

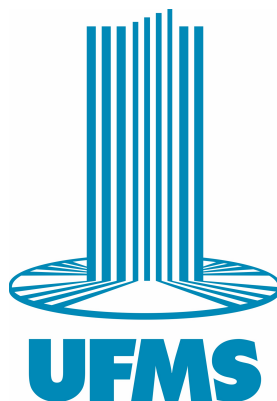
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação  
Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional

Mateus da Silva Corumbá Cyrino

OS PONTOS DE UMA CEVIANA E OS VALORES  
EXTREMOS DE UMA RAZÃO

Campo Grande - MS

2019



Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Mateus da Silva Corumbá Cyrino

**OS PONTOS DE UMA CEVIANA E OS VALORES  
EXTREMOS DE UMA RAZÃO**

**Orientador Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do

Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato

Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos

para obtenção do título de Mestre.

**Campo Grande - MS**

**2019**

# OS PONTOS DE UMA CEVIANA E OS VALORES EXTREMOS DE UMA RAZÃO

**Mateus da Silva Corumbá Cyrino**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Prof. Dr. Alex Ferreira Rossini

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Claudemir Aniz

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Rafael Moreira de Souza

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS

Campo Grande - MS, 28 de Outubro de 2019

# Agradecimentos

Agradeço à Deus pela capacidade e a oportunidade de conhecer mais um pouco daquilo que gosto: a matemática.

À minha mãe Rosa Helena, pela educação que me deu e por sempre ter exigido o melhor de mim.

À minha noiva Bruna, por ter me apoiado desde o início e ter me ajudado nos momentos de dificuldade.

Aos meus sogros, Gilson e Albelmira, por me tratarem como um filho e me receberem em sua casa com carinho.

E ao meu orientador Prof.<sup>o</sup> Dr.<sup>o</sup> Alex Ferreira Rossini, por ter me proposto um trabalho de resultado simples, porém bonito. Pela confiança, por suas correções, sugestões e paciência.

Agradeço à turma de 2017, da qual faço parte, pela parceria durante esses dois anos e meio. Aos companheiros e amigos: Seu Luiz, Seu Sílvio e Seu Reginaldo. Em especial, à Seu Ronaldo, Leandro e Eduardo, pelo apoio.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, pela oportunidade de desenvolver este estudo.

À banca examinadora, pelo aceite do convite para avaliar este trabalho.

Aos mestres docentes do Programa, pela dedicação em nos ensinar e por sempre ter nos motivado a prosseguir.

# Resumo

Considere um triângulo  $ABC$  e a bissetriz  $r$  de  $A$ . Neste trabalho apresentamos duas demonstrações do problema geométrico que consiste em determinar  $X$  em  $r$  para o qual a razão  $\frac{BX}{CX}$  é extrema. Supondo, sem perda de generalidade, que  $\overline{AC} > \overline{AB}$  então a razão é mínima quando  $X$  for o incentro; por outro lado, a razão é máxima quando o ponto  $X$  for o ex-incentro relativo ao lado  $BC$ . Para a primeira demonstração, utilizamos alguns resultados referentes aos círculos inscrito e ex-inscrito e a máximo e mínimo de funções de uma variável real a valores reais. Já na segunda, utilizamos funções trigonométricas e alguns resultados sobre cevianas, como por exemplo, Versão Trigonométrica do Teorema de Ceva.

**Palavras-chave:** Bissetriz, Incentro, Ex-incentro.

# Abstract

Consider a triangle  $ABC$  and  $r$  the angle bisector of  $A$ . In this work we present two proofs of geometrical problem of determining  $X$  in  $r$  for which the ratio  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$  is extreme. Assuming, without loss of generality, that  $\overline{AC} > \overline{AB}$  then the ratio attains its minimum value at the incenter of the triangle and maximum value at the excenter to the vertex  $A$ . For the first proof, we used some results about incircle and excircle of a triangle and maximum and minimum of real-valued functions of a real variable. In the second, we use trigonometric functions and some results about cevians, such as the Trigonometric Form of Ceva's Theorem.

**Key words:** Angle bisector, Incentre, Excentre.

# Lista de Figuras

1.1	Interseção entre as bissetrizes de um triângulo. . . . .	5
1.2	Círculo inscrito ao triângulo $ABC$ . . . . .	6
1.3	Ângulo inscrito $\angle RPS$ . . . . .	6
1.4	A corda $AB$ contém o ponto $O$ . . . . .	7
1.5	O ponto $O$ está entre $AB$ e $AC$ . . . . .	7
1.6	O centro $O$ não está entre as cordas $AB$ e $AC$ . . . . .	8
1.7	$\hat{A} < 90^\circ$ . . . . .	10
1.8	$\hat{A} > 90^\circ$ . . . . .	11
1.9	Círculo ex-inscrito relativo ao lado $BC$ . . . . .	12
1.10	Círculos inscrito e ex-inscrito relativo a $BC$ de $ABC$ . . . . .	13
2.1	Uma representação gráfica para $f$ . . . . .	22
2.2	Os círculos inscrito e ex-inscrito relativo a $BC$ de $ABC$ . . . . .	23
3.1	Teorema de Menelaus. . . . .	25
3.2	Cevianas paralelas. . . . .	27
3.3	Teorema de Ceva, versão trigonométrica. . . . .	29
3.4	Demonstração trigonométrica. . . . .	32

# Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos preliminares de geometria plana</b>	<b>3</b>
1.1	Círculo inscrito . . . . .	3
1.2	Ângulo inscrito e propriedades . . . . .	6
1.3	Círculo ex-inscrito . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Máximos e mínimos: um tratamento analítico</b>	<b>16</b>
2.1	Conceitos preliminares em análise . . . . .	16
2.2	Uma demonstração analítica . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Máximos e mínimos: um tratamento geométrico</b>	<b>24</b>
3.1	Versão trigonométrica do Teorema de Ceva . . . . .	28
3.2	Uma demonstração trigonométrica . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>36</b>



# Introdução

Uma demonstração, de modo geral, é semelhante a montagem de um quebra-cabeça. As peças representam resultados matemáticos que quando interligados corretamente, nos conduzem a configuração desejada.

Assim como ao final da montagem de um quebra-cabeça, este trabalho apresenta um interessante desfecho no que diz respeito ao estudo de uma razão derivada de um problema em geometria plana. A fim de apresentá-lo, utilizamos conceitos geométricos como, por exemplo, *círculo ex-inscrito* e *ex-incentro* relativos a um lado de um triângulo dado. Além disso, após modelagem do problema geométrico empregamos o cálculo diferencial no que se refere a teoria de pontos maximais de funções de uma variável real à valores reais.

Para tornar mais preciso a questão estudada, descrevemos o referido problema geométrico: dado  $ABC$  um triângulo e  $r$  a bissetriz relativa ao vértice  $A$ , determinar  $X \in r$ , para o qual a razão  $\frac{BX}{CX}$  é extrema.

Tendo em vista a questão geométrica levantada, este trabalho se propõem a relatar, com rigor matemático, duas formas de abordar a questão. A primeira delas, é uma abordagem analítica, ou seja, apresentamos uma demonstração dentro do campo do cálculo diferencial. Já a segunda abordagem, isto é, a segunda demonstração segue um estratégia trigonométrica. O resultado deste problema é que os pontos em que a razão é extrema são o incentro e o ex-incentro relativo ao lado  $BC$ .

Este trabalho está organizado em capítulos e, além desta introdução, será desenvolvido da seguinte forma. No Capítulo 1, nos preocupamos em elencar os resultados geométricos que serão de grande valia para as provas dos teoremas dos capítulos 2 e 3. Cabe comentar que alguns resultados geométricos foram assumidos tais como: Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, casos de congruência e semelhança entre triângulos, de forma a darmos ênfase apenas aos resultados mais relevantes.

Já no segundo capítulo, foram apresentados alguns teoremas sobre pontos extremos de

função de uma variável real a valores reais que nos auxiliarão na demonstração analítica, que se encontra no próprio capítulo.

O Capítulo 3 é dedicado a segunda demonstração, chamada de versão trigonométrica. Para este propósito, o capítulo conta com o auxílio de três teoremas fundamentais, a saber: Teorema de Menelaus, Teorema de Ceva e a Versão Trigonométrica do Teorema de Ceva. Como estratégia para demonstrá-los, utilizamos os exercícios dos capítulos 4 e 6 de [5].

No último capítulo apresentamos a conclusão deste trabalho. Nela comentamos sobre os modelos de demonstrações que utilizamos para resolver o problema norteador apresentado e os resultados obtidos. Além disso, demos uma sugestão para um possível estudo posterior.

# Capítulo 1

## Conceitos preliminares de geometria plana

Neste capítulo enumeramos alguns conceitos de geometria plana necessários para o desenvolvimento dos Capítulos 2 e 3.

Em todo trabalho, a palavra ângulo representará apenas a região convexa ilimitada do plano e delimitada pelas semirretas que o define. Seguem algumas notações que usaremos em todo o texto. A medida do ângulo  $\angle AOB$  indicamos por  $\widehat{AOB}$  e a medida de um segmento  $AX$  será denotada por  $\overline{AX}$ . As referências para este capítulo foram os livros textos [4], [5] e [6].

### 1.1 Círculo inscrito

A seguir, o conceito de bissetriz e o lugar geométrico que ela descreve.

**Definição 1.1** Dado um ângulo  $\angle AOB$ . A bissetriz de  $\angle AOB$  é a semirreta  $\overrightarrow{OC}$ , com  $C$  pertencente a região angular convexa, tal que  $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$ .

Para os resultados subsequentes, assumiremos conhecidos os casos de congruência entre triângulos. Cada um deles, quando usados, serão mencionados no texto.

**Proposição 1.2** A bissetriz  $r$  do ângulo  $\angle AOB$  é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ .

**Demonstração:** Sejam  $P \in r$ ,  $P'$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{OA}$ ,  $P''$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{OB}$  e  $\Sigma$  a coleção dos pontos

da região convexa que equidistam de  $\overleftrightarrow{OA}$  e  $\overleftrightarrow{OB}$ . Temos que as distâncias entre  $P$  e as retas  $\overleftrightarrow{OA}$  e  $\overleftrightarrow{OB}$  são os comprimentos dos segmentos  $PP'$  e  $PP''$ . Considere os triângulos  $OPP'$  e  $OPP''$ . Por hipótese,  $\angle POP' \equiv \angle POP''$ ,  $\widehat{OP'P} = \widehat{OP''P} = 90^\circ$  e  $OP$  é um lado comum entre  $OPP'$  e  $OPP''$ , pelo caso de congruência  $LAA_o$  (lado, ângulo e ângulo oposto) entre triângulos,  $OPP' \equiv OPP''$ . Assim,  $\overline{PP'} = \overline{PP''}$  e  $P \in \Sigma$ . Logo,  $r \subset \Sigma$ .

Agora, seja  $P \in \Sigma$ . Assim, sendo  $P'$ , o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{OA}$ ,  $P''$ , o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{OB}$ , então  $\overline{PP'} = \overline{PP''}$ . Como  $OP$  é lado comum entre  $OPP'$  e  $OPP''$ , pelo caso de congruência  $CH$  (cateto, hipotenusa) entre triângulos retângulos,  $OPP' \equiv OPP''$ . Consequentemente,  $\angle POP' \equiv \angle POP''$  e  $P \in r$ . Logo,  $\Sigma \subset r$ . Portanto,  $r = \Sigma$ . ■

Outro conceito em geometria plana necessário será o de tangência entre reta e círculo.

**Definição 1.3** Dizemos que um círculo  $\Sigma$  e uma reta  $r$  são tangentes, se  $r$  e  $\Sigma$  tiverem exatamente um ponto  $P$  em comum. Em tal caso,  $P$  é o ponto de tangência de  $r$  e  $\Sigma$ .

A seguinte proposição mostra como a tangência entre reta e círculo se caracteriza.

**Proposição 1.4** Dados um círculo  $\Sigma$  de centro  $O$  e um ponto  $P \in \Sigma$ . Uma reta  $t$  é tangente ao círculo  $\Sigma$  em  $P$  se, e somente se,  $t$  é perpendicular ao segmento  $OP$ .

**Demonstração:**

Seja  $t$  perpendicular a  $OP$ . Como  $P \in t$  e para qualquer ponto  $Q \neq P$  em  $t$ , temos que o triângulo  $OPQ$  é retângulo em  $P$ , então  $\overline{OP} < \overline{OQ}$ . Logo, todo  $Q \neq P$  não pertence a  $\Sigma$ , assim,  $P$  é o único ponto comum entre  $t$  e  $\Sigma$ . Portanto,  $\Sigma$  e  $t$  são tangentes.

Suponhamos que  $\Sigma$  e  $t$  sejam tangentes e não perpendiculares em  $P$ . Então, existe  $Q \in t$ , tal que  $\overline{OP} = \overline{OQ}$ . Mas isto implicaria em  $Q \in \Sigma$ , que é uma contradição. ■

**Definição 1.5** Dizemos que um círculo  $\Sigma$  é inscrito a um triângulo  $ABC$ , se tangencia todos os lados de  $ABC$ .

Para facilitar o entendimento das demonstrações a seguir, representaremos a bissetriz de um determinado ângulo por sua reta suporte. Deixando claro que a bissetriz em questão é a interseção entre tal reta e a região convexa ilimitada, delimitada pelas semirretas de mesma origem que compõem o ângulo.

**Teorema 1.6** Em qualquer triângulo, as bissetrizes de seus ângulos internos interceptam-se em um único ponto.

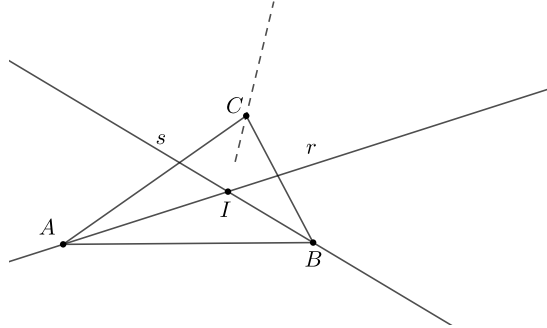


Figura 1.1: Interseção entre as bissetrizes de um triângulo.

**Demonstração:** Dado um triângulo  $ABC$  qualquer. Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as bissetrizes dos ângulos internos  $\angle A$ ,  $\angle B$  e  $\angle C$  de  $ABC$ , respectivamente. Se  $I \in r \cap s$  então, pela Proposição 1.2,  $I$  equidista de  $AB$ ,  $CA$  e  $CB$ . Em particular,  $I$  equidista de  $CA$  e de  $CB$  e, novamente pela Proposição 1.2,  $I \in t$ . Portanto,  $r$ ,  $s$  e  $t$  intersectam-se em  $I$ . ■

**Definição 1.7 (Incentro)** Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as bissetrizes dos ângulos  $\angle A$ ,  $\angle B$  e  $\angle C$ , respectivamente, de  $ABC$ . O ponto  $I$  de interseção entre as bissetrizes  $r$ ,  $s$  e  $t$  é chamado de incentro de  $ABC$ .

O Teorema 1.8 garante a existência e a unicidade de círculo inscrito a um triângulo qualquer.

**Teorema 1.8** Dado um triângulo  $ABC$  qualquer. Existe um único círculo inscrito em  $ABC$ .

**Demonstração:** Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  as bissetrizes de  $\angle A$ ,  $\angle B$  e  $\angle C$ , respectivamente. Pela Proposição 1.2, o incentro  $I$  de  $ABC$  equidista de  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . Sendo  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de  $I$  sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ , o círculo  $\Sigma$  de centro  $I$  e raio  $R = \overline{IA'}$  contém os pontos  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ . Pela Proposição 1.4, como  $\overleftrightarrow{BC} \perp IA'$ ,  $\overleftrightarrow{AC} \perp IB'$  e  $\overleftrightarrow{AB} \perp IC'$ , então  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  são retas tangentes a  $\Sigma$ . Logo,  $\Sigma$  está inscrito a  $ABC$ . A unicidade é consequência do Teorema 1.6. ■

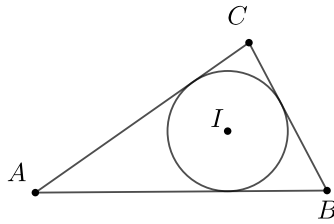


Figura 1.2: Círculo inscrito ao triângulo  $ABC$ .

## 1.2 Ângulo inscrito e propriedades

Nesta seção indicamos algumas das relações entre as medidas dos ângulos inscritos e os centrais de um círculo.

**Definição 1.9** Ângulo inscrito em um círculo é o ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e os lados são cordas do mesmo.

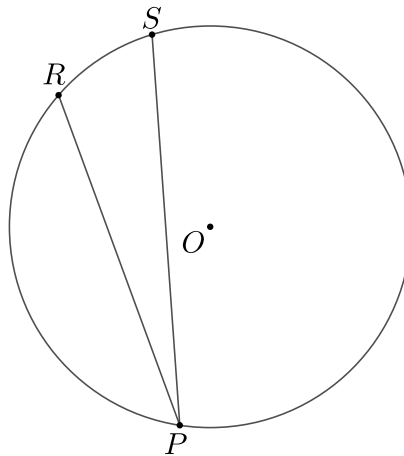
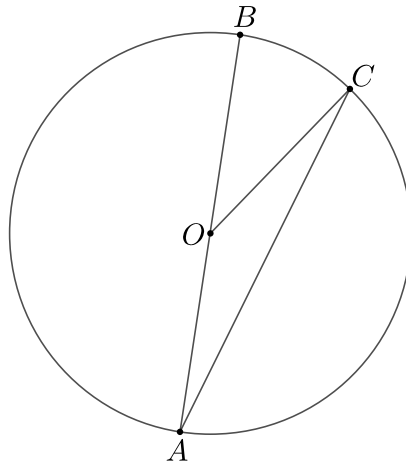


Figura 1.3: Ângulo inscrito  $\angle RPS$ .

**Teorema 1.10** Se  $AB$  e  $AC$  são cordas de um círculo  $\Sigma$  de centro  $O$ , então a medida do ângulo inscrito  $\angle CAB$  é igual à metade da medida do ângulo central  $\angle COB$  correspondente.

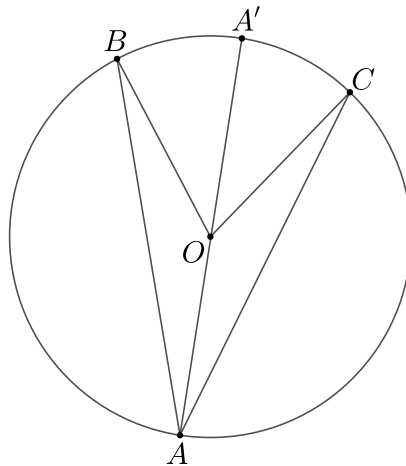
**Demonstração:** Para demonstração consideremos três casos.

(i) Quando uma das cordas  $AB$  ou  $AC$  contém o centro  $O$  de  $\Sigma$ .


 Figura 1.4: A corda  $AB$  contém o ponto  $O$ .

Considere  $O \in AB$ . Como  $\overline{OA} = \overline{OC}$ , o triângulo  $OAC$  é isósceles de base  $AC$ , assim,  $\widehat{CAB} = \widehat{CAO} = \widehat{OCA}$ . Mas,  $\widehat{COB} = \widehat{CAO} + \widehat{OCA}$ , logo,  $\widehat{COB} = 2\widehat{CAO} = 2\widehat{CAB}$  e  $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{CAO}$ .

(ii) Quando o centro  $O$  de  $\Sigma$  está entre as cordas  $AB$  e  $AC$ .


 Figura 1.5: O ponto  $O$  está entre  $AB$  e  $AC$ .

Seja  $A'$  o ponto de interseção entre  $\Sigma$  e a semirreta  $\overrightarrow{AO}$ . Como  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ , então  $OBA$  e  $OAC$  são isósceles de bases  $BA$  e  $AC$ , respectivamente. Dessa forma,  $\widehat{A'AB} = \widehat{OAB} = \widehat{ABO}$  e  $\widehat{CAA'} = \widehat{CAO} = \widehat{OBA}$ . Consequentemente,

$$\widehat{A'OB} = \widehat{OAB} + \widehat{ABO} = 2\widehat{OAB} \quad \text{e} \quad \widehat{COA'} = \widehat{CAO} + \widehat{OCA} = 2\widehat{CAO}.$$

Além disso,  $\widehat{COB} = \widehat{A'OB} + \widehat{COA'}$ , assim:

$$\widehat{COB} = 2 \left( \widehat{OAB} + \widehat{CAO} \right).$$

como  $\widehat{OAB} + \widehat{CAO} = \widehat{CAB}$ , logo

$$\widehat{CAB} = \frac{1}{2} \widehat{COB}.$$

(iii) Quando o centro  $O$  de  $\Sigma$  não está entre as cordas  $AB$  e  $AC$  e não pertence a nenhuma delas.

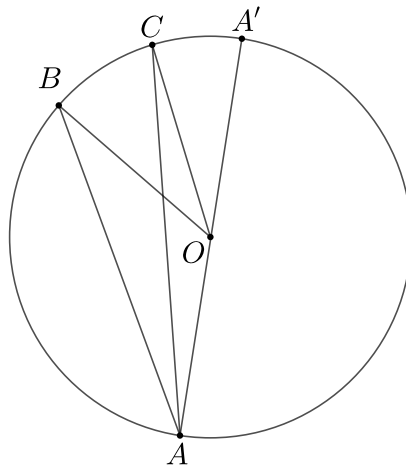


Figura 1.6: O centro  $O$  não está entre as cordas  $AB$  e  $AC$ .

Considere  $A'$  como ponto de interseção entre  $\Sigma$  e a semirreta  $\overrightarrow{AO}$ . Os triângulos  $OBA$  e  $OCA$  são isósceles de bases  $BA$  e  $CA$ , respectivamente, pois  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ . Assim,  $\widehat{A'AB} = \widehat{OAB} = \widehat{ABO}$  e  $\widehat{A'AC} = \widehat{OAC} = \widehat{ACO}$ . Consequentemente,

$$\widehat{A'OB} = \widehat{OAB} + \widehat{ABO} = 2\widehat{OAB} \quad \text{e} \quad \widehat{A'OC} = \widehat{OAC} + \widehat{ACO} = 2\widehat{OAC}.$$

Mas,  $\widehat{COB} = \widehat{A'OB} - \widehat{A'OC}$ , assim

$$\widehat{COB} = 2 \left( \widehat{OAB} - \widehat{OAC} \right),$$

e como  $\widehat{OAB} - \widehat{OAC} = \widehat{CAB}$ , segue que

$$\widehat{CAB} = \frac{1}{2} \widehat{COB}.$$

■



**Corolário 1.11** Seja  $\angle BAC$  um ângulo inscrito em um círculo  $\Sigma$  de centro  $O$  e de raio  $r$ . Se  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ , então  $BC$  é diâmetro de  $\Sigma$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema 1.10, temos que:

$$90^\circ = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \Rightarrow \widehat{BOC} = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Portanto,  $BC$  é diâmetro de  $\Sigma$ .

**Corolário 1.12** Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos distintos no círculo  $\Sigma$  de centro  $O$ , tais que  $A$  e  $D$  pertencem ao mesmo arco cujas extremidades são  $B$  e  $C$ . Temos que os ângulos  $\angle BAC$  e  $\angle BDC$  são congruentes.

**Demonstração:** De fato, pelo Teorema 1.10, tem-se

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \text{ e } \widehat{BDC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$$

logo,  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ . ■

Os próximos teoremas a serem demonstrados serão, respectivamente, Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

**Teorema 1.13 (Lei dos Senos)** Sejam  $ABC$  um triângulo de lados  $BC, AC$  e  $AB$  medindo, respectivamente,  $a, b$  e  $c$  e  $\Sigma$  um círculo de centro  $O$  e raio  $R$ , seu círculo circunscrito. Tem-se que

$$\frac{a}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\widehat{C})} = 2R.$$

**Demonstração:** Sejam  $A', B'$  e  $C'$  pontos de  $\Gamma$  tais que,  $A'BC, B'CA$  e  $C'AB$  sejam retângulos em  $\angle A'BC, \angle B'CA$  e  $\angle C'AB$ , respectivamente. Assim, pelo Corolário 1.11,  $A'C$  é diâmetro de  $\Gamma$ .

$$\text{sen}(\widehat{BA'C}) = \frac{a}{A'C} = \frac{a}{2R} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen}(\widehat{BA'C})} = 2R,$$

$$\text{sen}(\widehat{CB'A}) = \frac{b}{B'A} = \frac{a}{2r} \Leftrightarrow \frac{b}{\text{sen}(\widehat{CB'A})} = 2R$$

$$\text{sen}(\widehat{AC'B}) = \frac{c}{C'B} = \frac{a}{2r} \Leftrightarrow \frac{c}{\text{sen}(\widehat{AC'B})} = 2R.$$

desta forma,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\widehat{BA'C})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\widehat{CB'A})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\widehat{AC'B})} = 2R.$$

Pelo Corolário 1.12,  $\widehat{BA'C} = \widehat{A}$ ,  $\widehat{CB'A} = \widehat{B}$  e  $\widehat{AC'B} = \widehat{C}$

Portanto,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\widehat{B})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = 2R.$$

■

**Teorema 1.14 (Lei dos Cossenos)** Sejam  $ABC$  um triângulo qualquer,  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{AB} = c$ . Temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}),$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\widehat{B}),$$

e

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C}).$$

**Demonstração:** Faremos a demonstração da igualdade  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A})$ . As demonstrações das outras igualdades são análogas.

Temos três casos a serem considerados:  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $\widehat{A} < 90^\circ$  e  $\widehat{A} > 90^\circ$ .

*Caso 1:*  $\widehat{A} = 90^\circ$ .

De fato, pelo Teorema de Pitágoras teremos

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot 0 = b^2 + c^2 - 2ab \cos(\widehat{90^\circ}).$$

*Caso 2:*  $\widehat{A} < 90^\circ$

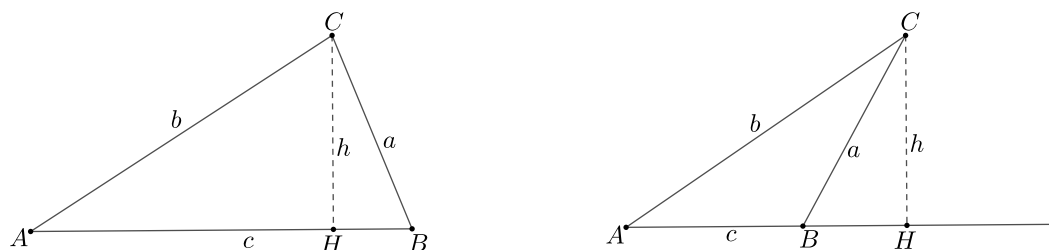


Figura 1.7:  $\widehat{A} < 90^\circ$ .

Sendo  $H$  o ponto de interseção entre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e a reta perpendicular a ela que passa por  $C$  e  $\overline{HC} = h$ , temos dois casos: quando  $H \in AB$  e quando  $H \in \overleftrightarrow{AB} \setminus AB$ . No primeiro,  $\overline{AH} = c - \overline{HB}$  e no segundo,  $\overline{AH} = c + \overline{HB}$ . Demonstraremos o caso onde  $\overline{AH} = c - \overline{HB}$ .

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos  $AHC$  e  $HBC$ , retângulos em  $H$ , obtemos  $h^2 = b^2 - (c - \overline{HB})^2$  e  $h^2 = a^2 - \overline{HB}^2$ , respectivamente. Daí,

$$a^2 - \overline{HB}^2 = b^2 - c^2 - \overline{HB}^2 + 2c\overline{HB}$$

ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c(c - \overline{HB})$$

como  $\overline{AH} = c - \overline{HB}$  e  $\overline{AH} = b \cos(\widehat{A})$ , então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}).$$

*Caso 3:*  $\widehat{A} > 90^\circ$ .

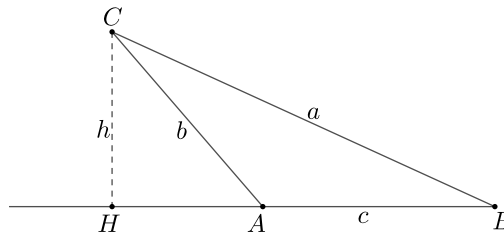


Figura 1.8:  $\widehat{A} > 90^\circ$ .

Considere  $H$  como o ponto descrito em *Caso 2* e  $h = \overline{HC}$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras em  $HAC$  e  $HBC$ , retângulos em  $H$ , temos

$$b^2 - \overline{HA}^2 = h^2 = a^2 - (\overline{HA} + c)^2$$

assim,  $a^2 = b^2 + c^2 + 2c\overline{HA}$ .

Como  $\overline{HA} = b \cos(\widehat{CAH})$ ,  $\widehat{CAH} = \pi - \widehat{A}$  e  $\cos(\pi - \widehat{A}) = -\cos(\widehat{A})$ , segue que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}).$$

■

### 1.3 Círculo ex-inscrito

Na presente seção, elencamos alguns úteis resultados sobre círculos ex-inscritos de um triângulo. Esta seção foi embasada em [5].

**Teorema 1.15** Seja  $ABC$  um triângulo. Existe um único círculo tangente ao lado  $BC$  e aos prolongamentos dos lados  $AB$  e  $AC$ .

**Demonstração:**

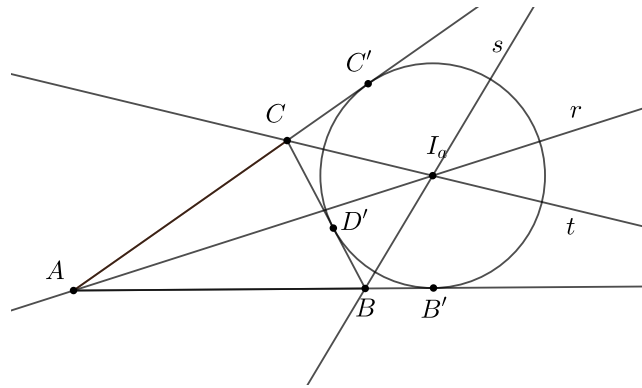


Figura 1.9: Círculo ex-inscrito relativo ao lado  $BC$ .

Sejam  $s$  e  $t$  bissetrizes externas dos vértices  $B$  e  $C$ , respectivamente, e  $I_a \in s \cap t$ . Então,

$$d(I_a; \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a; \overleftrightarrow{AB}) \quad \text{e} \quad d(I_a; \overleftrightarrow{BC}) = d(I_a; \overleftrightarrow{AC}).$$

Denote por  $D$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de  $I_a$  sobre as retas  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . Se  $r_a = \overline{I_a D} = \overline{I_a B'} = \overline{I_a C'}$  então o círculo  $\Sigma$  de centro  $I_a$  e raio  $r_a$  contém os pontos  $D$ ,  $B'$  e  $C'$ . Por construção, temos que  $\overleftrightarrow{BC} \perp I_a D$ ,  $\overleftrightarrow{AB} \perp I_a B'$  e  $\overleftrightarrow{AC} \perp I_a C'$ , logo  $\Sigma$  tangencia as retas  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  em  $D$ ,  $B'$  e  $C'$ , respectivamente, pela Proposição 1.4.

Agora, suponhamos que exista outro círculo de centro  $I'_a$  que tangencia  $BC$  e os prolongamentos de  $AB$  e  $AC$ . Dessa forma,  $I'_a$  equidista de  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$  então  $I'_a \in s \cap t$ , pela Proposição 1.2. Portanto,  $I'_a = I_a$ .

O círculo  $\Sigma$  é chamado de círculo **ex-inscrito** ao lado  $BC$  e seu centro  $I_a$  de **ex-incentro** de  $ABC$  relativo a  $BC$  (ou ao vértice  $A$ ). ■

**Corolário 1.16** Em todo triângulo, a bissetriz interna relativa a um vértice concorre com as bissetrizes externas relativas aos outros dois vértices no ex-incentro.

**Demonstração:** Sejam  $s$  e  $t$  as bissetrizes externas dos vértices  $B$  e  $C$  de um triângulo  $ABC$  e  $r$  a bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ . Seja  $\Sigma$  o círculo ex-inscrito ao lado  $BC$  de  $ABC$ , de centro  $I_a = s \cap t$ . Então, vale que  $d(I_a; \overleftrightarrow{AB}) = d(I_a; \overleftrightarrow{AC})$ , ou seja,  $I_a$  equidistam de  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ . Logo,  $I_a \in r$ . ■

O Teorema 1.17 é uma consequência dos resultados acima.

**Teorema 1.17** Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{CA} = b$  e semiperímetro  $p$ . Sejam  $D$ ,  $C''$  e  $B''$  os pontos em que o círculo inscrito em  $ABC$  tangencia os lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente, e suponha, ainda, que o círculo ex-inscrito a  $BC$  tangencia tal lado em  $D'$  e os prolongamentos de  $AC$  e  $AB$ , respectivamente, em  $C'$  e  $B'$ . Então:

$$(a) \overline{BB''} = \overline{BD} = p - b, \overline{CC''} = \overline{CD} = p - c, \overline{AB''} = \overline{AC''} = p - a;$$

$$(b) \overline{AB'} = \overline{AC'} = p;$$

$$(c) \overline{BD'} = \overline{BB'} = p - c, \overline{CD'} = \overline{CC'} = p - b;$$

$$(d) \overline{C''C'} = \overline{B''B'} = a;$$

(e) O ponto médio de  $BC$  também é o ponto médio de  $DD'$ .

**Demonstração:**

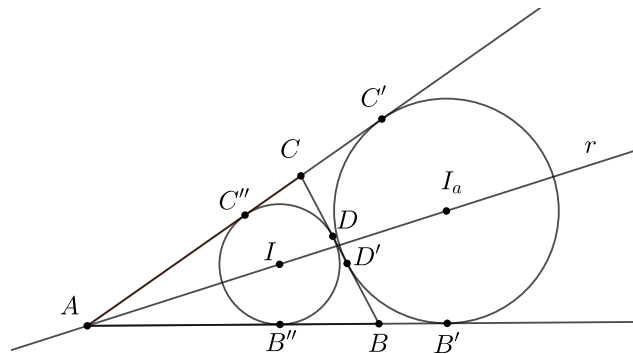


Figura 1.10: Círculos inscrito e ex-inscrito relativo a  $BC$  de  $ABC$ .

(a) Pela relação de congruência  $CH$ , obtemos  $\overline{AB''} = \overline{AC''} = x$ ,  $\overline{BB''} = \overline{BD} = y$  e  $\overline{CC''} = \overline{CD} = z$ . Consideremos o sistema

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases}$$

Somando ordenadamente essas igualdades, obtemos  $x + y + z = p$  e, assim,

$$x = (x + y + z) - (y + z) = p - a.$$

Analogamente, obtemos

$$y = (x + y + z) - (x + z) = p - b \text{ e } z = (x + y + z) - (x + y) = p - c.$$

(b) Sendo  $\overline{AC'} = \overline{AB'} = u$  (pela relação de congruência  $CH$  entre os triângulos  $AC'I_a$  e  $AB'I_a$ ), temos

$$\begin{aligned} 2u &= \overline{AC'} + \overline{AB'} \\ &= (\overline{AC} + \overline{CC'}) + (\overline{AB} + \overline{BB'}) \\ &= (\overline{AC} + \overline{AB}) + (\overline{CC'} + \overline{BB'}) \\ &= (b + c) + (\overline{CD'} + \overline{BD'}) \\ &= b + c + \overline{BC} = a + b + c = 2p \end{aligned}$$

(as igualdades  $\overline{CN} = \overline{CM}$  e  $\overline{BP} = \overline{BM}$  decorrem, respectivamente, das congruências  $CNI_a \equiv CMI_a$  e  $BPI_a \equiv BMI_a$ , também garantidas pela relação de congruência  $CH$  entre triângulos retângulos) de modo que  $u = p$ .

(c) Temos que  $\overline{BD'} = \overline{BB'}$  e que  $\overline{CD'} = \overline{CC'}$ . Por outro lado,

$$\overline{BD'} = \overline{BB'} = \overline{AB'} - \overline{AB} = p - c$$

e

$$\overline{CD'} = \overline{CC'} = \overline{AC'} - \overline{AC} = p - b.$$

(d) Façamos a prova de que  $\overline{C''C'} = a$  (a prova de  $\overline{B''B'} = a$  é feita de maneira análoga):

$$\overline{C''C'} = \overline{AC'} - \overline{AC''} = p - (p - a) = a.$$

(e) Basta provar que  $\overline{CD'} = \overline{BD}$ . De (a) e (b) temos, respectivamente,  $\overline{BD} = p - b$  e  $\overline{CD'} = p - b$ . Portanto,  $\overline{BD} = \overline{CD'}$ .

■

O teorema a seguir é de suma importância para a conclusão da demonstração analítica (Teorema 2.12) do problema de máximos e mínimos apresentado na introdução deste trabalho.

**Teorema 1.18** Sejam  $ABC$  um triângulo,  $r$  a bissetriz de  $\angle BAC$ ,  $I$  o incentro e  $I_a$  o ex-incentro de  $ABC$ . Consideremos que os comprimentos dos segmentos  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  sejam respectivamente  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Temos que:

$$(a) \overline{AI} = \frac{p - a}{\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)};$$

$$(b) \overline{AI_a} = \frac{p}{\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}.$$

**Demonstração:**

(a) Na figura 1.10 o triângulo  $AB''I$  é retângulo em  $B''$ , assim

$$\cos(\angle B''AI) = \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\overline{AB''}}{\overline{AI}}.$$

Mas pelo Teorema 1.17,  $\overline{AB''} = p - a$ , assim,

$$\overline{AI} = \frac{p - a}{\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}.$$

(b) Mais uma vez pela figura 1.10, o triângulo  $ABB'$  é retângulo em  $B'$ , dessa forma

$$\cos(\angle B'AI) = \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AI_a}}.$$

Como  $\overline{AB'} = p$ , temos

$$\overline{AI_a} = \frac{p}{\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}.$$

■

# Capítulo 2

## Máximos e mínimos: um tratamento analítico

Neste capítulo recordamos alguns conceitos e resultados de um curso de análise real. Mais especificamente, o conceito de ponto de acumulação, derivada e máximo e mínimo de uma função de uma variável dependente a valores reais. De posse deste conjunto de ferramentas, estaremos a iniciar a primeira versão da demonstração do problema de máximos e mínimos (Teorema 2.12) apresentado na introdução. Para este capítulo utilizamos os livros textos [7], [8], [9] e [1]

### 2.1 Conceitos preliminares em análise

**Definição 2.1 (Ponto de acumulação)** Um real  $a$  é ponto de acumulação de  $U \subset \mathbb{R}$  quando para todo  $\epsilon > 0$ , o intervalo aberto  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ , de centro em  $a$ , contém algum  $x \in U \setminus \{a\}$ .

O conjunto dos pontos de acumulação de  $U$  será denotado por  $U'$ .

**Definição 2.2** Sejam  $a \in \mathbb{R}$  e  $U \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $a$  é ponto de acumulação à direita de  $U$  quando, para qualquer  $\epsilon > 0$ , o intervalo  $[a, a + \epsilon)$  tem um ponto de  $U$  diferente de  $a$ . Do mesmo modo,  $a$  é dito ponto de acumulação à esquerda de  $U$  quando no intervalo  $(a - \epsilon, a]$  existe um ponto de  $U$  diferente de  $a$ , para qualquer  $\epsilon > 0$ .

Os conjuntos dos pontos de acumulação à direita e à esquerda de  $U$  serão denotados, respectivamente, por  $U'_+$  e  $U'_-$ .



**Definição 2.3 (Continuidade)** Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $U \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $a$  se para cada  $\epsilon > 0$ , é possível encontrar  $\delta > 0$ , tal que,  $|f(x) - f(a)| < \epsilon$  sempre que  $|x - a| < \delta$ . Ou seja,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in U, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

**Definição 2.4 (Derivada)** Sejam  $U \subset \mathbb{R}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in U' \cap \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é derivável em  $a$  quando existe o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Em tal caso,  $f'(a)$  é a derivada de  $f$  no ponto  $a$ .

**Teorema 2.5** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  derivável à direita em  $a \in U \cap U'_+$ . Se  $f'_+(a) > 0$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in U$ ,  $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$ .

**Demonstração:** Temos que:

$$\lim_{x \rightarrow a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) > 0.$$

Pela definição de limite à direita, tomando  $\epsilon = f'_+(a)$ , obtemos  $\delta > 0$  tal que  $x \in U$ ,  $a < x < a + \delta$  então

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) \right| < \epsilon = f'_+(a) \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Como  $x - a > 0$ ,  $f(x) - f(a) > 0$ , ou seja,  $f(x) > f(a)$ . ■

**Corolário 2.6** Seja  $a \in U \cap U'_+$ . Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável à direita em  $a$  e tem aí um máximo local, então  $f'_+(a) \leq 0$ .

**Demonstração:** De fato, se  $f'_+(a) > 0$  teríamos pelo teorema anterior que, para cada  $x \in U$  à direita e suficientemente próximo de  $a$ ,  $f(a) < f(x)$ , o que acarretaria em  $a$  não ser um máximo local de  $f$ . ■

**Corolário 2.7** Seja  $a \in U \cap U'_- \cap U'_+$ . Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a$  e possui máximo ou mínimo local nesse ponto, então  $f'(a) = 0$ .

**Demonstração:** Com efeito, se  $a$  é máximo local de  $f$ , então  $f'_+(a) \leq 0$  e  $f'_-(a) \geq 0$ . Como  $f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a)$ , então

$$0 \leq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \geq 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

■

A seguir enunciaremos e demonstraremos o teorema que será muito importante para a demonstração analítica que faremos. Antes de demonstrarmos o Teorema 2.10, definiremos função crescente e decrescente em um intervalo e ponto crítico.

**Definição 2.8** Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$  e  $U$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é crescente em  $U$ , quando

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in U$$

e decrescente em  $U$ , quando

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in U.$$

**Definição 2.9** Se  $U \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável. Dizemos que  $c \in U$  é um ponto crítico de  $f$  se  $f'(c) = 0$ .

**Teorema 2.10** Seja  $f$  uma função definida em  $\mathbb{R}$ , contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Então:

- (i) Se  $f'(x) > 0$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ ;
- (ii) Se  $f'(x) < 0$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .

**Demonstração:**

Suponha que  $f'(x) > 0$  em  $(a, b)$  e sejam  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , com  $x_1 < x_2$ . Como  $f$  é contínua em  $[x_1, x_2]$  e derivável em  $(x_1, x_2)$ , pelo Teorema do Valor Médio, existe  $x_0 \in (x_1, x_2)$  tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por hipótese, segue que  $f'(x_0) > 0$ . Sendo  $x_2 - x_1 > 0$ , teremos  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , ou seja,  $f(x_2) > f(x_1)$ . Portanto,  $f$  é crescente.

Suponhamos que  $f$  é crescente em  $(a, b)$ . Seja  $x_0 \in (a, b)$ . Dado outro ponto  $x \in (a, b)$ , consideremos a razão  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , que, pela hipótese, é positiva. Pelo teorema de conservação de sinal,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$ .

(ii) A demonstração é análoga.

## 2.2 Uma demonstração analítica

Seguindo as ideias em [1] e utilizando as ferramentas apresentadas neste capítulo juntamente com as desenvolvidas no Capítulo 1, daremos uma demonstração analítica do problema geométrico (veja Teorema 2.12) cuja estratégia é modelar o problema por meio de uma função de uma variável real a valores reais e então determinar seus máximos globais. Segue enunciando preciso do problema na forma de teorema.

**Definição 2.11 (Segmento orientado)** Dados um ângulo  $\angle BAC$  de vértice  $A$  e  $X$  um ponto sobre a reta suporte da bissetriz  $r$  do ângulo dado. Denotamos por  $AX$  o segmento orientado de  $A$  para  $X$ . Para cada segmento orientado  $AX$  podemos associar um número real  $\overline{AX}$  da seguinte forma

- (i) Se  $X \in r$  temos  $\overline{AX} = x$ , sendo  $x$  o comprimento do segmento de reta  $AX$  em relação a uma dada unidade de medida;
- (ii) Se  $X \notin r$  temos  $\overline{AX} = -x$ ;

**Teorema 2.12** Sejam  $ABC$ , com  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ , um triângulo e  $r$  a reta suporte da bissetriz do ângulo  $\angle BAC$ . Os pontos  $X$  de  $r$  para os quais a razão  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$  é máxima ou mínima, são o incentro  $I$  e o ex-incentro  $I_a$  relativo ao lado  $BC$  de  $ABC$ .

**Demonstração:** Sejam  $a, b$  e  $c$  com  $b \neq c$  os comprimentos dos segmentos  $BC, AC$  e  $AB$ , respectivamente. Dado  $X$  em  $r$ , consideremos o segmento  $\overline{AX} = x$  orientado. Aplicando a Lei dos Cossenos aos triângulos  $AXB$  e  $AXC$ , obtemos

$$\overline{BX}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AX}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AX} \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = c^2 + x^2 - 2cx \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right),$$

$$\overline{CX}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AX}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AX} \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) = b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right).$$

Assim,

$$\frac{\overline{BX}^2}{\overline{CX}^2} = \frac{c^2 + x^2 - 2cx \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}{b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}.$$

Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \frac{\overline{BX}^2}{\overline{CX}^2}$ . Desse modo, o problema geométrico enunciado no teorema pode ser modelado matematicamente por  $f$ , ou seja,

para determinarmos o ponto  $X \in r$  devemos encontrar  $x$  para o qual  $f$  assume seu valor máximo ou mínimo. De fato, primeiramente localizamos seus pontos críticos. Derivando a função  $f$  obteremos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(2x - 2c \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right) \left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2} \\
&\quad - \frac{\left(c^2 + x^2 - 2cx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right) \left(2x - 2b \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2} \\
&= -2 \frac{\left[\left(c \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - x\right) \left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)\right]}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2} \\
&\quad + 2 \frac{\left[\left(c^2 + x^2 - 2cx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right) \left(b \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) - x\right)\right]}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2} \\
&= -2 \frac{\cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) (cb^2 + x^2c - bc^2 - bx^2)}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2} \\
&\quad + \frac{x \left(c^2 - b^2 + 2x(b - c) \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2} \\
&= -2(b - c) \frac{\left[-x(b + c) + x^2 \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + bc \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right]}{\left(b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)\right)^2}.
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x(b + c) + x^2 \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) + bc \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = 0. \quad (2.1)$$

Em vista do polinômio de grau dois, seu discriminante é dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta &= [-(b+c)]^2 - 4bc \cos^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \left(2 \cos^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) - 1\right) \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \left[\cos^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)\right] \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \left[\cos^2\left(\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}\right)\right] \\
&= b^2 + c^2 - 2bc \cos^2(\widehat{A}) = a^2.
\end{aligned}$$

Assim, os pontos críticos de  $f$  são

$$\begin{aligned}
x &= \frac{(b+c) + \sqrt{a^2}}{2 \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{a+b+c}{2 \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{2p}{2 \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{p}{\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}, \\
x &= \frac{(b+c) - \sqrt{a^2}}{2 \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{b+c-a}{2 \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{2(p-a)}{2 \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{p-a}{\cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Daí, em vista do Teorema 1.18, os candidatos a máximo ou mínimo são  $I$  e  $I_a$ . Agora, iremos classificá-los.

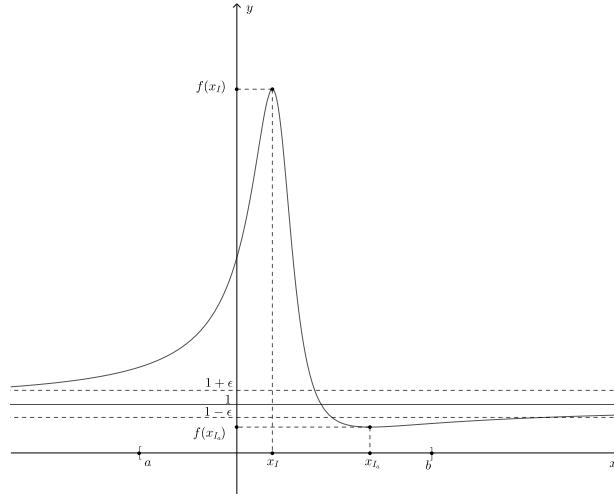
Vejam, inicialmente o caso  $\overline{AB} > \overline{AC}$ . Neste caso, o sinal da constante  $-2(b-c)$  é positivo e, assim o comportamento de  $f$  é dado pelo estudo do sinal da parábola em (2.1).

Desde que o coeficiente de maior grau em (2.1) é positivo então à esquerda de  $x_I$  e à direita de  $x_{I_a}$  os valores assumidos por  $f'$  são positivos e entre  $x_I$  e  $x_{I_a}$  negativos. Então, pelo Teorema 10, a função  $f$  é crescente em  $(-\infty, x_I] \cup [x_{I_a}, +\infty)$  e decrescente em  $[x_I, x_{I_a}]$ . Dessa forma,  $x_I$  e  $x_{I_a}$  são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo **local** de  $f$ .

Observe que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\overline{BX}^2}{\overline{CX}^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c^2 + x^2 - 2cx \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)}{b^2 + x^2 - 2bx \cos\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)} = 1$$

ou seja,  $f$  possui uma assíntota horizontal  $y = 1$ . Para demonstrarmos que  $x_I$  e  $x_{I_a}$  são, respectivamente, pontos de máximo global e mínimo global de  $f$ , iremos assumir, por um momento, que  $f(x_{I_a}) < 1 < f(x_I)$ .


 Figura 2.1: Uma representação gráfica para  $f$ .

Por definição de limite no infinito, dado  $0 < \epsilon < \min\{1 - f(x_{I_a}), f(x_I) - 1\}$ , existem reais  $\mu, \nu > 0$ , tais que  $f(x_{I_a}) < f(x) < f(x_I)$  para todo  $x \in (-\infty, -\mu] \cap [\nu, +\infty)$ .

Como  $0 < x_I < x_{I_a}$  podemos supor que  $x_I, x_{I_a} \in J = [-\mu, \nu]$ . Desde que  $x_I$  e  $x_{I_a}$  são os únicos pontos críticos de  $f$  em  $J$  segue, pelo Teorema de Weierstrass, que  $x_I$  e  $x_{I_a}$  são, respectivamente, pontos de máximo e mínimo **globais** de  $f$  em  $\mathbb{R}$ .

A seguir, daremos os detalhes que justificam as desigualdades assumidas anteriormente. Desde que  $\overline{AB} > \overline{AC}$  então  $0^\circ < \widehat{B} < \widehat{C} < 180^\circ$ . Logo,

$$0 < \frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}} < \frac{\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{\overline{BI_a}^2}{\overline{CI_a}^2} = f(x_{I_a}) < 1,$$

$$1 < \frac{\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)} = \frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} \Rightarrow 1 < \frac{\overline{BI}^2}{\overline{CI}^2} = f(x_I).$$

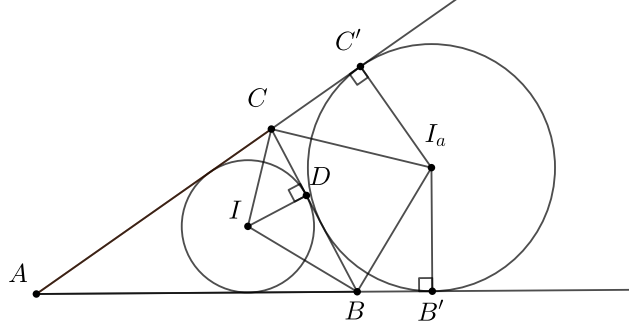
Portanto,

$$f(x_{I_a}) < 1 < f(x_I).$$

Para finalizar, vamos determinar os valores de  $f(x_{I_a})$  e de  $f(x_I)$ . Explicitamente, obteremos

$$f(x_{I_a}) = \frac{\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)} \quad \text{e} \quad f(x_I) = \frac{\sin\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}.$$

De fato, seja  $D$  o ponto em que o círculo inscrito a  $ABC$  tangencia o lado  $BC$ . Denote por  $R$  e  $R_a$  os raios dos círculos inscritos e ex-inscritos a  $ABC$ , respectivamente.


 Figura 2.2: Os círculos inscrito o ex-inscrito relativo a  $BC$  de  $ABC$ .

Como os triângulos  $CID$  e  $IBD$  são retângulos em  $D$ , tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\widehat{DCI}\right) = \frac{\overline{ID}}{\overline{CI}} = \frac{R}{\overline{CI}} \Rightarrow \overline{CI} = \frac{R}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)} \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(\widehat{IBD}\right) = \frac{\overline{ID}}{\overline{BI}} = \frac{R}{\overline{BI}} \Rightarrow \overline{BI} = \frac{R}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}} = \frac{\frac{R}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}}{\frac{R}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}.$$

Sejam  $C'$  e  $B'$  os pontos que o círculo ex-inscrito tangencia, respectivamente, os prolongamentos de  $AC$  e  $AB$ . Pelo teorema do ângulo externo temos a igualdade  $\widehat{DCC'} = \widehat{A} + \widehat{B}$ . Daí, sendo  $CI_a$  bissetriz temos  $\widehat{I_aCC'} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$  e, conseqüentemente,  $\widehat{C'I_aC} = \frac{\widehat{C}}{2}$ . Analogamente, mostra-se que  $\widehat{BI_aB'} = \frac{\widehat{B}}{2}$ . Assim, já que os triângulos  $CC'I_a$  e  $BB'I_a$  são retos em  $D$ ,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) &= \cos\left(\widehat{C'I_aC}\right) = \frac{\overline{I_aC'}}{\overline{CI_a}} = \frac{R_a}{\overline{CI_a}} \Rightarrow \overline{CI_a} = \frac{R_a}{\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)} \\ \cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) &= \cos\left(\widehat{BI_aB'}\right) = \frac{\overline{I_aB'}}{\overline{BI_a}} = \frac{R_a}{\overline{BI_a}} \Rightarrow \overline{BI_a} = \frac{R_a}{\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\overline{BI_a}}{\overline{CI_a}} = \frac{\frac{R_a}{\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}}{\frac{R_a}{\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)}.$$

■

## Capítulo 3

# Máximos e mínimos: um tratamento geométrico

Neste capítulo apresentamos os Teorema de Menelaus e em seguida o Teorema de Ceva. Agora segue um lema técnico que nos auxiliará na demonstração dos teoremas supracitados. Para mais informações, vide [5].

**Lema 3.1** Sejam  $P$  e  $P'$ , pontos de um segmento  $AB$  qualquer. Se  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}}$  então,  $P = P'$ .

**Demonstração:** Seja  $P \neq P'$ . Se tivéssemos  $\overline{AP} < \overline{AP'}$  obteríamos  $\overline{PB} > \overline{P'B}$ . Daí,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < \frac{\overline{AP'}}{\overline{PB}} < \frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}} \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < \frac{\overline{AP'}}{\overline{P'B}},$$

o que contradiz a hipótese. Logo,  $P = P'$ . De modo análogo, segue o caso  $\overline{AP} > \overline{AP'}$ . ■

Para a demonstração a seguir, aderiremos as seguintes convenções:

i) Dados  $A$  e  $B$  pontos distintos no plano,  $AB$  denota o segmento orientado de  $A$  para  $B$ . Dessa forma, os segmentos orientados  $AB$  e  $BA$  possuem orientações diferentes, assim escrevemos  $AB = -BA$  para indicar isso.

ii) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos colineares. Denotamos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},$$

se  $AB$  e  $BC$  têm a mesma orientação e



$$\frac{AB}{BC} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},$$

caso  $AB$  e  $BC$  possuam orientações distintas.

**Teorema 3.2 (Teorema de Menelaus)** Seja  $ABC$  um triângulo e  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  pontos sobre  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , respectivamente, todos distintos dos vértices de  $ABC$ . Temos que,

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1$$

se, e só se,  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  forem colineares.

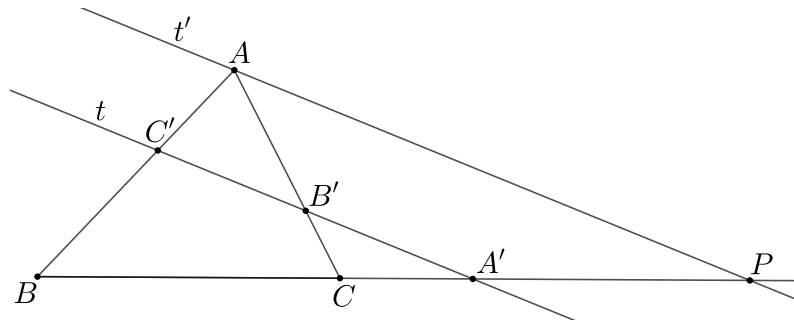


Figura 3.1: Teorema de Menelaus.

**Demonstração:** Suponhamos que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são colineares e  $t$  seja a reta que os contenha. Faremos a demonstração para o caso onde  $A' \in \overleftrightarrow{BC} \setminus BC$ ,  $B' \in AC$  e  $C' \in AB$ , para os demais casos a demonstração é análoga. Considere a reta  $t'$  que passa por  $A$  paralela a reta  $t$  e  $P$  a intersecção com  $\overleftrightarrow{BC}$ . Aplicando o teorema de Tales nas transversais  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{BP}$ , obtemos

$$\frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'P}} \Rightarrow \overline{A'P} = \frac{\overline{AC'} \cdot \overline{BA'}}{\overline{C'B}}$$

Da mesma forma, aplicando o teorema de Tales nas transversais  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{CP}$ , teremos

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'P}} \Rightarrow \overline{A'P} = -\frac{\overline{A'C} \cdot \overline{B'A}}{\overline{CB'}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC'} \cdot \overline{BA'}}{\overline{C'B}} &= -\frac{\overline{A'C} \cdot \overline{B'A}}{\overline{CB'}} \Rightarrow \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1. \end{aligned}$$

Agora, consideremos que a última igualdade acima seja verdadeira. Vamos mostrar que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são colineares. Para isso, sejam  $r$  a reta que passa por  $A'$  e  $B'$  e  $C''$ , o ponto de interseção entre  $r$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ . Pelo o que demonstramos, temos

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1.$$

Mas pela hipótese, obtemos

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = -\frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \Rightarrow \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}$$

o que, pelo Lema 3.1, só é possível quando  $C'' = C'$ . ■

No texto, o Teorema de Ceva está como um resultado imediato do Teorema de Menelaus.

**Teorema 3.3 (Teorema de Ceva)** : Sejam  $ABC$  um triângulo,  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$ . Temos que,

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$$

se, e só se,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas.

**Demonstração:** Suponhamos que  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  sejam concorrentes e que  $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$  e  $C' \in AB$ , sendo análoga a demonstração para os demais casos onde as cevianas são concorrentes.

Considere  $O$ , o ponto comum entre as cevianas  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$ . Pelo Teorema 3.2, aplicado aos triângulos  $ABA'$  e  $AA'C$ , considerando, respectivamente, as retas  $\overleftrightarrow{CC'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$ , obtemos

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{A'O}}{\overline{OA}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{A'O}} = -\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{A'C}}$$

e

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{A'O}}{\overline{OA}} = -1 \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{A'O}} = -\frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}$$

Dessa forma,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1 \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Consideremos válida essa última igualdade. Sejam  $P$  o ponto de interseção entre as cevianas  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $C''$ , o ponto de interseção entre  $\overleftrightarrow{CP}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ . Como  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC''}$  são concorrentes, pela primeira parte da demonstração, obtemos

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1.$$

Pela hipótese,

$$\frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}} \cdot \frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \Rightarrow \frac{\overline{AC''}}{\overline{C''B}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}.$$

Logo, pelo Lema 2,  $C'' = C'$ . Portanto,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes. Suponhamos, agora que  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  sejam paralelas. Para esta demonstração estamos considerando  $A' \in BC$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{CA} \setminus AC$  e  $C' \in \overleftrightarrow{BA} \setminus AB$ . Aplicando o teorema de Tales nas transversais

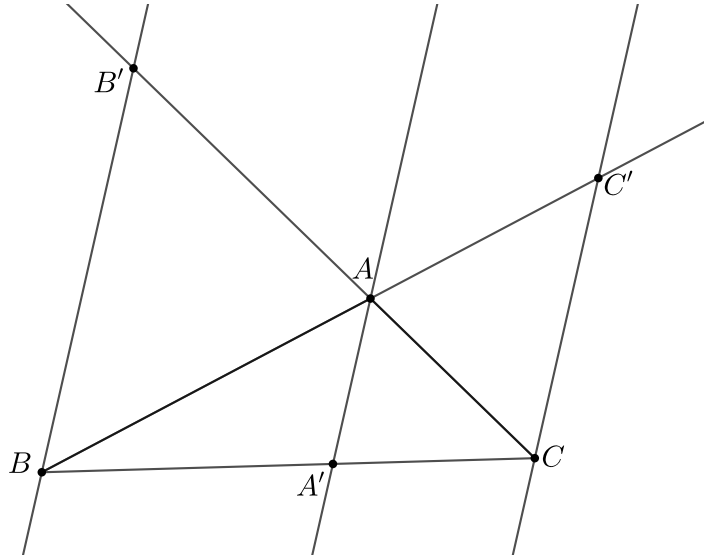


Figura 3.2: Cevianas paralelas.

$\overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{BC'}$ , obtemos

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} \Rightarrow \overline{AB} = -\frac{\overline{BA'} \cdot \overline{AC'}}{\overline{A'C}}.$$

Agora nas transversais  $\overleftrightarrow{BC'}$  e  $\overleftrightarrow{CB'}$ , mais uma vez pelo teorema de Tales, teremos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{C'B}} = -\frac{\overline{B'A}}{\overline{CB'}} \Rightarrow \overline{AB} = -\frac{\overline{B'A} \cdot \overline{C'B}}{\overline{CB'}}.$$

logo

$$\begin{aligned} -\frac{\overline{BA'} \cdot \overline{AC'}}{\overline{A'C}} &= -\frac{\overline{B'A} \cdot \overline{C'B}}{\overline{CB'}} \Rightarrow \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1. \end{aligned}$$

Considere a última igualdade como verdadeira e que  $\overleftrightarrow{AA'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  sejam paralelas (a demonstração é análoga para os demais casos). Existe  $B'' \in \overleftrightarrow{CA} \setminus AC$  tal que  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB''}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são paralelas. Assim, pela primeira parte demonstrada no caso em questão

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}}$$

Como, por hipótese,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{BA'}}$$

assim

$$\frac{\overline{CB''}}{\overline{B''A}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}$$

Logo, pelo Lema 2,  $B' = B''$ , conseqüentemente,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são paralelas. ■

### 3.1 Versão trigonométrica do Teorema de Ceva

Para auxiliar a demonstração do principal resultado desta seção, utilizaremos o lema abaixo.

**Lema 3.4** Sejam  $ABC$  um triângulo e  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  cevianas, com  $A' \in \overleftrightarrow{BC}$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB}$ . Temos que

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A'AC}) \cdot \text{sen}(\widehat{B})},$$

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'}) \cdot \text{sen}(\widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B'BA}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}$$

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'}) \cdot \text{sen}(\widehat{B})}{\text{sen}(\widehat{C'CB}) \cdot \text{sen}(\widehat{A})}.$$

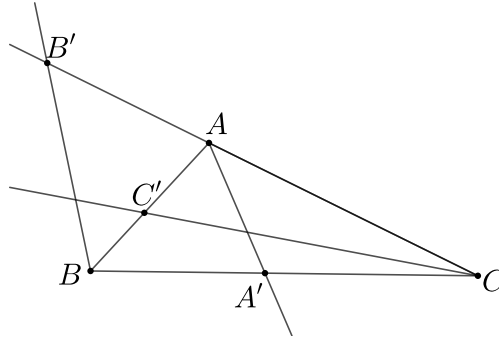


Figura 3.3: Teorema de Ceva, versão trigonométrica.

**Demonstração:**

Faremos a demonstração para o caso em que  $A' \in BC$ ,  $B' \in \overrightarrow{CA} \setminus AC$  e  $C' \in AB$ , para os demais casos a demonstração é análoga.

Pela Lei dos Senos aplicada aos triângulos  $ABA'$  e  $AA'C$ , obtemos, respectivamente,

$$\frac{\overline{BA'}}{\text{sen}(\widehat{BAA'})} = \frac{\overline{AA'}}{\text{sen}(\widehat{B})} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{A'C}}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} = \frac{\overline{AA'}}{\text{sen}(\widehat{C})},$$

assim

$$\overline{AA'} = \frac{\text{sen}(\widehat{B})}{\text{sen}(\widehat{BAA'})} \cdot \overline{BA'} = \frac{\text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A'AC})} \cdot \overline{A'C}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A'AC}) \cdot \text{sen}(\widehat{B})}.$$

Analogamente, pela Lei dos Senos aos triângulos  $CAC'$  e  $CC'B$ , obtemos

$$\overline{CC'} = \frac{\text{sen}(\widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{ACC'})} \cdot \overline{BA'} = \frac{\text{sen}(\widehat{B})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} \cdot \overline{A'C}$$

ou seja,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'}) \cdot \text{sen}(\widehat{B})}{\text{sen}(\widehat{C'CB}) \cdot \text{sen}(\widehat{A})}.$$

Finalmente, aplicando a Lei dos Senos aos triângulos  $B'BC$ ,  $B'BA$ , teremos

$$\overline{BB'} = \frac{\text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{CBB'})} \cdot \overline{CB'} = \frac{\text{sen}(\pi - \widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} \cdot \overline{B'A}$$

então

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'}) \cdot \text{sen}(\pi - \widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B'BA}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}.$$

Mas,  $\text{sen}(\pi - \widehat{A}) = \text{sen}(\widehat{A})$  assim

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'}) \cdot \text{sen}(\widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B'BA}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}.$$

■

**Teorema 3.5 (Versão Trigonométrica do Teorema de Ceva)** Sejam  $ABC$  um triângulo,  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  pontos de  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$ , respectivamente. Temos que  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são concorrentes ou paralelas se, e só se,

$$\frac{\text{sen}(\widehat{ACC'})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{CAA'})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} = 1.$$

**Demonstração:**

De fato, se  $\overleftrightarrow{BC}$ ,  $\overleftrightarrow{AC}$  e  $\overleftrightarrow{AB}$  são concorrentes ou paralelas, pelo Teorema de Ceva, teremos

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1.$$

Assim, pelo Lema 3.4, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} \\ &= \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'}) \cdot \text{sen}(\widehat{B})}{\text{sen}(\widehat{C'CB}) \cdot \text{sen}(\widehat{A})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A'AC}) \cdot \text{sen}(\widehat{B})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'}) \cdot \text{sen}(\widehat{A})}{\text{sen}(\widehat{B'BA}) \cdot \text{sen}(\widehat{C})} \\ &= \frac{\text{sen}(\widehat{ACC'})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{CAA'})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se

$$\frac{\text{sen}(\widehat{ACC'})}{\text{sen}(\widehat{C'CB})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{BAA'})}{\text{sen}(\widehat{CAA'})} \cdot \frac{\text{sen}(\widehat{CBB'})}{\text{sen}(\widehat{B'BA})} = 1,$$

então

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\widehat{\text{sen}}(\widehat{ACC'})}{\widehat{\text{sen}}(\widehat{C'CB})} \cdot \frac{\widehat{\text{sen}}(\widehat{BAA'})}{\widehat{\text{sen}}(\widehat{CAA'})} \cdot \frac{\widehat{\text{sen}}(\widehat{CBB'})}{\widehat{\text{sen}}(\widehat{B'BA})} \\
 &= \frac{\widehat{\text{sen}}(\widehat{ACC'}) \cdot \widehat{\text{sen}}(\widehat{B})}{\widehat{\text{sen}}(\widehat{C'CB}) \cdot \widehat{\text{sen}}(\widehat{A})} \cdot \frac{\widehat{\text{sen}}(\widehat{BAA'}) \cdot \widehat{\text{sen}}(\widehat{C})}{\widehat{\text{sen}}(\widehat{A'AC}) \cdot \widehat{\text{sen}}(\widehat{B})} \cdot \frac{\widehat{\text{sen}}(\widehat{CBB'}) \cdot \widehat{\text{sen}}(\widehat{A})}{\widehat{\text{sen}}(\widehat{B'BA}) \cdot \widehat{\text{sen}}(\widehat{C})} \\
 &= \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}}.
 \end{aligned}$$

Logo, pela recíproca do Teorema de Ceva,  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  são paralelas ou concorrentes. ■

## 3.2 Uma demonstração trigonométrica

A seguir examinamos o mesmo problema geométrico aqui apresentado pelo Teorema 3.6 a luz do trabalho [3]. Neste, a principal ferramenta é a Versão Trigonométrica do Teorema de Ceva e as propriedades elementares das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

**Teorema 3.6** Seja  $ABC$  um triângulo, com  $\overline{AB} < \overline{AC}$ ,  $r$  a bissetriz de  $\angle BAC$  e  $X \in r$ . A razão  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$  é máxima quando  $X$  é o incentro  $I$  e mínima, quando  $X$  é o ex-incentro  $I_a$  relativo a  $BC$  de  $ABC$ .

**Demonstração:** Sejam  $A' \in \overleftrightarrow{BC} \cap r$ ,  $B' \in \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BX}$  e  $C' \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CX}$ . Denote por  $B''$  e  $C''$  os pontos de interseção entre o círculo ex-incentro relativo a  $BC$  e as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{AC}$ , respectivamente.

Considere  $\widehat{A} = 2\alpha$ ,  $\widehat{B} = 2\beta$  e  $\widehat{C} = 2\gamma$ . Sejam  $x$  e  $y$  tais que

$$\widehat{XBA} = \widehat{B'BA} = \beta + x \text{ e } \widehat{ACX} = \widehat{ACC'} = \gamma + y.$$

Conseqüentemente,  $\widehat{CBB'} = \beta - x$  e  $\widehat{C'CB} = \gamma - y$ . Observe que, quando  $X = I_a$ , teremos  $x = y = 90^\circ$ , pois as bissetrizes interna  $\overrightarrow{BI}$  e a externa  $\overrightarrow{BI_a}$  são perpendiculares. Quando  $X = A'$ ,  $\widehat{A'BA} = 2\beta$  e  $\widehat{ACA'} = 2\gamma$ , logo,  $x = \beta$  e  $y = \gamma$ . Se  $X = I$ ,  $\widehat{XBA} = \beta$  e  $\widehat{ACX} = \gamma$ , dessa forma,  $x = y = 0$ . Agora, quando  $X = A$ ,  $\widehat{XBA} = \widehat{ACX} = 0^\circ$  logo,  $x = -\beta$  e  $y = -\gamma$ .

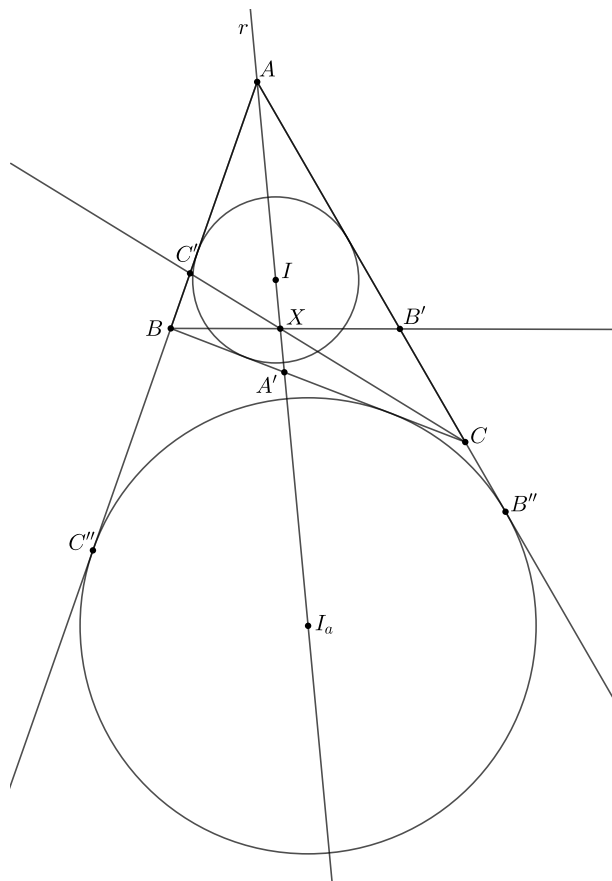


Figura 3.4: Demonstração trigonométrica.

Como  $\overleftrightarrow{AA'}$ ,  $\overleftrightarrow{BB'}$  e  $\overleftrightarrow{CC'}$  concorrem em  $X$ , pela Versão Trigonômica do Teorema de Ceva, teremos

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{ACC'})}{\operatorname{sen}(\widehat{C'CB})} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\widehat{BAA'})}{\operatorname{sen}(\widehat{CAA'})} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\widehat{CBB'})}{\operatorname{sen}(\widehat{B'BA})} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma + y)}{\operatorname{sen}(\gamma - y)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta - x)}{\operatorname{sen}(\beta + x)} = 1$$

pois,

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{BAA'})}{\operatorname{sen}(\widehat{CAA'})} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = 1.$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(\gamma + y) \cdot \operatorname{sen}(\beta - x) = \operatorname{sen}(\gamma - y) \cdot \operatorname{sen}(\beta + x). \quad (3.1)$$

Note que, cada fator em (3.1) pode ser expresso da seguinte forma

$$\operatorname{sen}(\gamma + y) = \operatorname{sen}(\gamma) \cos(y) \left[ 1 + \frac{\operatorname{sen}(y) \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(y)} \right] \quad (3.2)$$



$$\operatorname{sen}(\beta - x) = \operatorname{sen}(\beta) \cos(x) \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(x)} \right] \quad (3.3)$$

$$\operatorname{sen}(\gamma - y) = \operatorname{sen}(\gamma) \cos(y) \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen}(y) \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(y)} \right] \quad (3.4)$$

$$\operatorname{sen}(\beta + x) = \operatorname{sen}(\beta) \cos(x) \left[ 1 + \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(x)} \right]. \quad (3.5)$$

Daí, substituindo (3.2) – (3.5) em (3.1) e após alguns cálculos, obtemos que (3.1) é equivalente a equação (3.6)

$$\frac{\operatorname{sen}(y) \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(y)} = \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(x)} \Leftrightarrow \frac{\tan(y)}{\tan(\gamma)} = \frac{\tan(x)}{\tan(\beta)}. \quad (3.6)$$

Vamos encontrar os extremos da razão  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$ . Quando  $X = A$ , teremos que  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{c}{b}$ . Por outro lado, aplicado a Lei dos Senos em  $ABC$ , obtemos

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\operatorname{sen}(2\gamma)}{\operatorname{sen}(2\beta)} = \left( \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\beta)} \right) \left( \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta)} \right).$$

Para  $X \neq A$ , aplicando a Lei dos Senos nos triângulos  $BXA$  e  $XCA$ , obtemos

$$\frac{\overline{BX}}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\overline{AX}}{\operatorname{sen}(\beta + x)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CX}}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\overline{AX}}{\operatorname{sen}(\gamma + y)}$$

o que acarreta em

$$\overline{AX} = \frac{\overline{BX}}{\operatorname{sen}(\alpha)} \operatorname{sen}(\beta + x) = \frac{\overline{CX}}{\operatorname{sen}(\alpha)} \operatorname{sen}(\gamma + y) \Leftrightarrow \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma + y)}{\operatorname{sen}(\beta + x)}. \quad (3.7)$$

Se  $X \neq A, I_a$ , então  $\cos(x) \neq 0$  e vale que

$$\frac{\operatorname{sen}(\gamma + y)}{\operatorname{sen}(\beta + x)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(y) \left[ 1 + \frac{\operatorname{sen}(y) \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(y)} \right]}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(x) \left[ 1 + \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(x)} \right]} \quad (3.8)$$

De (3.6) e de (3.8) podemos escrever a razão em (3.7) conforme segue

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(y) \left[ 1 + \frac{\tan(y)}{\tan(\gamma)} \right]}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(x) \left[ 1 + \frac{\tan(x)}{\tan(\beta)} \right]} = \left( \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\beta)} \right) \left( \frac{\cos(y)}{\cos(x)} \right).$$

Se  $X = I_a$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} &= \frac{\operatorname{sen}(\gamma) \cos(90^\circ) + \operatorname{sen}(90^\circ) \cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\beta) \cos(90^\circ) + \operatorname{sen}(90^\circ) \cos(\beta)} = \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma) \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma)}}{\operatorname{sen}(\beta) \cdot \frac{\cos(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta)}} \\ &= \left( \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\operatorname{sen}(\beta)} \right) \left( \frac{\tan(\beta)}{\tan(\gamma)} \right). \end{aligned}$$

Assim, a razão  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$  pode ser representada pela função  $f(X)$ , com  $X \in r$ , dada por

$$f(X) = \begin{cases} \frac{\cos(y)}{\cos(x)}, & X \neq I_a \\ \frac{\tan(\beta)}{\tan(\gamma)}, & X = I_a \end{cases}$$

Desde que  $f > 0$ , podemos considerar a função  $f^2$ , para  $X$  em  $r$ . Assumindo, por um momento, que

$$1 \leq \frac{\cos^2(y)}{\cos^2(x)} < \frac{\tan^2(\beta)}{\tan^2(\gamma)} \quad (3.9)$$

segue que a razão  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$  é máxima quando  $X = I_a$ . Além disso,  $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$  é mínima quando  $\frac{\cos^2(y)}{\cos^2(x)}$  é menor possível, isto é, quando

$$\frac{\cos^2(y)}{\cos^2(x)} = 1 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow X = I.$$

A seguir, apresentamos os detalhes que justificam as desigualdades em (3.9). Inicialmente, note que

$$\frac{\cos^2(y)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(y)}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\operatorname{sen}^2(y) + \cos^2(y)}{\cos^2(y)}} = \frac{\tan^2(x) + 1}{\tan^2(y) + 1}. \quad (3.10)$$

De (3.6) temos a identidade  $\frac{\tan(y)}{\tan(\gamma)} = \frac{\tan(x)}{\tan(\beta)} = \lambda$ , logo podemos escrever as seguintes igualdades

$$\tan^2(x) = \frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} \cdot \tan^2(\beta)$$

$$\tan^2(y) = \frac{\tan^2(x)}{\tan^2(\beta)} \cdot \tan^2(\gamma)$$

consequentemente, podemos reescrever (3.10) da seguinte maneira

$$\frac{\cos^2(y)}{\cos^2(x)} = \frac{\tan^2(x) + 1}{\tan^2(y) + 1} = \frac{\frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} \cdot \tan^2(\beta) + 1}{\frac{\tan^2(x)}{\tan^2(\beta)} \cdot \tan^2(\gamma) + 1} = \frac{\lambda^2 \tan^2(\beta) + 1}{\lambda^2 \tan^2(\gamma) + 1}. \quad (3.11)$$

Sendo  $\overline{AB} < \overline{AC}$ , então  $\gamma < \beta$ , o que acarreta em  $\tan(\gamma) < \tan(\beta)$ . Daí, tem-se

$$\tan^2(\gamma) \cdot \tan^2(\beta) \cdot \frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} + \tan^2(\gamma) < \tan^2(\gamma) \cdot \tan^2(\beta) \cdot \frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} + \tan^2(\beta)$$

equivalentemente,

$$\tan^2(\gamma) \cdot \left[ \frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} \cdot \tan^2(\beta) + 1 \right] < \tan^2(\beta) \cdot \left[ \frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} \cdot \tan^2(\gamma) + 1 \right]$$

ou ainda,

$$\frac{\frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} \cdot \tan^2(\beta) + 1}{\frac{\tan^2(y)}{\tan^2(\gamma)} \cdot \tan^2(\gamma) + 1} < \frac{\tan^2(\beta)}{\tan^2(\gamma)}. \quad (3.12)$$

Finalmente, de (3.11)-(3.12) segue a desigualdade em (3.9). ■

# Capítulo 4

## Conclusão

Mostramos, assim, que dados  $ABC$  um triângulo qualquer e  $r$  a bissetriz de  $\angle A$ , os pontos  $X$  para os quais a razão  $\frac{BX}{CX}$  assume seus valores extremos são o incentro e o ex-incentro relativo a  $BC$  em  $ABC$ .

Com auxílio dos resultados do Capítulo 1 pudemos demonstrar o resultado apresentado em [1] que, nesse trabalho, chamamos de Demonstração Analítica. A nossa contribuição foi na linha de expandir e detalhar a demonstração em [1]. Mais especificamente, deixamos demonstrado por meio da análise criteriosa relacionada a valores extremos de funções de uma variável a valores reais que o incentro e o ex-incentro são de fato extremantes do problema geométrico declarado no Teorema 2.12.

No Capítulo 3, mostramos o poder da trigonometria na demonstração de resultados geométricos não tão elementares. A demonstração do Teorema 3.6 é o segundo caso da apresentada em [3] e, particularmente, é uma das demonstrações mais bonitas apresentadas neste trabalho. Infelizmente, não apresentamos aqui a generalização desta razão extremal, que é um dos possíveis estudos posteriores a este trabalho que sugerimos. Indicamos [2] para mais detalhes.

De forma geral, esperamos que este trabalho, que é uma resolução de um problema geométrico, motive outros com o mesmo objetivo e que, além disso, seja um auxílio na demonstração de outros resultados geométricos relativos a máximos e mínimos.

# Referências Bibliográficas

- [1] *BIALOSTOCKI, Arie; BIALOSTOCKI, Dora* The incenter and an excenter as solutions to an extremal problem. *Forum Geometricorum*, v. 11, pp. 9-12. 2011.
- [2] *BIALOSTOCKI, Arie; ELY, Rob* Points on a line that maximize and minimize the ratio of the distances to two given points. *Forum Geometricorum*, v. 15, pp. 177-178. 2015.
- [3] *HAJJA, Mowaffaq* Extremal properties of the incentre and the excentres of a triangle. *The Mathematical Gazette*, v. 96, pp. 315-317. 2012.
- [4] *DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N.* *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana* v. 9. 9. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013.
- [5] *NETO, Antonio C. M.* *Geometria*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2013.
- [6] *BARBOSA, João L. M.* *Geometria Euclidiana Plana*. 11. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.
- [7] *NETO, Antonio C. M.* *Fundamentos de Cálculo*. 1. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2015.
- [8] *LIMA, Elon L.* *Curso de Análise* v. 1. 14. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2016.
- [9] *LIMA, Elon L.* *Análise Real* v. 1. 12. ed. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2016.