UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI - UFCA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL

ANTONIO JAKSON PORFÍRIO PINHEIRO

O USO DE MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE GEOMETRIA

JUAZEIRO DO NORTE

2019

ANTONIO JAKSON PORFÍRIO PINHEIRO

O USO DE MATERIAIS CONCRETOS NO ENSINO DE GEOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves

JUAZEIRO DO NORTE
2019

Dados internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

P654u Pinheiro, Antônio Jakson Porfírio.

O uso de materiais concretos no ensino de geometria. / Antônio Jakson Porfírio Pinheiro. – 2019.

65 f.; il. color.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2019.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves.

1. Materiais concretos. 2. Ensino-aprendizagem de geometria. 3. Matemática. 4. Ensino Médio. I. Título.

CDD 516

Bibliotecária: Valeska Paulino Nogueira – CRB 3/1198

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

O Uso de Materiais Concretos no Ensino de Geometria

ANTONIO JAKSON PORFÍRIO PINHEIRO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 31 de julho de 2019.

Banca Examinadora

Francisco Pereira Chaves

Prof. Dr. Francisco Pereira Chaves
Orientador

Clarice Dias de Albuquerque

Prof.ª Dr.ª Clarice Dias de Albuquerque

UFCA

Francisco de Assis Benjamim Filho.

Prof. Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho

UFCA

Aos meus pais Carlos Xerxes Pinheiro Peixoto e Francisca Porfírio Pinheiro. Aos meus irmãos Carlos Manoel Porfírio Pinheiro e Jéssica Porfírio Pinheiro. A minha esposa Adevangela Tavares Veloso. Aos meus filhos José Rick Tavares Veloso da Silva e Juan Matheus Tavares Pinheiro.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por todo o apoio que sempre tiveram em minha formação acadêmica diante de todas as adversidades enfrentadas durante o percurso. Sem esse apoio não teria chegado até aqui.

Aos meus irmãos por terem acreditado em mim dando forças suficientes para prosseguir.

A minha esposa por não ter medido esforços para que assim pudesse concluir a graduação e as pós-graduações stricto sensu e latu sensu.

Aos meus filhos José Rick e Juan Matheus por serem meus maiores motivos para continuar na jornada acadêmica e profissional.

Ao amigo Francisco Dias Ferreira por sempre está disponível no compartilhamento do seu conhecimento. Seu apoio foi indispensável e indiscutível nessa nova etapa conquistada.

Ao meu professor orientador Dr. Francisco Pereira Chaves pela sabedoria e companheirismo na orientação deste trabalho.

Às unidades de ensino em que trabalho, Colégio Pólos e a E. E. E. P. Lucas Emmanuel Lima Pinheiro, por compreenderem a importância do conhecimento no processo de ensino-aprendizagem.

À CAPES pelo suporte financeiro.

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência."

(Irene de Albuquerque)

RESUMO

O gosto pela Matemática tem uma forte relação com a forma que se ensina. Para alcançar resultados satisfatórios, faz-se necessária a utilização de mecanismos e habilidades que propiciem uma forma dinâmica e contextualizada de se ensinar. Uma ferramenta que possibilita ao aluno construir o seu conhecimento e colocar em prática os conceitos apresentados pelo professor são os materiais concretos. Essa ferramenta de ensino vem ao encontro do desejo dos educandos e educadores de tornarem as aulas mais dinâmicas e com uma maior participação dos alunos. O presente trabalho tem por finalidade apresentar o uso de materiais concretos no ensino de Geometria aplicáveis ao Ensino Médio, a fim de que o educador e o educando os tenham como ferramentas no processo de ensino-aprendizagem tornando o ensino aplicável e dinâmico.

Palavras-chave: Materiais Concretos. Ensino-Aprendizagem. Matemática

ABSTRACT

The taste for mathematics has a strong relationship with the way it is taught. To achieve satisfactory results, it is necessary to use mechanisms and skills that provide a dynamic and contextualized way of teaching. A tool that enables the student to build their knowledge and put into practice the concepts presented by the teacher are the concrete materials. This teaching tool meets the desire of the students to make classes more dynamic with greater student participation. This paper aims to present the use of concrete materials in the teaching of geometry applicable to high school, so that the educator and the student have them as tools in the teaching-learning process making teaching applicable and dynamic.

Keywords: Concrete Materials. Teaching Learning. Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes dificuldades encontradas por professores de Matemática da Educação Básica é a aversão que grande parte dos alunos tem por essa disciplina, uma vez que muitos a consideram muito difícil e abstrata, causando assim uma falta de interesse em aprender o que é abordado durante as aulas. No Ensino Médio, essa percepção é mais fácil de ser constatada, pois a tendência natural é que, à medida que os estudos em Matemática se aprofundam, os conteúdos abordados tenham um grau de abstração mais alto, exigindo dos alunos mais raciocínio para que possam entender os assuntos das aulas.

Uma pergunta recorrente, por parte dos alunos, quando iniciamos um determinado assunto em sala de aula na disciplina de Matemática é: “Para que isso vai servir na minha vida?” Em outras palavras, eles querem saber qual é a aplicabilidade, em seu dia a dia, que tem aquele assunto. Esse questionamento, muitas vezes, é difícil de ser respondido, uma vez que, como sabemos, a Matemática em sua essência não está preocupada se o desenvolvimento do conhecimento terá sua devida aplicação no cotidiano. No Ensino Fundamental, essa aplicação é mais fácil de ser desenvolvida, pois os assuntos abordados têm aplicações mais fáceis de serem percebidas pelo aluno. Quando os alunos ingressam no Ensino Médio, a aplicabilidade imediata dos assuntos abordados em sala se torna mais difícil (Druck, 2017).

A maioria dos professores desenvolve suas práticas de ensino com base no que vivenciaram como alunos da Educação Básica e no que foi aprendido durante a graduação, pois a maneira como se ensina está diretamente ligada à forma como se aprendeu (Abreu, 1997, p. 48). Assim, em sua grande maioria, os professores de Matemática centralizam suas aulas no tripé: lousa, giz/pincel e exercícios.

Durante minha graduação, o objeto de estudo não estava em desenvolvimentos práticos no que era abordado durante as aulas e sim no desenvolvimento teórico e matemático. Na Universidade não havia laboratório de Matemática, não fazíamos aulas práticas e nem confecção de materiais concretos a serem utilizados nas aulas que lecionávamos nas disciplinas de estágios.

Atualmente o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) vem dando um suporte aos acadêmicos para que os mesmos tenham contato com a prática docente durante seu período de formação na licenciatura. O PIBID oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos presenciais a fim de que realizem estágios em escolas públicas e quando estiverem graduados possam se comprometerem com o ensino público. Dessa forma o graduando antecipa a vivência em sala de aula.

Segundo as informações obtidas de Brasil (2019):

> A intenção do programa é unir as secretarias estaduais e municipais de educação

> e as universidades públicas, a favor da melhoria do ensino nas escolas públicas em que o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) esteja abaixo da média nacional, de 4,4. Entre as propostas do PIBID está o incentivo à carreira do magistério nas áreas da educação básica com maior carência de professores com formação específica: Ciência e Matemática de quinta a oitava séries do Ensino Fundamental e Física, Química, Biologia e Matemática para o Ensino Médio.

O presente trabalho tem como objetivo trabalhar uma ferramenta pedagógica voltada diretamente à aprendizagem significativa dos alunos, possibilitando uma melhor interação e construção do conhecimento matemático mediante a utilização de materiais concretos aplicáveis ao que está sendo lecionado. A utilização destes materiais é uma estratégia pedagógica que visa trabalhar o conhecimento matemático de forma dinâmica e construtiva a fim de que seja uma ferramenta facilitadora para o Ensino de Matemática.

Dividimos o trabalho em cinco capítulos como segue. No Capítulo 1 está a Introdução. No Capítulo 2 faz-se uma abordagem do ensino de Matemática e sua contextualização por meio da utilização dos materiais concretos no ensino desta disciplina, de forma que os alunos possam aprender Matemática sobre uma perspectiva concreta. No Capítulo 3 é dada ênfase aos conceitos geométricos que podem ser trabalhados com os materiais concretos escolhidos. No Capítulo 4 são apresentadas algumas sequências didáticas com materiais concretos, apresentando sugestões que podem ser desenvolvidas através do geoplano, teodolito e construção de poliedros. No Capítulo 5 estão as considerações finais relacionadas à proposta do trabalho.

2 O ENSINO DE MATEMÁTICA

Um dos maiores desafios do modelo educacional brasileiro encontra-se pautado na aprendizagem Matemática, em fazer com que o aluno perceba a importância dessa disciplina e a veja como indispensável ao seu aprendizado. Segundo Toledo e Toledo (1997, p.37), "os alunos mesmo os de cursos do nível médio, acham que Matemática é uma disciplina em que se devem decorar algumas regras e aplicá-las em situações de sala de aula, e que nada tem a ver com a vida prática".

Um grande incentivador desse pensamento é o fato de que, muitas vezes, os conteúdos matemáticos se apresentam nos livros didáticos como uma sequência de etapas com conceitos e exemplos que podem ser aplicados para se compreender os conceitos. Essa segmentação e descontextualização da disciplina pode ser uma das razões que justifica a desmotivação do aluno em aprender Matemática.

Numa tentativa de melhorar a aprendizagem, o suíço Jean Piaget (1896-1980) desenvolveu uma teoria cognitiva que deixa claro que o desenvolvimento da aprendizagem se torna mais satisfatório quando é iniciado do concreto para só depois se partir para o abstrato. Segundo Lorenzato,

> torna-se difícil para o aluno conceituar qualquer figura geométrica sem antes tê-la visualizado, é necessário que esse tenha um apoio inicial como tamanho, forma, cor, peso, pois os conceitos evoluem com o processo de abstração; a abstração ocorre pela separação (Lorenzato, 2010, p.22).

O ensino de Matemática se torna mais coerente para os alunos quando se utiliza como ponto de partida para a aprendizagem os saberes apropriados por esses em suas vivências, associando-os à manipulação de materiais que favoreçam a construção do conhecimento.

Antunes (2000) diz que é através da manipulação que se aprende, é vivenciando situações, saindo da esfera da imaginação, relacionando o que vê e estabelecendo diferentes significados para a aprendizagem que acontece o crescimento cognitivo.

Quando o estudante consegue atribuir sentido ao que ele está aprendendo, o processo se torna mais prazeroso e menos cansativo, pois ele se enxerga na construção do conhecimento. Por isso, o uso de materiais concretos é indispensável, uma vez que possibilitam ao aluno aprender Matemática de forma ativa, fazendo com que o mesmo possa aplicá-la em seu cotidiano. Além disso, o uso desses materiais em sala de aula permite uma recapitulação dos conteúdos trabalhados, facilitando a compreensão dos assuntos, filtrando o que é importante para o processo.

A utilização de materiais concretos no ensino de Matemática deve viabilizar e garantir a melhoria no processo de ensino, sendo muito útil para a elaboração das aulas de laboratório de

Matemática, onde são desenvolvidas atividades lúdicas que oportunizam ao aluno exercitar, descobrir e aprender através das funções sensoriais. Essas aulas devem favorecer o desenvolvimento cognitivo do aluno através da experimentação, bem como aprimorar habilidades, estimular a curiosidade, a autoconfiança e a autonomia, além de desenvolver a capacidade de concentração do aluno, melhorando assim sua aprendizagem.

Ao manusear materiais concretos em uma aula, o aluno compreende melhor os conceitos, desenvolve mais a sua competência cognitiva e se esforça mais para agir como um ser racional. A aprendizagem aqui resulta da ação.

2.1 O uso de materiais concretos

A Matemática é uma das disciplinas que causam um certo desconforto nos alunos. Entretanto, os saberes adquiridos por meio dessa ciência exata são de suma importância para que os discentes desenvolvam uma compreensão sobre o mundo real, aumentando assim sua mentalidade e raciocínio para que possam interagir com a sociedade em que vivem.

O educador, dentro de uma perspectiva de buscar proporcionar uma melhor aprendizagem para seus alunos, tem um papel importante nesse contexto, pois é seu dever desenvolver formas de expor os conteúdos de maneira clara, buscando mostrar os conceitos básicos desde os alicerces até uma análise mais profunda do que se pretende explorar na área do conhecimento matemático.

Geralmente o ensino de Matemática é trabalhado de forma metódica e os assuntos são transmitidos pelos professores de maneira tradicional através da utilização do quadro e dos livros didáticos. Uma das propostas nas formações continuadas ofertadas pelas secretarias de educação é que os licenciados se sintam motivados a abordar novos métodos para o ensino de Matemática, assim estes estarão aptos a encarar os desafios que os cercam ao longo de sua formação, abordando o método tradicional junto com as novas metodologias inseridas na vivência do aluno.

Dentro dessa ótica, o professor deve lançar mão de diversos meios para mostrar aos discentes que a Matemática pode ser usada como uma ferramenta para resolver situações-problema que surgem no cotidiano e que podemos trabalhar com ela de várias maneiras diferentes em resoluções de problemas básicos em sala de aula. Deve-se, então, utilizar diversas formas para apresentar a Matemática para o aluno. Uma delas é através do uso de materiais concretos.

Segundo Lorenzato (2010), o concreto pode ter duas denominações: uma se refere ao palpável, manipulável, e a outra, mais ampla, inclui também as imagens gráficas. O mesmo também destaca que essa trajetória é semelhante à que se deve fazer para conseguir o rigor matemático: para consegui-lo, com seus vocábulos, expressões, símbolos e raciocínios, é preciso começar pelo conhecimento dos alunos.

É muito abstrato para os alunos conseguirem entender os conceitos de qualquer objeto apresentado a eles sem ter vivenciado em seu cotidiano. Por isso a experiência com os materiais concretos necessita ser apresentada de forma que conduza o conhecimento prévio do aluno.

Segundo a italiana Montessori (2013, p.28), após experiências vividas com crianças com a aplicação de materiais manipulativos, destinados à aprendizagem da Matemática, não existe a aprendizagem sem ação, ou seja, nada deve ser dado à criança, no campo da Matemática, sem primeiro ser apresentada a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração.

Precisamos entender o verdadeiro motivo e o significado da utilização de materiais concretos em sala de aula. É preciso deixar que o aluno construa seu conhecimento, além do conteúdo abordado, que ele tenha tempo e liberdade para explorar o material e fazer descobertas. Lorenzato (2010) afirma que o professor tem um papel muito importante no sucesso ou fracasso escolar do aluno. Para ele não basta o professor dispor de um bom material didático para que se tenha a garantia de uma aprendizagem significativa. Mais importante do que isso é saber utilizar corretamente estes materiais em sala de aula.

Um fato interessante, segundo Lorenzato (2006), é que quando as crianças aprendem a contar, elas não percebem o padrão de contagem de imediato, mas com o tempo passam a percebê-lo pouco a pouco. Relacionando a Matemática com materiais, ela visualiza mais rapidamente as formas de contagem, seja somando ou subtraindo. O conhecimento é mútuo, mas relativo. Podemos perceber que depois que a criança aprende este padrão ela consegue fazer contas maiores. Portanto, por qualquer ideia ou prática que seja, a Matemática sempre estará relacionada a algo.

De acordo com Carvalho (2006), é importante para os professores possuir a competência na resolução de questões e nas estratégias de assimilar os conteúdos com exemplos do cotidiano, fazendo o ser humano pensar das mais diversas formas possíveis.

Uma análise que podemos fazer é que quando o aluno relaciona a Matemática com um determinado objeto, visualiza rapidamente o problema, mas quando fica de frente com o problema numa folha branca, fica como se nunca tivesse visto aquele assunto.

Outro problema que é visto, segundo Lorenzato (2010), nos modelos de ensino atual é que os alunos de séries iniciais não têm uma prática vivenciada do ensino de Matemática. Os conteúdos são apenas "jogados" para o aluno, pois eles sabem que aprendendo ou não o conteúdo, estarão em outra série no próximo ano. Os fatores externos influenciam na educação do indivíduo, e além disso, existe ainda a questão da formação dos futuros professores: eles realmente estão preparados para lidar com o ensinar Matemática? Existem professores realmente capacitados para adotar novas metodologias?

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ser bem trabalhado logo nas séries iniciais para que futuramente os alunos não apresentem dificuldades. A utilização de materiais concretos vem facilitar a transmissão do conhecimento matemático. Eles propiciam a evolução do pensamento do aluno, onde ele desenvolve suas ideias, traça estratégias para solucionar problemas e desenvolver seu raciocínio lógico buscando respostas para os problemas.

O papel do professor é bastante importante para dar sentido ao material aplicado, pois para ser colocado em prática é necessário que haja um saber e uma finalidade para a utilização do mesmo. Com isso é necessário que o docente se atente aos materiais aplicados e perceba suas funcionalidades para que não seja abordado só para um fim recreativo. Lorenzato disserta:

> Talvez a melhor das potencialidades do material didático seja revelada no momento de construção do material didático pelos próprios alunos, pois é durante esta que surgem imprevistos e desafios, os quais conduzem os alunos a fazerem conjecturas e a descobrir caminhos e soluções (Lorenzato, 2006, p.28).

Um fato importante é o conhecimento que devemos ter sobre os tipos de materiais concretos para que possamos trabalhar os processos de ensino e aprendizagem. As atividades devem conter boas perguntas e boas situações problemas.

Existem diversos materiais que podem ser utilizados como ferramenta no processo de ensino e aprendizagem, tais como o Geoplano, o teodolito, os sólidos geométricos, as frações circulares, o Algeplan, o material dourado, o ábaco etc. Vamos conhecer brevemente alguns deles.

As frações circulares possibilitam aos alunos entenderem os conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações. Esse material propicia ao aluno estabelecer uma relação direta com as operações básicas de Matemática.

Figura 1: Frações circulares.

Fonte: https://tinyurl.com/rmlucsa

O algeplan consiste em um material que relaciona figuras geométricas (quadrados e retângulos) com a Álgebra, estabelecendo uma relação com o assunto de polinômios.

Figura 2: Algeplan.

Fonte: https://tinyurl.com/vy9o25e

O material dourado é um material que possibilita o trabalho com conceitos aritméticos, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão, raiz quadrada, classificação dos números quanto as suas classes (unidade, dezena, centena) etc.

Figura 3: Material dourado.

Fonte: https://tinyurl.com/wcuptou

Os materiais concretos Geoplano, teodolito e os sólidos geométricos serão descritos no Capítulo 4 com suas respectivas sequências didáticas como sugestão da utilização desses materiais nas aulas de Matemática.

Todas as etapas de aplicação dos materiais concretos contribuem na construção do conhecimento matemático do aluno, desde sua apresentação até sua execução. Além da importância da utilização dos materiais concretos é fundamental que o professor disponha de práticas que façam o aluno refletir sobre o que está sendo manuseado e quais as finalidades em seu conhecimento, atingindo assim os objetivos educacionais pretendidos.

3 CONCEITOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos referentes aos assuntos trabalhados com os materiais concretos no Capítulo 4.

Os conteúdos aqui expostos foram baseados nas referências Paiva(2003) e Caminha(2013).

3.1 Polígonos

Nesta seção faremos um breve estudo sobre polígonos. Abordaremos a definição, classificação quanto ao número de lados e ângulos, diagonais, áreas, entre outros conceitos, a fim de que o aluno possa aprimorar seus conhecimentos.

3.1.1 Conceitos da Geometria Plana

No que segue, assumiremos os seguintes conceitos primitivos da Geometria Plana: ponto, reta e plano.

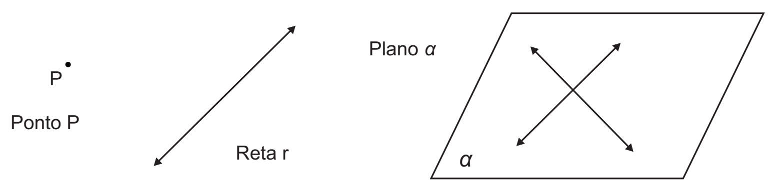

Figura 4: Ponto, reta e plano.

Se A e B são dois pontos distintos de uma reta r, então podemos nos referir à reta r também como a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Definição 1 *Um **segmento de reta** AB é o conjunto dos pontos P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tais que P está entre A e B.*

O **comprimento** do segmento AB, denotado por $\overline{AB}$, é a distância entre os pontos A e B. Dois segmentos de reta com o mesmo comprimento são chamados de segmentos **congruentes**.

Definição 2 *Uma **semirreta** $\overrightarrow{OA}$ é o conjunto dos pontos de P da reta $\overleftrightarrow{OA}$ tais que O não está entre P e A. O ponto O é chamado a **origem** da semirreta $\overrightarrow{OA}$*

Definição 3 *Dadas, no plano, duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um **ângulo** (ou **região angular**) de **vértice** O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

Indicaremos por $\widehat{AOB}$ um ângulo de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Dois ângulos com a mesma medida são chamados de ângulos **congruentes**.

A **bissetriz** de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

3.1.2 Nomenclatura e elementos de um polígono

Definição 4 *Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pontos distintos do plano. Dizemos que $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é **polígono(convexo)** se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).*

Representaremos tal polígono por $A_1A_2A_3 \ldots A_n$.

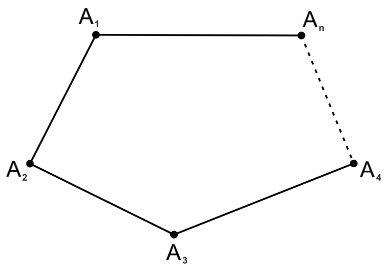

Figura 5: Polígono.

Tomando como referência o polígono da Figura 5, podemos destacar os seguintes elementos:

(i) Os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são denominados **vértices** do polígono;

(ii) Os segmentos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 são chamados de **lados** do polígono;

(iii) Dois lados quaisquer que têm um vértice em comum são denominados **lados consecutivos**;

(iv) A soma dos comprimentos dos lados do polígono é denominada **perímetro polígono**. Dessa maneira, para o polígono $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, seu perímetro será:

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nA_1};$$

(v) Os ângulos $\widehat{A_nA_1A_2}$, $\widehat{A_1A_2A_3}$, ..., $\widehat{A_{n-1}A_nA_1}$ são denominados **ângulos internos** do polígono.

Observe que um polígono com n vértices possui exatamente n lados e n ângulos internos.

Para classificarmos os polígonos, podemos utilizar dois critérios: o número de lados e o número de ângulos.

A tabela a seguir exibe os nomes de alguns polígonos de acordo com o número de lados e ângulos.

Tabela 1: Classificação de polígonos

Número de lados e ângulos	Nome do polígono em relação ao número de ângulos	Nome do polígono em relação ao número de lados
3	triângulo	trilátero
4	quadrângulo	quadrilátero
5	pentágono	pentalátero
6	hexágono	hexalátero
7	heptágono	heptalátro
8	octógono	octolátero
9	eneágono	enealátero
10	decágono	decalátero
11	undecágono	undecalátero
12	dodecágono	dodecalátero
15	pentadecágono	pentadecalátero
20	icoságono	icosalátero

Fonte: Paiva (2003)

Definição 5 *Um polígono* $\mathcal{P} = A_1A_2A_3\ldots A_n$ *será denominado* ***convexo*** *quando qualquer segmento de reta que possui suas extremidades no interior do polígono está inteiramente contido no interior do polígono.*

Caso o polígono não seja convexo, então diremos que ele é **não convexo** (ver Figura 6).

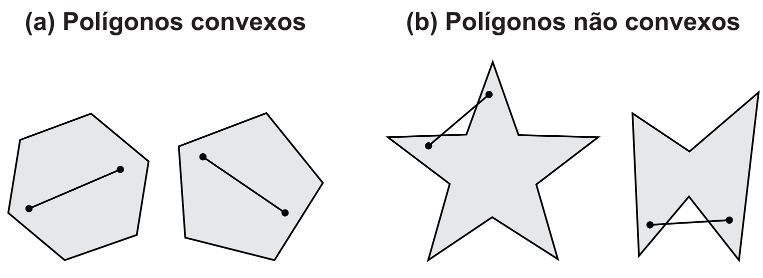

Figura 6: Polígonos convexos e não convexos.

Definição 6 *Uma* ***diagonal*** *de um polígono é qualquer segmento de reta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos do polígono.*

A Figura 7 mostra alguns polígonos, destacando o número de lados (n) e o número de diagonais (d).

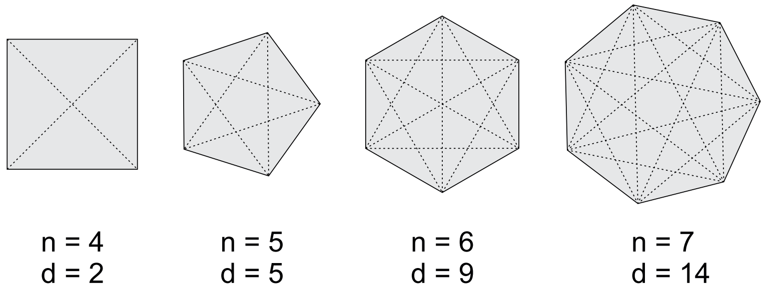

Figura 7: Número de diagonais de alguns polígonos.

A fórmula que nos permite obter o número de diagonais (d) de um polígono em função do número de lados (n) é

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Com efeito, note que de cada um dos n vértices saem $n-3$ diagonais (não se pode ter uma diagonal de um vértice a ele mesmo, nem aos dois vértices adjacentes). Mas cada diagonal é comum a dois vértices não consecutivos. Assim, o número de diagonais será dado pela fórmula acima.

A Tabela 2 mostra o número de lados e o número de diagonais correspondente para alguns polígonos.

Tabela 2: Classificação de polígonos

Polígono	Número de lados	Número de diagonais
triângulo	3	0
quadrângulo	4	2
pentágono	5	5
hexágono	6	9
heptágono	7	14
octógono	8	20
eneágono	9	27
decágono	10	35
undecágono	11	44
dodecágono	12	54
pentadecágono	15	90
icoságono	20	170

Fonte: Paiva (2003)

3.1.3 Polígono regular

Definição 7 *Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamado de **polígono regular**.*

Exemplo 3.1.1 (a) *Quadrilátero regular (quadrado)*

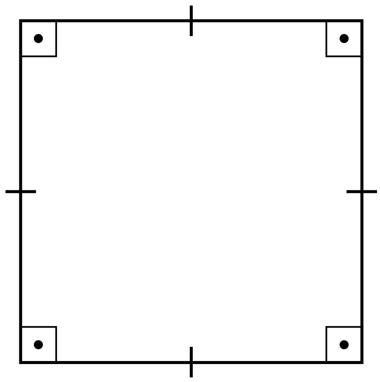

Figura 8: Quadrado.

(b) *Triângulo regular (triângulo equilátero)*

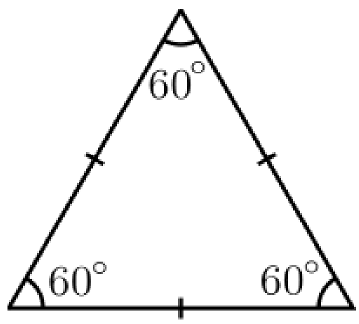

Figura 9: Triângulo equilátero.

(c) *Hexágono regular*

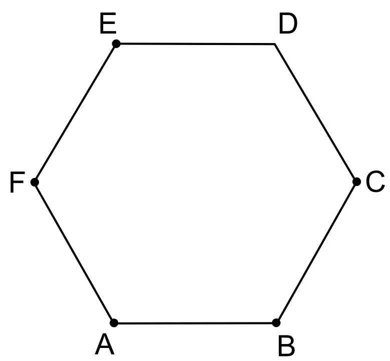

Figura 10: Hexágono regular.

3.1.4 Triângulos

Um triângulo pode ser classificado segundo os seguintes critérios: quanto aos lados ou quanto aos ângulos.

Quanto aos lados, um triângulo pode ser:

- **equilátero** – quando todos os lados têm o mesmo comprimento.
- **isósceles** – quando dois de seus lados têm o mesmo comprimento.
- **escaleno** – quando quaisquer dois lados têm comprimentos distintos.

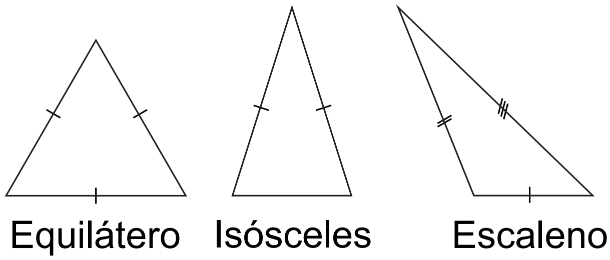

Figura 11: Classificação dos triângulos quanto aos lados.

Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser:

- **acutângulo** – quando todos os ângulos são agudos, isto é, têm medidas maiores que $0°$ e menores que $90°$.
- **retângulo** – quando possui um ângulo reto, isto é, um ângulo cuja medida é igual a $90°$.
- **obtusângulo** – quando possui um ângulo obtuso, isto é, um ângulo cuja medida é maior que $90°$.

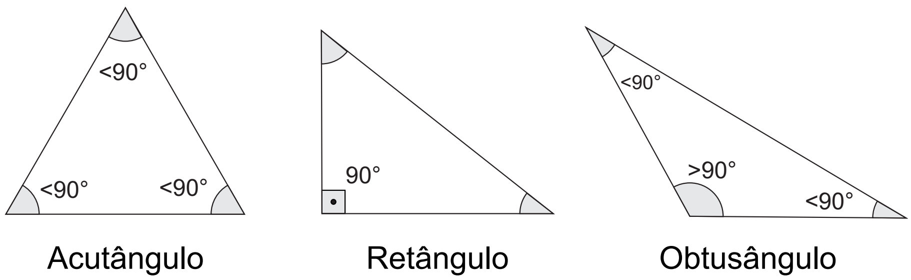

Figura 12: Classificação dos triângulos quanto aos ângulos.

Temos os seguintes elementos de um triângulo.

(a) A **altura** de um triângulo, relativa a um de seus lados, é o segmento de reta que liga perpendicularmente o vértice oposto a esse lado.

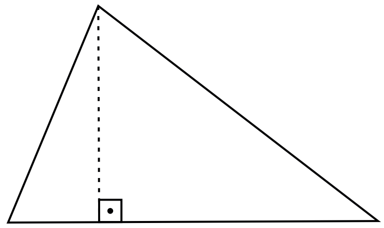

Figura 13: Altura do triângulo.

(b) A **bissetriz interna** de um triângulo é o segmento de reta contido na bissetriz de um ângulo interno, ligando um vértice ao lado oposto.

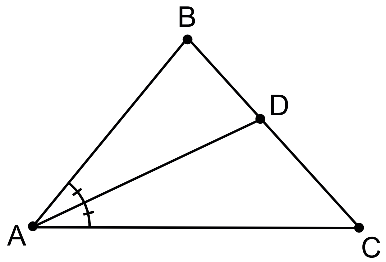

Figura 14: Bissetriz interna.

A bissetriz de um ângulo interno é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes.

(c) A **mediana** de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

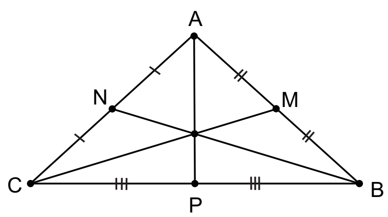

Figura 15: Mediana de um triângulo.

(d) A **mediatriz** de um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados pelo ponto médio.

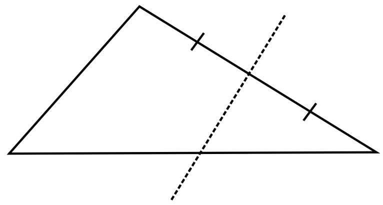

Figura 16: Mediatriz de um triângulo.

3.1.5 Quadriláteros

Alguns quadriláteros recebem nomes especiais para distinguí-los dos demais. A seguir daremos definições de alguns desses quadriláteros.

Definição 8 *Um **paralelogramo** é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

Fixado um dos lados do paralelogramo, o qual chamamos de **base**, sua **altura** será um segmento perpendicular à base que liga a mesma ao lado oposto ou ao prolongamento desse lado oposto.

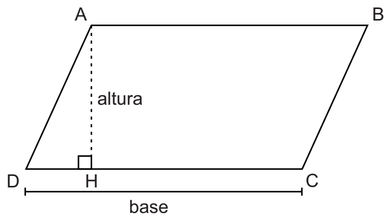

Figura 17: Paralelogramo.

Definição 9 *Um **retângulo** é um quadrilátero cujos ângulos internos são todos ângulos retos.*

Outra característica de um retângulo é que seus lados opostos são paralelos e congruentes. Portanto, todo retângulo é um paralelogramo. Além disso, se tomarmos um dos lados do retângulo como base, qualquer um dos outros dois lados adjacentes será a altura do retângulo.

Figura 18: Retângulo.

Definição 10 *Um **quadrado** é um retângulo em que todos os lados têm o mesmo comprimento.*

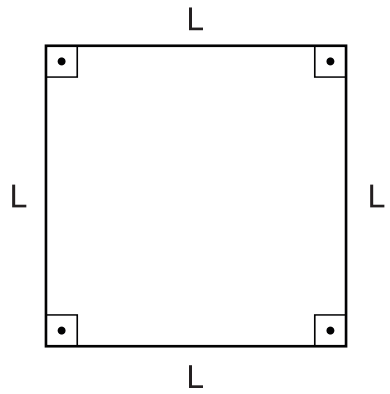

Figura 19: Quadrado.

Definição 11 *Um **trapézio** é um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos. Os lados opostos paralelos são chamados de **bases** do trapézio e a distância entre as retas que contém as bases é chamada **altura** do trapézio.*

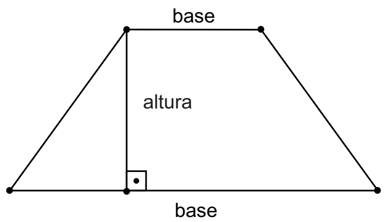

Figura 20: Trapézio.

Definição 12 *Um **losango** é um quadrilátero (qualquer) em que todos os lados têm o mesmo comprimento.*

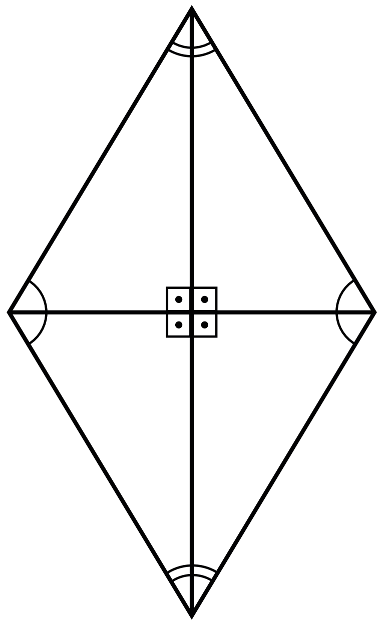

Figura 21: Losango.

Perceba que as diagonais do losango o dividem em quatro triângulos congruentes e dessa congruência segue que as diagonais são perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem é ponto médio de cada uma.

3.1.6 Área de um polígono

A área de um polígono é determinada por um número positivo que de alguma forma indica seu tamanho comparado com o tamanho de alguma região do plano adotada como unidade. Na definição de área precisamos do conceito de congruência.

Dizemos que dois polígonos são **congruentes** se eles possuem a mesma forma e o mesmo tamanho. Mais formalmente, dois polígonos são congruentes se, e somente se, um pode ser transformado no outro por isometria, ou seja, uma combinação de translações, rotações e reflexões.

Definição 13 *A* ***área*** *de um polígono é um número real positivo que deverá satisfazer as seguintes propriedades:*

(i) *Polígonos congruentes têm a mesma área;*

(ii) *Se um polígono $\mathcal{P}$ for decomposto como a união de um certo número de outros polígonos de tal modo que dois quaisquer dentre eles tenham em comum, no máximo, pontos que estão sobre seus lados, então a área de $\mathcal{P}$ é a soma das áreas desses outros polígonos;*

(iii) *Se um polígono $\mathcal{P}_1$ está contido em outro polígono $\mathcal{P}_2$, então a área de $\mathcal{P}_1$ é menor ou igual a de $\mathcal{P}_2$ e só é igual quando $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$;*

(iv) *A área do quadrado unitário, isto é, o quadrado cujo lado tem medida* 1 *unidade de comprimento, é igual a* 1 *unidade de área.*

A partir dessas suposições, podemos deduzir a área de outros polígonos. Começaremos calculando a área do retângulo. Para isso, faremos uso do Teorema Fundamental da Proporcionalidade; mais especificamente, sua versão para números positivos. Denotaremos por $\mathbb{R}^+$, o conjunto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}.$$

Teorema 3.1.1 *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(1^+) $f(nx) = n \cdot f(x)$ *para todo número inteiro positivo n e todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

(2^+) *Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

(3^+) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.*

Para uma demonstração deste teorema, veja Lima p. 86.

Proposição 3.1.1 *A área de um retângulo é igual ao produto da base pela altura.*

Demonstração Seja $f(x)$ a área de um retângulo de base x e altura a. Pelo item (iii) da Definição 13, f é uma função crescente de x. Para qualquer inteiro positivo n e qualquer número positivo x, o retângulo de altura a e base nx pode ser decomposto em n retângulos de altura a e base x. Logo, pelo item (ii) da Definição 13, $f(nx) = nf(x)$. Assim, pelo Teorema 3.1.1, temos $f(x) = A \cdot x$, onde $A = f(1)$ é a área de um retângulo de altura a e base 1. Agora seja $g(y)$ a área de um retângulo de base 1 e altura y. Aplicando o argumento anterior à função g, concluímos que $g(y) = U \cdot y$, onde $U = g(1)$ é a área do retângulo de base 1 e altura também 1, ou seja, do quadrado unitário o qual, pelo item (iv) da Definição 13, é igual a 1. Assim, $g(y) = y$. Note que a área do retângulo de altura a e base 1 é dada por $f(1)$ e também por $g(a)$. Assim, temos $A = f(1) = g(a) = a$. Portanto, a área do retângulo de altura a e base x é igual a ax. ■

Exemplo 3.1.2 *Vamos calcular as dimensões de um retângulo cuja altura é metade de sua base e área valendo* $450\ m^2$.

Sejam b e h as medidas da base e da altura desse triângulo, respectivamente. Como a altura é igual a metade da base, temos $h = \dfrac{b}{2}$. Assim,

$$b \cdot h = 450 \Rightarrow b \cdot \frac{b}{2} = 450 \Rightarrow b^2 = 900 \Rightarrow b = 30.$$

Portanto, a altura mede 15 m e a base mede 30 m. ◇

Como todo quadrado é um retângulo em que os lados têm a mesma medida, segue da Proposição 3.1.1 que a **área de um quadrado** de lado a é igual a a^2.

Usaremos a Proposição 3.1.1 para determinar a área de outros polígonos. Precisaremos também do seguinte conceito.

Definição 14 *Dizemos que dois polígonos são* ***equivalentes*** *se eles podem ser decompostos em uma mesma quantidade de polígonos menores dois a dois congruentes.*

Segue-se dos itens (i) e (ii) da Definição 13 que polígonos equivalentes têm a mesma área.

Área do paralelogramo: A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a bh.

Com efeito, seja $ABCD$ um paralelogramo, tal que $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, como na Figura 22.

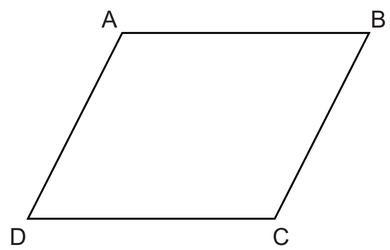

Figura 22: Paralelogramo ABCD.

Considere o ponto E, pé da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CD}$ baixada do ponto B, e o ponto F, pé da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{CD}$ baixada do ponto A. Como $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, pelo menos um dos pontos E ou F pertence ao segmento CD.

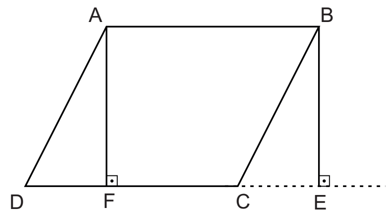

Figura 23: Área do paralelogramo.

Os segmentos CE e DF são congruentes, de modo que $\overline{DC} = \overline{EF} = b$. Também são congruentes os segmentos AF e BE, de modo que $\overline{AF} = \overline{BE} = h$. Assim, os triângulos ADF e BCE são congruentes.

Como o paralelogramo $ABCD$ é a união do triângulo ADF com o quadrilátero $ABCF$, e o retângulo $ABEF$ é a união do triângulo BCE com o quadrilátero $ABCF$, concluímos que o paralelogramo $ABCD$ é equivalente ao retângulo $ABEF$. Assim, a área do paralelogramo $ABCD$

é igual à área do retângulo $ABEF$ cuja base mede b e cuja altura mede h. Portanto, a área do paralelogramo $ABCD$ é dada por

$$\acute{A}rea(ABCD) = bh.$$

Exemplo 3.1.3 *Vamos calcular a área do paralelogramo ABCD da Figura 24 que tem perímetro igual a 22 cm; M é o ponto médio de CD e $\overline{AD}$ tem 2 cm a mais que $\overline{DM}$.*

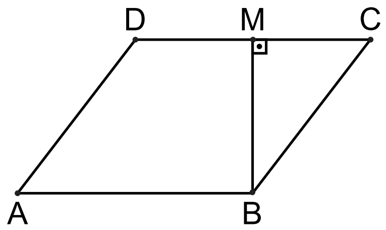

Figura 24: Paralelogramo ABCD.

Seja $\overline{DC} = 2y$ e $\overline{AD} = y + 2$. Temos

$$\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 22 \Rightarrow$$

$$y + 2cm + 2y + y + 2 + 2y = 22 \Rightarrow$$

$$6y = 18 \Rightarrow$$

$$y = 3.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CMB, temos:

$$\overline{MC}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow$$

$$3^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = 16^2 \Rightarrow$$

$$h = 4.$$

Portanto, a área vale $6cm \cdot 4cm = 24cm^2$. ◇

Proposição 3.1.2 *Um triângulo de base b e altura h é equivalente a um paralelogramo de base b e altura* $\frac{h}{2}$.

Prova. Seja ABC um triângulo e seja D o ponto médio do lado AC. Trace, a partir de D, um segmento paralelo ao lado BC até o ponto E, passando por F em AB, de modo que DE seja congruente a BC, conforme a Figura 25.

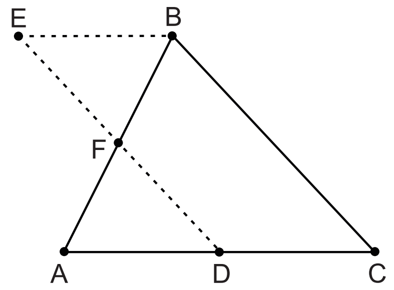

Figura 25: Triângulo ABC.

Os triângulos ADF e BEF são congruentes. Como o triângulo ABC é a união de $BCDF$ com ADF, e o paralelogramo é a união de $BCDF$ com BEF, concluímos que o triângulo ABC é equivalente ao paralelogramo $BCDE$ e a altura do triângulo ABC relativa ao lado BC é igual ao dobro da altura do paralelogramo $BCDE$ relativa ao lado BC. ■

Área do triângulo: A área de um triângulo de base b e altura h é igual a $\frac{bh}{2}$.

Com efeito, como ABC é equivalente a um retângulo de base b e altura $\frac{h}{2}$ cuja área é igual a $b \cdot \frac{h}{2}$, concluímos que a área do triângulo ABC é igual a

$$\acute{A}rea(ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Exemplo 3.1.4 *Vamos calcular a área do triângulo da Figura 26.*

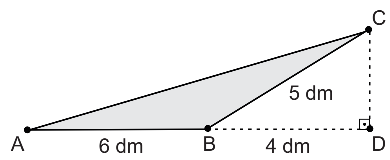

Figura 26: Área do triângulo ABC.

Para determinarmos a medida de CD, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo BCD.

$$\overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow$$

$$4^2 + \overline{CD}^2 = 5^2 \Rightarrow$$

$$\overline{CD}^2 = 9^2 \Rightarrow$$

$$\overline{CD} = 3.$$

Portanto, a área do triângulo ABC será dada por $\frac{6dm \cdot 3dm}{2} = 9dm^2$. ◇

Área do trapézio: A área de um trapézio de bases $\mathcal{B}$ e b e altura h é igual a $\frac{(\mathcal{B}+b)h}{2}$.

Com efeito, seja $ABCD$ um trapézio e suponha que $\overline{AB} = \mathcal{B} > b = \overline{CD}$, conforme a Figura 27.

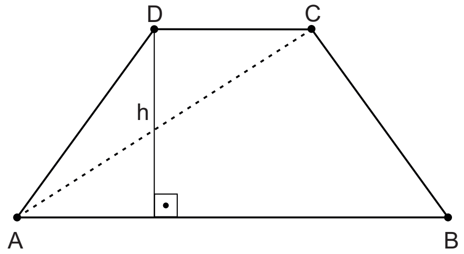

Figura 27: Trapézio ABCD.

A diagonal AC divide o trapézio em dois triângulos ABC e ACD de altura h em relação às bases AB e CD. Portanto, a área do trapézio é a soma das áreas dos triângulos:

$$\begin{aligned} \text{Á}rea(ABCD) &= \text{Á}rea(ABC) + \text{Á}rea(ACD) \\ &= \frac{\mathcal{B}\cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{(\mathcal{B}+b)\cdot h}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.5 *Luís é dono de um terreno em forma de trapézio que possui bases de 10 e 18 metros e altura de 8 metros, como indicado na Figura 28.*

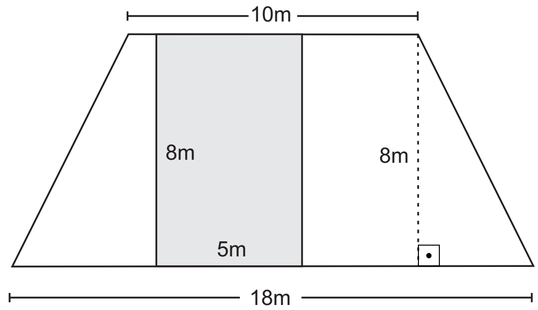

Figura 28: Trapézio.

Dentro desse terreno, Luiz planeja construir uma piscina retangular de 8 metros de comprimento por 5 metros de largura. Além disso, planeja colocar grama no restante do terreno. Vamos calcular quantos metros quadrados de grama Luiz deverá comprar.

A área do terreno será dada por

$$\frac{(18+10)\cdot 8}{2} = 112.$$

Como a piscina é no formato retangular, então sua área vale $5 \cdot 8 = 40$. Portanto, a área da grama será igual a

$$112 - 40 = 72m^2.$$

$\diamond$

Área do losango: A área de um losango é igual à metade do produto de suas diagonais.

Com efeito, seja $ABCD$ um losango cujas diagonais medem $\overline{AC} = D$ e $\overline{BD} = d$, e seja E o ponto de interseção das diagonais, conforme a Figura 29.

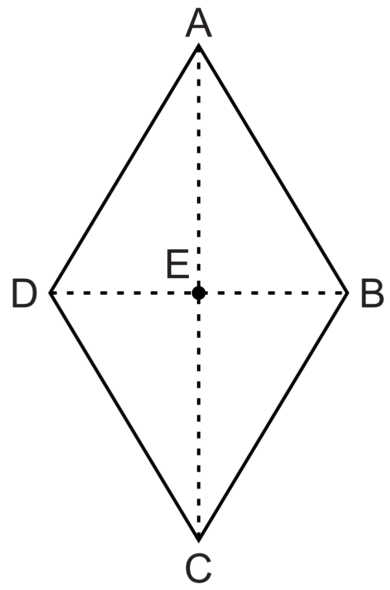

Figura 29: Losango ABCD.

Como as diagonais são perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem é ponto médio de cada uma, a área do losango é igual a quatro vezes a área do triângulo AEB cuja base mede $\frac{D}{2}$ e cuja altura mede $\frac{d}{2}$. Portanto, a área do losango é dada por

$$\begin{aligned} \text{Á}rea(ABCD) &= 4 \cdot \text{Á}rea(AEB) \\ &= 4 \cdot \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \\ &= \frac{D \cdot d}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.6 *A prefeitura de uma cidade gasta $R\$ \ 33,00$ por metro quadrado de grama plantada. Sabendo que uma praça, que possui formato de losango, foi totalmente revestida com essa mesma grama e que as diagonais da praça medem 18m e 22m. Determinemos quanto a prefeitura gastou nessa obra.*

A área da praça será dada por $\frac{18m \cdot 22m}{2} = 198m^2$. Portanto, o valor gasto na obra será $198 \cdot R\$ \ 33,00 = R\$ \ 6\,534,00$.

$\diamond$

3.2 Trigonometria

A Trigonometria (do grego **trigonon** - triângulo; **metron** - medida) é uma ramo da Matemática que estabelece métodos para o estudo de triângulos e funções trigonométricas. Nesta seção estudaremos a Trigonometria no triângulo retângulo.

3.2.1 Trigonometria no triângulo retângulo

Na Figura 30, o triângulo ABC é retângulo em A, pois o ângulo $\widehat{BAC}$ mede $90°$.

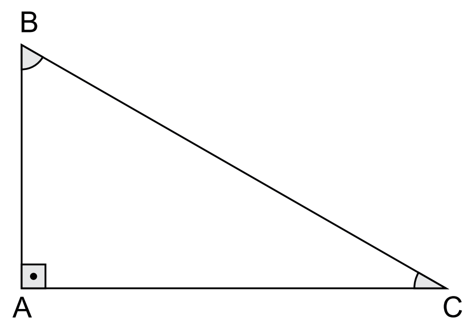

Figura 30: Triângulo retângulo.

Em um triângulo retângulo, o maior lado é denominado **hipotenusa** e os outros dois lados são denominados **catetos**.

Na Figura 30 os catetos são os lados AB e AC e a hipotenusa é o lado BC. A hipotenusa é o lado que fica oposto ao ângulo reto (ângulo de $90°$). Além do ângulo reto, há dois ângulos agudos.

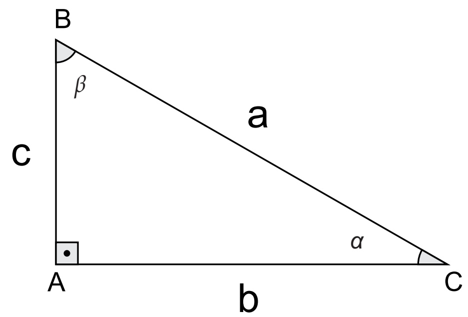

Figura 31: Ângulos agudos α e β.

No triângulo retângulo da Figura 31, o lado AB é o cateto oposto ao ângulo α e o lado AC, o cateto adjacente a α. Em relação a esta mesma figura, temos ainda que o lado AC é o cateto oposto ao ângulo β e o lado AB, o cateto adjacente a β.

Sejam ABC e DEF dois triângulos retângulos, com $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 90°$.

Se um dos ângulos agudos do triângulo ABC for congruente a um dos ângulos agudos do triângulo DEF, digamos $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = \alpha$, então os triângulos ABC e DEF são semelhantes e, assim,

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} = r_1, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = r_2 \quad \text{e} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} = r_3.$$

Note que as constantes r_1, r_2 e r_3 dependem exclusivamente da medida do ângulo α, e não dependem das medidas dos lados dos triângulos.

As medidas (trigonométricas) r_1, r_2 e r_3 são chamadas respectivamente de **seno**, **cosseno** e **tangente** do ângulo α, e são denotadas por $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$.

Em resumo, se α é um ângulo agudo do triângulo retângulo, temos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}.$$

No caso da Figura 31, temos: para o ângulo α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{b};$$

para o ângulo β:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}, \quad \cos\beta = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}.$$

Teorema 3.2.1 *Se um ângulo agudo tem medida α, então*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Demonstração Considere um triângulo retângulo ABC com $\widehat{ACB} = \alpha$, $\widehat{BAC} = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, conforme a Figura 31. Então

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

∎

Agora vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, que são chamados de ângulos notáveis.

Consideremos um quadrado de lado a. Pelo Teorema de Pitágoras[1], cada diagonal desse quadrado tem medida igual a $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma das diagonais em dois ângulos de 45°.

[1] O quadrado da hipotenusa, de um triângulo retângulo, é igual à soma dos quadrados dos catetos desse triângulo.

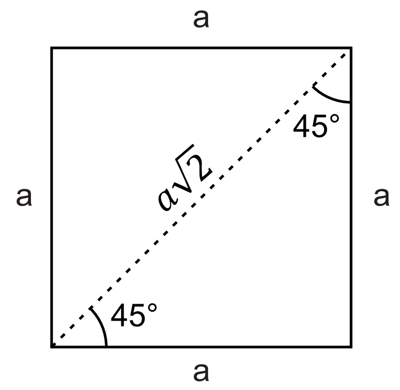

Figura 32: Diagonal de um quadrado.

Assim, temos

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Consideremos agora, um triângulo equilátero de lado a. Os três ângulos internos são congruentes e têm medidas iguais a 60°.

O segmento de reta ligando um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto divide o triângulo em dois triângulos congruentes com ângulos internos medindo 30°, 60° e 90°, e os lados opostos a esses ângulos medem $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e a, respectivamente.

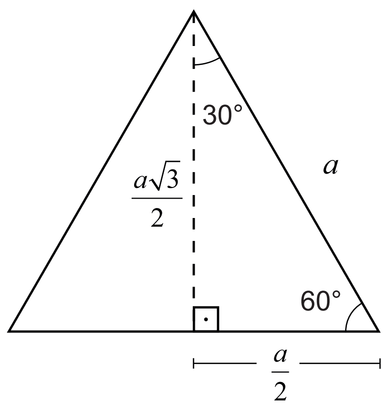

Figura 33: Altura de um triângulo equilátero.

Assim, temos

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\text{tg}\, 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

e

$$\text{sen}\, 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$
$$\text{tg}\, 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

Dispomos os valores do seno, do cosseno e da tangente para os ângulos notáveis na Tabela 3.

Tabela 3: Tabela dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 3.2.1 *Vamos determinar o perímetro do triângulo abaixo:*

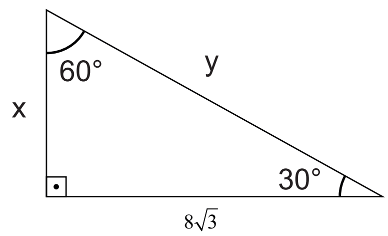

Figura 34: Triângulo retângulo.

Para determinarmos o perímetro do triângulo, precisaremos obter a medida (x) do cateto oposto ao ângulo de 30° e a medida (y) da hipotenusa. Temos,

$$\frac{8\sqrt{3}}{x} = tg\ 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{8\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x\sqrt{3} = 8\sqrt{3} \quad \Rightarrow x = 8.$$

Por outro lado, temos

$$\frac{8}{y} = \text{sen}\, 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{y} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 16.$$

Portanto, o perímetro (P) será dado por

$$P = 8 + 16 + 8\sqrt{3} = 24 + 8\sqrt{3}.$$

$\diamond$

3.2.2 *Ângulos complementares*

Definição 15 *Dizemos que dois ângulos agudos* α *e* β *são **complementares** quando* $\alpha + \beta = 90°$. *Neste caso, dizemos que um dos ângulos é complementar do outro.*

Exemplo 3.2.2

(a) $15°$ *e* $75°$ *são ângulos complementares.*

(b) $67°$ *é o complementar de* $23°$.

(c) Se α *é um ângulo agudo, então* $90° - \alpha$ *é o complementar de* α.

De acordo com o exposto anteriormente, $\operatorname{sen} 30° = \cos 60°$ e $\operatorname{sen} 60° = \cos 30°$ (veja a Tabela 3). Este fato é válido para ângulos complementares quaisquer, como indica o teorema a seguir.

Teorema 3.2.2 *Se* α *é um ângulo agudo, então*

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha) \quad e \quad \cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha).$$

Demonstração Considere um triângulo retângulo ABC com $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{ACB} = \beta$, $\widehat{BAC} = 90°$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, conforme a Figura 35. Então $\beta = 90° - \alpha$. Assim, temos

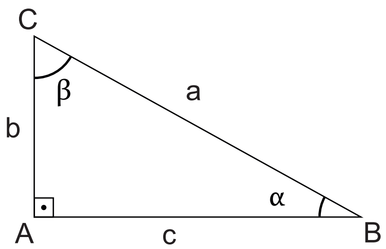

Figura 35: Triângulo retângulo e seus ângulos internos.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos(90° - \alpha) = \cos\beta = \frac{b}{a},$$

ou seja, $\operatorname{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)$. Também, temos

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a},$$

ou seja, $\cos\alpha = \operatorname{sen}(90° - \alpha)$.

■

3.2.3 Ângulos em radianos

Além do **grau**, existe outra unidade de medida que podemos utilizar para medir ângulo: o **radiano**.

Considere um arco $\overset{\frown}{AB}$ de uma circunferência de raio r, tal que o comprimento do arco AB seja igual a r. Dizemos que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 1 **radiano**, o que é denotado por $1\,rad$.

Sendo assim, 1 radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

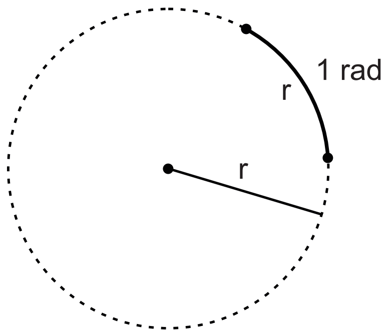

Figura 36: Medida de 1 radiano.

Definição 16 *Dizemos que um ângulo $\widehat{AOB}$ mede* 1 *radiano (*$1\,rad$*) quando determina numa circunferência de centro O um arco de* $1\,rad$.

Sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio r, em uma certa unidade de comprimento u, é $2\pi r$. Assim, se x é a medida da circunferência em radianos, então, usando a regra de três, temos

$$\begin{array}{ccc} rad & & u \\ 1 & — & r \\ x & — & 2\pi r \end{array}$$

Donde obtemos

$$rx = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\pi r}{r} \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi.$$

Concluímos, portanto, que a medida de uma circunferência é $2\pi\,rad$.

Dizemos que uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se elas são medidas de um mesmo arco.

Exemplo 3.2.3

(a) $2\pi\, rad$ é equivalente a 360°, pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa na circunferência.

(b) $\pi\, rad$ é equivalente a 180°, pois ambas são medidas de um arco de meia volta na circunferência.

Podemos usar qualquer uma das equivalências do Exemplo 3.2.3 para transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em graus, podemos obter a medida desse arco em radianos e vice-versa.

Exemplo 3.2.4 *Vamos determinar, em radianos, a medida equivalente a* 75°.

Seja x a medida do arco, em radianos, equivalente a 75°. Portanto, temos

$$x = \frac{75^\circ \cdot \pi\, rad}{180^\circ} = \frac{5}{12}\pi\, rad.$$

$\diamond$

3.3 Circunferência trigonométrica

Vamos estender agora os conceitos de seno, cosseno e tangente para ângulos não agudos.

Consideremos uma circunferência unitária cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano ortogonal.

Faremos as seguintes convenções:

(i) Todos os arcos da circunferência serão medidos a partir do ponto $A(1,0)$.

(ii) Se um arco for medido no **sentido horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **negativo** $(-)$.

(iii) Se um arco for medido no **sentido anti-horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **positivo** $(+)$.

Com essas convenções a circunferência é chamada de **circunferência trigonométrica**.

A cada ponto P da circunferência trigonométrica associamos medidas em graus ou radianos do arco $\overset{\frown}{AP}$.

Para indicarmos a medida de um arco trigonométrico em radianos, não é necessário explicitar a unidade **rad**.

Definição 17 *Dizemos que dois arcos trigonométricos* $\overset{\frown}{AP}$ *e* $\overset{\frown}{AQ}$ *são* ***côngruos*** *quando as extremidades* P *e* Q *coincidem.*

Quando α e β são medidas de arcos côngruos, escrevemos $\alpha \equiv \beta$ (lê-se "α é côngruo a β").

Exemplo 3.3.1 *Vamos verificar se os arcos de medida* 6232° *e* 8392° *são côngruos.*

Para verificarmos se dois arcos são côngruos basta observarmos se a diferença entre os ângulos é um número divisível ou múltiplo de 360°. Assim, temos

$$8392^\circ - 6232^\circ = 2160^\circ.$$

Portanto, como 2160° é divisível por 360°, concluímos que os ângulos 6232° e 8392° são côngruos. $\diamond$

3.3.1 Trigonometria na circunferência trigonométrica

Estamos interessados em ampliar os conceitos de seno e cosseno de um arco (ou ângulo) para qualquer arco trigonométrico.

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco de medida α, com $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, e seja $P(x_P, y_P)$ a extremidade do arco α. Seja M o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre o eixo x.

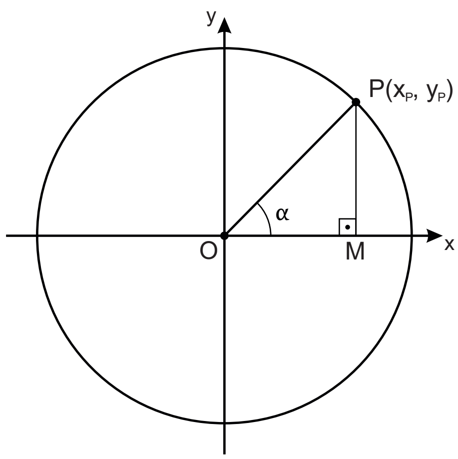

Figura 37: Circunferência trigonométrica.

Como o triângulo OMP é retângulo, temos

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM} = x_P,$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{MP}}{1} = \overline{MP} = y_P.$$

Ou seja, para um arco entre 0° e 90°, o cosseno e o seno são, respectivamente, a abscissa e a ordenada da extremidade do arco.

Usamos este resultado para estender as definições de seno e cosseno para um arco qualquer.

Definição 18 *Dado um arco trigonométrico* $\overset{\frown}{AP}$ *de medida* α*, definimos o cosseno e o seno de* α *como sendo a abscissa e a ordenada do ponto P, respectivamente.*

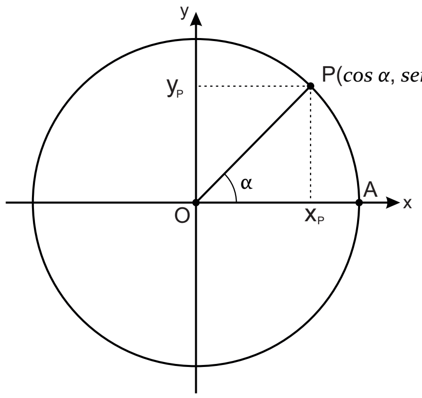

Figura 38: Seno e cosseno de um arco trigonométrico.

Teorema 3.3.1 (Relação Trigonométrica Fundamental) *Para qualquer arco trigonométrico de medida* α*, temos*

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Demonstração *Seja* $\overset{\frown}{AP} = \alpha$*, conforme a Figura 38. Como* $P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ *e* $O = (0,0)$ *segue da fórmula da geometria analítica para distância entre dois pontos e do fato que* $\overline{OP} = 1$ *que*

$$\sqrt{(\cos\alpha - 0)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - 0)^2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

■

Exemplo 3.3.2 *Vamos calcular o valor do* $\cos\alpha$ *sabendo que* $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ *e* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Usando o Teorema 3.3.1, temos

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1.$$

Portanto,

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, isto é, α é um arco do segundo quadrante, logo $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. ◇

3.4 Poliedros

Definição 19 *Um* ***poliedro*** *é qualquer região do espaço delimitada por um conjunto finito de polígonos, que satisfazem as seguintes condições:*

1. *Quaisquer dois polígonos intersectam-se em um lado ou em um vértice, ou não se intersectam;*
2. *Cada lado de um polígono pertence exatamente a dois polígonos do poliedro;*
3. *Dois polígonos com um lado em comum não são coplanares;*

Podemos destacar os seguintes elementos de um poliedro:

(i) Os polígonos que compõem o poliedro são denominados **faces** do poliedro;

(ii) Os lados dos polígonos que compõem o poliedro são denominados **lados** do poliedro;

(iii) Os vértices dos polígonos que compõem o poliedro são denominados **vértices** do poliedro.

(iv) **Diagonal de uma face** é qualquer diagonal do polígono dessa face.

(v) **Diagonal do poliedro** é qualquer segmento de reta cujos extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face.

(vi) A porção do espaço cuja superfície é a reunião dos ângulos das faces que têm um mesmo vértice é chamada de **ângulo poliédrico**.

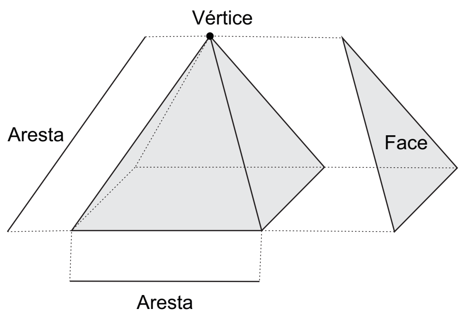

Figura 39: Principais elementos dos Poliedros.

A nomenclatura dos poliedros se dá de acordo com seu número de faces. A Tabela 4 apresenta o nome de alguns poliedros.

Definição 20 *Um poliedro será denominado* ***convexo*** *quando qualquer segmento de reta que possui suas extremidades no interior do poliedro está inteiramente contido no poliedro. Caso se tenha algum segmento de reta que não satisfaça esta condição, então o poliedro será denominado* ***não convexo****.*

Tabela 4: Classificação de poliedros

Número de Faces	Nome do Poliedro
4	tetraedro
5	pentaedro
6	hexaedro
7	heptaedro
8	octaedro
9	eneaedro
10	decaedro
12	dodecaedro
13	tridecaedro
20	icosaedro

Fonte: Paiva (2003)

Exemplo 3.4.1 O poliedro da Figura 40 é convexo e o poliedro da Figura 41 é não convexo.

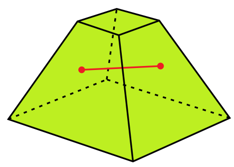

Figura 40: Poliedro convexo.

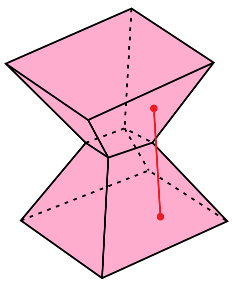

Figura 41: Poliedro não convexo.

Uma importante expressão Matemática que relaciona os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo, é a relação de Euler.

Relação de Euler: Sejam V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces de um poliedro convexo, então vale a relação

$$V - A + F = 2.$$

Exemplo 3.4.2 *Vamos verificar a relação de Euler para o cubo. Contando o número de vértices, arestas e faces, temos $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$. Agora verificamos a relação de Euler:*

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 14 - 12 = 2.$$

Logo, para o cubo a relação é válida.

Os demais poliedros seguem o mesmo raciocínio.

3.4.1 Poliedros de Platão

Definição 21 *Dizemos que um poliedro convexo é* **regular** *quando satisfaz as seguintes condições:*

(i) *todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si;*

(ii) *todos os ângulos poliédricos são congruentes entre si.*

Platão provou que existem exatamente cinco poliedros regulares, os quais são chamados de **Poliedros de Platão** ou **Sólidos Platônicos**. São eles:

Tetraedro: é formado por 4 vértices, 4 faces triangulares e 6 arestas.

Hexaedro(cubo): é formado por 8 vértices, 6 faces quadrangulares e 12 arestas.

Octaedro: é formado por 6 vértices, 8 faces triangulares e 12 arestas.

Dodecaedro: é formado por 20 vértices, 12 faces pentagonais e 30 arestas.

Icosaedro: é formado por 12 vértices, 20 faces triangulares e 30 arestas.

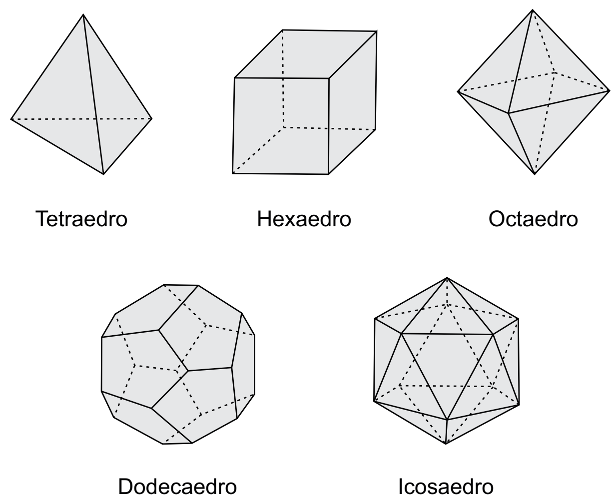

Figura 42: Poliedros de Platão.

4 PROPOSTAS DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS COM MATERIAIS CONCRETOS

Neste capítulo, apresentaremos algumas sequências didáticas com o intuito de oferecer aos professores uma maneira de se trabalhar conceitos e práticas, a fim de se obter resultados positivos com a utilização dos materiais propostos. Contudo, deve-se levar em consideração que essas metodologias também permitem, no decorrer de sua aplicação, uma flexibilização de acordo com a necessidade de cada grupo de alunos, entendendo que o ensino e a aprendizagem não são metodologias engessadas.

As atividades são reguladas através de um acompanhamento e monitoramento do professor, visando os objetivos traçados pela técnica a ser aplicada. Após a aplicação das atividades será feita a avaliação verificando se houve, ou não, a aprendizagem idealizada. Essas técnicas possibilitarão a criação e a potencialização dos espaços de participação do aluno no processo de aprendizagem.

Para que a técnica obtenha bons resultados, é necessário focar no sujeito principal dessa ação: os alunos. O que vem fortalecer a noção de que eles são agentes ativos no processo de aprendizagem, reconhecendo o seu papel de agente transformador na educação. O professor deve assumir um papel intuitivo no sentido de não influenciar o aluno no que ele almeja, mas deixá-lo à vontade para percorrer o caminho do conhecimento.

A seguir, apresentaremos algumas sequências didáticas relacionadas a assuntos referentes ao Ensino Médio. As aplicações serão baseadas nos seguintes materiais concretos: Geoplano, Teodolito e Poliedros. O objetivo é relacionar teoria e prática, possibilitando ao aluno formas diferenciadas de compreensão dos conteúdos programáticos da disciplina de Matemática.

4.1 Geoplano

Para muitos alunos, a Geometria é considerada uma parte difícil da Matemática, pois exige dos mesmos um conhecimento que possibilite o entendimento dos conceitos envolvidos, para isso se necessita de tempo e materiais adequados que venham auxiliar o entendimento dos conceitos e da construção do conhecimento geométrico.

Segundo Oliveira (1998), as dificuldades dos alunos em reconhecer e desenhar as figuras geométricas mais simples refletem as consequências de um esquecimento da disciplina, pois a mesma é pouco trabalhada em sala e exige tempo e dedicação para o entendimento da mesma.

São claras as dificuldades dos alunos em entender conceitos e definições e em usar fórmulas para o cálculo de perímetro e área, por exemplo. Eles têm pouca experiência com as demonstrações e com habilidades de percepção e manuseio de figuras geométricas.

Pensando nas dificuldades encontradas por parte dos alunos, e no pouco conhecimento sobre os conceitos básicos de Geometria, objetiva-se trabalhar com materiais que possam auxiliar o ensino dessa disciplina.

Se partirmos de conteúdos do Ensino Básico, o Geoplano permite trabalhar os conceitos de construção de figuras planas, perímetros e áreas de figuras planas, vértices e diagonais.

O Geoplano é um material desenvolvido pelo matemático inglês Calleb Gattegno. O mesmo é construído de tipos de materiais diferentes. O mais utilizado nas escolas, por ser de baixo custo, é constituído por uma placa de madeira, marcada com uma malha quadriculada ou pontilhada, pregos e ligas para auxiliar na construção dos objetos geométricos.

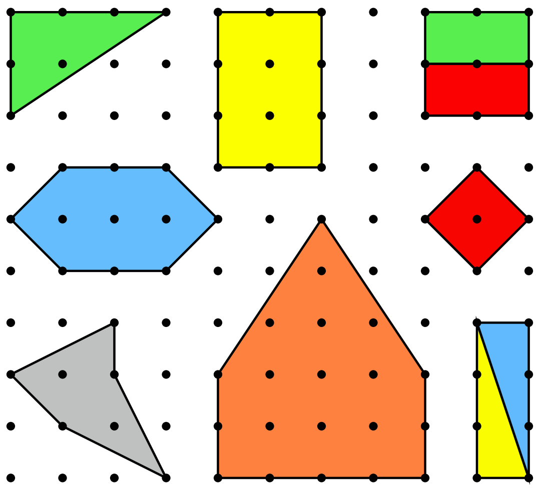

Figura 43: Geoplano.

É um recurso no qual se pode desenvolver atividades relacionadas a figuras geométricas, principalmente as planas. É uma ferramenta importante para o ensino da Geometria.

Algumas das atividades que podem ser realizadas com o Geoplano são as que envolvem exploração de figuras poligonais, os conceitos de vértices e lados, e o cálculo de área, perímetro e diagonais de um polígono.

Etapa 1: Construção do Geoplano.

Objetivo: Fazer com que os alunos construam um Geoplano resistente, durável e de baixo custo, que irá auxiliá-los no cálculo de áreas, perímetros, número de vértices, lados e diagonais de polígonos.

Procedimento: Entregar uma madeira retangular e pedir para que os alunos façam uma malha quadriculada com quadradinhos medindo 1cm de lado. Em cada interseção dos quadrinhos fixar um prego. Podem-se construir Geoplanos de vários tamanhos, de acordo com a quantidade de pregos de seu lado, por exemplo, 8x8, ou seja, cada lado do Geoplano tem 8 pregos.

Figura 44: Geoplano de madeira.

Etapa 2: Construção de figuras planas por meio do Geoplano.

Objetivo: Possibilitar aos alunos as descobertas de como construir polígonos. Identificar quantos vértices, lados e diagonais cada polígono possui.

Procedimento: Entregar a cada grupo de alunos ligas ou elásticos para construir figuras planas por meio de orientações dadas pelo professor.

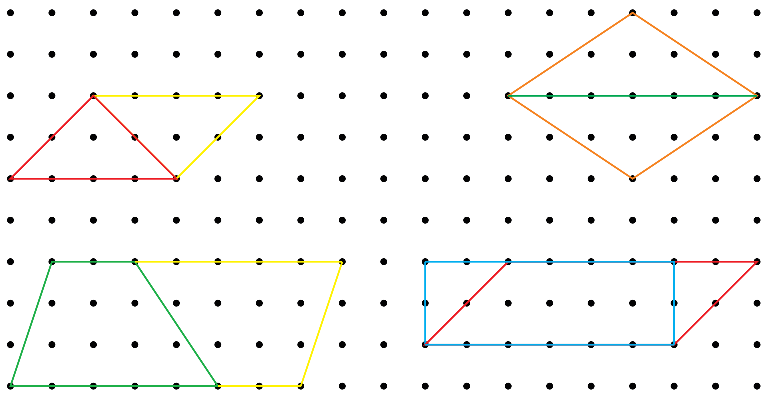

Figura 45: Figuras no Geoplano.

Etapa 3: Construção de hexágono no formato da Figura 46.

Objetivo: Fazer com que o aluno perceba que o elástico ficará apoiado em 6 pinos que configuram os vértices e que existem lados com medidas diferentes. Identificar a medida de cada lado.

Procedimento: Apoiar o elástico em um pino, pular outro e apoiar no seguinte, formando assim uma linha com três pinos.

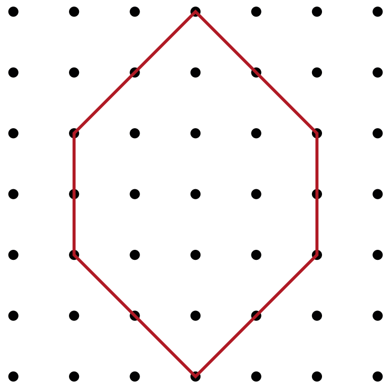

Figura 46: Elástico no Geoplano.

Etapa 4: Desenhar diferentes triângulos.

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam que os triângulos possuem medidas de lados diferentes e possibilitar ao aluno calcular a medida de cada lado.

Procedimento: O professor dará um modelo a cada grupo para que possam reproduzir no Geoplano.

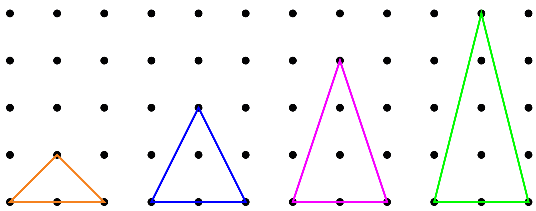

Figura 47: Triângulos no Geoplano.

Etapa 5: Calculando o perímetro de uma figura plana.

Objetivo: Fazer com que os alunos calculem perímetros de polígonos.

Procedimento: Solicitar aos alunos que construam o polígono da figura abaixo no Geoplano e determinem a medida de cada segmento a fim de se obter o perímetro. Após calculadas as medidas de todos os segmentos, pedir que eles efetuem a soma de todas elas, obtendo assim o perímetro do polígono.

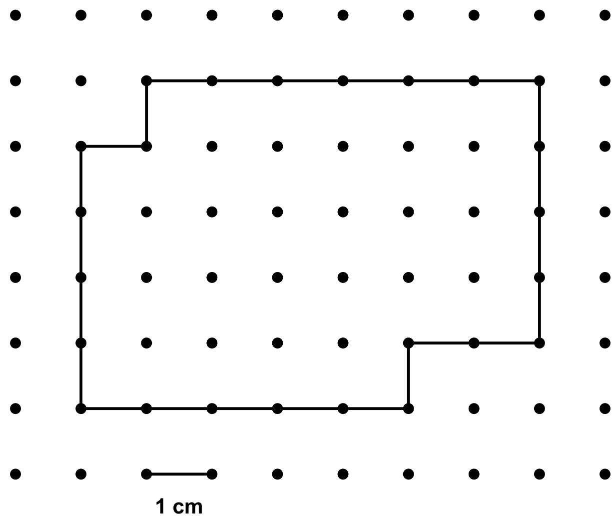

Figura 48: Polígono no Geoplano.

Etapa 6: Determinando áreas de polígonos.

Objetivo: Fazer com que os alunos calculem áreas de polígonos.

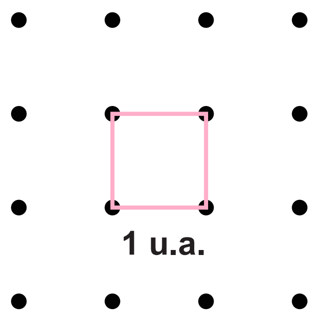

Figura 49: Unidade de medida padrão.

Procedimento: Entregar a cada grupo de alunos uma folha contendo os polígonos a serem construídos. Fazer com que eles percebam que a área de cada quadradinho é igual a 1 u.a. e que cada triângulo obtido pela metade do quadrinho tem área igual a 0,5 u.a. Pedir para que eles encontrem a área de cada polígono, a qual será a soma das áreas dos quadradinhos e dos triângulos contidos nele.

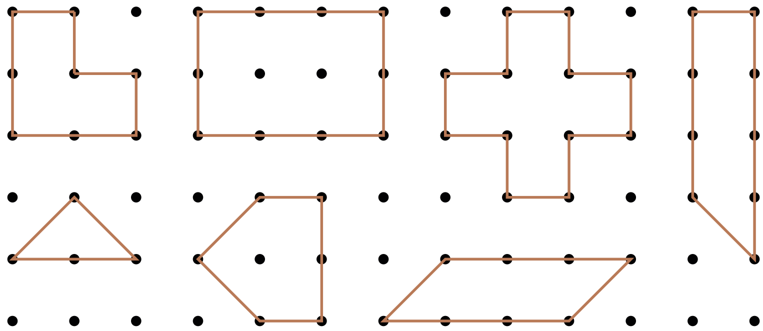

Figura 50: Desenhos de polígonos.

Etapa 07: Verificando o número de diagonais de um polígono convexo.

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam que não se tem diagonal do vértice escolhido para ele mesmo e nem para os dois vértices adjacentes. Fazer com que os alunos percebam a veracidade da fórmula que permite obter o número de diagonais, para um hexágono.

Procedimento: Solicitar aos alunos que construam um hexágono: é interessante que seja o mesmo para todos os grupos a fim de que facilite a explicação. Solicitar aos alunos que escolham um vértice qualquer e com as ligas tracem todas as diagonais que partem do vértice escolhido, enfatizando que não se tem diagonal do vértice escolhido para ele mesmo e nem para os dois vértices adjacentes. (Neste caso, eles devem perceber que desse vértice partem três diagonais.) Fazer com que eles percebam que temos 6 vértices e que de cada um desses vértices partem três diagonais, totalizando 18 diagonais. Fazer com que os alunos percebam que dessa forma cada diagonal estará sendo contada duas vezes, por isso teremos que dividir o total obtido por 2. chagando assim a 9 diagonais. Pedir para que eles construam no Geoplano todas as diagonais do hexágono, comprovando que são 9 diagonais no total.

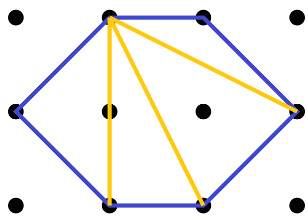

Figura 51: Diagonais no Geoplano.

Apresentamos acima algumas atividades pedagógicas que poderão ser utilizadas em sala de aula a fim de fixar o assunto trabalhado previamente, mas poderemos trabalhar diversos outros conteúdos na Educação Básica como simetria, semelhança de figuras planas, plano cartesiano, localização de pontos no plano cartesiano dentre outros. Caberá ao professor adequar o conteúdo trabalhado em sala de aula ao Geoplano, caso haja necessidade.

4.2 Geoplano Circular

O Geoplano Circular é um recurso didático concreto e manipulável que possibilita o professor trabalhar conceitos matemáticos relacionados a circunferência e círculo. Este material concreto consiste em uma base quadrada de madeira com pinos distribuídos sobre o círculo, um no centro e os demais (12, 24 ou 36) sobre a circunferência igualmente espaçados entre si. Nas sequências didáticas será utilizado um Geoplano Circular com 24 pinos igualmente espaçados, formando 24 arcos consecutivos de $15°$, e um pino no centro, que dista 15 cm de qualquer outro pino, representando assim o raio do círculo. Para exprimir os elementos do círculo e das figuras planas serão utilizados elásticos que auxiliarão na visualização.

Etapa 01: Construção do Geoplano Circular.

Objetivo: Possibilitar ao aluno a construção do seu próprio Geoplano Circular mediante materiais de baixo custo e com uma boa durabilidade que possa ser utilizado nas aulas que abordam os assuntos relacionados a circunferência e círculo.

Procedimentos: Dispor de uma madeira quadrangular e marcar o centro do quadrado através da propriedade das diagonais, dessa forma o encontro das diagonais será o centro do círculo. Com o auxílio de um compasso traçar o círculo com raio de medida conveniente e fixar pregos sobre a circunferência.

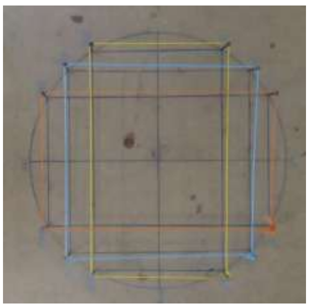

Figura 52: Construção do Geoplano Circular.

Etapa 02: Esboçar a distância do centro a um ponto qualquer da circunferência.

Objetivo: Reconhecer que a distância do centro a qualquer ponto da circunferência é sempre a mesma, a qual é denominada raio da circunferência.

Procedimentos: Solicitar aos alunos que fixem uma liga saindo do centro a um ponto qualquer da circunferência e calculem a medida do segmento com o auxílio de uma régua, após a medição sugerir aos alunos que repitam o procedimento com outro ponto da circunferência para que percebam que terá a mesma medida, dessa forma os alunos irão perceber que todas as medidas são iguais e que a mesma representa o raio do círculo.

Figura 53: Raio no Geoplano Circular.

Etapa 03: Conectar dois pontos quaisquer da circunferência através de ligas.

Objetivo: Definir cordas de um círculo.

Procedimentos: Solicitar que os alunos tracem segmentos de retas que ligam dois pontos quaisquer da circunferência.

Figura 54: Corda no Geoplano Circular.

Etapa 04: Traçar cordas que passam pelo centro da circunferência.

Objetivo: Fazer com que os alunos percebam que a maior corda é sempre a que passa pelo centro do círculo e que sua medida é o dobro do raio, definida como diâmetro.

Procedimentos: Solicitar que os alunos tracem segmentos de retas que ligam dois pontos quaisquer da circunferência que passam pelo centro.

Figura 55: Cordas que passam pelo centro do Geoplano Circular.

Etapa 05: Dividir o Geoplano Circular em 04 regiões iguais.

Objetivo: Definir cada região como quadrante e adotando o sentido anti-horário localizar o I, II, III e IV quadrantes.

Procedimentos: Solicitar aos alunos que tracem dois diâmetros perpendiculares entre si. Dessa maneira obterão quatro regiões iguais definidas como quadrantes. Após a obtenção dos quadrantes, o professor poderá pedir para que os alunos determinem a medida de cada arco referente aos quadrantes, cujo valor é de 90°.

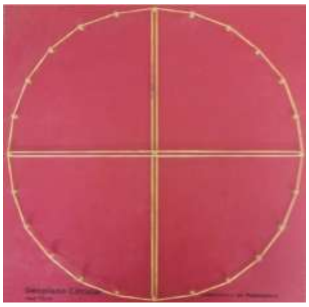

Figura 56: Quadrantes no Geoplano Circular.

Etapa 06: Esboçar ângulos notáveis de medidas iguais a 30°, 45°, 60°.

Objetivo: Localizar no círculo os ângulos notáveis. Construir um hexágono regular.

Procedimentos: Perguntar aos alunos qual a medida de cada arco formado por dois pinos adjacentes na circunferência. Ao concluírem que o ângulo formado é de 15° os alunos poderão localizar os ângulos notáveis. Para se construir um arco com o ângulo correspondente a 30° graus terão que fixar a liga no pino do centro do círculo e em dois pinos pertencentes à circunferência, de modo que fique um pino entre eles. De maneira análoga, os alunos poderão representar os ângulos de 45° e 60°, sendo que terão de deixar respectivamente dois pinos e três pinos entre os pontos que foram fixados os arcos.

Figura 57: Ângulos notáveis.

Etapa 07: Ângulos correspondentes de 30°, 45° e 60° no II, III, IV quadrantes.

Objetivo: Trabalhar simetria no círculo trigonométrico.

Procedimentos: Solicitar aos alunos que localizem o ângulo de 30° no círculo. Em seguida esticar o elástico na horizontal e vertical de modo a fixar em todos os quadrantes de forma a se obter um retângulo. Após esse procedimento os alunos poderão dizer qual o ângulo correspondente em cada quadrante. Os procedimentos dos ângulos referente a 45° e 60° se fazem de modo análogo.

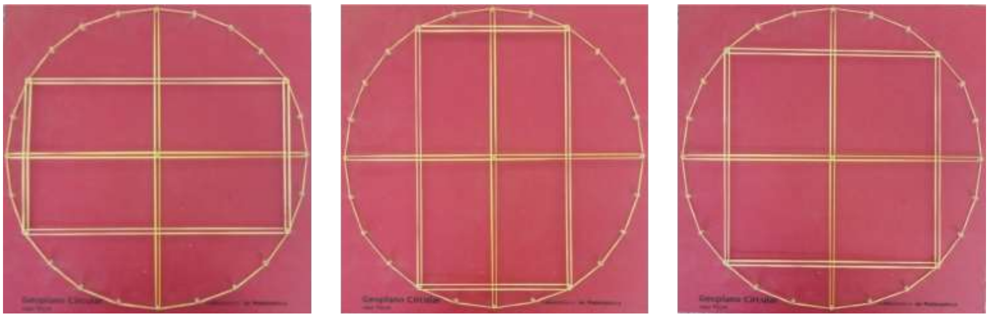

Figura 58: Ângulos correspondentes.

Etapa 08: Construir um quadrado inscrito no círculo e traçar suas diagonais.

Objetivo: Fazer com que o aluno construa um quadrado e em seguida traçar as diagonais a fim de que possam verificar que as diagonais se encontram no centro do círculo.

Procedimentos: Solicitar aos alunos que construam um quadrado. Para isso terão que fixar a liga em 4 pinos que serão os vértices do quadrado, restando assim 20, que deverão ser distribuídos igualmente entre os quatros arcos formados com os vértices consecutivos do quadrado. Dessa forma ficarão 5 pinos na circunferência entre dois vértices consecutivos do quadrado.

Figura 59: Quadrado no Geoplano Circular.

Etapa 09: Construir um triângulo equilátero.

Objetivo: Possibilitar ao aluno a construção do triângulo equilátero.

Procedimentos: Perguntar aos alunos em quantos pinos o elásticos ficará apoiado, como se trata de um triângulo teremos 3 pinos que ficarão como vértices do triângulo, restando assim

21 pinos que terão que serem distribuídos de maneira igual a cada dois vértices do triângulo, 7 pinos (21 : 3).

Figura 60: Triângulo equilátero.

Etapa 10: Construir um hexágono regular.

Objetivo: Propiciar ao aluno condições suficientes para obtenção de um hexágono regular inscrito no círculo.

Procedimentos: Perguntar aos alunos em quantos pinos o elástico ficará apoiado, como se trata de um hexágono, teremos 6 pinos que ficarão como vértices, restando assim 18 pinos que terão que serem distribuídos de maneira igual a cada dois vértices consecutivos do hexágono. Como temos 6 vértices, teremos 3 pinos (18 : 6) entre os vértices consecutivos.

Figura 61: Hexágono regular.

Etapa11: Construir um triângulo retângulo inscrito no círculo.

Objetivo: Fazer com que o aluno utilize o teorema do ângulo inscrito (em uma circunferência, a medida do ângulo central tem medida igual ao dobro do ângulo inscrito, que subtende o mesmo arco) para a construção do triângulo retângulo inscrito no círculo.

Procedimentos: O aluno deverá construir um triângulo em que um de seus lados seja o diâmetro do círculo. Dessa maneira o ângulo central terá medida igual a 90°.

Figura 62: Triângulo retângulo.

4.3 Teodolito

Outro assunto que os alunos possuem bastante dificuldade é em Trigonometria. Esse ramo da Matemática mescla a Geometria e a Álgebra, fazendo ainda uso de gráficos para exemplificar comportamentos e propriedades dos conceitos envolvidos. Dessa forma, torna-se necessário um nível razoável de abstração para compreender, conectar e trabalhar com as diversas abordagens que esse assunto contempla.

Existe aplicações de Trigonometria em diversas áreas das ciências exatas. Conhecer essa parte da Matemática é de fundamental importância para os alunos do Ensino Médio, sendo dever do professor expor o assunto da melhor maneira possível, estabelecendo um vínculo necessário em relação às futuras escolhas profissionais. A Trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. “Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topografia, a Engenharia Civil etc”(Paiva, 2003,p. 113).

Uma das maiores dificuldades encontradas por alunos do Ensino Médio, ao que diz respeito à Trigonometria, é quanto ao fato da memorização de fórmulas. Entretanto, a não memorização levaria a perda de tempo para deduzi-las durante as provas, o que tornaria a situação impraticável.

Nesse sentindo pode-se utilizar o Teodolito para auxiliar a aula de trigonometria de forma dinâmica, onde os alunos possam manuseá-lo e interpretar os dados obtidos.

O Teodolito é um aparato óptico, muito utilizado por engenheiros, topógrafos entre outros. Foi criado por Ignácio Porro por volta de 1835, para medir ângulos verticais e horizontais, também é um instrumento que determina as dimensões e forma da terra, facilitando os cálculos de distância e alturas, consentindo a elaboração de mapas e escalas. Existem uma grande variedade de teodolitos para usos variados de exatidão e obtenção de medidas de ângulos.

Figura 63: Teodolito.

Fonte: https://bit.ly/2NW2Pj4

Seu uso tem como objetivo demonstrar aplicações práticas da Trigonometria a fim de enfatizar os conceitos da Geometria, bem como desenvolver o entendimento e suas utilizações, levando o estudante a relacionar o conteúdo com a realidade, estimulando-o a construir seu próprio conhecimento, evitando a memorização de fórmulas.

É muito difícil as escolas possuírem um teodolito profissional. Para contornar isso, o professor poderá desenvolver, junto com os alunos, a construção de um teodolito caseiro.

Etapa 01: Construindo um Teodolito.

Objetivo: Possibilitar aos alunos possuírem um teodolito que poderá ser usado nas práticas de ensino, na qual o aluno assimilará a teoria vista em sala com a utilização do mesmo.

Procedimentos: Uma maneira de construir um teodolito caseiro poderá ser da seguinte forma:

(i) Obter um círculo trigonométrico de 180°. (De preferência que seja de madeira, por ser mais resistente.)

(ii) Confeccionar uma base de madeira, com altura em que o professor achar conveniente, como 1m por exemplo, a fim de que o círculo trigonométrico fique apoiado sobre ela.

(iii) Fixar um nível na base a fim de que se diminua a margem de erro.

(iv) Fixar um material em forma de tubo, fino e de boa resistência, como uma antena, por exemplo. (Com o auxílio de um parafuso fixar o ponto central do tubo à base central do transferidor como mostra a Figura: 64.)

Figura 64: Teodolito caseiro.

Etapa 02: Usando o Teodolito para medir a altura da porta da sala.

Objetivo: Fazer com que os alunos saibam manusear o teodolito caseiro e, através das medidas observadas, possam utilizar os conceitos de seno, cosseno ou tangente para realizar medições.

Procedimento: Verificar se o teodolito está nivelado. Calcular a distância da porta até o teodolito com o auxílio de uma trena. Olhar através da antena a parte mais alta da porta e verificar qual o ângulo formado no círculo trigonométrico. Dessa maneira, o aluno terá projetado o esquema geométrico da Figura 65.

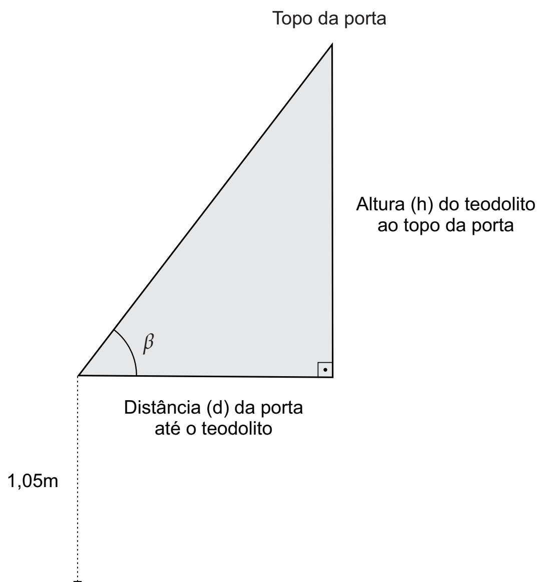

Figura 65: Esquema ilustrativo.

Nesse momento o aluno terá as seguintes informações: O ângulo observado e a distância d. Assim, ele terá condições suficientes para encontrar a medida da altura h através do seno, cosseno ou tangente mediante as medidas que possui.

No caso da situação acima, h é o cateto oposto a β; possivelmente não será um ângulo notável e para isso o aluno deverá recorrer à tabela trigonométrica ou a uma calculadora científica, e terá a distância d, cateto adjacente a β. Nesse momento espera-se que o aluno perceba que a relação que utilizará será a tangente. Dessa forma ficará:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{d} \quad \Rightarrow \quad h = d \cdot \operatorname{tg}\beta.$$

Para se concluir o cálculo o aluno deverá somar $1,0$ m à medida h, pois o teodolito foi construído a $1,0$ m do solo.

Após o resultado os alunos poderão verificar a altura da porta com uma trena e comparar com o resultado que obtiveram. O professor poderá intervir para que assim possam verificar a margem de erro.

O professor poderá sugerir diversas situações a fim de que os alunos obtenham medidas através do uso do teodolito, utilizando as outras relações de seno e cosseno.

Espera-se que com essa prática o aluno adquira uma visão mais abrangente sobre os conceitos de Trigonometria, desenvolvendo sua concentração e a habilidade de resolver problemas que envolvam esses conceitos.

4.4 Poliedros

As dificuldades encontradas pelos professores em ensinar os conceitos matemáticos são notórias. Por isso, cada vez mais se faz necessária a busca por maneiras diferentes de planejar uma aula a fim de que a mesma seja mais dinâmica e interativa.

Segundo Santos (1998), os problemas analisados no ensino de Geometria, têm sua origem na formação dos educadores, sendo excessiva a valorização do livro didático, que aborda a Geometria em apenas um capítulo ao final do livro, sendo fragmentado e totalmente desvinculado da Aritmética e da Álgebra.

Nesse sentido, faz-se necessário promover aulas que abordem os conceitos da Geometria e possam amenizar as dificuldades em entender seus conceitos básicos e suas aplicações.

Uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos quando chegam em assuntos da Geometria Espacial é a de ter uma visão tridimensional dos objetos estudados. Por exemplo, ao estudar os poliedros, eles têm dificuldade de identificar a quantidade de vértices, arestas e faces.

Nesse sentido, seguiremos uma proposta com uso de materiais concretos a fim de que o aluno consiga sanar essa dificuldade.

Para a apresentação da metodologia utilizada nos poliedros utilizaremos palitos de dente e jujubas por ser um material acessível e de baixo custo. Dessa forma facilitará o trabalho e o manuseio com o material.

Etapa 1: Construindo um tetraedro com palitos de dente e jujuba.

Objetivo: Fazer com que os alunos consigam ter uma visão tridimensional do tetraedro verificando facilmente seus elementos.

Procedimento: As jujubas representam os vértices e os palitos de dente as arestas. Instigar os alunos a fim de que eles digam quantos palitos e quantas jujubas serão necessários. Após isso o professor entrega a cada grupo 4 jujubas e 6 palitos e solicita que os mesmos sigam os seguintes passos:

(i) Formar um triângulo que servirá de base do tetraedro. Para isso eles precisarão encaixar duas jujubas nas extremidades de um palito, em seguida encaixar um palito em cada uma das jujubas. Esses dois palitos serão fixados em outra jujuba. Dessa forma está feito o triângulo base.

(ii) Em cada uma das jujubas espetar um palito de modo que os três palitos se encontrem e fiquem fixos em outra jujuba.

Dessa forma o tetraedro estará construído.

Figura 66: Tetraedro com jujubas.

Após a construção solicitar aos alunos que preencham a tabela abaixo:

Nome do Poliedro	N° de vértices	N° arestas	N° de faces	$V - A + F = 2$
Tetraedro	4	6	4	4 - 6 + 4 = 2

Dessa maneira os alunos conseguirão fixar a quantidade de vértices, arestas e faces justificando o nome do poliedro pela quantidade de faces e verificar a relação de Euler para esse tipo de poliedro convexo.

Etapa 2: Construção do Hexaedro.

Objetivo: Fazer com que o aluno consiga construir um hexaedro e ver seus elementos principais como vértices, arestas e faces, verificando a relação de Euler.

Procedimento: Com a construção do tetraedro, os alunos possivelmente começarão a ter uma maior facilidade na construção dos outros poliedros. Perguntar aos alunos porque o nome é hexaedro e como foi visto na construção do tetraedro isso se dá pelo número de faces que no caso são 6. Logo depois, perguntar aos alunos qual a forma poligonal de cada face, que no caso é um retângulo ou um quadrado caso o poliedro seja regular. Ao identificar isso, o professor irá perguntar quantas jujubas e quantos palitos serão necessários para essa construção. Caso os alunos não saibam, o professor poderá justificar a quantidade de 8 jujubas e 12 palitos, já que no hexaedro se tem 8 vértices e 12 arestas. O procedimento para a construção obedecerá a seguinte sequência: formar um quadrado utilizando 4 jujubas e 4 palitos, em cada jujuba fixar um palito no mesmo sentido vertical, fixar uma jujuba na extremidade de cada palito e, por fim, interligar estas jujubas com palitos.

Figura 67: Hexaedro com jujubas.

Após a construção os alunos poderão preencher a tabela abaixo:

Nome do Poliedro	N° de vértices	N° arestas	N° de faces	$V - A + F = 2$
Hexaedro	8	12	6	8 - 12 + 6 = 2

O professor poderá utilizar essa metodologia para a construção de outros poliedros, porém terá que estabelecer a sequência com que será construído cada um a fim de tirar possíveis dúvidas que venham a existir na construção dos mesmos por parte dos alunos. Durante a construção dos poliedros, é importante que os alunos visualizem a forma e a quantidade de vértices, arestas e faces, como também, que eles determinem o nome do poliedro e verifiquem a relação de Euler.

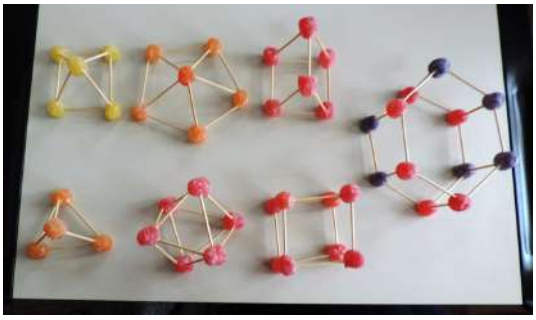

Figura 68: Poliedros com jujubas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O gosto pela Matemática está relacionado com a forma que se ensina. Se faz necessária a utilização de mecanismos e habilidades que propiciem uma forma lúdica e contextualizada de se ensinar. Os materiais concretos não são a única forma de se fazer isso, mas constituem uma ferramenta que possibilita ao aluno, no processo de ensino e aprendizagem, construir o seu conhecimento, e colocar em prática os conceitos apresentados pelo professor, que quando bem planejadas e executadas propiciam um conhecimento mais satisfatório.

Nós educadores devemos ter em mente que, independentemente do recurso metodológico que utilizemos em sala, ele não é garantia de uma aprendizagem significativa, pois a aprendizagem acontece mediante o cumprimento de uma série de critérios que quando não são bem planejados torna a aula igual a tantas outras. É necessário que o professor seja o mediador nesse processo destacando inicialmente a fundamentação teórica a fim de que o aluno possa estabelecer uma conexão da teoria matemática e o material utilizado estabelecendo uma abordagem dinâmica e construtiva do conhecimento possibilitando ao aluno descobertas e verificações do assunto trabalhado previamente de forma teórica.

Como educadores podemos perceber facilmente as dificuldades enfrentadas pelos alunos em aprender os assuntos abordados, e isso nos faz pensar em diversas estratégias metodológicas a fim de que o educando adquira o conhecimento necessário. A utilização de materiais concretos é uma metodologia que permite sairmos um pouco do ensino tradicional e buscar uma melhor participação do aluno, aumentando o seu interesse e consequentemente a aprendizagem, já que se conseguem perceber exemplos mais concretos.

Acreditamos que a utilização dos materiais concretos pelos professores de Matemática durante as aulas tende a contribuir de forma significativa para uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos, pois possibilita uma aproximação da teoria Matemática verificada com a utilização de ferramentas concretas para a constatação das teorias matemáticas estudadas em sala.

A realização desse trabalho teve como motivo principal a utilização de materiais concretos que pudessem contribuir para o ensino de Geometria, possibilitando ao aluno uma melhor compreensão, já que o uso dos mesmos propiciam uma interação entre os alunos e estimulam o raciocínio lógico.

No decorrer do trabalho, foi possível observar que os materiais concretos utilizados são ferramentas úteis no processo de ensino, pois possibilita ao aluno fazer uma relação direta do que está sendo ensinado na teoria com a prática apresentada nas sequências didáticas. As sequências didáticas propostas no capítulo 4 têm por finalidade apresentar estratégias relacionadas ao ensino de Geometria possibilitando estabelecer uma conexão direta das teorias matemáticas apresentadas em sala com os materiais concretos. Dessa forma, os alunos poderão vivenciar maneiras diferentes de se obter áreas, volumes, perímetros, diagonais, número de vértices, arestas, faces, seno, cosseno, tangente, raio, diâmetro, dentre outros.

A utilização dessa metodologia possibilita ao aluno obter conhecimentos e criar estratégias suficientes a fim de que ele possa desvendar a Matemática de uma forma dinamizada e criativa, melhorando o envolvimento e a criticidade do aluno durante as aulas, tornando assim a sala de aula um ambiente de criação e descobertas.

Desejamos que este trabalho venha a contribuir na metodologia do ensino de Geometria, tornando o ensino aplicável e dinâmico possibilitando ao aluno se tornar parte neste processo de ensino e aprendizagem.

Embora existam várias discussões a respeito do uso de materiais concretos no Ensino de Matemática, vale destacar que esse é mais um recurso didático que os professores podem utilizar e jamais substituirá as formalidades que temos na Matemática como definições, axiomas, teoremas, demonstrações, corolários etc.

REFERÊNCIAS

1 DRUCK, S. *Matemática não é problema. Boletim do Salto para o Futuro. Série Matemática não é problema, TV Escola*. 2017. Disponível em: <http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/150311Matematicaproblema.pdf>.

2 ABREU, M. D. P. de. *Laboratório de Matemática: um espaço para a formação continuada do professor*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 1997.

3 BRASIL. PIBID - programa institucional de bolsas de iniciação à docência. 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/pibid>. Acesso em: 20 jun. 2019.

4 TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Didática de Matemática: como dois e dois: a construção da Matemática*. São Paulo: FTD, 1997.

5 LORENZATO, S. *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas - São Paulo: Autores Associados, 2010.

6 ANTUNES, C. *Como desenvolver as competências em sala de aula*. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2000.

7 MONTESSORI JR., M. M. *Educação para o Desenvolvimento Humano. Para entender Montessori. Trad. de Leonora Figueiredo Corsino.* Rio de Janeiro: OBRAPE, 2013.

8 LORENZATO, S. *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas: Autores Associados, 2006.

9 CARVALHO A.M.P.; GIL-PÉREZ, D. *Formação de Professores de Ciências: tendências e inovações*. São Paulo: Cortez, 2006.

10 PAIVA, M. *Matemática, Volume único*. São Paulo: Moderna, 2003.

11 NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

12 LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

13 OLIVEIRA, L. T. F. de. *Habilidades espaciais subjacentes às atividades de discriminação e composição de figuras planas*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Educação)) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1998.

14 SANTOS, S. M. P. dos. *O lúdico na formação do educador*. 5^a edição. Rio de Janeiro: Vozes, 1998.