Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus São Paulo
Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio por meio de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem

Paulo Vítor de Souza Perri

São Paulo - SP, Outubro de 2019

Paulo Vítor de Souza Perri

Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio por meio de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de São Paulo

Campus São Paulo

Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientadora: Profa. Ma. Gabriela Cotrim de Moraes

São Paulo - SP

Outubro de 2019

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P456e Perri, Paulo Vítor de Souza
Equações diofantinas lineares no ensino médio por meio de trajetórias hipotéticas de aprendizagem / Paulo Vítor de Souza Perri. São Paulo: [s.n.], 2019.
70 f. il.

Orientadora: Gabriela Cotrim de Moraes

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2019.

1. Ensino Médio. 2. Equações Diofantinas Lineares. 3. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CAMPUS SÃO PAULO
DIRETORIA GERAL DO *CAMPUS* SÃO PAULO
Coordenadoria de Registros Escolares de Pós-Graduação

ATA DE EXAME DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Nome do Programa: **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

Nome do(a) Aluno(a): Paulo Vitor de Souza Perri

Nome do(a) Orientador(a): Profa. Ma. Gabriela Cotrim de Moraes

Nome do(a) Coorientador(a):

Título do Trabalho: "Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio por meio de trajetórias hipotéticas de aprendizagem"

Abaixo o resultado de cada participante da Banca Examinadora

Nome completo dos Participantes Titulares da Banca	Sigla da Instituição	Aprovado / Não Aprovado
Profa. Ma. Gabriela Cotrim de Moraes - Orientadora	IFSP- SPO	aprovado
Profa. Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta – Membro Interno	IFSP-SPO	aprovado
Profa. Dra. Ana Carolina Boero – Membro Externo	UFABC	aprovado
Nome completo do Participante Suplente da Banca	**Sigla da Instituição**	**Aprovado / Não Aprovado**
Prof. Me. Leandro Albino Mosca Rodrigues – Membro Interno	IFSP-SPO	
Prof. Dr. Rafael de Mattos Grisi – Membro Externo	UFABC	

Considerando-o: [X] APROVADO
[ ] APROVADO COM RESTRIÇÕES
[ ] NÃO APROVADO

Assinaturas

São Paulo, 22 de outubro de 2019

Gabriela Moraes
Presidente da Banca

Valéria Ostete Jannis Luchetta
Membro Interno

[illegible]
Membro Externo

Observações: Correções e observações da banca a serem implementadas na versão final.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, pela saúde, por ter-me dado condições de ingressar no programa de mestrado, seguir adiante e colocar em meu caminho cada um dos que me ajudaram. A meus pais, Vicente e Márcia, pelo amor e oração constantes. A meus irmãos, Viviane e Carlos, que mesmo longe, sempre estiveram perto. À minha tia Yolanda, que tanto me incentivou. Aos professores do PROFMAT, em especial à Gabriela, professora que despertou meu apreço pela aritmética e orientadora paciente e incisiva quando necessário. Aos meus colegas de turma pelos bons momentos, troca de experiências e laços que espero manter por toda a vida. Em especial aos amigos Nayara, Laissa, Victor pelo companheirismo e apoio. Ao Mariano, pelas incontáveis revisões. Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, os meus agradecimentos.

"A curiosidade é um impulso para aprender."
(Maria Montessori)

Resumo

A Teoria Elementar dos Números pouco tem sido trabalhada na educação básica, em especial no Ensino Médio. Boa parte do saber adquirido no Ensino Fundamental a ela relacionado (múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, divisão euclidiana, entre outros) encontra pouca ou quase nenhuma aplicação no Ensino Médio. Sabemos o quanto o estudo dos números é importante na formação matemática e no desenvolvimento do raciocínio algébrico e aritmético. Por isso, esta pesquisa visa contribuir com a formação de professores que desejem aprimorar seu trabalho e enriquecer o currículo escolar. O objetivo desta pesquisa é, portanto, apresentar uma sugestão de ensino das Equações Diofantinas Lineares para alunos de educação básica a partir da 2ª série do Ensino Médio, podendo ser estendida para oficinas de matemática, cursos preparatórios, etc. A abordagem do tema é feita por meio de trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA) a partir de atividades de fácil aplicação organizadas de forma que cada uma desenvolva os saberes necessários para a seguinte, e cujo nível de dificuldade aumenta gradativamente.

Palavras-chaves: Ensino Médio. Equações Diofantinas Lineares. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Abstract

Elementary Number Theory has been barely worked on in basic education, especially in high school. Much of the knowledge acquired in related elementary school (multiples, divisors, maximum common divisor, minimum common multiple, Euclidean division, among others) don't find many application in high school. We know how important the study of numbers is in mathematical formation and in the development of algebraic and arithmetic reasoning. Therefore, this research aims to contribute to the training of teachers who wish to improve their work and enrich the school curriculum. The aim of this research is, therefore, to present a teaching suggestion of Linear Diophantine Equations for students of basic education from the second grade of high school, and can be extended to mathematics workshops, preparatory courses, etc. The approach of the subject is made through hypothetical learning trajectory (HLT) based on easily applied activities organized so that each one develops the necessary knowledge for the next, and whose level of difficulty gradually increases.

Keywords: High School. Linear Diofantine Equation. Hypothetical Learning Trajectory.

Sumário

1 Introdução

1.1 O Ensino Básico no Brasil

O Ensino Básico no Brasil ainda é um desafio para os educadores. Diferentes sistemas de avaliação nacionais [1]mostram que o conhecimento e as competências matemáticas estão muito abaixo dos níveis mínimos esperados. Os dados apresentados pelo Ministério da Educação (MEC) e pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) mostraram que nenhum estado brasileiro atingiu a meta estipulada de 4,7 pontos, ficando o país com média de 3,8 pontos. Ou seja, em relação à última avaliação – feita em 2015 – o Brasil avançou apenas 0,1 ponto [2].

Dados disponíveis até o momento – referentes à edição de 2015 do PISA[3] (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes) – mostram que a nota média dos estudantes brasileiros em matemática foi de 377 pontos, relativamente inferior à dos estudantes dos países membros da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), cuja média foi de 490 pontos. O documento destaca que o desempenho dos brasileiros foi

> (...) inferior ao desempenho observado em 2012 (389). Além disso, cerca de 70% deles se situaram abaixo do nível 2 na escala de proficiência do PISA, que varia do nível 1 (menor proficiência) ao nível 6 (maior proficiência). (INEP, 2016, p. 270)

Essas dificuldades terão consequências sociais a médio e longo prazo, quando considerada a presença recorrente da matemática no mundo atual, principalmente nas tecnologias de informação e comunicação bem como a crescente demanda pelo conhecimento de linguagens de programação. Sabemos que

> (...) o ensino da Álgebra vem apresentando tantos fracassos que passou a ser também um elemento de exclusão social, uma vez que, os que não conseguem aprendê-la, veem formar-se diante de si barreiras intransponíveis para a ascensão social (CASTRO, 2003, p. 2).

Considerando o que foi exposto, buscar estratégias de ensino que estimulem a familiarização com os diversos conteúdos matemáticos pode favorecer a percepção de sua aplicabilidade na solução dos problemas do mundo real. Mais do que isto, permite reforçar

---

[1] Atualmente o Brasil conta com o SAEB e a Prova Brasil – promovidos pelo Inep – além de outros sistemas em nível estadual e municipal.

[2] <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/nenhum-estado-atinge-a-meta-do-ideb-2017-no-ensino-medio/21206.> Acesso em 26 de fevereiro de 2019.

[3] Mais informações podem ser encontradas em <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/ideb/resultados.>

a concepção do conteúdo matemático como conteúdo interdisciplinar importante para a compreensão do mundo em que vivemos. Diante de tantos desafios, toda proposta que vise aproximar os conteúdos matemáticos dos alunos do Ensino Médio é bem-vinda.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que no Ensino Fundamental devem ser desenvolvidas habilidades referentes ao pensamento algébrico e numérico por meio da resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento). Dessa forma, amplia-se a compreensão a respeito dos diferentes campos e significados das operações e também a relação de dependência entre duas grandezas, escrevendo-a algebricamente e resolvendo situações-problema que envolvam equações e inequações (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017).

Quanto ao Ensino Médio, a BNCC enfatiza que seu foco deve estar na "construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade", para isso aproveitando "todo o potencial já constituído pelos estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração" (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017).

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2017, p. 519).

Nessas diretrizes citadas encontramos os objetivos e as estratégias para o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos da Matemática para o Ensino Médio. Informações que são retomadas ao longo do desenvolvimento da presente pesquisa.

1.2 As Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico

O documento sobre os resultados do Brasil na edição do PISA de 2015 mostra que para os estudantes brasileiros,

> formular problemas ou situações matemáticas resultou numa categoria mais difícil, mostrando a falta de preparo dos jovens na hora de transformar um problema inserido num contexto dado em um problema matemático (INEP, 2016, p. 270).

Diante disso, problemas modeláveis por Equações Diofantinas Lineares podem ser utilizados como estratégia de desenvolvimento das habilidades mencionadas anteriormente. Embora o termo “Equações Diofantinas” não esteja presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), elas podem ser abordadas nas três séries do Ensino Médio sem prejuízo dos demais conteúdos a serem trabalhados. Como se vê a seguir:

> É fundamental ressaltar que a resolução de problemas de Teoria Elementar dos Números envolve conceitos e métodos aprendidos no Ensino Básico e exigem a interpretação de seus dados. É o caso dos problemas que envolvem o uso de conhecimentos sobre resolução de equações diofantinas lineares. Esse é um assunto importante a ser trabalhado no Ensino Básico por dois motivos: primeiro, os conhecimentos relativos à resolução de equações desse tipo estão presentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Segundo, já existem diversas situações-problema que são acessíveis à compreensão do estudante e cujas soluções são facilitadas com o conhecimento dessa “ferramenta” de resolução de problemas. Dessa forma, justifica-se a presença do tema “equações diofantinas lineares” no Ensino Básico (OLIVEIRA, 2006, p. 28).

Autores como Oliveira (2006), Oliveira (2010), Pommer (2005), Ribeiro (2014) defendem que essas equações podem e devem ser trabalhadas no ensino básico ao destacar que

> a inclusão das Equações Diofantinas Lineares pode contribuir para o desenvolvimento de aspectos formativos de alunos do ciclo básico e ainda representa uma possível contribuição para a transição entre a Aritmética e a Álgebra (POMMER, 2005, p. 3).

Além disso, essas equações também são abordadas em programas como olimpíadas matemáticas (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2012) e os Círculos Matemáticos (FOMIN; GENKIN; ITENBERG, 2010) e constituem um tema motivador para o conhecimento e desenvolvimento matemático dos estudantes.

Levando estes pontos em consideração, o presente trabalho tem por objetivo propor sugestões para abordagem das Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio a partir de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA).

1.3 Revisão de trabalhos sobre a aplicabilidade de Equações Diofantinas no Ensino Médio

A fim de melhor fundamentar o trabalho, foram analisadas publicações a respeito da aplicabilidade das Equações Diofantinas Lineares no Ensino Básico. A análise envolveu teses, artigos, dissertações de mestrado, algumas delas pertencentes ao mesmo programa para o qual este trabalho foi desenvolvido – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Oliveira (2006), em sua dissertação de mestrado, analisou duas coleções de livros do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e concluiu que, embora as coleções tragam alguns problemas modeláveis por Equações Diofantinas Lineares, elas não podem ser consideradas objeto de saber das coleções. Segundo o autor, nenhuma das obras faz menção a essas equações sequer no "Manual do Professor".

Pommer (2008), também em sua dissertação de mestrado, constatou que é possível a abordagem das equações no Ensino Médio e observou que o recurso mais utilizado pelos alunos envolvidos foi o de tentativa e erro. Posteriormente, no artigo "A Engenharia Didática em sala de aula: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares" (2013), o autor descreve a aplicação de uma sequência didática a um grupo de dez alunos do Ensino Médio em uma escola pública paulistana.

Das análises feitas em dissertações do PROFMAT, destacamos Borges (2013), que propõe a aplicação de Equações Diofantinas Lineares a duas incógnitas fazendo uso de dois *softwares* computacionais para visualizar graficamente as soluções inteiras.

Campos (2013) sugere situações-problema voltadas para o Ensino Básico que podem ser modeladas por equações de duas ou mais variáveis e estende o algoritmo para um número qualquer de variáveis. A autora propõe que os problemas de duas variáveis podem ser tratados a partir do Ensino Fundamental e os de três variáveis, a partir do Ensino Médio.

Melo (2013) utiliza matrizes na parametrização das soluções dessas equações para o Ensino Médio.

Rios e Alves (2013) apresentam quinze situações-problema modeladas por equações de duas incógnitas com resolução comentada para serem aplicadas a alunos do sétimo ano do Ensino Fundamental e da segunda série do Ensino Médio.

Já Silva (2013) fornece uma sequência de atividades com aplicabilidade no Ensino Fundamental contemplando Equações Diofantinas Lineares e não lineares. O autor em sua dissertação propõe um tipo de abordagem que se assemelha às THA, porém não utiliza esta nomenclatura, mas faz o que chama de recomendações metodológicas (grifo nosso) baseadas nos erros e acertos dos alunos.

A dissertação de Ribeiro (2014) apresenta alguns problemas da obra *Arithmetica* de Diofanto e propõe três modelos de solução: a proposta por Diofanto (retórica); a mesma, porém usando abreviações do próprio Diofanto; e a solução moderna, utilizando a simbologia matemática atual. O autor apresenta também diversos problemas comentados que podem ser modelados por essas equações e propõe a abordagem a partir do nono ano do Ensino Fundamental usando uma sequência didática.

Campos (2015) trata da Resolução de Problemas modeláveis por Equações Diofantinas Lineares voltados ao Ensino Fundamental. O autor fez uma experimentação em uma turma de alunos seus do 9º ano do Ensino Fundamental e utilizou como metodologia de sua pesquisa a Engenharia Didática.

A proposta de Deus (2017) é que a resolução e a interpretação geométrica desse tipo de equação sejam "inseridas nos Ensinos Fundamental e Médio como nova ferramenta didática para atrair a atenção do discente". A autora contextualiza seu trabalho partindo da situação hipotética de localizar uma aeronave no espaço aéreo brasileiro e para isso articula temas como coordenadas cartesianas e geodésicas e o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS).

Embora as "Equações Diofantinas Lineares" não sejam o tema principal de seu trabalho, Santos (2017) propõe a aplicação do Teorema Chinês dos Restos para o Ensino Básico, fazendo menção dessas equações, bem como de congruências lineares e sistemas de congruências lineares. O autor sugere a resolução de uma Equação Diofantina Linear usando congruências.

Oliveira (2018) trata de duas sequências didáticas envolvendo as equações em questão aplicadas a duas turmas distintas de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Para uma turma o método de resolução foi o chamado algébrico, que consiste na determinação das raízes utilizando a Divisão Euclidiana. Para a outra, o método foi o chamado "método aritmético modular" utilizando congruências.

Finalmente Vieira (2018) em sua pesquisa de mestrado também constata ser possível utilizar este tipo de equação como ferramenta de ensino para o 9º ano do Ensino Fundamental também por meio de sequências didáticas.

A Tabela 1 mostra um breve esquema do que é tratado em cada obra analisada:

Autor/ data	Público-alvo	Tema	Estratégia didática	Conclusão
Oliveira/ 2006	Ensino Médio	EDL e o livro didático do EM	Análise de livros didáticos	Pouca exploração do assunto nas obras
Pommer/ 2008	Ensino Médio	Abordagem de EDL no EM	Sequência didática	Evidencia a importância e a valorização da matemática discreta no EM
Borges/ 2013	Ensino Médio	EDL a duas incógnitas	Resolução de problemas e uso de *softwares*	Repensar o processo de ensino-aprendizagem da Teoria Elementar dos Números
Campos/ 2013	Ensino Fundamental e Médio	EDL de duas ou mais variáveis	Resolução de problemas	Possibilidade de se explorar o tema nas séries propostas
Melo/ 2013	Ensino Médio	Matrizes e EDL	Uso de matrizes na parametrização de EDL	Eficácia da técnica de parametrização de EDL por matrizes
Rios e Alves/ 2013	7º ano do Ensino Fundamental e 2ª série do Ensino Médio	EDL a duas incógnitas	Resolução de problemas	Sensibilizar e incentivar professores a abordarem o assunto
Silva/ 2013	Ensino Fundamental	Equações diofantinas lineares e não lineares	Recomendações baseadas em erros e acertos	Fornecer suporte teórico ao professor que deseja aplicar EDL.
Ribeiro/ 2014	A partir do 9º ano do Ensino Fundamental	Problemas da obra de Diofanto	Usar o método de Diofanto e a simbologia moderna	Ser possível abordar por meio de sequências didáticas
Campos/ 2015	Ensino Fundamental	EDL a duas incógnitas	Resolução de problemas	Utilizar EDL para aprofundamento na aritmética, álgebra e na construção de um aprendizado mais significativo.
Deus/ 2017	Ensino Fundamental e Médio	Interpretação geométrica de EDL	Situações-problema	Explorar a resolução geométrica de um problema
Santos/ 2017	Ensino Fundamental e Médio	Teorema chinês dos restos e aplicações	Resolver EDL por meio de congruências lineares	Permitir aprofundamento no tema
Oliveira/ 2018	9º ano do Ensino Fundamental	EDL a duas incógnitas	Sequência didática	Auxiliou o desenvolvimento do raciocínio lógico, promoveu aprendizagem significativa.
Vieira/ 2018	9º ano do Ensino Fundamental	EDL a duas incógnitas	Sequência didática	Pode ser uma importante ferramenta para auxiliar os alunos no processo de desenvolvimento dos raciocínios algébrico e aritmético.

Por tudo isso conclui-se que, apesar de haver um já considerável número de publicações acerca do saber matemático Equações Diofantinas Lineares, nenhum dos autores verificados propôs a abordagem dessas equações a partir de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA). Cabe ressaltar também que todos os autores citados chegaram à conclusão de que estas equações podem ser ensinadas tanto no Ensino Fundamental quanto Médio, sem prejuízo dos temas a serem tratados nestas duas etapas de ensino.

2 Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA)

A expressão Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), apresentada por Simon (1995) consiste no seguinte conjunto de etapas: definir objetivos (metas) de aprendizagem para os alunos, propor atividades que promovam essa aprendizagem, e levantar hipóteses sobre o pensamento e a aprendizagem dos alunos.

Baseado em uma pesquisa sobre a construção do conceito de área de figuras planas realizada com 25 alunos de uma sala de aula experimental, Simon observou que a aprendizagem de cada aluno prossegue ao longo de caminhos idiossincráticos, embora muitas vezes semelhantes. Para ele, isso pressupõe que a aprendizagem de um indivíduo tenha alguma regularidade, que a comunidade da sala de aula restringe a atividade matemática frequentemente de maneiras previsíveis, e que muitos dos alunos da mesma classe podem se beneficiar da mesma tarefa matemática.

Com isso, Simon estruturou o Ciclo de Ensino da Matemática – um "modelo esquemático das inter-relações cíclicas entre aspectos do conhecimento do professor, pensamento, tomada de decisão e atividade proposta" (SIMON, 1995, p. 136). Segundo o Ciclo, ao desenvolver uma atividade matemática, o professor leva em consideração seu próprio conhecimento para tecer hipóteses acerca do conhecimento matemático e da aprendizagem dos estudantes, interpretar situações e tomar decisões. Essas hipóteses podem ser confirmadas ou não, e as atividades podem sofrer modificações de acordo com as necessidades e particularidades do público-alvo. Ao elaborar novas atividades ou reestruturar as já existentes, o professor acaba por traçar novas hipóteses, daí a justificativa do termo "Ciclo". Ao reiniciar cada Ciclo, o professor adquire mais conhecimento acerca da aprendizagem dos seus alunos e pode ter maior segurança na hora de tomar decisões.

A THA é parte integrante do Ciclo de Ensino da Matemática – também desenvolvido por Simon – representado na Figura 1:

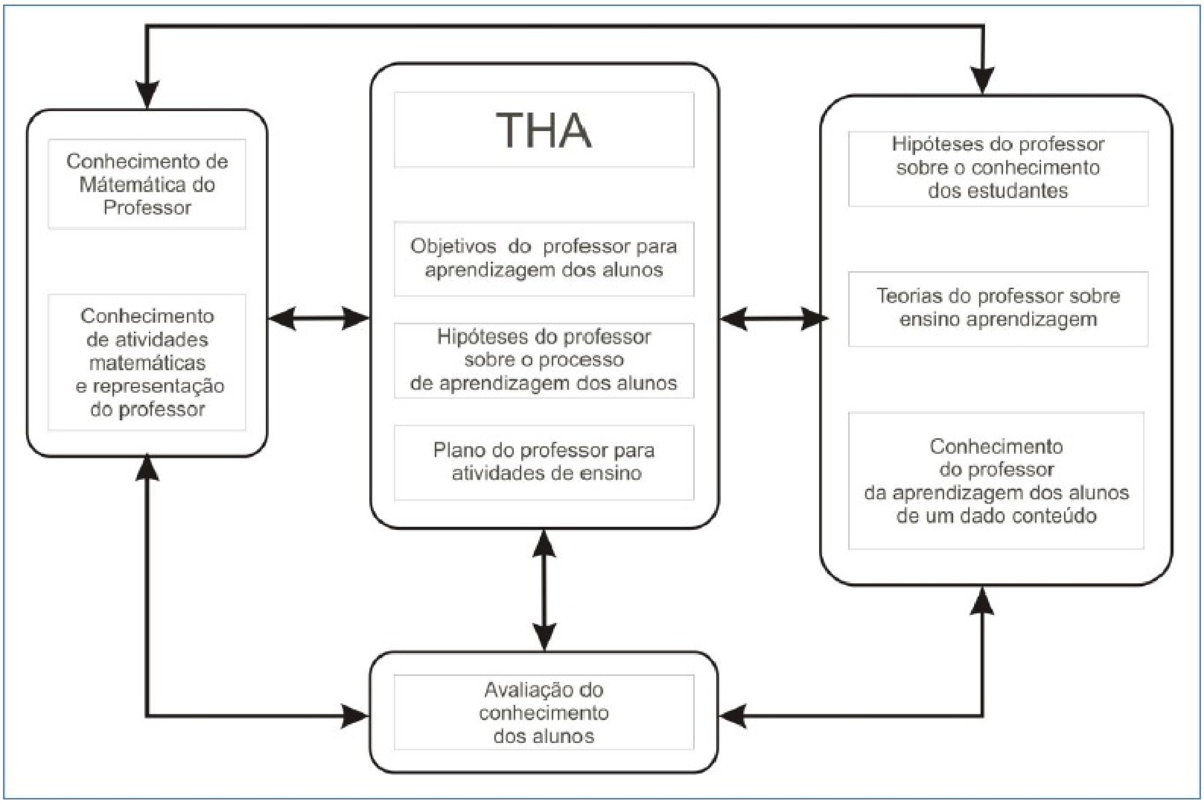

Figura 1 – Ciclo de Ensino da Matemática, THA – adaptado (SIMON, 1995, p. 136). Tradução de Traldi Jr. e Rosenbaum (2010).

Dentro deste Ciclo, portanto, o conhecimento dos alunos é de fundamental importância, pois é este conhecimento que deve nortear os objetivos de aprendizagem, a escolha das atividades adequadas e não menos importante, as hipóteses sobre o pensamento/entendimento deles quanto ao assunto. Os caminhos necessários para o objetivo definido são feitos por meio das chamadas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

De acordo com a THA, o professor determina os objetivos e propõe uma tarefa para atingi-los. A partir das observações dos alunos, se necessário, o professor deve alterar o objetivo inicial, uma vez que o potencial de aprendizagem é determinado pela maneira como os alunos constroem suas tarefas e experiências.

Desenvolver essa trajetória requer planejamento, pois deve-se buscar atividades que permitam aos alunos construir seu próprio saber matemático e não apenas reproduzir conceitos pré-estabelecidos. As atividades de ensino devem fomentar a autonomia e a criatividade dos estudantes.

> A ideia de Trajetória Hipotética de Aprendizagem, proposta por Simon, pode trazer grandes contribuições para uma "reconstrução pedagógica da Matemática de uma perspectiva construtivista" e se mostra promissora em compatibilizar perspectivas construtivistas de aprendizagem como

> planejamento de ensino, pois vêm ao encontro da necessidade de nortear a ação pedagógica, apresentando modelos, não absolutos, e sim exemplos de atividades que contemplem uma visão construtivista (LIMA, 2009, p. 186).

As THA são adequadas à perspectiva construtivista da aprendizagem defendida por Simon. O autor faz distinção entre o que chama de "Construtivismo Radical" e "Construtivismo Social" e desenvolve sua teoria baseado em pesquisas de Cobb (1989), faz uma combinação entre as duas correntes citadas.

> Embora termos como "construtivismo radical" e "construtivismo social" forneçam alguma orientação, há uma diversidade de perspectivas epistemológicas dentro dessas categoria. Portanto, parece importante descrever brevemente a perspectiva construtivista em que nossa pesquisa se baseia (SIMON, 1995, p. 115) (tradução nossa.)

Para o autor, o primeiro baseia-se na "reorganização cognitiva individual" (OLIVEIRA, 2015), segundo a qual, embora a interação social tenha alguma relevância para a construção do conhecimento, o ponto principal desta construção está na interação cognitiva e psicológica do sujeito. O segundo baseia-se na ideia de que o conhecimento se forma em um processo socialmente determinado. Em outras palavras, o conhecimento provém da dimensão sociocultural em que o sujeito está inserido.

A ideia de Simon é evitar qualquer extremo entre as duas vertentes e, baseado nos estudos de Cobb (1989), ele propõe uma combinação entre as duas visões para entender a aprendizagem em sala de aula. Não se trata de uma ser mais importante do que a outra, mas do que pode ser aprendido através da combinação de análises dessas duas perspectivas. A análise psicológica da aprendizagem matemática em sala de aula concentra-se no conhecimento matemático de cada aluno, conhecimento matemático de um para com o outro e o senso que eles têm acerca do funcionamento da aula de matemática. Já a análise sociológica enfoca o conhecimento compartilhado e as normas sociais da sala de aula. Para Simon,

> As "Normas sociais" incluem as expectativas que os membros da comunidade têm do professor e dos alunos, a concepção do que significa fazer matemática nessa comunidade e os modos pelos quais a validade matemática é estabelecida (SIMON, 1995, p. 116 - 117).

Ou seja, para Simon, a construção do conhecimento matemático se dá pela mútua cooperação de elementos psicológicos (cognitivos), sociológicos e culturais da comunidade escolar e da sociedade em que está inserida. É de fundamental importância que o professor crie um ambiente favorável à construção do conhecimento por meio da interação de todos esses elementos.

> No desenvolvimento do trabalho do professor na sala de aula, não faz sentido mostrar aos alunos exatamente o que eles têm de aprender. Os alunos precisam de um espaço para elaborar conhecimento, ferramentas por eles mesmos. Um requisito é que o professor deve ser capaz de antecipar entendimentos, dúvidas dos alunos para que possa interagir com eles, intervir (ROSSETTO, 2016, p. 19).

Assim, o professor pode construir um projeto de decisões, antecipando possíveis dúvidas que os alunos possam apresentar, ou seja "hipotetizando" trajetórias, uma vez que o professor não tem acesso direto ao pensamento dos alunos.

As conjecturas que o professor faz sobre as possíveis dúvidas contribuem com o trabalho docente, trazendo maior segurança, pois as possíveis dúvidas podem ocorrer ou não durante a aula. Rossetto (2016, p. 25) afirma que:

> Por um lado, as possíveis perguntas e dúvidas previstas na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da elaboração da proposta. Por outro lado, durante o desenvolvimento da THA em sala de aula, as perguntas e dúvidas previstas ou não na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da execução da proposta. Ao relatar as hipóteses, professores podem utilizar diálogos hipotéticos com os alunos para prever perguntas que possam levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.

Para que se possa ensinar, é preciso conhecer, e o conhecimento matemático do professor é de suma importância na elaboração da THA. O conhecimento matemático deve abranger, segundo Pires (2009), alguns aspectos, além das hipóteses, acerca do conhecimento matemático dos alunos. São eles: teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas das atividades; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem saberes sobre determinado assunto. Além da própria experiência em sala de aula, este conhecimento também provém da pesquisa na literatura e da formação continuada.

Quanto às atividades propostas, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio orientam:

> Não somente na Matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA, 2002, p.266).

Cabe ressaltar também que as intervenções do professor devem ocorrer somente nos alunos com maiores dificuldades de modo a estimulá-los a buscarem nas próprias dificuldades os caminhos para se resolver um problema.

> Ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao

> invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro-texto ou professor (POZO, 1998, p. 14-15).

Sendo assim, as atividades propostas na THA, ou seja, as situações de aprendizagem, não devem ser resolvidas pelo professor. Este deve ajudar, quando necessário, os alunos a construírem sua própria aprendizagem. Por tudo o que foi exposto, pode-se concluir que as THA constituem uma metodologia que pode ser eficaz à aprendizagem.

3 Tópicos de Teoria Elementar dos Números

3.1 Divisibilidade

Neste capítulo serão tratadas algumas definições e resultados essenciais à compreensão das Equações Diofantinas Lineares. Para isto, consideremos a definição de Domingues e Iezzi (2003) de $\mathbb{Z}$ ser um anel de integridade ordenado e também assumiremos o Princípio da Boa Ordem (PBO). Alguns tópicos aqui apresentados serão novamente tratados nas propostas de atividades de aplicações das equações, bem como algumas demonstrações passíveis de serem feitas em turmas do Ensino Médio.

Definição 1 *Dados dois inteiros a e b, dizemos que a **divide** b se existir um inteiro c não nulo tal que $b = ac$. Para isto utiliza-se a notação $a \mid b$. Pode-se dizer também que a é um divisor de b ou que b é múltiplo de a.*

É importante observar que $a \mid b$ não representa uma operação em $\mathbb{Z}$ nem uma fração, mas trata-se de uma relação entre a e b que se estabelece quando existir um $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$.

A negação desta sentença é representada por $a \nmid b$. Neste caso diz-se que a não divide b, ou seja, não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$.

Se $a \neq 0$, o inteiro c que satisfaz a condição é único, pois se existisse um outro $c' \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac'$, teríamos $ac = ac'$. Pela lei do cancelamento, como $a \neq 0$, então $c = c'$.

Cabe ressaltar que o divisor a será sempre considerado não nulo, pois $0 \mid b$ se e somente se $b = 0$. Além disso, o quociente c não seria único, pois $0 = 0 \cdot c$ para todo $c \in \mathbb{Z}$.

Com relação à divisibilidade, temos os resultados a seguir:

Proposição 1 *Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$.*

Demonstração:

Se $a \mid b$, então $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$.

Temos $|b| = |a \cdot c| = |a| \cdot |c|$.

Como $b \neq 0$ temos $c \neq 0$ e como $|c|$ é um inteiro positivo, temos $|c| \geq 1$.

Daí $|b| = |a \cdot c| = |a| \cdot |c| \geq |a| \cdot 1 = |a|$.

■

Corolário 1 *Se $a \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \mid 1$, então $a = \pm 1$.*

Demonstração:

Se $a \mid 1$, então $a \neq 0$ e $|a| \leq |1| = 1$. Como $0 < |a| \leq 1$, então $|a| = 1$, isto é, $a = 1$ ou $a = -1$.

■

3.1.1 Propriedades da divisibilidade

Faremos uso de algumas propriedades referentes à divisibilidade em $\mathbb{Z}$. Se o leitor julgar necessário, podem ser demonstradas aos alunos, pois não carecem de rigor matemático extremo.

1. Seja $a \in \mathbb{Z}$. Tem-se que $1 \mid a$ e $a \mid 0$.
   De fato, dado $a \in \mathbb{Z}$, $a = 1 \cdot a$. Logo, $1 \mid a$.
   Analogamente, $0 = a \cdot 0$. Logo, $a \mid 0$.

2. **Reflexiva**:
   $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \mid a$.
   De fato, dado $a \in \mathbb{Z}$, $a = a \cdot 1$. Logo $a \mid a$.

3. **Transitiva**:
   $\forall\ a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.
   De fato, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, tem-se que

   se $a \mid b$, então $\exists\ e \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ae$; (I)

   se $b \mid c$, então $\exists\ f \in \mathbb{Z}$ tal que $c = bf$. (II)

   Ao substituir a sentença (I) em (II) obtém-se $c = (ae)f = a(ef)$. Logo, $a \mid c$.

4. **Antissimétrica**:
   $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $b \mid a$, então $|a| = |b|$.
   De fato, dados $a, b \in \mathbb{Z}$, pela Proposição 1 tem-se que:

   se $a \mid b$, então $|a| \leq |b|$; (I)

   se $b \mid a$, então $|b| \leq |a|$. (II)

   De (I) e (II) segue pela relação de ordem de $\mathbb{Z}$ que $|a| = |b|$.

5. $\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.
   De fato, dados $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, temos que

   se $a \mid b$, então $\exists\, e \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ae$; (I)

   se $c \mid d$, então $\exists\, f \in \mathbb{Z}$ tal que $d = cf$. (II)

   Ao multiplicar membro a membro as igualdades segue-se que $bd = (ae)(cf)$, ou seja, $bd = (ac)(ef)$. Logo, $ac \mid bd$.

6. $\forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, $\forall\, x,y \in \mathbb{Z}$.
   De fato, dados $a,b,c \in \mathbb{Z}$,

   se $a \mid b$, então $\exists\, e \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ae$;

   se $a \mid c$, então $\exists\, f \in \mathbb{Z}$ tal que $c = af$.

   Assim, dados $x,y \in \mathbb{Z}$, tem-se

   $bx + cy = (ae)x + (af)y = a(ex) + a(fy) = a(ex + fy)$. Como $(ex + fy) \in \mathbb{Z}$,

   então $a \mid (bx + cy)$.

7. $\forall\, a,b \in \mathbb{Z}$, tem-se que $a \mid b$ se, e somente se, $|a| \mid |b|$. De fato, dados $a,b \in \mathbb{Z}$,

   se $a \mid b$, então $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ac$. Daí,

   $|b| = |ac| = |a| \cdot |c|$. Logo $|a| \mid |b|$.

   Reciprocamente, se $|a| \mid |b|$, então $\exists\, d \in \mathbb{Z}$ tal que $|b| = |a| \cdot d$. Logo,

   $b = \pm|a| \cdot d = \mp a \cdot d$, isto é, $a \mid b$.

8. Dados $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Suponhamos que $a \mid (b \pm c)$. Então $a \mid b \iff a \mid c$.

   De fato, tomando inicialmente que $a \mid b$, tem-se que $a \mid -b$.

   Como $a \mid (b \pm c)$, então $a \mid [(-b + (b \pm c)]$, ou seja, $a \mid \pm c$, donde segue que $a \mid c$.

   Reciprocamente, pelo fato de $a \mid c \iff a \mid -c$. tem-se que

   se $a \mid (b + c)$, então $a \mid [(b + c) - c]$, donde segue que $a \mid b$;

   se $a \mid (b - c)$, então, $a \mid [(b - c) + c]$ e portanto $a \mid b$.

3.2 Divisão Euclidiana

Embora estudantes do Ensino Médio já estejam habituados à divisão, nem sempre ela é feita no conjunto $\mathbb{Z}$ (com resto). Propomos aqui tratar do algoritmo da divisão - também chamado **Algoritmo de Euclides**.

Proposição 2 *Dados dois inteiros a e b com $b \neq 0$, existem inteiros únicos q e r tais que $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.*

Para demonstrar a validade da proposição, baseamo-nos no fato de que $r = a - bq$, e portanto dizer que $0 \leq r < |b|$ é equivalente a dizer que $0 \leq a - bq < |b|$. Isto significa que estamos à procura de um múltiplo de b (no caso bq), menor ou igual a a, porém o mais próximo possível de a.

Provemos a existência dos inteiros q e r que satisfazem a condição dada e também sua unicidade.

1. Existência: Considere o seguinte axioma (**Princípio da Boa Ordem**): Se S é um subconjunto não-vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

   a) Iniciaremos pelo caso em que $a \geq 0$ e $b > 0$. Devemos mostrar que existem inteiros q e r tais que $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. De fato, consideremos o conjunto

   $S = \{a - bx | x \in \mathbb{Z}, a - bx \geq 0\}$.

   S é não-vazio, pois, para $x = 0$ tem-se $a - bx = a \geq 0 \in S$. Pelo *Princípio da Boa Ordem*, existe um elemento mínimo em S. Seja $r = \min S$. Como $r \in S$, então r é da forma $a - bx \geq 0$. Mais especificamente, $r = a - bq$ (I), ou ainda, $a = bq + r$ para algum $q \in \mathbb{Z}$.
   Para mostrar que $r < b$ iremos supor que $r \geq b$. Então

   $r - b \geq 0$. Substituindo o resultado (I), temos que

   $a - bq - b \geq 0 \iff a - b(q + 1) \geq 0$. Como $(q + 1) \in \mathbb{Z}$, tem-se que

   $a - b(q + 1) \in S$. Logo, $r - b \in S$.

   Porém $r - b < r$ e isto contradiz o fato de r ser o mínimo de S. Portanto, temos que $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

   b) Provemos agora o caso em que $a < 0$ e $b > 0$.
   Partindo do resultado obtido anteriormente podemos mostrar que existem inteiros q' e r' tais que $|a| = bq' + r'$, $0 \leq r' < b$.
   Vejamos:

se $r' = 0$, temos $|a| = bq' + 0$. Então $a = -|a| = -bq' + 0 \iff a = b(-q')$. Tomando $q = -q'$ e $r = 0$ obtemos $a = bq + r$;

se $r' > 0$, temos $|a| = bq' + r'$. Então $a = -|a| = b(-q') - r' \iff a = b(-q') - b + b - r' \iff a = b(-q' - 1) + (b - r')$. Como $b - r' < b$, podemos tomar $q = -(q' + 1)$ e $r = b - r'$ e daí $a = bq + r$.

Assim, para a qualquer e $b > 0$ temos $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.

c) Finalmente, para a qualquer e $b < 0$, podemos, da mesma forma, determinar q' e r' tais que

$a = |b|q' + r'$, $0 \leq r' < |b|$. Além disso, quando $b < 0$, tem-se $|b| = -b$. Logo, $a = (-b)q' + r' \iff a = b(-q') + r'$. Tomando $q = -q'$ e $r = r'$ temos $a = bq + r$.

2. Unicidade: Provemos agora a unicidade dos inteiros q e r, ou seja, se q, q', r e r' são tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r \leq |b|$ e $a = bq' + r'$ com $0 \leq r' \leq |b|$, então $q = q'$ e $r = r'$. De fato:

   $bq' + r' = a = bq + r. \qquad \text{(I)}$

   Segue-se então que $bq' + r' = bq + r$, ou seja, $b(q' - q) = r - r' \qquad \text{(II)}$.
   Como $r < |b|$ e $r' < |b|$, então $r - r' < |b|$. Substituindo o resultado obtido em (II), obtemos

   $b(q' - q) < |b|$. Além disso, $0 \leq |b| \cdot |q' - q| < |b|$.

   Como $|b| > 0$, pelo cancelamento da multiplicação obtemos

   $0 \leq |q' - q| < 1$, donde segue que $|q' - q| = 0$, ou seja, $q' = q$. $\qquad$ (III)

   Substituindo o resultado (III) em (I), temos $bq + r' = bq + r$, isto é, $r' = r$.

Portanto, quaisquer que sejam a e $b \neq 0$ inteiros, podemos encontrar inteiros únicos q e r tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$.

■

3.3 Máximo Divisor Comum (*mdc*)

Definiremos aqui o máximo divisor comum (mdc) entre dois inteiros, algumas propriedades importantes e o algoritmo de Euclides estendido para o cálculo do mdc entre dois inteiros.

Definição 2 (Máximo Divisor Comum) *Dados dois inteiros a e b não necessariamente distintos. Denomina-se o **máximo divisor comum** (mdc) entre a e b como sendo um inteiro positivo d tal que:*

1. *d seja divisor comum de a e b e*
2. *Todo divisor comum de a e b também divide d.*

Para isto usa-se a notação $d = mdc(a, b)$. Da definição decorre que $mdc(a, b) = mdc(b, a)$ e o mdc entre dois números é único.

De fato, supondo que haja dois inteiros d e d' que sejam $mdc(a, b)$, pela definição tem-se que:

$d \mid a,\ d \mid b$ e $d' \mid d$. Analogamente,

$d' \mid a,\ d' \mid b$ e $d \mid d'$. Daí segue que,

se $d' \mid d$ e $d \mid d'$, então $|d| = |d'|$.

Como d e d' são ambos positivos, segue que $d = d'$.

■

3.3.1 Propriedades do *mdc*

Dados a e b inteiros, podem ser obtidos os seguintes resultados:

1. $mdc(0, a) = |a|$.

   De fato, suponha que $mdc(0, a) = d$. Então, $d \mid 0$ e $d \mid a$, logo $d \mid |a|$ (I).

   Como $|a| \mid 0$ e sabemos que $|a| \mid a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ então, pela definição de mdc teremos $|a| \mid d$ (II).

   De (I) e (II) segue que $d \mid |a|$ e $|a| \mid d$, portanto $d = |a|$.
   Assim, $\forall\ a \in \mathbb{Z}$, $mdc(0, a) = |a|$.

2. $mdc(a, a) = |a|$.

   Seja $mdc(a, a) = d$. Isto significa que $d \mid a$, logo $d \mid |a|$.

   Como $|a| \mid a$, então $|a| \mid d$. Logo $d = |a|$.

   Assim, $\forall\, a \in \mathbb{Z}$, $mdc(a, a) = |a|$.

3. $mdc(a, 1) = 1$.

   Seja $d = mdc(a, 1)$. Então $d \mid a$ e $d \mid 1$. Pelo Corolário 1, como $d \mid 1$, então $d = \pm 1$.

   Como d deve ser estritamente positivo, então $d = 1$.

4. $mdc(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

   ($\Longrightarrow$) Como $0 = mdc(a, b)$, então

   $0 \mid a \Longrightarrow a = 0$;

   $0 \mid b \Longrightarrow b = 0$.

   Portanto, $a = b = 0$.

   ($\Longleftarrow$) Se $a = b = 0$, então $d = mdc(a, b) = mdc(0, 0)$.
   Pela propriedade 2, $mdc(0, 0) = 0$.

5. Se $a \mid b$, então $mdc(a, b) = |a|$.

   Seja $d = mdc(a, b)$. Isto significa que $d \mid a$ e $d \mid b$. Pela definição de mdc, como $a \mid a$ e $a \mid b$, então $a \mid d$.

   Se $d \mid a$ e $a \mid d$, então $d = |a|$.

3.4 O Algoritmo de Euclides estendido

É possível relacionar dois inteiros a partir da divisão em $\mathbb{Z}$. Considere a proposição a seguir:

Proposição 3 *Dados $a, b, d, q, r \in \mathbb{Z}$ com $b \leq a$ e $d = mdc(a, b)$. Se $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$. Então d será $mdc(a, b)$ se, e somente se, d for $mdc(b, r)$.*

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Se $d = mdc(a, b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$, logo $d \mid (a - bq)$. Como $r = a - bq$ teremos $d \mid b$ e $d \mid r$.
Considere agora $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \mid b$ e $c \mid r$. Então $c \mid b$ e $c \mid (bq + r)$, ou seja, $c \mid b$ e $c \mid a$. Mas $d = mdc(a, b)$, portanto $c \mid d$. Assim $d = mdc(b, r)$.

($\Longleftarrow$) Se $d = mdc(b, r)$, então $d \mid b$ e $d \mid r$. Portanto, $d \mid (bq + r)$, ou seja, $d \mid b$ e $d \mid a$. Considere agora $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \mid b$ e $c \mid a$. Então $c \mid b$ e $c \mid (a - bq)$, ou seja, $c \mid b$ e $c \mid r$. Mas $d = mdc(b, r)$, portanto $c \mid d$. Assim $d = mdc(a, b)$.

$\blacksquare$

A proposição nos garante que o *mdc* entre dois inteiros pode ser obtido utilizando-se o algoritmo da divisão (de Euclides). Vejamos:
Considere $a, b \in \mathbb{N}$, supondo $b \leq a$. Podemos ter:

I. $b = 1$. Neste caso, $mdc(a, b) = 1$.

II. $b = a$. Neste caso, $mdc(a, b) = b$.

III. $b \mid a$. Neste, também $mdc(a, b) = b$.

IV. Finalmente, se $b \nmid a$ e $1 < b < a$. Neste caso $a = bq + r_0$, $0 < r_0 < b$. Temos então duas possibilidades:

   a) Se $r_0 \mid b$, então $mdc(a, b) = r_0$.

   b) Se $r_0 \nmid b$, então $b = r_0 q_1 + r_1$, $0 < r_1 < r_0$. Novamente pode haver duas possibilidades:

      i. $r_1 \mid r_0 \Longrightarrow mdc(a, b) = r_1$;

      ii. $r_1 \nmid r_0$, então $r_0 = r_1 q_2 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$. Repetindo o processo, chegaremos a r_{n+1} tal que $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_n > 0 = r_{n+1}$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_n \mid r_{n-1}$, portanto, $mdc(a, b) = r_n$.

Assim, podemos obter o mdc entre dois inteiros a e b fazendo divisões sucessivas de modo a achar r_n tal que $mdc(a, b) = r_n$.

Exemplo 1 *Encontre o mdc entre 28 e 48.*

Sabemos que $mdc(28, 48) = mdc(48, 28)$. Fazendo $48 \div 28$, temos:

$48 = 28 \cdot 1 + 20$; como $20 \nmid 28$, fazemos $28 \div 20$, daí:

$28 = 20 \cdot 1 + 8$; como $8 \nmid 20$, faremos $20 \div 8$, daí:

$20 = 8 \cdot 2 + 4$. Neste caso, como $4 \mid 8$, segue que $mdc(48, 28) = mdc(28, 20) = mdc(20, 8) = mdc(8, 4) = 4$.

$\blacksquare$

Além disso, podemos escrever o $mdc(a, b)$ em função de a e b conforme enuncia o próximo teorema:

Teorema 3.4.1 (Bézout) *Considere os inteiros a, b e d tais que $d = mdc(a, b)$. Então existem r e s inteiros tais que*

$$d = ra + sb.$$

Em outras palavras, o mdc *entre dois números inteiros pode ser escrito como uma combinação linear deles.*

Faremos a demonstração em duas partes:

1. se $a = b = 0$, então $d = mdc(a, b) = 0$, ou seja, $\forall\, r, s \in \mathbb{Z}$, $0 = r \cdot 0 + s \cdot 0$, portanto $d = mdc(a, b) = ra + sb$.

2. se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, considere o conjunto

$$S = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z},\ ma + nb > 0\}$$

   Temos que S é não-vazio, uma vez que $aa + bb = a^2 + b^2 > 0$, teremos $aa + bb \in S$. Como S é limitado inferiormente, pelo Princípio da Boa Ordem S possui um menor elemento que chamaremos de d.

   a) Como $d \in S$, então existem m_0 e n_0 inteiros tais que

   $d = m_0a + n_0b \qquad$ (I).

   Aplicando o algoritmo da divisão a a e d temos:

   $a = dq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < d \qquad$ (II).

Substituindo o resultado (I) em (II), temos:

$a = (m_0a + n_0b)q_1 + r_1$ e daí

$r_1 = (1 - q_1m_0)a - q_1n_0b = (1 - q_1m_0)a + q_1(-n_0)b$. Logo $r_1 \in S$.

Como $0 \leq r_1 < d$ e d é o menor dos elementos estritamente positivos de S, então $r_1 = 0$. Substituindo isto em (II),

$a = dq_1$, ou seja, $d \mid a$.

b) Ao tomar novamente a sentença (I) e, analogamente ao item (a), aplicar o algoritmo da divisão a b e d temos:

$b = dq_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < d$. Daí

$r_2 = (1 - q_2n_0)b + q_2(-m_0)a$, ou seja, $r_2 \in S$.

Da mesma forma, $r_2 = 0$. Logo $d \mid b$.

Das sentenças (a) e (b) concluímos que $d \mid a$ e $d \mid b$.
Provemos agora que d é o maior dos divisores comuns a a e b.

Para tanto tomemos $c \in \mathbb{Z}$ tal que $c \mid a$ e $c \mid b$. Então

$c \mid (m_0a + n_0b)$ e portanto $c \mid d$.

Assim, o *mdc* d entre dois inteiros a e a pode ser escrito como sendo $d = ma + nb$, $m,\ n \in \mathbb{Z}$.

■

Podemos usar o algoritmo de Euclides para obter os coeficientes m e n no cálculo do *mdc* entre dois inteiros a e b. Pelo Exemplo 1, temos:

$48 = 28 \cdot 1 + 20 \iff 20 = 48 - 28 \cdot 1 \qquad$ (I);

$28 = 20 \cdot 1 + 8 \iff 8 = 28 - 20 \cdot 1 \qquad$ (II);

$20 = 8 \cdot 2 + 4 \iff 4 = 20 - 8 \cdot 2 \qquad$ (III).

Substituindo a equação (II) em (III) obtemos:

$4 = 20 - 8 \cdot 2 = 20 - 2 \cdot (28 - 20 \cdot 1) = 3 \cdot 20 - 2 \cdot 28$. Substituindo o resultado (I) nesta nova igualdade, obtemos:

$4 = 3 \cdot (48 - 28 \cdot 1) - 28 \cdot 2 = 3 \cdot 48 - 5 \cdot 28$, donde segue que os coeficientes m e n são respectivamente 3 e -5.

Com isso podemos enunciar a proposição:

Proposição 4 *Sejam $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$. Se $d = mdc(a,b)$, então*

$$mdc(ac, bc) = |c|d.$$

Demonstração: Para que $|c|d$ seja $mdc(ac, bc)$, devemos ter que $|c|d \mid ac$ e $|c|d \mid bc$. Além disso, se existir um inteiro d' que divida ac e bc, então deve dividir também $|c|d$.

De fato, como $d = mdc(a,b)$ então $d \mid a$. Logo, $cd \mid ac$ e portanto $|c|d \mid ac$.

Analogamente, como $d \mid b$, temos $|c|d \mid bc$.

Pelo Teorema de Bézout existem inteiros r e s tais que $d = ra + sb$. Daí, $|c|d = |c|(ra) + |c|(sb)$. Assim, se $d' \in \mathbb{Z}$ é tal que $d' \mid ac$ e $d' \mid bc$, então $d' \mid |c|[(ra) + (sb)]$, ou seja, $d' \mid |c|d$, provando assim a proposição.

■

O resultado dessa proposição leva ao seguinte corolário:

Corolário 2 *Dados $a,\ b,\ d \in \mathbb{Z}$, sendo a e b não ambos nulos e $d = mdc(a,b)$, tem-se:*

$$mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

Demonstração:
Note que como $d = mdc(a,b)$, então $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$.

Temos $d = mdc(a,b) = mdc\left(d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}\right)$. Pela Proposição 4,

$mdc\left(d \cdot \frac{a}{d}, d \cdot \frac{b}{d}\right) = d \cdot mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$. Assim,

$d = d \cdot mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$. Como $d \neq 0$, pelo cancelamento segue que $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

■

Considere também o próximo resultado, que embora simples, é bastante útil:

Teorema 3.4.2 (Euclides) *Sejam a, b e c inteiros tais que $a \mid bc$. Se $mdc(a, b) = 1$, então $a \mid c$.*

Demonstração:

Temos que $a \mid bc$. Logo existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = aq$. (I)

Como $mdc(a, b) = 1$, então existem r e s inteiros tais que $1 = ra + sb$. Daí,

$1 = ra + sb$ e portanto, $c = c(ra) + c(sb)$. (II)

Substituindo o resultado (I) na equação (II), segue que

$c = a(cr) + (aq)s = a(cr + qs)$, em que $(cr + qs) \in \mathbb{Z}$. Logo $a \mid c$.

$\blacksquare$

3.5 Equações Diofantinas Lineares

Nesta seção trataremos das Equações Diofantinas Lineares a partir de um breve contexto histórico e passaremos ao contexto matemático. Trataremos somente das equações lineares a duas incógnitas. Sendo assim, por "Equações Diofantinas Lineares" subentendem-se "equações diofantinas lineares a duas incógnitas".

3.5.1 Nota histórica

O nome "Equação Diofantina" foi dado em homenagem ao matemático e filósofo grego Diophanto de Alexandria (aprox. 250 d.C.).

> Na verdade, seria mais justo associar esses problemas ao nome de Fermat, que foi o primeiro a chamar a atenção sobre as questões aritmética estritamente no conjunto dos números inteiros, no preâmbulo de um problema que propôs em 1657 (MILIES; COELHO, 2013, p. 97 - 98).

Diophanto não utilizava a notação algébrica hoje conhecida e procurava soluções racionais. Pouco se sabe de sua vida e seu trabalho mais conhecido – *Arithmetica* – consiste em "um tratado que originalmente continha 13 livros, dos quais somente seis se preservaram" (POMMER, 2008, p. 24).

> Arithmetica é considerado o primeiro manual de álgebra que usa símbolos para indicar incógnitas e potências, e resolve as equações indeterminadas, hoje denominadas equações diofantinas (CAMPOS, 2013, p. 11).

Por não se usar as notações algébricas hoje conhecidas, as soluções dos 150 problemas tratados em *Arithmetica* eram dadas em termos de exemplos numéricos específicos e não em termos teóricos. Há problemas com soluções determinadas e indeterminadas, porém não há clara distinção entre estes dois tipos, sendo resolvidos de forma semelhante e mesmo para estes últimos somente uma solução era dada.

3.5.2 Contexto matemático

Definição 3 *Define-se* ***Equação Diofantina Linear a duas incógnitas*** *a toda equação da forma*

$$ax + by = c$$

em que $a, b \in \mathbb{Z}$ *não ambos nulos e* $c \in \mathbb{Z}$.

Chamamos de solução da equação a todo par ordenado $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ para o qual a sentença

$$ax_0 + by_0 = c$$

seja válida. Nem sempre a equação possui solução. Para que a solução exista, é preciso algumas condições. Vejamos:

Proposição 5 *Uma equação diofantina linear $ax + by = c$, admite solução se e somente se $d = mdc(a, b)$ divide c.*

Esta demonstração será feita em duas partes:

($\Longrightarrow$) Se o par $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é solução da equação $ax + by = c$, então a igualdade $ax_0 + by_0 = c$ é válida. Se $d = mdc(a, b)$, então $d \mid a$ e $d \mid b$. Logo, $d \mid ax_0 + by_0$, ou seja, $d \mid c$.

($\Longleftarrow$) O Teorema de Bézout garante que sendo $d = mdc(a, b)$, então existem inteiros r e s tais que $d = ra + sb$. Por hipótese, temos que $d \mid c$, ou seja, existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $c = dt$. Assim, $dt = (ra + sb)t \iff c = (ra + sb)t \iff c = a(rt) + b(st)$, ou seja, o par ordenado (rt, st) é uma solução da equação dada.

Portanto, o fato de d dividir c é uma condição necessária e suficiente para que a equação $ax + by = c$ admita solução.

$\blacksquare$

Quanto aos métodos de resolução para essas equações, eles serão tratados adiante nas propostas de atividades.

4 Propostas de aplicação de Equações Diofantinas Lineares a partir de THA

Neste capítulo propomos alguns problemas modeláveis por Equações Diofantinas Lineares para, a partir deles, desenvolver os conceitos e teoremas envolvidos na sua resolução. As atividades consistem em sugestões, e por isso podem ser abordadas de maneiras distintas, tendo o leitor total liberdade para fazê-lo como melhor se adeque ao seu contexto.

As propostas foram desenvolvidas visando alunos a partir da 2ª série do Ensino Médio, pois nesta etapa do desenvolvimento escolar os estudantes possuem a maturidade e os conhecimentos prévios necessários para aquisição do saber matemático Equações Diofantinas Lineares. As atividades também podem ser usadas em turmas de aprofundamento e preparatórias para olimpíadas de matemática.

Partimos do pressuposto de que esses alunos tenham conhecimento acerca de múltiplos e divisores, máximo divisor comum (mdc), números primos, divisão euclidiana e os demais conhecimentos matemáticos tratados no capítulo anterior. Todas as atividades foram elaboradas a partir de problemas contextualizados, associados a situações do cotidiano e cada uma delas traz um ou mais objetivos a serem alcançados e os possíveis caminhos para alcançá-los.

Conforme dito anteriormente, esses caminhos são hipotéticos, ou seja, são antecipações de dúvidas que possam surgir durante a execução das atividades. Desta forma, são apresentadas sugestões para percorrer esses caminhos, que serão divididos em passos. Em geral as atividades iniciam com uma situação-problema e as ações que se seguem visam a atingir o(s) objetivo(s) proposto(s). Evidentemente os caminhos não são únicos, nem o número de passos para percorrê-los, portanto cada atividade trata-se de um roteiro de aula que serve como material de apoio ao professor que deseja encaminhar suas ações por meio de THA.

Não é exagero lembrar que o papel do professor não é fornecer respostas prontas, e sim encaminhar ações a fim de estimular os alunos a construir sua própria aprendizagem. Portanto, eles devem ter liberdade para resolver os problemas da forma mais conveniente, cabendo ao professor o papel de mediador dessa aprendizagem a partir dos resultados obtidos.

As atividades foram elaboradas para serem realizadas individualmente ou em grupos, conforme sugerido em cada uma delas. O professor deve propor o problema e partir das respostas socializadas, sanar as dúvidas e conduzir novas perguntas que direcionem a turma ao(s) objetivo(s) de cada atividade. Para cada uma delas foi feita uma sugestão de tempo necessário para a execução considerando-se a hora-aula de 50 minutos, porém sabe-se que este tempo pode variar de acordo com as especificidades do público-alvo. Quanto à avaliação da aprendizagem, deve ser contínua e permanente, tendo em vista que a execução das atividades com THA envolve constante observação e intervenção do professor - quando necessária - a fim de, sempre que necessário, estabelecer outros objetivos de aprendizado, conforme descrito pelo Ciclo de Ensino da Matemática na Figura 1.

Com base nos trabalhos consultados e na experiência do autor da presente pesquisa (mais de dez anos de docência no ensino de matemática no Ensino Médio), foram elaboradas sete propostas de aplicações. O nível de dificuldade e exigência das propostas aumenta gradativamente de modo que cada atividade exija os saberes desenvolvidos na atividade anterior. As propostas são apresentadas na próxima seção.

4.1 O jogo de sinuca

Esta primeira atividade trata de conceitos relacionados à divisão euclidiana, para isso exige que os alunos tenham conhecimento mínimo acerca de divisor e resto. O professor irá mediar o processo orientando os alunos por meio de perguntas para atingir o(s) objetivo(s).

OBJETIVO DA ATIVIDADE:

Descrever o Algoritmo de Euclides para a divisão.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: duplas ou trios.

PROBLEMA INICIAL:

Muito comum no Brasil, a sinuca é um esporte de mesa, taco e bolas no qual dois adversários tentam colocar nos seis buracos da mesa (as caçapas) as bolas coloridas (não brancas) na sequência definida pelas regras. Dentre as variações do jogo, a mais comum no Brasil é a que possui o seguinte padrão de cores:

Figura 2 - Bolas de um jogo de sinuca. (Disponível em: link-figura)

Agora responda:
Você consegue identificar alguma regularidade na coloração das bolas? Em caso positivo, que regularidade?

PASSO 1

Espera-se que os alunos percebam que as cores se repetem segundo um certo padrão, que é o resto da divisão por 8. Sendo assim, pode-se avançar para o próximo passo. Caso contrário, pode-se propor a próxima pergunta:

Existe alguma relação entre a numeração das bolas e as cores?

Espera-se que respondam que:

Sim, as cores são iguais para as bolas cujos valores possuem o mesmo resto na divisão por 8.

PASSO 2
É muito importante reforçar a ideia do resto da divisão. Para conceituar a *Divisão Euclidiana*, o professor pode propor aos alunos que montem o algoritmo da divisão por 8 com os valores de bolas de mesma cor reforçando o fato de que em se tratando de números inteiros o quociente da divisão não pode ter casas decimais. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 8 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

Neste caso tem-se quociente 1 e resto 3. Dando sequência, propor as seguintes perguntas:

1. Qual o valor do maior resto possível na divisão por 8?

2. E qual o menor resto possível?

Espera-se que os alunos cheguem a 7 no item 1 e zero no item 2.

PASSO 3
Este é o momento de sugerir que os alunos escrevam a divisão efetuada no passo anterior "de trás para frente". Pode haver alguma dificuldade devido a não familiaridade com esta notação. Neste caso, o professor pode dar um exemplo:

$16 \div 8 = 2 \iff 16 = 8 \cdot 2.$

PASSO 4
Neste passo solicitar que escrevam sob a forma anterior, por exemplo, a divisão de 11 por 8, e perguntar: onde "encaixamos" o resto? Ao que se espera que cheguem a

$11 = 1 \cdot 8 + 3.$

Caso não consigam compreender o porquê deste resultado, voltar ao **PASSO 2** refazendo a divisão.
Embora os alunos estejam habituados à divisão euclidiana, em muitos casos não conhecem

o seu algoritmo, que pode ser assim definido:
Dados quaisquer números naturais a e b, com $b \neq 0$, existem dois inteiros únicos q e r tais que $a = bq + r$, sendo q o quociente da divisão de a por b e $0 \leq r < b$ o resto desta divisão.

PASSO 5
Depois de consolidada a etapa anterior, recomendamos passar alguns exercícios de fixação para que os alunos se habituem a escrever dois números inteiros a partir deste algoritmo.
Exercícios:

1. Encontre o quociente e o resto na divisão euclidiana de a por b nos seguintes casos:

    a) $a = 77,\ b = 19$

    b) $a = 300,\ b = 17$

    c) $a = 269,\ b = 56$

    d) $a = 1002,\ b = 58$

2. Escreva a divisão de 25 por 2, 3, 4 e 6 usando o algoritmo de Euclides.

3. Escreva a divisão de 24, 26, 28 e 33 por 7 usando o algoritmo de Euclides.

Outros exercícios podem ser encontrados no livro "Álgebra Moderna" de Domingues (2017).

4.2 Ainda na sinuca...

Esta atividade trata do conceito de divisibilidade e algumas propriedades importantes.

OBJETIVO DA ATIVIDADE:

Introduzir o conceito de divisibilidade, sua notação e algumas propriedades.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: atividade individual.

O professor pode iniciar a aula retomando os resultados da atividade anterior e propondo as seguintes perguntas:

1. Por que só existe uma bola preta no jogo?
2. Caso houvesse uma próxima bola, qual seria sua cor?
3. Se houvesse uma bola número zero, qual seria sua cor?

Espera-se que os alunos relacionem a cor preta ao resto zero na divisão euclidiana por 8.

PASSO 1
Nesta etapa, sugerimos a seguinte questão a fim de direcionar os alunos a relacionarem os números das bolas tratados na questão anterior com o conjunto dos múltiplos de 8:

Que relação existe entre 8 e o conjunto $M = \{0,\ 8,\ 16, \dots\}$?

PASSO 2
O conceito de divisibilidade pode ser introduzido aqui partindo do fato de que o inteiro 8 *divide* todos os elementos do conjunto M. Já a notação $a \mid b$ pode ser apresentada relacionando o inteiro 8 e os elementos de M. É importante enfatizar que um inteiro *divide* apenas seus próprios múltiplos e que a notação $a \mid b$ não representa uma fração ou uma operação, mas uma relação entre dois inteiros a e b na qual $a \mid b$ se e somente se $\exists\ c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot c$.
Sugerimos que o professor solicite aos alunos que escrevam seus próprios exemplos relacionando dois inteiros pela relação "$a \mid b$" ou "$a \nmid b$".

PASSO 3

Feito isto, o professor pode enunciar duas propriedades importantes, cujas demonstrações estão no capítulo *Divisibilidade*:

$P_1:$ Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$.

$P_2:$ Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (bx + cy)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

O professor, se julgar pertinente, pode demonstrá-las com a turma, embora a ideia enunciada nelas seja bastante dedutiva. Em alguns casos, pode-se solicitar aos alunos que procurem algum contraexemplo para as propriedades.

4.3 Comprando selos

Esta é a primeira atividade a tratar das Equações Diofantinas Lineares, por isso partimos de um problema simples, que não exija rigor matemático para ser resolvido. Semelhantemente aos casos anteriores e daqui para frente, o professor irá mediar o processo orientando os alunos por meio de perguntas para atingir o(s) objetivo(s).

OBJETIVOS DA ATIVIDADE:

1. Escrever matematicamente uma situação-problema;
2. Procurar soluções que satisfaçam a condição dada no problema e
3. Conceituar Equação Diofantina Linear.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: duplas ou trios.

PROBLEMA:
Sugerimos ao professor que proponha a seguinte situação aos alunos:

Dispondo de R$ 100,00, quais são as quantidades que se podem comprar de selos de R$ 5,00 e de R$ 7,00 de modo a não sobrar troco? (fonte: (CAMPOS, 2015))

Deve ficar claro que os grupos podem resolver esta primeira pergunta do modo que melhor lhes aprouver. Como o problema é restrito ao conjunto dos inteiros não-negativos, pode haver três diferentes respostas para o problema. São elas:

a) 20 selos de R$ 5,00 e nenhum de R$ 7,00;

b) 13 selos de R$ 5,00 e 5 selos de R$ 7,00;

c) 6 selos de R$ 5,00 e 10 selos de R$ 7,00.

É importante que o professor deixe claro que nem sempre um problema matemático possui uma única resposta. Esta situação pode causar um certo desconforto aos estudantes no início, mas ao longo das atividades eles terão mais convicção de que as equações aqui tratadas podem ter até infinitas soluções, dependendo do contexto em que se estabelece.

PASSO 1:
Partindo das diferentes respostas sugerimos perguntas que estimulem a curiosidade dos alunos e mostrem o problema por mais de uma perspectiva, por exemplo:

1. Como você chegou a este resultado?

2. Eu poderia comprar apenas selos de R$ 7,00? Por quê?

3. Podemos escrever uma equação para este problema? Como é esta equação?

Por meio destas e outras questões que o professor levantar e das respostas obtidas, podemos conjecturar as possíveis situações:

1. Espera-se que haja mais de um tipo de resolução (tabela, lista de múltiplos, cálculo mental, ou mesmo uma equação).

2. Espera-se que os alunos cheguem à conclusão que não. Caso contrário, o professor pode sugerir aos alunos que procurem um ou mais múltiplos de 7 que satisfaçam o problema.

3. Embora esta resposta não dependa da anterior, ela pode ser usada como continuação para chegar à seguinte equação: $5x + 7y = 100$. Pode ser necessário explicar que a equação deve ser modelada usando-se duas incógnitas, uma vez que elas representam as respectivas quantidades de selos de R$ 5,00 e R$ 7,00.

Neste ponto é importante enfatizar que a equação de 1º grau obtida no item 3 possui duas incógnitas. Podem surgir dúvidas sobre sua semelhança com um sistema de equações lineares. Ao se depararem com este tipo de equação, alguns alunos podem alegar que não há solução (ou há infinitas delas) uma vez que o número de incógnitas é maior que o número de equações. Portanto este é o momento de esclarecer aos alunos as semelhanças e diferenças entre esses dois temas.

PASSO 2:
Os alunos devem escrever as respostas a partir da equação obtida no item 3, substituindo as incógnitas pelos seus respectivos valores, por exemplo:

a) $5 \cdot 20 + 7 \cdot 0 = 100$;

b) $5 \cdot 13 + 7 \cdot 5 = 100$;

c) $5 \cdot 6 + 7 \cdot 10 = 100$.

Neste caso, há um número finito de soluções (três), pois este é limitado pelo conjunto-universo em que se estabelece o problema.

PASSO 3: DEFINIR Equação Diofantina Linear
Uma definição que se pode usar é a seguinte:
Uma **Equação Diofantina Linear** a duas incógnitas x e y é uma equação da forma $ax + by = c$. Os valores a, b, e c são chamados **coeficientes** e tanto eles como as soluções que existirem devem obrigatoriamente ser números inteiros.

São equações diofantinas lineares	Não são equações diofantinas lineares	O que as desqualifica?
$5x - 3y = 9$	$\sqrt{3}x - 9y = 3 \quad \text{(I)}$	coeficiente não inteiro $\sqrt{3}$
$110x + 12y = 29$	$\frac{x}{3} + \frac{7}{8}y = 9 \quad \text{(II)}$	coeficientes não inteiros $\frac{1}{3}$ e $\frac{7}{8}$
$-10x + 7y = -14$	$x^2 + 25y = -8 \quad \text{(III)}$	termo quadrático x^2
$11x - 8y = -1$	$3x - 2xy = 18 \quad \text{(IV)}$	termo misto xy

Importa destacar que as equações I e II não são diofantinas, ao passo que as equações III e IV são diofantinas, porém não lineares. Além disso, uma equação diofantina pode ter ou não soluções (lembre-se de que elas devem ser números inteiros). Na próxima atividade discutiremos este fato.

4.4 A promoção do supermercado

Nesta atividade apresentamos uma equação que não possui solução para que seja discutido o critério para sua existência.

OBJETIVO DA ATIVIDADE:

Verificar se há alguma condição para a existência de solução de uma Equação Diofantina Linear.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas.

ORGANIZAÇÃO DAS TURMAS: duplas ou trios.

PROBLEMA:
Este problema possui três itens a serem respondidos (**a, b** e **c**). O item **c**, no entanto, só deve ser apresentado depois de finalizados os itens **a** e **b** e esclarecidas as eventuais dúvidas.

Um supermercado criou uma promoção em que a cada compra o cliente recebe um cupom de 8 pontos ou um cupom de 6 pontos independentemente do valor gasto. O cliente que obtiver exatamente 101 pontos ganha uma casa no valor de 500 mil reais. Suspeitando da má fé do estabelecimento um integrante do ministério público procurou você para confirmar a suspeita e assim formalizar uma denúncia. Agora responda:

a) A suspeita tem fundamento?

b) Como você faria para provar isso? Lembre-se de que se trata de uma denúncia, portanto nada de usar argumentos como “eu acho”, “porque sim (ou não)”.

c) Escreva uma equação que represente a situação.

PASSO 1: ENCAMINHAMENTO DA AÇÃO
Espera-se que os estudantes concluam no item (**a**) que a suspeita tem fundamento. Mesmo que restem dúvidas, o item seguinte deverá fazer com que os alunos busquem alguma justificativa matemática para sua argumetação.
Os argumentos devem convergir para o fato de que é impossível se obter uma soma ímpar a partir de parcelas pares. Caso contrário, um meio de se verificar isto é pedir que se faça uma lista com múltiplos de 6 e 8 e tentar obter algum resultado que não seja par.
Com a equação obtida em (**c**) é possível provar que não há solução fatorando-se a equação:

$8x + 6y = 101 \iff 2(4x + 3y) = 101$

A equação obtida acima nos diz que o dobro de um certo valor inteiro deve ser igual a 101. Isto significa que o valor procurado não existe no conjunto dos inteiros, e portanto a equação não possui solução.

PASSO 2: A CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO
O fator comum colocado em evidência serve de "ponte" entre a equação e a condição de existência pois ele é o *mdc* entre 8 e 6. A partir daí se enuncia a Proposição:

Uma Equação Diofantina Linear $ax + by = c$ admite solução se e somente se $d = mdc(a, b)$ divide c.

Em outras palavras, uma Equação Diofantina Linear possui solução se e somente se o *mdc* entre os seus coeficientes também for divisor do termo independente. Para demonstrar a veracidade desta proposição, é necessário que os estudantes conheçam o conectivo lógico **bicondicional** (se e somente se), portanto pode ser preciso trabalhar isto antes. Também é preciso recorrer ao conceito de divisibilidade e ao teorema de Bézout. A demonstração deve ser feita em duas partes:

($\Longrightarrow$) hipótese: a equação $ax + by = c$ possui solução.
tese: $d \mid c$.

Como $ax+by = c$ possui solução, então existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0+by_0 = c$.

Como $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid (ax_0 + by_0)$, ou seja, $d \mid c$.

($\Longleftarrow$) hipótese: $d \mid c$.
tese: a equação $ax + by = c$ possui solução.

Sabemos que $d \mid a$ e $d \mid b$ e portanto $d \mid (ma + nb)$, $\forall\ m, n \in \mathbb{Z}$. Logo, podemos escrever

$d = q(ma + nb)$, $q \in \mathbb{Z}$ (I).

Como $d \mid c$, então podemos escrever $c = c_1 d$, $c_1 \in \mathbb{Z}$. Tomando a equação (I) temos

$d = (qm)a + (qn)b \iff c_1 d = a(c_1 qm) + b(c_1 qn)$.

Tomando $x_0 = c_1 qm$ e $y_0 = c_1 qn$, temos $c = ax_0 + by_0$.

Isto significa que o par (x_0, y_0) é solução da equação $ax + by = c$.

■

4.5 Encontrando frações

Esta atividade visa mostrar uma resolução para Equações Diofantinas Lineares sem o uso do algoritmo de Euclides. A resolução aqui feita serve como exemplo de roteiro a ser seguido, de modo que podem ocorrer diferentes valores para uma solução particular, mas que ao fim do processo deverão convergir para a solução geral.

OBJETIVOS DA ATIVIDADE:

1. Encontrar a solução particular de uma Equação Diofantina Linear.
2. Escrever a solução geral a partir da particular.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas.

ORGANIZAÇÃO DAS TURMAS: duplas ou trios.

PROBLEMA:
Recomendamos iniciar a aula propondo o problema:

Ache duas frações cujos denominadores sejam, respectivamente, 11 e 13 e cuja soma seja $\frac{67}{143}$.

(Fonte: (DOMINGUES, 2017))

PASSO 1: ENCAMINHAMENTO DA AÇÃO
Espera-se que os alunos já consigam aqui modelar o problema por meio de uma Equação Diofantina Linear a partir de

$$\frac{x}{11} + \frac{y}{13} = \frac{67}{143}.$$

Caso contrário, um caminho possível é orientá-los a modelar o problema por meio de uma equação. Espera-se que os alunos cheguem à seguinte equação:

$$13x + 11y = 67$$

Levando em conta o que já foi tratado anteriormente, espera-se que os alunos verifiquem a condição de existência da solução ao verem que $d = mdc(13, 11) = 1$ e $1 \mid 67$. Caso não o façam, o professor deve chamar a atenção para isto.

Seguindo o que foi feito na seção 4.3, os alunos devem encontrar uma solução para a equação, que pode ser $x_0 = 6$ e $y_0 = -1$. Neste caso as frações procuradas são $\frac{6}{11}$ e $-\frac{1}{13}$. O professor deve atentar ao fato de que qualquer outro par de soluções será da forma $x = x_0 + 11k$ e $y = y_0 - 13k$. Uma sugestão é que os alunos socializem os diferentes valores de x_0 e y_0 para chegarem a esta conclusão. Caso haja dificuldade, pode-se solicitar que eles atribuam valores a uma das incógnitas e tentem chegar a um valor inteiro para a outra.

PASSO 2: ENCONTRANDO A SOLUÇÃO GERAL

Propomos aqui um roteiro para a obtenção da solução geral da equação a partir de uma solução particular. O professor pode encaminhar esta ação da maneira que julgar mais conveniente, porém a mais aconselhável é que se faça em conjunto com a turma:

1. Montaremos um sistema de equações com a equação em sua forma original e as soluções que você encontrou:

   $$\begin{cases} 13x + 11y = 67 & (I) \\ 13x_0 + 11y_0 = 67 & (II) \end{cases}$$

   onde x_0 e y_0 são os valores que você obteve para x e y respectivamente.

2. Subtraímos a equação (II) da equação (I), chegando ao seguinte resultado:

   $$13(x - x_0) = -11(y - y_0) \quad (III).$$

   Para a próxima etapa, pode-se levantar a seguinte questão:

   O que podemos dizer acerca dos valores $(x - x_0)$ e $(y - y_0)$?

   O objetivo desta pergunta é fazer com que os alunos percebam que $(x - x_0)$ deve ser múltiplo de 11 e $(y - y_0)$ múltiplo de 13. Para isto pode-se recorrer ao Teorema de Euclides, enunciado na seção 3.4.2 do Capítulo 3.
   Caso não seja possível, uma maneira simples de se argumentar isto com os alunos é solicitando que verifiquem se 11 e 13 possuem fatores primos comuns, ou então perguntar como podemos obter um múltiplo de 11 a partir de um fator 13, para que os alunos concluam que só é possível que isto ocorra se $11 \mid (x - x_0)$ e $13 \mid (y - y_0)$.
   Passamos assim à próxima etapa:

3. Agora escrevemos $x - x_0 = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$. Substituímos esta igualdade no resultado (III) e obtemos o conjunto de valores para y também em função do inteiro k.

Assim os alunos devem concluir que as soluções da equação devem ser da forma

$$x = x_0 + 11k \text{ e } y = y_0 - 13k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, para encontrar quaisquer duas frações que satisfaçam as condições dadas, basta atribuir valores inteiros para k. A validade do procedimento apresentado aqui será demonstrada na próxima atividade.

4.6 As latas de atum e sardinha

Esta atividade visa mostrar uma resolução para uma Equação Diofantina Linear ainda sem o uso do algoritmo de Euclides.

OBJETIVOS DA ATIVIDADE:

1. Encontrar uma solução particular que não esteja tão evidente.
2. Obter a solução geral restrita a um intervalo.
3. Demonstrar a validade do recurso apresentado na atividade anterior.

TEMPO ESTIMADO: 2 a 3 aulas.

ORGANIZAÇÃO DAS TURMAS: duplas ou trios.

PROBLEMA:
Sugerimos iniciar a discussão a partir do problema:

O proprietário de uma lanchonete vai ao supermercado comprar sardinha e atum enlatados. Cada lata de sardinha pesa 400 g e cada lata de atum, 300 g. Como sua bolsa de compras suporta até 6,5 kg, ele decide comprar exatamente 6 kg dessas latas. Sabe-se que foi comprada pelo menos uma lata de cada pescado. Determine o maior número possível de latas que o proprietário da lanchonete poderá comprar.
(Fonte: Vestibular 2017 UERJ)

PASSO 1: OBTENDO UMA SOLUÇÃO PARTICULAR
Às vezes é mais fácil encontrar a solução particular de uma equação $ax + by = c$ com $c = 1$. Assim, descreveremos um roteiro para a obtenção dessa solução ainda por meio de tentativa e erro. O objetivo deste passo é encontrar a solução de $ax + by = c$ a partir de $ax + by = 1$.
Como um dos objetivos aqui é descrever um processo para obtenção de solução, sugerimos que se dê um tempo para que os alunos tentem encontrar a solução deste problema, orientando-os para que façam por meio de uma Equação Diofantina Linear. A partir daí, o professor pode conduzir a aula a partir dos direcionamentos:

1. Solicitar que escrevam uma equação que represente a situação.
   Este item tem mais de uma resposta. No caso de escreverem $0,4x + 0,3y = 6$ é importante salientar que esta equação não é diofantina, embora seja linear. Pode ocorrer também $400x + 300y = 6000$. Pode haver confusão quanto às unidades de

medida (entre gramas e quilogramas, por exemplo). Neste caso, deve-se sanar as dúvidas para que as equações fiquem sempre equivalentes.

2. Caso algum aluno questione se é possível multiplicar ou dividir toda a equação por um número inteiro, é uma ótima oportunidade para que ele exponha seus argumentos. Caso não haja esse questionamento, o professor mesmo pode fazê-lo a fim de que obtenham uma equação na forma mais "simplificada" possível: $4x + 3y = 60$.

3. Verificar se a equação "simples" tem solução. Neste caso, $mdc(4, 3) = 1$ e $1 \mid 60$. Logo, a equação tem solução. O *mdc* neste caso não precisa ser obtido pelo Algoritmo de Euclides, cada aluno pode encontrá-lo da forma que achar mais fácil. Caso alguém não saiba ou não se lembre de como obtê-lo, uma forma simples é listar os divisores de 4 e 3 e procurar o maior divisor comum aos dois.

PASSO 2: PROCURANDO A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO
Seguem alguns itens para guiar esta etapa:

1. Pedir aos alunos que encontrem uma solução particular para $4x + 3y = 1$.
   Uma possível resposta é $x' = 1$ e $y' = -1$.

2. Solicitar que escrevam a equação com os valores de x' e y' encontrados, obtendo $4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1$. Fazer a seguinte pergunta:

3. Podemos multiplicar esta equação sem alterar os coeficientes, de modo a obter o valor 60 no segundo membro?
   Espera-se que os alunos concluam que sim, e cheguem ao seguinte resultado:

   $$4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 1 \quad \times (60) \iff 4 \cdot 60 + 3 \cdot (-60) = 60.$$

   Temos uma solução particular para $x_0 = 60$ e $y_0 = -60$.

4. Pedir que encontrem a solução geral ($x = 60 + 3k$ e $y = -60 - 4k$, $k \in \mathbb{Z}$).

A demonstração deste método encontra-se depois do passo número 5 no fim do roteiro da atividade.

PASSO 3: PROCURANDO POSSÍVEIS VALORES PARA "k"
Estas perguntas (ou ainda outras) devem guiar a condução deste item:

1. As respostas obtidas concluem a solução do problema?

2. Caso não, como concluir a solução?

Espera-se que os estudantes percebam que não foi obtido um número exato de latas, e nem o número máximo requerido na pergunta do enunciado. A pergunta que deve guiar esta parte é:

Como podemos obter a quantidade máxima de latas a serem compradas?

Espera-se que os alunos notem que $x \geq 1$ e $y \geq 1$ ou $x > 0$ e $y > 0$, podendo avançar ao próximo passo. Caso não, pode-se questionar se há algum limitante para as quantidades e como isto pode ser escrito matematicamente. Com isto, eles terão duas inequações a serem resolvidas em $\mathbb{Z}$:

Para x: $60 + 3k \geq 1 \iff 3k \geq -59 \iff k \geq -19,66...$

Por se tratar de um valor inteiro devemos ter $k \geq -19$.

Para y: $-60 - 4k \geq 1 \iff -4k \geq 61 \iff 4k \leq -61 \iff k \leq -15,25.$

Como anteriormente, devemos ter $k \leq -16$. Assim, o valor procurado para k está entre -19 e -16.

PASSO 4: OBTENDO A SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Para concluir a resolução, a pergunta que guia este passo é:

Como chegar ao número máximo de itens comprados?

Este item pode ser resolvido de mais de uma maneira e é importante que os grupos socializem as diferentes resoluções. Ao fim da atividade, todos devem chegar ao resultado de 19 latas, sendo 3 de sardinha e 16 de atum.

4.6.1 Demonstração referente à resolução trabalhada nas atividades 4.5 e 4.6

Para obter a solução de uma Equação Diofantina Linear a duas incógnitas, considere a equação:

$ax + by = c$ de coeficientes a, b e c inteiros e $d = mdc(a, b)$.

Como $d = mdc(a, b)$, e se $d \mid c$, podemos escrever:

$$a = a_1 \cdot d \iff a_1 = \frac{a}{d};$$

$$b = b_1 \cdot d \iff b_1 = \frac{b}{d};$$

$$c = c_1 \cdot d \iff c_1 = \frac{c}{d}.$$

Assim,

$$ax + by = c \iff \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{c}{d} \iff a_1x + b_1y = c_1, \text{ com } mdc(a_1, b_1) = 1 \quad \text{(I)}.$$

Como $1 \mid c_1$, $\forall\, c_1 \in \mathbb{Z}$, é possível encontrar x' e y' inteiros tais que

$$a_1x' + b_1y' = 1 \iff c_1(a_1x') + c_1(b_1y') = c_1 \cdot 1 \iff a_1(c_1x') + b_1(c_1y') = c_1.$$

Tomando $x_0 = c_1x'$ e $y_0 = c_1y'$ temos $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$. Como o par $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é uma solução particular da equação (I), então

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (I) \\ a_1x_0 + b_1y_0 = c_1 & (II) \end{cases}$$

Subtraindo a equação (II) da equação (I), obtemos:

$$a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0 \iff a_1(x - x_0) = -b_1(y - y_0) \quad \text{(III)}.$$

Como $mdc(a_1, b_1) = 1$, pelo Teorema de Euclides $b_1 \mid (x - x_0)$ e $a_1 \mid (y - y_0)$. Logo,

$$x - x_0 = b_1k \iff x = x_0 + b_1k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo na sentença (III), obtemos:

$$a_1b_1k = -b_1(y - y_0) \iff y - y_0 = -a_1k \iff y = y_0 - a_1k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a solução geral de uma Equação Diofantina Linear $ax + by = c$ com $d = mdc(a, b)$ é dada pelo par $(x_0 + b_1k, y_0 - a_1k)$, $k \in \mathbb{Z}$, com $a_1 = \frac{a}{d}$ e $b_1 = \frac{b}{d}$.

■

4.7 A pontuação de um jogo

Nem sempre a solução geral de uma Equação Diofantina Linear pode ser facilmente obtida pelo cálculo mental. Neste caso, propomos esta atividade cuja resolução requer o algoritmo de Euclides.

OBJETIVOS DA ATIVIDADE:

1. Utilizar o algoritmo de Euclides para o obter o *mdc* entre dois números inteiros.
2. Encontrar a solução particular de uma Equação Diofantina Linear com o uso do algoritmo de Euclides estendido.

TEMPO ESTIMADO: 2 a 3 aulas.

ORGANIZAÇÃO DAS TURMAS: duplas ou trios.

PROBLEMA:
Iniciar a aula com a seguinte situação:

> Um matemático criou um sistema de pontuação para um jogo no qual a cada vitória o participante acumula 1990 pontos, ao passo que a cada derrota, perde 173. Pergunta-se: é possível que com este sistema de pontos alguém acumule 11 pontos? Se sim, quantas partidas vencidas e quantas perdidas serão necessárias no mínimo para que isto ocorra?

PASSO 1: EXISTE SOLUÇÃO?
Recomenda-se dar alguns minutos para os alunos tentarem encontrar as soluções. Espera-se que antes de procurarem as soluções, eles verifiquem se elas existes. Se houver muita dificuldade ao procurar o *mdc* entre 1990 e 173, o professor pode orientá-los a verificar os divisores de 11. Ainda assim, este procedimento não responde totalmente à pergunta, pois para que haja solução, o *mdc* entre 1990 e 173 deve ser 1 ou 11. A pergunta agora é: o que fazer, então? Será que existe algum procedimento que nos forneça com segurança o *mdc* entre dois inteiros? Vejamos o próximo passo.

PASSO 2: O ALGORITMO DE EUCLIDES
Feita a pergunta anterior, é preciso "apresentar" aos estudantes o cálculo de *mdc* pelo algoritmo de Euclides. Embora a divisão euclidiana não seja desconhecida pelos alunos do Ensino Médio, nem sempre eles têm conhecimento de que o algoritmo desta divisão possa ser usado para obter o *mdc* entre dois inteiros. Sugerimos ao professor que mostre o

procedimento e solicite aos alunos tentarem fazê-lo. Este algoritmo consiste num método de divisões sucessivas para encontrar o *mdc* entre dois inteiros a e b. Para facilitar o processo, pode-se montar uma tabela:

	q_1	
a	b	
r_1		

onde q_1 e r_1 são respectivamente o quociente e o resto da divisão de a por b.

O processo continua fazendo-se a divisão de b por r_1:

	q_1	q_2	
a	b	r_1	
r_1	r_2		

sendo q_2 e r_2 respectivamente o quociente e o resto da divisão de b por r_1.

Depois disto, faz-se a divisão de r_1 por r_2 e assim sucessivamente até obter $r_n = 0$ e daí $mdc(a, b) = r_{n-1}$:

	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n-1}	q_n
a	b	r_1	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}
r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_{n-1}	$r_n = 0$

Feita a explicação, o professor pode pedir aos alunos que calculem o *mdc* entre 1990 e 173 para então avançar o próximo passo.

PASSO 3: ESCREVENDO O *MDC*

O resultado obtido no passo anterior deve ser:

	11	12	1	86
1990	173	87	86	1
87	86	1	0	

donde se conclui que $mdc(1990, 173) = 1$.

Agora recomendamos mostrar aos alunos como "voltar" o algoritmo de Euclides de modo a obter o *mdc* em função de 1990 e 173. Esta etapa requer bastante atenção por parte do professor, portanto a sugestão é que seja observado como os estudantes executam o processo. Agora, escrevemos os valores "de trás para frente":

$1 = 87 - 1 \cdot 86$

$86 = 173 - 1 \cdot 87$

$87 = 1990 - 11 \cdot 173.$

E depois:

$1 = 87 - 1 \cdot (173 - 1 \cdot 87) = 2 \cdot 87 - 1 \cdot 173 = 2 \cdot (1990 - 11 \cdot 173) \iff$

$1 = 2 \cdot 1990 - 23 \cdot 173$

PASSO 4: ENCONTRANDO A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO

Neste ponto espera-se que os alunos já visualizem a equação $1990x - 173y = 11$ a partir da sentença obtida no passo anterior. Em caso negativo, eles podem ser orientados a procurar algo semelhante na Atividade 4.6 e o resultado deve ser:

$x_0 = 22$ e $y_0 = 253$.

e a solução geral,

$x = 22 - 173k$ e $y = 253 - 1990k$, $k \in \mathbb{Z}$.

PASSO 5: CONCLUSÃO

Para concluir, os alunos devem, assim como na atividade anterior, atentar para os possíveis valores de k para os quais o problema está definido. Assim, o menor número de partidas ganhas será 22 e perdidas, 253.

Conforme tratado no início deste capítulo, as atividades descritas aqui são sugestões de roteiros de aplicação de Equações Diofantinas Lineares a duas incógnitas para estudantes a partir da segunda série do Ensino Médio. Nas obras de Silva (2002), Campos (2013), Pommer (2008), Rios e Alves (2013) podem ser encontrados diversos exemplos de problemas e atividades envolvendo as equações em questão.

5 Considerações finais

Esperamos com este trabalho auxiliar professores que pretendam desenvolver atividades sobre Equações Diofantinas Lineares a partir do Ensino Médio. Doze das treze obras analisadas nesta pesquisa - e que tratam acerca da aplicação de equações diofantinas - concluem que é perfeitamente possível trabalhar com estas no Ensino Básico sem prejuízo ao currículo escolar. Ao contrário disto, elas podem ser um meio de aprofundar a relação entre a aritmética e a álgebra sendo assim um fator enriquecedor para a aprendizagem. Optamos neste trabalho pela THA – trajetória hipotética de aprendizagem – apresentada por Simon (1995), que é parte do Ciclo de Ensino da Matemática. Esta opção se baseou no fato de que o pensamento e o entendimento dos alunos possuem lugar central na elaboração das THA, e toda tomada de decisão do professor deve se basear nos caminhos hipotéticos para se chegar ao objetivo. Para isto é necessária constante avaliação do conhecimento dos alunos. Sob uma perspectiva construtivista esta ação é bastante pertinente. Além disso, outros autores (Freitas, Traldi, Rosseto) propuseram, com sucesso, THA para outros temas. Nenhum deles, porém, o fez para as equações aqui tratadas.

As situações de ensino apresentadas nesse trabalho podem ser utilizadas integral ou parcialmente. Mais do que isto, esperamos que sirvam como meio norteador para o trabalho de quem pretende ensinar tópicos de Teoria dos Números no ensino básico, em especial no Ensino Médio.

Todas as propostas de atividade foram baseadas em situações-problema voltadas ao aluno, sujeito que deve ser o protagonista do processo de ensino aprendizagem. Visamos assim contribuir para o ensino de matemática versando sobre as Equações Diofantinas Lineares, tema muito rico e de aplicações bastante práticas, levando a uma visão mais realista e contextualizada da matemática, uma vez que os números inteiros fazem parte do cotidiano de toda a sociedade.

Acreditamos com isto ter atingido os objetivos do PROFMAT, contribuindo para a formação continuada de professores, enriquecendo esta formação com temas relevantes e pertinentes à educação básica. Esperamos também que este trabalho sirva como ponto de partida para futuras pesquisas acadêmicas acerca da aplicabilidade das Equações Diofantinas Lineares no ensino básico e sua introdução no currículo escolar.

Referências

BORGES, F. V. de A. **Equações diofantinas lineares em duas incógnitas e suas aplicações**. 2013. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, DF, [2017]. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 31 out. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaira de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. MEC, 1999.

CAMPOS, A. de. **Equações diofantinas lineares**: possibilidades didáticas usando a resolução de problemas. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2015.

CAMPOS, G. D. M. **Equações diofantinas lineares**. 2013. 68 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Mato Grosso. Cuiabá, 2013.

CASTRO, M. R. de. Educação algébrica e resolução de problemas. **Boletim Salto para o Futuro**, TV Escola. Brasília, 2003.

COBB, P. Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics education. **For the learning of mathematics**, Montreal, v. 9, n. 2, p. 32-42, jun. 1989.

DEUS, N. S. P. de. **Equações Diofantinas Lineares e o GPS**: Nova Conexão Curricular. 2017. 153f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal da Bahia. Salvador, 2017.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 2. ed. rev. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2017.

DOMINGUES, H. H.; Iezzi, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. reform. São Paulo: 2003.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos. A experiência russa**. trad. Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

INEP, MEC. **Brasil no PISA 2015**: análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros/OCDE-Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. São Paulo: Fundação Santillana, 2016.

LIMA, P. O. de. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Funções Logarítmicas**. 2009. 213 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

MELO, F. D. de. **Uso da matrizes na parametrização das soluções das equações diofantinas lineares**. 2013. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal Rural do Semiárido. Mossoró, 2013.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números: uma introdução à matemática**. 3 ed. 3. reimpr. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, A. F. F. P. de. **Equações Diofantinas Lineares**: uma proposta para as séries finais do ensino fundamental. 2018. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2018.

OLIVEIRA, J. C. G. de. **Currículos de matemática no ensino médio**: significados que professores atribuem a uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem desenvolvida à luz da Educação Matemática Crítica. 2015. 214 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2015.

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. **Iniciação à matemática**: um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, S. B. **As equações diofantinas lineares e o livro didático de matemática para o ensino médio**. 2006. 102 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2006.

OLIVEIRA, S. de A. **Uma exploração didática das equações diofantinas lineares de duas e três incógnitas com estudantes de cursos de licenciatura em matemática**. 2010. 115 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2010.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145-166, 2009.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula**: Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo: [s.n.], 2013.

POMMER, W. M. **Equações Diofantinas Lineares**: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio. 2008. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

POMMER, W. M. Transição Aritmética & Álgebra: Contribuições da temática das Equações Diofantinas Lineares. **PONTE**, São Paulo, v. 11, 2005.

POZO, J. I. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

RIBEIRO, R. **Equações Diofantinas: uma abordagem para o Ensino Médio**. 2014. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade de Brasília. Brasília, 2014.

RIOS, D. G.; ALVES, R. R. **Equações Diofantinas Lineares na Educação Básica**. 2013. 24 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de São João Del Rei. São João Del Rei, 2013.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória hipotética de aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANTOS, A. dos. **Teorema Chinês dos Restos e Aplicações**. 2017. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Amazonas. Manaus, 2017.

SILVA, E. F. da. Equações Diofantinas Lineares. **Revista da Olimpíada**, Goiânia, n. 3, p. 110-118, abr. 2002.

SILVA, A. V. da. **Uso das equações diofantinas lineares no ensino fundamental**. 2013. 74 f. (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal de Alagoas. Maceió, 2013.

SIMON, M. A. Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Newark, v. 26, n. 2, p. 114-145, mar. 1995.

TRALDI JR, A.; ROSENBAUM, L. S. Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista. **Educação Matemática Pesquisa**,São Paulo, v. 12, n. 2, p. 369-393, 2010.

VIEIRA, B. M. **Equações Diofantinas: Uma Proposta Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental**. 2018. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Tocantins. Palmas, 2018.