

JOSIE PACHECO DE VASCONCELLOS SOUZA

**SALA DE AULA INVERTIDA: UMA
PROPOSTA PARA O ENSINO DE
PROBABILIDADE**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

DARCY RIBEIRO - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

SETEMBRO DE 2019

JOSIE PACHECO DE VASCONCELLOS SOUZA

**SALA DE AULA INVERTIDA: UMA PROPOSTA
PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE**

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. D. Sc Nelson Machado Barbosa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE

**DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ**

SETEMBRO DE 2019

FICHA CATALOGRÁFICA

UENF - Bibliotecas

Elaborada com os dados fornecidos pela autora.

S729

Souza, Josie Pacheco de Vasconcellos.

Sala de Aula Invertida : Uma Proposta para o Ensino da Probabilidade / Josie Pacheco de Vasconcellos Souza. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

174 f. : il.

Bibliografia: 133 - 137.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.

Orientador: Nelson Machado Barbosa.

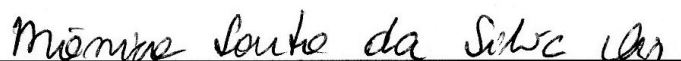
1. Probabilidade. 2. Ensino Híbrido. 3. Sala de Aula Invertida. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

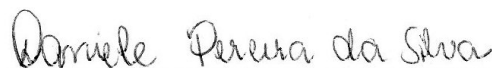
SALA DE AULA INVERTIDA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 20 de Setembro de 2019.



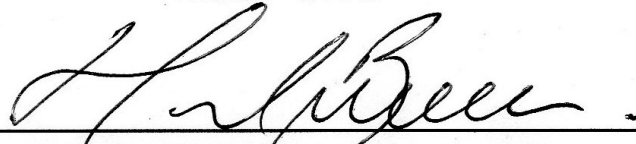
Prof^a. Mônica Souto da Silva Dias
D.Sc. - UFF



Prof^a. Daniele Pereira da Silva
D.Sc. - IFF



Prof. Rigoberto Gregório Sanabria Castro
D.Sc. - UENF



Prof. D. Sc Nelson Machado Barbosa
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho à minha mãe, que sempre me incentivou, me deu força e coragem, me apoiou e motivou nos momentos de maiores dificuldades. E também a minha filha Mariah, que embora ainda não entenda o significado desta trajetória, estimulou de maneira especial os meus pensamentos me levando a buscar mais conhecimentos.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida e a possibilidade de crescer a cada dia.

Aos meu pais, Silvelucia e Aguinaldo, que com amor, tiveram papel fundamental na minha formação.

A minha irmã Bruna por todo carinho, incentivo e por sempre acreditar em mim.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática pelos conhecimentos transmitidos em especial ao meu orientador Nelson, pela dedicação na orientação deste trabalho e por suas contribuições para o meu crescimento intelectual e profissional.

A Universidade Estadual do Norte Fluminense, pelos recursos técnicos e humanos que me proporcionou ao longo dessa caminhada.

A Sociedade Brasileira de Matemática, por possibilitar esse período de estudos e desenvolvimento profissional.

Aos meus amigos Paula Eveline e Argeu Luiz que compartilharam comigo seus conhecimentos, contribuindo grandemente para a realização deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, por todo apoio e parceria, em especial Rafaela e Jonatas, com quem dividi horas de estudo, angústias, frustrações, conquistas e momentos felizes.

Aos meus colegas de trabalho pelo incentivo e colaboração.

Aos alunos que participaram da experimentação das atividades, por contribuírem diretamente para a realização da pesquisa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

“Educar é possibilitar ao outro as condições necessárias à transcendência, à superação de suas limitações ... Educar é criar, impulsionar e capacitar para a vida. É conceder ao outro a aquisição de saberes essenciais a uma existência digna e promissora”.

(Gabriel Chalita)

Resumo

A Probabilidade é o ramo da ciência responsável por orientar ações cotidianas que demandam a utilização de dados, bem como sua manipulação e interpretação para tomada de decisões. Diversos documentos oficiais tem destacado a relevância da sua incorporação ao currículo escolar do Ensino Médio. Porém, um grande desafio para sua efetiva aprendizagem é a superação de procedimentos mecânicos e repetitivos. Faz-se necessário então, explorar as diferentes estratégias de ensino que possam auxiliar de forma significativa a aprendizagem dos conceitos e processos associados ao tema. Nesse contexto, foi elaborada uma sequência didática utilizando o Ensino Híbrido, em particular a subcategoria Sala de Aula Invertida, para auxiliar na aprendizagem dos conceitos iniciais da Probabilidade. Buscou-se desta forma, enriquecer a prática pedagógica por meio de uma abordagem metodológica com o uso integrado das tecnologias digitais visando a personalização do ensino. A sequência didática e a coleta de dados foram implementadas em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública na cidade de São João da Barra/RJ no período de março a abril de 2019. A pesquisa é de caráter qualitativo e os dados coletados buscaram investigar o desempenho e as reações dos alunos e foram analisados a partir do referencial teórico consultado. Os resultados mostraram que a Sala de Aula Invertida pode, de fato, contribuir para a aprendizagem do tema proposto, podendo ser destacadas como principais contribuições o desenvolvimento da autonomia e senso crítico bem como a capacidade argumentativa e socializadora.

Palavras-chaves: Probabilidade; Ensino Híbrido; Sala de Aula Invertida.

Abstract

Probability is the branch of science responsible for guiding daily actions that demand the use of data, as well as its manipulation and interpretation for decision making. Several official documents have highlighted the relevance of their incorporation into the high school curriculum. However, a major challenge for its effective learning is the overcoming of mechanical and repetitive procedures. Therefore, it is necessary to explore the different teaching strategies that can significantly help the learning of the concepts and processes associated with the theme. In this context, a didactic sequence was elaborated using Hybrid Teaching, in particular the subcategory Inverted Classroom, to assist in learning the initial concepts of Probability. Thus, we sought to enrich the pedagogical practice through a methodological approach with the integrated use of digital technologies aiming at the personalization of teaching. The didactic sequence and data collection were implemented in a 3rd grade class of a public school in the city of São João da Barra / RJ from March to April 2019. The research is qualitative and the data collected sought to investigate the students' performance and reactions and were analyzed from the consulted theoretical framework. The results showed that the Inverted Classroom can, in fact, contribute to the learning of the proposed theme. The development of autonomy and critical sense as well as the argumentative and socializing capacity can be highlighted as the main contributions.

Key-words: Probability; Hybrid Teaching; Inverted Classroom.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Modelo de osso utilizado no Tali	25
Figura 2 – Galileu Galilei	26
Figura 3 – Blaise Pascal	27
Figura 4 – Pierre de Fermat	27
Figura 5 – Gottfried Wilhelm Leibniz	28
Figura 6 – Johann Bernoulli	28
Figura 7 – Etapas do Ensino Híbrido	44
Figura 8 – Ensino Híbrido e suas Subcategorias	46
Figura 9 – Sala de Aula Invertida	50
Figura 10 – Ações da Sala de Aula Invertida	51
Figura 11 – Esquema de Sala de Aula Invertida Adotada nesta Pesquisa	53
Figura 12 – Modelo de questão do Teste para verificação da aprendizagem	65
Figura 13 – Vídeo Parte Histórica	68
Figura 14 – Videoaula Probabilidade: Conceitos Básicos	68
Figura 15 – Parte da questão 1 do Teste 4	71
Figura 16 – Questão 3 da Atividade em Grupo 1	73
Figura 17 – Questão 1 da Atividade em Grupo 2	74
Figura 18 – Espaço Amostral da Questão 3 da Atividade em Grupo 3	75
Figura 19 – Tabuleiro do Jogo	79
Figura 20 – Tabuleiro Opcional do Jogo	80
Figura 21 – Exemplo de tabela com resultado de uma partida	81
Figura 22 – Exemplo de tabela com o total de partidas	81
Figura 23 – Exemplo de gráficos de barras	82
Figura 24 – Apresentação da Sala de Aula Invertida	84
Figura 25 – Criação do Grupo no <i>WhatsApp</i>	86
Figura 26 – Experimentação do Teste 1	88
Figura 27 – Questão 1 do Teste 1	89
Figura 28 – Questões 2 a 5 do Teste 1	90
Figura 29 – Experimentação do Atividade em Grupo 1	92
Figura 30 – Questão 1 da Atividade em Grupo 1	93
Figura 31 – Questão 2 da Atividade em Grupo 1	94

Figura 32 – Questão 3 da Atividade em Grupo 1	94
Figura 33 – Questão 4 da Atividade em Grupo 1	95
Figura 34 – Aluno construindo árvore das possibilidades	96
Figura 35 – Questões de 1 a 3 do Teste 2	97
Figura 36 – Questões 4 e 5 do Teste 2	98
Figura 37 – Aluna resolvendo questão no quadro	99
Figura 38 – Questão 1 da Atividade em Grupo 2	101
Figura 39 – Dado da Questão 2 da Atividade em Grupo 2	101
Figura 40 – Questão 3 da Atividade em Grupo 2	102
Figura 41 – Questões 1 e 2 do Teste 3	104
Figura 42 – Questões 3 e 4 do Teste 2	105
Figura 43 – Questão 1 da Atividade em Grupo 3	106
Figura 44 – Questão 2 da Atividade em Grupo 3	106
Figura 45 – Resolução da Questão 3 da Atividade em Grupo 3	107
Figura 46 – Questão 4 da Atividade em Grupo 3	108
Figura 47 – Resolução da Questão 4 da Atividade em Grupo 3	109
Figura 48 – Questão 1 do Teste 4	110
Figura 49 – Continuação da questão 1 do Teste 4	110
Figura 50 – Parte 2 da questão 1 do Teste 4	111
Figura 51 – Questão 2 do Teste 4	112
Figura 52 – Questão 3 do Teste 4	112
Figura 53 – Primeira parte da Questão 1 da Atividade em Grupo 4	113
Figura 54 – Continuação da Questão 1 da Atividade em Grupo 4	114
Figura 55 – Aluno resolvendo Questão 1 da Atividade em Grupo 4	115
Figura 56 – Resolução da Questão 1 da Atividade em Grupo 4	115
Figura 57 – Resolução sa seção "Pense mais um pouco"da Atividade em Grupo 4	116
Figura 58 – Questão 1 da Atividade em Grupo 3	116
Figura 59 – Resoluções da Questão 2 da Atividade em Grupo 4	117
Figura 60 – Resoluções da Questão 3 da Atividade em Grupo 4	118
Figura 61 – Questão 4 da Atividade em Grupo 4	119
Figura 62 – Questão 5 da Atividade em Grupo 4	120
Figura 63 – Experimentação do Jogo	121
Figura 64 – Construção das Tabelas	123
Figura 65 – Construção dos Gráficos	123
Figura 66 – Experimentação da Atividade Avaliativa	124
Figura 67 – Opinião do aluno A1 sobre a Sala de Aula Invertida	129
Figura 68 – Opinião do aluno A2 sobre a Sala de Aula Invertida	129
Figura 69 – Opinião do aluno A3 sobre a Sala de Aula Invertida	129
Figura 70 – Opinião do aluno A4 sobre a Sala de Aula Invertida	130

Figura 71 – Opinião do aluno A5 sobre a Sala de Aula Invertida 130

Lista de quadros

Quadro 1 – Trabalhos sobre Sala de Aula Invertida - Dados da BDTD/PROFMAT	58
Quadro 2 – Cronograma das Atividades	66

Lista de gráficos

Gráfico 1 – Gráfico com total de acertos por Questão da Atividade Avaliativa	125
Gráfico 2 – Gráfico sobre opinião dos alunos em relação ao Nível das Atividades .	127
Gráfico 3 – Gráfico sobre a opinião dos alunos em relação a utilização de Jogos . .	127
Gráfico 4 – Gráfico sobre o motivo de solicitação do Professor durante a resolução das Atividades	128

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
OBMEP	Olimpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
RJ	Rio de Janeiro
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SEEDUC	Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UnB	Universidade de Brasília
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
XV	Século 15
XVI	Século 16

Lista de símbolos

\forall	Para todo
Ω	Letra Grega Ômega
\in	Pertence
$-$	Subtração
$+$	Adição
\div	Divisão
\times	Multiplicação
$=$	Igual
\neq	Diferente
\rightarrow	Implicação
$<$	Menor que
$>$	Maior que
\leq	Menor ou Igual
\geq	Maior ou Igual
\mathbb{R}	Conjunto dos Números Reais
Σ	Somatório
\nexists	Não existe
$/$	Tal que

Sumário

Introdução	18	
1	APORTE TEÓRICO	21
1.1	O Ensino da Probabilidade nos Documentos Oficiais	21
1.2	Breve Histórico da Probabilidade	24
1.2.1	O Surgimento da Probabilidade	26
1.3	Conceitos sobre Probabilidade	28
1.3.1	A Teoria	29
1.4	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação	35
1.5	Metodologias Ativas	39
1.5.1	O Papel do Professor	42
1.5.2	Ensino Híbrido	43
1.5.3	Sala de Aula Invertida	49
1.5.4	Avaliação	56
1.5.5	Trabalhos Correlatos	57
2	ASPECTOS METODOLÓGICOS	61
2.1	A Escola	62
2.2	Os Alunos	63
2.3	Etapas da Pesquisa	63
2.4	Sequência Didática	64
2.4.1	Seleção das Vídeos Aulas	67
2.4.2	Atividades Presenciais	69
2.4.2.1	Testes para Verificação da Aprendizagem	70
2.4.2.2	Atividades em Grupo	71
2.4.2.3	Atividade Avaliativa	76
2.4.2.4	O Jogo	76
3	EXPERIMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA	84
3.1	Encontro Presencial 1	87
3.1.1	Experimentação do Teste 1	88
3.1.2	Experimentação da Atividade em Grupo 1	91
3.2	Encontro Presencial 2	96
3.2.1	Experimentação do Teste 2	97
3.2.2	Experimentação da Atividade em Grupo 2	100
3.3	Encontro Presencial 3	103

3.3.1	Experimentação do Teste 3	103
3.3.2	Experimentação da Atividade em Grupo 3	105
3.4	Encontro Presencial 4	109
3.4.1	Experimentação do Teste 4	110
3.4.2	Experimentação da Atividade em Grupo 4	113
3.5	Experimentação do Jogo	120
3.6	Experimentação da Atividade Avaliativa	124
3.7	Questionário	125
3.7.1	Análise do Questionário da Experimentação	126
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	131

REFERÊNCIAS	133
-----------------------	-----

APÊNDICES 138

APÊNDICE A	– TESTES PARA VERIFICAÇÃO DA APRENDIZAGEM	139
APÊNDICE B	– ATIVIDADES EM GRUPO	149
APÊNDICE C	– ATIVIDADE AVALIATIVA	161
APÊNDICE D	– QUESTIONÁRIO	166
APÊNDICE E	– JOGO DAS AMEBAS (FOLHA DO ALUNO)	169
APÊNDICE F	– JOGO DAS AMEBAS (TABULEIRO)	171

Introdução

A Teoria das Probabilidades é uma ciência recente e embora já exercesse fascínio há muitos séculos, ela não teve um tratamento matemático aprofundado até o século XV e início do século XVI.

Seu surgimento se deu a partir da análise de jogos de azar e posteriormente teve papel fundamental na construção de teorias que hoje são fundamentais para muitas áreas do saber, tais como, Economia, Política, Medicina, entre outras, além de ser a fundamentação matemática que garante a validade dos procedimentos da inferência estatística.

Se tratando da matemática escolar, nos últimos anos tem sido reconhecida a importância que a Probabilidade possui na formação de estudantes, pois percebeu-se que ela possibilita a reflexão sobre diversos fatos que ocorrerem no nosso cotidiano e na sociedade, colaborando assim para a formação de cidadãos críticos e atuantes. Dentre as habilidades que a probabilidade ajuda a desenvolver, destacamos a capacidade de tomar decisões, onde o aluno conhecerá alguns critérios de escolha e será capaz de traçar estratégias para decidir com maior confiança o quão provável é de algo acontecer ou não.

O aluno terá então, autonomia para lidar, da melhor forma possível, com situações que ele não possui controle. Sendo assim, a probabilidade é o ramo da matemática que fornece os critérios citados acima, pois ela "(...) favorece o desenvolvimento de certas atitudes como posicionar-se criticamente, fazer previsões e tomar decisões ante as informações veiculadas pela mídia, livros e outras fontes" (BRASIL, 1998, p. 134)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, em consonância com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 2018b) sugerem que os conteúdos de Probabilidade sejam trabalhados a partir de fatos históricos, da resolução de problemas e da utilização de jogos.

Para o Ensino Médio, as Orientações Curriculares, destacam a importância da probabilidade, como visto abaixo:

Os conteúdos do bloco Análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das ideias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural

e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico (BRASIL, 2006, p.78).

Tendo como objetivo tornar o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos iniciais da Probabilidade mais eficiente, pensou-se em uma proposta de ensino que permita o desenvolvimento do raciocínio probabilístico atrelado ao uso de tecnologias, visto que elas estão presentes no cotidiano dos alunos e se tornaram um dos seus principais focos de atenção.

A proposta foi pensada levando em consideração a participação ativa dos alunos, pois será executada por meio da Sala de Aula Invertida, modalidade que faz parte das Metodologias Ativas.

A sala de aula invertida é uma das categorias do Ensino Híbrido, que é definido por Christensen, Horn e Staker (2013) como sendo um “programa de educação formal em que o estudante aprende parte de determinado conteúdo utilizando o ensino *on-line*, com algum elemento de controle sobre o tempo, local, caminho e/ou ritmo do aprendizado, e parte do estudo deve ocorrer em uma localidade física supervisionada, fora de sua residência”.

Sendo assim, a proposta desse trabalho foi elaborada de modo que o que é informação básica seja concentrada em um ambiente virtual, e as atividades mais elaboradas, as discussões, os problemas e os jogos sejam feitos em sala de aula. Com este modelo, os alunos aprendem juntos, mas também sozinhos, desenvolvendo assim sua autonomia e a habilidade de trabalhar em grupo, numa aprendizagem colaborativa.

Diante das reflexões acima, esta pesquisa foi desenvolvida buscando responder a seguinte questão: Como o Ensino Híbrido, em particular a Sala de aula Invertida, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos iniciais de Probabilidade para os alunos da 3ª série do Ensino Médio?

Tendo em vista a questão de pesquisa citada acima, o objetivo geral do presente trabalho é implementar a modalidade Sala de aula Invertida, em uma turma da 3ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Doutor Olímpio Saturnino de Brito, localizado no município de São João da Barra – RJ, com a utilização de tecnologias educacionais e ferramentas colaborativas para o ensino de Probabilidade em uma concepção de aula híbrida, unindo o que há de mais interessante na educação à distância (o ensino virtual), com as vantagens da educação presencial. (OESTERREICH; MONTOLI, 2012). Para tanto, traçou-se os seguintes objetivos específicos:

- Promover estudos e pesquisas sobre a Sala de Aula Invertida e sobre Probabilidade;
- Pesquisar sobre os desafios encontrados no ensino e na aprendizagem da Probabilidade;

- Investigar recursos pedagógicos que possibilitem o ensino e aprendizagem da Probabilidade;
- Analisar o impacto de atividades realizadas no desempenho e na participação dos alunos visando avaliar e aperfeiçoar a metodologia aplicada.
- Analisar como a metodologia aplicada pode contribuir para a superação das dificuldades de aprendizagem de Probabilidade, visando o aperfeiçoamento de trabalhos futuros.

Para atingir os objetivos propostos, esta pesquisa foi dividida em 4 capítulos. O capítulo 1 traz o Aporte Teórico que fundamenta esta pesquisa. No capítulo 2 é definida a Metodologia adotada na pesquisa e a elaboração da Sequência Didática. No capítulo 3 é relatada a experimentação da Sequência Didática e a análise do Questionário. Finalizando, no capítulo 4, são apresentadas algumas considerações sobre a pesquisa realizada.

Capítulo 1

Aporte Teórico

Neste capítulo é apresentado o aporte teórico que fundamenta esta pesquisa. Ele está subdividido em cinco seções. Na primeira, foi realizado um levantamento nos documentos oficiais sobre o ensino da probabilidade na Educação Básica. Na segunda seção, apresenta-se a contextualização histórica da Probabilidade. A terceira seção apresenta o referencial teórico com o resumo dos principais conceitos sobre Probabilidade. A quarta seção traz um breve relato sobre as Metodologias de Ensino pautadas nas Tecnologias Digitais, sobre as Metodologias Ativas, sobre o Ensino Híbrido e a Sala de Aula Invertida. Ainda nesta seção, encontram-se considerações a respeito do Papel do Professor e da Avaliação nas modalidades ativas de ensino. Por fim, na última seção, encontram-se os trabalhos correlatos a esta pesquisa.

1.1 O Ensino da Probabilidade nos Documentos Oficiais

Para nortear o estudo sobre o tema deste trabalho, foi realizada uma pesquisa nas propostas curriculares nacional e estadual. Pode-se observar que tais propostas têm justificado com bastante ênfase a importância que a Probabilidade possui na formação dos estudantes.

Os documentos foram analisados por um viés qualitativo onde buscou-se, inicialmente, compreender os aspectos mais amplos relacionados a matemática e, em seguida, os aspectos específicos desse eixo temático.

Foram analisados Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro.

A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Sua utilização está prevista no Artigo 36 da LDB (Lei nº 9.394 /96) “ Art. 36: O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão

ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino” (BRASIL, 2018a, p. 26) e, assim como os PCN, ela dará suporte ao trabalho pedagógico nas escolas e desde a sua aprovação ela se tornou referência para todos os currículos nacionais dos estabelecimentos de ensino públicos e privados.

No que diz a matemática, a BNCC (BRASIL, 2018a) muda o enfoque do que deve ser priorizado, em especial no desenvolvimento de competências. Vale destacar que, apesar de determinar os conteúdos essenciais a serem abordados em cada ano, ela não define o método de ensino, que é o que de fato favorece o desenvolvimento de habilidades de maior significado e complexidade.

Nesta mudança, o foco principal está agora no letramento matemático, na matemática em uso, na resolução de situações e não na matemática das técnicas e das fórmulas. Desta forma, faz-se necessário investir em atividades que desenvolvam o raciocínio, a comunicação, a representação e a argumentação. Espera-se desta forma fazer com que o aluno assuma uma postura ativa nos mais diferentes contextos, tais como posicionar-se sobre uma dada questão e investigar meios de resolvê-la.

Em relação a mudanças específicas, o eixo temático deste trabalho, antes denominado Tratamento da Informação, passa a se chamar unidade temática: Probabilidade e Estatística e começa a ser trabalhado nas séries iniciais fundamental, antecipando alguns conhecimentos que atualmente são do Ensino Médio.

Em relação a Probabilidade, a BNCC (BRASIL, 2018a) destaca as seguintes competências e habilidades a serem adquiridas até o final do Ensino Médio:

- Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, com e sem reposição, usando diagrama da árvore para contagem das possibilidades e o princípio multiplicativo para determinar a probabilidade de eventos;
- Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades;
- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

Em relação ao ensino da matemática, os PCN (BRASIL, 1998) indicam que sejam contemplados o desenvolvimento de capacidades de natureza cognitiva, física, afetiva, de relação interpessoal e inserção social, ética e estética, de forma ampla, para seus sujeitos de aprendizagem. O aprendiz, por meio de suas necessidades, deve ser capaz de reconhecer problemas, buscar e selecionar informações e tomar decisões para que desta forma seja capaz de desenvolver habilidades para lidar com as atividades matemáticas.

A aprendizagem, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), sempre será possível na medida em que o professor proporcionar um ambiente de estudo que estimule o aluno a criar, comparar, discutir, rever, perguntar e ampliar ideias. O aluno deve ser considerado como sujeito da construção do seu conhecimento. Os PCN (BRASIL, 1998) orientam ainda que o ensino da matemática deve abordar questões e metodologias que desafiem o aluno e estimulem sua criatividade na busca de estratégias para resolver situações-problema.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), afirmam que o estudo da probabilidade é essencial no bloco de estudo análise de dados, visto que é necessário que os alunos adquiram conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas.

As Orientações referidas acima reforçam ainda que,

Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de equiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as frequências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais frequências para estimar a probabilidade de um evento dado. (BRASIL, 2006, p. 79).

De acordo com o documento supracitado, ao estudar probabilidade, os alunos devem ser capazes de entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem no seu dia a dia, em especial, na mídia.

De acordo com os PCNEM (BRASIL, 2002, p. 124), os conteúdos e habilidades propostos para a unidade temática Probabilidade são:

- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
- Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

Por fim, foi analisado o Currículo Mínimo de Ensino do Rio de Janeiro (SEEDUC, 2011), que é um documento elaborado pela Secretaria de Estado de Educação - SEEDUC onde são apresentadas as competências e habilidades que devem estar presentes nos planos de curso e nas aulas, servindo como referência a todas as escolas estaduais.

O documento é pautado nas necessidades de ensino identificadas nas legislações vigentes, Diretrizes e Parâmetros curriculares Nacionais e também nas matrizes de referência dos principais exames nacionais e estaduais. Vale destacar que a versão do Currículo mínimo utilizada é de 2013, ou seja, não está atualizado de acordo com o BNCC.

No Currículo Mínimo, o conteúdo Probabilidade é trabalhado no 2º bimestre da 3ª série do Ensino Médio, e abrange as seguintes competências:

- Calcular a probabilidade de um evento.
- Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares
- Resolver problemas envolvendo probabilidade condicional.

Foi analisada ainda, a matriz de referência da 3ª série do Ensino Médio da Prova Brasil, uma das avaliações externas do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que juntamente com os dados obtidos no Censo Escolar, compõe o Índice de desenvolvimento da Educação Básica (Ideb). A única referência a Probabilidade encontrada nesta matriz foi o descritor D33: *Calcular a Probabilidade de um evento*. Nesta avaliação, o resultado do aluno é apresentado em pontos numa escala que varia de 0 a 12. Tal escala determina nível de proficiência do aluno em determinado assunto. Na última avaliação, de acordo com dados do INEP (2015)¹, determinar a probabilidade de ocorrência de um evento simples está classificada no nível 4 desta escala.

Levando em consideração as orientações e propostas apresentadas pelos documentos analisados e o resultado da última Prova Brasil, buscou-se com este trabalho, elaborar uma sequência didática que auxiliasse o ensino e a aprendizagem da Probabilidade, contemplando as habilidades e competências destacadas ao longo do texto.

1.2 Breve Histórico da Probabilidade

A ideia de acaso é quase tão antiga quanto às primeiras civilizações, só que a percepção de que isto é um fenômeno natural veio a ocorrer bem mais tarde. Inicialmente o acaso era percebido como fruto ou obra da divindade. (VIALI, 2008, p. 144)

De acordo com Bernstein (1997), a noção que o futuro é mais do que um capricho dos deuses e que seres humanos não são impotentes perante a natureza foi a ideia revolucionária, chamada domínio do risco, que definiu a fronteira que separa o passado dos tempos atuais. Até que a humanidade fosse capaz de ultrapassar essa fronteira, “o futuro

¹ Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/ideb/resultados>>

era um espelho do passado ou o domínio obscuro de oráculos e adivinhos que detinham o monopólio sobre o conhecimento dos eventos previstos” (BERNSTEIN, 1997, p. 1).

De acordo com Hacking (1999) citado por Viali (2008), as primeiras manifestações probabilísticas ocorreram por meio de jogos de dados, mais especificamente o Tali, ou jogo do osso, que era praticado com um osso de animal (Figura 1) possivelmente de carneiro, e semelhante a um tetraedro irregular, isto é, as quatro faces não eram idênticas e tampouco mostravam a mesma frequência de ocorrência.

Figura 1 – Modelo de osso utilizado no Tali



Fonte: Missoes (2019)

Segundo a autora, além de apostas, utilizava-se este jogo também para realizar previsões sobre o futuro, para decidir disputas e dividir heranças.

Há também indícios do uso da probabilidade na prática de seguros, que acredita-se ter sido iniciada pelos comerciantes mesopotâmicos e fenícios devido as perdas de carga de navios por naufrágio ou roubo (VIALI, 2008). Especula-se, de acordo com a autora, que as estimativas empíricas das probabilidades de acidentes eram utilizadas para determinação dos prêmios.

Apesar dos jogos e da navegação fazerem parte do desenvolvimento da humanidade, uma abordagem matemática do acaso e do risco só teve início efetivamente há aproximadamente 500 anos (VIALI, 2008).

Este capítulo traz um breve resumo de como surgiram os primeiros estudos sobre probabilidade e a biografia dos principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento desta teoria. Nas palavras de Bernstein (1997), tais pensadores com suas notáveis visões revelaram como pôr o futuro a serviço do presente.

Ao mostrar ao mundo como compreender o risco, medi-lo e avaliar suas consequências, eles converteram o ato de correr riscos em um dos principais catalisadores que impelem a sociedade ocidental moderna. À semelhança de Prometeu², eles desafiaram os deuses e sondaram as trevas em busca da luz que converteu o futuro, de um inimigo a uma oportunidade. A transformação nas atitudes em relação a administração do risco desencadeada

² Herói da Mitologia Grega

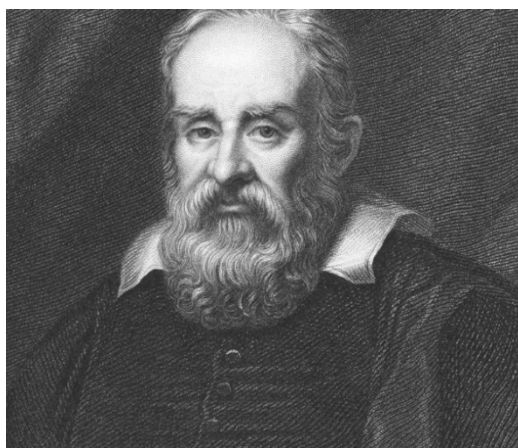
por suas realizações canalizou a paixão humana pelos jogos e apostas para o crescimento econômico, a melhoria da qualidade de vida e o progresso tecnológico. (BERNSTEIN, 1997, p. 1).

O autor reforça ainda que, a capacidade de definir o que poderá ocorrer no futuro, bem como definir um processo racional para enfrentar riscos e de escolher entre as várias possibilidades, é fundamental aos indivíduos da sociedade moderna, pois a capacidade de administrar o risco é elemento chave da energia que impulsiona o sistema econômico.

1.2.1 O Surgimento da Probabilidade

Os italianos Gerônimo Cardano (1501 – 1576), Galileu Galilei (1564 – 1642)([Figura 2](#)), Luca Pacioli (1445 – 1517) e Niccolo Tartaglia (1499 – 1557) foram os matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento das primeiras teorias envolvendo jogos e apostas. Eles deram início aos estudos envolvendo o jogo de dados, no qual trabalharam as ideias do conjunto universo e dos eventos pertencentes a este conjunto.

Figura 2 – Galileu Galilei



Fonte: [Superinteressante](#) (2013)

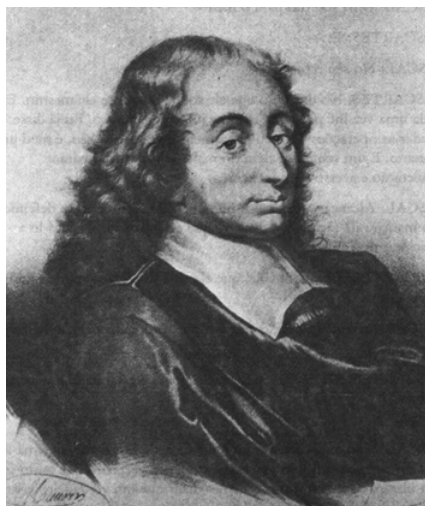
Porém foi em 1654, época do Renascimento, com o desafio que o Chevalier de Méré³, fez a Blaise Pascal([Figura 3](#)) para solucionar um problema, que futuramente ficaria conhecido como problema dos pontos, que de fato é considerado o início da Teoria das Probabilidades. O problema consistia em como dividir as apostas de um jogo de azar entre dois jogadores em uma partida que foi interrompida quando um dos dois estava vencendo. Vale destacar que o mesmo problema já havia intrigado, na época de sua formulação, 200 anos antes, o monge Luca Paccioli, que não obteve sucesso em sua resolução. Pascal solicitou ajuda a Pierre de Fermat([Figura 4](#)) e como resultado de sua colaboração, o que

³ Antoine Gombaud, denominado Chevalier de Méré (Condado de Poitou, 1607-1684), foi um nobre e jogador francês. Seu nome é relacionado ao cálculo matemático de jogos de azar. Fonte: Página da Wikipédia (Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Antoine_Gombaud>)

parecia ser uma busca trivial para solucionar um problema, levou a descoberta da teoria das probabilidades (BERNSTEIN, 1997).

Pascal escreveu a Fermat sobre isto, e a correspondência entre eles foi o ponto de partida real da moderna teoria das probabilidades, as ideias de Cardano de um século antes tendo sido esquecidas.(BOYER, 1974, p. 265).

Figura 3 – Blaise Pascal



Fonte: Brisville (1991)

Figura 4 – Pierre de Fermat



Fonte: IMPA (2017)

A solução do problema permitiu que pela primeira vez as pessoas tomassem decisões e previssem o futuro com a ajuda dos números, o que permitiu avaliar o risco e tomar decisões de modo racional.

Em 1703, Gottfried von Leibniz (Figura 5) em conversa com Jacob Bernoulli (Figura 6), disse que “a natureza estabeleceu padrões que dão origem ao retorno dos eventos, mas apenas na maior parte dos casos”, o que inspirou Bernoulli a inventar a Lei dos Grandes Números e os métodos de amostragem estatística tão aplicadas até os dias atuais. Vale ressaltar a importância da ressalva “na maior parte dos casos”, pois sem ela “tudo seria previsível, e em um mundo onde cada evento é idêntico ao anterior nenhuma mudança jamais ocorreria”. (BERNSTEIN, 1997, p. 5).

Figura 5 – Gottfried Wilhelm Leibniz



Fonte: [Wikipédia \(2017\)](#)

Figura 6 – Johann Bernoulli



Fonte: [Viana \(2019\)](#)

Praticamente 100 anos após as colaborações de Pascal e Fermat, Thomas Bayes impulsionou a estatística demonstrando como podem-se tomar melhores decisões ao associar matematicamente informações antigas com novas informações.

De acordo com [Bernstein \(1997\)](#), praticamente todas as ferramentas que atualmente são utilizadas na administração do risco e na análise de decisões, da racionalidade da Teoria dos Jogos e dos desafios da Teoria do Caos, são resultados das evoluções que ocorreram de 1654 a 1760.

O pequeno folheto de Huygens (1713), que é a primeira das quatro partes de um tratado clássico "*Ars conjectandi*", foi escrito por Jacques Bernoulli, e é considerado "o mais antigo volume substancial sobre a teoria das probabilidades, depois o *De Ratiociniis in Ludo Aleae*⁴, de Huygens, fora apenas uma breve introdução". ([BOYER, 1974](#), p. 308).

[Viali \(2008\)](#) afirma que, enquanto disciplina matemática, a Teoria das Probabilidades, surgiu das tentativas de quantificação dos riscos associados a sinistros, como naufrágios, acidentes, morte, e afins e da quantificação das possibilidades de se ganhar em jogos de azar. A palavra "azar" empregada neste contexto não é utilizada no sentido de "má sorte" e sim como sinônimo de "acaso" ([VIALI, 2008](#)).

1.3 Conceitos sobre Probabilidade

Nos tempos antigos, os instrumentos da agricultura, da indústria, da gestão empresarial e das comunicações eram relativamente simples e, apesar de apresentarem problemas frequentes, na maioria das vezes não exigiam a presença de um especialista e a falha em

⁴ Tradução: Sobre o Raciocínio em Jogos de Azar

um setor raramente impactava em outro (BERNSTEIN, 1997). Mas nos tempos atuais, de acordo o autor, tais problemas podem ser de ordem catastrófica, ocasionando consequências de longo alcance, fazendo com que seja extremamente importante e necessário estar alerta a possíveis falhas e erros.

Sem o domínio da teoria das probabilidades e de outros instrumentos de administração do risco, os engenheiros jamais teria projetado as grandes pontes que transpõe nossos rios mais largos, os lares ainda seriam aquecidos por lareiras e fogareiros, as usinas elétricas não existiriam, a poliomielite não teria sido erradicada, não haveria aviões e as viagens espaciais seriam apenas um sonho. Sem o seguro em suas muitas variedades, a morte do pai de família reduziria os filhos jovens à penúria ou caridade, a assistência medica seria negada a um número ainda maior de pessoas e somente os mais ricos conseguiriam adquirir a casa própria. Se os agricultores não pudessem vender suas safras a um preço estabelecido antes da colheita, produziriam muito menos alimentos. (BERNSTEIN, 1997, p. 2).

A probabilidade também está presente no nosso dia a dia, de forma intuitiva, ao consultarmos a previsão do tempo para saber a probabilidade de chover ou não, a probabilidade do trânsito estar congestionado, a probabilidade do nosso time ganhar um jogo, a probabilidade de passarmos em um concurso público, a probabilidade de ganharmos em jogos de loteria, entre outros. Ela possui aplicação nos estudos relacionados à estatística, economia, engenharia, física, química, jogos estratégicos, sociologia, psicologia, biologia, entre outros ramos do conhecimento. O estudo da probabilidade que começou, de forma despreziosa, como um artifício para se ganhar nos jogos, hoje pode nos ajudar a tomar decisões e a seguir caminhos específicos dentro e fora das ciências.

1.3.1 A Teoria

“A teoria das probabilidades é o ramo da matemática que cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios” (DANTE, 2011, p.308). Essa teoria desenvolveu-se nos últimos três séculos e é a base sobre a qual se assenta a Teoria Estatística, instrumento valiosíssimo nos mais variados campos de atividades, nas Ciências Exatas, Humanas e Biológicas (MACHADO, 2012).

Scheinerman (2011) destaca algumas considerações a respeito da Probabilidade:

- As probabilidades são números reais entre 0 e 1;
- Um evento com probabilidade 1 é um evento cuja ocorrência é certa, e um evento com probabilidade 0 é um evento impossível;
- As probabilidades entre 0 e 1 refletem a plausibilidade relativa entre esses dois extremos;

- Eventos improváveis têm probabilidades próximas de 0, e eventos altamente prováveis têm probabilidades próximas de 1.

Para compreender de forma eficiente a Teoria da Probabilidade, julga-se necessário compreender as definições de alguns termos usualmente utilizados nesse conteúdo. São eles:

Experimentos aleatórios (1.1)

Definição 1.1. *Considera-se experimento aleatório, todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado não se pode prever mesmo quando repetido inúmeras vezes, sob as mesmas condições, (SOUZA, 2013).*

Há certos fenômenos (ou experimentos) que, embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de uma moeda perfeita, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Não sabemos se sairá "cara" ou "coroa". Aos fenômenos (ou experimentos) desse tipo damos o nome de fenômenos aleatórios (ou casuais). (DANTE, 2011, p.308).

Por não ser possível prever com exatidão o resultado de um experimento aleatório é que se procura os resultados prováveis, as chances de um determinado resultado ocorrer.

Espaço amostral

O espaço amostral consiste em um conjunto e uma função. O conjunto é a lista de todos os resultados possíveis de um experimento, já a função atribui um valor numérico a cada resultado; esse valor numérico, chamado probabilidade do resultado, nada mais é que um número real entre 0 e 1 (inclusive). É exigido, também, que a soma das probabilidades de todos os resultados seja exatamente 1 (SCHEINERMAN, 2011).

Usualmente utiliza-se a letra S (do inglês *space*) ou a letra grega Ω (lê-se ômega) para representar o conjunto de todos os resultados, e a letra P para a função que atribui a cada $s \in S$ a probabilidade daquele resultado, $P(s)$, conforme Definição 1.2.

Na linguagem moderna, a regra de Cardano é expressa da seguinte maneira: suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual à proporção entre os resultados favoráveis e o total de resultados. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral. (...) Um comentário sobre o pressuposto de que todos os resultados são igualmente prováveis: obviamente, isso nem sempre é verdade. (MLODINOW, 2011, p. 70).

Definição 1.2. (SCHEINERMAN, 2011, p. 287) *Um espaço amostral é um par (S, P) , em que S é um conjunto não vazio, finito, e P é uma função $P: S \rightarrow \mathfrak{R}$, de modo que $P(s) \geq 0$ $\forall s \in S$ e*

$$\sum_{i=s \in S} P(s) = 1$$

Evento

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral, e geralmente representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto.

Em matemática, uma probabilidade é simplesmente um número associado a um objeto. Nas aplicações, o objeto é um evento ou ação incerta, e o número é a medida de quão frequente ou quão viável é o evento. (SCHEINERMAN, 2011, p.285)

Definição 1.3. (SCHEINERMAN, 2011, p. 291) *Seja (S, P) um espaço amostral. Um evento A é um subconjunto de S (isto é, $A \subseteq S$). A probabilidade de um evento A , denotada por $P(A)$ é:*

$$\sum_{i=a \in A} P(a)$$

Definição 1.4. (IEZZI et al., 2016, p. 255) *Seja E um evento de um espaço amostral S . Chamamos evento complementar de E , em relação a S (indica-se por E^c), o evento que ocorre quando E não ocorre:*

$$E \cup E^c = S$$

e

$$E \cap E^c = \emptyset$$

Definição 1.5. (IEZZI et al., 2016, p. 257) *Seja $S = a_1, a_2, \dots, a_k$ o espaço amostral finito de um experimento aleatório. Para cada $i \in 1, 2, \dots, k$ consideremos o evento elementar ou unitário a_i . Vamos associar a cada um desses eventos um número real, indicado por $p(a_i)$ ou simplesmente p_i , chamado probabilidade de ocorrência do evento a_i , tal que:*

$$0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in 1, 2, \dots, k$$

e

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

A probabilidade pode ser obtida por meio da frequência de ocorrências. Esta frequência, denominada frequência relativa é determinada por meio da observação do experimento aleatório considerado e correspondente a razão entre a quantidade de vezes que um evento ocorre e o total de vezes que ele é repetido.

Observando as diversas repetições do fenômeno em que ocorre a variável de interesse, podemos anotar o número de ocorrências de cada valor dessa variável. Para um número grande de realizações, a frequência relativa poderia ser usada como probabilidade. Em ciências biológicas e humanas, essa é a forma mais comum de se atribuir probabilidades. (MAGALHAES; LIMA, 2008, p. 38).

Sendo A o evento considerado, temos pelo método Frequentista, a [Equação 1.1](#):

$$P(A) = \frac{\text{numero de vezes que } A \text{ ocorreu}}{\text{numero de repeticoes do experimento}} \quad (1.1)$$

"Para Bernoulli, era perfeitamente justificado esperar que, com o aumento do número de testes, as frequências observadas refletissem - com cada vez mais precisão - as probabilidades subjacentes" (MLODINOW, 2011, p.121). Segundo o autor, Bernoulli dedicou muitos anos ao estudo do tema e escreveu o teorema que recebe o nome de Lei dos Grandes Números, que é considerado um dos resultados mais famosos da teoria da aleatoriedade. Este teorema mostra que com um elevado número de repetições de um certo evento, a sua frequência relativa converge para a probabilidade, e o erro se torna cada vez mais desprezível. "É importante perceber que a probabilidade é uma medida de Tendência, e não de certeza." (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 161).

Considera-se a associação feita na Definição 1.5 de modo que $p_i (i = 1, 2, \dots, k)$ seja suficientemente próximo da frequência relativa do evento a_i , quando o experimento é repetido um grande número de vezes.

A probabilidade também pode ser obtida, considerando um espaço amostral finito e equiprovável (todos os elementos tem a mesma chance de ocorrência) como sendo a razão entre o número de elementos do evento A e o número de elementos do espaço amostral S , como mostra a [Equação 1.2](#)

$$P(A) = \frac{\text{numero de elementos de } A}{\text{numero de elementos de } S} = \frac{P(A)}{P(S)} \quad (1.2)$$

A igualdade acima representa a método Clássico para o cálculo da probabilidade.

Sendo A^c o evento complementar de A , $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Combinação de eventos

"Eventos são subconjuntos de um espaço de probabilidades. Podemos aplicar as operações usuais da teoria dos conjuntos (por exemplo, união e intersecção) para combinar eventos" (SCHEINERMAN, 2011, p. 293).

Seja S um espaço amostral. Se A e B são dois eventos de S , $A \cup B$ também é. Pode-se considerar $A \cup B$ como o evento correspondente à ocorrência de A ou B . De modo análogo, $A \cap B$ também é um evento de S correspondente à ocorrência de A e B . Podemos

relacionar as probabilidades $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$ de acordo com o Teorema 1.1.

Teorema 1.1. *Sejam A e B eventos em um espaço amostral S . Então $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.*

Demonstração: Consideremos os dois membros da equação $P(A) + P(B)$ e $P(A \cup B) + P(A \cap B)$. Podemos desenvolver esses dois membros como somas de $P(s)$ para vários membros de S . O membro esquerdo é

$$P(A) + P(B) = \sum_{s \in A} P(s) + \sum_{s \in B} P(s)$$

e o membro direito é

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = \sum_{s \in A \cup B} P(s) + \sum_{s \in A \cap B} P(s)$$

Considere um elemento arbitrário $s \in S$. Há quatro possibilidades:

- s não está nem em A nem em B . Nesse caso, o termo $P(s)$ não comparece em nenhum dos membros da equação.
- s está em A mas não está em B . Nesse caso, $P(s)$ comparece exatamente uma vez em cada um dos membros da equação: uma vez em $P(A)$, uma vez em $P(A \cup B)$ mas não em $P(B)$ ou $P(A \cap B)$.
- s está em B mas não em A . Como anteriormente, $P(s)$ comparece exatamente uma vez em ambos os membros da equação.
- s está em A e em B . Nesse caso, $P(s)$ comparece duas vezes em cada membro da equação: uma vez em cada um, $P(A)$ e $P(B)$, e uma vez em cada um, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$.

Portanto, os dois membros da equação, $P(A) + P(B)$ e $P(A \cup B) + P(A \cap B)$, são, cada um, a soma dos mesmos termos, sendo, portanto, iguais.

Da Proposição 1, decorre a fórmula para o cálculo da união de dois eventos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Quando $A \cap B = \emptyset$, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ e dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos.

Definição 1.6. (*LIMA et al., 2006, p. 114*) *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:*

- Para todo evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$.
- $P(S) = 1$.
- Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Probabilidade condicional e independência

Denotamos por $P(A \setminus B)$ a probabilidade de ocorrência do evento A , dado que o evento B ocorreu, conforme Definição 1.7.

Definição 1.7. (SCHEINERMAN, 2011, p. 301) Sejam A e B eventos em um espaço amostral S e suponhamos $P(B) \neq 0$. A probabilidade condicional $P(A \setminus B)$, isto é, a probabilidade de A dado B , é:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas. A informação do que ocorreu em uma determinada etapa pode influenciar nas possibilidades de ocorrências das etapas sucessivas. Neste caso, dizemos que ganhamos informação e podemos "recalcular" as possibilidades de interesse. Essas probabilidades "recalculadas" recebem o nome de probabilidade condicional. (MAGALHAES; LIMA, 2008, p.41).

Se os eventos não vazios A e B de um mesmo espaço amostral são simultâneos (ou sucessivos), então, da Definição 1.7, temos: $P(A \cap B) = P(A \setminus B) \cdot P(B)$.

Se $P(A \setminus B) = P(A)$, ou seja, se fato de ter ocorrido o evento B não altera a probabilidade de ocorrer o evento A , dizemos que A e B são eventos independentes (1.8).

Definição 1.8. (SCHEINERMAN, 2011, p. 303) Sejam A e B eventos de um espaço amostral. Dizemos que esses eventos são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Em geral, sendo A_1, A_2, \dots, A_n eventos independentes, temos:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

Eventos que não são independentes são chamados dependentes.

Em suma, de acordo com Mlodinow (2011) boa parte da teoria da probabilidade é formada por três leis:

- A probabilidade que dois eventos ocorram nunca pode ser maior que a probabilidade que cada evento ocorra individualmente;

- Se dois eventos possíveis, A e B, forem independentes, a probabilidade de que A e B ocorram é igual ao produto de suas probabilidades individuais;
- Se um evento pode ter diferentes resultados possíveis, A, B, C e assim por diante, a possibilidade de que A e B ocorram é igual à soma das possibilidades individuais de A e B, e a soma das possibilidades de todos os resultados possíveis (A, B, C e assim por diante) é igual a 1 (ou seja, 100 %).

A próxima seção tem por objetivo trazer uma breve reflexão sobre as contribuições das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação para o processo de ensino e aprendizagem.

1.4 Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação

Muito se tem discutido, ao longo dos últimos anos, sobre a utilização das TDIC nas atividades pedagógicas. Como relata [Vieira \(2011\)](#), a sociedade atual vivencia um amplo processo de transformação no que diz respeito à intensificação do acesso à comunicação e informação. Diante disso a educação é uma das esferas que mais sofre com essas transformações devido às novas tecnologias de informação e comunicação, que aos poucos, estão se interligando a atividade educativa ([OLIVEIRA; MOURA; SOUZA, 2015](#)). De acordo com estes autores, a inserção do computador e da *Internet* na vida dos alunos, trouxe uma avalanche de informações. Informações estas que, por muitas vezes, escolas e professores, não estão preparados para absorver.

É inegável o fato de que esta geração já nasceu em uma sociedade tecnológica e conectada e isto não pode ser ignorado.

De acordo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua ⁵, realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, o Brasil fechou 2016 com 116 milhões de pessoas conectadas à internet, o equivalente a 64,7 % da população com idade acima de 10 anos.

A tecnologia está presente em toda parte. *Smartphones, tablets, internet*, entre outros são ferramentas que já estamos acostumados a utilizar. Diante desta realidade, ou o professor se apropria dessas ferramentas ou não vai conseguir receber um retorno significativo na comunicação com os alunos.

[Bacich e Moran \(2018\)](#) reforçam a importância da inserção das TDIC na cultura escolar, como descrito no trecho a seguir:

⁵ Disponível em: <<https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/20073-pnad-continua-tic-2016-94-2-das-pessoas-que-utilizaram-a-internet-o-fizeram>>
Acesso em: 21 de março de 2019

A tecnologia em rede e móvel e as competências digitais são componentes fundamentais de uma educação plena. Um aluno não conectado e sem domínio digital perde importantes chances de se informar, de acessar materiais muito ricos disponíveis, de se comunicar, de se tornar visível para os demais, de publicar suas ideias e de aumentar sua empregabilidade futura. (BACICH; MORAN, 2018, p. 11).

Levando-se em consideração a disponibilidade de informações e a facilidade de acesso as mesmas, é possível observar um público que chega ao ambiente escolar com repertórios que antes não chegavam. Se os alunos não são os mesmos, como os métodos podem ser? Não é cabível que as escolas fiquem no século XX recebendo alunos do século XXI.

E ao se comparar as diferenças entre as características existentes entre os alunos de hoje e os de gerações anteriores, Prensky (2001), enfatiza as mudanças provocadas pela evolução da tecnologia. O referido autor considera essa mudança tão fundamental que não há absolutamente nenhuma possibilidade de volta.

Os estudantes de hoje, do maternal à faculdade, representam as primeiras gerações que cresceram com estas novas tecnologias. Eles passaram a vida inteira cercado por e usando computadores, videogames, tocadores de música digitais, câmeras de vídeo, telefones celulares, e todos os outros brinquedos e ferramentas da era digital. . . passaram menos de 5.000 horas de suas vidas lendo, mas mais de 10.000 horas jogando videogames (não mencionar 20.000 horas assistindo TV). Jogos de computador, e-mail, Internet, telefones celulares e mensagens instantâneas são partes integrantes de sua vida. (PRENSKY, 2001, p. 1).

Neste cenário tecnológico, a nova Lei de Diretrizes e Bases (LDB) (BRASIL, 2018b) da educação nacional propõe uma prática educacional adequada à realidade do mundo, ao mercado de trabalho e à integração do conhecimento. Prática, esta, prevista nos PCN quando afirma que “conviver com todas as possibilidades que a tecnologia oferece é mais que uma necessidade, é um direito social.” (BRASIL, 2006, p. 13). Assim sendo, “a utilização efetiva das tecnologias da informação e comunicação na escola é uma condição essencial para inserção mais completa do cidadão nesta sociedade de base tecnológica” (CARVALHO, 2009, p. 5)

Vieira (2011) destaca que estamos vivendo na sociedade do conhecimento, na qual os saberes são transitórios e há necessidade de estarmos constantemente aprendendo, construindo novos conhecimentos. De acordo com a autora, o espaço educacional, em particular, apresenta uma demanda cada vez maior no sentido de se experimentar novas formas de construção e disseminação do conhecimento.

Não seria exagero afirmar que a tecnologia pode gerar uma revolução na educação. Porém pouco é analisado como todos esses elementos podem ajudar no processo de ensino. E admitindo-se a inevitabilidade de se conviver com as TDIC na educação, julga-se

necessário analisar e refletir sobre os benefícios, as mudanças e os conhecimentos indispensáveis à adequada aplicação dessas tecnologias ao aprendizado do aluno (OLIVEIRA; MOURA; SOUZA, 2015).

Com efeito, a compreensão do uso das tecnologias digitais em sala de aula é um ponto crucial, pois o entendimento e a apropriação que a educação pode e deve fazer dessas ferramentas é muito importante para os processos pedagógicos. As tecnologias digitais devem ser encaradas como um apoio. Sabe-se que uma educação de qualidade pode ser feita sem o uso das mesmas, porém, num mundo conectado em rede, seria incoerente e até mesmo um desperdício não fazer uso dessa mediação que é utilizada no nosso dia a dia.

Para Carvalho (2009), a chegada dos recursos tecnológicos nas escolas, exige dos educadores uma nova postura frente à prática pedagógica. Conhecer as novas formas de aprender, ensinar, produzir, comunicar e reconstruir conhecimento, é fundamental para a formação de cidadãos melhor qualificados para atuar e conviver na sociedade, conscientes de seu compromisso, expressando sua criatividade e transformando seu contexto (CARVALHO, 2009).

Diante desta realidade, a escola pode ser repensada, com o auxílio das TDIC, como um conjunto de espaços e tempo significativos de aprendizagem que pode começar na sala de aula e se expandir para um laboratório, uma biblioteca, até mesmo em sua própria casa. A escola será, então, um ambiente muito mais vivo, dinâmico e flexível do que é atualmente. E nesse processo de inserção das TDIC, a escola, nas palavras de Oliveira, Moura e Souza (2015), é:

Um ambiente privilegiado de interação social, mas este deve interligar-se e integrar-se aos demais espaços de conhecimento hoje existentes e incorporar os recursos tecnológicos e a comunicação, concedendo fazer as pontes entre conhecimentos e se tornando um novo elemento de cooperação e transformação (OLIVEIRA; MOURA; SOUZA, 2015, p. 83)

A tecnologia pode, então, ser vista como uma grande facilitadora de processos de conexão com todas as realidades que são importantes para aprender. Dentre as inúmeras vantagens de se utilizar as tecnologias digitais como ferramenta pedagógica, Oliveira, Moura e Souza (2015), destacam o estímulo aos alunos, a dinamização do conteúdo e desenvolvimento da autonomia e criatividade. As desvantagens, por sua vez, talvez apareçam, quando não houver organização e capacitação dos profissionais envolvidos, assim formando alunos desestimulados e sem senso crítico (OLIVEIRA; MOURA; SOUZA, 2015). Ainda em relação as vantagens que a incorporação das tecnologias digitais oferece, Bacich e Moran (2018) consideram que:

As tecnologias facilitam a aprendizagem colaborativa, entre colegas próximos e distantes. É cada vez mais importante a comunicação entre pares,

entre iguais, dos alunos entre si, trocando informações, participando de atividades em conjunto, resolvendo desafios, realizando projetos, avaliando-se mutuamente. Fora da escola acontece o mesmo, na comunicação entre grupos, nas redes sociais, que compartilham interesses, vivenciais, pesquisas, aprendizagens. A educação se horizontaliza e se expressa em múltiplas interações grupais e personalizadas (BACICH; MORAN, 2018, p. 11).

Entretanto, Bacich, Neto e Trevisani (2015) alertam que é preciso atrelar o uso das tecnologias na educação a uma reorganização dos saberes pois, “não é suficiente incluir as tecnologias na sala de aula sem, antes, repensar o papel do aluno e do professor” (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015, p.69). Neste mesmo viés, Christensen C. M. and Horn e Johnson (2008 apud BACICH; NETO; TREVISANI, 2015) chamam atenção ao fato de que não se deve utilizar a tecnologia em sala de aula sem um objetivo bem definido, e sim, inseri-la nas aulas quando ela realmente for a alternativa mais eficaz para a aprendizagem do aluno.

Com relação a utilização das TDIC, os PCN (BRASIL, 1998), relatam que fazer uso de tais recursos não significa utilizar técnicas simplesmente, e não é condição suficiente para garantir a aprendizagem dos conteúdos escolares sendo necessária, então, a criação um ambiente de aprendizagem em que os alunos possam tomar iniciativas, tenham problemas a resolver, bem como possibilidades para corrigir erros e criar soluções pessoais (BRASIL, 1998).

A partir dessa reflexão é possível concluir que o uso da informática na educação implica em novas formas de comunicar, de pensar, ensinar e aprender, colaborando assim com aqueles que estão com a aprendizagem muito aquém da esperada. E, mesmo considerando que, “(...) as tecnologias digitais trazem inúmeros problemas, desafios, distorções e dependências que devem ser parte do projeto pedagógico de aprendizagem ativa e libertadora” (BACICH; MORAN, 2018, p. 11), não se pode ignorar o fato de que, mesmo com esses problemas, “(...) é absurdo educar de costas para um mundo conectado, educar para uma vida bucólica, sustentável e progressista baseada só em tempos e encontros presenciais e atividades analógicas (que são, também, importantes)” (BACICH; MORAN, 2018, p. 11).

Vale destacar o fato de que os alunos só terão a habilidade de utilizar as tecnologias a favor da aprendizagem com a incorporação de novas práticas de ensino em conjunto com professores inovadores, incentivando o desenvolvimento do pensamento crítico diante de toda informação disponível em rede (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015).

A sala de aula invertida, modalidade adotada nesta pesquisa, explora as potencialidades das TDIC. A próxima seção traz algumas considerações sobre a Metodologia Ativa, metodologia na qual está inserida a Sala de Aula Invertida.

1.5 Metodologias Ativas

Nesta seção encontra-se a descrição da metodologia adotada nesta pesquisa.

Tendo em vista o que foi exposto anteriormente sobre a importância da das TDIC no processo de ensino e aprendizagem, faz-se necessário analisar de que forma a incorporação destas tecnologias pode acontecer de forma eficiente no ambiente escolar.

Munhoz (2015) identifica as reclamações constantes do mercado de trabalho como um dos principais fatores que deve incentivar a mudança no método tradicional, como destacado no trecho a seguir:

Há uma reclamação geral com relação ao perfil do profissional formado nos bancos escolares das universidades na atualidade. Eles não estão conectados com a realidade do mercado e necessitam, cada vez mais, de participar de programas de formação permanente e continuada que confiram ao profissional as competências e habilidades que deles o mercado deseja. (MUNHOZ, 2015, p. 24).

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), a educação na escola deverá ser vinculada ao mundo do trabalho e à prática social. Porém, é possível observar que as aulas exclusivamente expositivas entraram num modelo que não faz mais sentido nos dias atuais. Para Valente, Almeida e Geraldini (2017), um dos desafios à educação é “(. . .) o repensar sobre novas propostas educativas que superem a instrução ditada pelo livro didático, centrada no dizer do professor e na passividade do aluno”. (VALENTE; ALMEIDA; GERALDINI, 2017, p. 5).

Neste cenário, surge uma nova metodologia de ensino, denominada metodologia ativa. Valente (2018) define esta metodologia como sendo “(. . .) alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem no aprendiz, envolvendo-o na aprendizagem por descoberta, investigação ou resolução de problemas” (VALENTE, 2018, p. 27).

Para, Valente e Almeida (2012), é fácil perceber que os métodos tradicionais de ensino nos quais a transmissão de informações era centrada nos professores, só faziam sentido quando a informação não era tão acessível. Segundo Moran (2015), nos dias atuais, com o avanço da Internet, a divulgação e acessibilidade a muitos materiais, cursos, aulas, é possível aprender a qualquer hora, em qualquer lugar, e com diversas pessoas. Isso é complexo, necessário e até assustador, visto que não temos modelos prévios bem-sucedidos para aprender de forma flexível numa sociedade altamente conectada (VALENTE; ALMEIDA, 2012).

A discussão sobre metodologias ativas já existe há algumas décadas. A aprendizagem, centrada no estudante, surgiu a partir de uma série de pesquisas no campo

educacional que identificou que uma pessoa aprende melhor quando ela interage com outras, interage com seu objeto de aprendizagem e quando ela usa a linguagem.

Cabe mencionar que, de acordo com [Bacich e Moran \(2018\)](#), toda aprendizagem é ativa em um certo nível, pois exige do professor e do aluno diversos tipos de movimentações, tanto externas quanto internas, tais como motivação, seleção, interpretação, comparação, avaliação e aplicação. Além disso, os autores admitem a importância da aprendizagem por meio da transmissão, apesar de, segundo eles, está cada vez mais evidente que a “aprendizagem por questionamento e experimentação é mais relevante para uma compreensão mais ampla e profunda” ([BACICH; MORAN, 2018](#), p. 2). Ao refletir sobre o exposto, destaca-se a fala de [Moran \(2015\)](#):

A escola padronizada, que ensina e avalia a todos de forma igual e exige resultados previsíveis, ignora que a sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora ([MORAN, 2015](#), p. 16).

Tendo em vista o que foi apresentado, pode-se considerar que, nesta metodologia, a escola e os professores tentam fazer com que o aluno desenvolva sua autonomia, esteja apto a atender as necessidades reais da sociedade e a agir positivamente no mundo.

Dentre as principais características da metodologia ativa, destacamos as trazidas por [Berbel \(2011\)](#):

As metodologias ativas têm o potencial de despertar a curiosidade, à medida que os alunos se inserem na teorização e trazem elementos novos, ainda não considerados nas aulas ou na própria perspectiva do professor. Quando acatadas e analisadas as contribuições dos alunos, valorizando-as, são estimulados os sentimentos de engajamento, percepção de competência e de pertencimento, além da persistência nos estudos, entre outras ([BERBEL, 2011](#), p. 28).

Convém mencionar que com o surgimento desta metodologia, surge também um novo paradigma educacional. No paradigma tradicional a aprendizagem é centrada no professor. É um modelo instrucional, onde a aprendizagem é um processo que em tese acontece com o aluno atento a fala do professor. No modelo ativo, o aluno aprende fazendo, interagindo, construindo junto com seu objeto de estudo e com colegas.

[Diesel, Baldez e Martins \(2017\)](#) faz uma comparação entre os métodos tradicional e ativo, no trecho destacado abaixo:

Assim, em contraposição ao método tradicional, em que os estudantes possuem postura passiva de recepção de teorias, o método ativo propõe o movimento inverso, ou seja, passam a ser compreendidos como sujeitos históricos e, portanto, a assumir um papel ativo na aprendizagem, posto que têm suas experiências, saberes e opiniões valorizadas como ponto de

partida para construção do conhecimento. (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017, p. 271).

Os autores destacam ainda que a utilização das metodologias ativas de ensino propicia a constante interação entre os estudantes. A aula expositiva, onde os alunos sentam-se em carteiras individuais e na qual são “proibidos” de trocar ideias com os colegas, passa a ser um lugar que favorece momentos de discussão e trocas de ideias e informações (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017).

Ao refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem utilizando metodologias ativas, Bacich e Moran (2018) consideram que ele é fascinante a partir do momento em que são incorporados, constantemente, momentos de pesquisas, questionamentos, criação, experimentação, reflexão e compartilhamento, feitos de forma crescente e cada vez mais profunda.

A sala de aula pode ser um espaço privilegiado de cocriação, *maker*, de busca de soluções empreendedoras, em todos os níveis, onde estudantes e professores aprendam a partir de situações concretas, desafios, jogos, experiências, vivências, problemas, projetos, com os recursos que tem em mãos: materiais simples ou sofisticados, tecnologias básicas ou avançadas. O importante é estimular a criatividade de cada um, a percepção de que todos podem evoluir como pesquisadores, descobridores, realizadores; que conseguem assumir riscos, aprender com colegas, descobrir seus potenciais. Assim, o aprender se torna uma aventura permanente, uma atitude constante, um progresso crescente. (BACICH; MORAN, 2018, p. 3).

Apesar das vantagens da utilização da metodologia ativa para a formação de alunos críticos e atuantes para sociedade atual, Vignochi, Benetti e Machado (2009) consideram que o processo de mudança do ensino é complexo, uma vez que envolve a tradição das instituições, os professores e os alunos. No entanto, segundo os autores, os modelos de ensino tradicionais, que são caracterizados pela retenção de informação, com disciplinas fragmentadas e com avaliações que priorizam a memorização, tendem a determinar estudantes passivos e com dificuldades em acompanhar as necessidades de constantes atualizações.

Diante do exposto, é possível perceber que tão importante quanto entender a dinâmica da metodologia ativa é estar ciente do papel do professor neste processo. Moran (2015) define o professor como o articulador das etapas individuais e grupais. De acordo com o autor, o professor/tutor deve ser capaz de acompanhar, mediar, analisar processos, resultados, necessidades e lacunas, a partir dos caminhos traçados pelos alunos tanto individual quanto em conjunto. (MORAN, 2015).

A próxima sessão traz algumas considerações a respeito do papel do professor nesta metodologia.

1.5.1 O Papel do Professor

Tendo em vista os desafios que se apresentam no ensino atualmente, o educador, na percepção de [Munhoz \(2015\)](#), encontrará um número crescente de imperfeições no processo educacional, e caso não possa combater a todos, modificar pelo menos aqueles que estão ao seu alcance representa uma ação esperada e necessária. Neste cenário de mudança e adaptação, destaca-se como principal dificuldade, o professor abrir mão do controle do processo. Ele deve estar preparado para qualquer eventualidade. Precisa entender a lógica da aprendizagem ativa, se enxergar dentro de um novo paradigma. Entender que não é só a técnica pedagógica que ele vai utilizar, não é só a aula que ele vai planejar, mas também a forma dele se relacionar com o estudante que irá mudar. Ademais, ele precisa saber conduzir uma discussão de caso, e também uma aprendizagem baseada em projetos, em equipes, em problemas.

O professor visto como mentor ou orientador, ganha relevância pois agora seu papel é “ajudar os alunos a irem além de onde conseguiriam ir sozinhos, motivando, questionando, orientando” ([BACICH; MORAN, 2018](#), p. 4). Tal afirmação complementa as ideias de [Berbel \(2011\)](#), que diz que participação do aluno acontece no exercício do aprender fazendo, enquanto o professor fica incumbido de conduzir o processo de forma metodológica, estimulando as atividades e valorizando as iniciativas em relação ao ponto principal, que é a solução do problema em estudo.

Houve uma mudança no foco, que agora não é mais planejar o que o professor vai ensinar e sim, o que o estudante irá aprender. Porém, deve-se considerar que cada estudante aprende de uma determinada maneira e na aprendizagem ativa, o professor, não necessariamente sabe o que vai acontecer. Desta forma, para que haja uma aprendizagem significativa, ele precisa fazer uma mudança em todo modelo de trabalho pois esta postura abre espaço para o estudante trazer os seus interesses.

Cabe mencionar, ainda, que não faz sentido o professor e a escola falarem que vão adotar a metodologia ativa, mas ficar controlando todo o processo, planejando cada passo, decidindo o que vai acontecer em cada minuto da experiência do estudante. Fazendo isso, não há espaço para desenvolver sua curiosidade, sendo esta um fator fundamental para contribuição de qualquer prática autônoma.

Alguns componentes são fundamentais para o sucesso da aprendizagem, como os destacados por [Moran \(2015\)](#):

A criação de desafios, atividades, jogos que realmente trazem as competências necessárias para cada etapa, que solicitam informações pertinentes, que oferecem recompensas estimulantes, que combinam percursos pessoais com participação significativa em grupos, que se inserem em plataformas adaptativas, que reconhecem cada aluno e ao mesmo tempo aprendem com a interação, tudo isso utilizando as tecnologias adequadas. ([MORAN, 2015](#), p. 4).

Devido ao reconhecimento da importância da utilização das metodologias ativas para uma aprendizagem significativa e que atenda às necessidades da sociedade atual, diversas estratégias tem sido utilizadas para sua implantação, dentre elas destaca-se a sala de aula invertida, subcategoria do Ensino Híbrido, e modalidade utilizada nesta pesquisa.

A próxima seção traz algumas considerações sobre o Ensino Híbrido.

1.5.2 Ensino Híbrido

Na seção anterior foram apresentados os princípios mais relevantes de práticas pedagógicas fundamentadas na metodologia ativa. Visto que “(...) as metodologias ativas, num mundo conectado e digital, expressam-se por meio de ensino híbridos, com muitas possíveis combinações” (BACICH; MORAN, 2018, p. 4), será apresentado, nesta seção, algumas considerações sobre o Ensino Híbrido e suas potencialidades para o sucesso da implantação da metodologia ativa.

Iniciaremos, mencionando Bacich e Moran (2018), que afirmam que “(...) dois conceitos são especialmente poderosos para a aprendizagem hoje: aprendizagem ativa e aprendizagem híbrida” (BACICH; MORAN, 2018, p. 4). Os autores fazem algumas considerações a respeito desses dois conceitos, como destacado no trecho a seguir:

As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor; a aprendizagem híbrida destaca a flexibilidade, a mistura e compartilhamento de espaços, tempos, atividades, materiais, técnicas e tecnologias que compõe esse processo ativo. Híbrido, hoje, tem uma mediação tecnológica forte: físico-digital, móvel, ubíquo, realidade física e aumentada, que trazem inúmeras possibilidades de combinações, arranjos, itinerários, atividades. (BACICH; MORAN, 2018, p. 4).

A concepção de ensino híbrido não é recente na educação. Ela já existe há algum tempo, principalmente no ensino superior, na educação à distância. A abordagem que está sendo utilizada nesta pesquisa, tem sido desenvolvida no Brasil pelo Instituto Península em parceria com a Fundação Lemann, com estudos voltados para sua implementação também na educação básica. Tal abordagem é inspirada numa concepção que começou nos Estados Unidos – denominada *Blended* – desenvolvida pelo *Clayton Christensen Institute*. Hoje com a internet as informações estão disponíveis para qualquer pessoa em qualquer lugar. Isto leva o educador a refletir sobre as possibilidades de integração das novas tecnologias digitais ao ensino. As tecnologias chegaram como facilitadoras e potencializadoras da aprendizagem, abrindo portas para novas possibilidades.

Para avançar nesse entendimento, cabe mencionar as contribuições de Bacich, Neto e Trevisani (2015), que afirmam que a tecnologia traz atualmente a integração de todos os espaços e tempos, onde o ensinar e aprender acontecem numa interligação profunda

e constante entre mundo físico e o digital, que não são distintos, mas sim, um espaço ampliado, que se mistura constantemente. Dessa forma, pode-se concluir que educação formal é cada vez mais híbrida, porque não acontece somente no espaço físico da sala de aula, mas sim nos diversos espaços do dia a dia, incluindo os digitais (BACICH; NETO; TREVISANI, 2015).

Nesse contexto surge o Ensino Híbrido, como uma proposta de integração das tecnologias digitais ao ensino, onde o estudante aprende na escola e também fora dela, num ensino classificado como *on-line* (Figura 7).

Figura 7 – Etapas do Ensino Híbrido



Fonte: Autoria Própria

Será adotada nesta pesquisa a definição de Ensino Híbrido de Staker e Horn (2012), na qual determinam que,

Ensino híbrido é qualquer programa de educacional formal no qual um estudante aprende, pelo menos em parte, por meio do ensino *on-line*, com algum elemento de controle do estudante sobre o tempo, o lugar, o caminho e/ou o ritmo. (STAKER; HORN, 2012, p. 34).

Os autores apresentam uma segunda parte da definição onde dizem que o estudante deve aprender, pelo menos em parte, em um local físico supervisionado longe de casa, ou seja, o estudante continua a frequentar uma escola tradicional, com professores. Finalizando a definição, as modalidades, no decorrer da aprendizagem de cada estudante em um determinado curso ou conteúdo, devem estar conectadas de forma a proporcionar uma experiência de aprendizagem integrada (STAKER; HORN, 2012).

Uma importante contribuição do Ensino Híbrido é que ele permite que o professor obtenha informações individualizadas sobre o desempenho dos alunos além de ter um foco

direcionado as necessidades de aprendizado, podendo agir sobre elas com maior eficiência e rapidez, favorecendo desta forma a personalização do ensino. O método de ensino atual, onde o professor explica o mesmo conteúdo para todos, não considera que o aluno aprende de forma diferente, fazendo com que a aprendizagem não ocorra de forma efetiva para todos.

Não obstante, vale ressaltar que, tão importante quanto saber o que é o Ensino Híbrido, é saber o que não é. Em suas pesquisas, [Staker e Horn \(2012\)](#) perceberam que o equívoco mais frequente em relação ao ensino híbrido é confundi-lo com um ensino enriquecido pela utilização de tecnologia, porém a inserção de tecnologia no ambiente escolar não é, necessariamente, sinônimo de Ensino Híbrido.

O Ensino Híbrido está emergindo como uma inovação sustentada em relação a aula tradicional. Sustentada porque combina as vantagens da educação *on line* com os benefícios da aula tradicional. Porém, há algumas propostas de organização da aula consideradas disruptivas em relação as aulas tradicionais, pois não incluem a sala de aula tradicional em sua forma plena e tendem a ser mais difíceis para adotar e operar, visto que necessitam do envolvimento dos demais profissionais da escola, como coordenação e direção.

[Bacich, Neto e Trevisani \(2015\)](#) organizaram as propostas de Ensino Híbrido de acordo com a nomenclatura adota pelo *Clayton Christensen Institute*, como mostra a [Figura 8](#):

Figura 8 – Ensino Híbrido e suas Subcategorias



Fonte: Christensen, Horn e Staker (2013, p. 28)

Baseado nos estudos e nas definições de Bacich, Neto e Trevisani (2015), será feito a seguir um breve apanhado sobre cada uma destas categorias.

As categorias Rotação por Estação, Laboratório Rotacional e Sala de Aula Invertida, seguem o modelo de inovações híbridas sustentadas. Eles incorporam as principais características tanto da sala de aula tradicional quanto do ensino *online*. São considerados mais fáceis de serem implantados porque, de certa forma, sua implementação está nas mãos do professor, de um bom planejamento, sem depender de outros profissionais da escola. Já as categorias Flex, *A la Carte*, Virtual Enriquecido e Rotação Individual, se desenvolvem em um modo mais disruptivo em relação ao sistema tradicional. Eles mexem com a organização da escola tradicional e requerem mais envolvimento de outras equipes, além do professor.

A categoria Rotação é aquela, na qual, dentro de um curso ou disciplina, os alunos revezam entre modalidades de ensino em um roteiro fixo ou a critério do professor, sendo que pelo menos uma das modalidades é do ensino *on line*.

As demais categorias podem incluir tarefas como lições em pequenos grupos ou turmas completas, trabalhos em equipe, pequenos projetos, instrução individualizada e

atividades escritas. Esta categoria subdivide-se em:

- a) **Rotação por Estações:** os estudantes são organizados em grupos, e cada grupo realiza uma tarefa. É importante proporcionar atividades onde os alunos possam trabalhar tanto de forma colaborativa, quanto individualmente. As atividades não são sequenciais e são de certa forma independentes. As estações são fixas e os estudantes rotacionam por elas. Ao final da aula todos os grupos devem ter tido acesso a todas as atividades. O professor tem aqui a possibilidade de trabalhar com grupos específicos de estudantes.
- b) **Laboratório Rotacional:** neste modelo os alunos fazem um rodízio entre a sala de aula tradicional e laboratório de informática. Dentro do laboratório eles aprofundam, treinam e realizam atividades *on line*. O professor fica em sala de aula e os estudantes no laboratório, onde as atividades serão realizadas individualmente. Pretende-se, desta forma, que o estudante consiga solucionar suas dúvidas ou aprofundar seus estudos. Tais laboratórios aumentam a eficácia da aprendizagem e favorecem o aprendizado personalizado, porém não substituem as aulas tradicionais. Em alguns casos, duas turmas da mesma série ou ano podem ser envolvidas e a organização pode ser feita entre os dois professores. Observe que este modelo não depende apenas da atuação do professor podendo envolver mais profissionais da escola.
- c) **Sala de Aula Invertida:** este é um modelo reconhecido como porta de entrada para o Ensino Híbrido, sendo considerado o mais simples para dar início a sua implementação. Nele, a teoria é estudada em casa, no modo *on line*, e a sala de aula é utilizada, dentre outras propostas, para discussões e resolução de atividades. É possível aprofundar esta categoria e envolver a descoberta, a experimentação, como proposta inicial para os estudantes. Após experimentar algo, como uma atividade prática, os alunos podem levantar hipóteses e pesquisar sobre elas em casa, de forma *on line*, por meio de vídeos, simulações, leituras. Na aula seguinte, os resultados da pesquisa podem ser discutidos e a conclusão é feita por toda a turma.
- d) **Rotação Individual:** este é a primeira categoria considerada disruptiva. Há semelhanças com a Rotação por Estações, porém, neste caso, o aluno cumpre uma agenda individualizada em seu percurso pelas estações. Previamente combinado com o professor, o aluno tem um caminho a ser percorrido de acordo com suas dificuldades ou facilidades, que podem envolver todas as estações ou não. Isto irá depender das características do estudante e da forma como ele aprende melhor. Vale ressaltar que os objetivos devem estar claros e que devem corresponder ao que ele precisa atingir. Percebe-se que a avaliação para personalização é um aspecto necessariamente presente neste modelo. Vale

observar que não há uma proposta de rotação individual que ocorra durante todo o período da aula, ou como único tipo de estratégia. Ela é um recurso para personalização do ensino que não impede a realização das demais.

- e) **Modelo Flex:** nesta categoria, também considerada disruptiva, a aprendizagem *on line* é o fator principal. Assim como na Rotação Individual, os alunos tem uma agenda personalizada a ser cumprida, porém a ênfase é no ensino *on line*. Seu aprendizado pode ser direcionado de acordo com suas necessidades entre as modalidades de ensino. Os estudantes podem contar com a presença de um professor que oferece o suporte necessário que eles precisam, garantindo assim um ensino personalizado. Os alunos podem trabalhar individualmente nos computadores ou em pequenos grupos. Eles podem ter aulas em laboratórios de ensino ou trocar ideias na área social. O objetivo é que eles se movam com flexibilidade por estas propostas, focando no que precisam e quando precisam. Diferentemente da Rotação Individual, os alunos não são obrigados a passar um tempo determinado previamente por atividades específicas. Ele pode aprender por meio de uma atividade prática, ou sozinho, ou por meio de um vídeo ou leitura. Outra diferença é em relação a organização dos alunos, que não é por séries ou anos. Alunos de séries diferentes podem realizar projetos juntos. É importante que a atividade seja baseada em sua proficiência e domínio e que ao passarem grande parte do dia neste modelo, eles tenham tempo para fazerem coisas diferentes e aprofundarem seus conhecimentos, desenvolvendo e aplicando seus projetos. A ideia do estudante como agente do conhecimento é notável nesse modelo.
- f) **Modelo a la Carte:** em parceria com o professor, que determina os objetivos a serem alcançados, cada estudante fica responsável pela organização de seus estudos. A aprendizagem é personalizada e pode ocorrer em horários e locais mais convenientes a ambos. Necessariamente, pelo menos um curso é inteiramente on-line e pode ocorrer na escola ou em outros locais.
- g) **Modelo Virtual Enriquecido:** Este modelo, considerado disruptivo, requer uma reorganização da escola básica. Nele, toda escola é envolvida e, em cada disciplina, o aluno divide seu tempo entre a aprendizagem on-line e a presencial e a sua frequência na escola pode ser semanal.

Os autores destacam que não há uma hierarquia entre estas categorias e que podem ser utilizadas de forma integrada, como por exemplo, propor uma atividade de sala de aula invertida e, na aula presencial, a categoria rotação por estações. Os autores afirmam ainda que todos os professores e todas as escolas podem implementar o Ensino Híbrido, desde as que possuem recursos tecnológicos mais sofisticados as mais carentes.

Unindo os conceitos de metodologia ativa e Ensino Híbrido, expostos acima, pode-

se concluir que “a junção de metodologias ativas com modelos flexíveis e híbridos traz contribuições importantes para o desenho de soluções atuais para os aprendizes hoje” (BACICH; MORAN, 2018, p. 4).

Para que o trabalho com metodologia ativa, especificamente o Ensino Híbrido, fosse alcançado de forma plena, elegeu-se, para este trabalho de pesquisa, o modelo Sala de Aula Invertida, que será detalhado na próxima seção.

1.5.3 Sala de Aula Invertida

O modelo de sala de aula invertida que será utilizado nesta pesquisa foi inspirado no trabalho, experiências e contribuições dos autores Jonathan Bergmann ⁶ e Aaron Sams ⁷, autores do livro *Sala de Aula Invertida: Uma Metodologia Ativa de Aprendizagem*. Eles são os pioneiros e proponentes principais da prática e responsáveis pela difusão deste modelo nos dias atuais, apesar dos próprios reconhecerem que alguns professores já utilizam alguns dos princípios desta modalidade em suas aulas, porém não com vídeos como ferramenta didática. Eles relatam em seu livro suas frustrações com as dificuldades dos alunos em traduzir o conteúdo das aulas em conhecimentos úteis que os permitissem fazer corretamente a tarefa de casa. Neste cenário, Aaron observou que os alunos precisam, de fato, de sua presença física nos momentos que “empacam” e necessitam de ajuda individual e não com palestras contendo um monte de informações que eles poderiam facilmente adquirir sozinhos. Surgiu nesse momento o questionamento: “e se gravássemos todas as aulas, e se os alunos assistissem ao vídeo como ‘dever de casa’ e usássemos, então, todo o tempo em sala de aula para ajudá-los com os conceitos que não compreenderam?” (BERGMAN; SAMS, 2019, p. 4). Surge assim Sala de Aula Invertida.

Valente (2018) evidencia que esta proposta surge em um momento bem favorável do ponto de vista educacional, devido a disseminação das TDIC e ao fato de elas estarem adentrando a sala de aula.

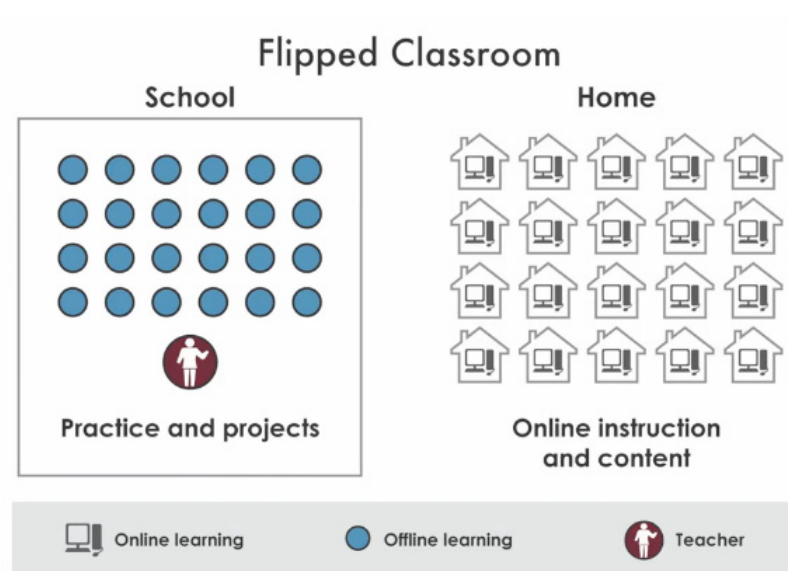
Na percepção de Moran (2015), um dos modelos mais interessantes de ensinar atualmente é o de concentrar no ambiente virtual o que é informação básica e deixar para a sala de aula as atividades mais criativas e supervisionadas, caracterizando o que chamamos de Aula Invertida. Nessa categoria, a teoria é estudada em casa, *on line*, e o espaço da sala de aula é utilizado para discussões, resolução de exercícios, atividades em grupo, realização de projetos entre outras propostas como mostra o esquema ilustrado na Figura 9. O professor pode fazer uso do tempo em sala para tirar dúvidas, aprofundar o tema e estimular discussões, como destacado no trecho a seguir:

⁶ Professor de Ciências e Líder de Facilitação em Tecnologia. Vencedor do Prêmio Presidencial por Excelência no Ensino de Matemática e Ciências em 2002.

⁷ Mestre em Educação e Professor de Ciências. Vencedor do Prêmio Presidencial por Excelência no Ensino de Matemática e Ciências em 2009.

Basicamente, o conceito de sala de aula invertida é o seguinte: o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula (BERGMAN; SAMS, 2019, p. 11)

Figura 9 – Sala de Aula Invertida



Fonte: (STAKER; HORN, 2012, p. 11)

Moran (2015) complementa a definição anterior dizendo que na sala de aula invertida, deve-se colocar o conteúdo fundamental na internet e elaborar roteiros de aula de forma que os alunos leiam antes os materiais básicos e deixem para a sala de aula, as atividades mais ricas para que possam ser realizadas sob a supervisão do professor. O autor esclarece que:

Misturando vídeos e materiais nos ambientes virtuais com atividades de aprofundamento nos espaços físicos (salas) ampliamos o conceito de sala de aula: Invertemos a lógica tradicional de que o professor ensine antes na aula e o aluno tente aplicar depois em casa o que aprendeu em aula, para que, primeiro, o aluno caminhe sozinho (vídeos, leituras, atividades) e depois em sala de aula desenvolva os conhecimentos que ainda precisa no contato com colegas e com a orientação do professor ou professores mais experientes (MORAN, 2015, p. 8)

De forma geral a rotina da sala de aula invertida é organizada de acordo com a Figura 10.

Figura 10 – Ações da Sala de Aula Invertida



Fonte: Autoria Própria

Tendo em vista a facilidade ao acesso de conteúdos e informação, o aluno irá fazer uso dele com a orientação do professor. O que ele vai aprender na próxima aula, o que ele precisa fazer para estar mais preparado, para aprender tal conteúdo melhor, fazendo com que o professor ganhe tempo aprimorando ou ensinando outros conteúdos.

Com base no explicitado, considera-se que a aula invertida, “é uma estratégia ativa e um modelo híbrido, que otimiza o tempo da aprendizagem e do professor” (BACICH; MORAN, 2018, p. 13), pois o professor não precisa ficar 50 minutos explicando a mesma matéria por diversas turmas durante o dia. Essa repetição se torna exaustiva e pouco motivadora. Agora basta que ele prepare o conteúdo, no seu melhor momento e disponibilize ao aluno para ser acessado podendo aproveitar o momento da aula para tirar dúvidas, levantar discussões, fazer simulações, projetos, jogos, etc. É mais rico e o aluno aprende mais.

Em relação aos vídeos, o professor tem a opção de produzi-los, mas também é possível que ele possa utilizar, como sugerido por Bergman e Sams (2019), vídeos produzidos por outros professores. Segundo os autores, com a explosão do *YouTube* e *sites* similares, está aumentando a cada dia quantidade de vídeos disponíveis. É, no entanto, imprescindível encontrar vídeos de qualidade, o que tem se tornado relativamente fácil devido ao crescimento exponencial dos vídeos *on line* gratuitos. (BERGMAN; SAMS, 2019).

Dentre os benefícios de utilizar os vídeos, “pausar” o professor se destaca como um recurso extremamente poderoso (BERGMAN; SAMS, 2019). Os autores relatam que os professores avançam com muita rapidez, na opinião de alguns alunos, e muito devagar na opinião de outros e quando é dado ao aluno a possibilidade de pausar o professor, é

concedida a ele a oportunidade de absorver o conteúdo no seu próprio ritmo.

A passagem abaixo evidencia o “pausar” o professor como um dos benefícios da inserção dos vídeos para o sucesso do processo de inverter a sala de aula.

Como educadores, geralmente temos um currículo a cumprir em nossos cursos. Os alunos devem dominar certo conjunto de conhecimentos, e sempre esperamos que compreendam nossas exposições. No entanto, mesmo os melhores expositores e apresentadores tem alunos que ficam pra trás e não compreendem nem apreendem todo o conteúdo. Quando invertemos a sala de aula, transferimos o controle remoto para os alunos. Conceder aos alunos a capacidade de pausar os professores é uma inovação realmente revolucionária. (BERGMAN; SAMS, 2019, p. 21).

Outra vantagem a ser considerada é a capacidade que os vídeos tem de fazer com que o aluno se concentre no que está sendo dito pelo professor e não gastem o tempo copiando o conteúdo e os comentários que o professor faz durante as aulas tradicionais (MUNHOZ, 2015).

Fazendo um comparativo entre os modelos de ensino, após os encontros presenciais é que ocorre, o que Munhoz (2015), classifica como mais lamentável no ambiente tradicional e de maior eficiência nos ambientes de salas de aula invertidas. De acordo com o autor, nos modelos de ensino tradicionais, os alunos tentam desenvolver o trabalho de casa e quando precisam, geralmente recebem o retorno as suas dúvidas com atraso, quando recebem. Ele complementa, ainda, dizendo que os professores elaboram a avaliação em cima de trabalhos entregues e que não foram discutidos em encontros presenciais. É nesse contexto que a sala de aula invertida começa a mostrar sua eficiência, pois os alunos começam a pôr em prática as competências esperadas que o conteúdo lhes possibilitava adquirir. (MUNHOZ, 2015).

Munhoz (2015) afirma que existem diversas formas de inverter uma sala de aula de modo que ela possa ser classificada como sala de aula invertida e tais formas estão relacionadas com características do público alvo. Porém algumas regras básicas, como destacadas Valente (2018), de acordo com o relatório *Flipped Classroom Field Guide*, Guia de Campo da Sala de Aula Invertida⁸, devem ser aplicadas quando deseja-se inverter a sala de aula:

- Atividades em sala de aula devem envolver uma quantidade significativa de questionamento, resolução de problemas e de outras atividades de aprendizagem ativa, obrigando o aluno a recuperar, aplicar e ampliar o material aprendido *on line*.
- Os alunos devem receber *feedback* imediatamente após a realização das atividades presenciais.

⁸ Disponível em <<https://tlc.uic.edu/files/2016/02/Flipped-Classroom-Field-Guide.pdf>> Acesso em: 15 de maio de 2019

- Os alunos devem ser incentivados a participar das atividades on-line e das presenciais, sendo que elas são computadas na avaliação formal do aluno, ou seja, valem nota.
- Tanto o material a ser utilizado *on-line* e quanto os ambientes de aprendizagem em sala de aula devem ser altamente estruturados e bem planejados.

A sala de aula invertida implementada neste trabalho seguirá o formato ilustrado na [Figura 11](#).

Figura 11 – Esquema de Sala de Aula Invertida Adotada nesta Pesquisa



Fonte: Autoria Própria

Diante do exposto, a inversão, na visão de [Andrade e Souza \(2016\)](#), é muito mais do que uma mudança nos horários e dos espaços físicos. De acordo com as autoras, trata-se de um processo de aprendizagem que se realiza de fato, de maneira diferente, com a vantagem do aluno aprender de forma mais personalizada, com autonomia para desenhar, programar seu aprendizado na valorização de suas habilidades e competências, tendo o professor como um facilitador do processo de aprendizagem. Nesse sentido, “a proposta do professor é acompanhar a evolução do aluno, orientar no sentido do aprender a aprender de modo que ele possa, sozinho, criar novos conhecimentos” ([MUNHOZ, 2015](#), p. 65)

Invertendo o modelo tradicional de aula, com os alunos acessando os vídeos e materiais básicos anteriormente, estudando-os e dando *feedback* para os professores, que pode ser feito por meio de enquetes, pequenas avaliações rápidas, corrigidas automaticamente. Os professores podem fazer uso desses resultados e verificar quais são os pontos mais importantes para trabalhar com todos ou só com alguns; que atividades podem ser feitas em grupo, em ritmos diferentes e as que podem ser feitas individualmente.

Os parágrafos acima retratam a personalização da educação. Assumindo que cada estudante é um ser único com necessidades muito distintas e que cada um aprende de uma maneira diferente, há de se concordar que a forma de ensinar não pode ser a mesma.

[Bergman e Sams \(2019\)](#) defendem que a debilidade do método tradicional consiste no fato de que nem todos os alunos chegam à sala de aula aptos para aprender. Alguns

precisam de formação adequada em relação ao material, não se interessam pelo conteúdo ou não se sentem motivados pelo atual modelo educacional (BERGMAN; SAMS, 2019). A personalização seria, então, uma proposta de solução. Porém, devemos assumir também que para um único professor, personalizar o ensino de dezenas de estudantes, não é uma tarefa simples e viável. Bergman e Sams (2019) trazem alguns questionamentos a respeito disto: “Como exatamente o professor poderia personalizar o ensino para tantas crianças?”, “Como seria possível garantir que cada aluno estivesse de fato aprendendo, quando tantos são os padrões a cobrir?” (BERGMAN; SAMS, 2019, p. 6). Os autores consideram que a personalização é opressora para a maioria dos professores que tendem a utilizar uma abordagem mais simples e imediata, ou seja, a exposição do máximo de conteúdo, no tempo disponível, para o maior número de alunos, na expectativa de que ao menos, uma parte do conteúdo seja efetivamente absorvida.

A personalização é um processo complexo, que exige maturidade e autonomia crescente dos estudantes e também docentes muito bem preparados e remunerados, bom apoio institucional e infraestrutura tecnológica. Os professores precisam descobrir quais são as motivações profundas de cada estudante, o que os mobiliza a aprender, os percursos, técnicas e tecnologias mais adequados para cada situação e combinar equilibradamente atividades individuais e grupais, presenciais e *on line*. (BACICH; MORAN, 2018, p. 6).

A aprendizagem é mais significativa, de acordo com Bacich e Moran (2018), quando o aluno é envolvido intimamente, quando encontra sentido nas tarefas propostas, quando é consultado a respeito das suas reais motivações e quando contribuem efetivamente para realização de projetos. Para tanto é necessário traçar seu perfil, conhecê-lo, acolhê-lo, aproximar-se do seu mundo, partindo de onde eles estão e ajudando-os a expandir sua percepção, aceitar desafios e conhecer outros pontos de vista (BACICH; MORAN, 2018, p. 6). Neste cenário, surge a sala de aula invertida como um sistema eficaz para capacitar professores a personalizar o ensino para cada aluno (BERGMAN; SAMS, 2019), o que, nas palavras de Valente (2018), faz com que essa abordagem esteja um passo além em termos de estratégias de ensino.

Bergman e Sams (2019) mencionam que nas aulas tradicionais, a tendência era dar mais atenção aos alunos melhores e mais brilhantes. Porém, com a inversão, os alunos que recebem mais atenção são os que apresentam maior dificuldade, mostrando mais uma vez o “quão poderoso é o novo método para atender as necessidades de cada estudante, em meio a toda diversidade” (BERGMAN; SAMS, 2019, p. 25). Neste modelo, os professores respeitam ritmos próprios de aprendizagem de cada estudante e compreendem que eles têm uma forma individual de desenvolvimento e aprendizagem e procuram conhecê-la para que possam oferecer conteúdo de acordo com tais características (MUNHOZ, 2015). Para o autor, isto não ocorre nas aulas tradicionais onde os professores consideram que todos os alunos têm uma forma padrão de aprender.

Uma característica importante da sala de aula invertida, como destaca [Munhoz \(2015\)](#), é que o seu efeito positivo continua fora da sala de aula. O autor exemplifica dizendo que alunos oriundos de salas de aula tradicional, quando iniciam suas atividades profissionais não sabem o que fazer e tentam descobrir o que precisam estudar na sequência dos trabalhos procurando, por vezes, seus professores, que quando consultados respondem com o conteúdo das aulas, que os alunos já tinham lido no material de estudo que receberam. Já os alunos oriundos de salas de aula invertidas, quando surge alguma dúvida, demonstram autonomia para buscar ajuda sobre o que precisam em locais onde sabem que encontrarão resposta ([MUNHOZ, 2015](#)). O autor complementa dizendo que estes últimos, se tornam solucionadores de problemas, algo que o mercado atual espera de seus profissionais. Vale destacar que o professor não abandona os seus alunos e sim continuam o processo de orientação para que eles possam ter uma compreensão mais aprofundada sobre o que foi aprendido ([MUNHOZ, 2015](#)).

Deve-se considerar, no entanto, de acordo com [Andrade e Souza \(2016\)](#), que este modelo determina uma alteração na função dos professores, que precisam modificar sua postura de transmissores do conhecimento em favor de uma maior contribuição colaborativa e cooperativa. Essa mudança deve acontecer também com os alunos, que saem de participantes passivos da instrução, que é oferecida a eles, para participantes ativos ([ANDRADE; SOUZA, 2016](#)).

Antes de adotar esta categoria, o professor deve estar ciente “que terá um trabalho mais extenso e estafante do que aquele desenvolvido no ambiente tradicional” ([MUNHOZ, 2015](#), p. 34). Entende-se que a preparação do ambiente, o acompanhamento individual ao aluno e a participação em um ambiente diferenciado no qual os resultados, por serem inesperados, geram uma atmosfera de maior desgaste para o docente ([MUNHOZ, 2015](#)).

Diante desta perspectiva, considera-se que papel do professor é mais complexo que o de transmitir informações e é necessária uma preparação em competências em maior escala, além do domínio do conteúdo, tais como a capacidade de adaptação ao aluno e aos grupos, além do planejamento e execução de atividades significativas e diferenciadas ([BACICH; MORAN, 2018](#)).

Por fim, [Bacich e Moran \(2018\)](#) destacam algumas condições para o sucesso da aula invertida:

A mudança cultural de professores, alunos e pais para aceitar a nova proposta; a escolha de bons materiais, vídeos e atividades para uma aprendizagem preliminar; e um bom acompanhamento do ritmo de cada aluno, para desenhar as técnicas mais adequadas nos momentos presenciais ([BACICH; MORAN, 2018](#), p. 15).

A avaliação neste modelo de ensino será discutida a seguir.

1.5.4 Avaliação

De acordo com o PCNEM (BRASIL, 2002) a avaliação, em todos os seus sentidos, é uma questão que deve ser discutida quando se concebem transformações nas metas e nos métodos educativos, devendo ser contempladas nesta discussão tanto a avaliação de desempenho dos alunos, quanto a avaliação do processo de ensino.

A forma de avaliação é uma dúvida comum em relação à metodologia ativa. No modelo tradicional, há uma prova escrita, geralmente aplicada ao fim de um período de conteúdo. Porém a prova é um modelo de avaliação limitado e muito pontual. O modelo ativo trabalha a avaliação formativa onde o aluno é avaliado durante todo o processo e não no fim. Todas as interações que o professor tem com o estudante podem promover recursos e gerar motivos para avaliação. Acredita-se que dessa forma eles são avaliados de forma mais justa.

Essa avaliação constante está prevista na Lei de Diretrizes e Bases, como descrito no primeiro item do inciso V do Art. 24 da LDB (BRASIL, 2018b) “A verificação do rendimento escolar observará os seguintes critérios: a) avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais” (BRASIL, 2018b)

Para os PCNEM (BRASIL, 2002), avaliar de acordo com os critérios acima é uma das mais complexas tarefas do professor.

Quando o professor deseja que cada um dos seus alunos se desenvolva da melhor maneira e saiba expressar suas competências, avaliar é mais do que aferir resultados finais ou definir sucesso e fracasso, pois significa acompanhar o processo de aprendizagem e os progressos de cada aluno, percebendo dificuldades e procurando contorná-las ou superá-las continuamente. Essa avaliação deve ter um sentido formativo e ser parte permanente da interação entre professor e aluno. (BRASIL, 2002, p. 136)

Em relação ao método tradicional de avaliação onde a aprendizagem é mensurada de forma quantitativa, Munhoz (2015) faz uma interessante observação ao destacar que não é incomum que alunos com elevado desempenho escolar, não obtenham sucesso no mercado de trabalho, já o contrário pode ser verdade, ou seja, alunos com baixo desempenho podem apresentar elevado sucesso. Para o autor, “isto ocorre devido ao erro no enfoque da avaliação, quando ela se restringe a avaliar capacidade de retenção de conteúdo, ao invés da capacidade de solucionar problemas” (MUNHOZ, 2015, p. 81).

Visando uma avaliação justa e formativa aos alunos, no âmbito das metodologias ativas,

A avaliação não mais vai se preocupar em tornar positivos índices de verificação de permanência e progresso de alunos, mas realmente mensurar o grau de evolução em relação a um estado inicial. É na percepção de saltos

quânticos nesta situação que está o verdadeiro processo de avaliação, não mais como punição, mas como recompensa ao trabalho desenvolvido pelo aluno. (MUNHOZ, 2015, p. 14).

Nesta pesquisa o comprometimento e a participação dos alunos, os questionários individuais e as atividades em grupo foram utilizadas pela pesquisadora como avaliação da aprendizagem, seguindo o exposto nos PCNEM (BRASIL, 2002) que destacam que o professor deve adaptar os procedimentos de avaliação do processo à medida que os conteúdos vão sendo desenvolvidos, acompanhando e valorizando todas as atividades dos discentes, como os trabalhos individuais e coletivos, a participação espontânea ou mediada pelo professor, o espírito de cooperação, e até mesmo a pontualidade e a assiduidade. Os “trabalhos coletivos são especialmente apropriados para a participação do aluno na avaliação, desenvolvendo uma competência essencial à vida que é a capacidade de avaliar e julgar”. (BRASIL, 2002, p. 137).

1.5.5 Trabalhos Correlatos

Buscando aprimorar este trabalho, cujo foco principal é a implementação da Sala de Aula invertida, foi realizada uma pesquisa na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e no Banco de Dissertações do PROFMAT, em busca de trabalhos com temas afins. Foi realizada uma busca utilizando as palavras-chave: Sala de Aula Invertida, e ela aparece como modalidade principal num total de 20 trabalhos. Dentre estes, filtrou-se os da área de matemática, resultando em apenas 5 trabalhos, como mostra a Quadro 1:

Quadro 1 – Trabalhos sobre Sala de Aula Invertida - Dados da BDTD/PROFMAT

Título	Instituição	Ano	Tipo	Autor
Possibilidades e limites de uma intervenção pedagógica pautada na metodologia da sala de aula invertida para os anos finais do ensino fundamental	UTFPR	2017	Dissertação	Braian Lucas Camargo Almeida
Sala de Aula Invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática	UFJF	2017	Dissertação	Hugo Luiz Gonzaga Honório
Sala de aula invertida: uma proposta de ensino e aprendizagem em matemática	UnB	2018	Dissertação	Vinícius Costa Matos
Uma proposta de aplicação das fórmulas de Moivre para Potenciação e radiciação de números complexos por meio da sala invertida	UFAM	2018	Dissertação	Hermínio Edson Maia Santana
Ensino da matemática na perspectiva das metodologias Ativas: um estudo sobre a “sala de aula invertida”	UFAM	2018	Dissertação	Rosilei Cardoso Moreira

Fonte – Atria Própria

Os trabalhos discutem e/ou aplicam a implementação da Sala de Aula Invertida e todos sinalizam que a modalidade proposta é capaz de contribuir de forma significativa para o processo de ensino aprendizagem dos sujeitos envolvidos. Dentre os trabalhos citados, destacamos:

Possibilidades e limites de uma intervenção pedagógica pautada na metodologia da sala de aula invertida para os anos finais do ensino fundamental

O trabalho do autor Braian Lucas Camargo Almeida, teve por objetivo elaborar uma proposta de aplicação para duas turmas do 8º ano do Ensino Fundamental, de uma escola particular, com foco nos conteúdos: equações; desigualdades e inequações; equações do 1º grau com duas incógnitas e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas baseada na teoria da Sala de Aula Invertida (ALMEIDA, 2017).

Em sua pesquisa, o autor destaca a “a escassez de trabalhos relacionados a Sala

de Aula Invertida, a nível nacional, principalmente no ensino de Matemática no Ensino Fundamental e Médio” (ALMEIDA, 2017, p. 7) e buscou analisar, a partir da proposta desenvolvida e por meio da análise das percepções dos pais, dos alunos, da equipe pedagógica e do próprio pesquisador, as possibilidades e os limites do uso da Sala de Aula Invertida e verificar se a mesma pode colaborar para o ensino e aprendizagem dos alunos na disciplina.

A pesquisa é classificada como qualitativa aplicada por meio de pesquisa-ação. Para o autor, uma das principais contribuições da pesquisa foi a elaboração da Proposta de Aplicação da Sala de Aula Invertida, e a análise dos dados extraídos a partir de sua aplicação. Ele destaca alguns pontos positivos como a participação dos alunos, a aprendizagem colaborativa e melhor compreensão dos conteúdos, fazendo uma ressalva para a falta de maturidade de alguns alunos, o curto tempo de aula para algumas etapas da aplicação e a inadaptação dos alunos em relação aos trabalhos online propostos (ALMEIDA, 2017).

A semelhança com este trabalho se dá pela aplicação da proposta Sala de Aula invertida, mas difere nos objetivos, na aplicação da sequência didática, no tema e no público alvo.

Sala de Aula Invertida: Uma Abordagem Colaborativa na Aprendizagem de Matemática

A dissertação intitulada “Sala de Aula Invertida: Uma Abordagem Colaborativa na Aprendizagem de Matemática” de autoria de Hugo Luiz Gonzaga Honório teve por objetivo elaborar e avaliar um “Processo” voltado para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo, aplicado em uma turma de 9º ano do ensino Fundamental de uma escola particular, utilizando, para isto, a modalidade Sala de Aula Invertida com os elementos de colaboração, onde buscou investigar e analisar as características que contribuam com o desenvolvimento da proposta (HONORIO, 2017). O autor produziu os próprios vídeos e disponibilizou aos alunos em um ambiente virtual de aprendizagem (AVA), onde foram disponibilizadas também, atividades e avaliações que eram realizadas *on line*, além de contar com um fórum de discussão.

Este trabalho é fundamentado na metodologia de pesquisa de cunho qualitativo realizado por meio de estudo de caso.

Em linhas gerais, pode-se perceber que a modalidade sala de aula invertida teve uma boa aceitação por parte dos alunos a apropriação dos elementos de colaboração tornou-os mais independentes do professor tanto nos momentos *on line* quanto nos momentos presenciais (HONORIO, 2017). Para o autor, os serviços de coordenação e comunicação (AVA) foram os principais motivadores ao acesso às videoaulas e avaliações por parte dos alunos.

Pode-se afirmar que essa pesquisa se assemelha com este trabalho pela modalidade

utilizada e pelas atividades presenciais serem realizadas em grupo, mas difere na sequência didática, no conteúdo abordado e no público alvo.

Ensino da Matemática na Perspectiva das Metodologias Ativas: um Estudo sobre a “Sala de Aula Invertida”

Outro trabalho destacado é “Ensino da matemática na perspectiva das metodologias Ativas: um estudo sobre a ‘sala de aula invertida’”, cujo objetivo foi elaborar uma proposta para ser aplicada para o curso de Nivelamento/2018 promovido pelo Departamento de Matemática contando com alunos de todo o Instituto de Ciências Exatas (ICE) da Universidade Federal do Amazonas (UFAM) no primeiro semestre de 2018. A disciplina conta com um professor titular que, juntamente com a pesquisadora e dois monitores, planejaram e organizaram os conteúdos que seriam aplicados bem como os recursos disponíveis na plataforma que seria utilizada.

As atividades virtuais foram ambientadas na Plataforma *Moodle* de onde foram utilizados os recursos: aulas em vídeo e *slides*, textos teóricos, questionários avaliativos, avaliações diagnósticas e formulário de pesquisa. Havia 105 alunos matriculados no curso, dos quais 52 participaram ativamente das atividades propostas.

Todo o material teórico e atividades, inclusive avaliativas, foram disponibilizadas na plataforma, ficando os momentos presenciais reservados para solucionar as dúvidas.

De acordo com dados levantados na pesquisa, os alunos tiveram boa receptividade com a metodologia empregada, avaliando-a de forma positiva. A autora considera como uma característica positiva da sala invertida a “possibilidade de utilização de ferramentas tecnológicas para simular situações matemáticas que nas metodologias de ensino tradicionais são abstratas, bem como a precisão de gráficos e figuras apoiados ao uso de softwares matemáticos” (MOREIRA, 2018, p. 47).

Diante do exposto conclui-se que algumas ideias se alinham com as que serão desenvolvidas nesse trabalho, porém as pesquisas diferem-se pela abordagem da modalidade sala de invertida, pelo ambiente de aprendizagem, pela proposta didática, pelo tema e pelo público alvo.

Capítulo 2

Aspectos Metodológicos

Neste capítulo é relatado a maneira como foi realizada a pesquisa, considerando o cenário, os sujeitos envolvidos na investigação e os instrumentos de coleta de dados.

Entende-se como Pesquisa, “(. . .) um conjunto de ações com o propósito de se investigar, analisar e (criticamente) avaliar determinada questão em dada área do conhecimento” (MOTTA-ROTH; HENDGES, 2010, p. 2).

Buscou-se com essa pesquisa investigar como a modalidade de ensino denominada Ensino Híbrido, em particular a Sala de aula Invertida, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos iniciais de Probabilidade para os alunos da 3ª série do Ensino Médio sendo esta estruturada levando-se em consideração as etapas definidas por Motta-Roth e Hendges (2010) que são:

- levantamento de perguntas, hipóteses ou problemas;
- coleta de dados;
- análise e interpretação desses dados.

O propósito desta pesquisa foi realizar um estudo exploratório, utilizando uma abordagem qualitativa, por meio de intervenção pedagógica.

Segundo Gil (2002), o objetivo das pesquisas exploratórias é, além de proporcionar ou construir hipóteses, favorecer o aprimoramento de ideias ou a descoberta de intuições. Sendo assim, o autor reforça que seu planejamento é bastante flexível, possibilitando desta forma a consideração dos diversos aspectos relativos ao fato estudado.

De acordo com Martins (2004), a flexibilidade, principalmente no que diz respeito às técnicas de coleta de dados, utilizando-se aquelas mais adequadas à observação que está sendo feita, é uma característica que constitui a marca dos métodos qualitativos. “O processo e seu significado são os focos principais de abordagens” (SILVA; MENEZES, 2001, p.20).

Em relação as intervenções pedagógicas, na concepção de [Damiani et al. \(2013\)](#), elas são investigações que envolvem o planejamento e a implementação de interferências, sejam elas mudanças ou inovações, que estejam destinadas a promover avanços e/ou melhorias, nos processos de aprendizagem dos sujeitos envolvidos, bem como a avaliação dos efeitos dessas interferências. Os autores complementam ainda que, devido ao seu caráter aplicado, intervenções pedagógicas podem ser consideradas como pesquisas, pois objetivam desta forma, contribuir para a solução de problemas práticos.

No que diz respeito a coleta de dados, [Marconi e Lakatos \(2003\)](#) afirmam que é nesta etapa da pesquisa que se iniciam a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas e que os procedimentos adotados para a sua realização podem variar de acordo com as circunstâncias ou com o tipo de investigação. Os instrumentos de coleta de dados utilizados nessa pesquisa são questionário, observação e atividades individuais e em grupo.

[Gil \(2002\)](#) destaca que uma das vantagens da utilização de questionários, é que ele constitui o meio mais rápido para se obter informações, além de não necessitar de pessoas especializadas e garantir o anonimato. Outra vantagem, de acordo com [Nascimento e Lassance \(2004\)](#), é o direcionamento das respostas e a obtenção imediata dos dados.

A observação, de acordo com [Marconi e Lakatos \(2003\)](#), não se baseia somente em ver e ouvir, mas também em investigar fatos ou fenômenos que se desejam estudar. A observação permite, segundo os autores, que o pesquisador identifique e obtenha provas a respeito de objetivos sobre os quais os sujeitos não percebem, mas influenciam seu comportamento.

Por fim, as respostas às atividades propostas individuais e grupais fornecerão dados para o aprofundamento da análise.

2.1 A Escola

A experimentação das atividades ocorreu no Colégio Estadual Doutor Olímpio Saturnino de Brito localizado na Rua Doralice Rangel Felizardo, 23, Degredo, na cidade de São João da Barra, Estado do Rio de Janeiro. A escola está situada na zona rural e apesar de ter transporte público, este não atende a maioria dos alunos, que utilizam recursos próprios para chegar a escola, como motos ou bicicletas.

A estrutura física do colégio é bastante comprometida apresentando diversos problemas de infraestrutura e os recursos pedagógicos são escassos. Não há um espaço reservado para a biblioteca e nem laboratório de informática. Os alunos não têm acesso a computadores na escola. O único recurso digital disponível é um televisor de 43 polegadas. O colégio atende somente ao Ensino Médio Regular e funciona em dois turnos, matutino e

noturno, num total de 63 alunos, distribuídos em 6 turmas.

Este estabelecimento de ensino foi escolhido por ser local de trabalho da pesquisadora.

2.2 Os Alunos

A turma escolhida para experimentação das atividades foi a 3001, pertencente à terceira série do turno da manhã. A turma possui 12 alunos, todos frequentando regularmente. O critério de escolha foi o comprometimento dos alunos da turma, característica considerada fundamental para o bom aproveitamento das atividades desta pesquisa.

A maioria dos alunos é oriunda de famílias carentes e, apesar de, por vezes, apresentarem sinais de desinteresse, são solícitos e prestativos.

Como a experimentação ocorreria no segundo bimestre do ano letivo, e as atividades propostas deveriam contemplar o currículo da Secretaria do Estado de Educação do Rio de Janeiro, foi definido o tema Probabilidade. Não era necessário que os alunos tivessem conhecimentos prévios sobre o conteúdo.

A experimentação ocorreu durante o horário da aula de Matemática da turma, que conta com 5 horas-aula semanais.

2.3 Etapas da Pesquisa

Buscando verificar como a modalidade de ensino denominada Ensino Híbrido, em particular a Sala de aula Invertida, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos iniciais de Probabilidade para os alunos da 3ª série do Ensino Médio, dividiu-se o trabalho em oito etapas:

- Revisão bibliográfica sobre TDIC, Metodologias Ativas e Ensino Híbrido em literaturas especializadas nos assuntos;
- Revisão bibliográfica de Probabilidade em literaturas especializadas nos assuntos;
- Elaboração da sequência didática;
- Pesquisa e seleção das videoaulas sobre Probabilidade;
- Seleção do jogo;
- Elaboração do questionário para coleta de dados;
- Experimentação da proposta com alunos da 3ª série do ensino médio;

- Análise dos dados levantados na experimentação.

A pesquisa foi iniciada com um levantamento bibliográfico sobre as Metodologias Ativas e suas modalidades de ensino. Os resultados deste levantamento encontram-se no Capítulo 1: Aporte Teórico. A partir desta revisão, optou-se pela Sala de Aula Invertida, por considerá-la uma forma de incentivar uma postura autônoma dos alunos em relação à construção dos seus conhecimentos.

Dando continuidade ao estudo, foi iniciada uma leitura dos documentos curriculares oficiais, com a finalidade de verificar as orientações para o ensino de Probabilidade para alunos do Ensino Médio. Além da análise dos documentos, foi realizada uma revisão da literatura em livros e artigos da área com o objetivo de analisar como tal conteúdo é abordado por eles. Os resultados dessas revisões inspiraram a elaboração da Sequência Didática que está detalhada na subseção a seguir.

2.4 Sequência Didática

Após selecionado o tema e a modalidade de ensino, iniciou-se a elaboração da sequência didática.

Nesta etapa, realizou-se uma pesquisa no *YouTube*¹ sobre videoaulas que auxiliassem no ensino e aprendizagem da Probabilidade e foram elaboradas as atividades que seriam realizadas nas aulas presenciais. Destaca-se que, para elaboração das mesmas, a ausência de recursos tecnológicos da foi um fator determinante.

As atividades foram planejadas para serem feitas em duas etapas: individual, chamada nesta pesquisa de Teste para Verificação da Aprendizagem, e em grupo. Para os Testes, privilegiou-se questões de fixação do conteúdo abordado na videoaula, deixando as atividades mais complexas para serem realizadas em grupo.

Para a pesquisa e seleção do jogo, buscou-se por aquele que contemplasse o conteúdo abordado e utilizasse materiais manipuláveis, visto que a escola não possui laboratório de informática, ficando desta forma inviável a utilização de jogos que necessitassem de algum recurso digital.

As atividades deste trabalho foram utilizadas como instrumentos avaliativos da disciplina, já que eram sobre o conteúdo a ser abordado no bimestre letivo. Vale ressaltar que o fato de a professora da turma também ser a pesquisadora deste trabalho não influenciou o resultado da pesquisa.

Por fim, foi elaborado um questionário para ser aplicado aos alunos ao final da experimentação. Sua finalidade foi coletar informações a respeito da opinião dos alunos em

¹ *YouTube* é uma plataforma de compartilhamento de vídeos. Disponível em: <www.youtube.com.br>

relação a nova modalidade de ensino e a aprendizagem do tema proposto.

A primeira etapa da Sequência Didática consistiu na organização de uma apresentação, em *slide*, que apresentasse a proposta da Sala de Aula Invertida aos alunos, bem como algumas sugestões que eles poderiam adotar para o sucesso da aprendizagem.

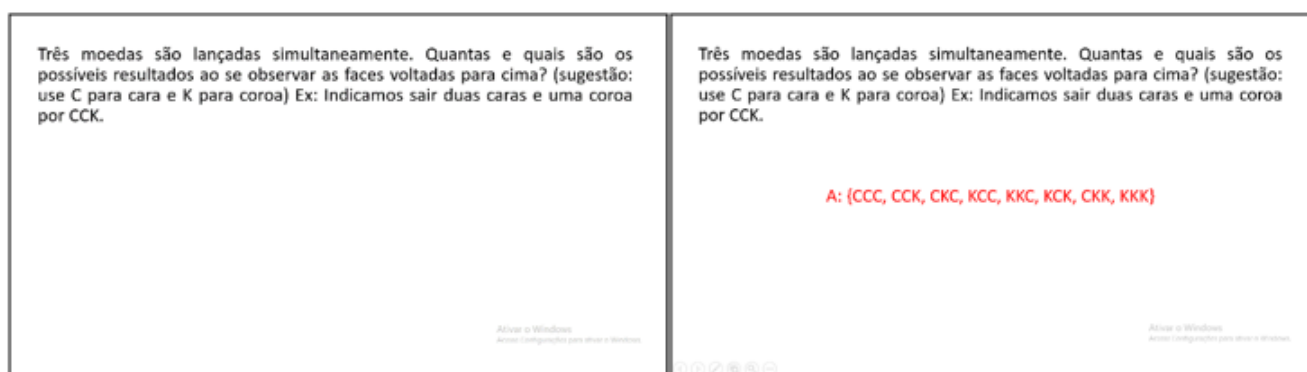
O ensino do tema proposto foi dividido em quatro partes:

- Conceitos Básicos (experimento aleatório, evento e espaço amostral);
- Definição e cálculo da Probabilidade;
- Probabilidade da união de dois eventos;
- Probabilidade Condicional e Produto de Probabilidades.

O ensino de cada uma destas partes ocorreu em dois momentos: momento *on line* e momento presencial. No momento *on line*, eles assistiram as videoaulas indicadas pela pesquisadora, que também sugeriu, como leitura optativa, páginas do livro didático² adotado pela escola que abordava a parte do conteúdo selecionado para aquela aula.

O momento presencial foi dividido em três partes: na primeira, foram discutidas as dúvidas relativas a videoaula. A seguir foi iniciado o teste para verificação da aprendizagem, resolvido individualmente. O mesmo foi composto por questões de fixação e apresentado em *slide*, numa TV de 43 polegadas, onde os alunos, dispostos em semicírculo, resolveram e ditaram suas respostas. As questões foram mostradas uma por vez e após todos a solucionarem, a resposta era apresentada, conforme [Figura 12](#):

Figura 12 – Modelo de questão do Teste para verificação da aprendizagem



Fonte: Dados da pesquisa

Optou-se por realizar os testes desta forma, seguindo as orientações da segunda regra básica para inverter a sala de aula, de acordo com o relatório *Flipped Classroom Field*

² IEZZI *et al.* **Matemática ciência e aplicações**, volume único. Saraiva, 2016

Guide apud (VALENTE, 2018, p. 30) e, também de Bacich e Moran (2018) que afirmam que o importante na sala de aula invertida é engajar os alunos em questionamentos e resolução de problemas ampliando e aplicando o que foi aprendido *on line* fornecendo-lhes *feedback* imediatamente.

Para a terceira parte, eles foram divididos em grupo e resolveram as atividades mais complexas ou contextualizadas. A turma foi dividida em três grupos que permaneceram com a mesma composição até o final da experimentação.

Para encerrar a Sequência Didática, foi selecionado um jogo sobre Probabilidade e uma Atividade Avaliativa, individual, com questões objetivas retiradas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O Quadro 2 apresenta o cronograma da aplicação da sequência didática:

Quadro 2 – Cronograma das Atividades

Data	Ação	Duração
12/03/2019	Palestra sobre a SAI; Criação do grupo no WhatsApp e envio do link da videoaula relativo a aula 1	1hora/aula
14/03/2019	Aula presencial 1 – Probabilidade: conceitos básicos, e envio do link da videoaula relativo à aula 2	2horas/aula
19/03/2019	Aula presencial 2 – Cálculo da Probabilidade, e envio do link da videoaula relativo à aula 3	3horas/aula
22/03/2019	Aula presencial 3 – Probabilidade da União, e envio do link da videoaula relativo à aula 4	2horas/aula
26/03/2019	Aula presencial 4 – Probabilidade Condicional	3horas/aula
28/03/2019	Aplicação do Jogo	2horas/aula
02/04/2019	Aula Presencial 5 – Atividade Avaliativa	2horas/aula

Fonte – Autria Própria

Nas subseções a seguir estão detalhadas cada etapa da elaboração da Sequência Didática.

2.4.1 Seleção das Vídeos Aulas

Neste trabalho, optou-se por utilizar videoaulas produzidos por terceiros. De acordo com Bergman e Sams (2019), em vez de produzir os próprios vídeos, fazer uso de vídeos produzidos por outros professores pode ser a melhor opção para quem está no início do processo de inversão da sala de aula.

Para a seleção das videoaulas foram estabelecidos alguns critérios de escolha, tais como: o conteúdo não possuir nenhum erro conceitual, ter foco definido e uma apresentação clara e organizada, que fosse apresentada em uma linguagem considerada de fácil compreensão e que tivessem um curto período de duração, de forma que não se tornassem cansativas, desmotivando assim, os alunos. Foi realizada uma pesquisa no *YouTube* sobre as videoaulas mais adequadas para as atividades propostas e que atendessem aos critérios citados acima.

Todas as videoaulas foram selecionadas de um canal chamado Equaciona Matemática³ do professor Paulo Pereira⁴. Além das videoaulas, foi selecionado um vídeo sobre a parte histórica da Probabilidade de um canal, também do *YouTube*, chamado Preparação Digital⁵. Decidiu-se pela inclusão deste vídeo pois considera-se que o contexto histórico tem um papel muito importante na aprendizagem de todas as disciplinas sendo possível perceber que o conhecimento do cenário da época motiva os alunos e destaca a relevância do tema estudado.

O Vídeo da Parte Histórica⁶ (Figura 13) se chama História da Matemática, Probabilidade e Combinação e tem duração de 10 min 48 s. Seu objetivo é apresentar as origens da Teoria das Probabilidades onde, em um cenário fictício, os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat, se encontram disputando um jogo de cara ou coroa. Porém, antes do término do jogo, o sono toma conta de Fermat e surge a pergunta: "*como dividir o prêmio?*". Eles iniciam então uma interessante discussão sobre essa questão, que ficou conhecida posteriormente como o problema dos pontos.

³ Disponível em: <<https://www.youtube.com/channel/UCZLyNRqqp2MeFuwuZdbGDJw>>

⁴ Mestre em matemática pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. Atua como professor de Ensino Fundamental Pré Militar e Ensino Médio com preparação para o vestibular. Gestor de um canal Educacional de Matemática no *Youtube* com mais de 370 mil inscritos

⁵ Disponível em: <<https://www.youtube.com/user/PreparacaoDigital>>

⁶ Autoria: Prof. Ms. Leonardo Barichello e Roteiro: Fernando Martins Collaço

Figura 13 – Vídeo Parte Histórica

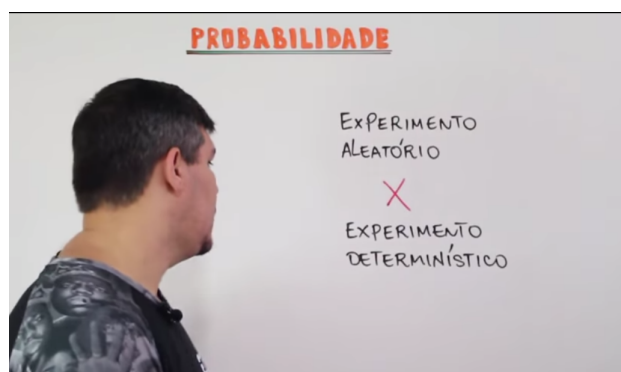
**História da matemática, Probabilidade e Combinação**

13.297 visualizações

Fonte: Canal Preparação Digital

A primeira videoaula, Probabilidade: Conceitos básicos (Figura 14), com duração de 13 minutos, teve como objetivo mostrar aos alunos os conceitos iniciais de Probabilidade. Ela traz a definição de experimentos determinísticos e aleatórios, espaço amostral e evento. Define, também, a Probabilidade como um valor entre zero e 1, além do evento certo e evento impossível.

Figura 14 – Videoaula Probabilidade: Conceitos Básicos

**PROBABILIDADE: CONCEITOS BÁSICOS**

427.223 visualizações

Fonte: Canal Equaciona Matemática

A segunda e a terceira videoaulas são, Cálculo de probabilidades⁷ com 9 min 30 s e Probabilidades: Exercícios #1⁸ com 9 min 50 s, respectivamente. Na aula Cálculo de

⁷ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=_AaYS_kTvps&t=20s> Acesso em: 18 de janeiro de 2019

⁸ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=U99Rensi0as&t=484s>> Acesso em: 18 de janeiro de 2019

Probabilidades é definido a fórmula para o cálculo de Probabilidade em espaços amostrais equiprováveis e a sua aplicação em alguns exemplos. O vídeo Probabilidades: Exercícios #1 é um complemento da aula anterior, no qual são resolvidos alguns exercícios clássicos sobre probabilidade.

A quarta videoaula, chamada Probabilidade da união de dois eventos⁹, teve duração de 13 min. Nela, é explicado como utilizar a fórmula da Probabilidade da união de dois eventos. A dedução da fórmula acontece por meio de diagrama para representar a união de dois conjuntos. Fala-se também sobre a presença do conectivo “ou” na identificação dos casos onde deve-se utilizar a união de eventos.

A quinta e sexta videoaulas são, respectivamente, Probabilidade Condicional¹⁰ com 8 min 4s minutos e Produto de probabilidades¹¹, com 12 min 50 s. A primeira, mostra a fórmula para o cálculo da probabilidade condicional e traz conceitos sobre a dependência eventos. É reforçado nesta aula que apesar de ser importante o domínio dessa fórmula, ela pode ser dispensada na maioria dos exercícios, podendo estes, serem resolvidos fazendo a redução do espaço amostral. O segundo vídeo complementa o anterior falando sobre a independência de eventos e mostra como calcular a probabilidade de eventos simultâneos. Ele destaca presença do conectivo “e” na identificação dos casos onde deve-se utilizar o produto das probabilidades.

2.4.2 Atividades Presenciais

Após a seleção das videoaulas, foi iniciada a elaboração das atividades presenciais que consistiram em Testes para verificação da Aprendizagem e Atividades em Grupo. Ambas atividades têm por objetivo desenvolver o raciocínio, a capacidade de resolução de problemas e de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo de acordo com as orientações do PCN (BRASIL, 2002).

As atividades aqui descritas, buscam fornecer sugestões para o estudo de Probabilidade, além de auxiliar no desenvolvimento de habilidades pessoais, como desenvolvimento da autonomia, comprometimento e responsabilidade visto que o estudante é responsável pela sua aprendizagem, no local e horário determinados por ele. Outra habilidade que merece destaque é a capacidade de trabalhar em grupo, característica fundamental para as exigências atuais do mercado de trabalho. Saber trabalhar em grupo traz inúmeros benefícios para o estudante, dentre os quais podemos destacar: comunicação, flexibilidade, administração de conflitos, autoconhecimento, iniciativa, colaboração e confiança.

⁹ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=QkO3HJgzTrA&t=88s>> Acesso em: 18 de janeiro de 2019

¹⁰ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=uo16XTg2CIQ&t=160s>> Acesso em: 18 de janeiro de 2019

¹¹ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=VifuLscFmV0&t=571s>> Acesso em: 18 de janeiro de 2019

Buscou-se trabalhar o tema Probabilidade de forma agradável possibilitando que os alunos investigassem, selecionassem estratégias de resolução, discutissem com os colegas e socializassem suas respostas.

2.4.2.1 Testes para Verificação da Aprendizagem

Os Testes (Apêndice A), aplicados ao início de cada aula presencial, tiveram a finalidade de verificar a compreensão dos conceitos abordados nas videoaulas, de acordo com orientação de Valente (2018), que diz que grande parte das propostas de inversão da sala de aula sugerem que o estudante realize testes autocorrigidos, para que, desta forma, o professor tome ciência do que o aluno aprendeu do estudo *on line*.

Neste trabalho os testes não são autocorrigidos, mas sim, corrigidos na hora com o auxílio dos colegas e da pesquisadora, caso necessário. Considera-se que com o acesso as respostas imediatamente, os alunos tem a possibilidade de sanar suas dúvidas no momento que elas surgem. É possível desta forma, promover uma aprendizagem mais eficiente, garantindo um melhor desempenho dos alunos nas próximas atividades, para as quais espera-se que surjam novas dúvidas, ampliando assim seu conhecimento.

Foram elaborados quatro testes. O primeiro relativo à aula Probabilidade: Conceitos Básicos, o segundo relativo as aulas Cálculo de probabilidade e Probabilidade: Exercícios #1. O terceiro teste, diz respeito a aula Probabilidade da União de Dois Eventos e o quarto, as aulas de Probabilidade Condicional e Produto de Probabilidades.

O teste 1, conteve 5 questões. Foram selecionadas questões clássicas sobre Probabilidade, as quais tiveram como objetivo verificar se estavam bem definidas as noções de espaço amostral e evento, dentre eles o evento certo e evento impossível. Buscou-se trazer à tona conceitos sobre potências, múltiplos, divisores e afins, e mostrar que tanto o espaço amostral, quanto o evento não são, necessariamente, dados numéricos. Objetivou-se ainda, diagnosticar se eles compreenderam o porquê dos 36 casos referentes ao espaço amostral no lançamento simultâneo de dois dados, já que na videoaula ele é calculado pelo princípio multiplicativo.

O teste 2, também composto por 5 questões, teve por objetivo verificar se os alunos compreenderam a fórmula para o cálculo da Probabilidade e se a estavam aplicando corretamente. Aproveitou-se uma das questões para inserir a expressão “no máximo” e verificar se eles compreendem bem o significado dela no contexto.

O teste 3 conteve 4 questões. Seu objetivo foi diagnosticar se os alunos identificariam corretamente quais eventos eram mutuamente exclusivos. Cada questão possuía um espaço amostral diferente e, além do objetivo destacado, buscou-se verificar se eles estavam utilizando corretamente a fórmula da união nos casos de eventos exclusivos ou não exclusivos.

O teste 4 teve um perfil de questões diferente dos testes anteriores. Inicialmente, foi proposta uma questão contextualizada e após uma sequência de perguntas que os encaminha para a resposta. Tal sequência teve por objetivo verificar se os alunos compreenderam os conceitos de dependência e independência entre eventos, pois esta clareza é ponto chave para a aprendizagem desta parte do conteúdo. Esta questão foi pensada para ser respondida em forma de discussão entre os alunos e, para tanto, foi apresentado o enunciado da questão e a seguir mostrado um item por vez à medida que foram sendo resolvidos.

A Figura 15 mostra uma parte desta questão. A outra parte é similar a esta, porém é analisado o caso em que não há reposição do papel.

Figura 15 – Parte da questão 1 do Teste 4

<p>1) Classifique os eventos das situações abaixo em dependentes ou independentes:</p> <p>Analise a situação abaixo:</p> <p>Matheus e Michele são dois irmãos que gostam muito de desafiar um ao outro. Michele, certo dia, resolveu propor um desafio ao seu irmão: Naquele dia iria escolher três canais (um de desenho, um de filme e um de jornal) e ele só poderá assistir dois desses canais, um no horário de almoço e um no horário de jantar, no entanto, seu irmão não poderá escolher o que deseja assistir. Ela irá escrever o nome dos canais, cada um em um papel no saquinho e sortear o segundo canal. Matheus, que é um aluno aplicado em matemática, resolveu calcular a probabilidade de ele conseguir assistir um canal de desenho no almoço e um de filme no jantar. Você consegue ajuda-lo a calcular?</p> <p>Sugestão: use a primeira letra de cada canal para representar o evento, por exemplo: desenho (D), jornal (J) e filme (F).</p> <p style="text-align: right;"><small>Ativar o Windows Acessar Configurações para ativar o Windows.</small></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Você consegue dizer quais são os possíveis casos que podem acontecer (Espaço amostral)? (Sugestão: utilize a notação (D,F), por exemplo). • O que acontece quando ocorre a reposição do papel? • Quais foram as escolhas de Matheus (evento)? • A ordem dos eventos é importante? Por exemplo, a possibilidade de sair (D,F) é a mesma de sair (F,D)? • Sortear o evento "desenho" no primeiro sorteio interfere o sorteio do evento "filme" no segundo sorteio? • Podemos concluir que esses eventos são dependentes ou independentes? • Calcule a probabilidade pedida. <p style="text-align: right;"><small>Ativar o Windows Acessar Configurações para ativar o Windows.</small></p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Dados da Pesquisa

O objetivo das questões 2 e 3 foi verificar se eles conseguiam identificar e aplicar corretamente os conceitos de dependência e independência nos casos em que há, ou não, alteração do espaço amostral. Este teste foi composto por um número de questões menor que os demais pois a primeira questão foi mais extensa.

2.4.2.2 Atividades em Grupo

De acordo com as orientações da BNCC (BRASIL, 2018a), o alunos devem:

Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018a, p. 263)

Em particular na matemática, outro aspecto que se deve ser enfatizado no trabalho em grupo, de acordo com o PCNEM (BRASIL, 2002), é a importância da comunicação, por

ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão, como destacado no trecho a seguir:

A comunicação oral tem como instrumento para seu desenvolvimento o trabalho de grupo ou duplas, quando os alunos, além de aprenderem uns com os outros, precisam organizar o que sabem para se fazerem entender e, para isso, usam a linguagem que está sendo aprendida. (BRASIL, 2002, p. 129).

Buscando aplicar as orientações dos documentos citados acima em consonância com as considerações de Moran (2015), que afirma que a comunicação dos alunos entre si, se torna cada vez mais importante e eficaz, seja trocando informações, participando de atividades em grupo, resolvendo desafios ou avaliando-se mutuamente, planejou-se as atividades principais para serem realizadas em grupo.

Foram elaboradas quatro Atividades (Apêndice B). A primeira relativa à aula Probabilidade: Conceitos Básicos, a segunda relativa as aulas Cálculo de probabilidade e Probabilidade: Exercícios 1. A terceira atividade, diz respeito a aula Probabilidade da União de Dois Eventos e a quarta, as aulas de Probabilidade Condicional e Produto de Probabilidades.

Atividade 1

A primeira atividade foi composta por quatro questões, todas sobre identificação do espaço amostral e evento. Buscou-se com esta atividade mostrar aos alunos as duas formas mais comuns de organizar e representar o espaço amostral para facilitar a resolução de problemas.

As **questões 1 e 2** propuseram a construção de tabelas para organização, respectivamente, dos casos possíveis de se formarem casais para uma dança, dispondo de três homens e quatro mulheres e dos casos possíveis de observação das faces voltadas para cima ao serem lançados um par de dados simultaneamente. O objetivo destas questões foi mostrar a eficiência da utilização da tabela para organizar os espaços amostrais e inserir o conceito de par ordenado para representar os pares formados.

O objetivo das **questões 3 e 4** foi fazer com que os alunos entendessem a dinâmica da organização de uma árvore de possibilidades, visto que a construção da mesma é muito utilizada nos problemas de probabilidade. A questão (Figura 16) trouxe o esquema da árvore para que eles preenchessem e que posteriormente serviria de inspiração para resolução da questão 4.

Figura 16 – Questão 3 da Atividade em Grupo 1

3) Uma concessionária oferece um modelo de automóvel no valor de R\$28.000,00, na cor sólida (branco ou preto) e com duas portas. Com opcionais, o cliente pode escolher:

Cor metálica (prata) por R\$ 900,00

4 portas por R\$ 1.800,00

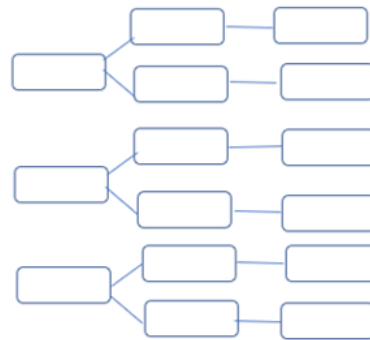
Vamos determinar o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha do cliente em relação:

a) Aos opcionais

b) Ao preço

Para representar todas as opções de escolha do cliente, podemos utilizar o seguinte diagrama da árvore.

(*sugestão*: utilize a primeira coluna para *cor*, a segunda para número de *portas* e a terceira para o *preço*)



Fonte: Dados da Pesquisa

Atividade 2

A segunda atividade foi composta por seis questões e, com exceção da primeira, as demais eram questões do ENEM. O objetivo desta atividade foi verificar se os alunos conseguiam identificar corretamente o espaço amostral, o evento e aplicar a fórmula para o cálculo da Probabilidade. A interpretação das questões foi um dos critérios avaliativos a ser observado. Buscou-se em cada questão mostrar uma forma diferente de apresentar os dados, explorando desta forma diversos recursos para a resolução.

A **questão 1** (Figura 17) trouxe uma tirinha para incentivar a discussão sobre o conceito de Probabilidade de forma a diagnosticar se os alunos estavam bem familiarizados com o mesmo.

Figura 17 – Questão 1 da Atividade em Grupo 2

1) Leia a Tirinha abaixo.



Você concorda com o personagem do Tucano quando diz que “a chance de sair 13 é igual pra qualquer outro número do dado”? Justifique.

Calcule a probabilidade de sair face 13 na situação da tirinha.

Fonte: Dados da Pesquisa

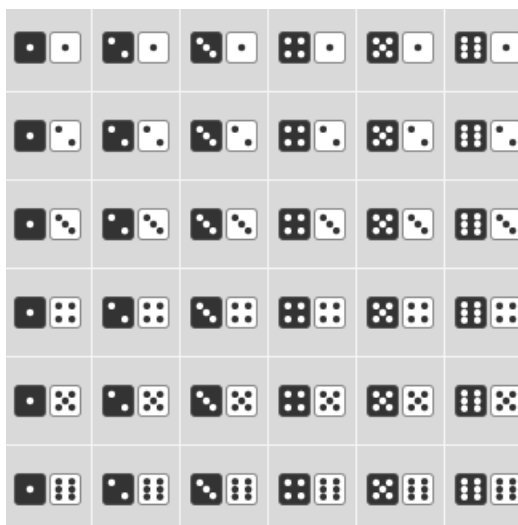
A **questão 2**, trouxe um cubo que seria rotacionado e lançado. As **questões 3 e 4** utilizaram gráficos. Na terceira, o gráfico foi de colunas e na quarta, de linha. A **questão 5**, conteve uma tabela e a **questão 6**, um texto.

Atividade 3

A terceira atividade contou com 4 questões sobre Probabilidade da União. A **questão 1** trouxe uma tabela e apresentou um caso de eventos mutuamente exclusivos e outro não. O objetivo foi verificar se eles entenderam o conceito e se conseguiam resolver corretamente quando o espaço amostral é apresentado em forma de tabela.

A **questão 2** foi sobre o sorteio uma pessoa com características específicas e teve por objetivo verificar se os alunos conseguiam interpretar e organizar os dados da questão corretamente. A **questão 3** (Figura 18) trouxe o esquema do espaço amostral no lançamento de dois dados honestos.

Figura 18 – Espaço Amostral da Questão 3 da Atividade em Grupo 3



Fonte: Página da Khan Academy <<https://pt.khanacademy.org/math/statistics-probability/probability-library>> Acesso em 23 de janeiro de 2019

O objetivo secundário dessa questão foi apresentar o espaço amostral de uma forma diferente e verificar se eles compreendiam bem. O objetivo principal foi examinar se, mesmo em situações similares, eles conseguiam identificar que uma alternativa se trata de eventos mutuamente exclusivos e a outra não.

A **questão 4** foi sobre de um jogo de dados com quatro participantes, cada qual com uma condição específica, composta pela união de dois eventos, que determina se ele irá ganhar ou não a partida. Ainda nessa questão, foi questionado que, se fosse trocada a conjunção “ou” pela “e”, qual jogador teria a maior probabilidade de vencer. O objetivo desta alternativa foi reforçar a importância dessas conjunções para a interpretação correta do problema, bem como a utilização dos artifícios adequados para sua resolução.

Atividade 4

A quarta atividade foi composta por 5 questões. Foram apresentadas algumas alternativas para resolução das mesmas que priorizasse a redução do espaço amostral em comparação a utilização da fórmula.

A **questão 1** foi uma situação problema na qual os alunos foram induzidos a construir uma árvore de possibilidades. Seu objetivo foi verificar a compreensão dos alunos quanto a dependência de eventos e mostrar como a construção de uma árvore de possibilidades pode ser eficiente para a resolução desse tipo de problema. Objetivou-se mostrar também que, mesmo não fazendo uso da fórmula, foi necessária a multiplicação de probabilidades de cada “galho da árvore” e como o conectivo “e” interfere na interpretação e no cálculo da questão. Ao final teve a seção “*Pense mais um pouco*” cujo objetivo foi extrair mais informações para discussão.

A **questão 2** trouxe informações, com as chances de um alarme disparar caso fosse identificado um item não permitido em uma bagagem. Para a sua resolução foi sugerida a construção da árvore de possibilidades. Essa questão é similar a uma resolvida na videoaula, porém sem a construção da árvore. A construção foi sugerida para que os alunos conhecessem uma nova situação onde seria possível aplicar a árvore, além de fazer com que explorassem outros recursos além dos apresentados na videoaula. Foi esperado que os alunos colocassem em prática o conhecimento adquirido na questão anterior. Para a **questão 3** não foi dada a sugestão para construção da árvore, pois pretendeu-se verificar se eles a utilizariam para resolver a questão ou se a resolveriam pela fórmula.

A **questão 4** apresentou dois dados, um hexaedro e um tetraedro. Buscou-se com esta questão apresentar um dado com um número de faces diferente e verificar o modo como eles organizariam o espaço amostral. Foi esperado que eles utilizassem uma tabela para tal. Na **questão 5** eles julgaram quatro afirmações em verdadeiro ou falso. O objetivo desta questão foi verificar a interpretação quanto a identificação correta dos eventos dependentes e independentes além de analisar qual método eles utilizariam para resolução.

2.4.2.3 Atividade Avaliativa

Seguindo as orientações de [Bacich e Moran \(2018\)](#), umas das etapas do processo de inversão é realizar uma avaliação com a turma, onde eles deverão responder algumas questões sobre o assunto abordado a fim de identificar o que foi aprendido e os quesitos nos quais eles precisam de ajuda. Assim sendo, para finalizar a experimentação, foram selecionadas 6 questões do ENEM para que os alunos apliquem o que foi aprendido e discutido durante a resolução das atividades presenciais.

Optou-se por compor esta atividade ([Apêndice C](#)) com questões retiradas do ENEM visto que são alunos cursando a terceira série do Ensino Médio e este ano participarão desta avaliação externa que é, atualmente, o principal meio de acesso a maioria das universidades brasileiras.

2.4.2.4 O Jogo

De acordo com os PCN ([BRASIL, 1998](#)) o jogo é um objeto sociocultural e uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos que supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, apesar de demandar exigências, normas e controle. Um aspecto que merece destaque, segundo os Parâmetros, é o desafio genuíno que os jogos provocam no aluno, gerando interesse e prazer.

Diante do exposto é importante que os jogos sejam inseridos da cultura escolar, ficando a cargo do professor analisar e avaliar as potencialidades educativas dos mais variados jogos bem como o aspecto curricular que se deseja desenvolver. ([BRASIL, 1998](#)).

Para as gerações acostumadas a jogar, Bacich e Moran (2018) afirmam que a linguagem de desafios, recompensas, cooperação e competição é atrativa e de fácil percepção. De acordo com os autores, jogos individuais ou em grupo, sejam de competição, colaboração ou estratégia, que contenham etapas e habilidades claramente definidas, estão se tornando cada vez mais comuns nas diversas áreas de conhecimento e níveis de ensino.

Os PCN (BRASIL, 1998) destacam alguns aspectos importantes da utilização de jogos como recurso pedagógico:

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de busca de soluções. [...] possibilita a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46).

Moran (2015) acrescenta que a combinação da aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos, com a Sala de Aula Invertida é muito importante para que os alunos aprendam fazendo, aprendam juntos e também, no seu próprio ritmo.

Diante da importância da utilização dos jogos como objeto de aprendizagem, foi aplicado um jogo para enriquecer a aprendizagem do tema. Foi pesquisado um jogo que fosse realizado em grupo, que utilizasse material concreto, visto que a escola não oferece laboratório de informática, e que abordasse os principais tópicos da matéria estudada.

O jogo escolhido foi o Jogo das Amebas¹². Ele é de autoria de Laura Leticia Ramos Rifo¹³ e está disponível no site da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

Destacam-se como principais objetivos do Jogo:

- Análise dos conceitos de Probabilidade;
- Identificação de estratégias para ganhar um jogo que depende de eventos aleatórios com Probabilidade conhecida.

Sinopse do Jogo

Neste jogo, é acompanhada a evolução de uma família de amebas, representadas por grãos de feijão, até a quinta geração. Começando com uma única ameba na geração zero, cada ameba da família pode, com a mesma probabilidade, ou morrer ou se dividir em outras duas, dando origem a uma nova geração. O que é mais provável: que exista pelo menos uma ameba na quinta geração ou que não exista nenhuma? Os alunos,

¹² Disponível em: <<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1017>> Acesso em 20 de dezembro de 2018

¹³ Doutora em Estatística pela Universidade de São Paulo, USP, Brasil

organizados em times, tentarão responder a essa pergunta, realizando o jogo diversas vezes e analisando os resultados observados. No fechamento, conduzidos pela pesquisadora, os alunos formalizarão o contexto do jogo, obtendo a resposta do experimento a partir de cálculos matemáticos.

Introdução do Jogo

Quais condições de reprodução levam uma espécie ao seu desaparecimento – ou a uma explosão demográfica? Intuitivamente, espécies com maior número de descendentes por ninhada (bactérias, baratas e células doentes, por exemplo) tem maior chance de sobrevivência do que as espécies com menor número (pandas gigantes, por exemplo). Modelos probabilísticos podem ser utilizados para responder a essa pergunta. Um desses modelos é o processo de ramificação. Imagine uma árvore em que cada galho pode se ramificar em novos galhos de acordo com uma certa probabilidade ou, pode não se ramificar e secar, com probabilidade complementar. De acordo com a pergunta do início, podemos propor a seguinte questão: quanto deve valer essa probabilidade para que a árvore tenha infinitos galhos?

Em um caso extremo, se a probabilidade de novos galhos for 1, então com certeza a árvore será ilimitada (a espécie persistirá se essas condições se mantiverem). No outro extremo, se a probabilidade for zero, então a árvore certamente será limitada. Neste experimento, apresentamos o caso em que essa probabilidade é $\frac{1}{2}$ e o número de novas ramificações por galho é igual a 2, utilizando o processo de ramificação para modelar uma família fictícia de amebas. Qual é a probabilidade de que a família exista até a quinta geração?

O jogo apresentado neste experimento utiliza o conceito de independência e de probabilidade condicional, aplicados a um processo de ramificação aparentemente simples. Inicialmente, as probabilidades requeridas são aproximadas a partir da observação de um grande número de jogadas e, no Fechamento, seu valor exato é obtido pela teoria, corroborando os valores empíricos obtidos.

Regras do Jogo

- a) Cada feijão representará uma ameba, que pode se dividir em duas amebas ou morrer, dependendo do resultado do lançamento de uma moeda;
- b) Se o resultado for cara, a ameba morre; se for coroa, ela se divide em duas amebas. Cada lançamento decide sobre a divisão ou a morte de apenas uma ameba. As amebas podem ser classificadas em gerações. A geração zero, é formada por uma única ameba inicial; a primeira geração, G_1 , é formada pelas duas amebas nascidas da divisão da primeira; a segunda geração, G_2 , é formada pelas amebas nascidas da geração 1 e assim por diante.;
- c) O time A ganha um ponto na rodada se, na geração 5, G_5 , não houver nenhuma

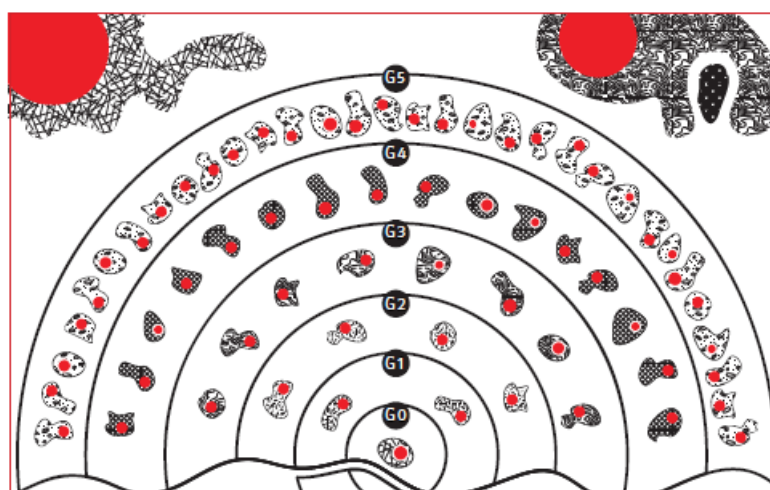
ameba; já o time B ganha um ponto na rodada se houver pelo menos uma das $2^5 = 32$ amebas possíveis na quinta geração;

- d) Em cada rodada, uma das equipes faz os lançamentos da moeda, até a rodada acabar;
- e) Ganha o jogo a equipe que marcar 10 pontos primeiro.

Tabuleiro

Jogar apenas com feijões não deixa claro em que geração se encontram as amebas. É necessário, então, a utilização de um tabuleiro como o da [Figura 19](#).

Figura 19 – Tabuleiro do Jogo

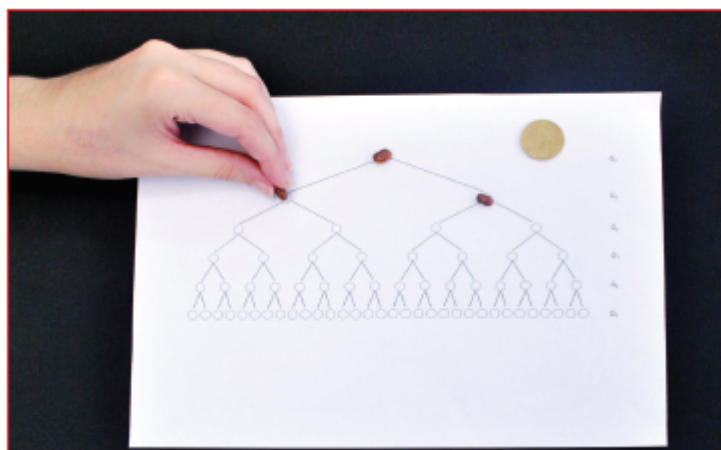


Fonte: Dados do Jogo

Este tabuleiro, presente no [Apêndice F](#), representa uma árvore genealógica e, durante o jogo, as amebas são colocadas em suas devidas posições, de acordo com a geração a que pertencem.

O tabuleiro pode ser impresso e entregue aos alunos ou desenhado na lousa para copiar no caderno, como mostra a [Figura 20](#).

Figura 20 – Tabuleiro Opcional do Jogo



Fonte: Dados do Jogo

Preparação

A turma será dividida em grupos de 4 alunos, que se organizarão em duas equipes, e serão entregues os materiais necessários. Cada grupo receberá folha do aluno que está presente no [Apêndice E](#). A pesquisadora lerá as regras do jogo para garantir a participação dos alunos no experimento. As equipes de cada grupo jogarão cara-ou-coroa e a equipe ganhadora deve escolher ser o time A ou o time B, definidos nas regras do jogo.

Material

- Uma moeda comum;
- 70 grãos de feijões (para representar as amebas).
- Um tabuleiro
- Folha do aluno

Etapa 1: Aquisição de Dados

Nesta primeira etapa, os alunos realizarão jogadas, registrarão e analisarão os resultados obtidos. As informações serão coletadas a partir da realização de partidas do jogo.

Será sugerido aos alunos que usem “k”, para cara, e “c”, para coroa. Eles deverão anotar os resultados obtidos pelo grupo durante cada rodada em uma tabela. A ([Figura 21](#)) traz um exemplo de tabela preenchida com uma partida de 11 rodadas, na qual a equipe A ganhou o jogo por 10 a 1.

Figura 21 – Exemplo de tabela com resultado de uma partida

Sequência de lançamentos	Total de caras	Total de coroas	Total de gerações	Time ganhador
k	1	0	0	A
k	1	0	0	A
k	1	0	0	A
ckk	2	1	1	A
ccckckkk	5	4	3	A
k	1	0	0	A
ckk	2	1	1	A
ckk	2	1	1	A
ccccckkkckkc	6	7	5	B
k	1	0	0	A
k	1	0	0	A

Fonte: Dados do Jogo

A tabela deverá ser construída no caderno dos alunos. Enfatiza-se que a coleta destes dados é fundamental para a segunda parte do experimento. Além disso, será frisado aos alunos que deve ser construída uma tabela para cada partida. Após cada partida, será indicado que sejam anotados os valores totais, o que facilitará o trabalho dos alunos e da pesquisadora nas próximas etapas. A [Figura 22](#) é uma sugestão de tabela que deve também ser feita no caderno.

Figura 22 – Exemplo de tabela com o total de partidas

Cara	Coroa	Total de gerações						Time ganhador	
		0	1	2	3	4	5	A	B
23	14	6	3	0	1	0	1	10	1

Fonte: Dados do Jogo

Etapa 2: Representação Gráfica

Tendo em mãos os dados obtidos na etapa anterior, os alunos deverão sistematizar essas informações em gráficos de frequência. Como todas as variáveis são discretas, já

que podem assumir apenas um número finito de valores, os gráficos mais adequados são o gráfico de barras, ou o gráfico de setores.

Nestes gráficos serão representadas as frequências de cada categoria. No caso das faces obtidas, as categorias são cara e coroa. Esse tipo de variável é conhecido como variável qualitativa nominal, ou seja, os possíveis resultados são categorias. Sua representação no gráfico de barras indica a frequência observada em cada categoria de acordo com a altura da barra correspondente. É indiferente se a frequência utilizada é a absoluta (23 caras e 14 coroas) ou a relativa (62% de caras e 38% de coroas), pois a altura relativa entre as barras permanece a mesma.

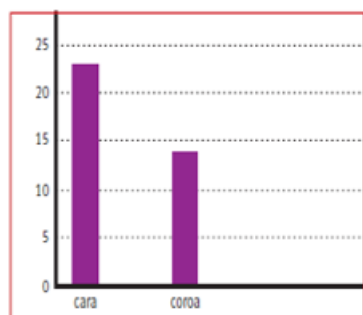
No gráfico de setores, um disco de área 1 é dividido em dois setores radiais, sendo que a área de cada um deles representa a proporção relativa das categorias. Esse gráfico tem a vantagem de ser de rápida leitura. Contudo, quando há um número grande de categorias, o gráfico não é recomendado.

Optou-se por utilizar somente gráficos de barras e serão propostas as construções exemplificado na [Figura 23](#).

Figura 23 – Exemplo de gráficos de barras

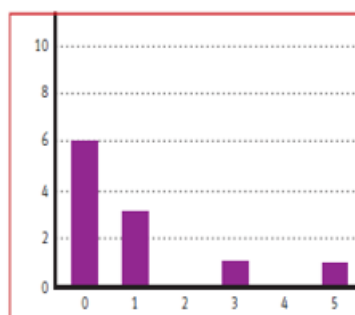
1. Gráfico 1: Faça um gráfico de frequência com os resultados dos lançamentos.

Exemplo:



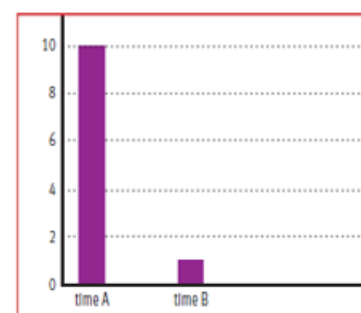
2. Gráfico 2: Faça um gráfico de frequência para o total de gerações por família.

Exemplo:



3. Gráfico 3: Faça um gráfico de frequências com os resultados de cada rodada.

Exemplo:



Fonte: Dados do Jogo

Discussão sobre os resultados

- O Gráfico 1 mostra o total de caras e coroas obtidas no jogo. Assumindo que a moeda é balanceada e que os lançamentos não favorecem nenhuma das faces, esperamos que metade dos lançamentos seja cara. No entanto, flutuações em torno de 50% são plausíveis de serem observadas.
- O Gráfico 2 permite analisar quão frequentemente observamos 5 gerações em uma família de amebas. Ele nos entrega o primeiro indício da baixa probabilidade da família sobreviver sob as condições do jogo.

- O Gráfico 3 apresenta uma estimativa das chances de cada time vencer, indicando que as condições são mais favoráveis para o time A.

Fechamento

No Fechamento, será proposta a solução teórica do jogo. Nesta parte do fechamento, os alunos poderão determinar a probabilidade de não existir nenhuma ameoba na quinta geração.

A solução apresentada envolve o conceito de independência de eventos e uma análise sistemática das possibilidades existentes. Serão mostrados os cálculos para as primeiras gerações, já que as gerações seguintes podem ser analisadas de modo análogo.

Primeira geração: Na primeira geração podemos ter 0 ou 2 ameobas, dependendo do resultado do primeiro lançamento da moeda. Portanto, a probabilidade de que não exista nenhuma ameoba em G_1 é igual a probabilidade de obter cara no primeiro lançamento, que é $\frac{1}{2} = 50\%$.

Na **Segunda geração**, podemos ter 0, 2 ou 4 ameobas, como no esquema abaixo:

$P(4 \text{ ameobas em } G_2) =$

$$P(c \cdot c \cdot c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$P(2 \text{ ameobas em } G_2) =$

$$P(c \cdot c \cdot k \text{ ou } c \cdot k \cdot c) = P(c \cdot c \cdot k) + P(c \cdot k \cdot c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$P(0 \text{ ameobas em } G_2) =$

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \cong 62,5\%$$

Para as gerações seguintes, a conta é mais árdua, mas segue o mesmo raciocínio.

$P(0 \text{ ameobas em } G_3) \cong 70\%$

$P(0 \text{ ameobas em } G_4) \cong 74,2\%$

$P(0 \text{ ameobas em } G_5) \cong 77,5\%$

Isso mostra que o time A tem aproximadamente 77,5% de chance de ganhar o jogo.

Capítulo 3

Experimentação da Sequência Didática

Será relatada neste capítulo a experimentação da Sequência Didática baseada nas atividades deste trabalho, com destaque para as atitudes dos alunos, as intervenções da pesquisadora e algumas conclusões.

Iniciou-se a experimentação com um encontro presencial no qual foi realizada uma palestra para apresentar a Sala de Aula Invertida aos alunos. Nesta oportunidade foram esclarecidos o que é esta modalidade de ensino e suas principais características e objetivos (Figura 24).

Figura 24 – Apresentação da Sala de Aula Invertida



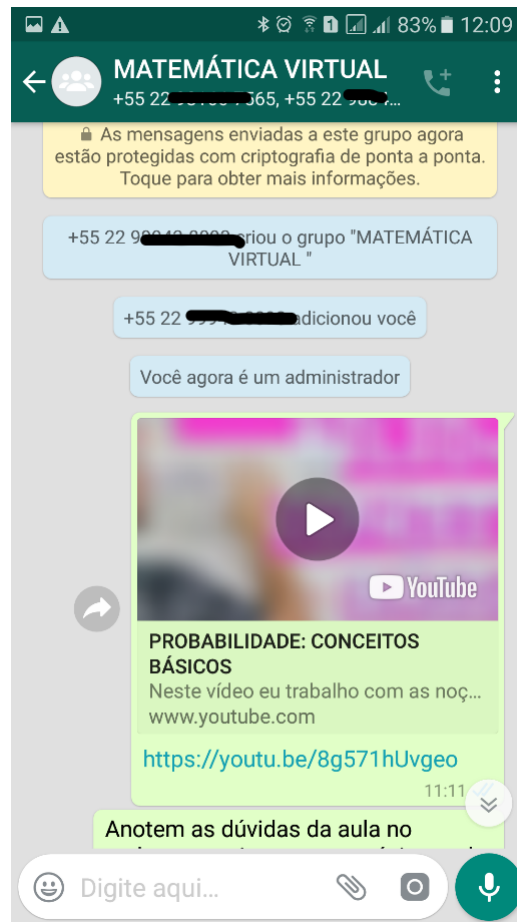
Fonte: Dados da Pesquisa

Ao término da palestra foi questionado se eles entenderam o método e se achariam possível de ser aplicado. A resposta positiva foi unânime. Foi reforçado a importância da responsabilidade e do comprometimento que eles deveriam ter para assistir as videoaulas e anotar as dúvidas. Foi explicado, também, como eles poderiam “pausar” e “retroceder”

o professor e os benefícios dessa ação. Por fim, foi perguntado se todos tinham acesso à *internet* em suas residências ou em algum local fora dela e, em caso positivo, se estaria disponível pra quando eles precisassem. Todos responderam que sim.

O próximo passo, neste mesmo dia, foi a seleção do local onde seriam disponibilizados os vídeos para que eles assistissem. A pesquisadora propôs a criação de um ambiente de aprendizagem utilizando *Google Sala de Aula*. Porém ao se discutir com os alunos sobre a praticidade para acesso das informações eles sugeriram o *WhatsApp* como aplicativo de sua preferência. Um indicador que justifica esta preferência é a pesquisa realizada pelo IBGE ¹, que afirma que os *Smartphones* (2018) continuam sendo o principal meio de acesso, com 97% das pessoas acessando a internet por meio de seus celulares. Já o acesso através do computador vem caindo: enquanto em 2016 cerca de 63% das pessoas acessavam a internet usando um computador, em 2017 esse número diminuiu para 56,6% dos usuários. Apesar de existir um aplicativo do *Google Sala de Aula* para *Smartphones*, o *WhatsApp* é mais familiar para os alunos e atende as necessidades propostas, que são as postagens de links para as videoaulas e materiais extras, se houvessem, referentes ao conteúdo. Visto isso e levando-se em consideração o que diz Bacich e Moran (2018) quando afirmam que “todas as iniciativas para abrir os espaços das escolas para o mundo, ampliando as diferentes redes sociais e tecnológicas, pessoais, grupais e institucionais, contribuem para oferecer ricas oportunidades de aprendizagem”(BACICH; MORAN, 2018, p. 8), elegeram-se o *WhatsApp* como plataforma para as atividades dos momentos *on line*. Neste mesmo dia foi criado, pelos próprios alunos, um grupo no aplicativo, denominado “Matemática Virtual” (Figura 25).

¹ Disponível em: <<https://canaltech.com.br/internet/pesquisa-do-ibge-revela-que-aumentou-o-numero-de-usuarios-de-inte>>

Figura 25 – Criação do Grupo no *WhatsApp*

Fonte: Dados da Pesquisa

Antes de iniciar o detalhamento dos procedimentos metodológicos adotados em cada atividade, julga-se necessário destacar alguns itens que ocorreram durante a experimentação:

- Recolheu-se, para fins de análise, todas as atividades realizadas em grupo. Esta análise contempla a coleta de dados para pesquisa e verificação das resoluções a fim de sanar as possíveis dúvidas;
- Iniciou-se cada aula presencial levantando-se uma breve discussão sobre o conteúdo abordado na videoaula e solucionando-se as dúvidas, caso houvessem;
- Junto com cada *link* para videoaula, foram indicadas páginas do livro didático para leitura optativa do conteúdo;
- Ao final de cada aula presencial, era indicado aos alunos alguns exercícios do livro didático como tarefa optativa para aprofundamento dos estudos. Todos os exercícios possuíam as respostas no final do livro;

- As atividades em grupo contam com a intervenção, quando solicitada, da pesquisadora, visto que o objetivo das mesmas não é fazer uma verificação da aprendizagem, e sim, favorecer a construção do conhecimento dos sujeitos envolvidos.

Para cada encontro presencial a seguir serão descritas as experimentações dos testes para verificação da aprendizagem e das atividades em grupo.

3.1 Encontro Presencial 1

Para este encontro, no momento *on line*, os alunos receberam o *link* de duas videoaulas: História da matemática, probabilidade e combinação e Probabilidade: conceitos básicos e dispuseram de 5 dias para assistir aos vídeos.

No dia anterior a aula presencial, a pesquisadora colocou um lembrete no grupo, pedindo para quem ainda não tivesse assistido aos vídeos, que os fizesse. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015), o professor precisa seguir se comunicando frente a frente com os alunos, mas também digitalmente, com o apoio das tecnologias móveis, proporcionado um equilíbrio entre a interação com todos e com cada um.

Seguindo as orientações de Bergman e Sams (2019), o encontro foi iniciado com alguns minutos de discussão sobre o vídeo que foi visto em casa. Foram feitas perguntas do tipo: “*todos conseguiram assistir a videoaula?*”, “*houve algum problema na execução do vídeo?*”, “*consideraram a aula de fácil ou difícil compreensão?*”, “*anotaram as dúvidas?*”, entre outras.

Todos os alunos estavam presentes neste dia e todos haviam assistido a aula. Uma aluna relatou que ela precisou baixar o vídeo para assistir depois, pois o vídeo não estava carregando bem devido a velocidade da sua *internet*. Considerou-se a possibilidade de baixar as videoaulas uma boa opção para os alunos que não dispunham de *internet* de boa velocidade poderem assistir aos vídeos, visto que eles podem baixá-las em outro local, como casa de parentes ou amigos, ou pode consegui-los via *pendrive* com algum colega de classe que tenha baixado.

Em relação ao dia que assistiram aos vídeos, a maioria confessou ter assistido na véspera da aula e apenas duas alunas leram as páginas indicadas do livro e relataram que só conseguiram compreender a explicação por terem assistido previamente a videoaula.

Todos consideraram a videoaula de fácil compreensão e apenas um aluno apresentou dúvida. Esta dúvida se referia as notações utilizadas, que de acordo com ele, os deixaram “confuso”. A pesquisadora fez então uma observação no quadro com as letras e símbolos utilizados, destacando o significado de cada um deles e a importância da utilização da notação correta para o sucesso na resolução das questões.

Depois de respondidas as dúvidas, foi passado aos alunos as tarefas do dia a serem executadas na sala de aula. A primeira delas foram os Testes para Verificação da Aprendizagem (Figura 26).

3.1.1 Experimentação do Teste 1

Durante a experimentação dos testes foram abertos comentários e discussões nas questões em que algum aluno respondeu de forma incorreta. Para as questões em que algum aluno não conseguiu entender, dava-se espaço aos colegas para explicarem e caso persistisse a dúvida, a pesquisadora assumia a explicação. Após todos estarem convencidos da resposta, passava-se para a próxima questão.

Figura 26 – Experimentação do Teste 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 27 – Questão 1 do Teste 1

1) Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado.
Descreva o espaço amostral logo abaixo e após o seguintes eventos:

a) Evento A : sair numero par.

A: {2,4,6}

b) Evento B: ocorrência de um número menor que 4.

B: {1,2,3}

c) Evento C: ocorrência de um múltiplo de 3.

C: {3,6}

d) Evento D: ocorrência de um número que não seja primo.

D: {4,6}

e) Evento E: ocorrência de um numero menor que 1

E: \emptyset

f) Evento F: ocorrência de um número maior do que zero e menor do que 7.

F: {1,2,3,4,5,6}

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 1** (Figura 27) foi uma sobre o lançamento de um dado honesto e a observação da sua face voltada para cima. Dessa situação foram pedidos seis eventos, dentre eles, o evento impossível e o evento certo. Os itens *a*, *b* e *c* foram resolvidos corretamente. O item *d* gerou dúvida em todos, por não se recordarem o que são números primos. Nenhum aluno soube responder. Assim sendo, a pesquisadora, fez uma pausa na apresentação do teste para recordar a definição de números primos. Após verificar, utilizando exemplos, que todos haviam compreendido, seguiu-se com a questão. Ainda neste item, cinco alunos responderam incorretamente pois não compreenderam o enunciado do item que pedia números que não fossem primos. Os itens *e* e *f* foram resolvidos corretamente, mas somente dois alunos utilizaram os termos “evento certo” e “evento impossível”. As demais respostas foram do tipo, “zero”, “nenhum”, “todos”, “100%”, e afins.

Figura 28 – Questões 2 a 5 do Teste 1

2) Suponha que, todo ano, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) realize um sorteio para decidir em qual região do país será disputado um torneio internacional. Determine o espaço amostral do experimento a ser realizado em um determinado ano.

A: {Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sul, Sudeste}

3) Um número natural de 1 a 100 é escolhido ao acaso. Seja o evento E "sair um número que é uma potência de base 5". Determine E.

E: {1, 5, 25}

4) Três moedas são lançadas simultaneamente. Quantas e quais são os possíveis resultados ao se observar as faces voltadas para cima? (sugestão: use C para cara e K para coroa) Ex: Indicamos sair duas caras e uma coroa por CCK.

A: {CCC, CCK, CKC, KCC, KKC, KCK, CKK, KKK}

5) Dois dados são lançados simultaneamente e observado as faces voltadas para cima. Seja E o evento "sair soma de pontos igual a 10". Determine E.

E: {(4,6), (5,5), (6,4)}

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 2** (Figura 28) foi sobre um sorteio no qual deveria ser escolhida uma das regiões brasileiras para sediar um campeonato de futebol. Nessa questão pediu-se somente que eles identificassem o espaço amostral e não foi respondida corretamente por nenhum aluno. Pode-se perceber que a dificuldade ocorreu devido a questão não apresentar uma situação onde pudesse ser retirados números como resultado. Alguns alunos não entenderam também a aplicação da palavra "região" no contexto e surgiram perguntas do tipo: "como assim região, professora?". Foi explicado quais as regiões que a questão estava se referindo e que o espaço amostral não é, necessariamente, um dado numérico.

A **questão 3** (Figura 28) se referia ao sorteio de uma potência de cinco dentre números de 1 a 100. Ela foi respondida corretamente pela maioria dos alunos, porém três deles confundiram a definição de potência com múltiplos e responderam à questão com os múltiplos de 5. A confusão foi esclarecida pela pesquisadora.

A **questão 4** (Figura 28) pedia o espaço amostral do lançamento simultâneo de três moedas. Percebeu-se que eles já estavam familiarizados com as notações sugeridas no enunciado (utilize C para cara e K para coroa). Atribui-se esse fato a questão ser similar a um exemplo resolvido na videoaula. Porém, apesar disto, somente dois alunos conseguiram especificar os oito casos. As demais respostas estavam incompletas. A pesquisadora pediu que comparassem entre si as respostas a fim de que pudessem verificar quais haviam esquecido, completando assim suas sequências.

A **questão 5** (Figura 28) traz uma situação de lançamento simultâneo de dois dados e observação da soma das faces voltadas para cima e assim como a questão 4, levou um tempo maior para ser resolvida. Percebeu-se que eles entenderam a situação e estavam

analisando os casos possíveis. Eles não utilizaram a notação de par ordenado, e sim, escrevendo “6 e 4” ou “6 + 4”, por exemplo, para descrever os casos possíveis. Apenas um aluno escreveu além colocando casos como “7 e 3”, por exemplo. Acredita-se que foi um caso de distração e foi explicado que, apesar de existir dados com vários tipos e quantidade de faces, os do exercício se referiam ao cubo, ou seja, só possuíam seis faces numeradas de 1 a 6. Isso não estava explícito no enunciado e foi importante para correção do mesmo. Um fato que merece destaque foi que nenhum aluno considerou os três casos: (4,6), (5,5) e (6,4), mas somente dois (4,6),(5,5) ou (6,4),(5,5). Quando questionados do porquê, eles responderam que (6,4) e (4,6) representavam a mesma situação. A pesquisadora aproveitou a oportunidade para explicar que na verdade são situações diferentes e como a notação de par ordenado auxilia na interpretação correta da questão.

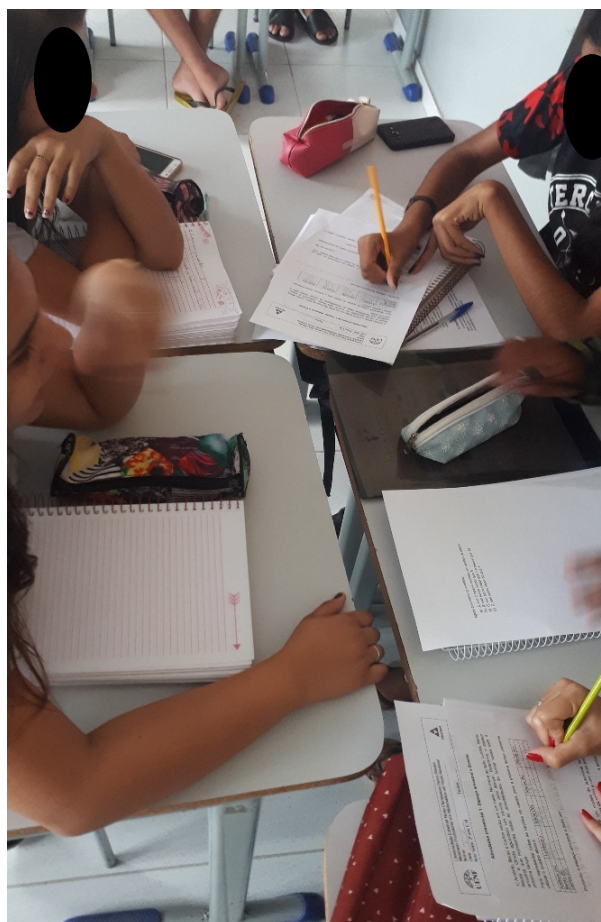
Pode-se observar que a forma de apresentação das questões, as respostas instantâneas e a disposição dos alunos em círculo geraram um ambiente agradável de competição e divertimento entre eles.

Encerrado o teste, a turma foi dividida em três grupos de quatro alunos cada. Os grupos foram escolhidos por eles e se mantiveram os mesmos durante toda a experimentação.

3.1.2 Experimentação da Atividade em Grupo 1

Com os grupos formados, foi entregue a cada um a atividade a ser feita (Figura 29). Para a resolução das mesmas, a pesquisadora buscou interferir o mínimo possível, reservando o tempo inicial para que os próprios alunos interpretassem as questões, discutissem entre si e as resolvessem. Tal procedimento corrobora com as considerações de Cohen e Lotan (2017), que sugerem que os alunos façam as tarefas sem a supervisão direta e imediata do professor, favorecendo assim a característica chave do trabalho em grupo, que é delegar autoridade. Isso ocorre, de acordo com as autoras, quando é permitido, durante as atividades, que eles se esforcem sozinhos e cometam erros.

Figura 29 – Experimentação do Atividade em Grupo 1



Fonte: Dados da Pesquisa

Decorrido certo tempo, as dúvidas que surgiram começaram a impedi-los a dar o próximo passo, fazendo com que solicitassem a pesquisadora com muita frequência. À medida que as dúvidas eram esclarecidas, percebeu-se que eles caminhavam mais dispostos e com mais interesse para as etapas seguintes. Expressões do tipo: “*ah tá*”, “*ah entendi*”, “*era só isso?*” eram ditas constantemente. Pode-se perceber como eles se mostraram mais engajados na resolução quando tiveram suas dúvidas esclarecidas imediatamente e como foi importante o papel da pesquisadora para o desenvolvimento da questão. Esse benefício de ter o professor na hora da resolução não ocorre na aula tradicional, na maior parte das atividades, visto que as mesmas são propostas para serem feitas em casa. Pode-se notar que quando a dúvida surge e é desfeita de imediato, proporciona ao aluno vontade e a capacidade de avançar.

A **questão 1** (Figura 30) sugeriu a construção de uma tabela para representar os possíveis casais que poderiam ser formados com três homens e quatro mulheres. A questão apresentou o esboço da tabela para que eles preenchessem. Aproveitou-se nessa questão para familiarizá-los com a notação de par ordenado para representar os casais. A questão foi resolvida corretamente pelos três grupos, porém, nenhum deles utilizou a

notação de par ordenado e apenas um usou a inicial dos nomes que havia sido indicada. Visto isso, considera-se que deveria ter sido colocada outra sugestão pedindo a utilização da notação desejada. Apesar deste fato, a resolução da questão foi considerada satisfatória. Foi possível perceber que a tabela presente na questão facilitou a interpretação da mesma.

Figura 30 – Questão 1 da Atividade em Grupo 1

1) Antônio, Bento e Carlos estão em um baile. Na mesa ao lado, Lurdes, Maria, Neuza e Olinda aguardam um convite para dançar. Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de formar casais para a próxima dança.

Para representar todas as opções de casais para a próxima dança podemos utilizar o quadro abaixo:

	Lurdes(L)	Maria (M)	Neuza (N)	Olinda (O)
Antônio (A)	(A,L)	(A,M)	(A,N)	(A,O)
Bento (B)	(B,L)	(B,M)	(B,N)	(B,O)
Carlos (C)	(C,L)	(C,M)	(C,N)	(C,O)

Portanto, o espaço amostral é dado por:

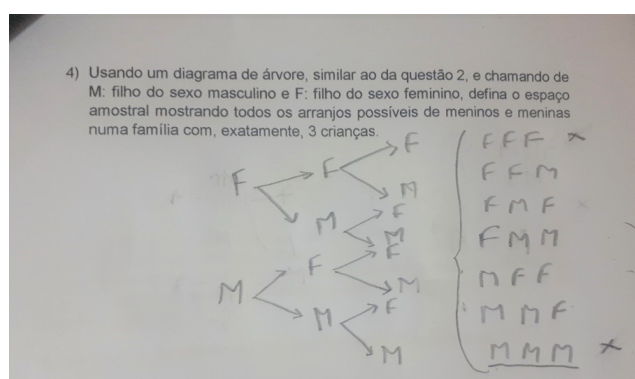
$$S = \{(A,L), (A,M), (A,N), (A,O), (B,L), (B,M), (B,N), (B,O), (C,L), (C,M), (C,N), (C,O)\}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 2** (Figura 31) se refere a clássica tabela dos casos possíveis ao se lançar simultaneamente dois dados e observar as faces voltadas para cima. Nessa questão não foi dada a tabela pois o intuito era verificar se eles haviam entendido como construí-la. Para tanto, foi pedido que eles a construissem se inspirando na questão 1. Essa questão gerou dúvidas em todos os grupos. Nenhum aluno conseguiu iniciar a questão, pois não sabiam quais informações inserir na tabela. A pesquisadora precisou intervir e falar que na primeira linha deveriam estar os números das faces de um dado e na primeira coluna os números das faces do outro. Um grupo questionou o fato dos números 1 na linha e na coluna ficarem no mesmo espaço da tabela. Foi explicado que poderia traçar uma diagonal na primeira célula da tabela, aproveitando assim o espaço para os dois números, ou inutilizá-la, ou escrever alguma informação como “Dados” ou “Faces”. Após a explicação todos desenharam a tabela corretamente, mas voltaram a ter dúvidas sobre como preenchê-la. A pesquisadora fez um exemplo do caso (1,1) e aproveitou para sugerir a utilização da notação em par ordenado. Após este exemplo, todos os grupos conseguiram concluir a tabela corretamente. Percebeu-se nessa questão a dificuldade que os alunos possuem em organizar as informações de uma questão, mesmo com um exemplo similar feito anteriormente.

identificação dos dados e a organização dos mesmos nos "galhos" da árvore, o que os impediu de iniciar a questão. A pesquisadora entrevistou e explicou o processo para construção da árvore, porém eles ainda não conseguiram organizá-la corretamente e solicitaram constantemente a pesquisadora, que passou em todos os grupos auxiliando-os na conclusão da questão. Quando todos terminaram, a pesquisadora repetiu a construção no quadro explicando novamente o porquê de cada passo, para se certificar que a construção havia feito sentido para todos e não que a construíram de forma mecânica. Percebeu-se que este passo foi muito importante, pois pode-se observar pelas expressões dos alunos que foi nesse momento que a muitos compreenderam.

Figura 33 – Questão 4 da Atividade em Grupo 1

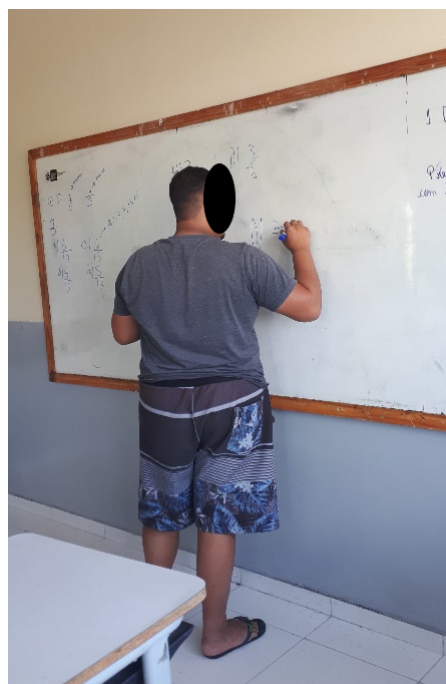


Fonte: Dados da Pesquisa

Apesar dos alunos terem requisitado bastante o auxílio da pesquisadora, considerou-se o fato deles fazerem primeiro diversas tentativas para encontrar a solução da questão, uma atitude muito válida, pois é sabido que a interação com os colegas e a troca de conhecimentos na busca da solução contribuem para uma aprendizagem mais significativa. Outro fato que merece destaque foi a percepção de que, quando eles tomam ciência de onde está sua dificuldade, podem pedir ajuda ao professor de forma mais eficiente, com foco na sua real defasagem. Nas aulas tradicionais, quando o professor começa explicando a matéria no quadro e fazendo com eles os exercícios, os alunos não tem essa oportunidade.

Como certificação de que os alunos entenderam a árvore, que é um recurso muito eficiente e bastante utilizado nas questões de probabilidade, a pesquisadora pediu uma questão extra que não estava na lista de exercícios. Foi pedido para que eles construíssem uma árvore com os casos possíveis no lançamento simultâneo de 3 moedas. A questão era para ser respondida por todos e ao final foi sorteado um aluno para ir ao quadro resolver a questão (Figura 34). Todos conseguiram concluir a construção corretamente.

Figura 34 – Aluno construindo árvore das possibilidades



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao término da atividade foi sugerido aos alunos atividades complementares do livro didático utilizado por eles para fazerem em casa.

3.2 Encontro Presencial 2

O tema desta aula foi Cálculo de Probabilidades e os alunos deveriam assistir duas videoaulas: uma de explicação do conteúdo e outra com resolução de exercícios. Estavam presentes nesta aula 11 alunos.

No momento "tira dúvidas" todos disseram ter conseguido assistir as videoaulas sem dificuldade e compreenderam a explicação. Quando questionados se estavam fazendo anotações a respeito do conteúdo, somente quatro alunos disseram que estavam fazendo um resumo. Os mesmos alunos relataram utilizar com frequência o botão pausar, com a finalidade de fazer anotações. Outros disseram utilizar o botão para fazer intervalos como comer ou realizar outra atividade e depois retornar. Os demais relataram utilizar o botão "retroceder" com frequência. Alguns, por fazerem pausas para realizar outra tarefa pessoal e, ao retornar, precisar recordar o que foi falado. Outros, por confessar estarem distraídos e perderem informações importantes. Considera-se esta última justificativa uma das maiores vantagens da Sala de Aula Invertida. Por muitas vezes não é levado em consideração que os sujeitos são diferentes, assim como são diferentes: a forma com que aprendem, os momentos que estão mais dispostos e o tempo que necessitam para aprender determinado

conteúdo. Em uma sala de aula, temos alunos que não estão dispostos naquele momento, uns com sono e outros que simplesmente não rendem bem naquele horário. Há, também, alunos que precisam que o professor fale mais devagar, seja para compreender o que foi dito, seja pra fazer anotações sobre o que está sendo falado. Fica inviável para o professor, numa aula expositiva tradicional satisfazer essas necessidades tão individuais de cada alunos, o que acaba gerando uma certa desmotivação por parte dos mesmos. Esses fatos, muitas vezes ignorados, influenciam diretamente no sucesso da aprendizagem. Com o recurso de assistir aos vídeos em casa, e fazendo uso dos recursos “pausar” e “retroceder” o professor, é possível proporcionar uma aprendizagem muito mais eficiente para os alunos, visto que ele assistirá aos vídeos nos seus melhores momentos, e com controle sobre o fluxo do que ensinado.

Como não houve dúvidas a respeito das videoaulas, deu-se início ao Teste 2.

3.2.1 Experimentação do Teste 2

O teste para verificação da aprendizagem relativo as videoaulas: Cálculo de probabilidades e Probabilidade: Exercícios 1 foi composto por 5 questões.

O objetivo das questões 1, 2 e 3 era verificar se os alunos entenderam a fórmula e se a estavam aplicando corretamente. A questão 1 pediu a probabilidade de ser sorteado um múltiplo de 8, numa urna que continha bolas numeradas de 1 a 50. A questão 2 pediu a probabilidade de sair um número maior que 4 no lançamento de um dado e a questão 3 pediu a probabilidade de ser sorteada uma bola de cor azul, numa urna com bolas de diversas cores.

Figura 35 – Questões de 1 a 3 do Teste 2

1) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, determine a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8.

$$\frac{3}{25}$$

2) No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de obtermos um número maior que 4?

$$\frac{1}{3}$$

3) Um saco contém 8 bolas idênticas, mas com cores diferentes: três bolas azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se ao acaso uma bola. Qual a probabilidade da bola retirada ser azul?

$$\frac{3}{8}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 1** (Figura 35) foi bem interpretada pelos alunos. Apenas um perguntou: “o que são múltiplos mesmo, professora?”. A pesquisadora aproximou-se e recordou com ele, em particular, para não influenciar nas respostas dos colegas. As dúvidas surgiram ao final, em relação a como deveriam apresentar a resposta. Perguntas do tipo: “*pode deixar em fração, professora?*”, “*a senhora quer em porcentagem?*” foram alguns exemplos que surgiram. Foi respondido que poderiam apresentar todas as respostas na forma de fração irredutível, pois era assim que estaria sendo mostrado no gabarito que eles veriam em seguida. A pesquisadora percebeu que as questões deste teste poderiam ter sido de múltipla escolha, cada uma com uma representação diferente, a fim de explorar a utilização das mesmas.

A **questão 2** (Figura 35) foi respondida corretamente por todos. A única dúvida que surgiu foi em relação a expressão “dado não viciado”, que foi esclarecida pela pesquisadora.

Apenas um aluno respondeu incorretamente à **questão 3** (Figura 35), apresentando $\frac{1}{3}$, como resultado. Quando questionado o porquê dessa resposta ele disse que a questão solicitou o sorteio de 1 bola azul, num total de 3 bolas que haviam na urna. Foi, então, recordado com ele as definições de espaço amostral e evento e pedido para que refizesse a questão. Ele refez, dessa vez de forma correta.

Figura 36 – Questões 4 e 5 do Teste 2

4) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de observarmos, no máximo, uma cara?

$$\frac{1}{2}$$

5) Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?

$$\frac{1}{12}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 4** (Figura 36) pedia a probabilidade de ser observada, no máximo, uma face cara no lançamento simultâneo de 3 moedas honestas. Ela utilizou um tempo maior para ser resolvida. Para o espaço amostral, dos 11 alunos presentes, 4 fizeram a árvore das possibilidades e destes, 1 não conseguiu terminá-la corretamente. Cinco fizeram as combinações por tentativa e destes, 2 não determinaram todos os casos. Dois optaram pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e apenas 1 acertou.

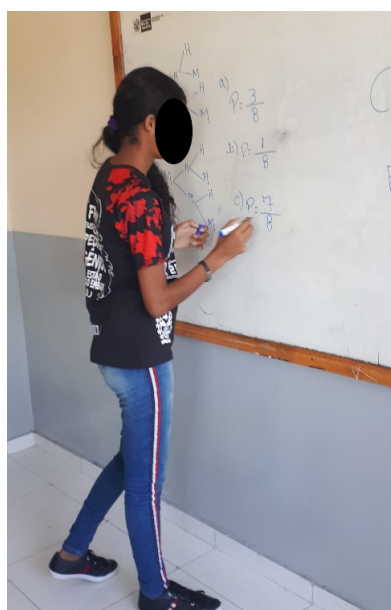
A pesquisadora orientou ao aluno que apresentou dificuldade na construção da árvore. Aos que fizeram por tentativa, foi pedido aos que não encontraram as oito combinações possíveis, que trocassem informações com os colegas e completassem o que estava

faltando. Ao aluno que tentou pelo PFC e encontrou 6 como resposta, a pesquisadora reforçou que o número de opções para cada moeda deveria ser multiplicado e não somado.

Depois que todos tinham em mãos o espaço amostral correto, foi pedido que eles determinassem o evento e concluíssem a questão. Os que construíram a árvore e os que fizeram por tentativa, acertaram o evento e determinaram a probabilidade corretamente. Os dois que fizeram pelo PFC não conseguiram determinar o evento. Aproveitou-se esse momento para destacar a eficiência da utilização da árvore para resolução da questão sendo melhor inclusive, do que por tentativa, pois como eles puderam perceber, corre o risco de serem esquecidos alguns casos, principalmente se o espaço amostral for muito extenso.

Foi perguntado se algum aluno poderia responder à questão no quadro para que os dois alunos pudessem verificar a resposta correta e a primeira aluna que se manifestou, foi ao quadro responder (Figura 37).

Figura 37 – Aluna resolvendo questão no quadro



Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 5** (Figura 36) pediu a probabilidade de obter soma 10 no lançamento simultâneo de dois dados e também levou um tempo maior para ser respondida. O mesmo aluno que respondeu à questão anterior incorretamente pelo PFC, cometeu o mesmo erro dizendo que haviam um total de 12 possibilidades. Esse erro recorrente não era esperado visto que o conteúdo do bimestre anterior havia sido Análise Combinatória. Tomando ciência da dificuldade do aluno, a pesquisadora se comprometeu a enviar para ele uma lista de atividades sobre PFC para que ele respondesse para a aula seguinte. A lista não foi enviada para o grupo da turma e sim para seu contato privado. A pesquisadora teve neste momento,

a oportunidade de perceber como esta modalidade favorece, de fato, a personalização do ensino.

Um aluno perguntou se poderia fazer a árvore das possibilidades. Os demais se lembraram da tabela que construímos na aula anterior. Foi respondido ao aluno que perguntou sobre a árvore que, ela poderia sim ser construída, porém como seriam muitos pares ordenados, a tabela organizaria e apresentaria as opções de forma mais clara. Dos alunos que se recordaram da tabela, três apresentaram dificuldade para construí-la. A pesquisadora iniciou a tabela no quadro para que eles terminassem. Sem preencher a tabela, cinco alunos disseram quais eram os pares que dariam soma 10. Dois outros apresentaram uma dúvida que já havia sido apresentada na aula anterior: se (6,4) e (4,6) era a mesma coisa. Com as mediações necessárias, todos concluíram a questão corretamente. Ao final, a pesquisadora acrescentou dizendo que pelo PFC eles teriam o total de casos possíveis podendo especificar somente os casos favoráveis, ou seja, os que dariam soma 10, visto que não eram tantas opções. Dessa forma, economizariam um precioso tempo na resolução da questão.

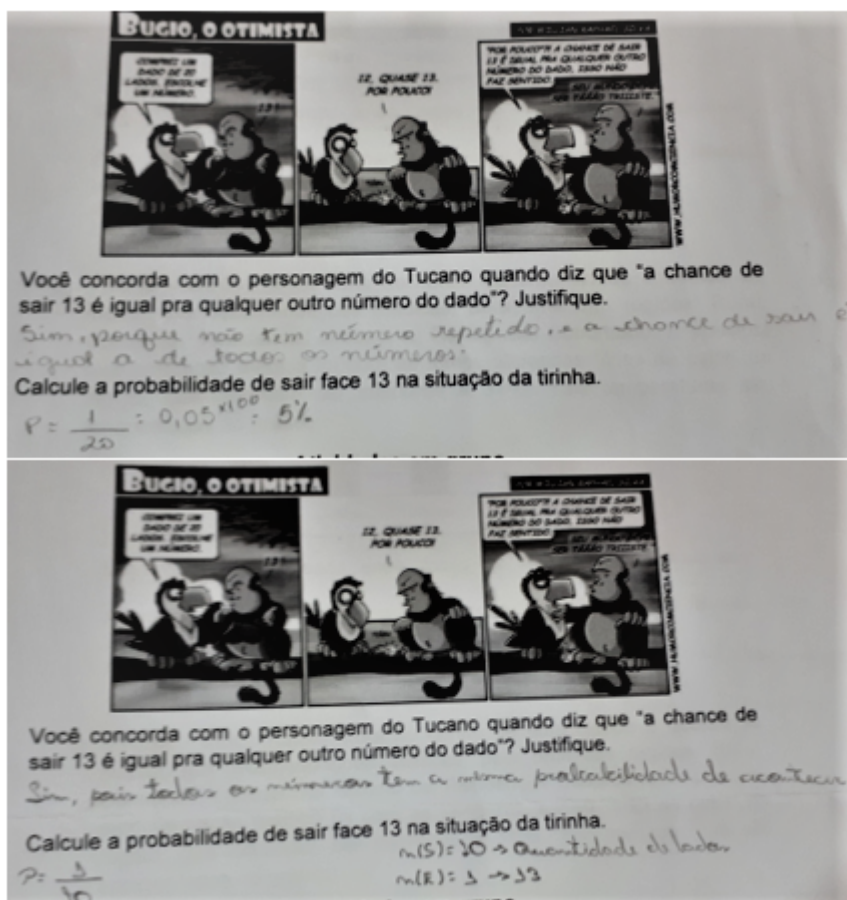
Foi observado que três alunos estavam utilizando corretamente a notação mostrada na videoaula. Os demais só estavam anotando a fração. Apesar de nem todos organizarem a resposta formalmente, foi possível perceber que todos haviam compreendido o conceito de forma satisfatória.

3.2.2 Experimentação da Atividade em Grupo 2

Após o término do teste eles se dividiram em 3 grupos, para dar início as atividades principais. Como um aluno faltou, um dos grupos ficou com três alunos. Foi acordado que, diferentemente da aula passada, a pesquisadora só deveria ser solicitada em casos extremos e que a interpretação da questão, bem como os artifícios utilizados para respondê-las faziam parte da solução. A pesquisadora resolveu adotar uma postura diferente nesta atividade pois considerou que eles já têm bagagem suficiente para respondê-la corretamente. Além disso, como as questões propostas foram retiradas do ENEM, considerou-se esta atividade como uma oportunidade para diagnosticar como seria o desempenho deles nessa avaliação. Por fim, acredita-se que com uma menor interferência da pesquisadora, pode-se coletar dados mais reais sobre a aprendizagem do conteúdo. Durante a resolução a pesquisadora passou pelos grupos a fim de observar como estava o andamento das questões, quais eram as dúvidas levantadas e como estavam discutindo-as. Ao final da aula foi disponibilizado o gabarito e discutido a resolução de cada questão.

A **questão 1** (Figura 38), que é uma tirinha, foi respondida corretamente por todos.

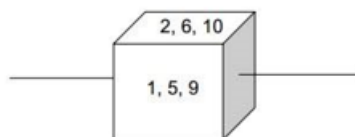
Figura 38 – Questão 1 da Atividade em Grupo 2



Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 2**, trazia um cubo no qual, em quatro de suas faces, foram gravados os números de 1 a 12, como mostra a [Figura 39](#).

Figura 39 – Dado da Questão 2 da Atividade em Grupo 2



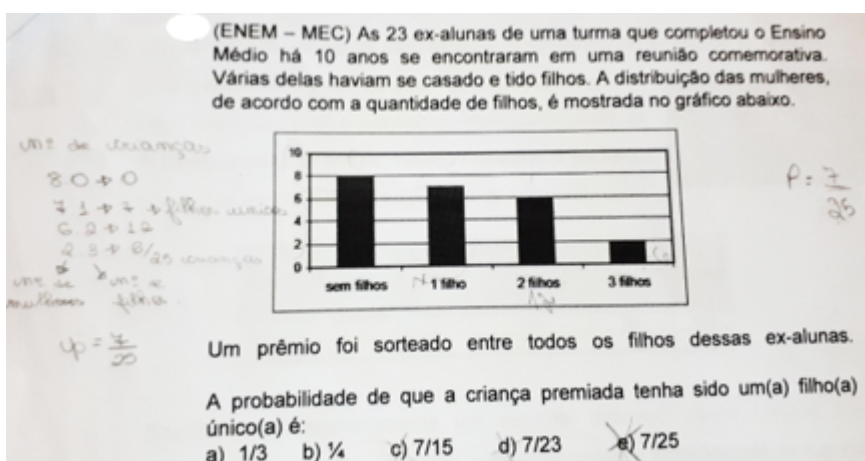
Fonte: Dados da Pesquisa

Foi pedida a probabilidade de, ao se jogar o cubo aleatoriamente, sortear a face com soma máxima. Observou-se que eles discutiram bastante durante a resolução desta questão. Tanto para determinar os números que estariam nas faces dos dados quanto para compreenderem que deveriam somar os números de cada face de modo a identificar a soma máxima. Os três grupos conseguiram resolver esses passos da questão. Porém somente dois grupos a concluíram corretamente. Um grupo, respondeu $\frac{1}{4}$, sendo que a resposta certa é $\frac{1}{6}$. Ao final da aula, durante a discussão do gabarito, eles relataram terem

considerado como espaço amostral apenas as quatro faces preenchidas do dado. A dúvida foi esclarecida com a releitura da questão, frisando a parte que diz que o dado é lançado, devendo ser consideradas então, todas as faces. Novamente foi possível perceber as contribuições positivas que o retorno rápido das dúvidas traz aos alunos. Em uma aula tradicional, é provável que o gabarito fosse disponibilizado somente na aula seguinte quando o aluno pouco se lembraria da questão e, em alguns casos, sem a oportunidade de discutir o raciocínio empregado na resolução da mesma.

A **questão 3** (Figura 40) gerou bastante discussão a respeito da correta interpretação do gráfico e apenas um grupo acertou.

Figura 40 – Questão 3 da Atividade em Grupo 2



Fonte: Dados da Pesquisa

Os demais erraram devido à má interpretação da questão. Um grupo considerou o valor referente a coluna “sem filhos” para o espaço amostral e o outro, não considerou esta coluna, porém utilizou a soma dos valores correspondentes as demais colunas, que representa o total de mães com filhos, como sendo o espaço amostral.

A pesquisadora pediu que o grupo que acertou a questão relatasse como haviam respondido e realizou intervenções nos momentos oportunos de modo a garantir maior clareza na explicação. Os demais grupos disseram compreender a explicação e perceber onde erraram.

A **questão 4**, também apresentou um gráfico, agora de linha, que relacionava as temperaturas em Celsius e Fahrenheit a quatro regiões e a **questão 5**, conteve uma tabela referente ao número de pacientes internados em um hospital com problemas respiratórios. Ambas as questões foram respondidas corretamente por todos os grupos. Foi possível perceber que a explicação da questão 3 auxiliou no sucesso na questão 4.

A **questão 6**, trouxe uma situação de jogo de sinuca onde três jogadores escolhem os resultados das suas respectivas jogadas. A questão continha uma explicação de como

acontece o jogo de sinuca e perguntou qual jogador é mais provável de vencer. A pontuação do jogo é dada a partir da soma das bolas encaçapadas, sendo estas numeradas de 1 a 15. As alternativas indicam o vencedor e a pontuação dos demais, sendo assim, foi necessário o cálculo da probabilidade de cada jogador. Essa questão também foi bastante discutida e gerou algumas dúvidas. A princípio em relação a interpretação da questão, necessitando da intervenção da pesquisadora para explicar o funcionamento do jogo. A seguir, em relação a organização dos dados da questão, onde a pesquisadora, percebendo a dificuldade dos grupos, sugeriu que, para cada jogador, eles separassem os pares de bolas que dariam as somas pedidas, de forma similar a questão 5 do teste. Foi ressaltado que as bolas estavam numeradas de 1 a 15 e após algumas discussões, encerrou-se a atividade. Um grupo questionou se, assim como nos dados, o par (2,3) era diferente de (3,2). Foi respondido que sim. Na conferência do gabarito, dois grupos acertaram a questão. O terceiro grupo marcou a alternativa E. A justificativa para esta resposta foi que, como o 22 representava a pontuação maior, teriam mais opções de pares de números que somados dariam este resultado, logo seria a pontuação mais provável de vencer. A pesquisadora pediu que eles refizessem a questão considerando todas as somas possíveis para a pontuação escolhida por cada jogador e comparasse a nova resposta com a anterior.

3.3 Encontro Presencial 3

O tema desta aula foi Probabilidade da União de Dois Eventos. Estavam presentes os 12 alunos.

Quando questionados sobre a compreensão da videoaula, todos afirmaram ter compreendido bem. Um fato que chamou a atenção foi que, dessa vez, a maioria dos alunos fez anotações e perguntaram se poderiam utilizar na hora dos testes. Foi respondido que sim. Essa iniciativa foi considerada uma grande demonstração de interesse. Era esperado, a esta altura, que já estivessem bem familiarizados com os vídeos e os recursos disponíveis, e também com a dinâmica das aulas. Realmente foi possível perceber uma postura mais segura e autônoma da parte deles. Vale destacar que nenhum aluno respondeu os exercícios sugeridos do livro didático.

3.3.1 Experimentação do Teste 3

A **questão 1** (Figura 41) foi sobre o lançamento simultâneo de um dado de seis faces e uma moeda, onde foi pedida a probabilidade de se obter cara na moeda ou face 6 no dado. O objetivo desta questão, que foi verificar se eles identificariam que os eventos indicados eram mutuamente exclusivos, foi alcançado. Todos identificaram corretamente e calcularam a probabilidade de cada evento. Perceberam que como não havia interseção, não havia nada a ser subtraído. Foi apresentado a eles a expressão “mutuamente exclusivos” visto

que ela não havia sido utilizada na videoaula. A dificuldade dessa questão surgiu quando foram efetuar a soma, pois os denominadores das frações estavam diferentes. A maioria dos alunos somou os numeradores e os denominadores. Muitos alegaram não haver exemplos desse tipo na videoaula. Esse ocorrido foi considerado uma falha. A pesquisadora deveria ter indicado uma videoaula extra sobre operações com frações ou ter feito um momento de revisão antes do início do teste. Devido à dificuldade pela maior parte dos alunos, a pesquisadora foi ao quadro recordar com eles como se resolve adição de frações com denominadores diferentes. Percebeu-se ao final da questão que o conceito da união de probabilidades estava sendo aplicado de forma satisfatória, sendo a maior dificuldade nos conteúdos que seriam pré-requisitos.

Figura 41 – Questões 1 e 2 do Teste 3

1) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter “cara” ou um 6?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2) Escolhendo-se aleatoriamente um número natural de 1 a 20, qual é a probabilidade desse número ser múltiplo de 2 ou 3?

$$\frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A segunda questão (Figura 41) se referiu a uma mostra de números de 1 a 20 na qual desejou-se sortear um número que fosse múltiplo de 2 ou de 3. A terceira questão (Figura 42) se referiu ao lançamento simultâneo de dois dados, de onde desejou-se obter soma das faces igual a 8 ou faces iguais em ambos os dados. Já a quarta questão (Figura 42), se referiu ao sorteio de uma carta vermelha ou um “as” num baralho de 52 cartas.

Figura 42 – Questões 3 e 4 do Teste 2

3) No lançamento de dois dados perfeitos, qual é a probabilidade de se obter soma 8 ou números iguais nas faces superiores?

$$\frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

4) Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um “ás”?

$$\frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

As **questões 2 e 3** foram respondidas corretamente por todos. Esse resultado já era esperado pois se tratavam de questões similares as respondidas na videoaula. Foi observado que na terceira questão eles determinaram os eventos sem precisar recorrer a tabela, o que mostra que eles compreenderam e estão aplicando o que foi dito na aula anterior.

A **questão 4** gerou dúvida na maioria dos alunos, porém elas eram relativas as cartas do baralho. A pesquisadora fez uma pausa para explicar quais eram as cartas do baralho, quais os naipes e as cores. Após a explicação todos resolveram a questão corretamente.

3.3.2 Experimentação da Atividade em Grupo 3

Assim como na aula anterior foi pedido que procurassem responder as questões sem a interferência da pesquisadora. Quando todos concluíram a atividade foram discutidas as resoluções. Foram separados 3 grupos com a mesma composição das aulas anteriores.

A **questão 1** (Figura 43) traz uma tabela com as preferências, entre cães e gatos, em uma mostra de alunos. Essa questão apresentou um caso de eventos mutuamente exclusivos e outro não. A questão continha 5 alternativas. A primeira pedia para calcular a probabilidade de escolher, aleatoriamente, um aluno que prefira cães. A segunda e a quarta alternativas apresentavam dois eventos cada e foi perguntado se estes eram mutuamente exclusivos. A terceira e quinta alternativas pediu o cálculo da probabilidade de união dos dois eventos apresentados na segunda e quarta alternativas, respectivamente.

Figura 43 – Questão 1 da Atividade em Grupo 3

- 1) Foi feita uma pesquisa com cem alunos sobre sua preferência entre cachorros e gatos. A tabela de contingência a seguir mostra os dados para a amostra de alunos que responderam à pesquisa.

Preferência	Homem	Mulher	TOTAL
Preferem cachorros	36	20	56
Preferem gatos	10	26	36
Não têm preferência	2	6	8
TOTAL	48	52	100

- a) Calcule a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente preferir cães.
- b) Nessa amostra, os eventos "prefere cachorros" e "prefere gatos" são mutuamente exclusivos?
 Sim Não
- c) Calcule a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente preferir cães ou preferir gatos.
- d) Nessa amostra, os eventos "prefere cachorros" e "gênero feminino" são mutuamente exclusivos?
 Sim Não
- e) Calcule a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente preferir cães ou ser mulher

Fonte: Dados da Pesquisa

Os itens *a* e *b* da primeira questão foram respondidos corretamente por todos os grupos. Um grupo respondeu incorretamente os itens *c* e *d*. Disseram que ficaram confusos na interpretação da tabela. A pesquisadora foi ao grupo e resolveu com eles estes itens.

A **questão 2** (Figura 44) foi sobre um grupo de pessoas composto por 16 homens e 20 mulheres, no qual metade da quantidade de homens e metade da quantidade de mulheres tinham cabelos castanhos. A questão deseja saber qual a probabilidade se ser sorteada, aleatoriamente, uma pessoa que seja do sexo masculino ou tenha cabelo castanho. Esta questão provocou discussão entre os integrantes do grupo sobre a separação das pessoas de acordo com as características especificadas, sobre a interpretação correta do conectivo "ou" para a resolução da questão e se havia ou não interseção entre os eventos. Após as intervenções da pesquisadora para a retirada dessas dúvidas, todos concluíram corretamente a questão.

Figura 44 – Questão 2 da Atividade em Grupo 3

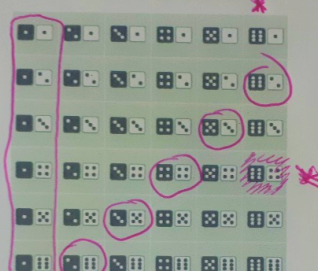
- 2) Numa classe há 16 homens e 20 mulheres, dos quais metade dos homens e metade das mulheres têm cabelos castanhos. Ao escolher um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que seja homem ou tenha cabelos castanhos?

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 3** possuía o esquema do espaço amostral no lançamento de dois dados honestos. Porém ele não estava organizado em forma de par ordenado, e sim com imagens das faces dos dados. A questão foi composta por duas alternativas. Na primeira foi pedida a probabilidade do primeiro dado dar 1 ou a soma dos pontos ser 8. Na segunda alternativa foi pedido a probabilidade do primeiro dado dar 6 ou o segundo dar 4. Esta questão gerou dúvidas em todos os grupos na interpretação da figura que representava o espaço amostral. A pesquisadora entrevistou para explicar que se tratava da mesma tabela com pares ordenados, já conhecida por eles, porém esta trazia a imagem das faces dos dados em vez de números. Percebeu-se a importância de apresentar aos alunos diferentes representações de espaços amostrais ou maneiras de organizar os dados da questão para familiarizá-los com as diversas opções existentes e deixá-los aptos a resolverem os mais variados tipos de exercícios. Observou-se também, como eles estavam acostumados a questões padronizadas, e a resolvê-las de forma automática, por meio da repetição de casos anteriores. A tabela, como eles próprios perceberam, era de fácil compreensão, apesar de não terem sido capazes de interpretá-las sem a mediação da pesquisadora. Após a compreensão do espaço amostral, todos os grupos concluíram a questão corretamente (Figura 45).

Figura 45 – Resolução da Questão 3 da Atividade em Grupo 3

3) Paulo joga dois dados honestos de seis lados. O espaço amostral de todos os resultados possíveis é mostrado abaixo.



a) Qual é a probabilidade de o primeiro dado dar um, ou da soma dos dados dar oito?

$$\frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{0}{36} = \frac{11}{36} = \frac{11}{36} = \frac{11}{36}$$

b) Qual é a probabilidade de o primeiro dado dar seis, ou de o segundo dado dar quatro?

$$\frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

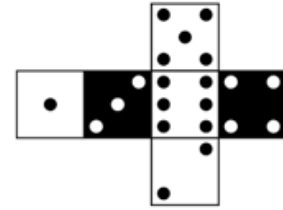
Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 4** trata-se de um jogo de dado de seis faces e tem quatro participantes (Figura 46)

Figura 46 – Questão 4 da Atividade em Grupo 3

4) Em um jogo, que é decidido com apenas um lançamento do dado representado na planificação, quatro participantes vencem nos casos descritos a seguir:

- Luana: face preta ou número menor que 4
- Marcos: face branca ou número primo
- Natália: face preta ou número 1
- Otávio: face branca ou número menor que 3



- a) Qual dos participantes tem a menor probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?
- b) Se em cada caso o termo conjuntivo ou for trocado por e, qual dos amigos terá a maior probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

Fonte: Dados da Pesquisa

O primeiro item foi respondido corretamente por todos os grupos. A única dúvida apresentada foi em relação aos números primos, que foi esclarecida pela pesquisadora. O segundo item, porém, somente um grupo conseguiu. Foi perguntado ao grupo que acertou como eles interpretaram o conectivo “e”. Eles responderam dizendo que “*as duas coisas tinham que acontecer juntas*”. A pesquisadora concordou e reforçou que o conectivo “e” significava interseção de eventos. Ou seja, eles deveriam ocorrer simultaneamente, ao mesmo tempo e respondeu um dos quatro casos, como exemplo. Após a intervenção, os dois grupos concluíram corretamente a questão (Figura 47).

Figura 47 – Resolução da Questão 4 da Atividade em Grupo 3

4) Em um jogo, que é decidido com apenas um lançamento do dado representado na planificação, quatro participantes vencem nos casos descritos a seguir:

- Luana: face preta ou número menor que 4
- Marcos: face branca ou número primo
- Natália: face preta ou número 1
- Otávio: face branca ou número menor que 3

a) Qual dos participantes tem a menor probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

1) LUANA $\rightarrow \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

2) MARCOS $\rightarrow \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$

3) NATÁLIA $\rightarrow \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4) OTÁVIO $\rightarrow \frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

b) Se em cada caso o termo conjuntivo ou for trocado por e, qual dos amigos terá a maior probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

1) $\frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{12}$	2) $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$
3) $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$	4) $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$

Essa resposta

Fonte: Dados da Pesquisa

3.4 Encontro Presencial 4

O tema desta aula foi Probabilidade Condicional e Produto de Probabilidades. Foi disponibilizada uma videoaula para cada assunto. Estavam presentes nesta aula 10 alunos.

Nenhum dos alunos respondeu aos exercícios sugeridos do livro didático e perguntaram se a resolução destes exercícios valeria ponto. Foi respondido que não, visto que eles eram apenas um material de apoio para que eles pudessem aplicar imediatamente o que foi aprendido na videoaula, caso achassem necessário.

Em relação as videoaulas, foi observado que eles continuaram a fazer anotações. Quanto ao primeiro vídeo, eles questionaram se, como havia sido sugerido pelo professor, eles poderiam responder as questões sem a utilização da fórmula. Foi respondido que sim. Em relação ao segundo vídeo, um aluno disse que não entendeu “*muito bem*” o último exemplo. Este exemplo se tratava da determinação da probabilidade de uma pessoa pegar um determinado voo chegando 5 minutos atrasada ao aeroporto e da probabilidade de ela perder o voo. Foi dado na questão a probabilidade, em porcentagem, da pessoa se atrasar 5 minutos e também do voo se atrasar 5 minutos. A pesquisadora refez o exemplo no quadro.

Ainda sobre esta aula, outros alunos disseram ter dúvidas em relação ao cálculo da probabilidade. Pode-se perceber que as dúvidas eram decorrentes da forma como o professor efetuava a multiplicação de fração, especificamente na parte da simplificação. Foi recordado com eles alguns exemplos destas operações. Assim como na aula anterior,

pode-se perceber que conceitos básicos, como operações de frações não estavam bem compreendidos pela maioria dos alunos e seria necessário, antes da introdução do conteúdo, uma aula de revisão do mesmo.

Após solucionadas as dúvidas, deu-se início a aplicação do teste.

3.4.1 Experimentação do Teste 4

A **questão 1** (Figura 48 a Figura 50) foi uma situação problema de onde foram feitos alguns questionamentos.

Figura 48 – Questão 1 do Teste 4

1) Classifique os eventos das situações abaixo em dependentes ou independentes:

Analise a situação abaixo:

Matheus e Michele são dois irmãos que gostam muito de desafiar um ao outro. Michele, certo dia, resolveu propor um desafio ao seu irmão: Naquele dia iria escolher três canais (um de desenho, um de filme e um de jornal) e ele só poderá assistir dois desses canais, um no horário de almoço e um no horário de jantar, no entanto, seu irmão não poderá escolher o que deseja assistir. Ela irá escrever o nome dos canais, cada um em um papel no saquinho e sortear o segundo canal. Matheus, que é um aluno aplicado em matemática, resolveu calcular a probabilidade de ele conseguir assistir um canal de desenho no almoço e um de filme no jantar. Você consegue ajuda-lo a calcular?

Sugestão: use a primeira letra de cada canal para representar o evento, por exemplo: desenho (D), jornal (J) e filme (F).

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 49 – Continuação da questão 1 do Teste 4

- Vocês conseguem dizer quais são os possíveis casos que podem acontecer (Espaço amostral)? (*Sugestão:* utilize a notação (D,F), por exemplo).
- O que acontece quando ocorre a reposição do papel?
- Quais foram as escolhas de Matheus (evento)?
- A ordem dos eventos é importante? Por exemplo, a possibilidade de sair (D,F) é a mesma de sair (F,D)?
- Sortear o evento “desenho” no primeiro sorteio interfere o sorteio do evento “filme” no segundo sorteio?
- Podemos concluir que esses eventos são dependentes ou independentes?
- Calcule a probabilidade pedida.

Ativar o Windows

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 50 – Parte 2 da questão 1 do Teste 4

- E se agora Michele retirasse dois papezinhos, **sem reposição**, qual seria a probabilidade de sortear desenho e filme?

Vamos pensar:

- Se ela retira o primeiro papelzinho, qual a probabilidade de sair desenho?
- Se ela não repôs o papel na segunda retirada, há alteração no espaço amostral?
- Qual é o novo espaço amostral?
- Aplicando o princípio multiplicativo, a probabilidade final é:
- Neste caso, os eventos são dependentes ou independentes?
- Há relação entre a dependência de eventos e a alteração no espaço amostral?
- Calcule a probabilidade pedida

Ativar o Windows

Fonte: Dados da Pesquisa

O primeiro item pediu a determinação do espaço amostral e sua resolução. Para solucioná-lo pesquisadora foi ao quadro e pediu que eles ditassem os casos possíveis. Todos contribuíram corretamente para a resposta. O enunciado do segundo tópico: “*o que acontece quando ocorre a reposição do papel?*”, não foi suficientemente claro para que eles conseguissem formular uma resposta. A pesquisadora reformulou oralmente a questão. Após a explicação, todos responderam corretamente, assim como o terceiro item, que pedia o evento. No quarto item, que se referia a importância da ordem dos eventos, 6 alunos responderam que (D, F) e (F, D) eram a mesma coisa e 4 alunos, disseram que não eram. Os que afirmaram ser a mesma coisa, justificaram dizendo que “*filme e desenho ou desenho e filme*” representavam a mesma programação. Dos que responderam que se tratavam de casos diferentes, um aluno justificou que se recordou do caso de lançamento de dois dados, onde (1,2) e (2,1), por exemplo, representam situações diferentes. Outro aluno afirmou que assistir desenho no almoço é diferente de assistir desenho no jantar. Os demais concordaram com ele. Foi perguntado aos alunos que se equivocaram, se eles concordavam com as justificativas dos colegas. Todos disseram que sim. Foi reforçado que eles devem analisar todo o contexto do problema para estabelecer uma relação coerente entre os eventos.

O quinto item questionou se o sorteio de desenho na primeira retirada, interferiria no sorteio de filme, na segunda. Este item foi respondido corretamente por todos, assim como o próximo. Porém eles não conheciam os termos eventos dependentes e eventos independentes presentes na questão, visto que eles não tinham sido citados na videoaula. Aproveitou-se este momento para explicar o que estas denominações significam e como alteram ou não o espaço amostral. O sétimo item pediu o cálculo da probabilidade e todos responderam corretamente. Foi possível observar que os conceitos de espaço amostral,

evento e cálculo da probabilidade estavam bem definidos para todos os alunos.

A segunda parte da questão 1 (Figura 50) é sobre uma situação onde não havia a reposição do papel e todos os tópicos foram respondidos corretamente por todos os alunos.

Figura 51 – Questão 2 do Teste 4

2) Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Retiramos duas peças, ao acaso e com reposição, para inspeção. Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Considere que agora as retiradas serão feitas sem reposição, isto é, a primeira peça retirada não volta ao lote para retirarmos a segunda peça. Qual a probabilidade de se retirar duas peças defeituosas?

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 2** (Figura 51), foi referente a probabilidade de serem selecionadas duas peças defeituosas num determinado lote, sendo esta dividida em duas partes: a primeira com reposição das peças e a segunda sem reposição. A **questão 3** (Figura 52) foi sobre o lançamento de dois dados, um de seis e um de quatro faces, de onde se pedia um evento para cada dado e o cálculo da probabilidade desses eventos ocorrerem simultaneamente.

Figura 52 – Questão 3 do Teste 4

3) Suponha que Abel jogue ao mesmo tempo um dado de seis lados e outro de quatro lados. Seja A o evento em que o resultado do dado de seis lados é um número par e B o evento em que o resultado do dado de quatro lados é um número ímpar. Usando o espaço amostral dos resultados possíveis, qual a probabilidade de o resultado do dado de seis lados ser um número par e o do dado de quatro lados ser um número ímpar?

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Fonte: Dados da Pesquisa

A primeira parte da questão 2 foi respondida incorretamente por três alunos. Eles utilizaram as frações $\frac{7}{10}$ e $\frac{3}{10}$ ao invés de $\frac{3}{10}$ e $\frac{3}{10}$. Eles reconheceram o erro e admitiram não terem lido a questão com atenção, utilizando os valores que apareciam no enunciado. Apesar deste erro, eles e os demais alunos compreenderam que, como houve reposição, o espaço amostral se manteve o mesmo. A segunda parte da questão 2 e a questão 3 foram respondidas corretamente por todos.

3.4.2 Experimentação da Atividade em Grupo 4

Após o término do teste eles se dividiram em 3 grupos, que foram os mesmos das aulas anteriores. Como dois alunos faltaram, dois grupos ficaram com três alunos.

A **questão 1** (Figura 53) e (Figura 54) apresentou uma situação de uma menina que deseja retirar R\$ 1,25 de seu cofre que possui 20 moedas de R\$ 0,25 e 30 moedas de R\$ 1,00. A questão pediu a probabilidade de ela conseguir o valor desejado ao retirar duas moedas do cofre, sem reposição. A questão foi composta por alternativas que conduziram os alunos ao resultado, tais como a determinação do evento, se o mesmo é dependente ou independente e se o cálculo precisa ser dividido em duas partes. Ainda nessa questão os alunos foram guiados a construir uma árvore de possibilidades, sendo colocados três itens para auxiliar na construção e outros para determinação da probabilidade para cada retirada. Ao final, teve uma seção *“Pense mais um pouco”* onde foi perguntado a opinião deles sobre o resultado estar próximo de 50% e o que mudaria na questão caso houvesse a reposição das moedas.

Figura 53 – Primeira parte da Questão 1 da Atividade em Grupo 4

1) Maria vem juntando dinheiro de sua mesada durante um mês para comprar um presente de Natal. Percebeu que dentro do seu cofrinho tinham 20 moedas de 25 centavos e 30 moedas de R\$1,00. Certo dia ela resolveu retirar do seu cofre, R\$1,25 para comprar um picolé, só que ela não queria quebrá-lo, então teve que sacudi-lo um pouco para que a moeda caísse. Qual a probabilidade de ela, ao retirar duas moedas, uma seguida da outra, obter o valor desejado?

Vamos pensar...

- a) Qual é o evento esperado?
- b) Que tipo de eventos estamos trabalhando (dependentes ou independentes)?
- c) Para encontrarmos a solução precisamos subdividir o cálculo em duas partes. Quais?
- d) Podemos representar essa situação por árvore de probabilidade. Vamos construí-la:

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 54 – Continuação da Questão 1 da Atividade em Grupo 4

Quando utilizamos a árvore de probabilidades, devemos trabalhar probabilidades de cada "galho" da árvore.

- Qual seria a probabilidade de sair uma moeda de R\$1,00 na primeira retirada?
 - E a probabilidade de sair uma moeda de R\$0,25?
 - Observe que saindo uma moeda de R\$ 1,00 em seguida podem sair ou uma moeda de R\$1,00 (já que não houve reposição) ou uma moeda de R\$ 0,25. As probabilidades serão, respectivamente:
 - No segundo caso, se tiver saído uma moeda de R\$ 0,25, podem sair uma moeda R\$1,00 ou R\$ 0,25 (não houve reposição). As probabilidades serão respectivamente:
- e) Você acha que iremos utilizar todos os valores para o resultado final? Justifique.
- f) Calcule a probabilidade pedida.
- g) Você considera que a forma de representar por meio árvores facilita a compreensão desse tipo de problema?

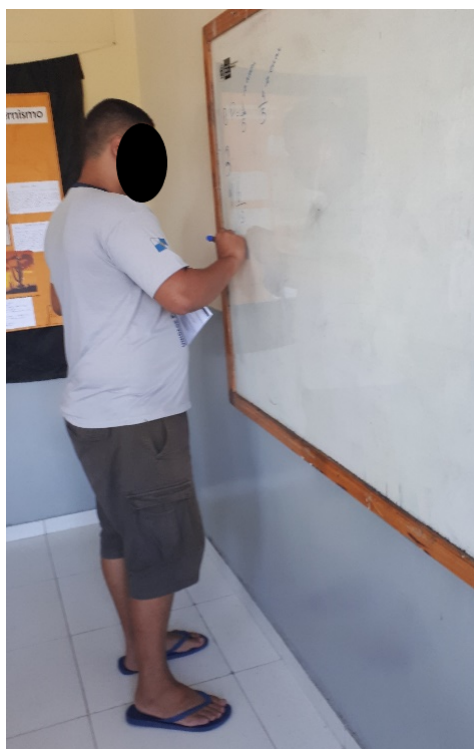
**ense mais um pouco....*

Fonte: Dados da Pesquisa

Nesta atividade, que teve um formato um pouco diferente das demais, a pesquisadora supôs que eles encontrariam mais dificuldades em alguns itens. Assim sendo, ela combinou com os alunos de estar mais disponível para intervir nos momentos em que eles tivessem dúvidas. Contudo seria muito importante que eles só a chamassem depois de terem esgotados todas as possibilidades de resolução.

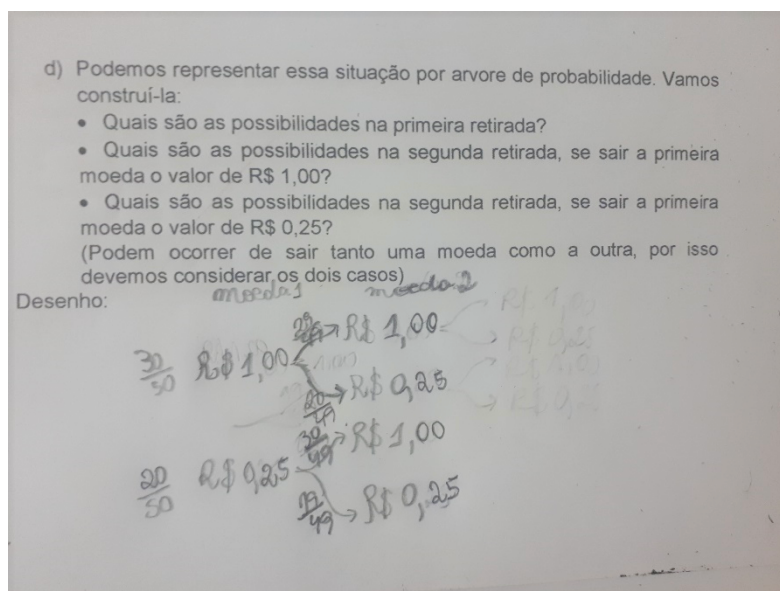
Na primeira questão, os itens *a* e *b* foram respondidos corretamente por todos, já o item *c* gerou dúvida nos três grupos. Acredita-se que foi pela má construção do enunciado pois eles não entenderam a que duas partes a questão estava se referindo. Foi explicado que se tratava da probabilidade da primeira e da segunda retiradas, respectivamente. O item *d*, referente a construção da árvore de possibilidades, foi respondido corretamente por todos os grupos. Em relação ao cálculo da Probabilidade, todos os grupos apresentaram dificuldade no cálculo para a retirada da segunda moeda pois eles estavam considerando a reposição da moeda. A pesquisadora pediu que relessem a questão e verificassem se, no contexto da mesma, faria sentido a moeda ser repostas. Foi sugerido ainda que colocassem as Probabilidades por cima de cada "galho" da árvore, pois isto facilitaria a organização da questão. Após a intervenção da pesquisadora e bastante discussão entre os integrantes de cada grupo, dois dos grupos concluíram corretamente a questão. O terceiro grupo errou pois alteraram somente o valor do evento, mantendo o número de moedas iniciais no espaço amostral. Foi pedido a um aluno para resolver a questão corretamente no quadro, explicando seu raciocínio (Figura 55)

Figura 55 – Aluno resolvendo Questão 1 da Atividade em Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 56 – Resolução da Questão 1 da Atividade em Grupo 4

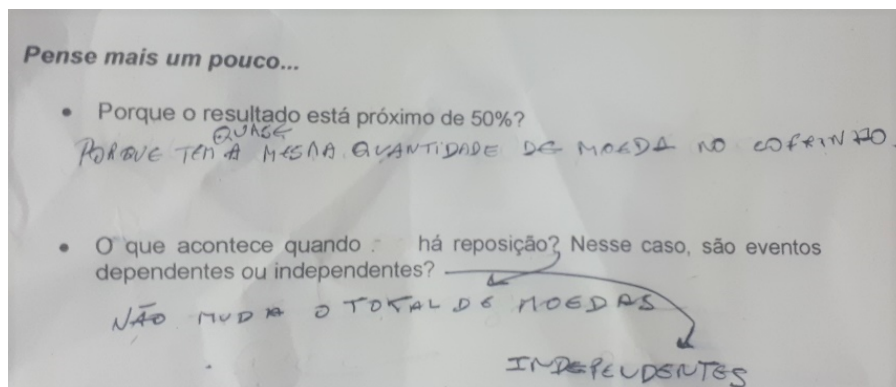


Fonte: Dados da Pesquisa

Os itens e e f foram respondidos corretamente por todos os grupos e todos responderam sim na letra g, que perguntou se eles consideravam que a construção da árvore auxiliava neste tipo de questão.

Na **Figura 57** estão as respostas dos itens do “Pense mais um pouco”. Apesar dos pontos de vista diferentes, considera-se que todos acertaram as perguntas.

Figura 57 – Resolução sa seção "Pense mais um pouco"da Atividade em Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 2** (**Figura 58**) falou sobre o monitoramento que um aeroporto faz para verificar bagagens com itens proibidos. Um alarme era tocado toda vez que um item proibido era encontrado. Foram dadas duas informações com as chances, em porcentagens, dos alarmes dispararem, ou não, caso a bagagem tenha um item proibido. E de tocar, ou não, caso não tenha. Foi pedida a Probabilidade de, ao ser sorteada uma bagagem e o alarme disparar, ela conter um item proibido. O exercício sugeriu a construção do diagrama da árvore.

Figura 58 – Questão 1 da Atividade em Grupo 3

- 2) Um aeroporto monitora bagagens contra itens proibidos e um alarme deve disparar toda vez que um item proibido for detectado.
Suponha que 5% das bagagens contenham itens proibidos.
- Se uma bagagem contém um item proibido, há uma chance de 98% de o alarme disparar.
 - Se uma bagagem não contém nenhum item proibido, há uma chance de 8%, de o alarme disparar.

Dado que uma bagagem escolhida aleatoriamente dispare o alarme, qual é a probabilidade de ela conter um item proibido?

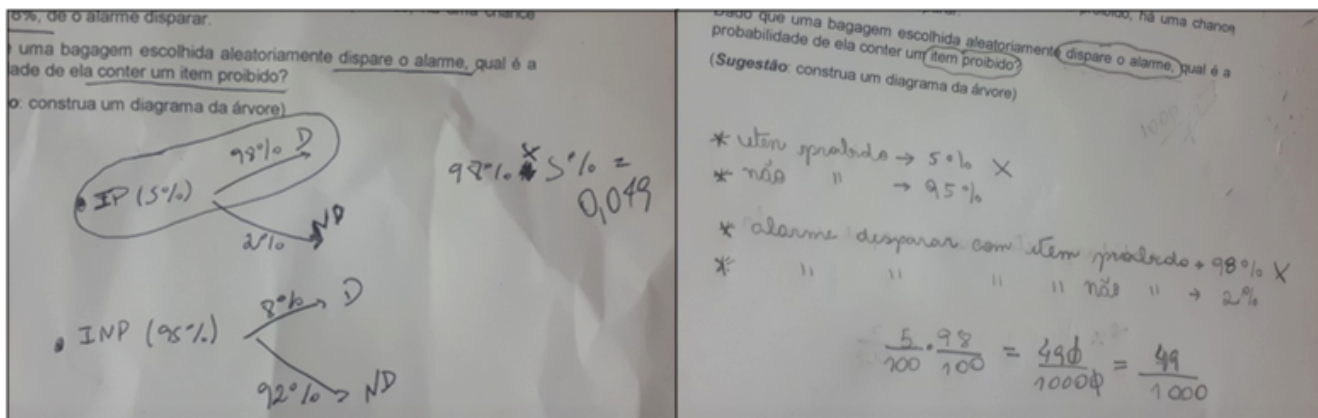
(**Sugestão:** construa um diagrama da árvore)

Fonte: Dados da Pesquisa

Essa questão levantou muitas dúvidas em relação a interpretação do enunciado, mas as mesmas foram discutidas e esclarecidas pelos próprios integrantes do grupo. Por vezes, eles solicitaram a pesquisadora para verificar se o caminho que escolheram, ou a decisão que tomaram estavam corretos. Chamavam também quando dois integrantes

tinham opiniões diferentes e queriam verificar qual estava certo. Ao final todos ficavam convencidos do percurso correto para a resolução. Em relação a construção da árvore, um grupo questionou se era obrigatório, visto que eles resolveram a questão sem utilizá-la. Foi respondido que não. Teve uma questão similar a esta na videoaula e foi respondida sem a construção da árvore. Percebeu-se que eles utilizaram a anotação feita em casa para se inspirar para a resolução. Os três grupos responderam à questão corretamente (Figura 59).

Figura 59 – Resoluções da Questão 2 da Atividade em Grupo 4

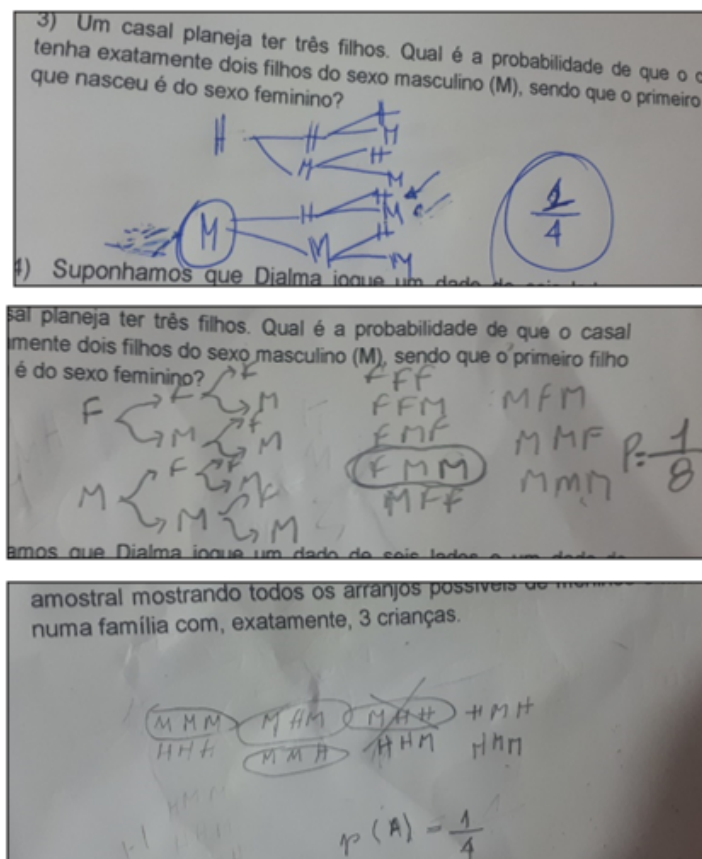


Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 3** foi sobre um casal que planejava ter três filhos e pediu a Probabilidade de que eles tivessem dois filhos homens sabendo que o primeiro filho, era do sexo feminino. Para essa questão não foi sugerida a construção da árvore. A pesquisadora percebeu que todos os grupos estavam com dificuldade de iniciar a questão e essa dificuldade era proveniente da determinação do espaço amostral. Observado isto, ela entrevistou e sugeriu que utilizassem as letras M e F para indicar o sexo masculino e feminino, respectivamente. Feito isto, eles deveriam considerar todos os casos possíveis para o nascimento de três filhos. Uma dica seria associar a resposta com o caso da observação da face superior no lançamento de uma moeda três vezes consecutivas. Percebeu-se que esta dica “clareou” a questão para eles. Dois grupos construíram a árvore das possibilidades, destes um acertou a questão. A pesquisadora perguntou como eles tinham feito pois não havia cálculos na resposta, só o desenho da árvore. Eles responderam que haviam 4 galhos que começavam com mulher e destes apenas um galho indicavam dois homens, logo a probabilidade seria $\frac{1}{4}$. O grupo que não acertou a questão, respondeu com $\frac{1}{8}$. Quando questionados do porquê da resposta, eles justificaram que havia uma possibilidade com o primeiro filho do sexo feminino em oito possibilidades no total. A pesquisadora explicou que a questão já determinou o sexo do primeiro filho e que informação faz uma redução do espaço amostral, visto que não faz sentido considerar os casos em que o primeiro filho é do sexo masculino. Aproveitou-se esta oportunidade para reforçar a os conceitos de probabilidade condicional. Todos entenderam onde erraram. O terceiro grupo não construiu a árvore. Eles listaram os casos, por tentativa.

Encontraram corretamente os 8 casos possíveis para o sexo de três filhos, e identificaram o evento pedido (Figura 60).

Figura 60 – Resoluções da Questão 3 da Atividade em Grupo 4



Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 4** (Figura 61) foi referente ao lançamento de dois dados, um de seis e outro de quatro faces. Foram pedidos dois eventos: sair face 5 no dado de seis faces; sair soma 7 no lançamento simultâneo dos dois dados. A questão tinha quatro alternativas, onde foi pedida a Probabilidade da ocorrência de cada evento, da ocorrência dos eventos simultaneamente e se os mesmos são dependentes ou não. Essa questão foi um desafio para todos os grupos. Inicialmente a consideraram fácil, mas nenhum grupo conseguiu concluí-la corretamente. O item *a* foi respondido por todos os grupos sem problemas, já nos itens *b* e *c*, não tiveram o mesmo sucesso. No item *b*, para determinarem o espaço amostral, todos os grupos identificaram corretamente que deveriam relacionar uma face do dado de seis lados com uma face do dado de quatro lados de modo que a soma dessas faces resultasse sete. Porém, todos os grupos encontraram mais pares do que deveriam, pois consideraram todos os casos como, (2,5) e (5,2) por exemplo. Foi explicado que nem sempre isso é possível, visto que os dados tem números de faces diferentes. A pesquisadora sugeriu que utilizassem o PFC para determinar a quantidade correta de pares para o espaço amostral. Eles poderiam utilizar o resultado como referência para não extrapolar na

contagem dos casos, caso decidissem descrever todos os pares possíveis, apesar desta descrição não ser necessária. Uma vez determinado o número de elementos do espaço amostral, bastaria que determinassem os casos em que resultaria soma 7, tomando o cuidado de não utilizarem casos como (1,6) e (6,1), por exemplo. Um grupo questionou que se o dado de seis faces fosse lançado primeiro e o de quatro faces depois, existiria o (6,1) e se o lançamento fosse o contrário, existiria o (1,6). A pesquisadora respondeu que eles deveriam especificar qual dado seria o primeiro e qual seria o segundo e manter a mesma ordem até o final. Independente da ordem escolhida, a quantidade de pares do evento seria a mesma e o resultado também. A pesquisadora percebeu que eles não estavam convencidos da resposta e sugeriu a construção uma tabela semelhante à do lançamento simultâneo de dois dados de seis faces, construindo-a no quadro com a participação deles. Pode-se perceber que a construção da tabela auxiliou bastante na compreensão da questão e, com a utilização dela, eles visualizaram claramente a resposta do item c. Em relação ao item d, percebeu-se que eles não estavam tão confiantes quanto a resposta apesar de terem respondido corretamente. A pesquisadora reforçou novamente com eles o conceito de dependência de eventos.

Figura 61 – Questão 4 da Atividade em Grupo 4

4) Suponhamos que Djalma jogue um dado de seis lados e um dado de quatro lados simultaneamente. Considere A como o evento em que o lado de seis lados vire no número 5 e B como o evento em que a soma dos dados seja igual a 7. Usando o espaço amostral dos resultados possíveis, responda às seguintes questões.

- a) Qual é a probabilidade de o lado de seis lados virar no número 5?
- b) Qual é a probabilidade de a soma dos dois dados ser igual a 7?
- c) Qual é a probabilidade de o dado de seis lados virar no número 5 e a soma dos dois dados ser igual a 7?
- d) Os eventos A e B são independentes?

Fonte: Dados da Pesquisa

A **questão 5** (Figura 62) foi sobre o sorteio de uma determinada caixa que estava em uma sacola que continha seis caixas azuis e duas verdes, das quais três caixas azuis e uma verde contém um prêmio. Foi uma questão de verdadeiro ou falso onde as alternativas comparam a probabilidade de ocorrências de dois eventos, sendo um dos casos uma Probabilidade condicional. Foi combinado que iríamos conferir um item por vez e não todos juntos ao final. Os três grupos disseram ser falso o primeiro item. Ao verificar as resoluções observou-se que eles calcularam corretamente, porém não simplificaram a fração e nem perceberam que se tratavam de frações equivalentes. Foi pedido que fizessem a simplificação e julgassem novamente o item. Cientes que as frações poderiam e deveriam

ser simplificadas, eles resolveram corretamente o segundo item. Percebeu-se que eles estavam inseguros em relação ao terceiro item. A expressão “*eu acho*” foi dita por todos os grupos, apesar de terem acertado. O quarto item foi consequência do terceiro.

Figura 62 – Questão 5 da Atividade em Grupo 4

5) Júnior tem uma sacola com 8 caixas de formato idêntico. Seis destas caixas são azuis, e duas são verdes.

Três das caixas azuis têm um prêmio e uma das caixas verdes têm um prêmio.

Júnior escolhe aleatoriamente uma caixa da sacola. Considere A como o evento em que ele seleciona uma caixa com um prêmio e B como o evento em que a caixa é verde.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

A probabilidade condicional de Júnior escolher uma caixa com um prêmio, dado que ele já escolheu uma caixa verde, é igual à probabilidade de ele escolher uma caixa com um prêmio.

A probabilidade condicional de Júnior escolher uma caixa verde, dado que ele escolheu uma caixa com prêmio, é igual à probabilidade de ele escolher uma caixa verde.

Os eventos A e B são eventos independentes.

Os resultados dos eventos A e B dependem um do outro.

Fonte: Dados da Pesquisa

Apesar dos erros e das dificuldades encontradas na resolução desta atividade, pode-se perceber que eles adquiriram uma grande bagagem de aprendizagem.

3.5 Experimentação do Jogo

Na aula posterior ao término da aplicação das atividades, foi aplicado um jogo de tabuleiro – Jogo das Amebas [Apêndice C](#).

O jogo foi em grupo, sendo cada grupo dividido em duas duplas adversárias. Visto isso, os alunos decidiram manter o mesmo grupo que haviam formado desde o início das atividades. Todos os alunos estavam presentes nesta aula, sendo assim foram formados 3 grupos de 4 alunos cada.

Foi distribuído aos grupos o tabuleiro do jogo, uma moeda e uma porção de grãos de feijões que representariam as amebas. Eles se mostraram bastante curiosos e interessados. Foi reforçado com eles os dois modelos de tabelas presentes na folha do aluno e que eles deveriam reproduzir numa folha A4 para preencher durante a realização do Jogo. Após, foram explicados os objetivos e as regras.

Todos os grupos apresentaram dúvidas sobre os procedimentos e as regras do jogo, então a pesquisadora foi em cada grupo fazendo exemplo de jogadas para que eles pudessem entender. Após garantir que todos os participantes entenderam, foi pedido que jogassem "cara ou coroa" para decidirem qual dupla seria o time A (é mais provável não haver ameba na 5ª geração) e qual seria o time B (é mais provável que haja pelo menos uma ameba na 5ª geração).

Após a escolha dos vencedores, das 6 duplas existentes, 4 duplas escolheram o time B e 2, o time A. Quando questionados do porquê das suas escolhas, algumas das respostas obtidas foram:

“são 32 amebas gente, é claro que vai ter pelo menos uma no final” (Aluno do time B)

“porque eu acho que a chance de chegar uma viva é maior do que não chegar nenhuma” (Aluno do time B)

“eu acho que é mais fácil chegar uma, então como está muito obvio vou escolher o contrário” (Aluno do time A)

“eu acho que as chances são iguais, mas como não tem essa opção, eu escolho não chegar nenhuma” (Aluno do time A)

O jogo foi iniciado (Figura 63) e a pesquisadora foi solicitada algumas vezes para retirar dúvidas referentes ao preenchimento da tabela. No demais todo o desenvolvimento do jogo ocorreu de forma tranquila e correta.

Figura 63 – Experimentação do Jogo



Fonte: Dados da Pesquisa

Ao final da partida, o time A, venceu em todos os grupos. Em meio ao clima descontraído e de comemoração pelas duplas vencedoras a pesquisadora convidou-os a prestar atenção na explicação que justificava esse fato. Foram feitos então, no quadro, os cálculos para a Probabilidade de não haver nenhuma ameba nas gerações 1 e 2. O cálculo para demais gerações é grande e poderia causar confusão e desmotivação por parte dos

alunos. Como isso não era o desejado, foi dito que os cálculos para as demais gerações eram feitos de forma similar e foi mostrado somente os seus resultados, em porcentagem. A pesquisadora se comprometeu a enviar a foto da resolução completa no grupo do *WhatsApp* para quem se interessasse e assim foi feito.

Após os comentários e discussões a respeito de probabilidade, incertezas, confiança nos resultados e assuntos afins, foi pedido que eles dessem continuidade as atividades do jogo, agora construindo três gráficos de colunas. Tanto as tabelas quanto os gráficos, foram construídos em folhas A4 com utilização de régua. O primeiro gráfico conteve informações sobre a frequência dos resultados dos lançamentos (cara ou coroa). O segundo gráfico, sobre o resumo do total de gerações por família e o terceiro, com o resultado do time vencedor em cada jogada.

Antes de ser iniciada a construção dos gráficos, foi perguntado se eles tinham uma estimativa a respeito do total de caras e coroas, tema do gráfico 1.

Em relação a esta pergunta, destaca-se a resposta de dois alunos:

“acho que vai ficar 50% pra cara e 50% pra coroa porque as duas faces tem a mesma chance de sair”. (Aluno 1)

“as chances são iguais pros dois lados, então as colunas do gráfico vão ficar do mesmo tamanho”. (Aluno 2)

Em relação ao tema do segundo gráfico, sobre o total de famílias por geração, um aluno disse:

“os valores das famílias vão diminuindo até chegar em zero”. (Aluno 3)

“como a gente já sabe que não teve família na ultima geração, eu acho que o gráfico vai ficar parecendo uma escada”. (Aluno 2)

Por fim, em relação ao time vencedor, destacam-se dois comentários:

“o time A vai ficar com a barra maior porque ele venceu”. (Aluno 4)

“as minhas barras vão ficar quase do mesmo tamanho porque eu perdi por uma rodada”. (Aluno 5)

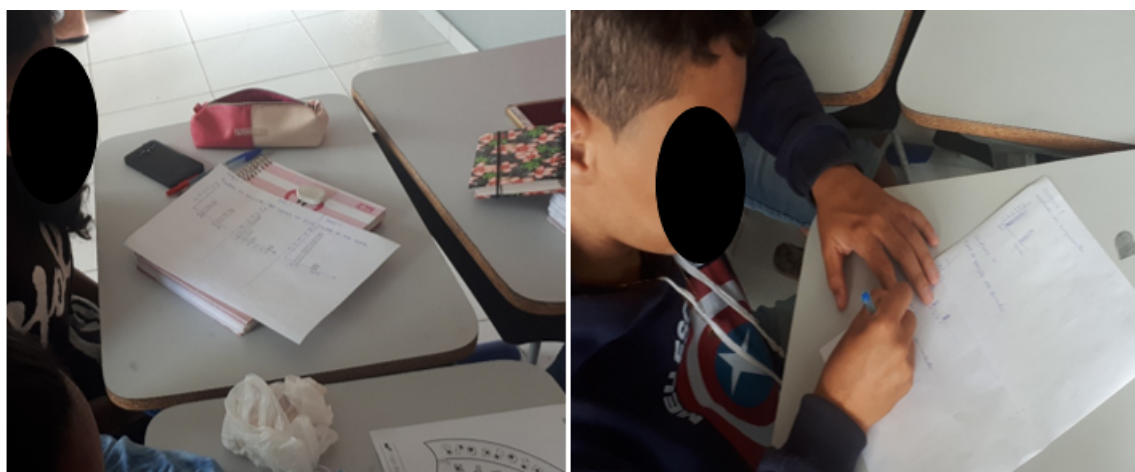
A discussão para essas perguntas foi deixada para ser feita após a construção dos gráficos (Figura 65). Para essa construção, eles fizeram um resumo da tabela (Figura 64) que construíram no jogo em uma segunda tabela, cujo modelo também estava anotado no quadro. A partir desta que seriam elaborados os gráficos.

Figura 64 – Construção das Tabelas



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 65 – Construção dos Gráficos



Fonte: Dados da Pesquisa

O gráfico que mais os surpreendeu foi o primeiro. Eles pareciam bem confiantes em relação a dar resultados iguais ´para cara e coroa. Foi dito que o fato das faces possuírem a mesma chance de ser sorteada, não significava em para um número grande de lançamentos esses resultados seriam iguais, mas que variações em torno de 50% eram plausíveis de serem observadas.

O segundo gráfico também causou uma certa surpresa. Pode-se perceber que eles esperavam um gráfico com barras decrescentes, mas houve oscilações no tamanho das barras. Foi explicado que, o fato de não ter chegado nenhuma família viva na 5ª geração, não significava, necessariamente, um número somente decrescente de famílias. Foi reforçado que a análise do gráfico nos entrega o primeiro indício da baixa probabilidade da família sobreviver sob as condições do jogo.

O terceiro gráfico apresentou uma estimativa das chances de cada time vencer, indicando que as condições são mais favoráveis para o time A e sua construção ficou como o esperado.

Ao final das construções dos gráficos foi pedido que cada grupo trocasse informações com os demais, comparando os gráficos e os resultados.

3.6 Experimentação da Atividade Avaliativa

Em pesquisa para a elaboração da atividade avaliativa, pode-se perceber que questões sobre probabilidade tem aparecido com bastante frequência no ENEM, sendo este tema encontrado, inclusive, em questões de outras disciplinas. Atribui-se esse fato a importância deste conteúdo, visto que ele se relaciona à análise de dados em problemas sociais e econômicos, que envolvem questões de saúde, população, transporte, finanças, entre outros. Vale destacar, que o ENEM, não exige do aluno apenas a leitura e interpretação dos dados, mas, principalmente, a reflexão crítica, a investigação e a tomada de decisões a partir desses dados. Para a atividade avaliativa, foram selecionadas 7 questões deste exame que abordam, prioritariamente, o conceito básico de probabilidade, sem mais fórmulas ou regras, como tem sido observado nesta avaliação.

A atividade foi respondida individualmente (Figura 66) e estavam presentes 11 alunos.

Figura 66 – Experimentação da Atividade Avaliativa



Fonte: Dados da Pesquisa

O Gráfico 1 mostra o resultado quantitativo do aproveitamento dos alunos com o total de acertos por questão.

Gráfico 1 – Gráfico com total de acertos por Questão da Atividade Avaliativa



Fonte – Autoria Própria

Ao final da aplicação, a pesquisadora recolheu as avaliações para correção, devolvendo-as aos alunos na aula seguinte. Nesta aula foram feitas as correções de todas as questões com o objetivo de esclarecer as dúvidas que ocorreram.

Foi cogitado a possibilidade de utilizar algum recurso *online*, como o *Google* Questionário, nos *Smartphones* dos alunos, porém a maioria não possui internet por dados móveis disponíveis e a escola não dispõe de *Wifi*, ficando desta forma, inviável a utilização de tal recurso.

O resultado quantitativo desta atividade foi considerado satisfatório visto que todas as questões obtiveram um total de acertos acima de 50%.

3.7 Questionário

Além da seleção dos vídeos, dos jogos e da elaboração das atividades, foi elaborado um questionário ([Apêndice D](#)) para ser respondido pelos alunos participantes da experimentação das atividades.

As enquetes são o principal instrumento para levantamento de grau de satisfação dos envolvidos, secundado por questionários com questões abertas onde são registrados os sentimentos dos participantes do modelo e baseado no que, as alterações são efetuadas, até que se atinja o que pode ser considerado como a situação ideal para o processo. (MUNHOZ, 2015, p.85).

O questionário teve por objetivo investigar a opinião dos alunos a respeito das videoaulas e das atividades propostas, buscando, desta forma, diagnosticar a eficácia do

método para a aprendizagem do tema estudado. Na última pergunta foi solicitada a opinião dos alunos em relação ao modelo utilizado.

3.7.1 Análise do Questionário da Experimentação

Nesta subseção é feita a análise dos questionários respondidos pelos 12 alunos que participaram da experimentação.

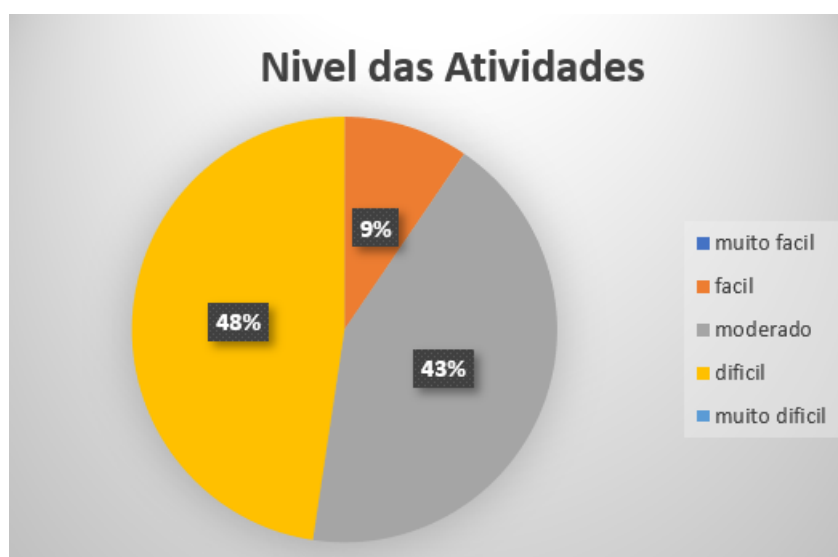
Buscou-se investigar se os alunos já tinham algum conhecimento de Probabilidade. Todos os alunos afirmaram nunca ter estudado esse conteúdo e que as videoaulas contribuíram para a compreensão do tema. Desse total, 58% consideraram que contribuíram de forma *bastante esclarecedora* e o restante de forma *esclarecedora*. Esses índices estão coerentes com o que foi verificado durante a resolução das atividades.

Em relação aos botões “pausar” e “retroceder”, 83% afirmaram fazer uso deste recurso e 58% disseram fazer anotações referentes ao conteúdo.

Quanto à contribuição das atividades presenciais, todos os alunos disseram que elas contribuíram para compreensão do tema em estudo e destes, cerca de 75% consideraram que foi de forma *bastante esclarecedora*, os demais consideraram que foi de forma *esclarecedora*.

Já em relação ao nível das atividades, a maioria dos alunos considerou *moderado*. O restante considerou *fácil*. Apenas um aluno classificou o nível das atividades como *difícil* ([Gráfico 2](#)). Considera-se que o fato das atividades solicitarem investigação, análise e estabelecimento de conjecturas, tenha influenciado na classificação das atividades como *moderadas*. De acordo com [Moran \(2000\)](#), alguns alunos não aceitam tão facilmente a mudança na forma de ensinar e aprender. Eles estão acostumados a receber tudo pronto do professor, e esperam que ele continue ministrando aulas, como sinônimo de ele falar e os alunos escutarem ([MORAN, 2000](#)).

Gráfico 2 – Gráfico sobre opinião dos alunos em relação ao Nível das Atividades

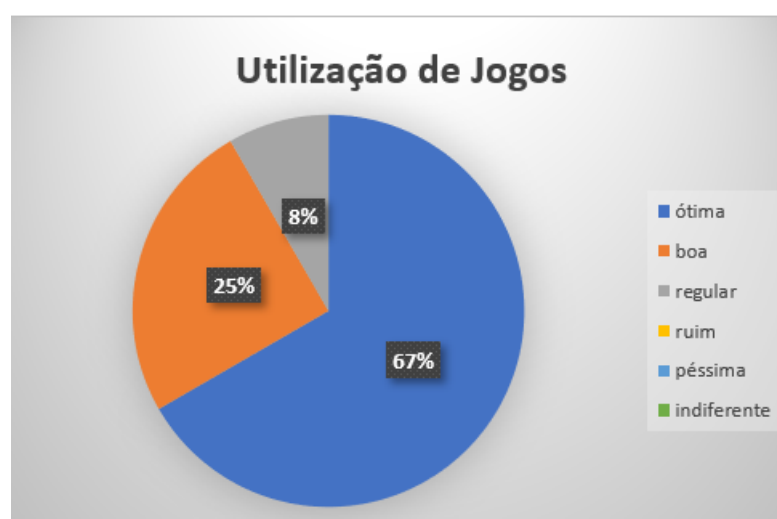


Fonte – Autoria Própria

Foi considerado, de forma unanime, que trabalhar em grupo auxiliou no desenvolvimento da aprendizagem. Este fato corrobora com o que diz Moran (2015) quando afirma que “sozinhos vamos até um certo ponto; juntos, também. Essa interconexão entre a aprendizagem pessoal e a colaborativa, num movimento contínuo e ritmado, nos ajuda a avançar muito além do que o faríamos sozinhos” (MORAN, 2015, p. 12).

Sobre a utilização dos jogos, a maioria considerou *ótima*, como mostrado no Gráfico 3.

Gráfico 3 – Gráfico sobre a opinião dos alunos em relação a utilização de Jogos



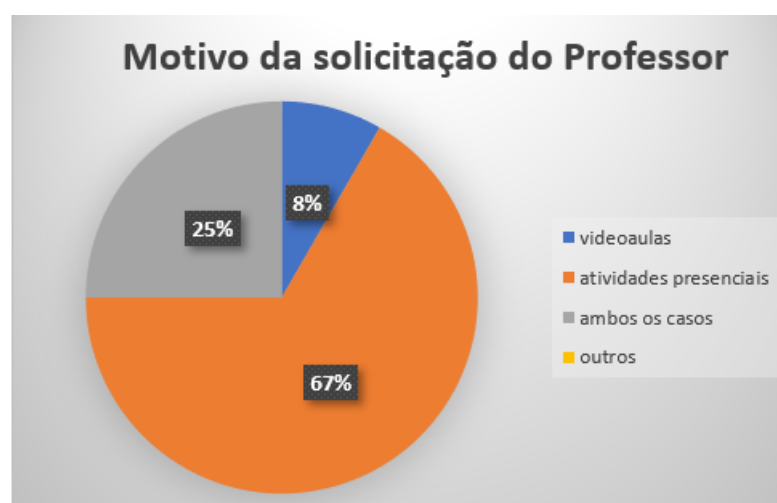
Fonte – Autoria Própria

Quando questionados sobre a importância do papel da pesquisadora durante a aula, 75% dos alunos consideraram seu papel *muito importante*, enquanto 25% consideraram *importante*. A opinião dos alunos está de acordo com as considerações de [Vieira \(2011\)](#), quando afirma que:

É interessante compreendermos que as TIC têm um potencial inovador enorme, contudo elas vieram para enriquecer o espaço educacional, não para substituir o professor. Assim, sozinhas elas são apenas ferramentas, mas se bem utilizadas, elas podem colaborar para que haja de fato uma mudança radical no processo ensino-aprendizagem. ([VIEIRA, 2011](#), p. 3).

Sobre os motivos para a solicitação da pesquisadora durante a aula, a maioria afirmou solicitá-la para retirar dúvidas referentes as atividades presenciais, como pode ser observado no [Gráfico 4](#).

Gráfico 4 – Gráfico sobre o motivo de solicitação do Professor durante a resolução das Atividades



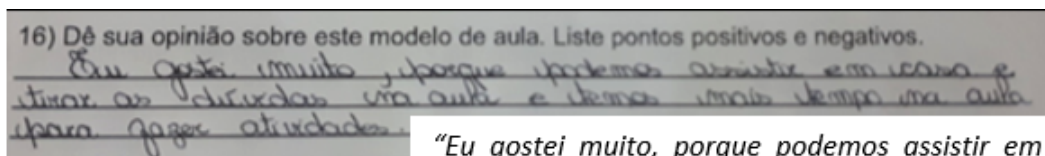
Fonte – Autoria Própria

Quando questionados se gostariam de continuar utilizando o modelo Sala de Aula Invertida nas aulas de matemática, todos disseram *sim*. Atribui-se esta opinião ao fato de o aluno ser um agente ativo do processo, o que está de acordo com [Moran \(2000\)](#), quando diz que o conhecimento que é elaborado a partir da própria experiência se torna muito mais forte e definitivo em nós. Considera-se também que a incorporação da tecnologia como ferramenta para sua aprendizagem contribuiu para este resultado.

A última pergunta do questionário foi aberta e pediu a opinião dos alunos sobre este modelo de aula, listando pontos que eles consideravam positivos e negativos.

Dentre as respostas, destacam-se os comentários de cinco alunos ([Figura 67](#) a [Figura 71](#)):

Figura 67 – Opinião do aluno A1 sobre a Sala de Aula Invertida

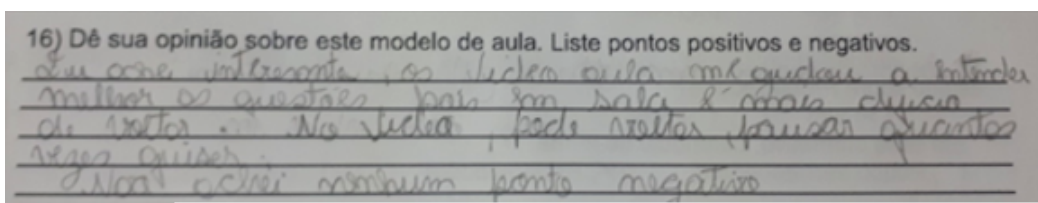


1.png

“Eu gostei muito, porque podemos assistir em casa e tirar as dúvidas na aula e temos mais tempo na aula para fazer atividades”

Fonte: Dados da Pesquisa

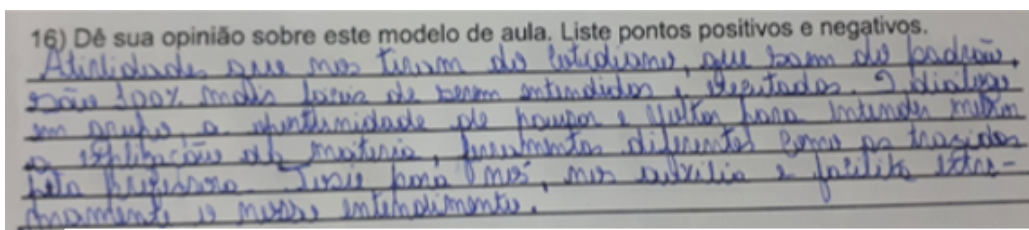
Figura 68 – Opinião do aluno A2 sobre a Sala de Aula Invertida



“Eu achei interessante, as videoaulas me ajudaram a entender melhor as questões, pois em sala é mais difícil de volta. No vídeo, pode voltar, pausar quantas vezes quiser. Não achei nenhum ponto negativo”

Fonte: Dados da Pesquisa

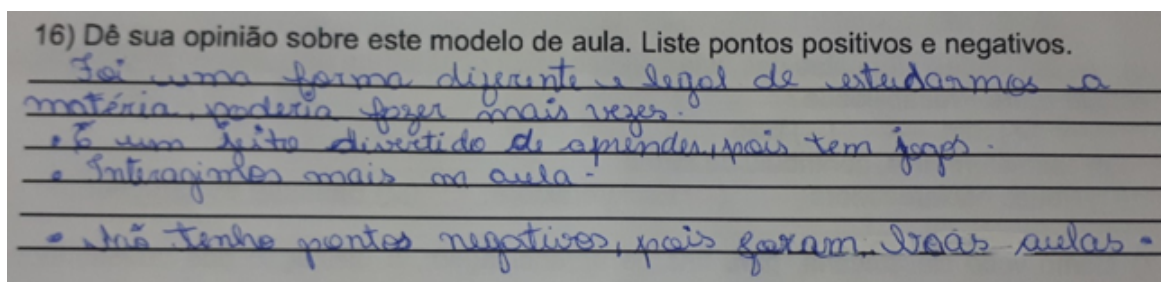
Figura 69 – Opinião do aluno A3 sobre a Sala de Aula Invertida



“Atividades que nos tiram do cotidiano, que saem do padrão são 100% mais fáceis de serem entendidas e executadas. O diálogo em grupo, a oportunidade de pausar e voltar para entender melhor a explicação da matéria, ferramentas diferentes como as trazidas pela professora Josie para nós, nos auxilia e facilita extremamente o nosso entendimento”

Fonte: Dados da Pesquisa

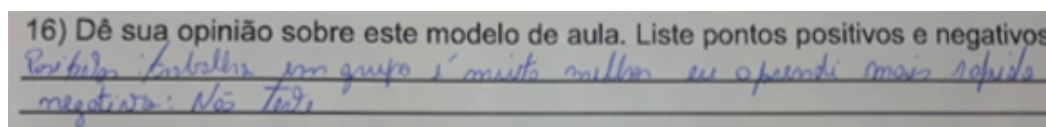
Figura 70 – Opinião do aluno A4 sobre a Sala de Aula Invertida



“Foi uma forma diferente e legal de estudarmos a matéria, poderia fazer mais vezes. É um jeito divertido de aprender, pois tem jogos; interagimos mais na aula. Não tenho pontos negativos, pois foram boas aulas”

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 71 – Opinião do aluno A5 sobre a Sala de Aula Invertida



“Positivo: Trabalhar em grupo é muito melhor. Negativo: Não teve”

Fonte: Dados da Pesquisa

Diante do exposto, conclui-se que os resultados foram satisfatórios. A análise dos dados levantados, das justificativas e das respostas das atividades, permitiu confirmar as vantagens da Sala de Aula Invertida. Além disso, foi possível constatar que a referida modalidade aliada às atividades e à intervenção da pesquisadora contribuíram para a construção do conhecimento sobre Probabilidade. Tais afirmações referem-se ao grupo de alunos que participaram desta pesquisa.

Capítulo 4

Considerações Finais

Neste capítulo apresentam-se as principais considerações obtidas durante todo o processo de desenvolvimento desta pesquisa. Relatam-se a relevância deste estudo e a análise de alguns resultados. São também expostas as contribuições e as dificuldades encontradas e sugeridas algumas ações que podem ser realizadas em pesquisas futuras.

Conforme citado na introdução, este trabalho teve como objetivo a implementação da modalidade Sala de aula Invertida, em uma turma da 3ª série do ensino médio, utilizando tecnologias educacionais para o ensino de Probabilidade. Vale ressaltar que a pesquisa dos recursos pedagógicos a serem utilizados possibilitou um estudo sobre as TDIC, sobre as Metodologias Ativas de Ensino e sobre Probabilidade e o seu processo de ensino e aprendizagem.

Em relação a experimentação das atividades, pode-se afirmar que os alunos contribuíram de forma valorosa para o andamento deste trabalho. Todos demonstraram grande interesse pelas atividades, realizando-as com entusiasmo e participando ativamente. Ressalta-se que as videoaulas foram bem aceitas por eles, sendo assistidas com agrado e quase sempre com facilidade, como os próprios relataram.

Com base na análise das resoluções das atividades, nas observações feitas durante a aplicação das atividades e nas respostas orais e escritas dos alunos, observou-se que a dificuldade mais frequente foi a interpretação das questões. Considera-se que o acesso a pesquisadora na hora das dúvidas, as discussões realizadas nas atividades individuais e a organização em grupo para a resolução das atividades principais proporcionaram uma aprendizagem mais significativa e contribuíram para que muitas dúvidas fossem minimizadas e até mesmo sanadas.

Quanto a utilização das videoaulas, considera-se que estas, quando bem utilizadas, beneficiam não só os alunos, mas também, os professores, pois podem trazer significativas contribuições para o processo de ensino e aprendizagem. Destaca-se como importante neste trabalho à oportunidade de ser usado um método pedagógico diferente, que provavel-

mente ajuda a despertar o interesse dos alunos. Além disso, faz com que se acredite que a aprendizagem de Matemática, como de outras disciplinas pode ser recuperada, basta que os professores busquem formas de mediar a aprendizagem.

Algumas dificuldades foram superadas durante o desenvolvimento deste trabalho. Para a escolha das videoaulas, foram realizadas diversas pesquisas para encontrar aquelas que atendessem melhor aos objetivos traçados. O resultado foi positivo, visto que alunos participantes da experimentação as entenderam sem dificuldades. O mesmo ocorreu durante a elaboração e seleção das atividades presenciais que seriam utilizadas, pois foi necessária uma profunda análise sobre como as mesmas poderiam contribuir para a aprendizagem do conteúdo em estudo. Um aspecto que pode ser melhorado é a elaboração de uma aula de revisão com os assuntos que são pré-requisitos para o bom desenvolvimento do tema. No entanto, diante dos resultados obtidos, conclui-se que as dificuldades encontradas enriqueceram este trabalho.

Vale destacar, ainda, que possibilidade de trabalhar utilizando Ensino Híbrido foi um momento de grande aprendizado para a autora. A pesquisa dos recursos pedagógicos e a elaboração das atividades ampliaram os conhecimentos destas nesse tipo de prática. Este trabalho contribuiu também em relação à escrita, à leitura e pesquisa. Além disso, ter a oportunidade de trabalhar num modelo pedagógico no qual acredita, contribuiu significativamente para o seu crescimento profissional e científico.

Neste trabalho, percebeu-se que recursos pedagógicos quando bem utilizados em sala de aula tornam-se um eficiente aliado do professor no processo de ensino e aprendizagem. Percebeu-se também que quando esses recursos são TDIC é muito importante que o professor tenha consciência de seu papel de mediador no processo de aprendizagem, visto que as tecnologias sozinhas não resolvem problemas.

Respondendo a questão de pesquisa, foi possível constatar que uma sequência didática que utilize a Sala de Aula Invertida, pode sim contribuir para o Ensino da Probabilidade para alunos da 3ª série do Ensino Médio. Pode-se afirmar, diante das observações feitas e da análise das atividades, que a aprendizagem do tema aconteceu de forma satisfatória, onde os alunos demonstraram adquirir as habilidades e competências fundamentais a serem desenvolvidas com este conteúdo, sugeridas pelos documentos oficiais.

Espera-se, com o trabalho desenvolvido, estar semeando ideias da importância da utilização do Ensino Híbrido na construção de conhecimentos matemáticos.

Referências

- ALMEIDA, B. L. C. *Possibilidades e Limites de uma Intervenção Pedagógica pautada na Metodologia da Sala de Aula Invertida para os Anos finais do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado), Pato Branco, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.
- ANDRADE, M. do Carmo Ferreira de; SOUZA, P. R. de. Modelos de rotação do ensino híbrido: Estações de trabalho e sala de aula invertida. v. 9, n. 1, 2016. ISSN 1983-1838. Acesso em 22 Ago. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 55.
- BACICH, L.; MORAN, J. *Metodologias Ativas para uma Educação Inovadora. Uma Abordagem Teórico Prática*. Porto Alegre: [s.n.], 2018. Citado 16 vezes nas páginas 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 49, 51, 54, 55, 66, 76, 77 e 85.
- BACICH, L.; NETO, A. T.; TREVISANI, F. de M. *Ensino Híbrido: Personalização e Tecnologia na Educação*. Porto Alegre: [s.n.], 2015. Citado 6 vezes nas páginas 38, 43, 44, 45, 46 e 87.
- BERBEL, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. v. 32, n. 1, p. 25–40, 2011. Acesso em 13 ago. 2019. Disponível em: <http://www.proiac.uff.br/sites/default/files/documentos/berbel_2011.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.
- BERGMAN, J.; SAMS, A. *Sala de Aula Invertida: Uma Metodologia Ativa de Aprendizagem*. 1. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2019. Citado 8 vezes nas páginas 49, 50, 51, 52, 53, 54, 67 e 87.
- BERNSTEIN, P. *Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco*. 36. ed. [S.l.: s.n.], 1997. Citado 6 vezes nas páginas 24, 25, 26, 27, 28 e 29.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: [s.n.], 1974. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Brasília, DF, 1998. Citado 7 vezes nas páginas 18, 22, 23, 38, 39, 76 e 77.
- BRASIL. *PCN + Ensino Mo: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 23, 56, 57, 69, 71 e 72.
- BRASIL. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, DF, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 19, 23 e 36.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 71.

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Ministério da Educação e Cultura*. 2. ed. Brasília, DF, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 18, 36 e 56.

BRISVILLE, J.-C. O encontro de descartes com o jovem pascal. *Estudos Avançados*, v. 5, n. 11, 1991. Acesso em 01 de set. 2019. Citado na página 27.

CARVALHO, R. As tecnologias no cotidiano escolar: Possibilidades de articular o trabalho pedagógico aos recursos tecnológicos. 2009. Acesso em 21 de ago. 2019. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1442-8.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

CHRISTENSEN, C. M.; HORN, M. B.; STAKER, H. Ensino híbrido: Uma inovação disruptiva? 2013. Acesso em 24 jan. 2019. Disponível em: <https://s3.amazonaws.com/porvir/wp-content/uploads/2014/08/PT_Is-K-12-blended-learning-disruptive-Final.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 46.

CHRISTENSEN C. M. AND HORN, M.; JOHNSON, C. *Disrupting Class: how disruptive innovation will change the way the world learns*. New York: [s.n.], 2008. Citado na página 38.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. *Planejando o Trabalho em Grupo, Estratégias para Salas de Aulas Heterogêneas*. 3. ed. [S.I.]: Penso Editora, 2017. Citado na página 91.

DAMIANI, M. F. et al. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de Educação*, n. 45, 2013. Faculdade de Educação a- UFPel. Citado na página 62.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Apl.* 1. ed. São Paulo: Ática, 2011. v. 2. Ensino Médio. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: Uma abordagem teórica. v. 14, n. 1, p. 268–288, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

GIL, A. C. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

HACKING, I. The emergence of probability. *Cambridge U. Press*, 1999. Citado na página 25.

HONORIO, H. L. G. *Sala de Aula Invertida: Uma Abordagem Colaborativa na Aprendizagem de Matemática*. Dissertação (Mestrado), Juiz de Fora, 2017. Citado na página 59.

IEZZI, G. et al. *Matemática Ciências e Aplicações*. 9. ed. São Paulo: [s.n.], 2016. v. 2. Citado na página 31.

IMPA. Túnel do tempo: pequeno teorema de fermat. *Site do IMPA*, 2017. Acesso em 01 de set. 2019. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/tunel-do-tempo-pequeno-teorema-de-fermat/>>. Citado na página 27.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2006. v. 2. Citado na página 33.

MACHADO, A. dos S. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Atual, 2012. Único. Ensino Médio. Citado na página 29.

- MAGALHAES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de Probabilidade e Estatística*. [S.l.]: Edusp, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.
- MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. *Fundamentos de Metodologia Científica*. 5. ed. [S.l.]: Atlas, 2003. São Paulo. Citado na página 62.
- MARTINS, H. H. T. de S. Metodologia qualitativa de pesquisa. *Educação e Pesquisa*, v. 30, n. 2, p. 289–300, 2004. Universidade de São Paulo. Citado na página 61.
- MISSOES, P. Tava ou jogo do osso. *Site Portal das Missões*, 2019. Acesso em 01 de set. 2019. Disponível em: <<https://www.portaldasmissoes.com.br/site/view/id/1450/tava-ou-jogo-do-osso.html>>. Citado na página 25.
- MLODINOW, L. *O Andar do Bêbado: Como o Acaso Determina Nossas Vidas*. Rio de Janeiro: [s.n.], 2011. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 34.
- MORAN, J. Mudar a forma de ensinar e de aprender com tecnologias. *Revista Interações Estudos e Pesquisas em Psicologia*, v. 5, p. 57–72, 2000. São Paulo: Unimarc. Citado 2 vezes nas páginas 126 e 128.
- MORAN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. v. 2, p. 15–33, 2015. Acesso em 13 ago. 2019. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf>. Citado 9 vezes nas páginas 39, 40, 41, 42, 49, 50, 72, 77 e 127.
- MOREIRA, R. C. *Ensino da Matemática na Perspectiva das Metodologias Ativas: um Estudo sobre a Sala de Aula Invertida*. Dissertação (Mestrado), Manaus, 2018. Citado na página 60.
- MOTTA-ROTH, D.; HENDGES, G. R. Produção textual na universidade. *Parábola Editorial*, n. 20, 2010. Série Estratégias de Ensino. Citado na página 61.
- MUNHOZ, A. S. *Vamos Inverter a Sala de Aula*. São Paulo: [s.n.], 2015. Citado 9 vezes nas páginas 39, 42, 52, 53, 54, 55, 56, 57 e 125.
- NASCIMENTO, A. F. M. do; LASSANCE, R. Avaliação de projetos e atividades universitárias: Referenciando a prática. *Revista Brasileira Extensão Universitária*, v. 2, n. 2, p. 63–120, 2004. Citado na página 62.
- OESTERREICH, F.; MONTOLI, F. da S. Blended learning como uma proposta metodológica adotada no ensino superior. v. 1, n. 1, 2012. ISSN 2317-0239. Acesso em 13 ago. 2019. Disponível em: <http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/view/1966>. Citado na página 19.
- OLIVEIRA, C. de; MOURA, S. P.; SOUZA, E. R. de. Tics na educação: A utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. v. 7, n. 1, p. 75–94, 2015. Acesso em 21 de ago. 2019. Disponível em: <<http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/viewFile/11019/8864>>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.
- PRENSKY, M. Digital native, digital immigrants. v. 9, n. 5, 2001. Acesso em 21 de ago. 2019. Disponível em: <<http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf>>. Citado na página 36.

SCHEINERMAN, E. R. *Matemática Discreta, uma introdução*. 2. ed. São Paulo: [s.n.], 2011. Citado 5 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32 e 34.

SEEDUC. *Currículo Mínimo Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro, 2011. Citado na página 23.

SILVA, E. L. da; MENEZES, E. M. *Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação*. 3. ed. [S.l.]: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC,, 2001. Florianópolis. Citado na página 61.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: [s.n.], 2010. v. 2. Citado na página 32.

SOUZA, J. *Novo Olhar Matemática*. 2. ed. São Paulo: [s.n.], 2013. Citado na página 30.

STAKER, H.; HORN, M. B. Blended learning. 2012. Acesso em 12 ago. 2019. Disponível em: <<https://www.christenseninstitute.org/wp-content/uploads/2013/04/Classifying-K-12-blended-learning.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 44, 45 e 50.

SUPERINTERESSANTE, R. Galileu galilei: o pai da ciência moderna. *Editora Abril*, 2013. Acesso em 01 de set. 2019. Disponível em: <<https://super.abril.com.br/historia/galileu-galilei/>>. Citado na página 26.

VALENTE, J. A. A sala de aula invertida e a possibilidade do ensino personalizado: Uma experiência com a graduação em midialogia. in: Bacich, lilian e moran, josé. metodologias ativas para uma educação inovadora. uma abordagem teórico prática. p. 26–37, 2018. Citado 6 vezes nas páginas 39, 49, 52, 54, 66 e 70.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B. de. Integração currículo e tecnologias e a produção de narrativas digitais. p. 52–82, 2012. Acesso em 21 de ago. 2019. Disponível em: <<http://www.curriculosemfronteiras.org/vol12iss3articles/almeida-valente.pdf>>. Citado na página 39.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, M. E. B. de; GERALDINI, A. F. S. Metodologias ativas: Das concepções às práticas em distintos níveis de ensino. v. 17, n. 52, p. 455–478, 2017. Acesso em 21 de ago. 2019. Citado na página 39.

VIALI, L. Algumas considerações sobre a origem da teoria da probabilidade. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 8, n. 16, p. 143–153, 2008. ISSN 1519-955X. Acesso em 19 jul. 2019. Disponível em: <[http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.8,%20no16,%20outubro%20\(2008\)/3%20-%20Viali%20-%20final.pdf](http://www.rbhm.org.br/issues/RBHM%20-%20vol.8,%20no16,%20outubro%20(2008)/3%20-%20Viali%20-%20final.pdf)>. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 28.

VIANA, M. A notável família matemática bernoulli era problemática. *Site da SBM*, 2019. Acesso em 01 de set. 2019. Disponível em: <<https://www.sbm.org.br/noticias/a-notavel-familia-matematica-bernoulli-era-problematica>>. Citado na página 28.

VIEIRA, R. S. O papel das tecnologias da informação e comunicação na educação a distância: um estudo sobre a percepção do professor/tutor. v. 10, p. 65–70, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 35, 36 e 128.

VIGNOCHI, C. M.; BENETTI, C. da S.; MACHADO, C. L. B. Considerações sobre aprendizagem baseada em problemas na educação em saúde. v. 9, n. 1, p. 45–50, 2009. Acesso em 21 de ago. 2019. Disponível em: <<https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/157866>>. Citado na página 41.

WIKIPÉDIA. Gottfried wilhelm leibniz. *Site da Wikipédia*, 2017. Acesso em 01 de set. 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz>. Citado na página 28.

Apêndices

APÊNDICE A

Testes para Verificação da Aprendizagem

Teste 1

1) Um dado é lançado e o número da face voltada para cima é anotado.
Descreva o espaço amostral logo abaixo e após o seguintes eventos:

a) Evento A : sair numero par.

A: {2,4,6}

b) Evento B: ocorrência de um número menor que 4.

B: {1,2,3}

c) Evento C: ocorrência de um múltiplo de 3.

C: {3,6}

d) Evento D: ocorrência de um número que não seja primo.

D: {4,6}

e) Evento E: ocorrência de um numero menor que 1

E: \emptyset

f) Evento F: ocorrência de um número maior do que zero e menor do que 7.

F: {1,2,3,4,5,6}

2) Suponha que, todo ano, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) realize um sorteio para decidir em qual região do país será disputado um torneio internacional. Determine o espaço amostral do experimento a ser realizado em um determinado ano.

A: {Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sul, Sudeste}

3) Um número natural de 1 a 100 é escolhido ao acaso. Seja o evento E "sair um número que é uma potência de base 5". Determine E.

E: {1, 5, 25}

4) Três moedas são lançadas simultaneamente. Quantas e quais são os possíveis resultados ao se observar as faces voltadas para cima? (sugestão: use C para cara e K para coroa) Ex: Indicamos sair duas caras e uma coroa por CCK.

A: {CCC, CCK, CKC, KCC, KKC, KCK, CKK, KKK}

5) Dois dados são lançados simultaneamente e observado as faces voltadas para cima. Seja E o evento "sair soma de pontos igual a 10". Determine E.

E: {(4,6), (5,5), (6,4)}

Ativar o Windows

Teste 2

1) Uma urna contém 50 bolinhas numeradas de 1 a 50. Sorteando-se uma bolinha, determine a probabilidade de que o número observado seja múltiplo de 8.

$$\frac{3}{25}$$

2) No lançamento de um dado não viciado, qual é a probabilidade de obtermos um número maior que 4?

$$\frac{1}{3}$$

3) Um saco contém 8 bolas idênticas, mas com cores diferentes: três bolas azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se ao acaso uma bola. Qual a probabilidade da bola retirada ser azul?

$$\frac{3}{8}$$

4) Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual é a probabilidade de observarmos, no máximo, uma cara?

$$\frac{1}{2}$$

5) Jogamos dois dados comuns. Qual a probabilidade de que o total de pontos seja igual a 10?

$$\frac{1}{12}$$

Teste 3

1) Uma moeda e um dado são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter “cara” ou um 6?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2) Escolhendo-se aleatoriamente um número natural de 1 a 20, qual é a probabilidade desse número ser múltiplo de 2 ou 3?

$$\frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

3) No lançamento de dois dados perfeitos, qual é a probabilidade de se obter soma 8 ou números iguais nas faces superiores?

$$\frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

4) Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um "ás"?

$$\frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

Teste 4

1) Classifique os eventos das situações abaixo em dependentes ou independentes:

Analise a situação abaixo:

Matheus e Michele são dois irmãos que gostam muito de desafiar um ao outro. Michele, certo dia, resolveu propor um desafio ao seu irmão: Naquele dia iria escolher três canais (um de desenho, um de filme e um de jornal) e ele só poderá assistir dois desses canais, um no horário de almoço e um no horário de jantar, no entanto, seu irmão não poderá escolher o que deseja assistir. Ela irá escrever o nome dos canais, cada um em um papel no saquinho e sortear o segundo canal. Matheus, que é um aluno aplicado em matemática, resolveu calcular a probabilidade de ele conseguir assistir um canal de desenho no almoço e um de filme no jantar. Você consegue ajudá-lo a calcular?

Sugestão: use a primeira letra de cada canal para representar o evento, por exemplo: desenho (D), jornal (J) e filme (F).

- Vocês conseguem dizer quais são os possíveis casos que podem acontecer (Espaço amostral)? (*Sugestão:* utilize a notação (D,F), por exemplo).
- O que acontece quando ocorre a reposição do papel?
- Quais foram as escolhas de Matheus (evento)?
- A ordem dos eventos é importante? Por exemplo, a possibilidade de sair (D,F) é a mesma de sair (F,D)?
- Sortear o evento “desenho” no primeiro sorteio interfere o sorteio do evento “filme” no segundo sorteio?
- Podemos concluir que esses eventos são dependentes ou independentes?
- Calcule a probabilidade pedida.

- E se agora Michele retirasse dois papezinhos, **sem reposição**, qual seria a probabilidade de sortear desenho e filme?

Vamos pensar:

- Se ela retira o primeiro papelzinho, qual a probabilidade de sair desenho?
- Se ela não repôs o papel na segunda retirada, há alteração no espaço amostral?
- Qual é o novo espaço amostral?
- Aplicando o princípio multiplicativo, a probabilidade final é:
- Neste caso, os eventos são dependentes ou independentes?
- Há relação entre a dependência de eventos e a alteração no espaço amostral?
- Calcule a probabilidade pedida

2) Um lote contém 10 peças, sendo 7 boas (B) e 3 defeituosas (D). Retiramos duas peças, ao acaso e com reposição, para inspeção. Qual a probabilidade de se obter duas peças defeituosas?

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Considere que agora as retiradas serão feitas sem reposição, isto é, a primeira peça retirada não volta ao lote para retirarmos a segunda peça. Qual a probabilidade de se retirar duas peças defeituosas?

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}$$

3) Suponha que Abel jogue ao mesmo tempo um dado de seis lados e outro de quatro lados. Seja A o evento em que o resultado do dado de seis lados é um número par e B o evento em que o resultado do dado de quatro lados é um número ímpar. Usando o espaço amostral dos resultados possíveis, qual a probabilidade de o resultado do dado de seis lados ser um número par e o do dado de quatro lados ser um número ímpar?

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%$$

APÊNDICE B

Atividades em Grupo



Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome: _____

Data: ___/___/___

Ano/ Série: 3º ano E.M

Turma: _____



Aula Presencial 1: Espaço amostral e Evento

1) Antônio, Bento e Carlos estão em um baile. Na mesa ao lado, Lurdes, Maria, Neuza e Olinda aguardam um convite para dançar. Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de formar casais para a próxima dança.

Para representar todas as opções de casais para a próxima dança podemos utilizar o quadro abaixo:

	Lurdes(L)	Maria (M)	Neuza (N)	Olinda (O)
Antônio (A)				
Bento (B)				
Carlos (C)				

Portanto, o espaço amostral é dado por:

2) Utilize uma tabela, similar a questão 1, para determinar todos os casos possíveis ao se lançar simultaneamente dois dados e observar as faces voltadas para cima.

Agora determine os eventos:

- a) A: sair o mesmo número em ambos os dados
- b) B: sair soma menor que 5
- c) C: sair soma maior que 1 e menor que 13
- d) D: sair soma maior do que 1

3) Uma concessionária oferece um modelo de automóvel no valor de R\$28.000,00, na cor sólida (branco ou preto) e com duas portas. Com opcionais, o cliente pode escolher:

Cor metálica (prata) por R\$ 900,00

4 portas por R\$ 1.800,00

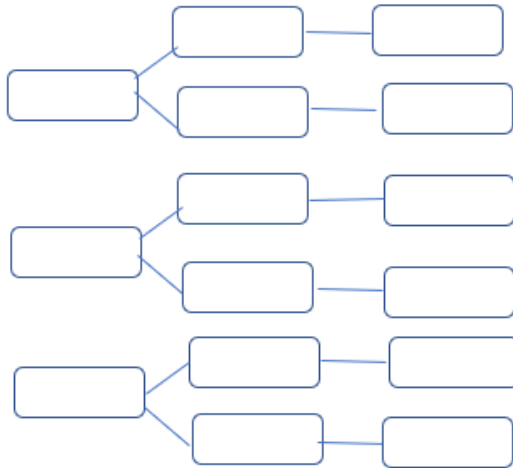
Vamos determinar o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha do cliente em relação:

a) Aos opcionais

b) Ao preço

Para representar todas as opções de escolha do cliente, podemos utilizar o seguinte diagrama da árvore.

(*sugestão*: utilize a primeira coluna para *cor*, a segunda para número de *portas* e a terceira para o *preço*)



4) Usando um diagrama de árvore, similar ao da questão 2, e chamando de M: filho do sexo masculino e F: filho do sexo feminino, defina o espaço amostral mostrando todos os arranjos possíveis de meninos e meninas numa família com, exatamente, 3 crianças.

Agora determine os eventos:

- a) A: todas as crianças são meninos
- b) B: nenhuma criança é menino
- c) C: todas as crianças são do mesmo sexo

Aula Presencial 2 – Cálculo da Probabilidade

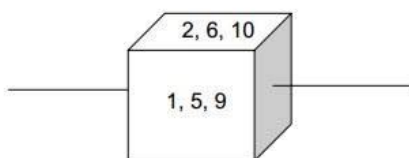
1) Leia a Tirinha abaixo.



Você concorda com o personagem do Tucano quando diz que “a chance de sair 13 é igual pra qualquer outro número do dado”? Justifique.

Calcule a probabilidade de sair face 13 na situação da tirinha.

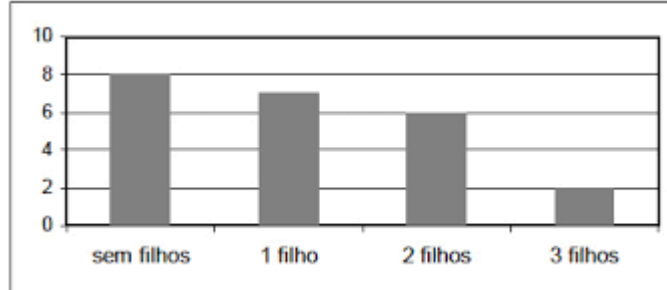
2) (ENEM-MEC) Em um cubo com faces em branco, foram gravados os números de 1 a 12, utilizando-se o seguinte procedimento: o número 1 foi gravado na face superior do dado; em seguida o dado foi girado, no sentido anti-horário, em torno do eixo indicado na figura abaixo, e o número 2 foi gravado na nova face superior, seguinte, conforme o esquema abaixo.



O procedimento continuou até que foram gravados todos os números. Observe que há duas faces que ficaram em branco. Ao se jogar aleatoriamente o dado apresentado, a probabilidade de que a face sorteada tenha a soma máxima é:

- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{3}$

- 3) (ENEM – MEC) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.

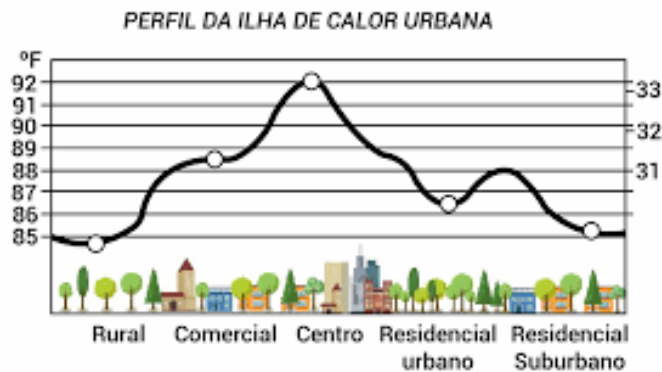


Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas.

A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{7}{15}$ d) $\frac{7}{23}$ e) $\frac{7}{25}$

- 4) (ENEM - MEC) Rafael mora no centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

5) (ENEM-MEC) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.



pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

- a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
- b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
- c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
- d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
- e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

6) (ENEM - MEC) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer



caças. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

- a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
- b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
- e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.



Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Nome: _____
Data: ___/___/___
Ano/ Série: 3º ano E.M Turma: _____



Aula Presencial 3: Probabilidade da União de Dois Eventos

- 1) Foi feita uma pesquisa com cem alunos sobre sua preferência entre cachorros e gatos. A tabela de contingência a seguir mostra os dados para a amostra de alunos que responderam à pesquisa.

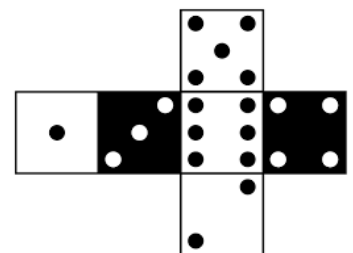
Preferência	Homem	Mulher	TOTAL
Preferem cachorros	36	20	56
Preferem gatos	10	26	36
Não têm preferência	2	6	8
TOTAL	48	52	100

- a) Calcule a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente preferir cães.
- b) Nessa amostra, os eventos "prefere cachorros" e "prefere gatos" são mutuamente exclusivos?
() Sim () Não
- c) Calcule a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente preferir cães ou preferir gatos.
- d) Nessa amostra, os eventos "prefere cachorros" e "gênero feminino" são mutuamente exclusivos?
() Sim () Não
- e) Calcule a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente preferir cães ou ser mulher
- 2) Numa classe há 16 homens e 20 mulheres, dos quais metade dos homens e metade das mulheres têm cabelos castanhos. Ao escolher um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que seja homem ou tenha cabelos castanhos?

- 3) Paulo joga dois dados honestos de seis lados. O espaço amostral de todos os resultados possíveis é mostrado abaixo.

- a) Qual é a probabilidade de o primeiro dado dar um, ou da soma dos dados dar oito?
- b) Qual é a probabilidade de o primeiro dado dar seis, ou de o segundo dado dar quatro?
- 4) Em um jogo, que é decidido com apenas um lançamento do dado representado na planificação, quatro participantes vencem nos casos descritos a seguir:

- Luana: face preta ou número menor que 4
- Marcos: face branca ou número primo
- Natália: face preta ou número 1
- Otávio: face branca ou número menor que 3



- a) Qual dos participantes tem a menor probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?
- b) Se em cada caso o termo conjuntivo ou for trocado por e, qual dos amigos terá a maior probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?



Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Nome: _____
Data: ___/___/___
Ano/ Série: 3º ano E.M



Turma: _____

Aula Presencial 4: Probabilidade Condicional e Produto de Probabilidades (Eventos Dependentes e Independentes)

1) Maria vem juntando dinheiro de sua mesada durante um mês para comprar um presente de Natal. Percebeu que dentro do seu cofrinho tinham 20 moedas de 25 centavos e 30 moedas de R\$1,00.

Certo dia ela resolveu retirar do seu cofre, R\$1,25 para comprar um picolé, só que ela não queria quebrá-lo, então teve que sacudi-lo um pouco para que a moeda caísse.

Qual a probabilidade de ela, ao retirar duas moedas, uma seguida da outra, obter o valor desejado?

Vamos pensar....

- a) Qual é o evento esperado?
- b) Que tipo de eventos estamos trabalhando (dependentes ou independentes)?
- c) Para encontrarmos a solução precisamos subdividir o cálculo em duas partes. Quais?
- d) Podemos representar essa situação por árvore de probabilidade. Vamos construí-la:
 - Quais são as possibilidades na primeira retirada?
 - Quais são as possibilidades na segunda retirada, se sair a primeira moeda o valor de R\$ 1,00?
 - Quais são as possibilidades na segunda retirada, se sair a primeira moeda o valor de R\$ 0,25?(Podem ocorrer de sair tanto uma moeda como a outra, por isso devemos considerar os dois casos)

Desenho:

Quando utilizamos a árvore de probabilidades, devemos trabalhar probabilidades de cada “galho” da árvore.

- Qual seria a probabilidade de sair uma moeda de R\$1,00 na primeira retirada?
 - E a probabilidade de sair uma moeda de R\$0,25?
 - Observe que saindo uma moeda de R\$ 1,00 em seguida podem sair ou uma moeda de R\$1,00 (já que não houve reposição) ou uma moeda de R\$ 0,25. As probabilidades serão, respectivamente:
 - No segundo caso, se tiver saído uma moeda de R\$ 0,25, podem sair uma moeda R\$1,00 ou R\$ 0,25 (não houve reposição). As probabilidades serão respectivamente:
- e) Você acha que iremos utilizar todos os valores para o resultado final? Justifique.
- f) Calcule a probabilidade pedida.
- g) Você considera que a forma de representar por meio árvores facilita a compreensão desse tipo de problema?

Pense mais um pouco....

- Porque o resultado está próximo de 50%?
 - O que acontece quando não há reposição? Nesse caso, são eventos dependentes ou independentes?
- 2) Um aeroporto monitora bagagens contra itens proibidos e um alarme deve disparar toda vez que um item proibido for detectado. Suponha que 5% das bagagens contenham itens proibidos.
- Se uma bagagem contém um item proibido, há uma chance de 98% de o alarme disparar.
 - Se uma bagagem não contém nenhum item proibido, há uma chance de 8%, de o alarme disparar.

Dado que uma bagagem escolhida aleatoriamente dispare o alarme, qual é a probabilidade de ela conter um item proibido?

(**Sugestão:** construa um diagrama da árvore)

3) Um casal planeja ter três filhos. Qual é a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino (M), sendo que o primeiro filho que nasceu é do sexo feminino?

4) Suponhamos que Djalma jogue um dado de seis lados e um dado de quatro lados simultaneamente. Considere A como o evento em que o lado de seis lados vire no número 5 e B como o evento em que a soma dos dados seja igual a 7. Usando o espaço amostral dos resultados possíveis, responda às seguintes questões.

- a) Qual é a probabilidade de o lado de seis lados virar no número 5?
- b) Qual é a probabilidade de a soma dos dois dados ser igual a 7?
- c) Qual é a probabilidade de o dado de seis lados virar no número 5 e a soma dos dois dados ser igual a 7?
- d) Os eventos A e B são independentes?

5) Júnior tem uma sacola com 8 caixas de formato idêntico. Seis destas caixas são azuis, e duas são verdes.

Três das caixas azuis têm um prêmio e uma das caixas verdes têm um prêmio.

Júnior escolhe aleatoriamente uma caixa da sacola. Considere A como o evento em que ele seleciona uma caixa com um prêmio e B como o evento em que a caixa é verde.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

() A probabilidade condicional de Júnior escolher uma caixa com um prêmio, dado que ele já escolheu uma caixa verde, é igual à probabilidade de ele escolher uma caixa com um prêmio.

() A probabilidade condicional de Júnior escolher uma caixa verde, dado que ele escolheu uma caixa com prêmio, é igual à probabilidade de ele escolher uma caixa verde.

() Os eventos A e B são eventos independentes.

() Os resultados dos eventos A e B dependem um do outro.

APÊNDICE C

Atividade Avaliativa



Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Nome: _____
Data: ____/____/____
Ano/ Série: 3º ano E.M Turma: _____



Atividade Avaliativa

1) (ENEM) Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto que, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%. Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista. A probabilidade de ela ser vegetariana é:

a) $\frac{2}{25}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{5}{6}$

2) (ENEM) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decidiu que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria, procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.

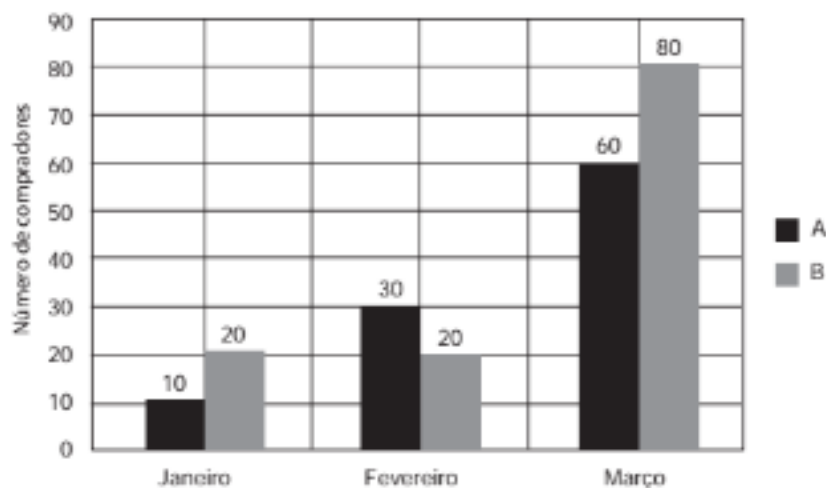
d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

3) (ENEM) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

- a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
- b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
- c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
- d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
- e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

4) (ENEM) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

- a) $\frac{1}{20}$
- b) $\frac{3}{242}$
- c) $\frac{5}{22}$
- d) $\frac{6}{25}$
- e) $\frac{7}{15}$

5) (ENEM) Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no ranking de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: <http://www.ipea.gov.br>. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é:

- a) $\frac{2}{17}$
- b) $\frac{5}{17}$
- c) $\frac{2}{5}$
- d) $\frac{3}{5}$
- e) $\frac{12}{17}$

6) (ENEM) O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro:

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

- a) 3%
- b) 7%
- c) 13%
- d) 16%
- e) 20%

7) (ENEM) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes saudáveis e doentes.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

- 1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- 2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
- 3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
- 4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de:

- a) 47,5%.
- b) 85,0%.
- c) 86,3%.
- d) 94,4%.
- e) 95,0%

APÊNDICE D

Questionário



Os dados coletados por meio deste questionário são para fins de pesquisa educacional promovida por Josie Pacheco de Vasconcelos Souza, aluna do curso Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual do Norte Fluminense, sob orientação do professor Nelson Machado Barbosa. As informações fornecidas serão tratadas somente para essa finalidade e sua identidade será mantida em sigilo.

Questionário

- 1) Você já havia estudado Probabilidade antes desta aula?
() Sim () Não
- 2) Você considera que as vídeo aulas contribuíram para compreensão do assunto estudado?
() Sim () Não

Em caso afirmativo, contribuiu de forma:

() Pouco esclarecedora () Esclarecedora () Bastante esclarecedora

- 3) Em relação a compreensão do que estava sendo explicado nos vídeos, você os considerou:
() De fácil compreensão () Difícil compreensão
() Média compreensão () Muito difícil compreensão
- 4) Ao assistir aos vídeos, você fez uso do recurso “pausar” ou “avançar”?
() Sim () Não
- 5) Durante o vídeo, você fez anotações sobre o conteúdo que estava sendo explicado?
() Sim () Não
- 6) As atividades propostas nas aulas presenciais contribuíram para seu entendimento e estudo sobre Probabilidade?
() Sim () Não

Em caso afirmativo, contribuiu de forma:

() Pouco esclarecedora () Esclarecedora () Bastante esclarecedora

- 7) Como você classificaria, para fins de aprendizagem, a utilização dos Testes para verificação da aprendizagem realizados no início da aula, com a correção feita em seguida?
() Ótima () Regular () Péssimo
() Boa () Ruim () Indiferente
- 8) Na sua opinião, a utilização de Jogos foi:
() Ótima () Regular () Péssimo
() Boa () Ruim () Indiferente

9) As atividades propostas nas aulas presenciais estavam com qual nível de dificuldade?

Muito fácil

Moderada

Muito difícil

Fácil

Difícil

10) Qual modelo de aula você achou mais interessante?

Tradicional

Sala de aula Invertida

11) Você achou que trabalhar em grupo auxiliou para o desenvolvimento de sua aprendizagem?

Sim

Não

12) Você considera as videoaulas e as atividades realizadas nas aulas presenciais contribuíram para o processo de ensino e aprendizagem do tema em estudo?

Sim

Não

13) Você considera que o papel da professora durante estas aulas foi:

Muito importante

Pouco importante;

Importante;

Quase desnecessário;

Desnecessário.

14) Durante as atividades presenciais, você solicitou a presença do professor, na maioria das vezes, para:

Tirar dúvidas sobre o conteúdo das vídeo aulas

Tirar dúvidas sobre as atividades propostas nas aulas presenciais

Ambos os casos acima

Outros _____

15) Você gostaria de continuar utilizando o modelo Sala de Aula Invertida nas aulas de matemática?

Sim

Não

16) Dê sua opinião sobre este modelo de aula. Liste pontos positivos e negativos.

APÊNDICE E

Jogo das Amebas (Folha do Aluno)



Procedimento

Regras do jogo

- Cada feijão representará uma ameoba, que pode se dividir em duas ou morrer, dependendo do resultado do lançamento de uma moeda;
- Se sair cara, a ameoba morre; se sair coroa, ela se divide em duas ameobas;
- As ameobas podem ser classificadas em gerações. A geração zero, G_0 , é formada pela única ameoba inicial; a geração um, G_1 , é formada pelas duas ameobas nascidas da divisão da primeira; a geração dois, G_2 , é formada pelas ameobas nascidas da geração 1, e assim por diante;
- O time A ganha um ponto na rodada se, na geração 5, G_5 , não houver nenhuma ameoba; já o time B ganha um ponto na rodada se houver pelo menos uma das $2^5 = 32$ ameobas possíveis na quinta geração;
- Em cada rodada, uma das equipes faz os lançamentos da moeda, até a rodada acabar;
- Ganha o jogo a equipe que marcar 10 pontos primeiro.

Pense e responda

Qual time você prefere? Por quê?

Escolha dos times

Forme grupos de 4 ou 5 alunos, que se organizarão em duas equipes.
No cara-ou-coroa, a equipe ganhadora deve escolher ser o time A ou o time B, definidos nas regras do jogo.

Etapa 1 Aquisição de dados

1.1 Construa a seguinte tabela no caderno e anote os resultados do jogo:

Sequência de lançamentos	Total de caras	Total de coroas	Total de gerações	Time ganhador

TABELA 1 Tabela a ser reproduzida no caderno.

Cada linha representará uma rodada e cada tabela representará uma partida. Construa sua própria tabela e realize partidas até que o professor lhe peça para passar para a próxima etapa.

1.2 Terminadas as partidas, faça uma nova tabela com os totais de cada ocorrência, como mostrado abaixo. Nesta nova tabela, cada linha representa uma partida.

Cara	Coroa	Total de gerações					Time ganhador		
		0	1	2	3	4	5	A	B

TABELA 2 Tabela a ser reproduzida no caderno, com o resumo de cada partida.

Etapa 2 Representação gráfica

2.1 Individualmente, faça os seguintes gráficos no caderno com todos os resultados do seu grupo:

- Gráfico 1: gráfico de frequências para os resultados dos lançamentos;
- Gráfico 2: gráfico de frequências para os totais de gerações por cada família;
- Gráfico 3: gráfico de frequências para o time vencedor de cada rodada.

2.2 A partir dos dados, estime a probabilidade que cada um dos times tem de vencer. Discuta suas conclusões com seus colegas.

Pense e responda

Você escolheu o melhor time no início do jogo? Por quê?

APÊNDICE F

Jogo das Amebas (Tabuleiro)

Tabuleiro referente à árvore genealógica

