-se dois arquivos-texto, em formato PDF: um deles é uma ficha de atividades com situações-problemas para serem resolvidas com a utilização do app e o outro, um pequeno manual, com a descrição do programa e esclarecimentos para o professor sobre as atividades propostas na ficha de atividades.

Os apps não se propõem a dar respostas prontas aos problemas propostos, mas para servir de lugar de interação, reflexão, avaliação e dedução de aspectos e propriedades de um dado conteúdo ou situação. Na realização da tarefa, o ambiente do app pode ser usado pelo aluno para:

1. Coletar informações ou fatos, como resultado de ações tomadas (O que acontecerá se eu somar uma certa quantidade a um determinado valor?)
2. Confirmar a validade de uma hipótese levantada
3. Demonstrar a não validade de uma hipótese.
4. Confirmar a validade de uma resposta numérica.
5. Executar um processo iterativo de construção de resposta.
6. Executar uma estratégia de “tentativa e erro” na resolução de um problema.

Assim, espera-se do aluno uma postura ativa e reflexiva: onde é necessário aprender também a dialogar, argumentar e justificar escolhas e procedimentos. Nas fichas de atividades reservamos sempre um espaço para as justificativas e compartilhamento de estratégias.

Já o professor que visualizamos, no trabalho com estes programas, deve se abster de assumir o papel daquele que detém o conhecimento e decide sobre a validade de uma hipótese levantada. Seu papel é muito mais o de trazer novas questões, de problematizar afirmações, de sugerir ações e de avaliar os processos.

A partir da análise que fizemos, no capítulo 1, dos tipos de problemas de raciocínio proporcional, das estratégias de resolução destes problemas e das dificuldades encontradas pelos alunos nesse processo de resolução e baseados também no artigo de Larson, "*Developing Children's Proportional Reasoning: Instructional Strategies That Go the Distance*" (2013), pudemos definir alguns princípios orientadores na criação dos apps e de suas atividades:

1. Variedade nos tipos de problemas, procurando privilegiar tipos não explorados normalmente nos livros didáticos de matemática. Desse modo, os apps cobrem tanto problemas de valor omisso quanto problemas de comparação. Há problemas de transformação, problemas de crescimento/redução (problemas de semelhança), problemas do tipo parte:parte:todo e problemas de conjuntos associados.
2. Propiciar e favorecer o uso de diferentes estratégias de resolução e diferentes contextos. Assim procuramos abordar, nas fichas de atividades, tarefas que pudessem ser realizadas com o uso, tanto de fatores escalares quanto funcionais, nas suas proporções. Usamos tanto grandezas contínuas quanto grandezas discretas. Favorecemos o compartilhamento de estratégias e modos de pensar através do espaço de justificativas nas fichas de atividades.
3. Partir do conhecimento intuitivo do aluno e não privilegiar apenas uma faixa etária. Entre os apps há aqueles voltados para o Ensino Fundamental I e para o Fundamental II. Os apps da série "Qual o mais...?" partem do conhecimento intuitivo das crianças sobre as relações proporcionais em problemas parte:parte:todo, não quantitativos com grandezas contínuas para auxiliar no seu aprofundamento e posterior transferência para problemas quantitativos com grandezas discretas.
4. Propiciar o uso e a compreensão de múltiplas representações e formatos numéricos. Em cada app, nas formas de apresentar o problema ou nas fichas de atividades, sempre que possível, apresentamos os dados em formatos diferentes, quais sejam, tabelas, gráficos, figuras planas ou 3D, textos ou sentenças matemáticas. Os problemas relacionam tanto números inteiros quanto racionais em forma fracionária, decimal ou percentual.
5. Favorecer o trabalho em grupo, a argumentação, o compartilhamento de ideias e estratégias.

App BLOCOS

Descrição:

A criação deste app foi baseada nos experimentos de Abrahamson et al. (2014) no *Embodied Design Research Laboratory da Universidade de Berkeley, que desenvolveram o Mathematical Imagery Trainer* (MIT), um sistema de tecnologia interativa projetado para criar oportunidades para desenvolvimento, nos alunos, de novos esquemas sensório-motores dos quais possam emergir conceitos matemáticos. Em particular, o MIT para proporção (MIT-P) é voltado para apoiar a construção da equivalência proporcional.

Sua tela inicial se encontra como na Figura 7 abaixo:

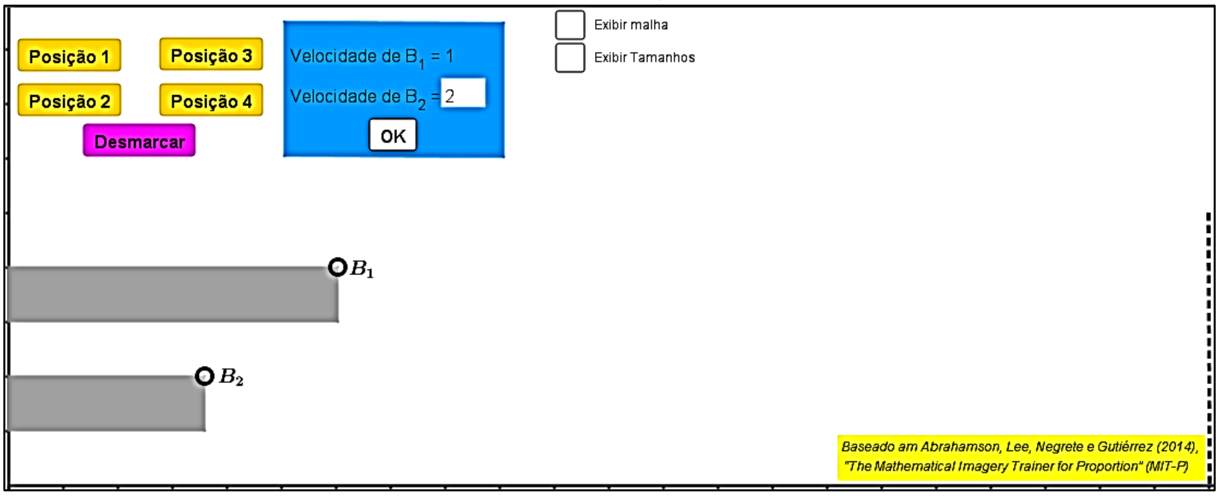


Figura 7 – Tela inicial do app BLOCOS

Nesta tela temos dois retângulos (blocos), de cor cinza, que podem variar de comprimento, com o deslocamento, feito com o mouse, dos pontos B1 e B2, localizados na extremidade direita superior de cada bloco. Ao ser selecionada a caixa Exibir Malha, os blocos se encontrarão sobre uma malha quadriculada o que permitirá associar medidas ao tamanho (comprimento) de cada um deles.

Existem relações matemáticas, proporcionais e não proporcionais, entre os tamanhos dos dois blocos de tal modo que, dependendo dos valores das medidas desses tamanhos, os blocos podem, ambos e simultaneamente, mudar de cor, podendo ficar verdes, azuis, amarelos, rosa, violeta, laranja, vermelhos, marrons ou pretos de acordo com cada uma das relações entre os tamanhos, previamente estabelecidas. Por exemplo, sempre que o bloco2 tem tamanho igual ao dobro do bloco 1 eles ficam verdes. (Ver Figura 8)

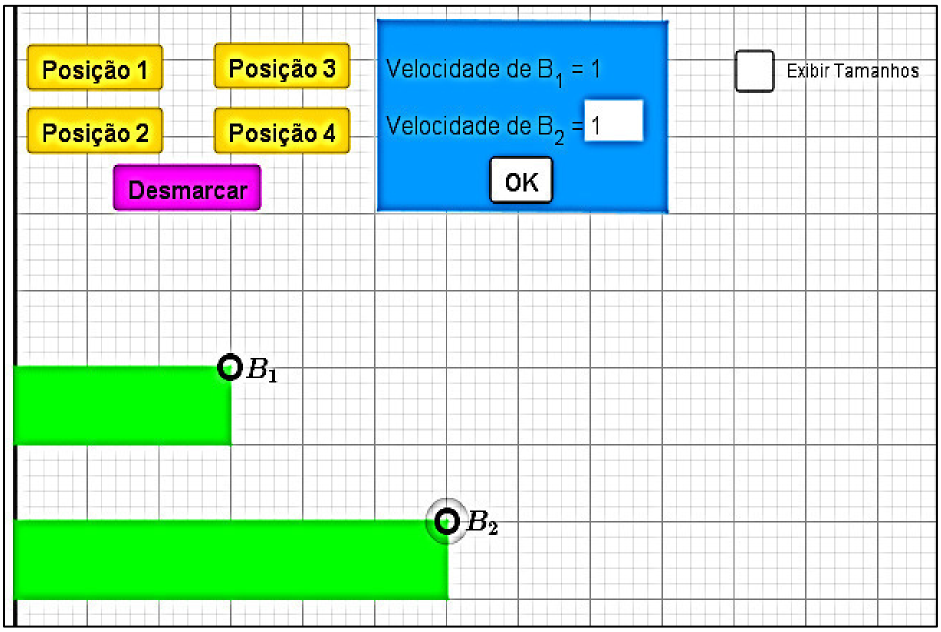


Figura 8– Blocos em posição onde assumem a cor verde

Tomando o comprimento de B1 igual a x e o comprimento de B2, igual a y, a Tabela 2, abaixo, exibe as relações preestabelecidas entre os comprimentos e as respectivas cores que assumem os dois blocos.

Tabela 2 - As cores dos blocos e suas relações matemáticas

Verde	$y = 2x$
Azul	$y = 3x$
Amarelo	$y = x + 5$
Cor-de-rosa	$y = x + 3$
Violeta	$y = x/2$
Laranja	$y = x/4$
Vermelho	$y = x$
Marrom	$y = x - 0{,}5$
Preto	$y = x - 1$

Há 5 casos em que as relações são proporcionais (verde, azul, violeta, laranja e vermelho) e 4 casos em que estas relações são não proporcionais (amarelo, cor-de-rosa marrom e preto)

Se quisermos registrar uma determinada posição (tamanho) dos blocos podemos acionar um dos botões Posição1, Posição2, Posição3 ou Posição4 e assim os marcadores ✚,◆,▲ ou ✖, respectivamente, aparecerão marcando a posição atual, conforme a Figura 9.

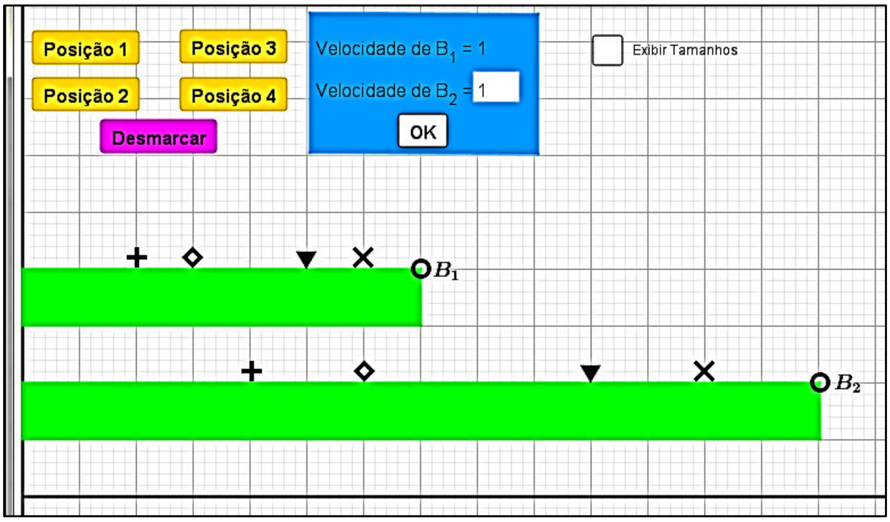


Figura 9– Quatro posições marcadas onde os blocos ficam verdes

Ao se clicar no botão Desmarcar, as marcas de posição (tamanho) fixadas desaparecerão.

Os blocos 1 e 2 podem ser animados sempre que for clicado o botão OK. Quando isso ocorrer, o ponto B1 mover-se-á para a direita, numa velocidade de referência 1, aumentando o comprimento desse bloco. Simultaneamente B2 fará o mesmo numa velocidade que pode ser definida pelo usuário no quadro azul da tela do app. Os blocos continuarão aumentado até que algum deles atinja a linha tracejada vertical, à direita da tela. Na Figura 10, abaixo, ao se acionar o botão OK, os blocos aumentarão de comprimento, sendo que B2 aumentará numa velocidade igual ao

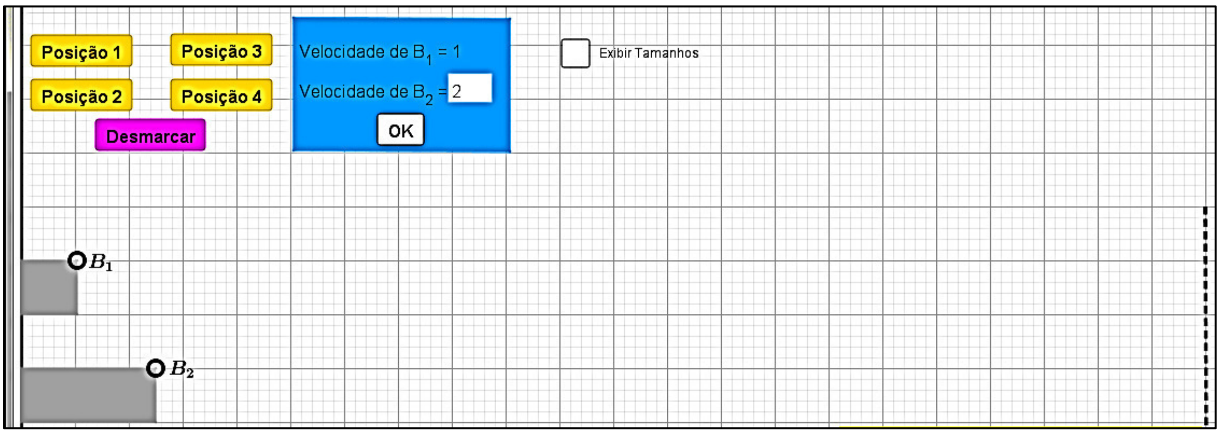


Figura 10– B2 se moverá no dobro da velocidade de B1

dobro da velocidade de B1, conforme foi determinado pelo usuário na caixa azul da tela.

A caixa Exibir Tamanhos, se selecionada, exibirá um quadro amarelo com os comprimentos atuais dos blocos 1 e 2, permitindo assim que possamos trabalhar com ou sem dados numéricos. (Figura 11)

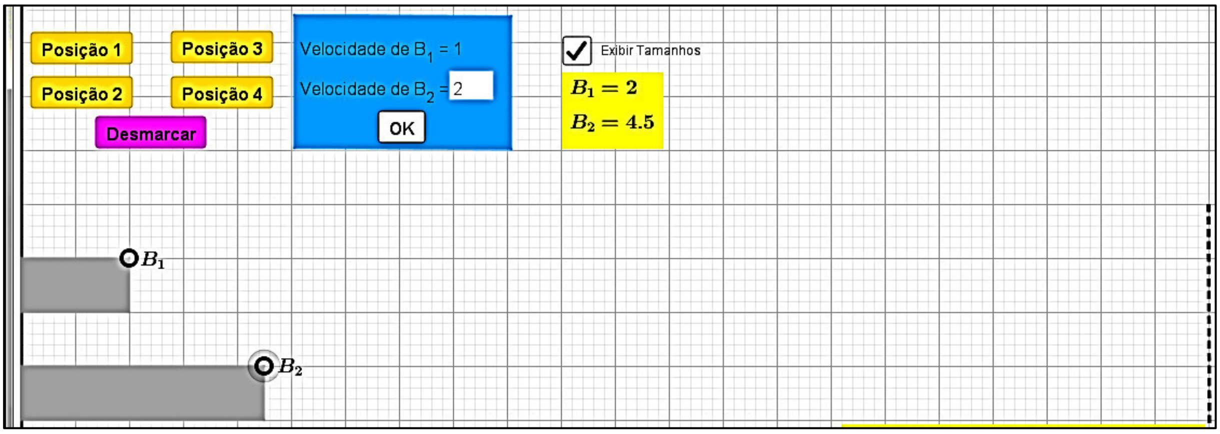


Figura 11– Acionamento da Caixa Exibir Tamanhos

A Tarefa

O aluno (ou dupla ou grupo) receberá 1 Fichas dos Blocos (Anexo 1), para cada relação (cor dos blocos) a ser analisada. Para essa análise as Fichas dos Blocos propõem problemas dos seguintes tipos:

- Encontre um comprimento para cada um dos blocos a fim de que eles fiquem verdes. (ou outra cor qualquer)
- O que faz com que os blocos fiquem verdes? (ou outra cor qualquer)
- Calcule valor do comprimento do bloco 1 (ou 2) que faz com que os blocos assumam determinada cor quando o comprimento do bloco 2 (ou 1) seja igual a um valor determinado.
- Se os blocos estão com uma determinada cor, essa cor permanece se somarmos (ou subtrairmos) uma mesma quantidade às suas medidas?
- Se os blocos estão com uma determinada cor, essa cor permanece se multiplicarmos (ou dividirmos) uma mesma quantidade às suas medidas?
- Se os blocos estão com uma determinada cor e aumentarmos (ou diminuirmos) o comprimento de um deles de uma determinada quantia, o que deveríamos fazer com o outro bloco de modo que eles permaneçam com a mesma cor?

- Se os blocos estão com uma determinada cor e multiplicarmos (ou dividirmos) o comprimento de um deles por uma determinada quantia, o que deveríamos fazer com o outro bloco de modo que eles permaneçam com a mesma cor?

Recomendamos que cada aluno (dupla ou grupo) analise, pelo menos, o "comportamento" dos blocos em dois tipos de relações diferentes: proporcional e não proporcional.

A resolução da tarefa, requer dos alunos a determinação de propriedades qualitativas/quantitativas das relações entre os blocos. A tarefa não busca apenas que os alunos deem respostas numéricas, mas também textuais. O uso de tabelas, textos, e ambiente computacional visa fazer com que o aluno possa lidar com diferentes representações de uma situação, utilizando as que lhe forem mais significativas para a resolução da tarefa.

Na realização da tarefa, o ambiente do app pode ser usado pelo aluno para:

1. Coletar informações ou fatos (por exemplo, descobrir uma posição dos blocos em que eles fiquem verdes)
2. Confirmar a validade de uma hipótese levantada (ex.: os blocos ficam verdes quando o de baixo tem duas unidades de comprimento a mais que o de cima)
3. Mostrar que uma hipótese levantada não é válida
4. Confirmar a validade de uma resposta numérica
5. Executar um processo iterativo de construção de resposta (ex.: se os blocos estão verdes e quero descobrir o que devo fazer ao bloco 2 se somar 5 ao comprimento do bloco 1, para que eles continuem da mesma cor, poderei ir somando de 1 em 1 unidade até obter a cor desejada.)
6. Executar uma estratégia de "tentativa e erro" na resolução de um problema.

App MISTURA DE TINTAS

Descrição

De acordo com De la Cruz (2013), *"os problemas de proporção podem ser classificados de acordo com seu contexto. Alguns contextos comuns são taxas de variação, semelhança, misturas e problemas do tipo parte-parte-todo".* Exemplos desses contextos comuns para problemas de proporção são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3- Contextos comuns para problemas de raciocínio proporcional.

Contextos comuns	*Exemplos*
Taxa de variação	*Uma impressora leva exatamente 12 minutos para imprimir 14 dicionários. Quantos dicionários consegue imprimir em 30 minutos?*
Semelhança	*Você deu à sua avó uma foto 4 por 6, mas ela gostaria de ampliá-la para coincidir com as outras fotos penduradas em sua parede. Se ela aumentar a altura da foto de 6 para 8 centímetros, qual seria a largura da foto ampliada?*
Mistura	*Se Suzie usa uma receita de limonada que pede 1 xícara de suco de limão para cada 2 xícaras de água, quantas xícaras de suco de limão ela precisaria para fazer limonada se estivesse usando 8 xícaras de água?*
Parte-todo	*A classe de Levi tem 12 meninas e 18 meninos. Se a proporção de meninas para meninos na escola e na classe de Levi é a mesma e há 360 crianças na escola, quantos meninos tem a escola toda?*

Tourniaire & Pulos (1985), fizeram uma revisão das pesquisas sobre raciocínio proporcional até aquela época e relatam que experimentos com problemas de misturas foram bastante usados, tais como problemas com limonadas (Karplus, Pulos & Stage,1983; Gold, 1978), Mix de castanhas e nozes (Gold, 1978), Suco de laranja, (Noelting, 1980; Biemiller, 1981) e Areias em duas cores (Quintero & Schwartz, 1982).

Sobre estes problemas, observam que:

> *Os problemas de mistura diferem dos problemas de taxa de três maneiras. Primeiro, os elementos da razão, num problema de mistura, constituem um novo objeto, por exemplo, tinta vermelha e amarela misturadas resultam em tinta laranja... Por outro lado, nenhum objeto novo surge em problemas de*

taxa. Em segundo lugar, problemas de mistura exigem que o sujeito compreenda o que acontece quando os dois elementos são misturados. Em terceiro, na maioria dos problemas de mistura, as quantidades são expressas na mesma unidade (por exemplo, litros), enquanto na maioria dos problemas de taxa, as quantidades envolvidas estão em unidades diferentes (por exemplo, quilogramas e reais). Lidar com quantidades expressas na mesma unidade pode ser mais confuso. (TOURNIAIRE & PULOS, 1985)

Devido a essas particularidades, problemas de misturas podem ser sensivelmente mais complicados para alguns alunos.

Outro fator que deve ser observado é a presença de variáveis contínuas e, portanto, a possibilidade de se usar números racionais não inteiros. É importante que os alunos entrem em contato com esses números em situações proporcionais, tanto números não inteiros quanto razões não inteiras.

Este app foi pensado para servir como apoio na resolução de exemplos dos clássicos problemas de mistura. O app fornece 3 cores de tinta “virtual” e permite que elas sejam misturadas em proporções que podem ser definidas pelo usuário, mostrando o resultado dessas misturas.

A tela inicial do app é mostrada na Figura 12, abaixo:

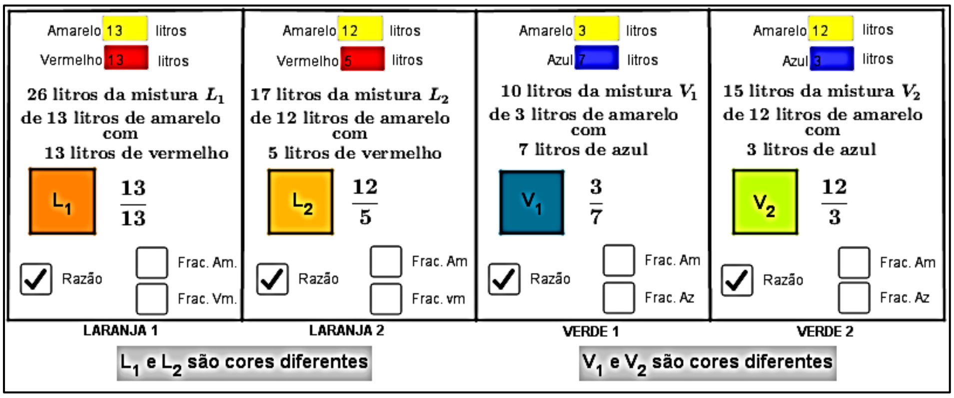


Figura 12 - Tela inicial do app Mistura de Tintas – Verde e Laranja

A tela é composta por uma tabela de 4 colunas. Em cada uma das colunas é possível definir duas quantidades de tinta, em duas cores diferentes, que se misturam numa nova tonalidade de cor, mostrada num quadro logo abaixo. É possível fazer 4 misturas de tintas: 2 formulações de cor laranja (mistura de vermelho e amarelo), nomeadas como L1 e L2 e duas formulações de verde (amarelo e azul), V1 e V2. A unidade de volume utilizada é o litro.

O programa compara as tonalidades de cor laranja, L1 e L2, e, numa caixa de texto declaram a igualdade ou não de suas tonalidades. O mesmo é feito com as misturas V1 e V2 (Ver Figura 13).

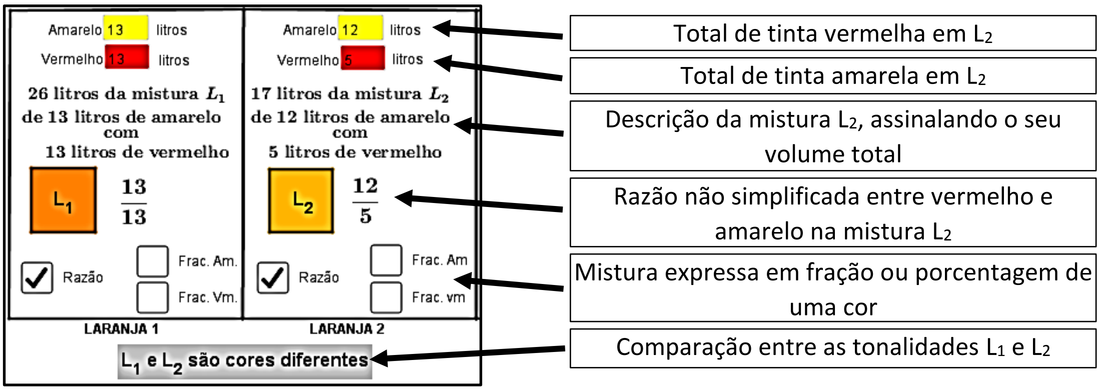


Figura 13 – Descrição das partes da tela inicial

É possível comparar as misturas através da razão entre as quantidades de tinta de cada uma das cores da composição ou através da fração (ou porcentagem) de uma das cores na mistura feita. Para isso basta selecionar uma das caixas denominadas “Razão”, “Frac. Am” (fração de tinta amarela), “Frac. Vm” (fração de tinta vermelha) ou “Frac. Az” (fração de tinta azul),

A Tarefa

Como já foi assinalado por Tourniaire (1985), “*problemas de mistura exigem que o sujeito compreenda o que acontece quando os dois elementos são misturados*.” Uma das finalidades desse app é fornecer um ambiente onde o aluno possa fazer experimentações em misturas de tintas virtuais e obter experiência sobre a influência de cada cor nas tonalidades da mistura. Ele visa também que o aluno possa sempre testar as suas suposições e obter dados para a confirmação ou negação dessas hipóteses.

O aluno receberá uma ficha (Anexo 2) onde será solicitado que resolva 8 diferentes problemas de valor omisso.

Os dois primeiros deles podem ser representados pelas tabelas:

	Amarelo	Vermelho
L1	2	3
L2	8	x

	Amarelo	Vermelho
L1	2	3
L2	y	18

Nestes problemas queremos induzir a estratégia de resolução através do fator escalar, pela facilidade de percepção de que $2 \times 4 = 8$ e de que $3 \times 6 = 18$. Também queremos que o aluno perceba que, se quisermos que a mistura L2 mantenha a mesma tonalidade de cor de L1, então os valores de amarelo deverão aumentar(reduzir) o mesmo "número de vezes" que os valores de vermelho (covariação).

Assim:

	Amarelo	Vermelho
L1	2	3
L2	X4 8	X4 x

	Amarelo	Vermelho
L1	2	3
L2	X6 y	X6 18

Mas obviamente estes problemas podem ser resolvidos por uma série de outras estratégias, inclusive estratégias de cunho não multiplicativo, como, por exemplo, a percepção de que:

$$Se\ 8 = 2 + 2 + 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad x = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

$$E\ se\ 18 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$

Os problemas 3 e 4 serão representados pelas tabelas:

	Azul	Amarelo
L1	2	6
L2	3	x

	Azul	Amarelo
L1	2	6
L2	y	15

Já nesses problemas, a intenção é reforçar o uso de uma resolução aplicando um fator funcional, através da evidência de que $2 \times 3 = 6$ e de que $6 \div 3 = 2$. Desse modo queremos realçar a percepção de que a relação numérica que exista entre as cores azul e amarelo em L1 deve se manter em L2

	Azul	Amarelo
L1	2 $\xrightarrow{\times 3}$	6
L2	3 $\xrightarrow[\times 3]{}$	x

	Azul	Amarelo
L1	2	$\xleftarrow{\div 3}$ 6
L2	y	$\xleftarrow[\div 3]{}$ 15

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{f(a) = ka}{f(b) = kb} \qquad \times k \quad \times k$$

Os problemas 5 e 7, representados pelas proporções

$$\frac{3}{7} = \frac{5}{x} \quad ou \quad \frac{3}{5} = \frac{7}{x} \qquad e \qquad \frac{5}{3,5} = \frac{11}{y} \quad ou \quad \frac{5}{11} = \frac{3,5}{y}$$

trabalham com valores não divisíveis entre si, tentando atingir um método de resolução geral

O problema 6 acrescenta um nível maior de dificuldade e pode ser representado por:

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & L_2 & ou & vermelho & amarelo \\ \frac{2}{9} = & \frac{2+3}{9+x} & ou & \frac{2}{2+3} = & \frac{9}{9+x} \end{array}$$

Neste tipo de problema, pretende-se que o aluno possa verificar que as proporções são estruturas multiplicativas, não aditivas, e assim perceber que:

$$\frac{2}{9} \neq \frac{2+3}{9+3}$$

No oitavo problema, que pode ser representado por:

$$\begin{array}{cc} L_1 & L_2 \\ \end{array}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{x}{y} \quad e \quad x + y = 30$$

Nesse caso, temos a expectativa que o trabalho do aluno possa caminhar na direção de perceber que a ***razão*** de x azul para y amarelo implica na ***fração*** de x azul em $(x + y)$ da mistura e, portanto:

$$\frac{6}{6+9} = \frac{x}{x+y} \Rightarrow \frac{6}{15} = \frac{x}{30}$$

Neste caso há a necessidade de se trabalhar a relação entre o conceito de razão (parte-parte) e o conceito de fração (parte-todo):

$$\frac{6\ partes\ de\ tinta\ azul}{9\ parte\ de\ tinta\ amarela} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6\ partes\ de\ tinta\ azul}{15\ partes\ da\ mistura} \\ \dfrac{9\ partes\ de\ tinta\ amarela}{15\ partes\ da\ mistura} \end{cases}$$

Embora não estejam presentes na ficha da tarefa, problemas de comparação, com este “ambiente” também podemos trabalhar este tipo de problema, tais como:

- Dadas as quantias de amarelo e vermelho de uma mistura, criar uma nova e diferente mistura de mesma tonalidade
- Dadas as quantidades de tinta amarela e vermelha em duas misturas, decidir e justificar se elas são ou não de mesma tonalidade

- Dadas as quantidades de tinta amarela e vermelha em duas misturas, decidir e justificar qual delas é mais “avermelhada” (ou amarelada)

App FUNÇÕES E PROPORCIONALIDADE

Descrição

Este App foi desenvolvido com base no trabalho exposto na dissertação "Students' perceptions of functions articulated in dynamic microworlds" da professora Verônica Gitirana (Students' perceptions of functions articulated in dynamic microworlds, 1992), da UFPE.

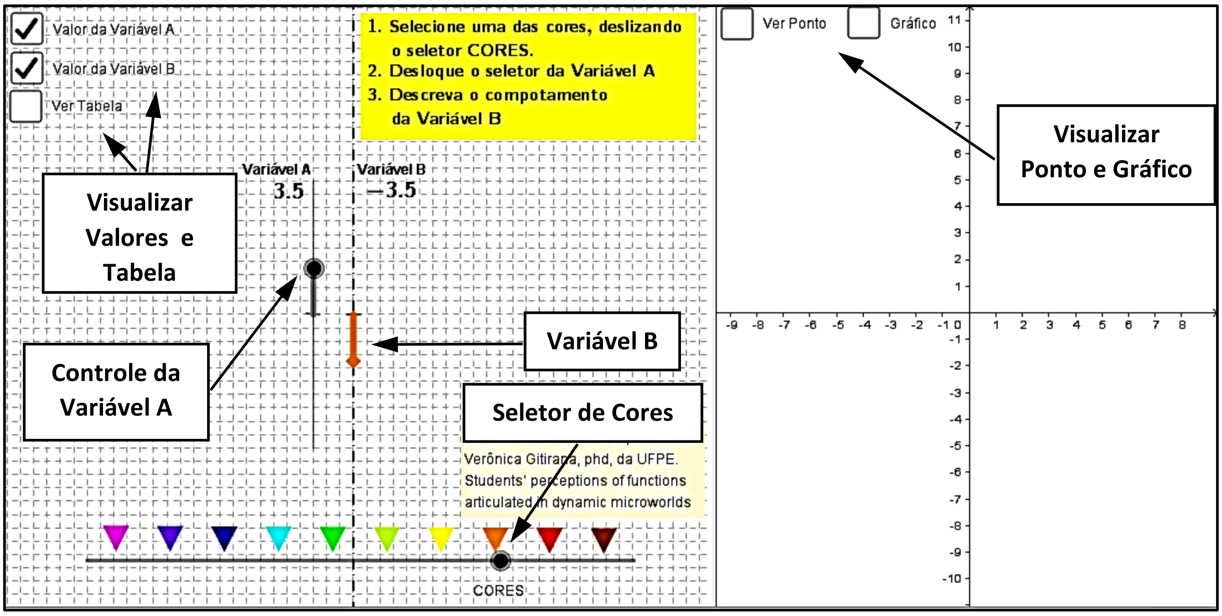


Figura 14 - Tela inicial do app Funções e Proporcionalidade

A tela inicial desse app esta apresentada na Figura 14 abaixo:

Na tela, temos duas barras finas verticais que estão associadas e representam 2 valores: Variável A e Variável B, onde o valor de B é uma função do valor de A. A definição algébrica dessa função é, por sua vez, dependente da cor escolhida em um seletor de cores que se encontra abaixo da tela. A relação entre cores e funções obedece ao que está mostrado na Tabela 4. abaixo:

Tabela 4- Relação entre Cores e Funções

	Magenta	$B = A$		Lima	$B = A/2$
	Violeta	$B = A + 4$		Amarelo	$B = 1/A$
	Azul	$B = 2A$		Laranja	$B = -A$
	Ciano	$B = A - 3$		Vermelho	$B = 5A$
	verde	$B = 10 - A$		Marrom	$B = 1{,}5A$

São cinco funções lineares, ou seja, com variáveis diretamente proporcionais

(Magenta, Azul, Lima, Vermelho e Marrom) e outras cinco com variáveis não proporcionais (funções afim não lineares). Selecionada uma cor, ao deslocarmos o controle da variável A, variamos o seu valor e, consequentemente, variamos também o valor da variável B, de acordo com a função selecionada através do seletor de cores.

Há opções para visualizar ou não os valores numéricos de A e B, como também visualizar uma tabela dinâmica com alguns valores pré-determinados de A e os respectivos valores para B.

Numa janela extra, à direita da tela, podemos visualizar um gráfico cartesiano dinâmico do ponto de coordenadas (variável A, variável B), e também da função $f(A) = B$. Na Figura 15, abaixo, a tela do app mostra a tabela e o gráfico do ponto da função selecionada.

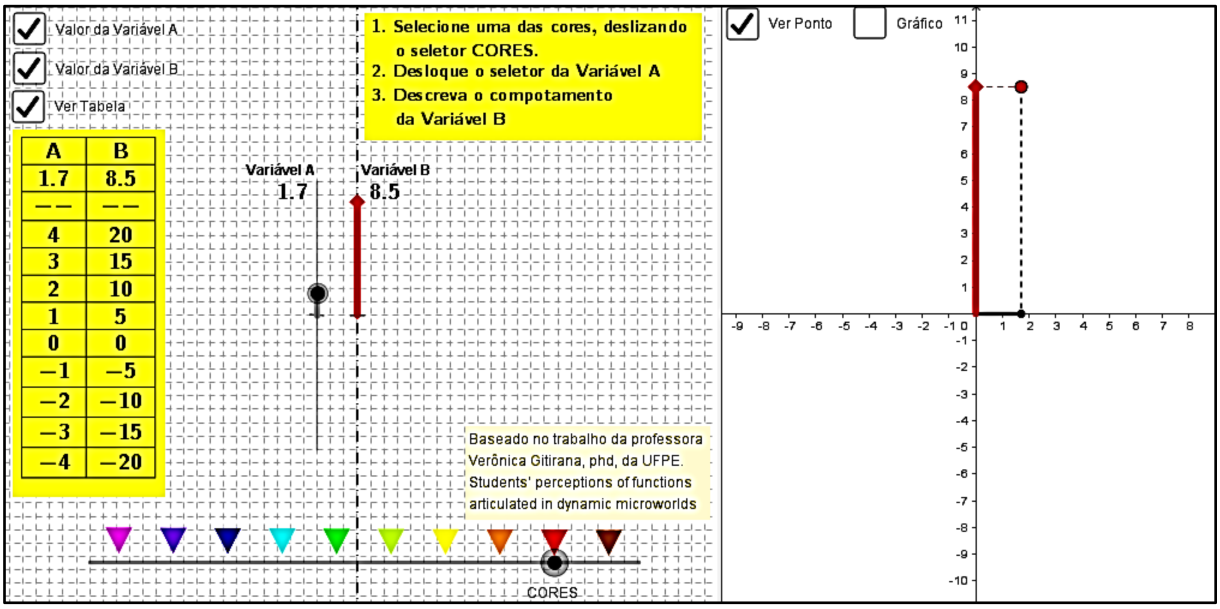


Figura 15 - Tela do App exibindo Tabela e Gráfico da função selecionada

Tanto o gráfico quanto a tabela funcionam de forma dinâmica atualizados simultaneamente às mudanças feitas nas varáveis A e B.

A Tarefa

Neste app são trabalhadas diferentes representações do conceito de grandezas diretamente proporcionais: Há a representação principal, formada por duas barras verticais paralelas cujas medidas estão relacionadas aos valores de cada uma das varáveis. Temos uma segunda representação em forma de tabela, onde as duas colunas apresentam valores predeterminados das variáveis A e B. Finalmente, a terceira representação mostra, em forma de gráfico cartesiano as mesmas variáveis

A e B.

Vários autores estudaram os efeitos pedagógicos do uso de diferentes representações de um mesmo conceito no trabalho de aprendizagem desse conceito. Gitirana (1992), afirma que usar diferentes representações de um conceito é uma forma de ajudar os alunos a melhorar suas percepções destes mesmos conceitos. A autora cita um experimento de Arcavi e Nachmias (1989) no qual, alunos e adultos, avaliados como experts em matemática, foram analisados ao tomarem contato com representações não convencionais de um conceito conhecido. Notaram que a maior parte deles passaram a reexaminar e reavaliar suas antigas representações num processo de tentativa de assimilação. Gitirana (1992), citando os autores Arcavi e Nachmias (1989), afirma que:

> "O papel de uma representação de uma ideia matemática parece ir além do simples objetivo de ter uma ferramenta para lidar com essa ideia. Pode-se dizer que, ao introduzir uma nova representação, não estamos apenas estabelecendo uma maneira de expressar uma ideia ou um conceito, mas também reexaminando e, consequentemente, aprendendo "mais" sobre essas ideias e conceitos "

Desse modo, o principal objetivo desse app é expandir e aprofundar o conceito de grandezas diretamente proporcionais e o de Função de Proporcionalidade.

A primeira questão da Ficha de atividades (Anexo 3) pressupõe que cada aluno, ou dupla de alunos, será responsabilizado por uma ou duas cores e deverá caracterizar o comportamento da variável B, diante da variação de A, em relação à(s) cor(es) (função) proposta(s). O enunciado da questão é: *Em relação à(s) sua(s) cor(es), explique como é a "reação" da variável B, quando a variável A muda de tamanho (valor). Dê uma explicação de modo que seus colegas possam descobrir a sua cor dentre todas as outras cores sem que você diga de que cor se trata.*

Eles escreverão suas descrições, sem citar a cor da qual se trata e trocarão estas mesmas descrições com outros colegas. Nesse ponto, cada aluno deverá descobrir a cor estudada por seu colega, através da leitura de sua descrição. O objetivo aqui é criar coletivamente um vocabulário básico de termos passíveis de serem usados numa definição de proporcionalidade direta. Espera-se que termos tais quais dobro, triplo, metade, terça parte, múltiplo, divisor, crescimento, proporção etc.

apareçam nas descrições ou discussões posteriores.

A segunda questão associa à situação da questão anterior, a representação por tabela para cada relação referente a cada cor. Os alunos usarão esta representação para completar tabelas e analisar cada uma das funções para, por dedução, chegar a uma representação algébrica de cada uma delas. Por exemplo:

Violeta	
A	B
12	16
-9	-5
8	12
-13	-9
x	$x+4$

Laranja	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Vermelho	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Marrom	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

A terceira questão da tarefa, aprofunda as descrições dos alunos ao fazer as seguintes perguntas sobre o comportamento das grandezas envolvidas em cada uma das situações representadas pelas cores.

a) Se a variável A cresce, então a variável B também cresce?
b) Se a variável A cresce, então a variável B decresce?
c) A variável B é sempre maior que a variável A?
d) A diferença entre a variável B e a variável A é constante?
e) A variável B é um múltiplo da variável A?
f) Se a variável A dobra, triplica ou quadruplica, a variável B também dobra, triplica e quadruplica?
g) Se a variável A dobra, triplica ou quadruplica, a variável B se reduz à metade, a 1 terço ou a 1 quarto de seu valor?
h) Em que cores temos que B é diretamente proporcional a A?

As questões 4 e 5 pedem dos alunos uma primeira definição para grandezas diretamente proporcionais e uma representação algébrica geral para elas.

Finalmente a questão 6 traz uma nova representação de grandezas proporcionais: o gráfico em eixos cartesianos. Com isso, pretende-se que o conceito adquira um amplo e abrangente significado.

App AMPLIAÇÃO E REDUÇÃO

Descrição

Com esse aplicativo, pretendemos trabalhar com os problemas relacionados à semelhança entre figuras planas.

A sua tela inicial é mostrada na Figura 16, abaixo:

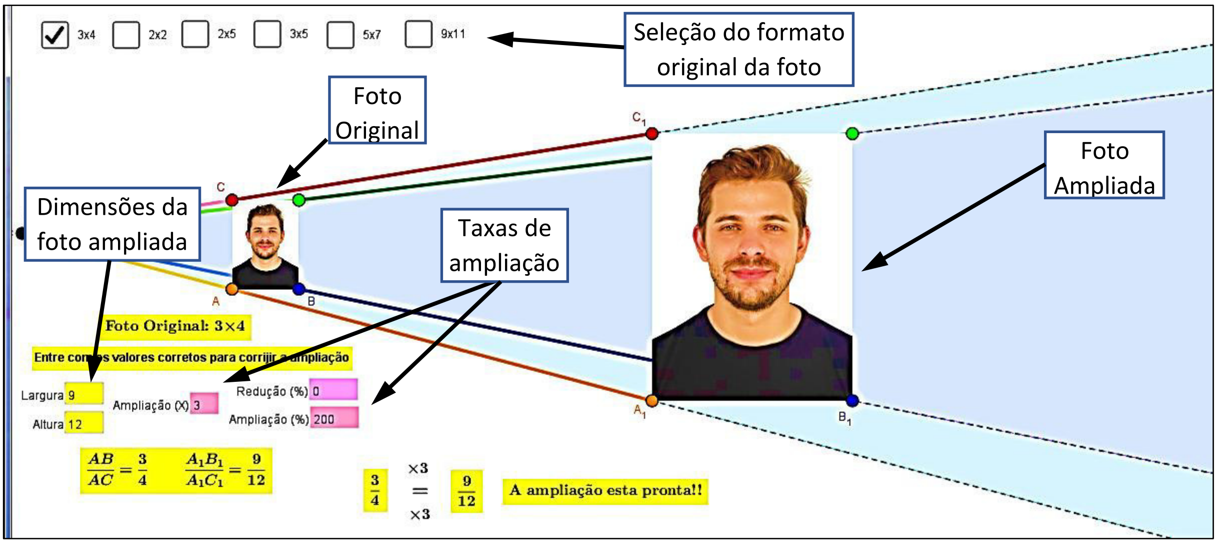


Figura 16 - Tela inicial do App Ampliação

Basicamente as questões relacionadas a este app irão versar sobre as relações matemáticas entre as dimensões pré-determinadas de uma foto original (3x4; 2x2; 2x5; 3x5; 5x7 ou 9x11) e as dimensões de uma ampliação ou redução desta foto original, sob uma determinada taxa de ampliação/redução que poderá ser dada em percentual ou em números absolutos (por exemplo, uma ampliação de 2 vezes — 100% — ou de 0.5 vezes — 50%).

Como dito, pode-se escolher entre 6 diferentes razões para as dimensões da foto original e deve-se determinar tanto as dimensões da foto ampliada quanto a taxa de ampliação que foi aplicada neste caso.

Vejamos alguns exemplos de uso:

Digamos que queremos resolver o seguinte problema: Carlos quer ampliar uma foto sua, no tamanho 3x4, de modo que a foto tenha uma altura de 12 cm. Qual a largura da ampliação desejada. O aluno deverá:

Selecionar a foto original de tamanho 3x4

Digitar, em altura da foto, o número 12

Se, a largura da foto ampliada, não estiver com o valor 9, o programa mostrará uma mensagem indicando que a proporção da ampliação não está correta (Figura 17)

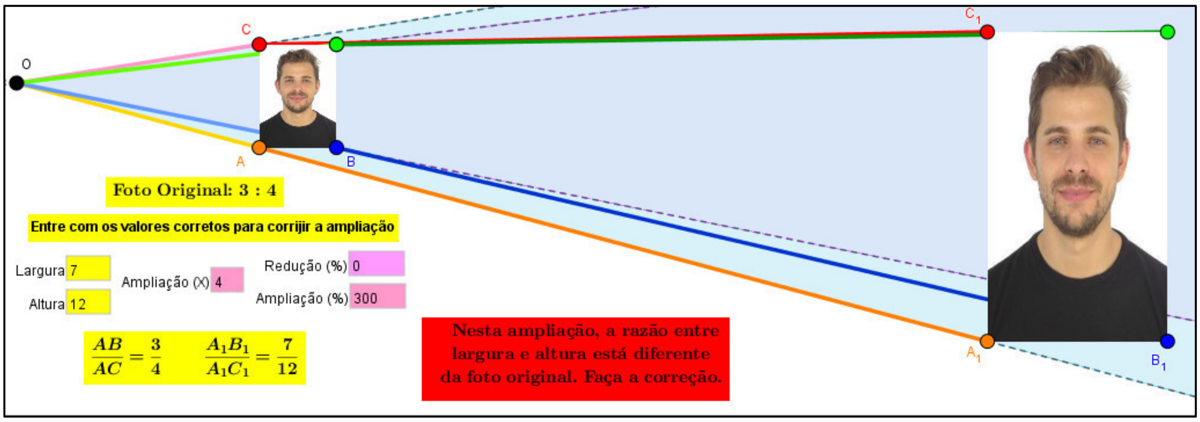


Figura 17 - Introduzindo os Dados do Problema

O aluno deverá calcular a largura desejada (= 9), e digitá-la no campo Largura (Figura 18).

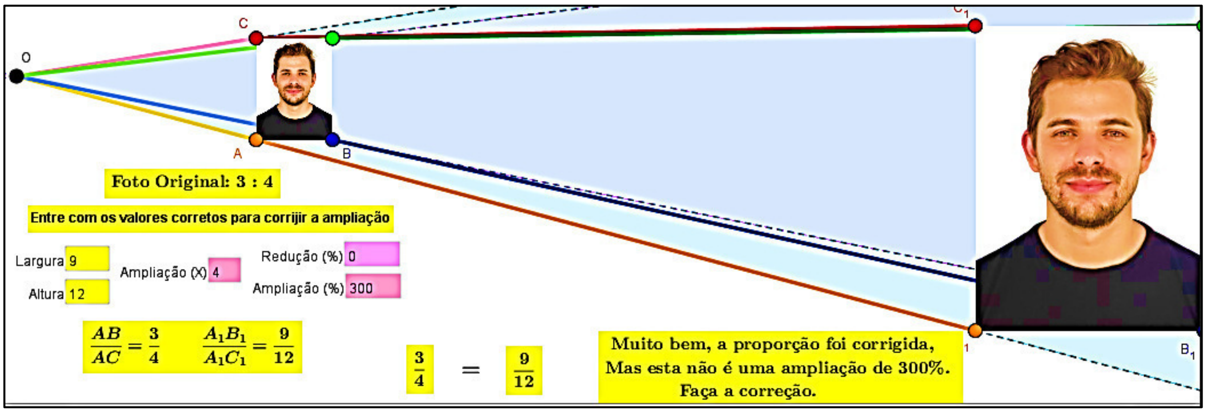


Figura 18 - Introduzindo a Largura da Ampliação/Redução

Novamente o programa solicita do aluno que corrija a taxa de ampliação ou de redução que está sendo usada (Figura 19).

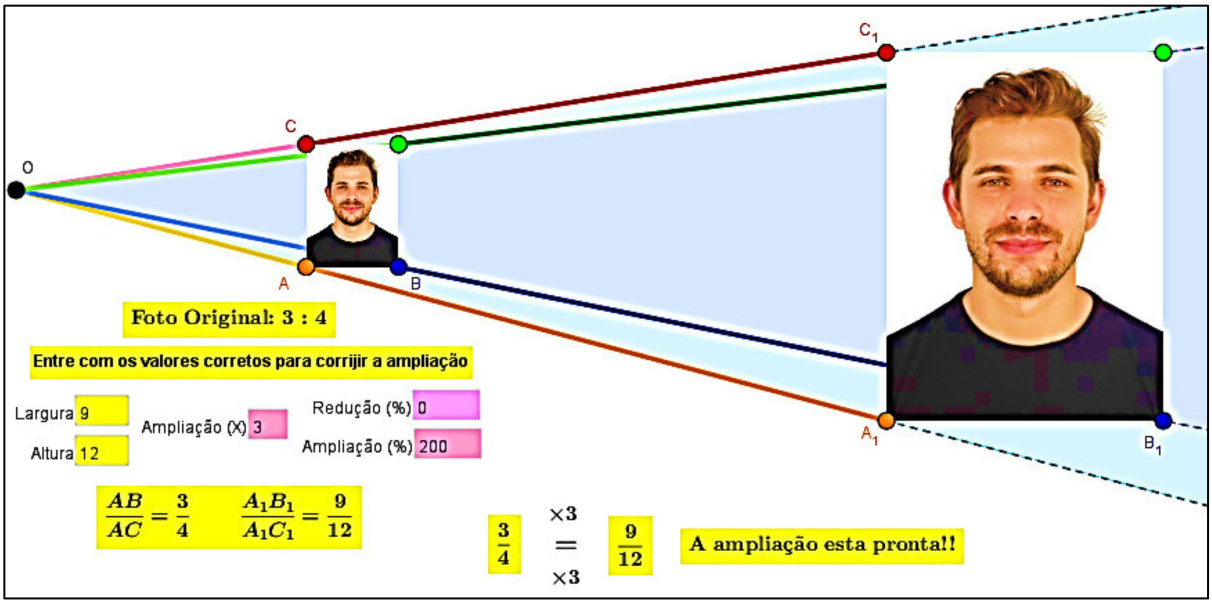


Figura 19 - Introduzindo a Razão de Ampliação/Redução

A Tarefa

São apresentadas 8 situações-problemas (Anexo 4), onde pretende-se que os alunos percebam a seguinte estrutura matemática relacionada a cada uma delas:

$$\begin{tikzcd} largura1 \arrow[d, bend right, "\times \text{ Taxa de ampliação/redução}"'] & altura1 \arrow[d, bend left, "\times \text{ Taxa de ampliação/redução}"] \\ largura2 & altura2 \end{tikzcd}$$

Esta tarefa é composta basicamente de dois tipos de problemas

1. Problemas de valor omisso onde se tem uma foto com uma dada razão entre altura e largura e se quer obter uma nova foto, ampliação ou redução da foto original, sendo conhecida uma das suas medidas. A estrutura matemática relacionada é mostrada na Figura 20:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{largura1}{altura1} = \dfrac{?}{altura2} \\ \text{ou} \\ \dfrac{largura1}{altura1} = \dfrac{largura2}{?} \end{array}}$$

Figura 20 - Problema de valor omisso

2. Problemas de Transformação onde conhecemos as dimensões de uma das fotos (original ou ampliada/reduzida), e a taxa de ampliação/redução. Quer-se determinar as dimensões da outra foto. A estrutura matemática relacionada é mostrada na Figura 21:

$$\begin{tikzcd} largura1 \arrow[r, bend left, "\times \text{ Taxa de ampl/red}"] & ? \\ altura1 \arrow[r, bend right, "\times \text{ Taxa de ampl/red}"'] & ? \end{tikzcd} \qquad ou \qquad \begin{tikzcd} ? \arrow[r, bend left, "\times \text{ Taxa de ampl/red}"] & largura2 \\ ? \arrow[r, bend right, "\times \text{ Taxa de ampl/red}"'] & altura2 \end{tikzcd}$$

Figura 21 - Problema de Transformação

Procura-se também fortalecer o uso de estratégias de resolução com o uso do fator funcional ou ***taxa de ampliação/redução***. Ao contrário de outros problemas, esse fator recebe aqui essa denominação específica e a determinação de seu valor é requisitada em vários problemas.

Trabalhamos com valores inteiros e decimais para a taxa de ampliação/redução. Com isso, procuramos ressaltar a relação entre o valor da taxa de ampliação/redução e o efeito sobre o tamanho da foto transformada:

$$Taxa > 1 \ \Rightarrow ampliação \qquad e \qquad 0 < Taxa < 1 \ \Rightarrow redução$$

Usamos também a representação percentual da taxa de ampliação/redução em alguns problemas. O uso de taxas de ampliação/redução traz alguns pontos problemáticos:

Quando dizemos que queremos fazer uma ampliação ou um acréscimo de 20% sobre um valor de uma determinada grandeza, há, pelo menos, três modos de pensar matematicamente esse problema:

1. A taxa de 20% é vista como uma fração usada com função de operador multiplicativo.

$$\boxed{Acréscimo = \frac{20}{100} \times Valor\ inicial \ \therefore \ Valor\ final = Acrécimo + Valor\ inicial}$$

2. O acréscimo e a taxa formam uma proporção

$$\boxed{\frac{Acréscimo}{Valor\ inicial} = \frac{20}{100} \quad \therefore \quad Valor\ final = Acrécimo + Valor\ inicial}$$

3. O Valor final e o Valor inicial formam uma proporção

$$\boxed{\frac{Valor\ inicial}{Valor\ final} = \frac{100}{100 + 20}}$$

Do mesmo modo, se temos uma redução ou desconto de 20%, teríamos

1. A taxa de 20% é vista como uma fração usada com função de operador multiplicativo.

$$\boxed{Redução = \frac{20}{100} \times Valor\ inicial \quad \therefore \quad Valor\ final = Valor\ inicial - Redução}$$

2. A redução e a taxa formam uma proporção

$$\boxed{\frac{Redução}{Valor\ inicial} = \frac{20}{100} \quad \therefore \quad Valor\ final = Valor\ inicial - Redução}$$

3. O Valor final e o Valor inicial formam uma proporção

$$\frac{Valor\ inicial}{Valor\ final} = \frac{100}{100 - 20}$$

Acreditamos que é importante que os alunos possam chegar a transitar indistintamente entre os três modos.

App RAZÃO ENTRE BOLINHAS

Descrição:

A tela inicial do App é mostrada na Figura 22. Nesta tela estão representados dois blocos de bolinhas, um com bolinhas vermelhas e outro com azuis. O usuário pode definir a quantidade total de bolinhas em cada bloco. Cada bloco de bolinhas é organizado em grupos iguais (colunas) de bolinhas, ficando as bolinhas restantes, se existirem, num último grupo. Por exemplo, Na Figura 22, o bloco com as 80 bolinhas vermelhas, está organizado em 7 grupos, de 8 bolinhas cada um, e mais 4 bolinhas.

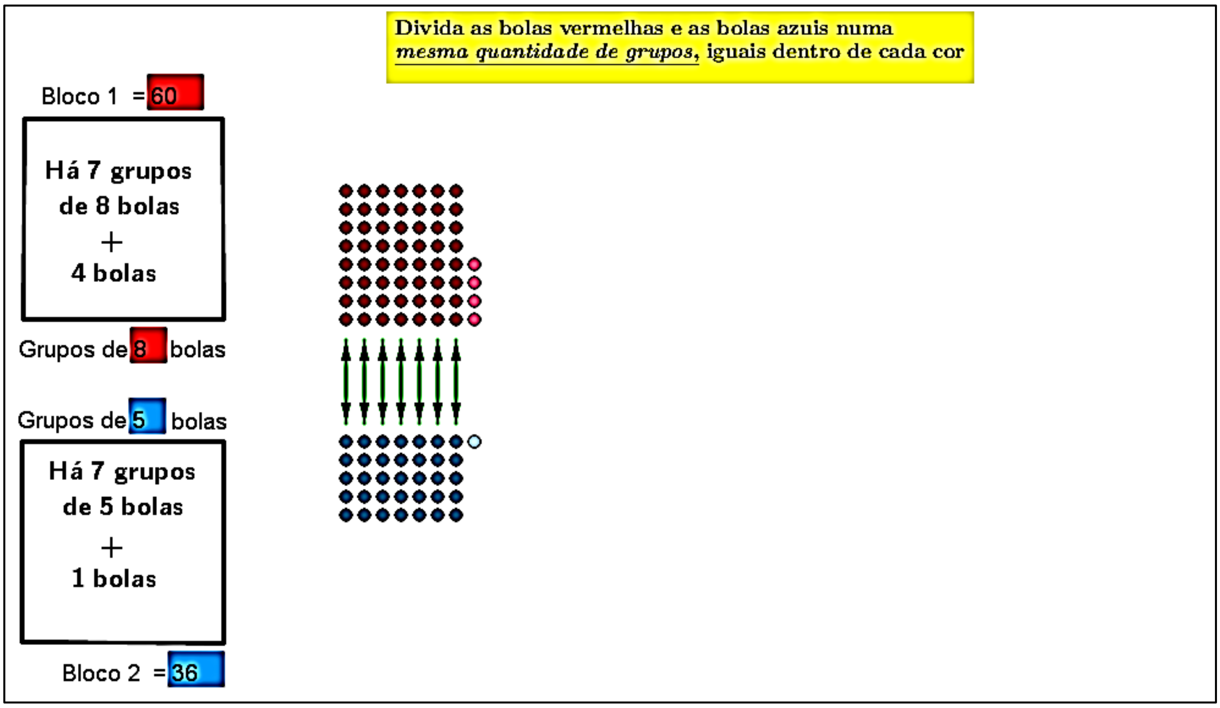


Figura 22 - Tela inicial do App RAZÃO ENTRE BOLINHAS

O usuário também pode definir o número de bolinhas em cada um dos grupos de cada bloco.

Basicamente o problema que é colocado ao usuário é fazer com que os dois blocos fiquem divididos em uma mesma (e maior possível) quantidade de grupos. No exemplo colocado na Tabela 5, a seguir, onde os blocos 1 e 2 apresentam 60 e 36 bolinhas, respectivamente, isso pode ser feito de 6 modos diferentes:

Tabela 5 - As 6 soluções possíveis para o caso com 60 bolinhas vermelhas e 36 azuis

Nº de Grupos	Nº de bolas vermelhas em cada grupo	Nº de bolas azuis em cada grupo	
1	60	36	
2	30	18	
3	20	12	
4	15	9	Ver Figura 25
6	10	6	
12	5	3	Ver Figura 24

Observe que cada solução encontrada é associada a uma proporção que é mostrada na tela. Tomando o último exemplo (ver Figura 25), teremos a proporção mostrada na Figura 23, onde o número de grupos toma o lugar de fator funcional.

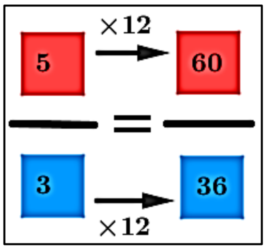


Figura 23 - A Razão entre 60 e 36 é 5/6

Nesse caso, o fator funcional torna-se um elemento “concreto” da proporção com um significado visível (o número de grupos).

As Figura 24 e Figura 25 mostram como essas soluções são apresentadas:

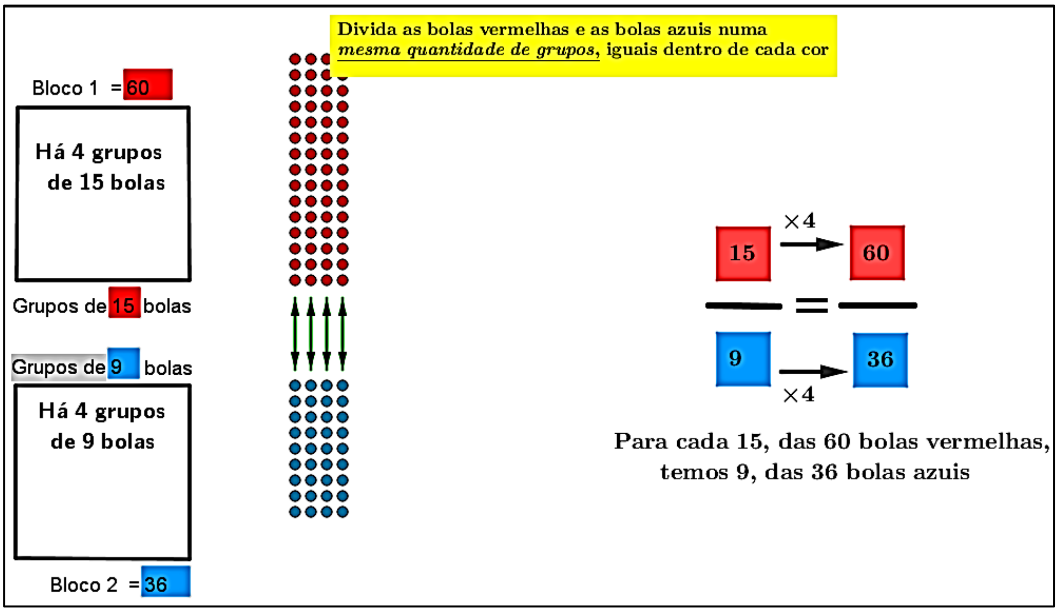


Figura 24 - Uma solução possível: 4 x15=60 bolas vermelhas e 4 x8=36 bolas azuis

A última solução encontrada na Tabela 5: 12 grupos de 5 bolas vermelhas e 12 grupos de 3 bolas azuis corresponde à forma mais simples da razão entre os totais de bolas vermelhas e azuis:

$$\overset{\times 12}{\underset{\times 12}{\frac{60}{36} = \frac{5}{3}}}$$

Ou seja, queremos com isso, agregar significados ao conceito de razão de números inteiros. Dizer que a razão entre 60 bolinhas vermelhas e 36 bolinhas azuis é $60/36 = 5/3 = 1,\overline{6}$, significa que **60 é $1,\overline{6}$ vezes maior que 36**. Porém, pode significar também que, nesse total de bolinhas vermelhas e azuis, **para cada grupo de 5 bolinhas vermelhas, posso associar 3 bolinhas azuis num total de 12 grupos iguais com 8 bolinhas cada um**.

A Tarefa

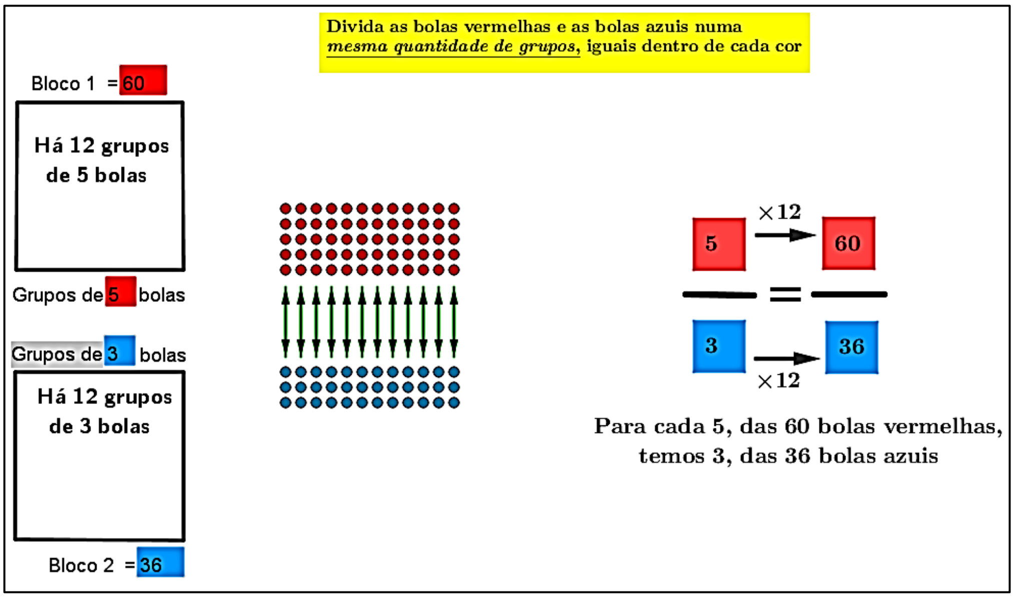


Figura 25- Uma solução possível: 12 x5=60 bolas vermelhas e 12 x3=36 bolas azuis

A ficha de atividades que acompanha o app (Anexo 5), traz 3 tipos de problemas:

No primeiro caso, são dados os totais de bolinhas Vermelhas e Azuis e se deseja determinar a razão entre esses totais através da divisão em grupos iguais. Na ficha o problema é colocado como na Figura 26, abaixo:

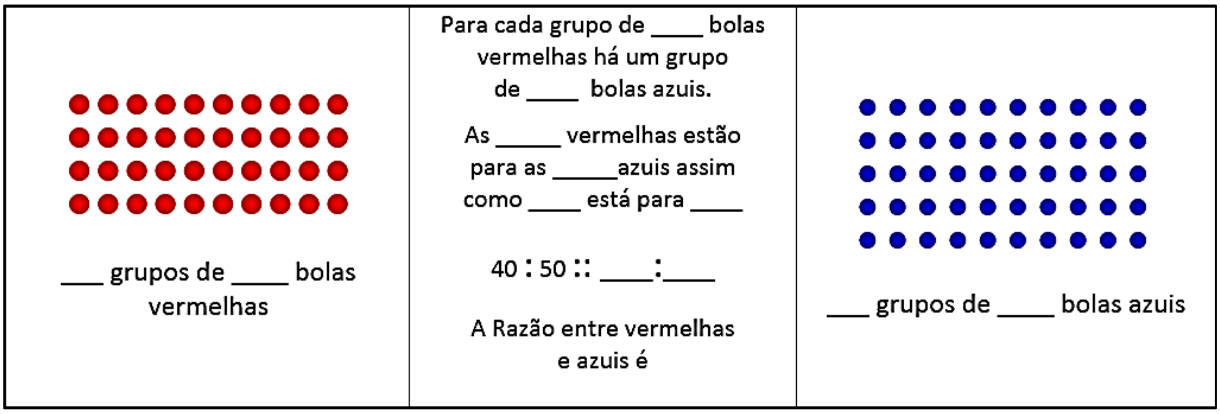


Figura 26 - Problema do tipo 1: encontrar a razão entre dois totais conhecidos

Ou seja, em termos matemáticos, o aluno deverá resolver um problema de transformação onde ele conhece uma razão inicial que, no exemplo da Figura 26, é 40:50 e se deseja um fator de simplificação, o número de grupos (10) a fim de se obter a razão simplificada (4:5)

Se deseja que o aluno utilize o app para experimentações, análise, levantamento de hipóteses, verificação de estratégias usadas em cálculos ou, até mesmo, tentativa e erro para obter, no app, a solução, como mostra a Figura 27 .

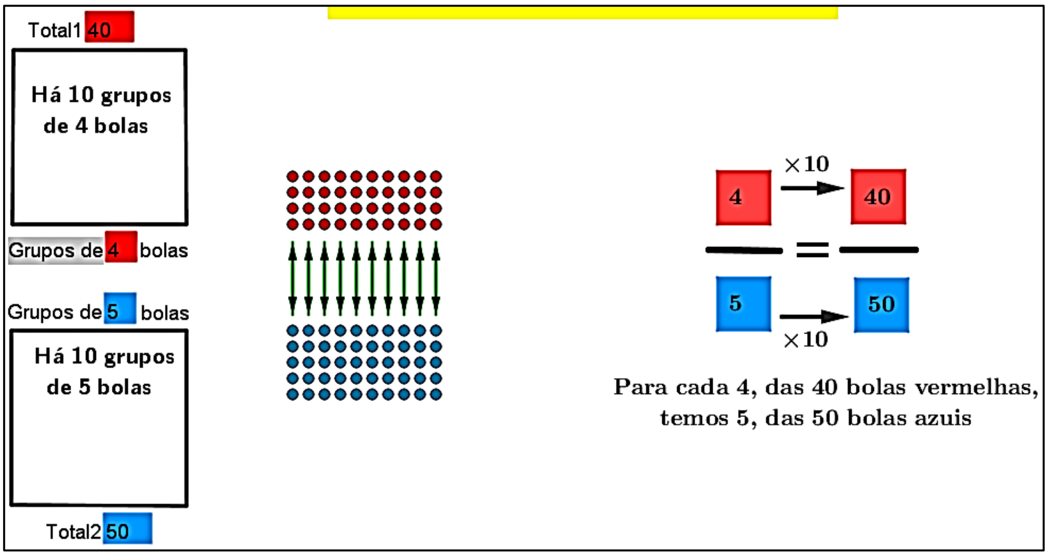


Figura 27 - Solução do Problema 1 no app

E então o usuário poderá completar os espaços vazios da primeira questão da ficha, como no exemplo apresentado na Figura 28:

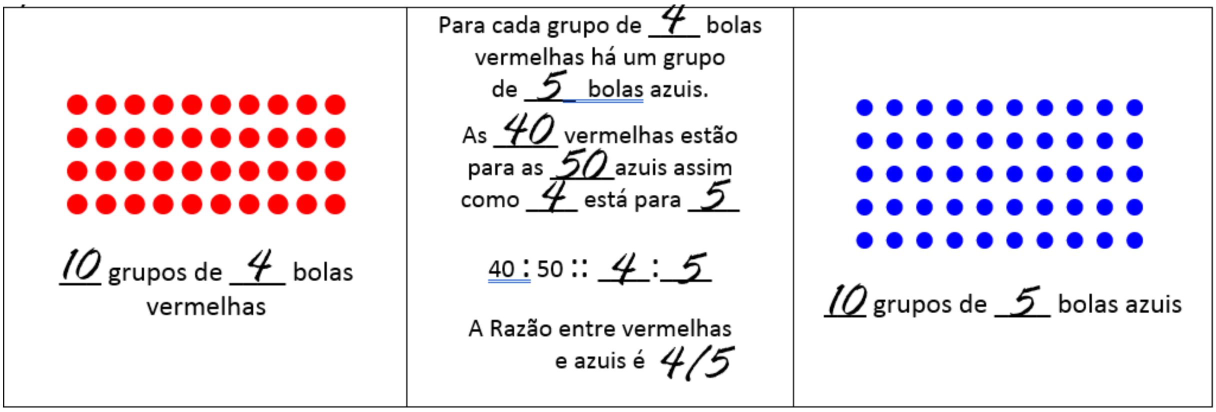


Figura 28- Problema do tipo 1 resolvido

Na segunda questão são apresentadas situações-problemas de valor omisso, onde, em cada uma delas, é conhecido um dos totais das bolinhas, vermelhas ou azuis, e a razão entre vermelhas e azuis. O aluno deverá encontrar o total do outro conjunto de bolas, como no exemplo da Figura 29

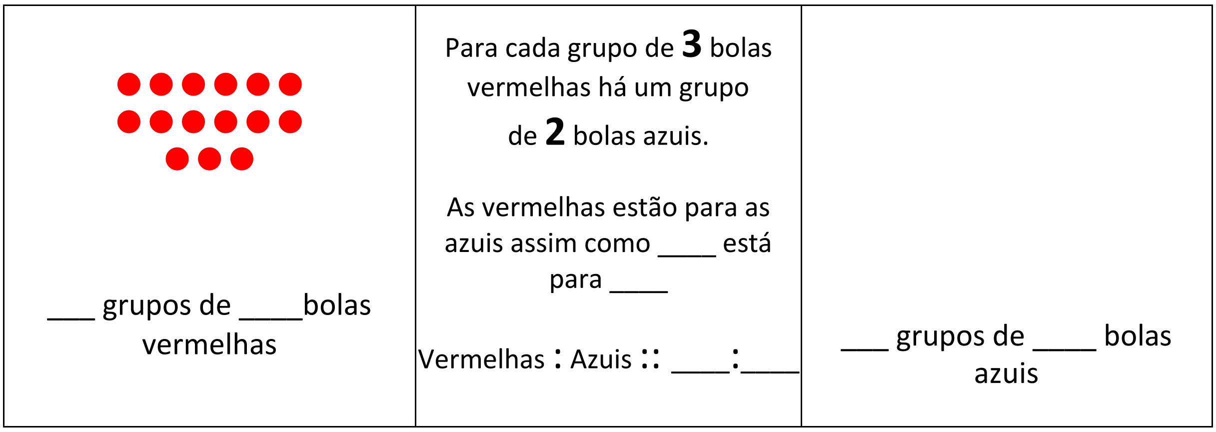


Figura 29 - Problema de valor omisso

Ou seja:

$$\div\ (n^{\underline{o}}\ de\ grupos)$$

$$\frac{15}{?} = \frac{3}{2}$$

$$\div\ (n^{\underline{o}}\ de\ grupos)$$

Na terceira questão são trabalhados vários casos de mudanças de representação de uma situação, por exemplo:

$$N^{\underline{o}}\ de\ vermelhas\ é\ o\ dobro\ de\ azuis\ \Leftrightarrow \frac{n^{\underline{o}}\ vermelhas}{n^{\underline{o}}\ azuis} = \frac{2}{1}$$

Ou alguns problemas de valor omisso em forma de texto, diferente da segunda questão onde estes mesmos problemas aparecem em forma de desenhos ou esquemas.

App QUAL O MAIS CHEIO?

Descrição:

A criação deste app foi baseada nos experimentos apresentados no artigo **O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção**, da Prof. Dra. Alina Galvão Spinillo da Universidade Federal de Pernambuco (2002)

A tela inicial do App é mostrada na Figura 31, abaixo. Na parte inferior desta

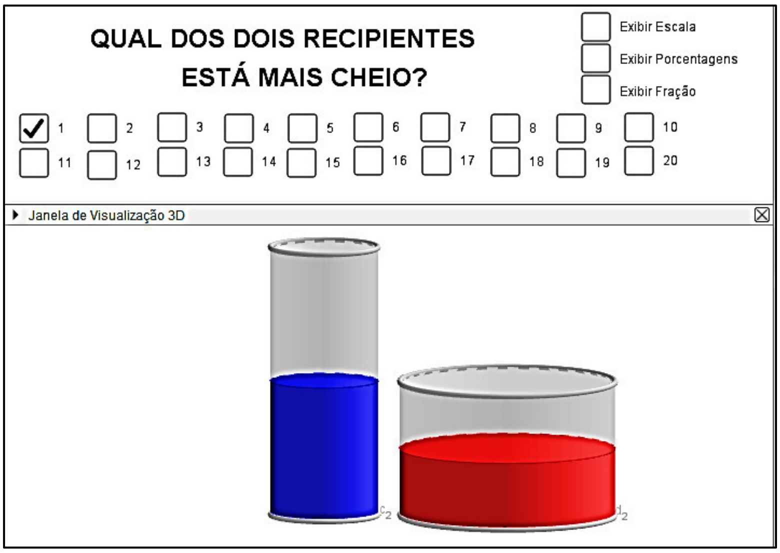


Figura 31 - Tela inicial do App "Qual é o mais cheio?"

tela, podemos ver a representação de dois recipientes transparentes em 3D, cada um deles contendo líquidos de cores azul e vermelho. Na parte superior temos pequenas caixas, numeradas de um a vinte e que, ao serem selecionadas com o mouse, apresentam diferentes versões da situação apresentada: os recipientes variam em

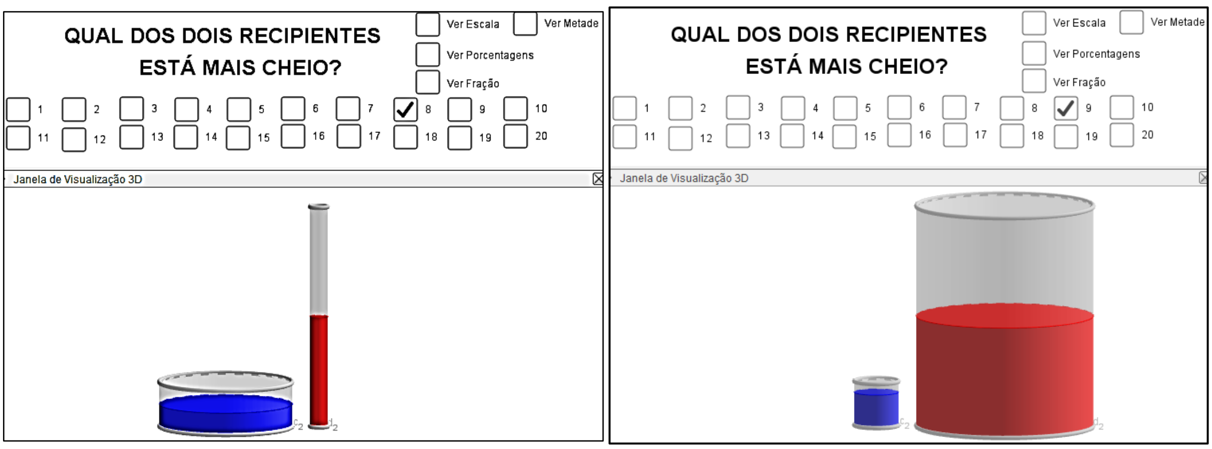


Figura 30 - Variações de diâmetro, altura e quantidade de líquidos nos recipientes

diâmetro, altura e quantidade de líquido contida em cada um deles, conforme Figura

30, abaixo .

O problema que se coloca aqui é: Qual dos dois recipientes está mais cheio? (Anexo 6)

Na tela inicial vemos ainda caixas de seleção que permitem visualizar uma barra vertical dividida e demarcada em dez partes iguais (que pode servir como escala para comparações de alturas de recipiente e de líquidos) e duas linhas horizontais que assinalam as alturas que correspondem à metade de cada recipiente). Figura 32.

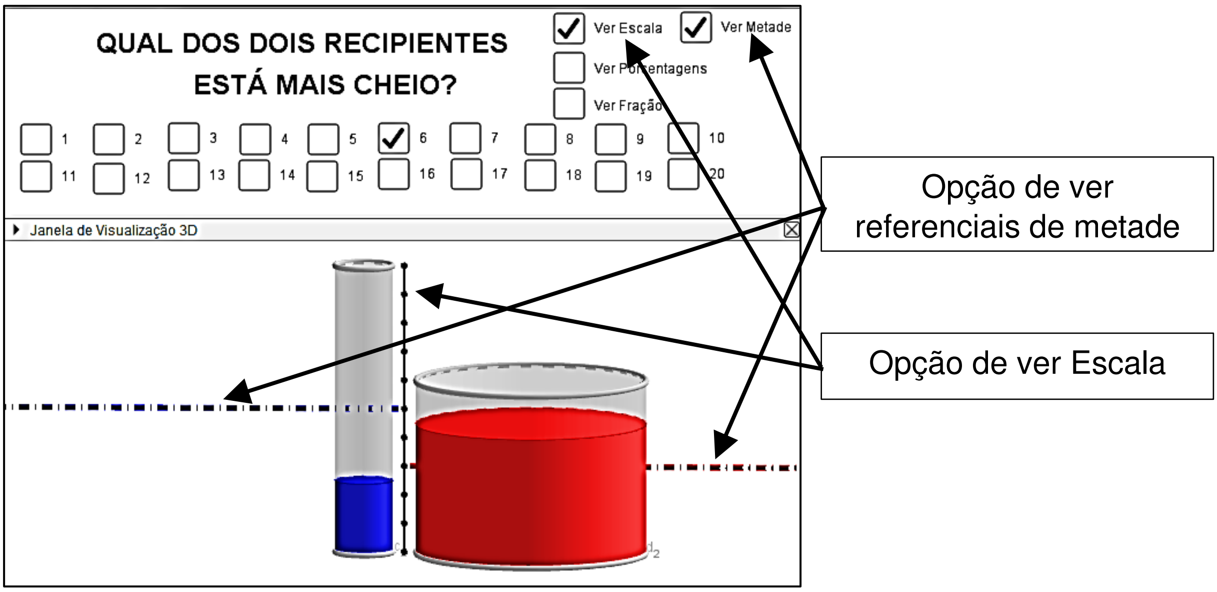


Figura 32 - App com as opções de "Escala" e "Metade" ativadas

Por fim temos as opções de exibir valores numéricos da parte cheia de cada recipiente, em forma de porcentagem ou em fração Figura 33.

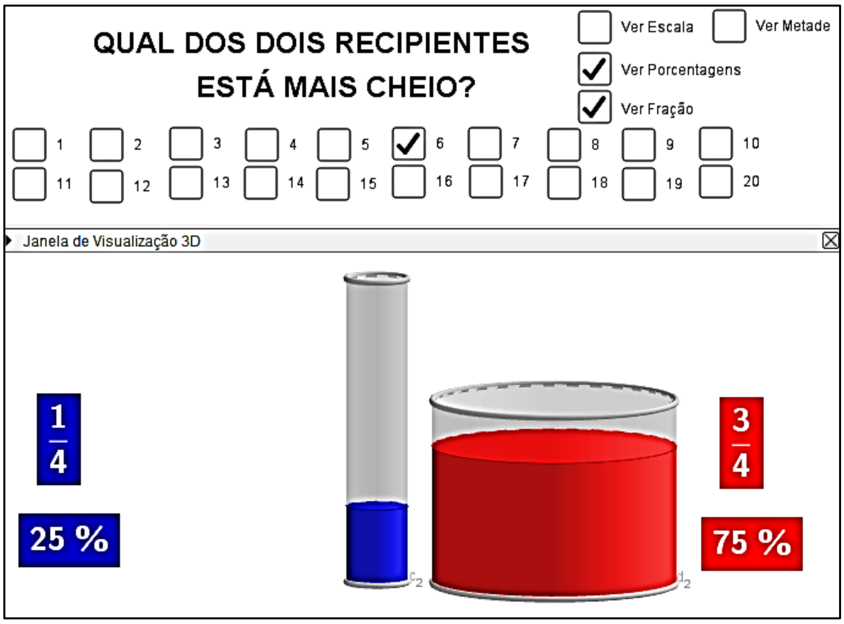


Figura 33 - Exibindo Fração e Porcentagem da parte cheia de cada recipiente

A Tarefa

Este app foi desenhado para ser usado com crianças do primeiro ciclo do ensino fundamental ou com outras idades se o professor assim o desejar. O problema, ao ser apresentado às crianças (Anexo 6), pode ser, a princípio e aos olhos delas, dúbio. O que significa estar cheio? Cheio é o recipiente que tem mais líquido? É aquele em que o líquido “fica mais alto”? É o que tem menos espaço vazio?

Para resolver este problema as crianças precisam aprender a olhar simultaneamente para dois espaços de cada recipiente: aquele ocupado por líquido e aquele que se encontra vazio. A ideia de “cheio” nasce da relação entre estes dois espaços e não da observação de somente um deles. Temos, pois, um problema de proporcionalidade.

Pesquisas mostram que as crianças, inicialmente, tendem a se fixar em apenas um destes dois espaços para definir o que seja “mais cheio”, principalmente se os dois recipientes trazem quantidades relativas aproximadas de líquido. Entretanto se o referencial de metade pode servir como elemento discriminador entre os dois recipientes, (por exemplo, um recipiente tem mais que a metade de sua capacidade cheia e o outro tem menos que ou exatamente a metade ocupada com líquido) as crianças tendem a, intuitivamente, acertar em seus julgamentos e usar este referencial como argumento em suas justificativas ao resolver o problema (SPINILLO, 1992). Por exemplo, na primeira tela da Figura 30, poderíamos ter uma justificativa do tipo “**os dois recipientes estão igualmente cheios pois ambos têm líquido até a sua metade**”. Ou, para a segunda tela da mesma figura, “**o recipiente da esquerda (azul) está mais cheio pois tem mais da metade preenchida, já o recipiente da direita (vermelho) tem apenas metade de seu espaço interno com líquido**”

O recurso ao referencial de metade pode ser aprendido e se transformar em um poderoso aliado na resolução de problemas de comparação que necessitem do raciocínio proporcional. O ambiente do programa permite a exibição de 2 linhas horizontais que mostram a linha mediana de cada um dos recipientes. O uso desse recurso pode ser feito nos casos de crianças que ainda não utilizam o referencial de metade em seus raciocínios.

Desse modo, com o uso desse programa temos, como um dos objetivos principais, desenvolver ou fortalecer este conhecimento intuitivo do referencial de metade como elemento constitutivo do raciocínio proporcional da criança.

Pesquisas mostram que, ao criar a ideia de metade, a criança normalmente, primeiro a concebe como uma **razão de 1 para 1** entre as duas partes de um todo (a parte com líquido "é igual" à parte vazia), num raciocínio do tipo parte-parte. Só mais tarde é que elas começam a entender o conceito de metade como uma **fração de 1 para 2**, que relaciona uma parte com um todo (SPINILLO, 1992). Assim sendo, há pelo menos duas estratégias de raciocínio possíveis com o uso de referencial de metade, conforme a Figura 34:

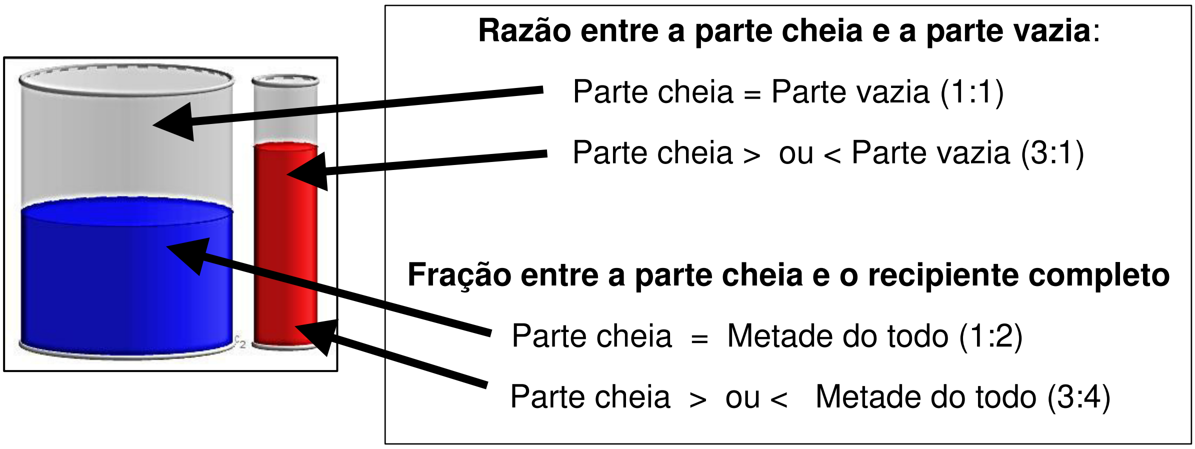


Figura 34 - Possibilidades de estratégias de Comparação

No nosso app "Qual o mais cheio?", apresentamos vinte situações de comparação entre dois recipientes. Todas elas podem ser resolvidas utilizando-se do referencial de metade. São elas:

Tabela 6 - Razões e frações de cada uma das situações-problemas apresentadas

N°	Razão	Fração
1	${}^{1}/_{1} = {}^{1}/_{1}$	${}^{1}/_{2} = {}^{1}/_{2}$
3	${}^{1}/_{0} = {}^{1}/_{0}$	${}^{1}/_{1} = {}^{1}/_{1}$
5	${}^{1}/_{3} < {}^{3}/_{1}$	${}^{1}/_{4} < {}^{3}/_{4}$
7	${}^{1}/_{1} > {}^{1}/_{3}$	${}^{1}/_{2} > {}^{1}/_{4}$
9	${}^{3}/_{1} > {}^{1}/_{1}$	${}^{3}/_{4} > {}^{1}/_{2}$
11	${}^{3}/_{1} > {}^{1}/_{3}$	${}^{3}/_{4} > {}^{1}/_{4}$
13	${}^{1}/_{3} < {}^{1}/_{1}$	${}^{1}/_{4} < {}^{1}/_{2}$
15	${}^{1}/_{0} = {}^{1}/_{0}$	${}^{1}/_{1} = {}^{1}/_{1}$
17	${}^{1}/_{3} < {}^{3}/_{1}$	${}^{1}/_{4} < {}^{3}/_{4}$
19	${}^{1}/_{3} < {}^{1}/_{1}$	${}^{1}/_{4} < {}^{1}/_{2}$

Nº	Razão	Fração
2	${}^{1}/_{1} < {}^{3}/_{1}$	${}^{1}/_{2} < {}^{3}/_{4}$
4	${}^{1}/_{1} < {}^{1}/_{0}$	${}^{1}/_{2} < {}^{1}/_{1}$
6	${}^{1}/_{3} < {}^{3}/_{1}$	${}^{1}/_{4} < {}^{3}/_{4}$
8	${}^{1}/_{1} = {}^{1}/_{1}$	${}^{1}/_{2} = {}^{1}/_{2}$
10	${}^{1}/_{1} < {}^{1}/_{0}$	${}^{1}/_{2} < {}^{1}/_{1}$
12	${}^{3}/_{1} > {}^{1}/_{1}$	${}^{3}/_{4} > {}^{1}/_{2}$
14	${}^{1}/_{1} = {}^{1}/_{1}$	${}^{1}/_{2} = {}^{1}/_{2}$
16	${}^{1}/_{0} > {}^{1}/_{1}$	${}^{1}/_{1} > {}^{1}/_{2}$
18	${}^{1}/_{1} < {}^{3}/_{1}$	${}^{1}/_{2} < {}^{3}/_{4}$

Obs.: a razão indicada por $^{1}/_{0}$ na tabela, embora não tenha significado matemático, representa aqui o recipiente cheio, ou seja, 1 parte de líquido para 0 partes "vazias".

Na ficha de atividades deste app (anexo 6) se apresentam estas 19 situações representadas, cada uma, por um desenho e ao lado há um espaço para a justificativa da resposta da criança. Com isso estamos interessados em desenvolver também as habilidades de argumentação e do uso de linguagem técnica matemática.

Ao ser selecionada a opção 20, temos a exibição de 6 controles deslizantes que permitem a criação de situações novas através do controle do diâmetro e da altura de cada recipiente, como também a quantidade de líquido contido em cada um deles. Esta opção é voltada para a livre exploração tanto do aluno quanto do professor em outras situações de comparação (Figura 35).

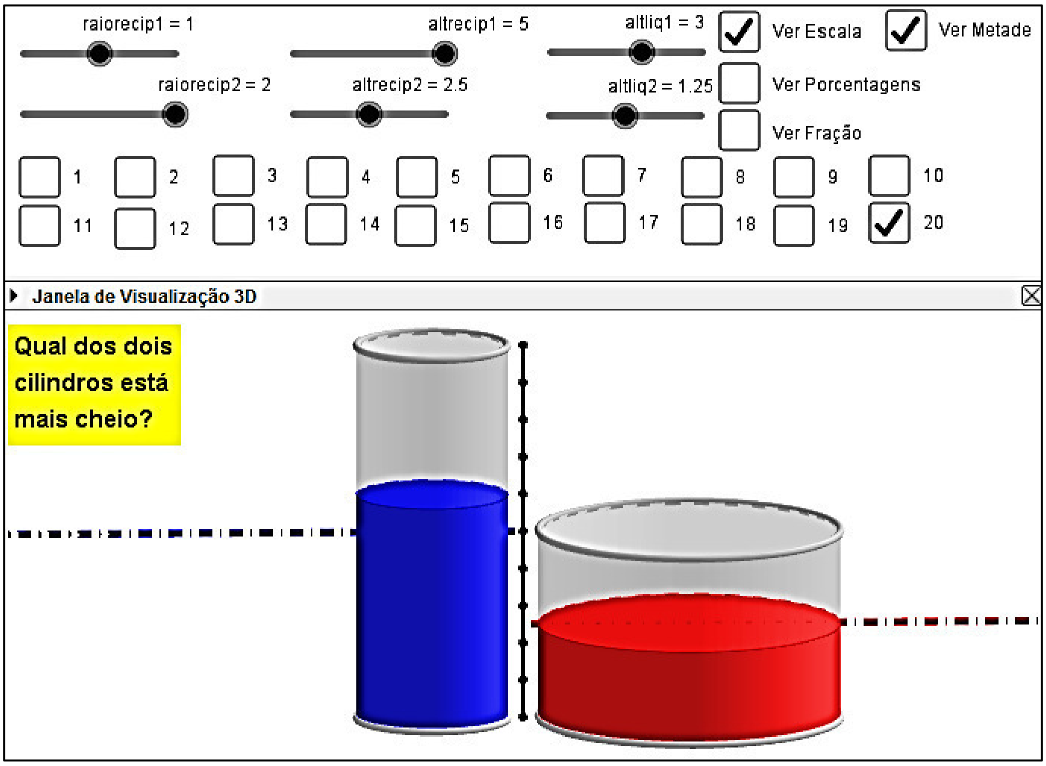


Figura 35 - Opção 20 para a livre exploração

App QUAL O MAIS ESCURO?

Descrição:

A criação deste app foi baseada em Silvestre e Ponte (SILVESTRE & PONTE, 2012) no artigo "Problemas De Valor Omisso E Comparação: O Que Sabem Os Alunos Antes Do Ensino Formal Da Proporcionalidade Directa" e em Miranda (MIRANDA, 2016), na dissertação "Desenvolvimento Do Raciocínio Proporcional: Uma Sequência Didática Para O Sexto Ano Do Ensino Fundamental"

A sua tela inicial é mostrada na Figura 36 e traz 14 situações diferentes e predeterminadas em que o usuário deverá resolver o mesmo problema proposto na parte superior da tela, conforma a Figura 36.

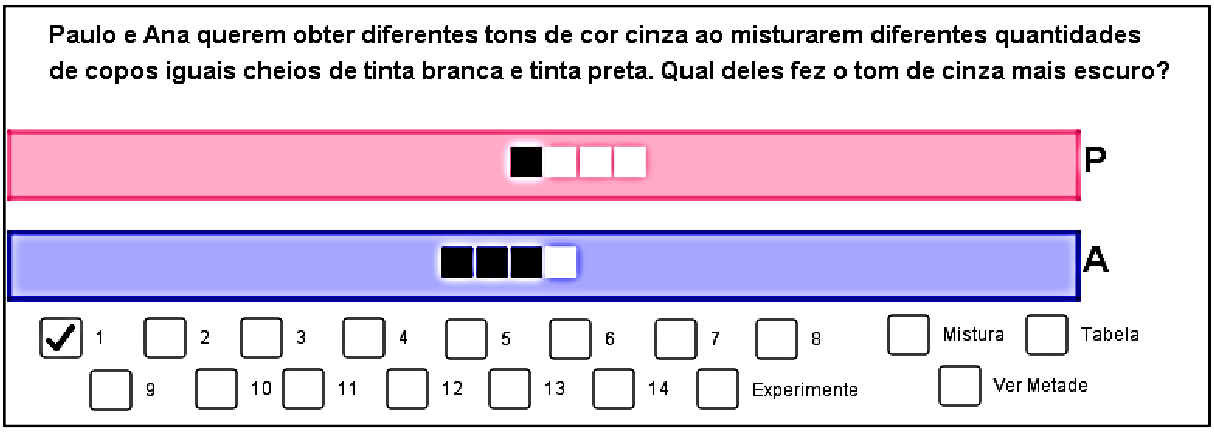


Figura 36 - Tela inicial do App QUAL O MAIS ESCURO?

Além das 14 situações-problemas apresentadas na parte inferior da tela, temos a opção Ver Metade que permite exibir uma linha vertical em cada uma das representações das duas misturas, correspondendo à metade do total de copos. Como já foi explicado na sessão sobre o app "Qual o mais cheio?", o referencial de metade pode se constituir em uma importante ferramenta para a resolução do problema proposto. A opção Mistura permite visualizar dois quadrados pintados nos tons de cinza de cada uma das misturas (Ver Figura 37).

A opção Tabela, permite que as mesmas 14 situações-problemas possam ser visualizadas em outra representação, dessa vez como uma tabela com o número de copos de tinta branca e o número de copos de tinta preta em cada uma das misturas, conforme é mostrado na Figura 38.

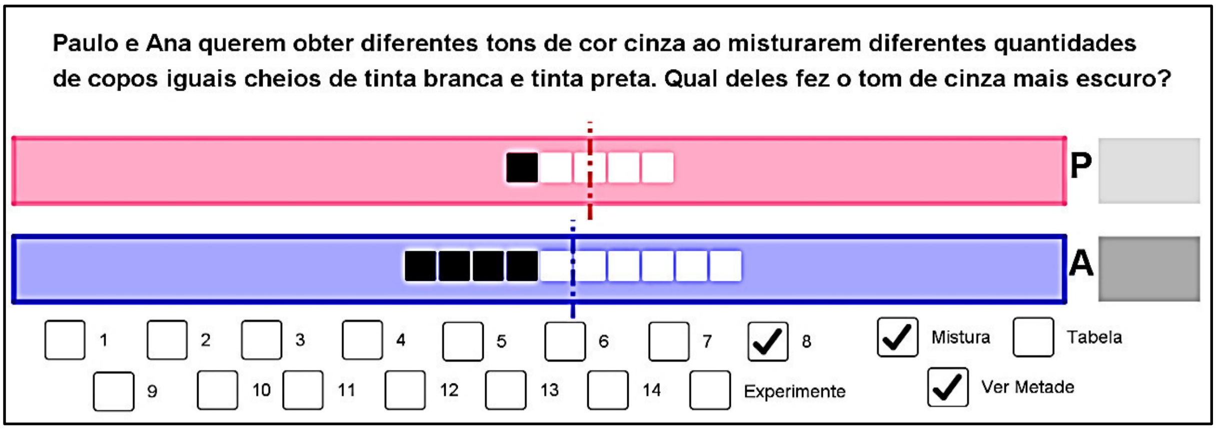


Figura 37 - Exibindo os tons de cinza de cada mistura e a linha de referencial de metade

Finalmente, ao selecionar a opção Experimente, serão exibidos quatro controles deslizantes que permitem ao usuário criar novas tonalidades de cinza com diferentes misturas (Figura 39).

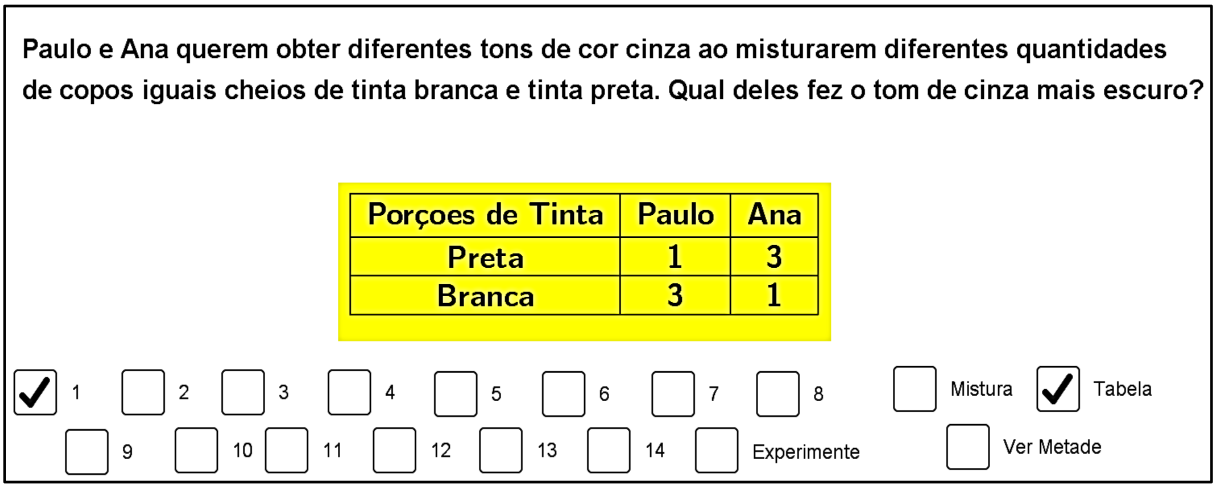


Figura 38 - Fazendo comparações com dados numéricos

A Tarefa

Em seu artigo "The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities", Jeong, Levine, e Huttenlocher (JEONG, LEVINE, & HUNTTENLOCHE, 2007), afirmam que o entendimento, por parte das crianças mais novas, das relações proporcionais se mostra ***intuitivamente*** bem mais desenvolvido "*no contexto das grandezas contínuas do que quando tratamos de quantidades discretas*". Crianças com seis, oito ou dez anos de idade, foram introduzidas a atividades, contextualizadas na forma de um jogo envolvendo

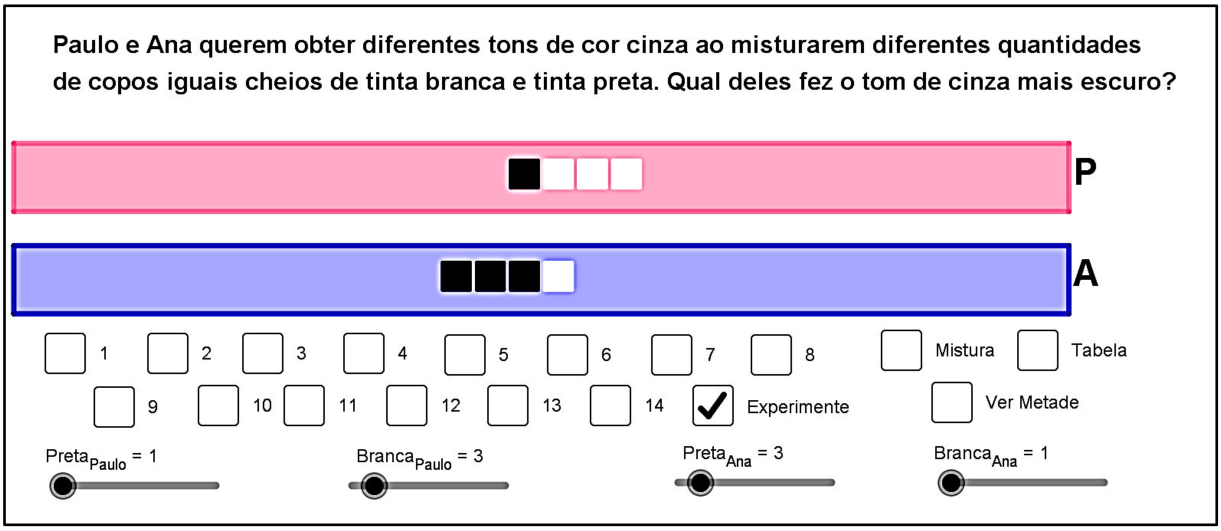


Figura 39 - Exibindo controles para a criação de novas misturas

probabilidade, onde eram motivadas a usar raciocínios proporcionais. Enquanto todas elas falharam quando as proporções envolviam quantidades discretas, até mesmo as mais novas obtiveram algum sucesso quando as quantidades eram contínuas. Nas palavras dos autores:

> *Propomos que seu sucesso nos problemas contínuos seja baseado no uso de capacidade emergente de codificar perceptivamente e comparar quantidades relativas.*

Os autores sugerem (e são apoiados por várias outras pesquisas) que aplicar analogias em tarefas semelhantes, mas com níveis de dificuldade diferentes pode ajudar nas possibilidades de sucesso nas tarefas mais difíceis. Nas suas palavras *"desenhar analogias entre problemas envolvendo quantidades contínuas e discretas pode ajudar as crianças a superar sua tendência de aplicar procedimentos numéricos incorretos a problemas envolvendo proporções."*

Desse modo, a compreensão dos alunos das relações proporcionais *“envolvendo conjuntos discretos”* pode ser aprofundada e melhorada pela aplicação de tarefas semelhantes com variáveis contínuas, mas ressaltando as similaridades entre as estratégias possíveis de obter sucesso nos dois problemas. Os autores ressaltam que essa metodologia pode diminuir a grande diferença de tempo em que as crianças desenvolvem soluções para problemas proporcionais com grandezas contínuas (por volta dos seis anos) e o momento em que isso acontece com as variáveis discretas (11 ou 12 anos).

As situações-problemas do app “Qual o mais escuro?” envolvem grandezas discretas e são bastante similares às do app “Qual o mais cheio?”, com variáveis contínuas.” Queremos reforçar a ideia de que o conjunto de copos com tintas branca e preta do app “Qual o mais escuro?” forma um todo (abstrato) comparável ao recipiente transparente do outro app (“Qual o mais cheio?”). Assim queremos buscar nos alunos, o desenvolvimento de estratégias semelhantes nos dois casos chamando a atenção dos alunos para as similaridades, tais como o uso do referencial de metade.

Outras estratégias de comparação também podem ser buscadas. Por exemplo: *se brancos forem iguais, quem tem mais preto é mais escuro* ou *se pretos forem iguais, quem tem menos branco é mais escuro.*

Do mesmo modo que no app anterior há duas formas de se fazer a comparação entre os tons de cinza na busca do mais escuro: comparando as razões entre a quantidade de tinta preta e a de tinta branca (parte:parte) ou a fração de tinta preta na mistura total (parte:todo). Na Tabela 7 abaixo, podemos ver essas razões em cada uma das 14 situações-problemas apresentadas no app.

Nesses problemas a percepção da presença de razões unitárias (metade, 1 terço, 1 quarto, etc.) ou seus inversos (dois para um = dobro, três para um = triplo, etc.), nas razões entre preto e branco (problema do tipo Parte-Parte) ou nas frações de preto no total da mistura (problema do tipo Parte-Todo) podem ser boas estratégia de solução.

Tabela 7 - Razões e frações das situações-problemas do app

Nº	Razões Preto:Branco	Frações Preto:Total	Nº	Razões Preto:Branco	Frações Preto:Total
1	$^{1}/_{3} < {}^{3}/_{1}$	$^{1}/_{4} < {}^{3}/_{4}$	8	$^{1}/_{4} < {}^{4}/_{6}$	$^{1}/_{5} < {}^{4}/_{10}$
2	$^{5}/_{3} > {}^{3}/_{6}$	$^{5}/_{8} > {}^{3}/_{9}$	9	$^{8}/_{5} < {}^{6}/_{2}$	$^{8}/_{13} < {}^{6}/_{8}$
3	$^{2}/_{3} > {}^{2}/_{5}$	$^{2}/_{5} > {}^{2}/_{7}$	10	$^{1}/_{2} = {}^{2}/_{4}$	$^{1}/_{3} = {}^{2}/_{6}$
4	$^{4}/_{3} < {}^{5}/_{3}$	$^{4}/_{7} < {}^{5}/_{8}$	11	$^{4}/_{6} = {}^{2}/_{3}$	$^{4}/_{10} = {}^{2}/_{5}$
5	$^{3}/_{3} = {}^{7}/_{7}$	$^{3}/_{6} = {}^{7}/_{14}$	12	$^{3}/_{7} > {}^{6}/_{11}$	$^{3}/_{10} > {}^{6}/_{17}$
6	$^{1}/_{2} < {}^{2}/_{3}$	$^{1}/_{3} < {}^{2}/_{5}$	13	$^{2}/_{3} > {}^{4}/_{8}$	$^{2}/_{5} > {}^{4}/_{12}$
7	$^{3}/_{1} > {}^{4}/_{2}$	$^{3}/_{4} > {}^{4}/_{6}$	14	$^{1}/_{3} > {}^{2}/_{8}$	$^{1}/_{4} > {}^{2}/_{10}$

A Ficha de atividades (anexo 7) traz impressas todas as mesmas situações do app e espaço para as importantes justificativas de respostas.

App QUAL O MAIS QUADRADO?

Descrição:

Neste programa o usuário recebe a incumbência de resolver a seguinte situação-problema: diante de dois retângulos decidir qual deles é o “mais quadrado”. Embora, matematicamente falando, não faça sentido um retângulo ser mais quadrado que outro, essa expressão funciona como uma metáfora para indicar qual retângulo tem a razão entre largura e comprimento mais próxima da unidade. A tela inicial permite que os retângulos possam ser representados para análise de, pelo menos, duas formas diferentes, a representação pictórica com um retângulo vermelho e outro azul, ou apenas as medidas de altura e largura de cada retângulo (Figura 40).

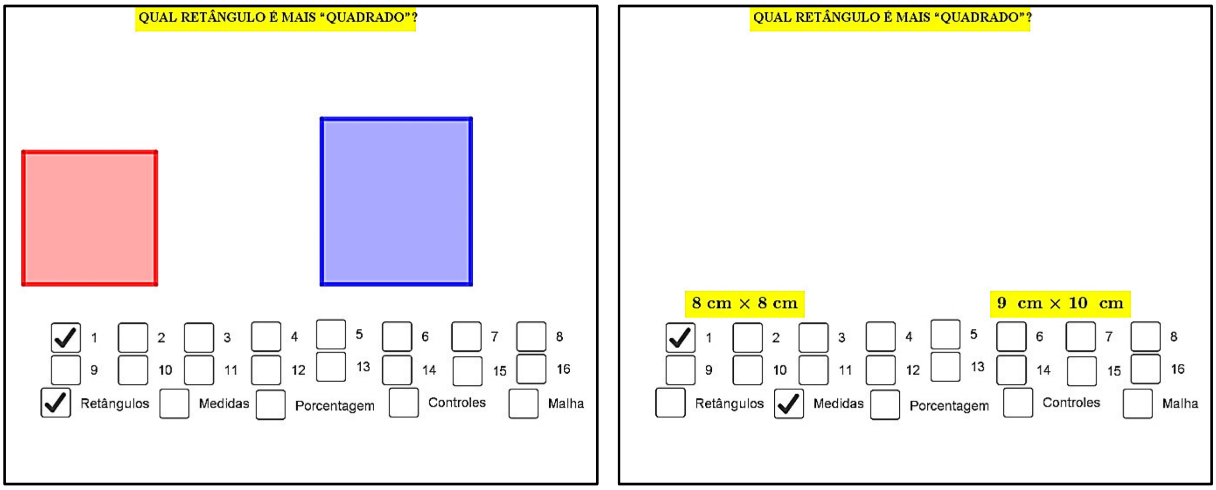


Figura 40 - Duas opções de tela inicial do app "QUAL O MAIS QUADRADO?"

É possível ainda apresentar os dois retângulos nas duas formas, simultaneamente. Além disso pode-se selecionar a opção Malha, para que seja exibida uma malha quadriculada de fundo, permitindo então que o usuário faça medições e relações entre medidas usando o quadriculado como unidade de medida . A opção Controle exibe 4 controles deslizantes que permitem a mudança de altura e largura de cada um dos retângulos de acordo com o que se queira (Figura 42).

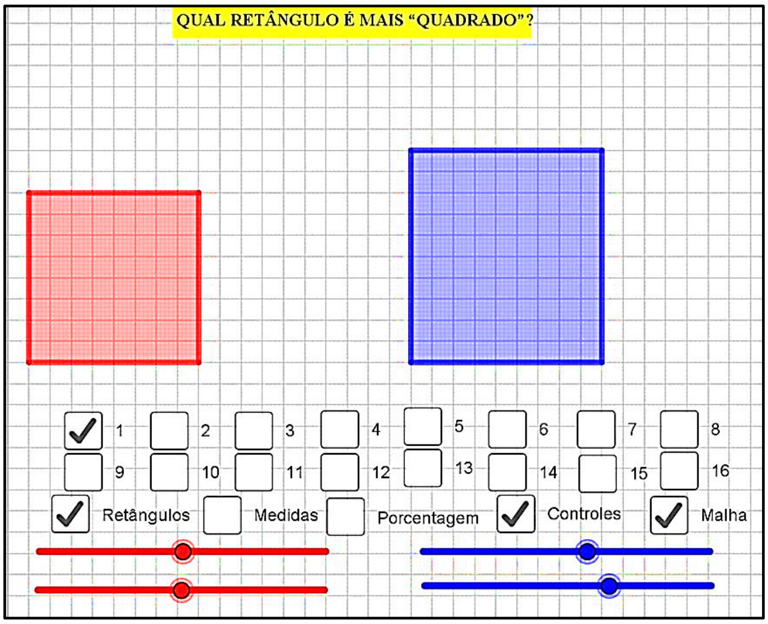


Figura 42 - App exibindo Malha e Controles

Finalmente a opção Porcentagem exibe, na parte superior da tela, a razão percentual entre a altura e largura (Figura 41).

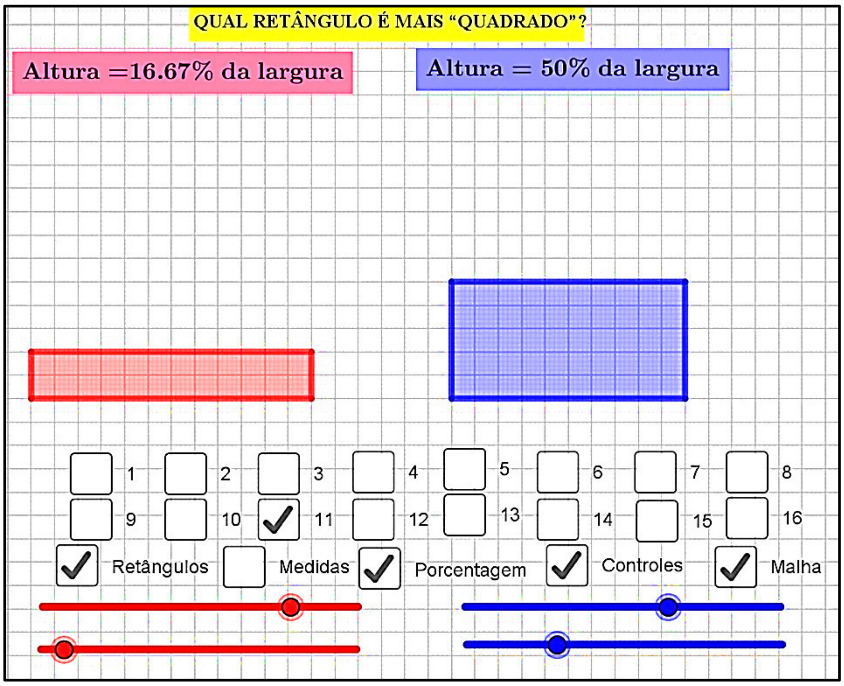


Figura 41 - App exibindo altura como fração da largura, em porcentagem.

A Tarefa

A ficha de atividades (Anexo 8) está dividida em duas partes que podem ser aplicadas em momentos diversos. Trata-se dos mesmos problemas apresentados em duas formas de representação diferentes:

- São mostradas as figuras dos retângulos sobre uma malha retangular.
- Exibimos apenas os valores numéricos de comprimento e largura de cada retângulo

Em cada um dos casos, são apresentadas 16 situações em que o aluno deve decidir qual dos dois retângulos é o mais “quadrado”. Nosso objetivo é que esta questão se traduza, para o aluno, em termos informais, em descobrir aquele retângulo em que o comprimento e a largura estão mais próximos (ou seja, nos quais a razão entre comprimento e largura seja mais próxima de 1).

Como já foi relatado aqui na introdução deste capítulo, os apps da série “Qual o mais...?” partem do conhecimento intuitivo das crianças sobre as relações proporcionais em problemas parte:parte:todo, não quantitativos com grandezas contínuas para auxiliar no seu aprofundamento e posterior transferência para problemas quantitativos com grandezas discretas. No caso deste app as situações não se referem a grandezas que formam juntas um todo claramente perceptível: enquanto a parte cheia e a vazia de um recipiente são claramente partes de um todo (se uma cresce a outra diminui), o mesmo não acontece com a largura e o comprimento de um quadrado que são grandezas independentes. Esse fato pode se configurar em uma dificuldade para os alunos e este trabalho pode servir de auxílio para facilitar esse processo.

Algumas das possíveis estratégias de resolução identificadas são:

- Para larguras (comprimentos) iguais o retângulo de comprimento (largura) mais próximo é o mais quadrado.
- O quadrado é sempre o mais quadrado
- Usar a largura (comprimento) como unidade e verificar se o comprimento (a largura) é maior, igual ou menor que ela (ele)
- Usar a largura (comprimento) como unidade e verificar se o comprimento (a largura) é maior, igual ou menor que a metade dela (dele)

As medidas trabalhadas em cada uma das 16 situações-problemas são apresentadas abaixo

Retângulo		Altura	Largura
1	A	8	8
	B	9	10
2	A	8	12
	B	8	7
3	A	9	10
	B	4	10
4	A	8	4
	B	10	5
5	A	10	4
	B	6	3
6	A	13	11
	B	12	13
7	A	9	4
	B	9	6
8	A	10	9
	B	13	9

Retângulo		Altura	Largura
9	A	4	2
	B	8	3
10	A	14	8
	B	12	4
11	A	12	2
	B	10	5
12	A	12	3
	B	8	2
13	A	10	7
	B	5	12
14	A	10	10
	B	9	9
15	A	2	4
	B	10	12
16	A	4	5
	B	11	12

App FRAÇÕES EQUIVALENTES

Descrição:

Esse trabalho foi baseado nos arquivos criados por Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria (FARIA, 2016) em sua tese "Raciocínio proporcional: integrando aritmética, geometria e álgebra com o Geogebra".

A sua tela inicial é mostrada na Figura 43. Nela encontramos a representação

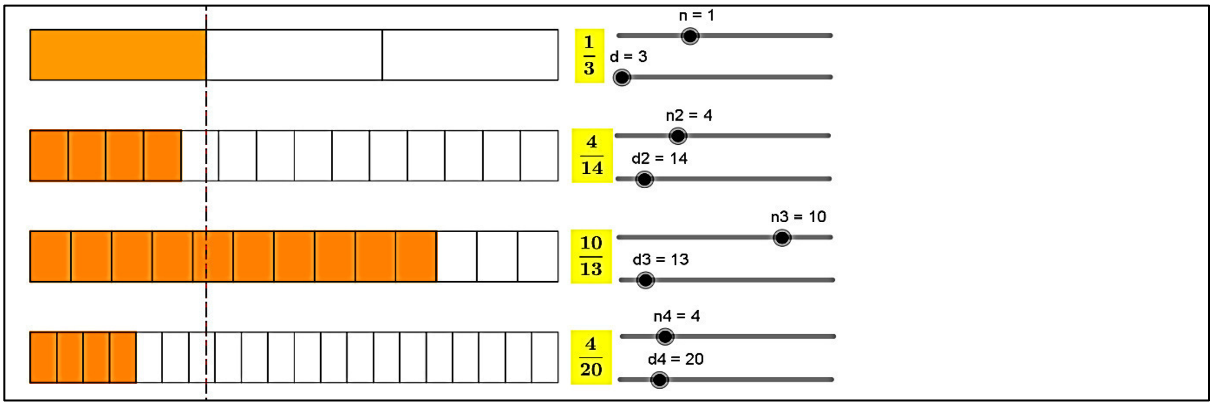


Figura 43 - Tela inicial do app FRAÇÔES

de 4 frações, tanto na forma numérica quanto na forma de retângulo dividido em partes iguais com uma fração destas partes pintada. Para cada uma das frações há dois controles deslizantes que podem ser usados para se determinar o numerador e o denominador da fração correspondente.

Toda vez que uma das três frações inferiores assume um valor equivalente ao da primeira fração e exibe uma caixa de texto com a igualdade dos valores destas frações e também sugere a existência de um fator de equivalência. No caso do

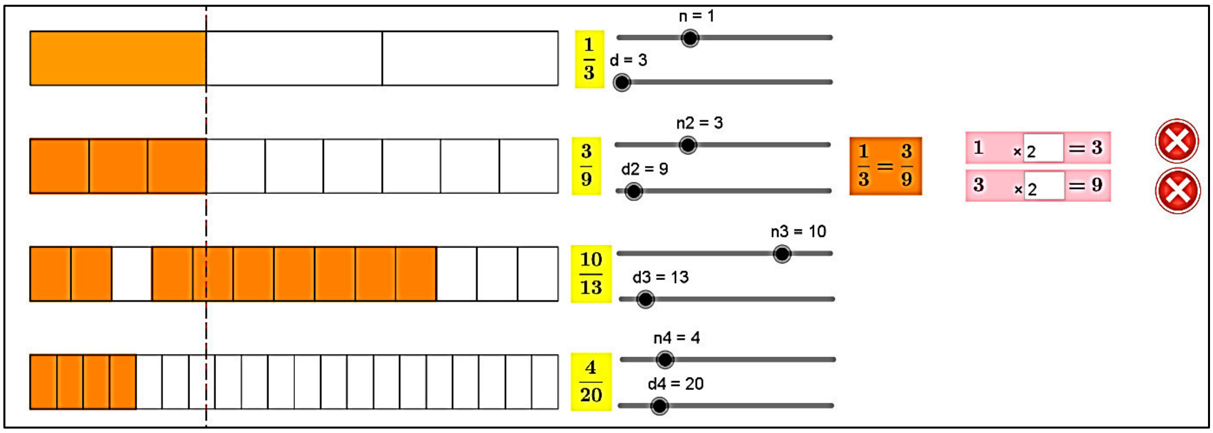


Figura 44 - A segunda fração está equivalente à primeira

exemplo da Figura 44, o programa explicita a relação $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ e explicita a existência de um fator de equivalência que relacione os numeradores e denominadores. O aluno deverá determinar esse fator. Ao ser digitado o valor correto, que no caso é 3, o programa exibe uma imagem indicando que o valor está correto (Figura 45).

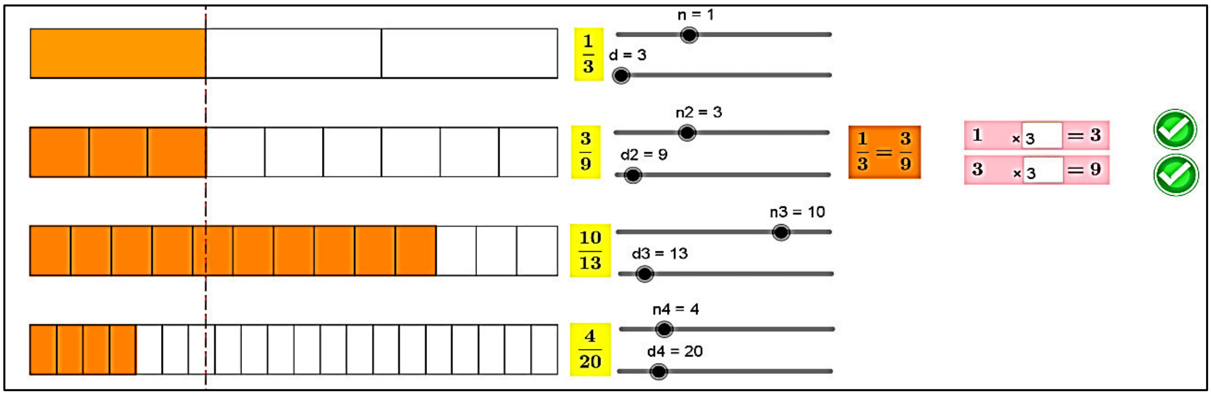


Figura 45 - Frações equivalentes com fator de equivalência determinado

A Figura 46 mostra a situação em que as três frações inferiores representam frações equivalentes à primeira fração, com os respectivos fatores de equivalência determinados:

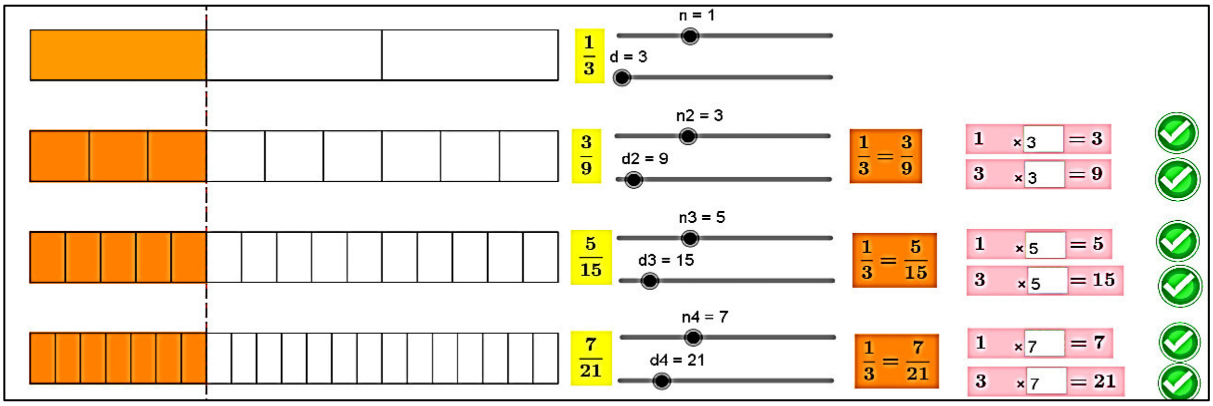


Figura 46 - Quatro frações equivalentes

A Tarefa

Uma das definições dadas para proporção é a igualdade de duas razões. Dante (DANTE, 2015), assim define o termo razão:

> A razão de dois números a e d com $b \neq 0$ é o quociente de $a : b$ que pode ser indicado por $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ **ou qualquer outra forma equivalente**.

Logo, a relação entre a proporcionalidade e a equivalência de frações se torna óbvia. Aliás, vale destacar que o tema frações é um dos mais preocupante em termos de insucesso em suas aprendizagens. Vasconcelos et al. (VASCONCELOS, Vargas, & Dorneles, 2017) afirmam que compreender frações pressupõe entender

> *a natureza relativa do conceito e as relações entre quantidades, uma vez que demanda uma reorganização do conhecimento numérico (NUNES; BRYANT, 1997; STAFYLIDOU; VOSNIADOU, 2004), bem como o fato de que as propriedades dos números inteiros não definem os números em geral, e, portanto, exige outros tipos de habilidades cognitivas mais complexas.*

A Ficha de atividades que acompanha este arquivo (anexo 9) é composta por sete atividades que formam uma sequência didática que pode contribuir para a aprendizagem do conceito de frações equivalentes e suas propriedades de formação.

Nas 4 primeiras atividades é pedido que os alunos usem o app para buscar 3 frações equivalentes à uma fração dada e, logo em seguida, tentar encontrar, sem a ajuda do app, mais duas frações equivalentes às outras. Eles devem então usar o app para confirmar ou reavaliar as suas respostas.

Na questão 5, são dadas algumas frações e o aluno deve repetir a parte final do processo usado nas questões anteriores: tentar encontrar, sem a ajuda do app, duas frações equivalentes às outras. Eles devem novamente usar o app para confirmar ou refazer suas respostas.

Na 6ª questão são dados pares de frações equivalentes com um valor omisso (em posições variadas na igualdade) e pretende-se que os alunos determinem o valor que falta. Novamente ele pode usar o programa para confirmações e dúvidas

Finalmente, na 7ª e última questão se pretende que o aluno formule uma explicação para o processo de criação ou reconhecimento de frações equivalentes.

Bibliografia

ABRAHAMSON, LEE, NEGRETE, & GUTIÉRREZ. (2014). *The Mathematical Imagery Trainer for Proportion" (MIT-P)*. Fonte: Berkeley - University of California: https://edrl.berkeley.edu/design/mathematical-imagery-trainer/

ALMEIDA, W. N., & MALHEIRO, J. M. (2019). A Experimentação Investigativa Como Possibilidade Didática No Ensino de Matemática: O Problema Das Formas Em Um Clube De Ciências. *Experiências em Ensino de Ciências, 14(1)*.

ARCAVI, A., & NACHMIAS. (1989). Re-exploring familiar concepts with a new representation. *Proceedings of PME 13, 1*, pp. 77-84.

BICUDO, M. A., & ROSA, M. (Março de 2010). Educação matemática na realidade do ciberespaço — que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13(1)*.

BOYER, T. W., & LEVINE, S. C. (2012). Child proportional scaling: Is 1/3 = 2/6 = 3/9 = 4/12? *Journal of Experimental Child Psychology 111*, pp. 516–533.

BRASIL. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.* Brasília, DF: Ministério da Educação e do Desporto. - Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF).

BRASIL. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. .* Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica.

CCSSM. (2010). *Common Core State Standards for mathematics - National Governors Association Center for Best Practices, & Council of Chief State School Officers.* Fonte: http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf.

CRAMER, K., & POST, T. (1993). Connecting Research To Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86(5)*, 404-407.

DANTE, L. R. (2015). *Projeto Telaris: matemática; ensino fundamental 2: 7º ano.* São Paulo - SP: Ática.

DE LA CRUZ, J. A. (2013). Selecting Proportional Reasoning Tasks -. *Australian Mathematics Teacher, 69*, pp. 14-18.

DOUGHERTY, B., BRYANT, D. P., BRYANT, B., & SHIN, M. (Novembro/Dezembro de 2016). Helping Students With Mathematics Difficulties Understand Ratios and Proportions. *Teaching Exceptional Children. 49.*, pp. 96-105.

DULLIUS, M. M., & HAETINGER, C. (2005). Ensino E Aprendizagem De Matemática Em Ambientes Informatizdos: Concepção, Desenvolvimento, Uso E Integração Destes No Sistema Educacional. *Anais do IV Encontro Íbero-Americano De Coletivos Escolares E Redes De Professores Que Fazem Investigação Na Sua Escola.* Lajeado - RS.

FARIA, R. W. (2016). *Raciocínio proporcional: integrando aritmética, geometria e álgebra com o GeoGebra.* Rio Claro - SP: UNESP - Universidade Estadual Paulista.

GARDEREN, D. v. (nov/dez de 2006). Spatial Visualization, Visual Imagery, and Mathematical Problem Solving of Students With Varying Abilities. *JOURNAL OF LEARNING DISABILITIES*, pp. 496-506.

Geogebra.org. (s.d.). *Sobre o Geogebra*. Fonte: Geogebra: http://www.geogebra.org

GIGANTE, A. M., & SANTOS, M. B. (2012). *Matemática: reflexões no ensino, reflexos na aprendizagem.* Erechim: Edelbra.

GITIRANA, V. (1992). *Students' perceptions of functions articulated in dynamic microworlds.* Recife: UFPE.

GOLDENBER, E. P. (2000). *Thinking (And Talking) About Technology in Math Classrooms.* Fonte: The K–12 Mathematics Curriculum Center: http://mcc.edc.org/pdf/iss_tech.pdf

GOLDENBERG, E. P. (1998). "Hábitos de pensamento": um princípio organizador para o currículo (II). *Educação e Matemática nº 48*, pp. 37-44.

GÓMEZ, P. (1997). *Tecnología y educación Matemática.* Fonte: Funes - Repositório Digital de Documentos en Educación Matemática: http://funes.uniandes.edu.co/

GONÇALVES, W. V. (2016). *O Transitar entre a Matemática do Matemático, a Matemática da Escola e a Matemática do Geogebra: um estudo de como professores de matemática lidam com as possibilidades e limitações do Geogebra.* Bauru: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Faculdade de Ciências.

HOWE, C., NUNES, T., & BRYANT, P. (Abril de 2010). Rational Number And Proportional Reasoning - Using Intensive Quantities To Promote Achievement In Mathematics And Science. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

JEONG, Y., LEVINE, S. C., & HUNTTENLOCHE, J. (05 de Dezembro de 2007). The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities. *Journal Of Cognition And Development, 8(2)*, pp. 237–256.

JOHNSON, G. J. (2010). *Proportionality in middle-school mathematics textbooks - Graduate Theses and Dissertations.* Fonte: http://scholarcommons.usf.edu/etd/1670.

KOZELSKI, A. C., & ARRUDA, G. (2017). A Importância Da Utilização Das Tecnologias Nas Aulas De Matemática. *Anais do XIII Congresso Nacional de Educação – EDUCERE.* Curitiba.

LANGRALL, C. W., & SWAFFORD, J. (2000). *Three Balloons for Two Dollars: Developing Proportional Reasoning* (Vol. 6(4)).

LARSON, K. (2013). Developing Children's Proportional Reasoning: Instructional Strategies That Go the Distance. *Ohio Journal of School Mathematics - 67*, p. 42 a 47.

LESH, R., POST, T., & BEHR, M. (1988). Proportinal reasoning. In (. Hiebert & M. Behr, *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.

MAGINA, S., MERLINI, V. L., & SANTOS, A. (2012). A Estrutura Multiplicativa Sob A Ótica Da Teoria Dos CamposConceituais: Uma Visão Do Ponto De Vista Da Aprendizagem. *3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, (pp. 1-12). Fortaleza.

MIRANDA, J. A. (2016). *Desenvolvimento do Raciocínio Proporcional: Uma Sequência Didática Para O Sexto Ano Do Ensino Fundamental.* Uberlândia: Universidade Federal De Uberlândia.

MOREIRA, M. A. (2002). A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa Nessa Área. *Investigações em Ensino de Ciências. 7(1)*, pp. 7-29,. Porto Alegra: Instituto de Física, UFRGS.

NCTM. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s.* Fonte: National Council of Teachers of Mathematics: https://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/index.html

OJOSE, B. (2015). Proportional Reasoning and Related Concepts: Analysis of Gaps and Understandings of Middle Grade Students. *Universal Journal of Educational Research*, pp. 104-112.

OLIVEIRA, S. A. (2007). O lúdico como motivação nas aulas de Matemática. *Jornal Mundo Jovem*(377).

PERKINS, D. N. (1991). Technology Meets Constructivism: Do They Make a Marriage? *Educational Technology, 31(5)*, 18-23.

POST, T. R., BEHR, M. J., & LESH, R. (1988). Proportionality and the development of prealgebra understandings. Em A. Coxford, & A. Shulte, *The ideas of algebra* (pp. 78-90). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

RESNICK, L. B., & SINGER, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In) Hillsd. Em T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg, *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

REZENDE, F. (2002). As Novas Tecnologias Na Prática Pedagógica Sob A Perspectiva Construtiva. *ENSAIO – Pesquisa em Educação em Ciências*, 70-87.

REZENDE, F. (Março de 2002). As Novas Tecnologias na Prática Pedagógica Sob a Perspectiva Construtivista. *ENSAIO – Pesquisa em Educação em Ciências, Volume 02-Número 1*.

SAMPAIO, R. S. (2018). *Geometria E Visualização: Ensinando Volume Com O Software Geogebra.* Rio Claro - SP: UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho" - Instituto De Geociências E Ciências Exatas.

SANTOS, A. H. (2014). *Um Estudo Epistemológico da Visualização Matemática: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização.* Curitiba: Programa De Pós-Graduação Em Educação Em Ciênncias E Em Matemática - Universidade Federal Do Paraná.

SILVESTRE, A. I. (2012). *O Desenvolvimento do Raciocínio Proporcional: Percursos de Aprendizagem de Alunos do 6ºAno de Escolaridade.* Lisboa: Universidade de Lisboa – Instituto de educação.

SILVESTRE, A. I., & PONTE, J. P. (2008). Tarefas de investigação e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade. *Educação e Cultura Contemporânea, 5(9)*.

SILVESTRE, A. I., & PONTE, J. P. (2012). Problemas de valor omisso e comparação: O que sabem os alunos antes do ensino formal da proporcionalidade directa. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 6* (3), 73-83.

SPINILLO, A. G. (1992). A Importância Do Referencial De "Metade" E O Desenvolvimento Do Conceito De Proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 8(3)*, 305-317.

SPINILLO, A. G. (2002). O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica, 15*(3), 475-487.

TOURNIAIRE, F., & PULOS, S. (1985). Proportional Reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, pp. 181-204.

VASCONCELOS, I. C., Vargas, R. C., & Dorneles, B. V. (maio de 2017). *Aprendizagem de frações e a inclusão de todos os estudantes em matemática no ensino fundamental.* Fonte: I Seminário Luso-brasileiro de Educação Inclusiva: http://editora.pucrs.br/anais/i-seminario-luso-brasileiro-de-educacao-inclusiva/index.html#artigos

VERGNAUD, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In: , 1., Rio de Janeiro, Anais... : , 1993. p. . *Seminário Internacional De educação Matemática Do Rio De Janeiro* (pp. 1-26). Rio de Janeiro: UFRJ - Projeto Fundão - Instituto de Matemática.

Anexo 1 – Ficha de Atividades do App BLOCOS

1. Blocos ________________(*):

a) Com o mouse, mude os tamanhos dos blocos de cor cinza, 1 e 2 (B_1 e B_2) a fim de que os dois blocos fiquem ________________(*).

b) Usando os botões “Marcar posição”, marque 4 posições diferentes dos blocos 1 e 2 em que eles fiquem ________________(*)

c) Observando as marcas preencha a tabela abaixo:

Marca	Tamanho do Bloco 1	Tamanho do Bloco 2
✚		
◇		
▲		
✖		

d) Ainda Observando as marcas crie uma hipótese sobre o que faz os blocos 1 e 2 ficarem ________________(*):

Sua hipótese: ____

____

____

e) De acordo com sua hipótese complete a tabela abaixo com o tamanho adequado de cada bloco para que eles fiquem ________________(*):

Bloco 1	**Bloco 2**
1	
	1
6	

Bloco 1	**Bloco 2**
	9
11	
	2,5

f) Agora observe: se alguém apertar o botão **OK**, o bloco B1 irá se mover com uma velocidade igual a 1. Sabendo disso, execute os seguintes procedimentos:

- Mude o **tamanho** do bloco 1 para o valor 1.
- Mude o **tamanho** do bloco 2 para que eles fiquem ________________(*).
- Defina uma velocidade para o bloco 2 a fim de que os blocos permaneçam verdes ao de deslocarem.
- Teste e anote aqui seu resultado:

B_1 = 1

B_2 =

(*) – coloque a cor que será analisada por seu grupo

g) Suponha que tomemos tamanhos para que os blocos 1 e 2 fiquem ________________(*). Se cada um dos blocos aumentar seu tamanho em 3 unidades eles continuarão da mesma cor?

	Bloco 1	Bloco 2
Comp. inicial		
Comp. final		

+3 +3

Justifique:

____

____

h) Se o Bloco 1 aumenta seu tamanho em 5 unidades, o que deverá acontecer com o bloco 2 para que eles continuem da mesma cor?

____

____

	Bloco 1	Bloco 2
Comp. inicial		
Comp. final		

+5

i) Se o Bloco 2 aumenta seu tamanho em 5 unidades, o que deverá acontecer com o bloco 1 para que eles continuem da mesma cor?

____

____

	Bloco 1	Bloco 2
Comp. inicial		
Comp. final		

$\boxed{+5}$

j) Se o Bloco 1 dobrar seu tamanho, o que deverá acontecer com o bloco 2 para que eles continuem da mesma cor?

____

____

	Bloco 1	Bloco 2
Comp. inicial		
Comp. final		

X2

k) Se o Bloco 1 multiplicar seu tamanho por 3, o que deverá acontecer com o bloco 2 para que eles continuem da mesma cor?

____

____

	Bloco 1	Bloco 2
Comp. inicial		
Comp. final		

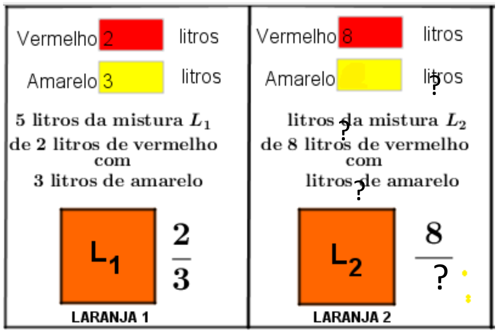
X3

Anexo 2 – Ficha de Atividades do App MISTURA DE TINTAS

1) Para fazer uma certa tonalidade de tinta na cor laranja, Carlos mistura 2 partes de vermelho com 3 partes de amarelo. Hoje, Carlos tem 8 litros de tinta vermelha e quer usar toda essa tinta numa mistura com essa mesma tonalidade de laranja.

a. De quantos litros de tinta amarela ele vai precisar? ____________________.

Justifique sua resposta:



b. Agora use o arquivo "misturatinta1" para representar as misturas:

- Use L_1 para representar a mistura de 2 partes de vermelho com 3 partes de amarelo.
- Use L_2 para representar a mistura de 8 litros de vermelho com sua resposta de litros de amarelo. ***<u>Verifique se sua resposta está correta</u>***.

2) Na semana seguinte, Carlos queria usar 18 litros de tinta amarela numa mistura com tinta vermelha para obter a mesma tonalidade de cor laranja da questão anterior.

a. De quantos litros de tinta vermelha ele vai precisar?____________________

Justifique sua resposta:

b. Agora use o arquivo "misturatinta1" para representar as misturas:

- Use L_1 para representar a mistura de 2 partes de vermelho com 3 partes de amarelo.
- Use L_2 para representar a mistura de 18 litros de amarelo com sua resposta de litros de vermelho. ***<u>Verifique se sua resposta está correta</u>***.

3) Para fazer uma certa tonalidade de tinta na cor verde, Carlos mistura 2 partes de azul com 6 partes de amarelo. Hoje, Carlos tem 3 litros de tinta azul e quer usar toda essa tinta numa mistura com essa mesma tonalidade de verde.

a. De quantos litros de tinta amarela ele vai precisar? ____________________.

Justifique sua resposta:

b. Agora use o arquivo “misturatinta1” para representar as misturas:

- Use V_1 para representar a mistura de 2 partes de azul com 6 partes de amarelo.
- Use V_2 para representar a mistura de 3 litros de azul com sua resposta de litros de amarelo. ***Verifique se sua resposta está correta***.

4) Se Carlos quiser usar 15 litros de tinta amarela numa mistura com tinta azul para obter a mesma tonalidade de cor verde da questão anterior, responda:

a. De quantos litros de tinta azul ele vai precisar? ______________________

Justifique sua resposta:

b. Agora use o arquivo “misturatinta1” para representar as misturas:

- Use V_1 para representar a mistura de 5 partes de azul com 7 partes de amarelo.
- Use V_2 para representar a mistura de 3,5 litros de amarelo com sua resposta de litros de azul. ***Verifique se sua resposta está correta***.

5) Carlos conseguiu uma bela tonalidade de azul, misturando 3 partes de amarelo com 7 partes de azul. Ele tem 5 litros de amarelo para fazer esta nova tonalidade.

a. De quantos litros de tinta azul ele vai precisar? ______________________

Justifique sua resposta:

b. Agora use o arquivo “misturatinta1” para representar as misturas:

- Use V_1 para representar a mistura de 7 partes de azul com 3 partes de amarelo.

- Use V_2 para representar a mistura de 5 litros de amarelo com sua resposta de litros de azul. ***<u>Verifique se sua resposta está correta</u>***.

6) Certo dia, Carlos criou uma linda tonalidade de cor laranja, misturando 2 litros de cor vermelha com 9 litros de cor amarela. Seu filho Eduardo, por acidente, **<u>acrescentou</u>** 3 litros de cor vermelha na mistura de Carlos.

   a. Para não perder toda essa tinta Carlos deverá acrescentar quantos litros de tinta amarela para corrigir e voltar ao tom de cor laranja inicial? _______

Justifique sua resposta:

   b. Agora use o arquivo "misturatinta1" para representar as misturas:

   - Use L_1 para representar a mistura inicial de 2 partes de vermelho com 9 partes de amarelo.
   - Use L_2 para representar a mistura feita por Eduardo com 3 litro **<u>a mais</u>** de vermelho e faça a correção da cor da mistura de acordo com sua resposta.

7) Dona Inês quer pintar uma parede com certa tonalidade de verde e pediu para Carlos fazer uma mistura de 5 partes de cor azul com 11 partes da cor amarela. Na hora de fazer a mistura Carlos observou que só tinha 3,5 litros de cor azul.

   a. Com quantos litros de cor amarela Carlos deve aos 4L de azul para obter o tom de verde desejado por Dona Inês? _______________________

Justifique sua resposta:

   b. Agora use o arquivo "misturatinta1" para representar e verificar sua resposta:

   - Use V_1 para representar a mistura inicial de Dona Inês com 6 partes de azul com 9 partes de amarelo.
   - Use V_2 para representar a mistura que deverá ser feita por Carlos com os 4 litros de cor azul que ele possui e a sua resposta de litros de cor amarela para fazer a mesma tonalidade de verde de Dona Inês.

8) Dona Inês encomendou a Carlos, 30 litros **<u>da sua mistura de verde</u>** feita a partir de 6 partes de cor azul com 9 partes da cor amarela.

   a. Quantos litros de cada cor ele deve misturar? _____________________

Justifique sua resposta:

b. Agora use o arquivo “misturatinta1” para representar as misturas:

- Use V_1 para representar a mistura inicial de Dona Inês com 6 partes de azul com 9 partes de amarelo.
- Use V_2 para representar a mistura que deverá ser feita por Carlos 30 litros de cor verde da mesma tonalidade de verde da mistura de Dona Inês.

c. E se Dona Inês precisar de 45 litros de verde, quantos litros de cada cor Carlos deve misturar? (responda representando no computador) _______

Justifique sua resposta:

d. E se Dona Inês precisar de 20 litros de verde, quantos litros de cada cor Carlos deve misturar? (responda representando no computador) ______

Justifique sua resposta:

Anexo 3 – Ficha de Atividades do App FUNÇÕES E PROPORCIONALIDADE

Sua(s) cor(es) é(são):

		Magenta
		Violeta
		Azul
		Ciano

		verde
		Lima
		Amarelo
		Laranja

		Vermelho
		Marrom

1. Em relação à(s) sua(s) cor(es), explique como é a "reação" da variável B, quando a variável A muda de tamanho (valor). Dê uma explicação de modo que seus colegas possam descobrir a sua cor dentre todas as outras cores sem que você diga de que cor se trata.

Cor: ______________________

Cor: ______________________

Cor: ______________________

Cor: ______________________

2. Selecione a caixa Ver Tabela. Agora, para cada uma das cores, observando a respectiva tabela, complete as tabelas a seguir (já fizemos a cor violeta como exemplo):

Magenta	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Violeta	
A	B
12	16
-9	-5
8	12
-13	-9
x	x+4

Azul	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Ciano	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Verde	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Lima	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Amarelo	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Laranja	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Vermelho	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

Marrom	
A	B
12	
-9	
	12
	-9
x	

3. Escreva as cores das quais é possível se dizer:

i) Se a variável A cresce, então a variável B também cresce.

j) Se a variável A cresce, então a variável B decresce.

k) A variável B é sempre maior que a variável A

l) A diferença entre a variável B e a variável A é constante.

m) A variável B é um múltiplo da variável A.

____

n) Se a variável A dobra, triplica ou quadruplica, a variável B também dobra, triplica e quadruplica.

____

____

o) Se a variável A dobra, triplica ou quadruplica, a variável B se reduz à metade, a 1 terço ou a 1 quarto de seu valor.

____

____

p) Em que cores temos que B é diretamente proporcional a A?

____

____

4. Explique: quando é que duas variáveis são diretamente proporcionais?

____

____

____

5. Novamente selecione aquelas que você considera serem diretamente proporcionais e observando as suas tabelas responda: seria possível escrever uma expressão geral para as grandezas diretamente proporcionais? Que expressão seria essa? Justifique.

____

____

____

____

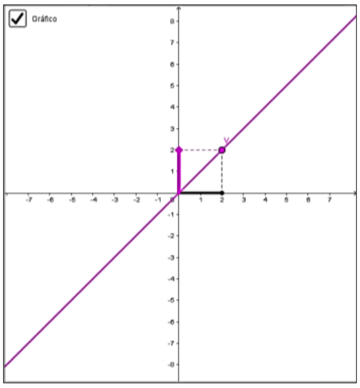
____

____

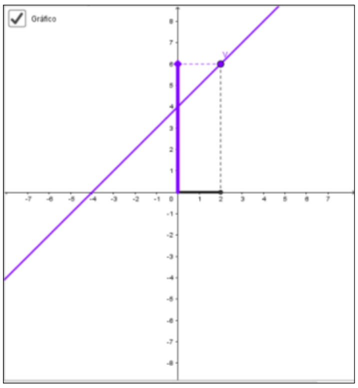
6. Observe agora o gráfico de cada uma das funções representadas por cada uma das cores. Marque com um X aquelas que representam variáveis diretamente proporcionais. Seria possível reconhecer pelo gráfico, se duas variáveis são diretamente proporcionais? Explique, justificando sua resposta

____

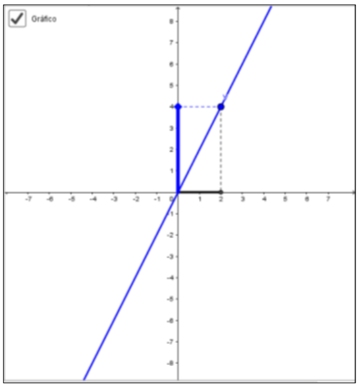
Magenta



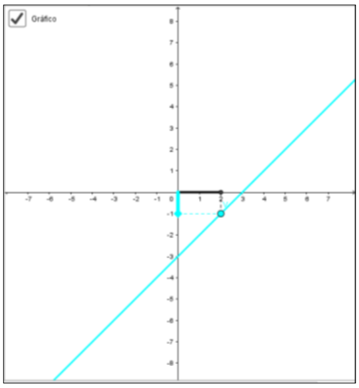
Violeta



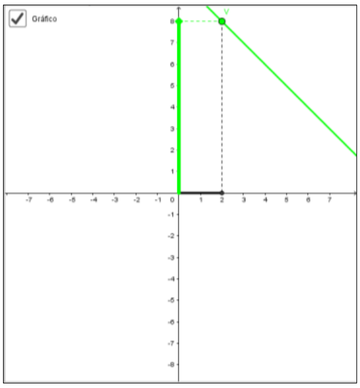
Azul



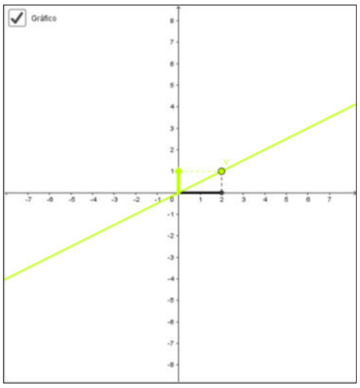
Ciano



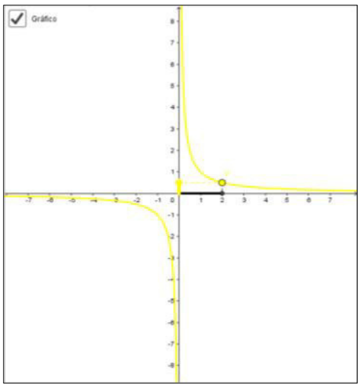
Verde



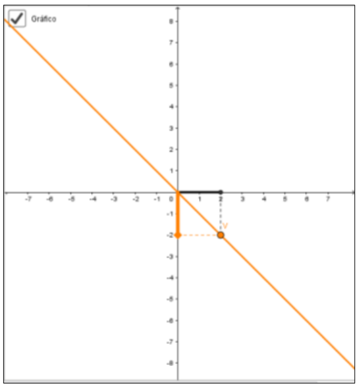
Lima



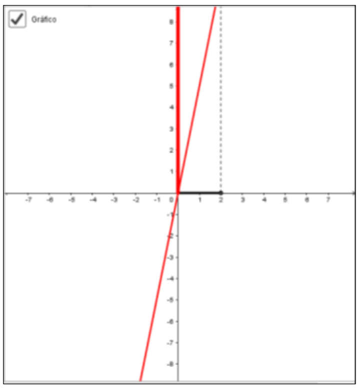
Amarelo

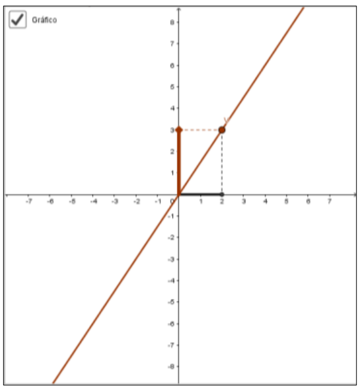


Laranja



Vermelho





Marrom

Anexo 4 – Ficha de Atividades do App AMPLIAÇÃO E REDUÇÃO

1. Carlos quer ampliar uma foto sua, no tamanho 3x4, de modo que a foto tenha uma altura de 12 cm.

   Qual a largura da ampliação desejada? _________________

   Qual a taxa de ampliação? _________________

Justificativa:

Agora coloque os dados do problema e os dados que você calculou em suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a ampliação virtual da foto de Carlos. Verifique se você acertou. Se houve algum erro ou problema, explique abaixo por que você errou e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

2. Faça o mesmo com a foto da Júlia, no tamanho 2x5, de modo que a foto tenha uma largura de 5 cm.

   Qual a altura da ampliação desejada? _________________

   Qual a taxa de ampliação? _________________

Justificativa:

Agora coloque suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a ampliação virtual da foto de Júlia. Explique abaixo se houve algum erro e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

3. Pedro quer fazer uma ampliação de 1,8 vezes em uma foto sua, que está no tamanho 9x11. Quais serão as novas dimensões da foto ampliada?

Largura ________________ Altura ________________

Justificativa:

Agora coloque os dados do problema e os dados que você calculou, no **app Ampliação e Redução** e produza a ampliação virtual da foto de Pedro. Verifique se você acertou. Se houve algum erro ou problema, explique abaixo por que você errou e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

4. E se Pedro quiser fazer uma ampliação de 90% em sua foto. Quais serão as novas dimensões da foto ampliada?

Largura ________________ Altura ________________

Justificativa:

Agora coloque suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a redução virtual da foto de Júlia. Explique abaixo se houve algum erro e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

5. Helena quer reduzir uma foto sua, no tamanho 3x5, de modo que a foto tenha uma altura de 4 cm.

   Qual a largura da redução desejada? _________________

   Qual a taxa de redução? _________________

   Justificativa:

   Agora coloque os dados do problema e os dados que você calculou em suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a redução virtual da foto de Helena. Verifique se você acertou. Se houve algum erro ou problema, explique abaixo por que você errou e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

6. Se Helena quisesse reduzir sua foto 3x5 a uma taxa de 0.7 vezes. Quais serão as novas dimensões da foto reduzida?

   Largura _________________ Altura _________________

   Justificativa:

   Agora coloque suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a redução virtual da foto de helena. Explique abaixo se houve algum erro e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

7. Se Helena quiser fazer uma redução de 10% em sua foto 3x5, quais serão as novas dimensões da foto reduzida?

Largura ________________ Altura ________________

Justificativa:

Agora coloque suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a redução virtual da foto de helena. Explique abaixo se houve algum erro e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

8. Angélica escolheu uma das fotos que aparecem no **app Ampliação e Redução**, fez uma ampliação e a nova foto ficou com as seguintes dimensões: Largura = 7 cm e Altura = 17,5. Quais as dimensões originais da foto que ela escolheu?

Largura ________________ Altura ________________

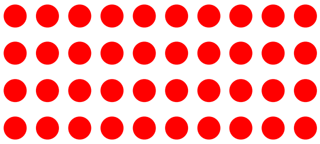
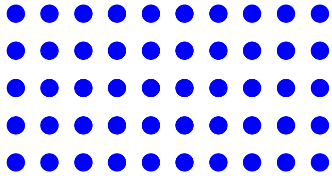
Justificativa:

Agora coloque os dados do problema e os dados que você calculou em suas respostas no **app Ampliação e Redução** e produza a ampliação virtual da foto de Carlos. Verifique se você acertou. Se houve algum erro ou problema, explique abaixo por que você errou e tente descobrir um modo de corrigi-lo.

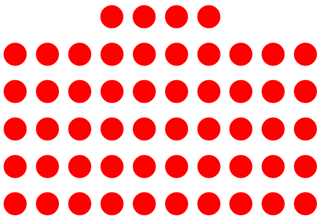
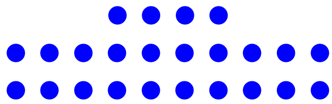
Anexo 5 – Ficha de Atividades do App RAZÃO ENTRE BOLINHAS

1. Em cada caso abaixo, reparta as bolas azuis e vermelhas em um mesmo número de grupos, iguais dentro de cada cor, conforme o exemplo da letra “a”.

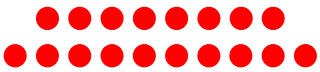
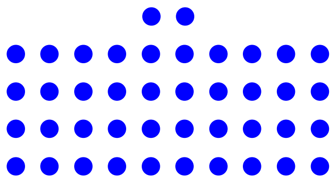
a)

 10 grupos de 4 bolas vermelhas	Para cada grupo de 4 bolas vermelhas há um grupo de 5 bolas azuis. As 40 vermelhas estão para as 50 azuis assim como 4 está para 5 40 : 50 :: 4 : 5 A Razão entre vermelhas e azuis é 4/5	 10 grupos de 5 bolas azuis

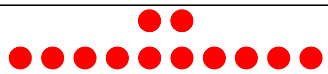
b)

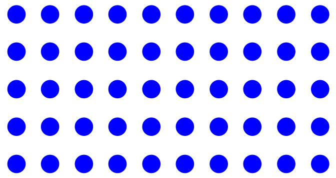
 ___ grupos de ____ bolas vermelhas	Para cada grupo de ____ bolas vermelhas há um grupo de ____ bolas azuis. As _____ vermelhas estão para as _____azuis assim como ____ está para ____ 54 : 24 :: ____:____ A Razão entre vermelhas e azuis é	 ___ grupos de ____ bolas azuis

c)

 ___ grupos de ____ bolas vermelhas	Para cada grupo de ____ bolas vermelhas há um grupo de ____ bolas azuis. As _____ vermelhas estão para as _____azuis assim como ____ está para ____ 54 : 24 :: ____:____ A Razão entre vermelhas e azuis é	 ___ grupos de ____ bolas azuis

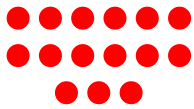
d)

	Para cada grupo de ____ bolas vermelhas há um	

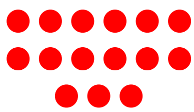
___ grupos de _____ bolas vermelhas	grupo de _____ bolas azuis. As ______ vermelhas estão para as ______azuis assim como _____ está para _____ 54 **:** 24 **::** _____**:**_____ A Razão entre vermelhas e azuis é	 ___ grupos de _____ bolas azuis

2. Em cada caso abaixo, complete os espaços em branco e desenhe a quantidade correta de bolas vermelhas e azuis

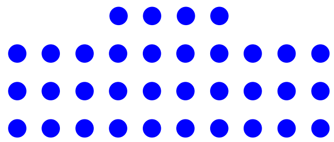
a)

 ___ grupos de _____bolas vermelhas	Para cada grupo de **3** bolas vermelhas há um grupo de **2** bolas azuis. As vermelhas estão para as azuis assim como _____ está para _____ Vermelhas **:** Azuis **::** _____**:**_____	___ grupos de _____ bolas azuis

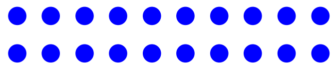
b)

 ___ grupos de _____bolas vermelhas	Para cada grupo de **5** bolas vermelhas há um grupo de **11** bolas azuis. As vermelhas estão para as azuis assim como _____ está para _____ Vermelhas **:** Azuis **::** _____**:**_____	___ grupos de _____ bolas azuis

c)

_____ grupos de _____ bolas vermelhas	Para cada grupo de **3** bolas vermelhas há um grupo de **17** bolas azuis. As vermelhas estão para as azuis assim como _____ está para _____ Vermelhas **:** Azuis **::** _____**:**_____	 ____ grupos de _____ bolas azuis

d)

_____ grupos de _____ bolas vermelhas	Para cada grupo de **1** bolas vermelhas há um grupo de **5** bolas azuis. As vermelhas estão para as azuis assim como _____ está para _____ Vermelhas **:** Azuis **::** _____**:**_____	 ____ grupos de _____ bolas azuis

3. Complete:
   a) Se o número de **bolas vermelhas é o dobro do número de bolas** azuis então:
      Vermelhas : Azuis :: _____ : _____ ou
      A Razão entre bolas vermelhas e azuis é
   b) Se o número de bolas vermelhas é o triplo do número de bolas azuis então:
      Vermelhas : Azuis :: _____ : _____ ou
      A Razão entre bolas vermelhas e azuis é
   c) Se o número de bolas azuis é o triplo do número de bolas vermelhas então:
      Vermelhas : Azuis :: _____ : _____ ou
      A Razão entre bolas vermelhas e azuis é
   d) Se o número de bolas azuis é o quíntuplo do número de bolas vermelhas então:
      Vermelhas : Azuis :: _____ : _____ ou
      A Razão entre bolas vermelhas e azuis é
   e) Se o número de bolas azuis é a metade do número de bolas vermelhas então:
      Vermelhas : Azuis :: _____ : _____ ou
      A Razão entre bolas vermelhas e azuis é

f) Se o número de bolas vermelhas é um quinto do número de bolas azuis então:
Vermelhas : Azuis :: ____ : ____ ou
A Razão entre bolas vermelhas e azuis é

g) Se para cada grupo de 3 bolas vermelhas há um grupo de bolas azuis com duas bolas a mais que as vermelhas então:
Vermelhas : Azuis :: ____ : ____ ou
A Razão entre bolas vermelhas e azuis é

h) Se para cada grupo de 7 bolas azuis há um grupo de bolas vermelhas com uma bola a mais que as azuis então:
Vermelhas : Azuis :: ____ : ____ ou
A Razão entre bolas vermelhas e azuis é

i) Se para cada grupo de 5 bolas vermelhas há um grupo de bolas azuis com duas bolas a menos que as vermelhas então:
Vermelhas : Azuis :: ____ : ____ ou
A Razão entre bolas vermelhas e azuis é

j) Se a **razão** entre a quantidade de bolas vermelhas e a quantidade de bolas azuis é $\frac{4}{7}$ e se há um total de 12 bolas vermelhas então o total de bolas azuis é

k) Se a **razão** entre a quantidade de bolas azuis e a quantidade de bolas vermelhas é $\frac{4}{7}$ e se há um total de 14 bolas vermelhas então o total de bolas azuis é

l) Se a **razão** entre a quantidade de bolas azuis e a quantidade de bolas vermelhas é $\frac{4}{7}$ e se há um total de 28 bolas vermelhas então o total de bolas azuis é

m) Se a **razão** entre a quantidade de bolas azuis e a quantidade de bolas vermelhas é $\frac{4}{7}$ e se há um total de 28 bolas azuis então o total de bolas vermelhas é

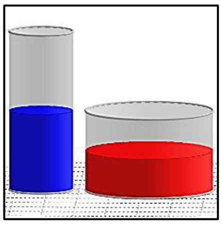
n) Se a **razão** entre a quantidade de bolas vermelhas e a quantidade de bolas azuis é $\frac{4}{7}$ e se há um total de 28 bolas vermelhas então o total de bolas azuis é

o) Se a **razão** entre a quantidade de bolas vermelhas e a quantidade de bolas azuis é $\frac{4}{7}$ e se há um total de 28 bolas azuis então o total de bolas vermelhas é

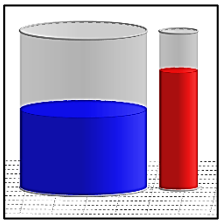
Anexo 6 – Ficha de Atividades do App QUAL O MAIS CHEIO?

QUAL O RECIPIENTE MAIS CHEIO?

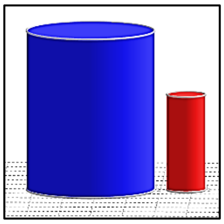
Em cada uma das figuras abaixo são apresentados dois recipientes com uma certa quantidade de líquido azul ou vermelho. Marque o recipiente que está mais cheio e explique como você descobriu logo abaixo:

1. 

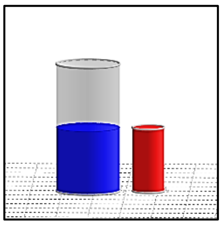
Justificativa:

2. 

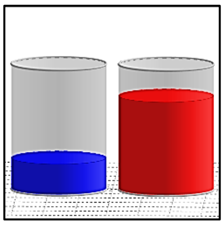
Justificativa:

3. 

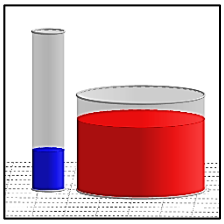
Justificativa:

4. 

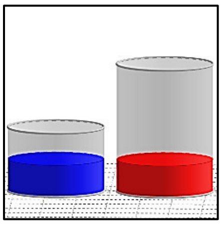
Justificativa:

5. 

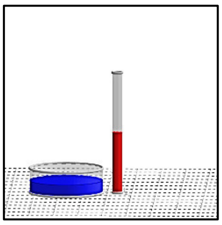
Justificativa:

6. 

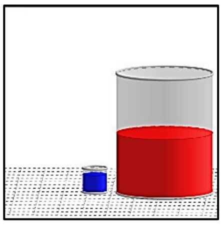
Justificativa:

7. 

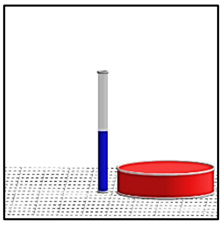
Justificativa:

8. 

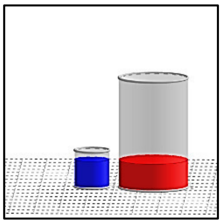
Justificativa:

9. 

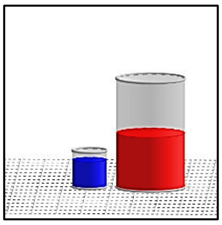
Justificativa:

10. 

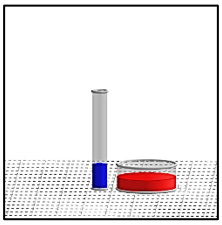
Justificativa:

11. 

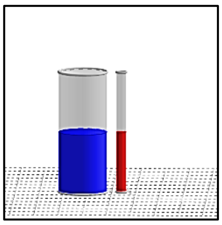
Justificativa:

12. 

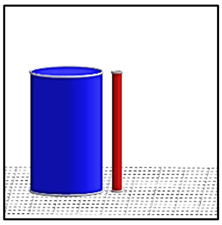
Justificativa:

13. 

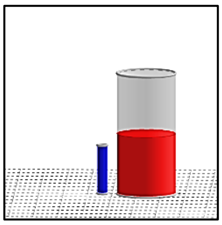
Justificativa:

14. 

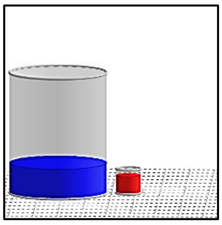
Justificativa:

15. 

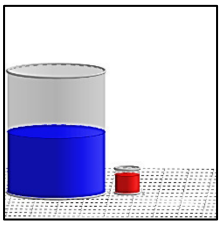
Justificativa:

16. 

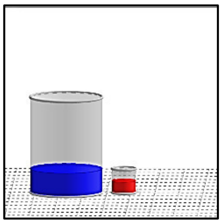
Justificativa:

17. 

Justificativa:

18. 

Justificativa:

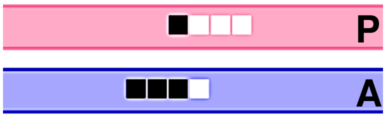
19. 

Justificativa:

Anexo 7 – Ficha de Atividades do App QUAL O MAIS ESCURO?

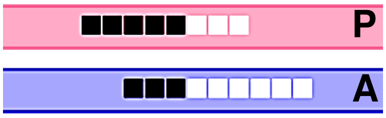
Paulo (P) e Ana (A) querem obter diferentes tons de cor cinza ao misturarem diferentes quantidades de copos iguais cheios de tinta branca e tinta preta. Em cada caso abaixo marque qual deles fez o tom de cinza mais escuro? Justifique sua resposta.

1



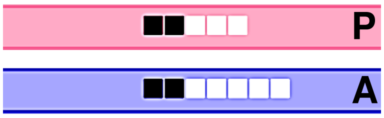
Justificativa:

2



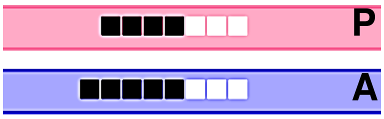
Justificativa:

3



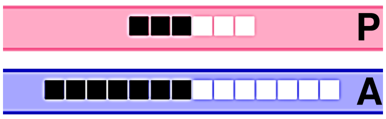
Justificativa:

4



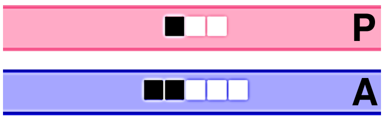
Justificativa:

5



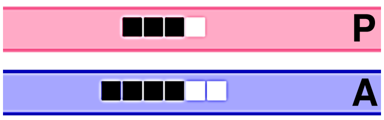
Justificativa:

6



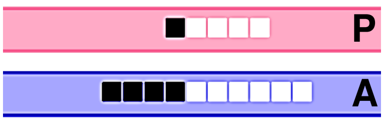
Justificativa:

7



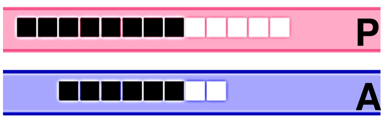
Justificativa:

8



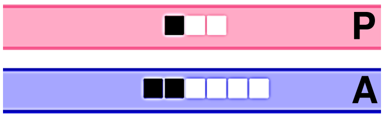
Justificativa:

9



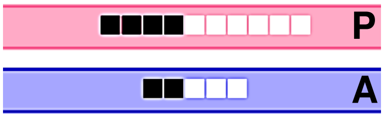
Justificativa:

10



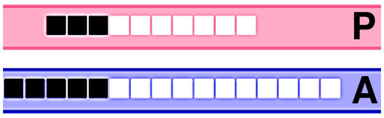
Justificativa:

11



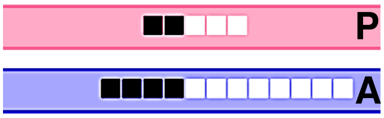
Justificativa:

12



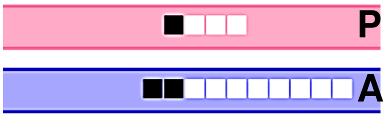
Justificativa:

13



Justificativa:

14

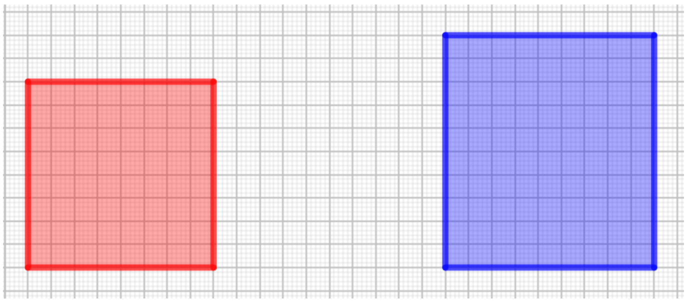


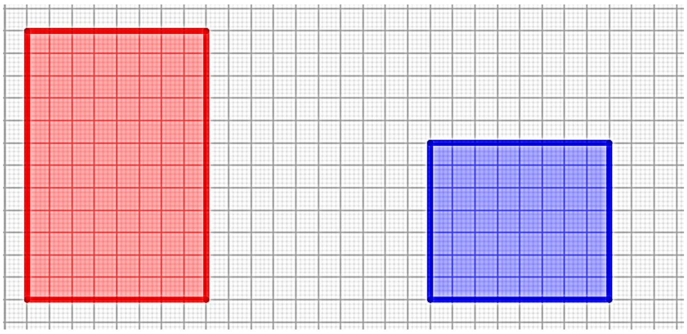
Justificativa:

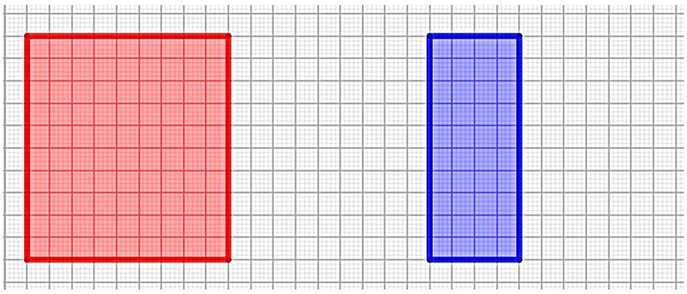
Anexo 8 – Ficha de Atividades do App QUAL O MAIS QUADRADO?

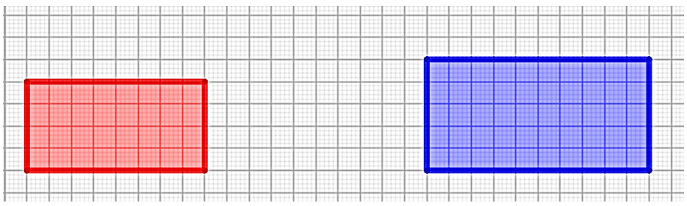
FICHA DE ATIVIDADES A

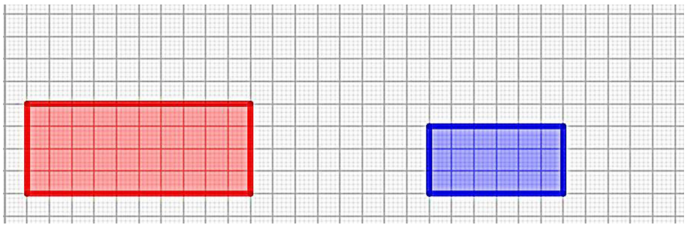
Em cada um dos pares de retângulos abaixo, marque aquele que considera mais "quadrado" (aquele que estiver mais próximo de um quadrado). Justifique, ao lado, sua escolha:

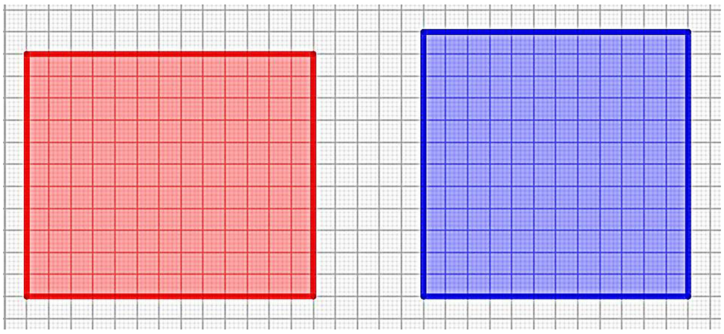
a)


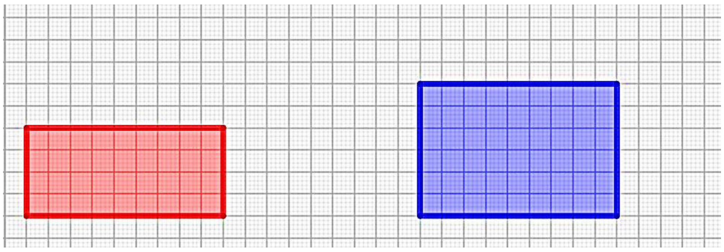
b)


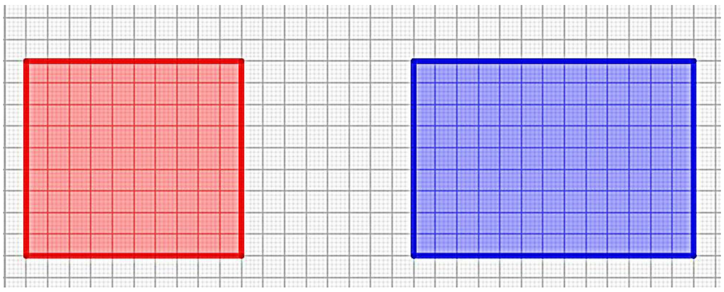
c)


d)


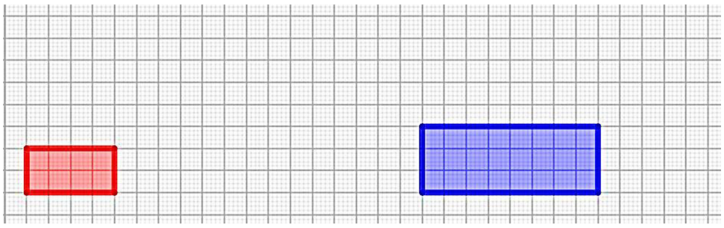
e) 

f) 

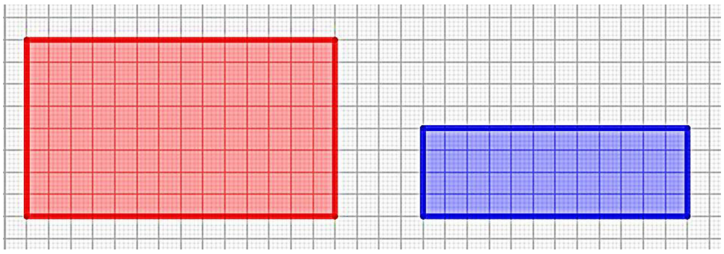
g) 

h) 

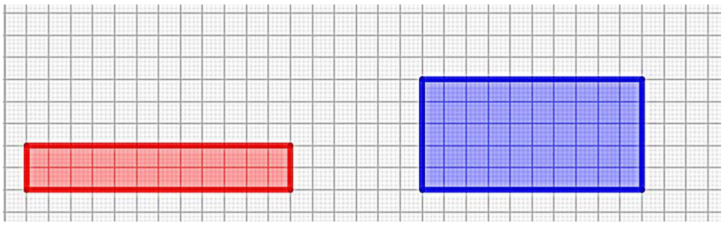
i)



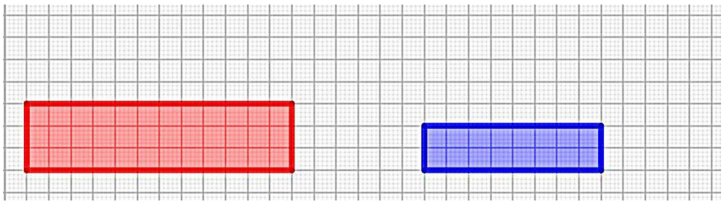
j)



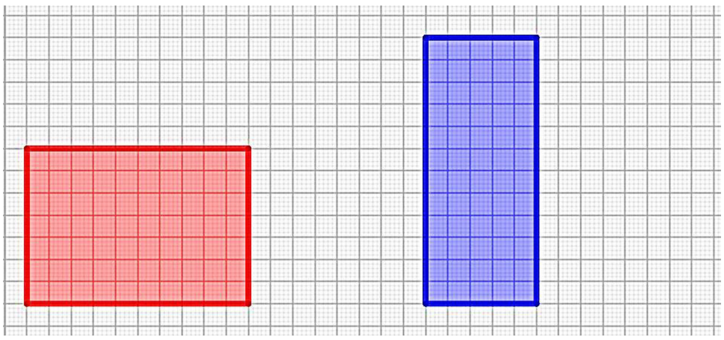
k)

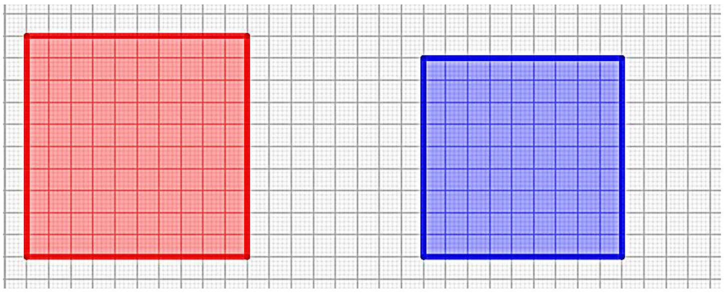


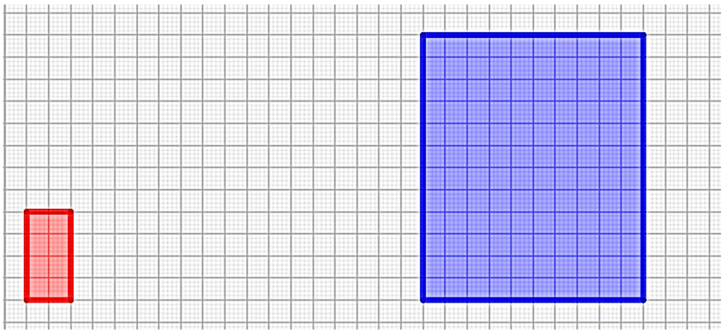
l)

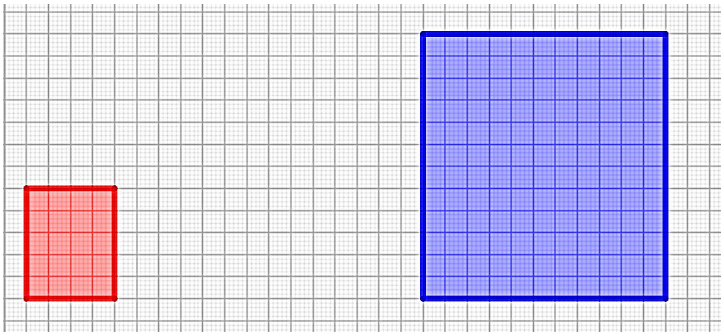


m)




n)


o)


p)

FICHA DE ATIVIDADES B

Em cada um dos itens abaixo, você encontra as medidas de altura e largura de dois retângulos. marque aquele que considera mais “quadrado” (aquele que estiver mais próximo de um quadrado), o retângulo A ou o retângulo B. Justifique, ao lado, sua escolha:

a)

Retângulo	Altura	Largura
A	8	8
B	9	10

b)

Retângulo	Altura	Largura
A	8	12
B	8	7

c)

Retângulo	Altura	Largura
A	9	10
B	4	10

d)

Retângulo	Altura	Largura
A	8	4
B	10	5

e)

Retângulo	Altura	Largura
A	10	4
B	6	3

f)

Retângulo	Altura	Largura
A	13	11
B	12	13

g)

Retângulo	Altura	Largura
A	9	4
B	9	6

h)

Retângulo	Altura	Largura
A	10	9
B	13	9

i)

Retângulo	Altura	Largura
A	4	2
B	8	3

j)

Retângulo	Altura	Largura
A	14	8
B	12	4

k)

Retângulo	Altura	Largura
A	12	2
B	10	5

l)

Retângulo	Altura	Largura
A	12	3
B	8	2

m)

Retângulo	Altura	Largura
A	10	7
B	5	12

n)

Retângulo	Altura	Largura
A	10	10
B	9	9

o)

Retângulo	Altura	Largura
A	2	4
B	10	12

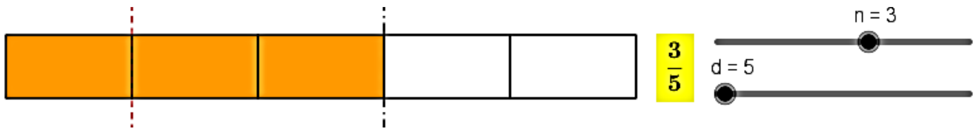
p)

Retângulo	Altura	Largura
A	4	5
B	11	12

Anexo 9 – Ficha de Atividades do App FRAÇÕES EQUIVALENTES

ATIVIDADE COM O ARQUIVO “FRAÇÃO”

1) Usando o arquivo “*Frações*”, encontre 3 frações que sejam equivalentes a $\frac{3}{5}$:

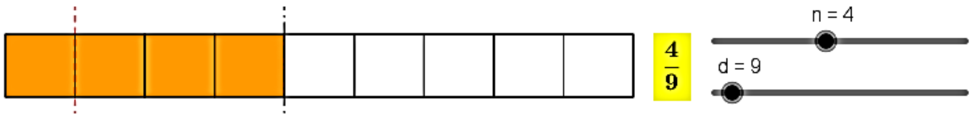


$$\frac{3}{5} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Agora, observe as respostas encontradas e, sem usar o arquivo “*Frações*”, encontre mais 2 frações que sejam equivalentes a $\frac{3}{5}$:

$$\frac{3}{5} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

2) Usando o arquivo “*Frações*”, encontre 3 frações que sejam equivalentes a $\frac{4}{9}$:

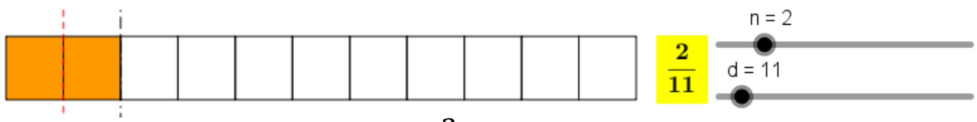


$$\frac{4}{9} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Agora, observe as respostas encontradas e, sem usar o arquivo “*Frações*”, encontre mais 2 frações que sejam equivalentes a $\frac{4}{9}$:

$$\frac{4}{9} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

3) Usando o arquivo “*Frações*”, encontre 3 frações que sejam equivalentes a $\frac{2}{11}$:

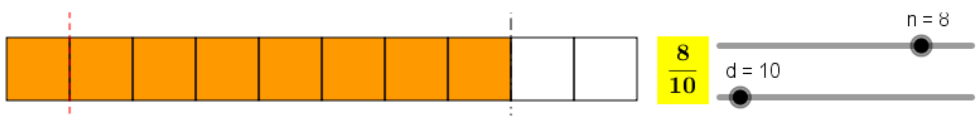


$$\frac{2}{11} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Agora, observe as respostas encontradas e, sem usar o arquivo “*Frações*”, encontre mais 2 frações que sejam equivalentes a $\frac{2}{11}$:

$$\frac{2}{11} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

4) Usando o arquivo “*Frações*”, encontre 3 frações que sejam equivalentes a $\frac{8}{10}$:



$$\frac{8}{10} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Agora, observe as respostas encontradas e, sem usar o arquivo "*Frações*", encontre mais 2 frações que sejam equivalentes a $\frac{8}{10}$:

$$\frac{8}{10} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

5) Agora, observe as respostas encontradas e, sem usar o arquivo "Frações", complete com 2 frações que sejam equivalentes a cada uma das frações abaixo:

$$\frac{1}{5} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \qquad \frac{4}{7} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \qquad \frac{11}{3} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad} \qquad \frac{8}{20} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$$

Use o arquivo frações e verifique se suas respostas estão corretas

6) Complete as igualdades abaixo de modo que fiquem verdadeiras:

$$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{14}}{} \qquad \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{13}} = \frac{}{\mathbf{39}} \qquad \frac{\mathbf{6}}{} = \frac{\mathbf{36}}{\mathbf{42}} \qquad \frac{}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{77}}{\mathbf{35}}$$

$$\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{15}} = \frac{\mathbf{4}}{} \qquad \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{18}} = \frac{}{\mathbf{9}} \qquad \frac{\mathbf{102}}{\mathbf{45}} = \frac{\mathbf{34}}{} \qquad \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{8}}{}$$

7) Complete a seguinte frase:

Para se obter uma fração equivalente a uma outra fração dada, basta ____________________

____

____