UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

JOSÉ VICENTE FERREIRA JÚNIOR

# A FÓRMULA DE CARDANO COMO FERRAMENTA AUXILIAR NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS.

Abaetetuba - PA
2019

JOSÉ VICENTE FERREIRA JÚNIOR

# A FÓRMULA DE CARDANO COMO FERRAMENTA AUXILIAR NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS.

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rômulo Correa Lima

Abaetetuba - PA

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

F383f Ferreira Júnior, José Vicente
A Fórmula de Cardano como ferramenta auxiliar na resolução de equações cúbicas / José Vicente Ferreira Júnior. — 2019.
xiii, 97 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Rômulo Correa Lima
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Campus Universitário de Abaetetuba, Universidade Federal do Pará, Abaetetuba, 2019.

1. História da matemática. 2. Equações do terceiro grau. 3. Fórmula de Cardano. I. Título.

CDD 510

JOSÉ VICENTE FERREIRA JÚNIOR

**A FÓRMULA DE CARDANO COMO FERRAMENTA AUXILIAR NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES CÚBICAS.**

Dissertação submetida ao corpo docente do programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) do campus de Abaetetuba da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Aprovado em: 27/11/19

Conceito: EXCELENTE

**BANCA EXAMINADORA**

Prof. Dr. Rômulo Correa Lima

(PROFMAT/UFPA - Orientador)

Prof. Dr. Manuel de Jesus dos Santos Costa
(PROFMAT/UFPA – Membro Interno)

Prof. Dr. Amadeu Bandeira de Souza

(IFPA – Membro Externo)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, razão de toda a minha existência; a minha família, em especial a minha amada esposa e ao meu querido filho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS por me dá a vida, saúde e muita força para enfrentar todos os obstáculos e sempre me direcionar para o caminho certo.

À minha esposa Doralice, pelo amor, parceria, compreensão e incentivo durante todos os momentos do curso, meu sincero muito obrigado.

Ao meu filho Davi por me inspirar a sempre seguir em frente diante das dificuldades.

Aos meus pais José Vicente e Maria da Guia pela educação que me passaram e pelo exemplo de vida.

Aos professores do curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da UFPA Campus de Abaetetuba - PA, pela amizade, paciência e pelo conhecimento compartilhado, em especial aos professores Dr. Renato Fabricio Costa Lobato e ao Dr. Rômulo Correa Lima, pela atenção e competência demonstrada em relação a coordenação do curso.

À sociedade Brasileira de Matemática – SBM e aos professores do IMPA pelo oferecimento deste curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Aos meus colegas da turma de mestrado de 2018 da UFPA Campus Abaetetuba, pelo convívio e por toda troca de experiências que contribuíram para minha formação docente, por todos encontros em nossa preparação ao ENQ, onde todos compartilharam e contribuíram de maneira fundamental para que todas conseguissem suas aprovações.

Aos professores da banca, por terem dedicado parte do seu tempo para examinarem meu trabalho e trazerem sugestões para melhora – lo.

Aos meus professores do Ensino Médio em especial ao professor de Matemática Pedro Rosa pelo seu ensinamento, inspiração e apoio na minha carreira.

Aos meus diretores, coordenadores, colegas de trabalho, em especial a equipe de matemática do IFPA Campus Tucuruí pela colaboração e parceria durante essa jornada.

À minha família e amigos pelo apoio e compressão, principalmente nos momentos que me fiz ausente.

Enfim, a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram a realização deste trabalho, e não estão nominalmente citados.

## RESUMO

A matemática sempre esteve presente no dia a dia das pessoas, sendo, portanto, um instrumento fundamental para o entendimento do mundo e dos fenômenos que o rodeiam, além de contribuir no desenvolvimento intelectual e na formação de cidadãos conscientes e capazes de entender sua realidade. Porém no mundo contemporâneo tem-se identificado um problema que envolve o aprendizado de matemática por parte dos estudantes. É neste contexto que este trabalho tem por objetivo apresentar a aplicabilidade da fórmula de Cardano para os estudantes de ensino médio, através de um método algébrico para resoluções de equações polinomiais do terceiro grau tomando como universo o Conjunto dos Números Complexos. No âmbito metodológico o trabalho consistiu em uma pesquisa qualitativa, cuja análise baseou-se mais na interpretação das informações e discussões teóricas do que em indicadores estatísticos. Foram realizados também levantamento bibliográfico através de leituras, que refletem sobre a temática em questão. O estudo apontou para o fato de que o método de Cardano constitui-se em um instrumento a mais nas resoluções das equações cúbicas, apresentando uma estratégia diferente para conseguir resolver determinados problemas que envolvem equações cúbicas, o que consequentemente pode inserir o aluno ao estudo da matemática por meio da busca por fatos históricos, contribuindo também para a formação de cidadãos mais qualificados e conscientes do seu papel na sociedade.

**Palavras-chaves**: História da matemática, equações do terceiro grau, fórmula de Cardano.

**ABSTRACT**

Mathematics has always been present in people's daily lives, being, therefore, a fundamental instrument for understanding the world and the phenomena surrounding it, in addition to contributing to intellectual development and the formation of citizens conscious and capable of understand their reality. But in the contemporary world, a problem has been identified that involves learning mathematics by students. It is in this context that this work aims to present the applicability of Cardano's formula to high school students, through an algebraic method for resolutions of third-degree polynomial equations taking as a universe the Set of Complex Numbers. In the methodological scope, the work consisted of a qualitative research, whose analysis was based more on the interpretation of information and theoretical discussions than on statistical indicators. A bibliographic survey was also conducted through readings, which reflect on the theme in question. The study pointed to the fact that Cardano's method is an additional instrument in the resolutions of cubic equations, presenting a different strategy to solve certain problems involving cubic equations, which consequently, it can insert the student to study mathematics through the search for historical facts, also contributing to the formation of more qualified citizens and aware of their role in society.

Keywords: History of mathematics, third-degree equations, Cardano formula.

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE SIGLAS

| | |
|---|---|
| a.C | antes de Cristo |
| BNCC | Base Nacional Comum Curricular |
| d.C | depois de Cristo |
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio |
| PCNs | Parâmetros Curriculares Nacionais |

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $\neq$ | Diferente de |
| $i$ | Unidade Imaginária($i^2 = -1$) |
| $\in$ | Pertence |
| $\mathbb{R}$ | Conjunto dos números reais |
| $Re(z)$ | Parte real de um complexo |
| $Im(z)$ | Parte Imaginária de um complexo |
| $\mathbb{C}$ | Conjunto de números complexos |
| $\subset$ | Está contido |
| $\Leftrightarrow$ | Equivalente |
| $\mathbb{N}$ | Conjunto de números naturais |
| $\bar{z}$ | Média |
| $\lvert z \rvert$ | Valor absoluto (módulo) |
| $\geq$ | Maior ou igual que |
| $\leq$ | Menor ou igual que |
| $\theta$ | Teta |
| $\pi$ | Pi (3,14159265359...) |
| $\mathbb{Z}$ | Conjunto de números inteiros |
| $\omega$ | Ómega |
| $k$ | Capa |
| $\forall$ | Quantificador Universal (para todo) |
| $\sum$ | Somatório |
| $\partial$ | Derronde |
| $\lambda$ | Lambda |
| $\rho$ | Rô |
| $\beta$ | Beta |
| $\Delta$ | Delta |

# SUMÁRIO

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática sempre esteve presente no dia a dia das pessoas, sendo, portanto um instrumento fundamental para o entendimento do mundo e dos fenômenos que o rodeiam, além de contribuir no desenvolvimento intelectual e na formação de cidadãos conscientes e capazes de entender que a realidade, precisa dos números. É pensando na importância da matemática para formação humana e especificamente para a formação escolar básica, que a Base Nacional Comum Curricular define o conhecimento matemático como necessário “seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais” (BNCC,2017, p. 265).

Porém no mundo contemporâneo temos identificado um problema que envolve o aprendizado de matemática por parte dos estudantes. Esta problemática relaciona-se com a metodologia de ensino aprendizagem, que muitas vezes é conteúdista e mecânica, sem possibilitar ao estudante refletir sobre o que se está aprendendo.

> Ensinar e aprender matemática não são tarefas fáceis, afinal os obstáculos contemplados para o desenvolvimento do ensino, bem como, do aprendizado são evidenciados desde os primeiros anos. Neste sentido, qualquer atividade desenvolvida, como proposta propulsora no processo de ensino e aprendizagem de matemática, levando o discente a uma melhor compreensão e motivando-os, é muito bem-vinda. (SILVA, 2018 p. 25)

No ensino médio, especificamente no 3° ano onde abordamos as equações algébricas, depara–se com vários problemas, dentre eles o tempo, fator importante, no processo de aprendizagem e fixação dos conteúdos. Ensinar matemática requer habilidade na utilização das estratégias, motivação nos exemplos práticos da realidade do cotidiano e da vivencia dos alunos para tentar de alguma maneira uma participação mais efetiva deles:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BNCC, 2017, p. 265)

Diante desse cenário, procura-se tornar o ensino das equações algébricas em especial as cúbicas mais atrativo, para uma maior adesão dos alunos, inserindo o contexto histórico e apresentado uma fórmula fechada para a obtenção das raízes dessas equações, a fórmula de

Cardano, com isso, amplia se ainda mais as possibilidades de se resolver essas equações, que se dará através de resoluções de questões aplicando diretamente na fórmula ou fazendo substituições necessárias para adaptar as equações e obter os resultados, pode-se também confirmar esses resultados, através de softwares matemáticos, como por exemplo: Geogebra, Desmos, Mathtype, Matlab entre outros, facilitando o entendimento dessas equações, usando animações desses softwares como recurso didático no ensino aprendizagem dos alunos.

Para compreender melhor o comportamento dessas funções que envolvem as equações cúbicas, é necessário a fundamentação de alguns conteúdos e a prática de vários exercícios. É neste contexto, que se insere a problemática deste trabalho. Levando em conta as dificuldades de aprendizagem do ensino de matemática por parte dos estudantes, objetivando estudar a aplicabilidade da equação de terceiro grau com o método de Cardano como ferramenta auxiliar na obtenção das raízes no ensino médio.

No intuito de chegar aos objetivos, propõem-se abrir mão de alguns procedimentos metodológicos. Isso não implica no abandono (e nem desqualificação) de abordagens quantitativas para coleta e sistematização de dados. O levantamento bibliográfico possibilitou a reflexão sobre as dificuldades de aprendizado da Matemática especificamente das equações, em especial a do 3º grau, no ensino médio. Para assim propor de forma mais didática, o entendimento da fórmula de Cardano e sua aplicabilidade no cotidiano.

Essa dissertação está estruturada em cinco capítulos. No primeiro capítulo é feito uma introdução a respeito do tema, um breve relato da construção e a forma como será desenvolvida a implementação da fórmula de Cardano no ensino médio no decorrer dos próximos capítulos.

No segundo capítulo analisa – se o contexto histórico da equação de terceiro grau, e todo o processo de desenvolvimento na construção de sua resolução. Para isso usa-se as referencias em Garbi (2010); Boyer (1996); Eves (2008). Esses autores mostram a importância que a solução das equações cúbicas tivera a época. Segundo Eves (2008, p. 307) Cardano foi um dos homens mais talentosos e versáteis de seu tempo.

No terceiro capítulo será feito uma abordagem dos principais assuntos que servirão de base e fundamentação teórica para o desenvolvimento das equações algébricas, em especial as cúbicas. As referências utilizadas neste tópico também retomarão reflexões sobre os fundamentos da matemática contextualizando as equações dentro do estudo da álgebra e sua importância para o ensino médio (IEZZI, 2013; LIMA et al, 2006).

No quarto capítulo, apresenta-se de fato a demonstração da fórmula de Cardano, algumas de suas soluções para determinadas equações cúbicas e também será apresentado a solução dada por Moreira (1987) quando ainda tinha apenas 14 anos e publicada em 1994.“A história da solução da equação do terceiro grau tem vários aspectos interessantes, em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente para estudo e discussão entre professores, alunos e Matemática”.(LIMA, 1987, p. 10).

No quinto capítulo, aplica-se a fórmula de Cardano em algumas equações cúbicas presentes nos principais livros didáticos do ensino médio, artigos e de algumas dissertações, determinando assim suas raízes e construindo-se os seus respectivos gráficos com o auxílio do software matemático Geogebra, que possibilita uma melhor visão do comportamento e analise para essas funções que possuem equações cúbicas.

Conclui-se que a aplicabilidade da formula de Cardano consiste em um instrumento a mais nas resoluções das equações cúbicas, apresentando uma estratégia diferente para conseguir resolver determinados problemas e consequentemente oportunizando ao aluno o estudo da matemática por meio da busca por fatos históricos, contribuindo também para a formação de cidadãos mais qualificados.

# 2 CONTEXTOS HISTÓRICOS

Ao longo da história com o descobrimento e a evolução da escrita, os registros matemáticos passaram a ser realizadas pelas civilizações, como por exemplo, os egípcios, gregos babilônios, árabes e hindus. Ao mesmo tempo, ajudou no desenvolvimento da matemática despertando o fascínio que os matemáticos tinham em resolver equações. E com o passar dos séculos cada civilização, cada matemático, cientista, filosofo e outros, também contribuíram para a resolução das equações, incluindo-se as equações cúbicas.

## 2.1 A Matemática dos mesopotâmios e egípcios

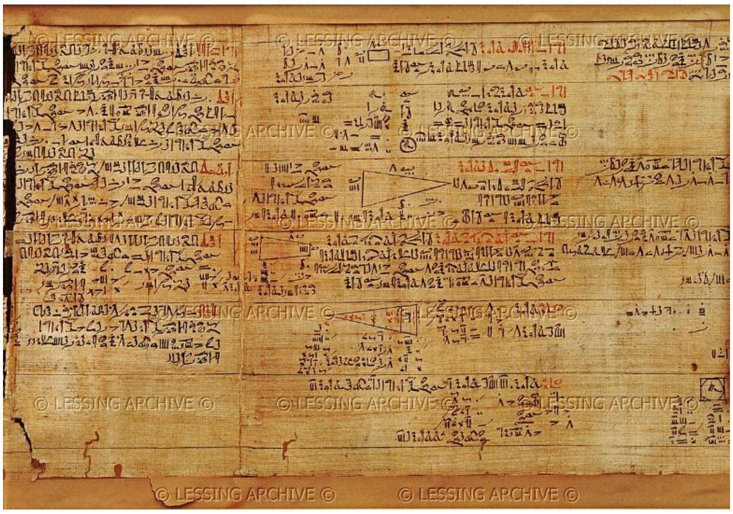
Segundo Garbi (2010, p.09) registros encontrados no século XIX indicam que em torno de 1700 a. C na Babilônia mostravam tentativas para solucionar equações do terceiro grau. Esses registros esboçavam em tabletes de barro cozido problemas matemáticos com objetivo de resolver tais equações. Os matemáticos e astrônomos babilônicos por terem conhecimento sobre a propriedade geral dos triângulos retângulos (conhecido hoje por teorema de Pitágoras) já resolviam equações do primeiro e segundo grau e calculavam áreas e volumes de figuras geométricas. Nessa ocasião as descobertas matemáticas não aconteciam de maneira indutiva, de tal modo sendo auxiliados por algum raciocínio dedutivo não formalizado.

Da mesma forma que as equações de segundo grau, de acordo com Souza (2013, p.13) os babilônios utilizavam uma tábua com os valores de $n^3 + n^2$ para $n$ variando de 1 a 30. De tal maneira sendo aplicada para resolver equações da forma:

$$x^3 + px^2 = q \tag{1}$$

A matemática egípcia também contribuiu para o desenvolvimento de resolução, mesmo não usando a simbologia algébrica moderna. Não sabiam resolver equações de 1º grau pelos nossos métodos, mas utilizavam meios que lhe deixavam encontrar a resposta certa, tendo como prova através de documentos antigos chamados: Papiro de Ahmes (ou de Rhind) que possui cerca de 1650 a. C. e o Papiro de Moscou cerca de 1850 a. C. (GARBI, 2010, p. 11) registros mais antigos encontrados até hoje. Esses papiros apresentam problemas de Aritmética e Geometria em que nota-se equações de 1º grau, como mostra na figura (1). De acordo com Boyer (1996) o as informações que os papiros trazem é quase todo prático e o objetivo principal nas questões eram cálculos. E a parte teórica tem como por objetivo facilitar a técnica e não a compreensão.

Figura 1 - Parte do papiro de Rhind exposto em Londres.



https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html

## 2.2 O domínio da matemática grega

O grande matemático grego Pitágoras (540 a. C.) contribuiu para o campo da Geometria, permitindo um grande avanço no desenvolvimento da matemática. Pitágoras comprovou que em um triangulo retângulo vale a relação

$$a^2 + b^2 = c^2, \tag{2}$$

apresentado na Europa uma equação do segundo grau, porém com um atraso de pelo menos 1.200 anos já havia acontecido na Babilônia.

Um dos processos geométricos foi representado por segmentos de retas para a resolução de equações de segundo grau e até mesmo a de terceiro grau. Entretanto acabaram encontrando um problema para resolver a equação cúbica. A duplicação do cubo, ou seja, determinar a aresta de um cubo cujo o volume é o dobro do volume de um cubo dado.

Outro matemático grego que contribuiu para as soluções das equações foi Euclides (em torno de 300 a. C.), autor de "**Os Elementos"**, uma de suas obras mais importantes e fundamentais para a matemática.

> Os Elementos, escritos em 13 livros, realizaram o prodígio trabalho de sistematizar os conhecimentos da Geometria elementar, de forma rigorosa e dedutiva, **partindo de um número mínimo de definições e de verdades aceitas sem provas.** A ideia básica dos Elementos influenciou toda a produção cientifica posterior até nossos dias e ele é o mais antigo livro-texto que ainda continua em vigor atualmente. (GARBI 2010, p.19).

Apesar dos gregos transformarem os estudos da Geometria e não terem aprofundado seus conhecimentos na aritmética, Euclides apresentou teorias e colocou conceitos que foram fundamentais na solução de equações de segundo grau. O domínio da matemática que a Grécia tinha conquistado ao longo dos tempos através dos seus grandes matemáticos, acabou quando o Império Romano conquistou o território grego e junto o aumento do cristianismo. De modo que o oriente resistiu a invasão dos romanos tendo assim a vantagem que continuar desenvolvimento nos estudos da matemática.

### 2.3 A contribuição árabe e indiana

Os califas queriam transformar Bagdá construída nas margens do rio Tigre em uma nova Alexandria. Os elementos foram traduzidos para o árabe, permitindo que a Europa reencontrasse os ensinamentos perdidos de Euclides e os mesmo fossem ensinados em uma escola cientifica. Com uma excelente estrutura obras importantes foram guardadas da Antiguidade Clássica.

Essa estrutura construída ficou conhecida como Casa da Sabedoria, onde recebeu muitos sábios dentre eles o matemático e astrônomo Abu-Abdullah Muhamed ibn-Musa al-Khwarizmi, responsável por inserir o sistema hindu de numeração decimal, conhecido hoje como algarismos de zero a nove. Al-Khwarizmi influenciou a matemática na Europa através de suas obras e ensinamentos no final dos séculos da Idade Média.

Os hindus já desenvolviam a sua matemática antes mesmo do aparecimento do Impero mulçumano. E em torno de 450 d. C. com as invasões persa e macedônica, a Índia se tornou forte na Matemática e Astronomia. Nesse período surgiram famosos matemáticos e astrônomos o mais conhecido dentre eles, foi Bhaskara com seus avanços em álgebra, no estudo das equações.

Embora Bhaskara não ser o responsável pela descoberta da fórmula que recebe o seu nome, foi ele segundo Silva (2018, p.14) quem difundiu a formula geral da solução das equações do segundo grau e que séculos depois seria usada depois para a equação de terceiro grau.

Dada equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ com\ a, b\ e\ c \in \ \mathcal{R}\ e\ a \neq 0 \tag{3}$$

a fórmula da equação do segundo grau garante que suas raízes sejam dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Observa-se duas constatações importantes transcorrem da fórmula de Bhaskara, segundo Garbi (2010, p.27), primeira constatação é de que equações acima do 1ºgrau podiam ter mais de uma solução e a segunda é que em alguns casos, pode-se acontecer que a fórmula extraia a raiz quadrada de um número negativo.

Com a solução das equações de segundo grau, os matemáticos pelo fascínio em resolver situações matemáticas, os levou a resolver as equações de 3ºgrau. O poeta e cientista árabe Omar Khayyam (1050-1122), o primeiro a trabalhar com todas as equações cúbicas, mas que tivessem raiz positiva. De acordo com Souza (2013, p.14) Khayyam concluiu que não era possível uma solução aritmética para as equações cúbicas gerais, já que seu método consistia em construir cônicas que se intersectassem. Por tanto as equações de 3ºgrau continuava a ser um desafio para os matemáticos.

## 2.4 A matemática italiana em evidência

Por volta da metade do século XV, iniciou o período Renascentista. Um momento de explosão criativa e produtiva na área das artes plásticas, literatura, arquitetura e ciências. Segundo Lima (1987, p.12) o foco foi na Itália, onde surgiram vários gênios, como Leonardo da Vinci, Scipione Del Ferro, Girolamo Cardano, Niccolo Tartaglia, Ludovico Ferrari e Galileu Galilei.

De acordo com Garbi (2010, p.30) Leonardo Pisa (1175-1250) convencido que o método indo-arábico era o melhor de todos, devido suas viajem para o Mediterrâneo, Egito, Síria, Grécia, Sicília, França, Constantinopla e que parte da sua juventude esteve na África, permitiu estudar vários dos sistemas aritméticos existentes.

Com fama de grande matemático o Imperador Frederico II promoveu uma competição para testar a habilidade de Leonardo Pisa, que persistia em resolver a equação pelos métodos de Euclides um segmento $x$ que satisfizesse a equação

$$x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \tag{5}$$

Então "provou-se que a Equação (5) não poderia ser resolvida utilizando régua e compasso, porém chegou a uma resposta correta até a 9ª casa decimal: 1,3688081075". (GARBI, 2010, p.30).

Os matemáticos italianos promoviam competições entre si para resolver problemas para terem mais visibilidade. Assim a busca para solucionar as equações cúbicas só aumentaram, que acabou resultando no aperfeiçoamento delas.

Outro matemático de destaque foi Frei Luca Pacioli (1455-1514) em 1494, tinha interesse pela Aritmética. Porém cometeu vários erros em seus trabalhos ao afirmar em um deles que a equação de 3º grau não poderia ser resolvida, isso trouxe como resultado o interesse de vários matemáticos a resolver tais equações.

O primeiro a se dispor a encarar o desafio foi o matemático Scipione Del Ferro (1465-1526), professor pouco conhecido pois não publicava suas descobertas. Consequentemente seus esforços lhe resultaram como o primeiro a encontrar a solução que não fosse geométrica para a equação de 3ºgrau. Sua equação

$$x^3 + px + q = 0 \tag{6}$$

Receio de ser desafiado para uma competição, preferiu não publicar sua descoberta, para assim ter uma vantagem sobre seu adversário. Segundo Santos (2013, p. 7) essas competições sugeriam que cada competidor apresentasse problemas ao adversário que tinham que ser resolvidos em um prazo estabelecido pelas partes e que ao final deste prazo se declarasse vencedor aquele com o maior número de problemas resolvido. Essas competições eram realizadas em praças públicas, igrejas ou na corte de algum nobre ou realeza apreciador do conhecimento.

Com essa vantagem em mãos Del Ferro preferiu revelar apenas para seu discípulo e genro Annibale Della Nave e seu aluno Antônio Maria Fiore. Com a morte de seu professor Fiore apropriou-se da descoberta de Del Ferro para conseguir fama entre os grandes matemáticos e decidiu desafiar Niccolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia, já bastante conhecido por ter ganho outras disputas.

De acordo com Garbi (2010, p.35) Tartaglia Figura (2) teve uma infância muito difícil. Nascido em Brescia na Itália, presenciou a invasão por tropas francesas, que o atacaram deixando quase morto. Aos cuidados de sua mãe, ele acabou adquirindo uma cicatriz na boca que dificultou a sua fala, então o apelido Tartaglia que em italiano quer dizer gago. Sem condição de frequentar a escola, passou a estudar em casa com ajuda de livros que encontrava e frequentava o cemitério onde escrevia com carvão sobre as lapides dos túmulos, pois não tinha dinheiro para comprar papel, pena e tinta. Quando adulto se tornou professor de ciências em Veneza, Verona, Vicenza e Bréscia de onde conseguia seu sustento.

Figura 2 - Niccolo Fontana (Tartaglia) (1500-1557)

Fonte: O Romance das Equações Algébricas, p.36.

Tartaglia havia descoberto que Fiore possuía um método para solucionar equações cúbicas.

Por sentir-se ameaçado dedicou-se a resolver as equações do tipo

$$a^3 + bx = c \tag{7}$$

e

$$ax + b = x^3 \tag{8}$$

O método encontrado por Tartaglia, Fiore não tinha conhecimento, logo o fez perder a disputa, já que Tartaglia resolveu todos os problemas propostos. “Na época, porém coeficientes negativos praticamente não eram utilizados, assim havia tantos tipos de equações cúbicas quantas são as de possibilidades de coeficientes positivos e negativos” (BOYER, 1996, p. 194). Tartaglia não tinha o costume de divulgar seus métodos de resolução, entretanto, a informação sobre a descoberta de Tartaglia acabou chegando ao conhecimento de seu amigo Girolamo Cardano. O motivo que deu início a um grande duelo matemático.

**2.5 Cardano e Tartaglia: o duelo matemático**

Cardano Figura (3) nasceu em Pavia na Ítala. Além de matemático Cardano era médico, astrônomo, astrólogo, filosofo, jogador inveterado. Recebia castigos de seus pais, que chegavam a deixa-lo muito doente. Amigo de Leonardo Da Vinci, o mesmo conduziu a educação de Cardano. Em uma de suas obras se descreve como desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso, solitário, obsceno, desonesto, vicioso e portador de total desprezo pela religião.

Figura 3 - Girolamo Cardano (1501-1576)

Fonte: O Romance das Equações Algébricas, p.34.

Cardano ao saber da descoberta da resolução da equação tentou convencer Tartaglia a lhe mostrar seu método para que pudesse publicar em seu livro. Na época ele estava escrevendo *A Pratica Arithmetica e Generalis*. Mesmo insistindo Tartaglia negou o pedido de Cardano, que acabou sendo insultando. Depois de muita insistência e jurar que não publicaria a descoberta, Tartaglia contou o seu método em forma de versos, pois o mesmo iria publicar futuramente.

Após alguns anos Cardano procurou e encontrou um manuscrito de Del Ferro onde continha os mesmos resultados de Tartaglia. Após essa descoberta, imediatamente publicou o livro Ars Magna em 1545, em que não só constava a solução de Tartaglia sobre a equação cúbica, mas também as equações de 4º grau.

Ao saber da publicação, Tartaglia imediatamente divulgou sua versão da história e denunciou Cardano por haver traído seu juramento sobre a bíblia. Logo um de seus discípulos Ludovico Ferrari, que inclusive foi o responsável pela descoberta da resolução da equação do 4º grau rebateu a acusação de Tartaglia, acusando-o de ter plagiado Del Ferro. Esse debate durou mais de um ano, até que Tartaglia propôs um desafio a Cardano, mas Ferrari foi quem compareceu para o duelo, que por fim não deixou claro quem foi o vitorioso.

Tartaglia acabou sendo dispensado pela universidade de Brescia, passando a morar em Veneza onde faleceu nove anos depois. Cardano se suicidou, o mesmo havia feito uma previsão do dia em que iria morrer.

# 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, busca-se apresentar os principais tópicos necessários para o desenvolvimento e aprendizado das resoluções de equações algébricas, em especial às cúbicas. Para isso será utilizado como referência os livros, Fundamentos de Matemática Elementar vol. 6 do Iezzi (2013), o livro A Matemática do Ensino Médio vol. 3 dos autores Lima et al (2006), Números Complexos, Polinômios, Equações Algébricas dos autores Neto et al (1982), Variáveis Complexas e Aplicações do autor Ávila (2000) e algumas dissertações sobre o tema.

## 3.1 Números complexos

Em 1545, Jerônimo Cardano, em seu livro Ars Magna, "A grande Arte", mostrou o método para resolver equações de terceiro grau que é hoje chamado de fórmula de Cardano. Bombelli (1526 – 1572), discípulo de Cardano, em sua "álgebra", aplicou a fórmula de Cardano à equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \tag{9}$$

obtendo,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Embora não se sentisse completamente à vontade em relação às raízes quadradas de números negativos (dizia que eram inúteis e sofisticadas), Bombelli operava livremente com elas, aplicando-lhes as regras usuais da álgebra.

No caso, Bombelli mostrou, usando o binômio de Newton, que

$$\begin{aligned}\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 &= 2^3 + 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.2.\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121}\end{aligned}$$

logo,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto, o valor de $x$ é $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Como 4 é realmente raiz da equação (9), a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos, embora se sentissem um pouco desconfortáveis com isso. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por $i$. Apenas no século XIX, quando Gauss (1787 – 1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece.

Em uma das obras de Gauss ele mostrou o Teorema Fundamental da Aritmética, princípio básico no seu estudo: "todo domínio de integridade em que fatoração é única é chamado hoje de domínio de integridade de Gauss." (BOYER, 1996, p.346)

### 3.1.1 Definição e forma algébrica

Sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária, com $i^2 = -1$, define-se um número complexo como sendo uma expressão da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. A parte real de $z$ será denotada por $Re(z) = a$ e a parte imaginária de $z$ será denotada por $Im(z) = b$. Se $b = 0$, $z$ será um número real. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, $z$ será um número imaginário puro.

Todos os números da forma $z = a + bi$ formarão o conjunto dos números complexos, que será denotado por $\mathbb{C}$. Como no número complexo $z = a + bi$, ao tomarmos $b = 0$, temos o número real $z = a$, o conjunto dos números reais está contido no conjunto dos números complexos, ou seja, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

### 3.1.2 Igualdade

Os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c\ e\ d$ reais, são iguais se, e somente se, suas partes reais forem iguais e suas partes imaginárias também forem iguais, isto é,

$$z = w \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c\ e\ b = d$$

### 3.1.3 Potência de $i$

Calculando as potências de $i$ com expoentes naturais, percebe-se uma sequência interessante:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 . i = (-1). i = -i$$

$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 . i = 1. i = i$$

$$i^6 = i^4 . i^2 = 1. (-1) = -1$$

$$i^7 = i^4 . i^3 = 1. (-i) = -i$$

$$i^8 = i^4 . i^4 = 1.1 = 1$$

Ou seja, o resultado das potências se repete a cada 4 valores consecutivos. Pode-se generalizar, tomando $n, k \in \mathbb{N}$:

• Se $n = 4k$, temos $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$;

• Se $n = 4k + 1$, temos $i^n = i^{4k+1} = (i^4)^k . i = 1^k . i = i$;

• Se $n = 4k + 2$, temos $i^n = i^{4k+2} = (i^4)^k . i^2 = 1^k . (-1) = -1$;

• Se $n = 4k + 3$, temos $i^n = i^{4k+3} = (i^4)^k . i^3 = 1^k . (-i) = -i$;

Deste modo, obtém-se $i^n \in \{1, i, -1, -i\}$, com $i^n = i^r$, onde $r$ é o resto da divisão de $n$ por 4.

### 3.1.4 Operações na forma algébrica

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c\ e\ d \in \mathbb{R}$. Para somar ou subtrair dois números complexos, basta somar ou subtrair as respectivas partes reais e partes imaginárias:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Para multiplicar dois números complexos, utiliza-se a propriedade distributiva:

$$z.w = (a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Definindo o conjugado de $z = a + bi$ como $\bar{z} = a - bi$. Note que:

$$z.\bar{z} = (a + bi).(a - bi) = a^2 - b^2 . i^2 = a^2 + b^2 \quad \in \mathbb{R}$$

Efetuando $z \div w$ com $w \neq 0$, utiliza-se o conjugado de $w$:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} . \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{ad + bc}{c^2 + d^2} i$$

*Teorema 1*:  Para todo $z \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$i)\ z + \overline{z} = 2.Re(z)$$

$$ii)\ z - \overline{z} = 2.Im(z).i$$

$$iii)\ z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

*Demonstração:*

Fazendo $z = a + bi$, tem-se:

$$i)\ z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2.Re(z)$$

$$ii)\ z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2.Im(z).i$$

$$iii)\ z = \overline{z} \Leftrightarrow (a + bi = a - bi) \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

*Teorema 2:* Se $z$ e $w$ são complexos, então:

$$i)\ \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$ii)\ \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$$

$$iii)\ \overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$$

$$iv)\ Se\ w \neq 0, \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$$v)\ \overline{\overline{z}} = z$$

$$vi)\ Se\ n\ é\ um\ inteiro\ positivo, \overline{z}^n = \overline{z^n}$$

*Demonstração:*

$i)$ Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c\ e\ d \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i,$$

$$\overline{z + w} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$$

$ii)$ Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c\ e\ d \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$z - w = (a - c) + (b - d)i,$$

$$\overline{z + w} = (a - c) - (b - d)i = (a - bi) - (c - di) = \overline{z} - \overline{w}$$

$iii$) Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, com $a, b, c\ e\ d\ \in\ \mathbb{R}$, tem-se:

$$z.w = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

$$\overline{z.w} = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z}.\overline{w}$$

$iv$) Se $w = c + di$, com $c$ e $d$ reais não nulos simultaneamente, tem-se:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c + di} = \frac{c - di}{c^2 + d^2}, \qquad \frac{1}{\overline{w}} = \frac{1}{c - di} = \frac{c + di}{c^2 + d^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}$$

daí,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z.\frac{1}{w}} = \overline{z}.\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z}.\frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$v$) Se $z = a + bi$,

$$\overline{\overline{z}} = \overline{(\overline{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

$vi$) Decorre da aplicação reiterada de $iii$)

### 3.1.5 Forma trigonométrica

Um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado como um ponto do plano, de coordenadas $(a, b)$ ou como um vetor $\vec{O}z$ de origem $O$ e extremidade $(a, b)$. A forma trigonométrica dos complexos permite obter uma interpretação geométrica da operação de multiplicação e com isso facilita a obtenção das raízes dos números complexos, através da fórmula de Moivre que será demonstrada nas próximas seções.

#### 3.1.5.1 Norma e módulo

Chama–se **norma** de um número complexo $z = a + bi$ ao número real não negativo

$$N(z) = a^2 + b^2 \tag{10}$$

Chama – se **módulo** ou **valor absoluto** de um número complexo $z = a + bi$ ao número real não negativo

$$|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho \tag{11}$$

3.1.5.1.1 Propriedades do módulo

*Teorema 3*: Se $z = a + bi$ é um número complexo qualquer, então:

$$i)\ |z| \geq 0$$

$$ii)\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$iii)\ |z| = |\overline{z}|$$

$$iv)\ Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$$

$$iv)\ Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$$

*Demonstração:*

$$i)\ \left.\begin{matrix} a^2 \geq 0 \\ b^2 \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Rightarrow |z| \geq 0$$

$$ii) |z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$iii) |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$$

$$iv)\ \left.\begin{matrix} a \geq 0 \ \Rightarrow a = |a| \\ a < 0 \Rightarrow a < |a| \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \leq |a| \tag{12}$$

por outro lado:

$$a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leq |z| \tag{13}$$

Comparando (12) e (13) vem:

$$a \leq |a| \leq |z|$$

$v)$ análoga à $iv)$

*Teorema 4*: Se $z = a + bi$ e $z = c + di$ são dois números complexos quaisquer, então:

$$i)\ |z.w| = |z|.|w|$$

$$ii)\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad (w \neq 0)$$

$$iii)\ |z+w| \leq |z| + |w|$$

*Demonstração:*

Conforme demonstrado nas operações algébricas e no *teorema 2* item $iii)$, tem–se:

$$z.\bar{z} = |z|^2 \ e\ \overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w},$$

respectivamente utilizando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, vem:

$$i)|z.w|^2 = (z.w).(\overline{z.w}) = (z.w).(\bar{z}.\bar{w}) = (z.\bar{z}).(w.\bar{w}) = |z|^2.|w|^2 \Rightarrow |z.w| = |z|.|w|$$

$ii)$ Nota-se inicialmente que:

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{c+di}\right| = \left|\frac{c-di}{(c+di).(c-di)}\right| = \left|\frac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \frac{\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2} = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1}{|w|}$$

então:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z.\frac{1}{w}\right| = |z|.\frac{1}{|w|} = \frac{|z|}{|w|}$$

$iii)$ A expressão $|z+w| \leq |z| + |w|$ é conhecida como desigualdade triangular, por exprimir uma propriedade que relaciona as medidas dos lados de um triângulo, “a soma dos comprimentos de dois lados de um triangulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado” segundo (ÁVILA, 2000, p.13) . Observa-se sua demonstração:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w).(\bar{z}+\bar{w}) = z.\bar{z} + w.\bar{w} + (z.\bar{w} + \bar{z}.w) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z.\bar{w} + \overline{z.\bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + z.\bar{w} + 2Re(z\bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

evidenciado no início segue a desigualdade desejada por uma simples extração de raízes.

3.1.5.2 Argumento

O argumento de um número complexo $z = a + bi$, não nulo, ao ângulo $\theta$ ver figura (4) é tal que

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho}\ e\ \sin\theta = \frac{b}{\rho}, \qquad em\ que\ \rho = |z|;$$

Nota-se que:

1º) a condição $z \neq 0$ garante $\rho \neq 0$

2º) existe ao menos um ângulo $\theta$ satisfazendo a definição, pois:

$$cos^2 \theta + \ sin^2 \theta = \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

3º) fixado o complexo $z \neq 0$, estão fixados $\cos\theta \ e \ \sin\theta$, mas o ângulo $\theta$ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo $2\pi$). Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

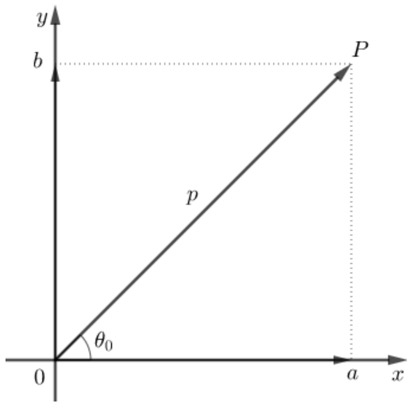
em que $\theta_0$, chamado **argumento principal** de $z$, é tal que $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ , $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$ $e \ 0 \ \leq \theta_0 < \ 2\pi.$ Frequentemente trabalha-se com $\theta_0$ chamando de simplesmente argumento de $z$.

3.1.5.3 Plano de Argand-Gauss

As noções de módulo e argumento tornam-se mais concretas quando representamos os números complexos $z = a + bi = (a, b)$ pelos pontos do plano cartesiano $xOy$ com a convenção de marcarmos sobre os eixos $Ox \ e \ Oy$, respectivamente, a parte real e imaginária de $z$.

Assim, a cada número complexo $z = (a, b)$ figura (4) corresponde um único ponto $P$ do plano $xOy$.

Figura 4 - Plano Argand – Gauss para números complexos




Fonte: Fundamentos da matemática elementar vol:6, p.21)

Nomenclatura:

$xOy =$ plano de Argand - Gauss

$Ox =$ eixo real

$Oy =$ eixo imaginário

$P =$ afixo de $z$.

A distância entre $P\ e\ O$ é o módulo de $z$:

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2} = \rho$$

e o ângulo formado por $\overrightarrow{OP}$ com o eixo real é $\theta_0$ tal que $\cos\theta = \frac{a}{\rho}\ e\ \sin\theta = \frac{b}{\rho}$; por tanto $\theta_0$ é o argumento principal de $z$.

Dado um número complexo $z = a + bi$ não nulo tem-se:

$$z = a + bi = p.\left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho}i\right)$$

e, portanto:

$$z = \rho.(\cos\theta + \mathrm{i}.\sin\theta) \tag{14}$$

Chamada **forma trigonométrica** ou **polar** de $z$.

A forma trigonométrica é mais prática que a forma algébrica para as operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

### 3.1.6 Potenciação e radiciação

As operações com números complexos na forma polar ou trigonométrica facilitam alguns cálculos, como a multiplicação e a divisão de complexos, enquanto que na forma algébrica o processo requer mais cálculos. Já a potenciação e a radiciação de complexos na forma trigonométrica também ficam facilitadas com a utilização das fórmulas de Moivre[1] que serão apresentadas a seguir.

#### 3.1.6.1 Módulo e argumento de produto

*Teorema 5:* O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seus argumentos e congruente à soma dos argumentos dos fatores.

[1] Abraham De Moivre (1667-1754) francês, foi professor particular de matemática e foi amigo íntima de Isaac Newton. Suas obras contribuíram principalmente para o campo da probabilidade e trigonometria analítica.

*Demonstração:*

Suponha-se os números dados:

$$z_1 = p_1.(\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)\ \ e\ z_2 = p_2(\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2)$$

e calculando o módulo e o argumento de

$$z = z_1.z_2 = p.(\cos\theta + i.\sin\theta)$$

tem-se

$$z = z_1.z_2 = p_1.p_2(\cos\theta_1 + i.\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i.\sin\theta_2) =$$

$$= p_1.p_2[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1.\sin\theta_2) + i.(\sin\theta_1.\cos\theta_2 + \sin\theta_1.\cos\theta_2)]$$

portanto

$$p.(\cos\theta + i.\sin\theta) = (p_1.p_2)[(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}.\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

então

$$p = p_1.p_2$$

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Estende-se esse raciocínio ao produto de $n$ fatores $(n > 2)$, aplicando-se a propriedade associativa da multiplicação:

$$z = z_1.z_2.z_3.\ldots.z_n = p.(\cos\theta + i.\sin\theta)$$

então

$$z = (p_1.p_2.p_3.\ldots.p_n)\,[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i.\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

portanto

$$p.(\cos\theta + i.\sin\theta) =$$

$$= (p_1.p_2.p_3.\ldots.p_n)\,[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i.\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

finalmente

$$p = p_1.p_2.p_3\ldots p_n$$

$$\theta = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

3.1.6.2 Primeira fórmula de Moivre

*Teorema* 6: Dado o número complexo (14), não nulo, e o número inteiro $n$, tem-se:

$$z^n = p^n.[\cos(n\theta) + \mathrm{i}.\sin(n\theta)] \tag{15}$$

*Demonstração:*

1ª parte

Prova-se que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio da indução finita.

a) Se $n = 0$, então $\begin{cases} z^0 = 1 \\ p^0.(\cos 0 + i.\sin 0) = 1 \end{cases}$

b) Admita-se a validade da fórmula para $n = k - 1$:

$$z^{k-1} = p^{k-1}.\{\cos[(k-1)\theta] + \text{i}.\sin[(k-1)\theta]\}$$

e provando-se para $n = k$:

$$z^k = z^{k-1}.z = p^{k-1}.\{\cos[(k-1)\theta] + \text{i}.\sin[(k-1)\theta]\}.p.(\cos\theta + i.\sin\theta) =$$

$$= (p^{k-1}.p).\{\cos[(k-1)\theta + \theta] + \text{i}.\sin[(k-1)\theta + \theta]\} =$$

$$= p^k.[\cos(k\theta) + \text{i}.\sin(k\theta)]$$

2ª parte

Estendendo-se a propriedade para $n \in \mathbb{Z}$.

Se $n < 0$, então $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$; portanto a $m$ se aplica a fórmula:

$$z^k = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{p^m.[\cos(m\theta) + i.\sin(m\theta)]} =$$

$$= \frac{1}{p^m}.\frac{[\cos(m\theta) - i.\sin(m\theta)]}{[\cos(m\theta) + i.\sin(m\theta)].[\cos(m\theta) - i.\sin(m\theta)]} =$$

$$= \frac{1}{p^m}.\frac{[\cos(m\theta) - i.\sin(m\theta)]}{[cos^2(m\theta) + sin^2(m\theta)]} = p^{-m}.[\cos(-m\theta) - i.\sin(-m\theta)] =$$

$$= p^n.[\cos(n\theta) + \text{i}.\sin(n\theta)]$$

3.1.6.3 Raiz enésima

Dado um número complexo $z$, chame-se **raiz enésima de** $z$, denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo $z_k$ tal que ${z_k}^n = z$.

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff {z_k}^n = z$$

3.1.6.4 Segunda fórmula de Moivre

*Teorema 7*: Dado o número complexo (14) e o número natural $n$ $(n \geq 2)$ então existem $n$ raízes enésimas de $z$ que são da forma:

$$z_k = \sqrt[n]{p}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right] \qquad (16)$$

em que $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{R}_+ \; e \; k \in \mathbb{Z}$.

*Demonstração:*

Determina-se todos os complexos $z_k$ tais que $\sqrt[n]{z} = z_k$.

Se $z_n = r.(\cos\omega + \mathrm{i}.\sin\omega)$, as incógnitas são $r \; e \; \omega$. Aplica-se a definição de $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \iff {z_k}^n = z$$

então

$$r^n.[\cos(n\omega) + i.\sin(n\omega)] = p.(\cos\theta + i.\sin\theta)$$

portanto é necessário:

$$r^n = p \Rightarrow 3 = \sqrt[n]{p} \quad (r \in \mathbb{R}_+) \tag{17}$$

Supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, determina-se os valores de $k$ para os quais resultam valores de $\omega$ compreendidos entre $0 \; e \; 2\pi$:

$$k = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + 2.\frac{2\pi}{n}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k = n - 1 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + (n-1).\frac{2\pi}{n}$$

Estes $n$ valores de $\omega$ não são congruentes por estarem todos no intervalo $[0,2\pi[$; portanto, dão origem a $n$ valores distintos para $z_k$.

Considerando-se agora o valor de $\omega$ obtido para $k = n$;

$$k = n \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + n.\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Este valor de $\omega$ é dispensável por ser congruente ao valor obtido com $k = 0$;

Fato análogo ocorre para $k = n+1, n+2, n+3, \ldots \, e \; k = -1, -2, -3, \ldots$

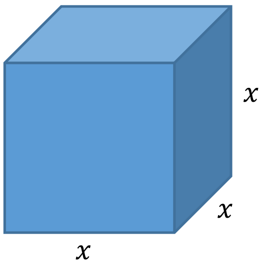
Então para obter os valores de $z_k$ é suficiente fazer $k = 0,1,2, \ldots, n-1$.

Conclui-se que todo número complexo $z$ não nulo admite $n$ raízes enésimas distintas, as quais tem todas o mesmo módulo $\left(\left|\sqrt[n]{z}\right|\right)$ e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

## 3.2 Polinômios

Segundo (Dante, 2017, p.202) na resolução de problemas, é comum ocorrerem situações em que a leitura e a compreensão do enunciado sugerem a formulação de expressões e equações que possam resolver o problema. Observem-se as figuras (5) e (6) como exemplo:

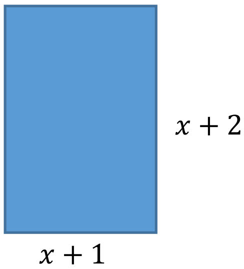
Figura 5 – Cubo com aresta de medida $x$




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

e

Figura 6 – Retângulo com dimensões de medida $x + 1$ $e$ $x + 2$




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

A figura (5) é um cubo de aresta $x$ e a figura (6) é uma região retangular com dimensões $x + 1$ $e$ $x + 2$, a essas figuras pode-se associar várias expressões, como por exemplo, questões envolvendo perímetros, áreas e até mesmo o volume para o caso da segunda figura. Todas essas expressões são chamadas de polinômios.

### 3.2.1 Função Polinomial ou Polinômio

Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$, considera-se a função: $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (18)$$

A função $f$ é denominada **função polinomial** ou **polinômio** associado à sequência dada.

Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são denominados **coeficientes** e as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$, são chamadas **termos** do polinômios $f(x)$.

Para determinar o **valor numérico de um polinômio**, substitui-se o valor de $x$ pelo número complexo $k$ no polinômio $(18)$ isto é:

$$f(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \cdots + a_nk^n,$$

Em particular, se $k$ é um número complexo e $f(x)$ é um polinômio tal que $f(k) = 0$, dizemos que $k$ é uma raiz da equação ou zero da função polinomial $f(x)$.

### 3.2.2 Polinômio Nulo

Um polinômio $f$ é **nulo** (ou **identicamente nulo**) quando $f$ assume o valor numérico zero para todo $x$ complexo. Em símbolos indica-se:

$$f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{C}$$

*Teorema 7*: Um polinômio $f$ é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de $f$ forem nulos. Em símbolos, sendo o polinômio $(18)$ tem-se:

$$f = 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

*Demonstração*:

$(\Leftarrow)$ É imediato que $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, acarreta:

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = 0, \ \ \forall x \in \mathbb{C}$$

$(\Rightarrow)$ Se $f$ é nulo, então existem $n + 1$ números complexos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, distintos dois a dois, que são raízes de $f$, isto é:

$$f(\alpha_0) = a_0 + a_1.\alpha_0 + a_2.\alpha_0{}^2 + \cdots + a_n.\alpha_0{}^n = 0$$

$$f(\alpha_1) = a_0 + a_1.\alpha_1 + a_2.\alpha_1{}^2 + \cdots + a_n.\alpha_1{}^n = 0$$

$$f(\alpha_2) = a_0 + a_1.\alpha_2 + a_2.\alpha_2{}^2 + \cdots + a_n.\alpha_2{}^n = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$f(\alpha_n) = a_0 + a_1.\alpha_n + a_2.\alpha_n{}^2 + \cdots + a_n.\alpha_n{}^n = 0$$

Assim, tem-se um sistema linear homogêneo do tipo $(n+1).(n+1)$ cujas incógnitas são $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Como o determinante deste sistema é

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^{\ 2} & \dots & \alpha_0^{\ n} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^{\ 2} & \dots & \alpha_1^{\ n} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^{\ 2} & \dots & \alpha_2^{\ n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^{\ 2} & \dots & \alpha_n^{\ n} \end{vmatrix}$$

não nulo por tratar – se do determinante de uma matriz de Vandermonde cujos os elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, todos distintos, o sistema tem uma única solução, que é a solução trivial:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

### 3.2.3 Polinômios Idênticos

Dizemos que dois polinômios $f$ e $g$ são iguais (ou idênticos) quando assumem valores numéricos iguais para todo $x$ complexo. Em símbolos, indica-se:

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

*Teorema 8*: Em símbolos, sendo

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

tem-se:

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

*Demonstração:*

Para todo $x \in \mathbb{C}$, tem-se:

$$a_i = b_i \Leftrightarrow a_i - b_i = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)\, x^i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i\, x^i \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

3.2.4 Operações com polinômios

Nesta seção apresenta-se as quatro operações envolvendo os polinômios e seus principais métodos de resolução.

3.2.4.1 Adição ou Soma de Polinômios

Dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

chama-se **soma** de $f$ com $g$ o polinômio

$$(f + g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \qquad (19)$$

isto é:

$$(f + g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$$

3.2.4.2 Subtração ou Diferença de Polinômios

Tendo em vista o teorema anterior e dados dois polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

definimos **diferença** entre $f$ e $g$ como polinômio $f - g = f + (-g)$, isto é:

$$(f-g)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x^n \qquad (20)$$

3.2.4.3 Multiplicação ou Produto de Polinômios

Dado dois polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, o **produto $\boldsymbol{f.g}$**

entre eles é o polinômio

$$(f.g)(x) = a_0.b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_2b_0 + a_0b_2)x^2 + \cdots + a_mb_nx^{m+n} \qquad (21)$$

Nota – se que o produto $f.g$ é o polinômio $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m+n}x^{m+n}$ cujo coeficiente $c_k$ pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$$

Observa – se que o $f.g$ pode ser obtido multiplicando-se cada termo $a_ix^i$ de $f$ por cada termo $b_jx^j$ de $g$, segundo a regra $(a_ix^i).(b_jx^j) = a_i.b_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

3.2.4.4 Grau de um polinômio

Seja $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, um polinômio não nulo. Chama-se **grau** de $f$, representa-se por $\partial f$ *ou* $grf$ o número natural $p$ tal que $a_p \neq 0$ *e* $a_i = 0$ para todo $i > p$.

$$\partial f = p \Leftrightarrow \begin{cases} a_p \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > p \end{cases}$$

Assim, o grau de um polinômio $f$ é o índice do "último" termo não nulo de $f$ , se o grau do polinômio $f$ é $n$, então $a_n$ é chamado coeficiente dominante de $f$. No caso do coeficiente dominante $a_n$ ser igual a 1, $f$ é chamado polinômio unitário.

3.2.4.5 Divisão

Dados dois polinômios $f$ (**dividendo**) e $g \neq 0$ **(divisor)**, dividir $f$ por $g$ é determinar dois outros polinômios $q$ (**quociente**) e $r$ (**resto**) de modo que se verifiquem as duas condições seguintes

$$I)\ q.g + r = f \qquad (22)$$

$$II)\ \partial r < \partial g\ (ou\ r = o, caso\ em\ que\ a\ divisão\ é\ chamada\ exata)$$

3.2.4.5.1 Divisões imediatas

Há dois casos em que a divisão de $f$ por $g$ é imediata.

*Caso 1*: o dividendo $f$ é o polinômio nulo ($f = 0$).

Neste caso, os polinômios $q = 0\ e\ r = 0$ satisfazem as condições $(I)\ e\ (II)$ da definição de divisão, pois $q.g + r = 0.g + 0 = 0 = f\ \ e\ \ r = 0$.

$$f = 0\ \Rightarrow q = 0\ e\ r = 0$$

*Caso 2*: o dividendo $f$ não é polinômio nulo, mas tem grau menor que o divisor $g$ ($\partial f < \partial g$).

Neste caso, os polinômios $q = 0\ e\ r = f$ satisfazem as condições $(I)\ e\ (II)$ da definição de divisão, pois $q.g + r = 0.g + f = f\ \ \ e\ \ \ \partial r = \partial f < \partial g$.

$$\partial f < \partial g\ \Rightarrow q = 0\ e\ r = f$$

3.2.4.5.2 Método de Descartes

Este método de Descartes, também conhecido pelo nome de **método dos coeficientes a determinar**, baseia-se nos seguintes fatos:

*Fato 1*: $\partial q = \partial f - \partial g,\ \ o\ que\ é\ consequência\ da\ definição, pois$:

$$qg + r = f \Rightarrow \partial(q.g + r) = \partial f\ \ e\ então, \partial q + \partial g = \partial f$$

*Fato 2*: $\partial r < \partial g\ \ (ou\ r = 0)$

O método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

1) calcula-se $\partial q\ e\ \partial r$;

2) constroem-se os polinômios $q\ e\ r$, deixando incógnitos os seus coeficientes;

3) determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $q.g + r = f$.

Exemplo: Dividir $f = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

*Resolução:* tem – se

$$\partial q = 4 - 3 = 1\ \Rightarrow q = ax + b$$

$$\partial r < 3 \Rightarrow \partial r \leq 2 \Rightarrow r = cx^2 + dx + e$$

$$q.g + r = f \Rightarrow (ax+b).(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (cx^2 + dx + e) =$$
$$= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$$

desenvolvendo, tem-se para todo $x$:

$$3ax^4 + (3b - 2a)x^3 + (4a - 2b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) =$$
$$= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$$

então, resulta:

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 3b - 2a = -2 \Rightarrow -2 + 2.1 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 4a \Rightarrow c = -4 \\ 4b - a + d = 7 \Rightarrow d = a - 4b + 7 \Rightarrow d = 8 \\ e - b = 2 \Rightarrow e = b + 2 \Rightarrow e = 2 \end{cases}$$

resposta:

$$q = ax + b \Rightarrow q = x$$
$$r = cx^2 + dx + e \Rightarrow r = -4x^2 + 8x + 2$$

3.2.4.5.3 Existência e Unicidade do Quociente e do Resto

*Teorema 9:* Dados os polinômios

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_m \neq 0)$$

e

$$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0 \qquad (b_n \neq 0)$$

existem um único polinômio $q$ e um único polinômio $r$ tais que $q.g + r = f$ $e\,\partial r < \partial g$ $(ou\ r = 0)$.

*Demonstração:*

$a)$ *Existência*:

1º grupo de operações: formar – se o monômio $\frac{a_m}{b_n}.x^{m-n} = q_0.x^{m-n}$ e construir o polinômio

$$r_1 = f - (q_0 x^{m-n})g \qquad (23)$$

chamado 1º resto parcial.

Nota – se que:

$$r_1 = (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots) - \frac{a_m}{b_n}.x^{m-n}.(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots)$$

o que prova o cancelamento de $a_m x^m$ (pelo menos); portanto, $\partial r_1 = \lambda < m$.

Para maior comodidade, faça – se:

$$r_1 = c_\lambda x^\lambda + c_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + c_{\lambda-2} x^{\lambda-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

2º grupo de operações formar – se o monômio $\frac{c_\lambda}{b_n}.x^{\lambda-n} = q_1.x^{\lambda-n}$ e construir o polinômio

$$r_2 = r_1 - \left(q_1 x^{\lambda-n}\right) g \tag{24}$$

Chamado 2º resto parcial.

Nota-se que:

$$r_2 = \left(c_\lambda x^\lambda + c_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + \cdots\right) - \frac{c_\lambda}{b_n}.x^{\lambda-n}.(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots)$$

o que prova o cancelamento de $c_\lambda x^\lambda$ (pelo menos); portanto, $\partial r_2 = \beta < \lambda$.

Para maior comodidade, faça-se:

$$r_2 = d_\beta x^\beta + d_{\beta-1} x^{\beta-1} + d_{\beta-2} x^{\beta-2} + \cdots + d_1 x + d_0$$

3º grupo de operações: formar – se o monômio $\frac{d_\beta}{b_n}.x^{\beta-n} = q_2.x^{\beta-n}$e construir o polinômio

$$r_3 = r_2 - \left(q_2 x^{\beta-n}\right) g \tag{25}$$

Chamado 3º resto parcial.

Nota – se que:

$$r_3 = \left(d_\beta x^\beta + d_{\beta-1} x^{\beta-1} + \cdots\right) - \frac{d_\beta}{b_n}.x^{\beta-n}.(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots)$$

o que prova o cancelamento de $d_\beta x^\beta$ (pelo menos); portanto, $\partial r_3 = \gamma < \beta$.

Faça – se:

$$r_3 = e_\gamma x^\gamma + e_{\gamma-1} x^{\gamma-1} + e_{\gamma-2} x^{\gamma-2} + \cdots + e_1 x + e_0$$

4º grupo em diante: analogamente.

Nota-se que, em cada grupo de operações, o grau do resto parcial diminui ao menos uma unidade, conclui-se que, após um certo número $p$ de operações, resulta um resto parcial $r_p$ de grau inferior ao de $g$ $(ou\ então\ r_p = 0)$ e

$$r_p = r_{p-1} - \left(q_{p-1} x^{\epsilon-n}\right) g \tag{26}$$

Vamos adicionar membro a membro as igualdades de $(1)$ $a$ $(p)$:

$$r_1 = f - (q_0 x^{m-n}) g \tag{23}$$

$$r_2 = r_1 - \left(q_1 x^{\lambda - n}\right) g \quad (24)$$

$$r_3 = r_2 - \left(q_2 x^{\beta - n}\right) g \quad (25)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r_p = r_{p-1} - \left(q_{p-1} x^{\epsilon - n}\right) g \quad (26)$$

---

$$r = f - \left(q_0 x^{m-n} + q_1 x^{\lambda - n} + q_2 x^{\beta - n} + \cdots + q_{p-1} x^{\epsilon - n}\right) g$$

e então $f = q.g + r$ com $\partial r < \partial g \ b \ (ou \ r = o)$.

$b$) *Unicidade*:

Admita-se a existência de dois quocientes $q_1 \ e \ q_2$ e dois restos $r_1 \ e \ r_2$ na divisão de $f$ por $g$, isto é:

$$\begin{array}{r|l} f & g \\ \hline r_1 & q_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} f & g \\ \hline r_2 & q_2 \end{array}$$

e prova-se que $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Pela definição de divisão, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} q_1.g + r_1 = f \\ q_2.g + r_2 = f \end{array}\right\} \Rightarrow q_1.g + r_1 = q_2.g + r_2 \Rightarrow (q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$$

se $q_1 \neq q_2$ ou $r_1 \neq r_2$, prova-se que a igualdade $(q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$ não se verifica, pois:

$$\left.\begin{array}{r} \partial[(q_1 - q_2)g] = \partial(q_1 - q_2) + \partial g \geq \partial g \\ (*)\partial(r_2 - r_1) \leq máx\{\partial r_2, \partial r_1\} < \partial g \end{array}\right\} \Rightarrow \partial[(q_1 - q_2)g] \neq \partial(r_2 - r_1)$$

então, para evitar a contradição, deve-se ter $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

### 3.2.4.5.4 Método da Chave

A prova da existência de $q \ e \ r$ vista na seção anterior ensina-se como construir esses dois polinômios a partir de $f \ e \ g$. Veja como proceder se $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ e $g = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{array}{ll|l} f \longrightarrow & 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & x^2 - 2x + 3 \quad \longleftarrow g \\ \cline{3-3} & -3x^5 + 6x^4 - 9x^3 & 3x^3 + 4x - 1 \quad \longleftarrow q \\ \hline r_1 \longrightarrow & 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & \end{array}$$

$$-4x^3 + 8x^2 - 12x$$

$$r_2 \longrightarrow \quad -x^2 - x - 1$$

$$x^2 - 2x + 3$$

$$-3x + 2 \ \longleftarrow r$$

3.2.4.5.5 Divisão por Binômio do 1º Grau

*Teorema 10*: O resto da divisão de um polinômio $f$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $f$ em $a$. Esse teorema é conhecido como teorema do resto.

*Demonstração:*

De acordo com a definição de divisão em $(22)$, temos:

$$q.(x - a) + r = f \tag{27}$$

em que $q$ $e$ $r$ são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $x - a$ tem grau $1$, o resto $r$ ou é nulo ou tem grau zero; portanto, $r$ é um polinômio constante.

Calcula-se os valores dos polinômios da igualdade acima em $a$:

$$q(a).\underbrace{(a - a)}_{0} + \underbrace{r(a)}_{r} = f(a)$$

então: $r = f(a)$.

Exemplos:

1º) O resto da divisão de $f = 5x^4 + 3x^2 + 11$ por $g = x - 3$ é:

$$f(3) = 5.3^4 + 3.3^2 + 11 = 443$$

2º) O resto da divisão de $f = (x + 3)^7 + (x - 2)^2$ por $g = x + 3$ é:

$$f(-3) = (-3 + 3)^7 + (-3 - 2)^2 = 25$$

*Teorema 11*: Um polinômio $f$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $a$ é raiz de $f$. Esse teorema é conhecido como teorema D'Alembert [2].

[2] Jean-le-Rond D'Alembert (1717-1783) nasceu e morreu em Paris. Era instruído em direito, medicina, ciência. Foi colega de Euler na Academia de Berlim. Um dos percursores da descoberta da geometria não-euclidiana, graças as pesquisas que desenvolveu sobre o postulado das paralelas de Euclides.

*Demonstração:*

De acordo com o teorema do resto, temos $r = f(a)$. Então:

$$q = 0 \Longrightarrow f(a) = 0$$

(Divisão exata) ($a$ é raiz de $f$)

3.2.4.5.6 Algoritmo de Briot-Ruffini

Dados os polinômios $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, (a_0 \neq 0)$ e $g = x - a$, determina-se o quociente $q$ e o resto $r$ da divisão de $f$ por $g$.

Faça:

$$q = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \cdots + q_{n-1}$$

e aplica-se o método dos coeficientes a determinar:

$$\left.\begin{array}{c} q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \cdots + q_{n-2}x + q_{n-1} \\ x - a \end{array}\right\} \otimes$$

$$\begin{array}{r} q_0x^n + q_1x^{n-1} + q_2x^{n-2} + \cdots + q_{n-2}x^2 + q_{n-1}x \\ -q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + \cdots + q_{n-3}x^2 + q_{n-2}x + q_{n-1} \end{array}$$

$$q_0x^n + (q_1 - aq_0)x^{n-1} + (q_2 - aq_1)x^{n-2} + \cdots + (q_{n-1} - aq_{n-2})x - aq_{n-1}$$

impondo a condição $q.(x - a) + r = f$, resultam as igualdades:

$$q_0 = a_0$$

$$q_1 - aq_0 = a_1 \Rightarrow q_1 = aq_0 + a_1$$

$$q_2 - aq_1 = a_2 \Rightarrow q_2 = aq_1 + a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1}$$

$$r - aq_{n-1} = a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n$$

Os cálculos para obter-se $q\ e\ r$ indicados acima tornaram–se mais rápidos com a aplicação do seguinte dispositivo de Briot–Ruffini.

$\oplus$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | .... | $a_{n-1}$ | $a_n$ | $a$ |
| $\underbrace{a_0}_{q_0}$ | $\underbrace{aq_0 + a_1}_{q_1}$ | $\underbrace{aq_1 + a_2}_{q_2}$ | .... | $\underbrace{aq_{n-2} + a_{n-1}}_{q_{n-1}}$ | $\underbrace{aq_{n-1} + a_n}_{r}$ | |

$\otimes$

Exemplos:

1º) $f = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1 \ e\ g = x - 3$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | $-7$ | 3 | $-1$ | 3 |
| 2 | $\underbrace{2.3 + 0}_{6}$ | $\underbrace{6.3 - 7}_{11}$ | $\underbrace{11.3 + 3}_{36}$ | $\underbrace{36.3 - 1}_{107}$ | |

portanto: $q = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36 \ e\ r = 107$

2º) $f = 625x^4 - 81 \ e\ g = x - \frac{3}{5}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 625 | 0 | 0 | 0 | $-81$ | $\frac{3}{5}$ |
| 625 | $\underbrace{625.\frac{3}{5}}_{375}$ | $\underbrace{375.\frac{3}{5}}_{225}$ | $\underbrace{225.\frac{3}{5}}_{135}$ | $\underbrace{135.\frac{3}{5} - 81}_{0}$ | |

portanto: $q = 625x^3 + 375x^2 + 225x + 135 \ e\ r = 0$

*Teorema 12*: Se um polinômio $f$ é divisível separadamente por $x - a \ e\ x - b$ com $a \neq b$, então $f$ é divisível pelo produto $(x - a).(x - b)$.

*Demonstração:*

Sejam $q$ o quociente e $r = cx + d$ o resto da divisão de $f$ por$(x - a).(x - b)$; então:

$$q.(x - a).(x - b) + (cx + d) = f \tag{28}$$

Calculando-se os valores numéricos desses polinômios em $a$ , tem-se:

$$[q(a)].\underbrace{(a - a)}_{0}.(a - b) + (ca + d) = \underbrace{f(a)}_{0} \tag{29}$$

$(pois\ f$ é $divisível\ por\ x - a)$

Calculando os valores numéricos desses polinômios em $b$ , tem-se:

$$[q(b)].(b-a).\underbrace{(b-b)}_{0}+(cb+d)=\underbrace{f(b)}_{0} \qquad (30)$$

$(pois\ f$ é $divisível\ por\ x-b)$

Resulta, então, o sistema: $\begin{cases} ca+d=0 \\ cb+d=0 \end{cases}$

de onde vem $c=0\ e\ d=0$, portanto $r=0$.

3.2.4.5.7 Divisão por Binômios do 1º Grau Quaisquer

Para obter rapidamente o quociente $q$ e o resto $r$ da divisão de um polinômio $f$, com $\partial f \geq 1$, por $g=bx-a$ em que $b\neq 0$, observa-se que:

$$(bx-a)q+r=f \qquad (31)$$

então $\left(x-\frac{a}{b}\right).\left(\underbrace{bq}_{q'}\right)+r=f$ do que decorre a seguinte regra prática:

1º divide-se $f$ por $x-\frac{a}{b}$ empregando o algarismo de Briot-Ruffini;

2º divide-se o quociente $q'$ encontrado pelo número $b$, obtendo $q$.

Exemplos:

1º) Dividir $f=3x^4-2x^3+x^2-7x+1$ por $g=3x-5=3\left(x-\frac{5}{3}\right)$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $3$ | $-2$ | $1$ | $-7$ | $1$ | $\frac{5}{3}$ |
| $3$ | $\underbrace{3.\frac{5}{3}-2}_{3}$ | $\underbrace{3.\frac{5}{3}+1}_{6}$ | $\underbrace{6.\frac{5}{3}-7}_{3}$ | $\underbrace{3.\frac{5}{3}+1}_{6}$ | |

$q'=3x^3+3x^2+6x+3\ \Rightarrow q=\frac{q'}{3}=x^3+x^2+2x+1\ \ e\ \ r=6$

2º) Dividir $f=4x^3+5x+25$ por $g=2x+3=2\left(x+\frac{3}{2}\right)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $4$ | $0$ | $5$ | $25$ | $-\frac{3}{2}$ |
| $4$ | $\underbrace{4.\left(-\frac{3}{2}\right)+0}_{-6}$ | $\underbrace{(-6).\left(-\frac{3}{2}\right)+5}_{14}$ | $\underbrace{14.\left(-\frac{3}{2}\right)+25}_{4}$ | |

$q'=4x^2-6x+14\ \Rightarrow q=\frac{q'}{2}=2x^2-3x+7\ \ e\ \ r=4$

## 3.3 Equações Algébricas

Estuda as equações da forma $p(x) = 0$, onde $p$ é uma função polinomial.

Embora a resolução de equações algébricas do segundo grau fosse dominada desde a antiguidade, somente na época do renascimento foram alcançados os primeiros resultados relativos e equações de grau superior a 2. A busca por métodos algébricos gerais de soluções para tais equações foi responsável por grandes desenvolvimentos da matemática, incluindo a invenção dos números complexos.

### 3.3.1 O Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.)

Se os números complexos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial $p$ de grau $n$, então existe uma função polinomial $q$ de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1).(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k).q(x) \tag{32}$$

O polinômio $q(x)$ não pode ser divisível por nenhum novo fator da forma $(x - \alpha)$, com $\alpha$ diferente de todos os $\alpha_i$; do contrário, $\alpha$ também seria raiz de $p$. Por outro lado, $q(x)$ pode ainda ser divisível por um ou mais dos fatores $(x - \alpha_i)$.

*Teorema 13*: Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa. Esse teorema é conhecido como teorema fundamental da álgebra (T.F.A.).

Embora fundamental para a álgebra, o T.F.A. é um teorema da análise, e sua demonstração é baseada na continuidade das funções polinomiais complexas e foi tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no ano de 1798. Vários outros matemáticos tentaram essa demonstração, mas Gauss foi o primeiro a realizá-la com sucesso. Como a demonstração de Gauss utiliza-se conhecimentos acima do nível deste trabalho, admitisse o teorema sem demonstrá-lo.

### 3.3.2 Teorema da Decomposição

*Teorema 14*: Todo polinômio $p$ de grau $n$ $(n \geq 1)$

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pode ser decomposto em $n$ fatores do primeiro grau, isto é:

$$p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3) \dots (x - r_n) \tag{33}$$

em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são raízes de $p$ .

Com exceção da ordem dos fatores tal decomposição é única.

*Demonstração*:

1°) Parte: existência

a) Sendo $p$ um polinômio de grau $n \geq 1$, pode-se aplicar o *teorema 13* e $p$ tem ao menos um raiz $r_1$. Assim, $p(r_1) = 0$ e, de acordo com o *teorema 11*, $p$ é divisível por $x - r_1$:

$$p = (x - r_1).Q_1 \tag{34}$$

Em que $Q_1$ é um polinômio de grau $n - 1$ e coeficiente dominante $a_n$. Se $n - 1$, então $n - 1 = 0$ e $Q_1$ é um polinômio constante; portanto, $Q_1 = a_n$ e $p = a_n.(x - r_1)$, ficando demonstrado o teorema.

b) Se $n \geq 2$, então $n - 1 \geq 1$ e o *teorema 13* é aplicável ao polinômio $Q_1$, isto é, $Q_1$ tem ao menos uma raiz $r_2$. Assim, $Q_1(r_2) = 0$ e $Q_1$ é divisível por $x - r_2$:

$$Q_1 = (x - r_2).Q_2 \tag{35}$$

substituindo (29) em (28) resulta:

$$p = (x - r_1).(x - r_2).Q_2 \tag{36}$$

em que $Q_2$ é o polinômio de grau $n - 2$ e coeficiente dominante $a_n$. Se $n = 2$, isto é, $n - 2 = 0$ e $Q_2 = a_n$ e $p = a_n.(x - r_1).(x - r_2)$ e, ficando demonstrado o teorema.

c) Após $n$ aplicações sucessivas do *teorema 13* chega-se na igualdade:

$$p = (x - r_1).(x - r_2).(x - r_3) \ldots (x - r_n)Q_n$$

em que $Q_n$ tem grau $n - n = 0$ e coeficiente dominante $a_n$; portanto, $Q_n = a_n$ e

$$p = a_n.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3) \ldots (x - r_n)$$

2º) Parte: unicidade

Suponha-se que $p$ admita duas decomposições:

$$p = a_n.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3) \ldots (x - r_n)$$

$$p = a'_m.(x - r'_1).(x - r'_2).(x - r'_3) \ldots (x - r'_m)$$

Supondo reduzidos e ordenados os dois segundos membros, tem-se:

$$a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + \cdots + a'_m x^m - a'_m S'_1 x^{m-1} + \cdots$$

e, pela definição 2.2.3, tem-se necessariamente:

$$n = m \;\; e \;\; a_n = a'_m$$

Ficando-se com a igualdade:

$$(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3)\ldots(x - r_n) = (x - r_1').(x - r_2').(x - r_3')\ldots(x - r_n') \quad (37)$$

Atribuindo a $x$ o valor de $r_1$, tem-se:

$$0 = (r_1 - r_1').(r_1 - r_2').(r_1 - r_3')\ldots(r_1 - r_n')$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores $r_1 - r_j'$ é nulo; com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, pode-se colocar $r_1 = r_1'$

A igualdade $(31)$ se transforma em:

$$(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3)\ldots(x - r_n) = (x - r_1).(x - r_2').(x - r_3')\ldots(x - r_n')$$

e em seguida em:

$$(x - r_2).(x - r_3)\ldots(x - r_n) = (x - r_2').(x - r_3')\ldots(x - r_n')$$

Atribuindo a $x$ o valor de $r_2$ , tem-se:

$$0 = (r_2 - r_2').(r_2 - r_3')\ldots(r_2 - r_n')$$

e analogamente, um dos fatores $r_2 - r_k'$ é nulo; com uma conveniente mudança na ordem dos fatores, podemos colocar $r_1 = r_2'$

Continuando, $r_i = r_i'$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

As igualdades $n = m$ , $a_n = a_m', r_1 = r_1', r_2 = r_2', r_3 = r_3', \ldots, r_n = r_n'$ são a prova da unicidade da decomposição.

### 3.3.3 Consequência do Teorema da Decomposição

*Teorema 15*: Toda equação polinomial de grau $n\ (n \geq 1)$ admite $n$, e somente $n$, raízes complexas.

*Demonstração:*

Seja a equação polinomial

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Visto na demonstração do *teorema 14* que $p$ admite as raízes (distintas ou não) $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Provou-se que são só essas as raízes de $p$ ao provar a unicidade da decomposição.

Observações:

1º) Tendo em vista o *teorema 14*, todo polinômio $p$ de grau $n\ \ (n \geq 1)$ pode ser encarado como o desenvolvimento de um produto de $n$ fatores do 1º grau e um fator constante $a_n$, que é o coeficiente dominante de $p$.

2º) Nada impede que a decomposição de $p$ apresente fatores iguais. Associando os fatores idênticos da decomposição de $p$, obtém-se:

$$p = a_n.(x - r_1)^{m_1}.(x - r_2)^{m_2}.(x - r_3)^{m_3} \dots (x - r_p)^{m_p} \tag{38}$$

em que $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_p = n$ e $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$ são dois a dois distintos.

Neste caso, $p$ é divisível separadamente pelos polinômios $(x - r_1)^{m_1}, (x - r_2)^{m_2}, (x - r_3)^{m_3}, \dots, (x - r_p)^{m_p}$.

### 3.3.4 Multiplicidade de uma Raiz

Diz-se que $r$ é a raiz de $m$ $(m > 1)$ da equação $p(x) = 0$ se, e somente se,

$$p = (x - r)^m.Q \quad e \quad Q(r) \neq 0 \tag{39}$$

isto é, $r$ é raiz de multiplicidade $m$ de $p(x) = 0$ quando o polinômio $p$ é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$, ou seja, a decomposição de $p$ apresenta exatamente $m$ fatores iguais a $x - r$.

Quando $m = 1$, diz-se que $r$ é raiz simples; quando $m = 2$, diz-se que $r$ é raiz dupla; quando $m = 3$, diz-se que $r$ é raiz tripla, etc.

### 3.3.5 Relações entre Coeficientes e Raízes

Existem importantes relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica, estabelecidas por Girard (1590-1633). Porém, antes de apresentar como são essas relações no caso geral, estuda-se alguns casos particulares.

#### 3.3.5.1 Equação do 2º Grau

Considere a equação (3), cujas raízes são $r_1$ $e$ $r_2$. Essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$a(x - r_1).(x - r_2) = 0 \tag{40}$$

tem-se a identidade:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1).(x - r_2), \quad \forall x$$

isto é:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(r_1+r_2)x+r_1.r_2, \quad \forall x$$

portanto:

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a} \quad e \quad r_1.r_2=\frac{c}{a} \tag{41}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do 2º grau.

3.3.5.2 Equação do 3º Grau

Considere a equação:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0) \tag{42}$$

cujas raízes são $r_1$, $r_2$ e $r_3$.

Essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$a(x-r_1).(x-r_2).(x-r_3)=0 \tag{43}$$

tem-se a identidade:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-r_1).(x-r_2).(x-r_3), \quad \forall x$$

isto é:

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2+(r_1.r_2+r_2.r_3+r_1.r_3)x-r_1.r_2.r_3, \forall x$$

portanto:

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a}, \ r_1.r_2+r_2.r_3+r_1.r_3=\frac{c}{d} \ \ e \ \ r_1.r_2.r_3=-\frac{d}{a} \tag{44}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do 3º grau.

3.3.5.3 Equação de grau $n$

Agora deduz-se as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau $n$ $(n\geq 1)$.

$$p=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0)$$

cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ tem-se a identidade:

$$p=a_n.(x-r_1).(x-r_2).(x-r_3)\dots(x-r_n)=$$

$$=a_n-a_n\left(\underbrace{r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n}_{S_1}\right)x^{n-1}+$$

$$+a_n\left(\underbrace{r_1.r_2 + r_1.r_3 + \cdots + r_{n-1}.r_n}_{S_2}\right)x^{n-2} -$$

$$-a_n\left(\underbrace{r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + \cdots + r_{n-2}.r_{n-1}.r_n}_{S_3}\right)x^{n-3} + \cdots +$$

$$+(-1)^h a_h S_h x^{n-h} + \cdots + (-1)^n a_n\left(\underbrace{r_1.r_2.r_3 \ldots r_n}_{S_n}\right), \quad \forall x$$

portanto, aplica-se a condição de igualdade:

$$S_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$S_2 = r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_1.r_4 + \cdots + r_{n-1}.r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$S_3 = r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + \cdots + r_{n-2}.r_{n-1}.r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_h = \begin{pmatrix} soma\ de\ todos\ os\ C_{n,h}\ produtos \\ de\ h\ raízes\ da\ equação \end{pmatrix} = (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$S_n = r_1.r_2.r_3 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

são essas as relações entre coeficientes e raízes da equação $p(x) = 0$, também chamadas relações de Girard.

## 3.4 Raízes complexas

Nesta seção, será abordada algumas propriedades que relacionam entre si as raízes complexas e não reais de uma equação polinomial de coeficientes reais e ajudam a determinar as raízes da equação.

### 3.4.1 Raízes Conjugadas

*Teorema 16*: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi\ \ (b \neq 0)$, então essa equação também admite como raiz o número $\overline{z} = a - bi$, conjugado de $z$.

*Demonstração*:

Seja a equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes reais que admite a raiz $z$, isto é, $p(z) = 0$.

Prova-se que $\overline{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $p(\overline{z}) = 0$:

$$p(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + \cdots + a_1(\overline{z}) + a_0 =$$

$$a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 =$$

$$\overline{a}_n\overline{z^n} + \overline{a}_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \overline{a}_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \cdots + \overline{a}_1\overline{z} + \overline{a}_0 =$$

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \overline{a_{n-2} z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a}_0 =$$

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$$

### 3.4.2 Multiplicidade da raiz conjugada

*Teorema 17*: Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade $m$, então essa equação admite a raiz $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade $m$.

*Demonstração*:

Tem-se $z = a + bi$ $e\, \overline{z} = a - bi$. Suponha que $z$ seja raiz de multiplicidade $m$ $(com\, m \geq 1)$. Já que $z\; e\; \overline{z}$ são raízes de $p(x)$, tem-se:

$$p(x) = (x - z)(x - \overline{z}).A(x) = [x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z}].A(x) =$$

$$= \underbrace{[x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)]}_{B(x)}.A(x)$$

Observa-se que $p(x)\; e\; B(x)$ têm coeficientes reais, conclui-se que $A(x)$ também tem coeficientes reais. Se $z$ for raiz simples de $p(x)$ (isto é, $m = 1$), então $z$ não será raiz de $A(x)$ e, por tanto, $\overline{z}$ também não será raiz de $A(x)$; isto leva a concluir que $\overline{z}$ também será raiz simples. Em outras palavras, se $z$ é raiz simples, $\overline{z}$ também é raiz simples de $p(x)$. Se $m > 1$, então $z$ deverá ser raiz de $A(x)$; mas, leva-se em conta que $A(x)$ possui coeficientes reais, $\overline{z}$ também será raiz de $A(x)$. Aplicando-se esse raciocínio o número necessário de vezes, chega-se à conclusão de que $z\; e\; \overline{z}$ têm a mesma multiplicidade.

### 3.4.3 Raízes reais

Dada uma equação polinomial $p(x) = 0$ com coeficientes reais, desenvolve-se uma teoria que permite determinar o número de raízes reais que a equação admite num certo intervalo dado $]a; b[$.

Seja $p(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais. Indica-se por $r_1, r_2, r_3, \dots, r_p$ suas raízes reais e por $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, \dots, z_q, \overline{z_q}$ suas raízes complexas e não reais.

Pelo *teorema 14*, tem-se:

$$p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2)\dots(x - r_p).$$

$$.\left[(x - z_1).(x - \overline{z_1})(x - z_2).(x - \overline{z_2})\dots(x - z_q).(x - \overline{z_q})\right] \quad (45)$$

Efetua-se o produto correspondente a duas raízes complexas conjugadas $z_1 = a + bi$ e $\overline{z_1} = a - bi$. Por exemplo:

$$(x - z_1).(x - \overline{z_1}) = x^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1.\overline{z_1} = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 =$$

$$= (x - a)^2 + b^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Verifica-se que o produto é positivo para todo valor real dado a $x$. Como o polinômio:

$$Q(x) = (x - z_1).(x - \overline{z_1})(x - z_2).(x - \overline{z_2})\dots(x - z_q).(x - \overline{z_q})$$

é o polinômio de $q$ fatores do tipo analisado, conclui-se que $Q(x)$ assume valor numérico positivo para todo $x$ real e a expressão $(39)$ fica:

$$p(x) = a_n.Q(x).(x - r_1).(x - r_2)\dots(x - r_p) \quad com\ Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (46)$$

### 3.4.4 Teorema de Bolzano

*Teorema 18*: Sejam $p(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e $]a; b[$ um intervalo real aberto.

1º) Se $p(a)$ $e$ $p(b)$ têm o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes da equação em $]a; b[$.

2º) Se $p(a)$ $e$ $p(b)$ têm sinais contrários, então existe um número ímpar de raízes reais da equação em $]a; b[$.

*Demonstração*:

Sejam

$$z_1, z_2, \dots, z_p \quad as\ raízes\ imaginárias\ de\ p(x)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_q \quad as\ raízes\ reais\ entre\ a\ e\ b$$

$$r_1, r_2, \ldots, r_h \quad as\ raízes\ reais\ fora\ do\ intervalo\ [a, b]$$

tem-se:

$$p(x) = a_n \underbrace{(x - z_1).(x - z_2) \ldots (x - z_p)}_{A(x)} . \underbrace{(x - x_1) \ldots (x - x_q)}_{B(x)} \underbrace{(x - r_1) \ldots (x - r_h)}_{C(x)}$$

Como os coeficientes de $p(x)$ são reais, as raízes imaginárias (se existirem) virão aos pares e, ao decompormos $A(x)$, obtêm-se pares do tipo $(x - z)(x - \overline{z})$. Sendo $z = \alpha + \beta i\ \ e\ \overline{z} = \alpha - \beta i$ (com $\alpha \in \mathbb{R}\ e\ \beta \in \mathbb{R}^*$) tem-se:

$$(x - z_1).(x - \overline{z_1}) = [x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Mas, para qualquer valor de $x \epsilon \mathbb{R}$, tem-se $(x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0$ e, portanto, $A(x) > 0$ para todo $x \epsilon \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} p(a) = a_n.A(a).B(a).C(a) \\ p(b) = a_n.A(b).B(b).C(b) \end{cases}$$

$$p(a).p(b) = a^2{}_n.A(a).A(b).B(a).B(b).C(a).C(b)$$

Como as raízes $r_1, r_2, \ldots, r_h$ estão fora do intervalo $[a, b]$, o produto $C(a).C(b)$ será sempre positivo. Assim, tem-se

$$p(a).p(b) = \underbrace{[a^2{}_n.A(a).A(b).C(a).C(b)]}_{D}.B(a).B(b) = D.B(a).B(b)$$

onde $D > 0$. Portanto, o sinal de $p(a).p(b)$ depende do sinal de $B(a).B(b)$.

$$B(a).B(b) = \underbrace{(a - x_1).(b - x_1)}_{< 0} . \underbrace{(a - x_2).(b - x_2)}_{< 0} \ldots \underbrace{(a - x_q).(b - x_q)}_{< 0}$$

Cada um dos produtos $(a - x_j)(b - x_j)$ é negativo. Daí conclui-se que:

1º) se $q$ é impar, $B(a).B(b) < 0\ e\ p(a).p(b) < 0$. Isto significa que $p(a)\ e\ p(b)$ têm sinais contrários;

2º) se $q$ é par, $B(a).B(b) > 0\ e\ p(a).p(b) > 0$. Isto significa que $p(a)\ e\ p(b)$ têm o mesmo sinal.

### 3.5 Raízes racionais

Será desenvolvido aqui um raciocínio que permite estabelecer se uma equação polinomial de coeficientes inteiros admite raízes racionais e, em caso positivo, obter tais raízes.

### 3.5.1 Teorema das raízes racionais

*Teorema 19*: Se um equação polinomial $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$, de coeficientes inteiros, admite um raiz racional $\frac{p}{q}$, em que $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+^*$ e $p$ $e$ $q$ são primos entre si, então $p$ é divisor de $a_0$ e $q$ é divisor de $a_n$.

*Demonstração:*

Suponha-se que o numero $\frac{p}{q}$ (satisfazendo as condições do *teorema 19*) seja raiz do polinômio:

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n \neq 0)$$

Deve-se ter:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

isto é:

$$\frac{a_n p^n}{q^n} + \frac{a_{n-1}p^{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{a_{n-2}p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + \frac{a_1 p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando todos os termos por $q^n$, obtêm-se:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad (47)$$

Dividindo por $p$ todos termos de $(47)$ e passando o último termo para o lado direito, tem-se:

$$a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p} \quad (48)$$

O lado esquerdo da igualdade $(48)$ dá-se um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como $p$ $e$ $q$ são primos entre si, para que o número:

$$\frac{a_0 q^n}{p}$$

seja inteiro, $a_0$ deve ser divisível por $p$, isto é, $p$ é divisor de $a_0$.

Dividindo por $q$ todos os termos da igualdade $(47)$, e passando o primeiro termos para o lado direito, tem-se:

$$a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1} = -\frac{a_n p^n}{q} \quad (49)$$

O lado esquerdo da igualdade $(48)$ dá-se um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como $p$ $e$ $q$ são primos entre si, para que o número:

$$\frac{a_0 q^n}{p}$$

seja inteiro, $a_n$ deve ser divisível por $q$, isto é, $q$ é divisor de $a_n$.

3.5.1.1 Consequências do teorema das raízes racionais

Do *teorema 19*, tira-se imediatamente duas consequências:

1º) Se $p(x)$ admite uma raiz inteira $k \neq 0$, então $k$ deve ser divisor de $a_0$.

2º) Suponha-se que $a_n = 1$. Então, se $p(x)$ admitir raízes racionais, estas serão necessariamente inteiras.

## 3.6 Resoluções algébrica de equações

Houve uma dedicação para entender as propriedades de equações algébricas e de suas raízes. No decorrer deste processo, observou-se várias técnicas úteis para resolver determinadas equações; por exemplo, como reduzir o grau de uma equação, uma vez conhecidas uma ou mais de suas raízes.

O fato de não existir fórmulas algébricas de resolução para equações de grau superior a 4 não significa que não seja possível resolver tais equações, isto é, calcular suas raízes reais e complexas. Os processos de resolução, no entanto, envolvem métodos numéricos de aproximação. Na verdade, mesmo equações de grau 3 e 4 não são, na prática, resolvidas através de suas fórmulas algébricas de resolução, preferindo-se, na maior parte das vezes, recorrer a métodos numéricos.

Apesar da inexistência de fórmulas de resolução para equações de grau maior ou igual a 4, determinadas equações particulares podem ser resolvidas algebricamente.

Será apresentado as técnicas utilizadas na resoluções de equações de 1º e 2° grau neste capítulo e no próximo capítulo, a fórmula de Cardano para as equações cúbicas.

3.6.1 Equação do 1° grau

Para determinar a raiz da equação

$$ax + b = 0, com\ a \neq 0, \tag{50}$$

devemos somar em ambos os membros de $(50)$ o termo $(-b)$, obtendo

$$ax + b - b = -b$$

assim, encontra-se

$$ax = -b, \tag{51}$$

multiplicando os dois membros da equação $(51)$ por $\frac{1}{a}$ , obtêm-se:

$$\frac{1}{a}.ax = -b.\frac{1}{a}$$

portanto,

$$x = -\frac{b}{a}$$

é a raiz da equação $(50)$.

### 3.6.2 Equação do 2° grau

Para determinar as raízes da equação $(3)$, primeiramente multiplica-se os dois membros de $(3)$ por $\frac{1}{a}$, obtendo-se

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) = 0 \tag{52}$$

em seguida somando $\left(-\frac{c}{a}\right)$ em ambos os membros da equação, tem-se

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{c}{a}\right) + \left(-\frac{c}{a}\right) = \left(-\frac{c}{a}\right)$$

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x = \left(-\frac{c}{a}\right) \tag{53}$$

somando em ambos os membros da equação $(53)$ o termo "quadrado da metade do coeficiente do termo x", isto é, $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ obtêm-se:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) = \left(-\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

dessa forma, tem-se no primeiro membro um quadrado perfeito, então pode-se escrever a nova equação como segue

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \tag{54}$$

daí, existem duas soluções para a equação $(54)$,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou seja, a demonstração da fórmula (4) apresentada no capitulo 2.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

encontrando-se as raízes da equação $(3)$.

Passa-se a chamar o radicando

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{55}$$

de discriminante, usando a letra grega $\Delta$ $(delta\ maiúsculo)$ ele definirá a característica das raízes, sintetizada na tabela abaixo:

Tabela 1: Quantidade de raízes da equação de 2º grau

| DISCRIMINANTE | RAÍZES DA EQUAÇÃO |
|---|---|
| $\Delta > 0$ | Duas raízes reais e distintas. |
| $\Delta = 0$ | Duas raízes reais e iguais. |
| $\Delta < 0$ | Possui duas raízes complexas e conjugadas. |

Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

# 4 FÓRMULA DE CARDANO

Apesar de Cardano não ter sido o descobridor da resolução das equações de terceiro e quarto, ele deixou claro em sua publicação na Ars Magna sobre quem foram os respectivos descobridores, ele marcou o início do período moderno da matemática. Pensava como o matemático al-Khowarizmi sobre metodologia geométrica, de modo que podemos pensar em seu método como sendo de 'complementação do cubo'. (BOYER, 1996, p.195)

Até então a resolução da equação cúbica pelo método de Tartaglia-Cardano estava por fim vencida, mas um tempo depois, dúvidas e questionamentos sobre a aplicação desse método começaram a surgir. Uma dessas dúvidas era de que a fórmula de Bhaskara apresenta de maneira clara, as duas raízes das equações do segundo grau, por que não acontece o mesmo na de Cardano, mesmo quando as três de dada equação cúbica são conhecidas? Onde estarias as outras duas?

Com esse mistério, os matemáticos estavam diante de um desafio que se estenderia cerca de 200 anos e os esforços dos melhores cérebros, por fim conseguissem esclarecer essa questão. (GARBI 2010, p 41).

## 4.1 Solução de Cardano para $\boldsymbol{y^3 + py = q}$ $(\boldsymbol{p, q > 0})$

Sugestão de Cardano para determinar uma solução para a equação

$$y^3 + py = q \; com \; (p, q > 0) \tag{56}$$

Segundo Santos (2013) nota-se que Cardano ao utilizou os termos de modo que os resultados intermediários consistem sempre em quantidades positivas.

Considerando

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b > 0$ , que pode ser escrita na forma

$$(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3 \tag{57}$$

Comparando as equações (56) e (57), resulta na solução caso encontre os valores de $a \; e \; b$, então

$$\begin{cases} p = 3ab \\ q = a^3 - b^3 \end{cases}$$

Neste caso, $y = a - b$ será uma solução da primeira equação. Se $p = 3ab$, então, $p^3 = 27a^3b^3$, consequentemente

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27} \tag{58}$$

Por outro lado, $q = a^3 - b^3$ obtém-se $q^2 = (a^3 - b^3)^2$ assim

$$a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = q^2 \tag{59}$$

Agora somando as equações (58) e (59), resulta em

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2\,\frac{4p^3}{27} \tag{60}$$

tem-se

$$a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \tag{61}$$

O sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}} \\ a^3 - b^3 = q \end{cases}$$

cuja a solução é

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad e \quad b = -\sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Assim, de forma reduzida uma solução da equação cúbica (56), seria:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{62}$$

## 4.2 Solução de Cardano para $\boldsymbol{y^3 = py + q}$ $(\boldsymbol{p, q > 0})$

Nesta solução Cardano vem a garantir quantidades positivas até chegar a solução.

Considerando a equação

$$y^3 = py + q \;\; com \; (p, q > 0) \tag{63}$$

Considerando

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \,,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b > 0$, que pode ser escrita na forma

$$(a+b)^3 = 3ab(a+b) + (a^3 + b^3). \tag{64}$$

Comparando a última sentença, com a equação dada, nota-se que $y = a + b$ será uma solução da equação (56) em que $a \; e \; b$ são

$$\begin{cases} p = 3ab \\ q = a^3 + b^3 \end{cases}$$

de modo análogo, se $p = 3ab$, então $p^3 = 27a^3b^3$, consequentemente

$$4a^3b^3 = \frac{4p^3}{27} \tag{65}$$

por outro lado, de, $q = a^3 + b^3$ obtém-se

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 \tag{66}$$

Agora subtraindo as equações (63) e (64) consegue-se

$$a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = q^2 - \frac{4p^3}{27} \tag{67}$$

tem-se

$$a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 - \frac{4p^3}{27}} \tag{68}$$

A seguir, tem-se o sistema de equações

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ a^3 - b^3 = \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}} \end{cases}$$

cuja a solução

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad e \quad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Deste modo, usando $y = a + b$, provou-se que a solução da equação (63) é igual a solução da equação (56), ambas escritas como apresentada na equação (62).

### 4.3 Equação geral de terceiro grau

Qualquer equação geral de terceiro grau pode ser reduzida por meio de radicais. De acordo com Silva (2018), a equação consistir em

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \tag{69}$$

pode ser simplificada, multiplicando os membros de (69) por $\frac{1}{a_1}$, pois $a_1 \neq 0$, obtém-se

$$x^3 + \frac{a_2}{a_1}x^2 + \frac{a_3}{a_1}x + \frac{a_4}{a_1} = 0 \tag{70}$$

que segundo Lima (1987) a equação (70) é equivalente a equação

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{71}$$

que pode ser reduzida via mudanças de variáveis até chegar ao resultado de equação cúbica sem o termo da equação de segundo grau, assim fazendo a substituição em (71) por $x = y - \frac{a}{3}$ resulta em,

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0\,,$$

ou seja,

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0\,, \tag{72}$$

que é uma equação sem o termo de segundo grau. Assim a equação cúbica (72) em $y$ pode ser escrita por

$$y^3 + py + q = 0 \tag{73}$$

em que

$$p = -\frac{a^2}{3} + b \tag{74}$$

e

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \tag{75}$$

Para resolver essa equação (73), faz-se uma substituição por $y = u + v$ assim,

$$y^3 + py + q = (u + v)^3 + p(u + v) + q$$
$$= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q$$
$$= u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + p(u + v) + q$$
$$= u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q$$

então, encontra-se números $u, v$ tais que

$$u^3 + v^3 = -q \quad e \quad u.v = -\frac{p}{3}$$

ou seja,

$$u^3 + v^3 = -q \quad e \quad u^3.v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

por tanto, $u^3$ $e$ $v^3$ são dois números que conhecendo a sua soma e o seu produto, ou seja, são as raízes da equação quadrática

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (76)$$

usando a fórmula da equação (3) para resolver a equação (76) obtêm-se:

$$\Delta = q^2 - 4.1.\left(\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

segue-se

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}.\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)}$$

$$w_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad w_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

tem-se $u^3$ $e$ $v^3$como raízes da equação (76), sem perda de generalidade, escrevesse

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

isolando $u$ $e$ $v$ encontra-se

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad e \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

como $y = u + v$, a solução da equação (73)

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

que pode ser escrita da forma

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Após encontrado o valor de $y$, retorna-se a substituição inicial $y = x - \frac{a}{3}$ e assim, descobre-se o valor de $x$ da equação (71).

### 4.4 A solução apresentada por Moreira à equação do terceiro grau

Segundo Lima (1987) o autor desta façanha Carlos Gustavo Tamn de Araújo Moreira tinha apenas 14 anos quando apresentou a ele, em 1987, mas à época não recebeu a devida atenção. Mais em seguida, ele resolveu ouvi-lo e logo percebeu que se trata da forma mais simples e menos artificial das deduções das fórmulas para as equações do terceiro que conhecia.

Motivado pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do 2° grau em função dos coeficientes da equação, Carlos Gustavo resolveu um dia calcular a expressão:

$$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}, \tag{77}$$

onde $u\ e\ v$ são as raízes da equação

$$x^2 - Sx + P = 0 \tag{78}$$

(e portanto satisfazem $u + v = S\ e\ u.v = P$). Isso leva aos seguintes cálculos:

$$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \Rightarrow$$

$$y^3 = u + v + 3\sqrt[3]{u.v}\left(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}\right) \Rightarrow$$

$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{p} \tag{79}$$

Assim, para determinar $y$ resolve-se uma equação do 3° grau. Ocorreu a ele o seguinte: Dada uma equação do terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do 2° grau. Isso pode ser feito como a seguir:

Dada a equação (71), acha-se uma substituição $x = y + t$ que anule o coeficiente em $y^2$:

$$(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0$$

$$y^3 + (3t + a)y^2 + \cdots = 0 \tag{80}$$

faz-se uma substituição em (80) por $t = -\frac{a}{3}$ e encontra-se uma equação do tipo da (73).

Determina números $P \; e \; S$ tais que

$$P = -3\sqrt[3]{p} \; e \; q = -S$$

de forma que se $u \; e \; v$ são raízes de (78), então $\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ satisfaz a equação (73).

Feito isso, consegue-se

$$\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3} \;\Rightarrow\; P = -\frac{p^3}{27} \quad e \quad S = -q$$

substitui-se os valores de $S \; e \; P$ na equação (70), tem-se

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{81}$$

isto é,

$$u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad v = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

donde,

$$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

satisfaz a equação (73).

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3}$ diz-se que o produto das duas raízes deve ser $-\frac{p}{3}$. Essa fórmula dá as três raízes de (73), que somadas a $t = -\frac{a}{3}$ da as três raízes de (71).

## 4.5 Análise das raízes de uma equação do terceiro grau

Nesta seção será classificado as raízes de uma equação do terceiro grau, em relação ao conjunto dos números reais ou complexos. A explicação a seguir será desenvolvida por meio da fórmula de Cardano, demostrada nas seções anteriores para a equação cúbica do tipo (73), que tem como solução a expressão (62), como descrito abaixo:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

A análise se faz necessária apenas na expressão algébrica que encontra-se no radical quadrático, passando a denomina-lo de discriminante, representado pela letra do nosso alfabeto D.

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (82)$$

Segundo Silva (2015, p.58) o valor do discriminante (82) da fórmula de Cardano está diretamente relacionado com o número de raízes reais da equação do terceiro grau.

Estuda-se a relação entre o sinal desse discriminante (82) e os tipos de raízes da equação (73).

**1° caso:** Três raízes reais e distintas.

Sejam $r_1, r_2\ e\ r_3$ as raízes dessa equação (73). Das relações de Girard (44), tem-se:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = 0$$

$$r_1.r_2 + r_2.r_3 + r_1.r_3 = \frac{c}{d} \Rightarrow \ r_1.r_2 + r_2.r_3 + r_1.r_3 = p$$

$$r_1.r_2.r_3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow \ r_1.r_2.r_3 = -q$$

Da primeira relação obtêm-se que $r_3 = -(r_1 + r_2)$. Usando isto na segunda e na terceira relação encontra-se

$$p = \ r_1.r_2 - (r_1 + r_2)^2 \ e\ q = r_1 r_2 (r_1 + r_2)$$

Assim,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left[\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{r_1 r_2 - (r_1 + r_2)^2}{3}\right]^3$$

Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontra-se

$$D = -\frac{(r_1 - r_2)^2 (2r_1 + r_2)^2 (r_1 + 2r_2)^2}{108} \quad (83)$$

Portanto, se $D < 0$, a equação (73) possuíra 3 raízes reais e distintas.

**2° caso:** Três raízes reais e onde pelo menos duas são iguais.

Suponha-se que $r_1 = r_2$, de (83), tem-se

$$D = -\frac{(r_1 - r_2)^2(2r_1 + r_2)^2(r_1 + 2r_2)^2}{108} = 0$$

Suponha-se agora que $r_1 = r_3$, da primeira relação de Girard $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ decorre que $r_2 = -2r_1$ e de (83), tem-se

$$D = -\frac{(r_1 - r_2)^2(2r_1 + r_2)^2(r_1 + 2r_2)^2}{108} = 0.$$

Finalmente, suponha-se que $r_2 = r_3$. Como $r_1 + r_2 + r_3 = 0$ segue que $r_1 = -2r_2$, logo de (83), tem-se

$$D = -\frac{(r_1 - r_2)^2(2r_1 + r_2)^2(r_1 + 2r_2)^2}{108} = 0\ .$$

Portanto, se $D = 0$, a equação (73) possuíra 3 raízes reais com pelo menos duas delas idênticas.

**3° caso:** Uma raiz real e duas raízes complexas.

Sejam $r_1 = a + bi, r_2 = a - bi\ e\ r_3 = k$ as raízes da equação (65) com $a, k \in \mathbb{R}\ e\ b \in \mathbb{R}^*$. Pelo *teorema 16*, nota-se que se um número complexo $z$ é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então o seu conjugado, $\bar{z}$, também o é.

Usando novamente as relações de Girard, tem-se que

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0 \Rightarrow k = -2a$$

$$r_1.r_2 + r_2.r_3 + r_1.r_3 = p \ \Rightarrow\ a^2 + b^2 + 2ak = p$$

$$r_1.r_2.r_3 = -q \Rightarrow\ k(a^2 + b^2) = -q$$

Substituindo o valor de k nas duas últimas equações, obtêm-se

$$p = b^2 - 3a^2 \quad e\ \ q = 2a(a^2 + b^2)$$

que substituídos em $D$ da-se

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left[\frac{2a(a^2 + b^2)}{2}\right]^2 + \left[\frac{b^2 - 3m^2}{3}\right]^3$$

Expandindo cada parcela e reagrupando os termos comuns, encontra-se

$$D = \frac{81a^4b^2 + 18a^2b^4 + n^6}{108} \tag{84}$$

Portanto, se $D > 0$, a equação (73) possuíra uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Em resumo, o discriminante (82) por se tratar de um número, pode assumir três valores, que se classificam da seguinte forma:

Tabela 2 - Valores das raízes da equação de 3º grau

| DISCRIMINANTE | RAÍZES DA EQUAÇÃO |
|---|---|
| D < 0 | Três raízes reais |
| D = 0 | Três raízes reais, onde pelo menos duas são iguais |
| D > 0 | Uma raiz real e duas complexas conjugadas |

Fonte: Elaborado pelo autor

### 4.5.1 Raízes estranhas inseridas na equação cúbica

A fórmula de Cardano, trouxe à época, mais perguntas que respostas, sua aplicação fizera aparecer operações com um novo e misterioso tipo de número e que não se conseguia conciliar a expressão (55), com exemplos práticos de equações do 3º grau que exibiam 3 raízes. Além disso, ao se resolver uma equação cúbica, costuma-se trabalhar por meio de operações como soma, subtração, multiplicação ou divisão, aplicadas a ambos os membros da igualdade. Tal manipulação é realmente válida e a cada passo vão sendo obtidas equações mais convenientes, mas cujas raízes são sempre aquelas da equação original.

Este procedimento foi empregado ao longo do tempo até que um dia os matemáticos deram-se conta que algumas operações aparentemente inocentes poderiam introduzir raízes estranhas à equação da qual se partiu. Observe esse exemplo para entender melhor o que foi dito.

Seja a equação

$$x = 1 \tag{85}$$

É evidente que a elevação dos dois lados de (77) ao cubo (ou qualquer potência) continua mantendo o equilíbrio, ou seja

$$x^3 = 1 \tag{86}$$

Esta segunda equação (78) pode ser assim reescrita:

$$x^3 - 1 = 0 \quad ou \quad (x-1).(x^2+x+1) = 0$$

e suas raízes são $x = 1,\ x = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\ e\ \ x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

O que estaria ocorrendo? Por que apareceram tais raízes?

A resposta é dada por Euller, que descobriu que enquanto a potenciação é unívoca (cada número tem somente uma potência enésima), a radiciação não o é (um número tem $n$ raízes enésimas). No retorno da potenciação de alguns caminhos não conduzem à equação original. Estes correspondem às raízes estranhas.

Uma dúvida comum na época era que, como é possível haver raízes estranhas na fórmula de Cardano se nem ao menos as duas legítimas se pode enxergar?

Euller de maneira simples, resolveu esse problema secular: cada parcela que compõem $y$ corresponde à extração de raízes cúbicas e portanto, tem 3 alternativas. Assim, são 9 os valores possíveis da soma de cada raiz cúbica, sendo 3 deles raízes legítimas e 6 raízes estranhas inseridas na equação cúbica.

# 5 APLICABILIDADE DA FÓRMULA DE CARDANO

Neste capítulo, aplica-se a fórmula de Cardano nas equações cúbicas, para a obtenção de uma raiz e em seguida usa-se o método mais adequado para encontrar as outras raízes, com isso determina-se a solução das equações cúbicas via Cardano.

*Aplicações:*

1º) Questão apresentada por Lima (1987, p. 17): Resolver a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$

*Resolução:*

Inicialmente pode-se perceber que a equação já se encontra na forma (65) na variável $x$, o que indica $p = -6 \ e \ q = -9$. Assim tem-se:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-9}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = \left(\frac{49}{4}\right)$$

Nesse caso em que o $D > 0$, a equação cúbica sempre fornecerá uma raiz real e outras duas raízes complexas e conjugadas, como mostra-se a seguir:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1 = 3$$

Ao determinar a raiz real da equação, pode-se então utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini (ver 3.2.4.5.6) para efetuar a divisão entre $x^3 - 6x - 9 = 0$ e $x - 3$ e com isso, baixar o grau da equação.

$$\begin{array}{c c c c | c}
1 & 0 & -6 & -9 & 3 \\
\hline
1 & \underbrace{1.3+0}_{3} & \underbrace{3.3-6}_{3} & \underbrace{3.3-9}_{0} &
\end{array}$$

logo, $x^3 - 6x - 9 = (x-3).(x^2+3x+3)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + 3x + 3 = 0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bhaskara (4) tem-se que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

sendo, $a = 1, b = 3 \; e \; c = 3$

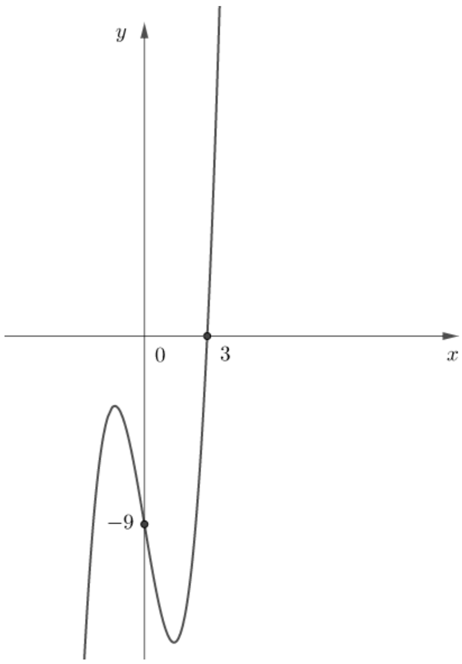
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.3}}{2.1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

portanto, as três raízes da equação são: $S = \left\{3, \frac{-3+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}i}{2}\right\}$, como mostra-se na figura (7).

Figura 7- Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x - 9$ da questão (1)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

2º) Questão apresentada por Lima (1987, p.18): Resolver a equação $x^3 - 3x - 2 = 0$

*Resolução:*

Inicialmente nota-se que a equação já se encontra na forma (73) na variável $x$, o que indica $p = -3 \; e \; q = -2$. Assim tem-se:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 0$$

Nesse caso em que o $D = 0$, a equação cúbica sempre fornecerá três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais conforme descrito na tabela (2), mostra-se a seguir:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{0}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{0}}$$

$$x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 1 + 1 = 2$$

Ao determinar a raiz real da equação, pode-se então utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini (ver 3.2.4.5.6) para efetuar a divisão entre $x^3 - 3x - 2 = 0$ e $x - 2$ e com isso, baixar o grau da equação.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ \hline 1 & \underbrace{1.2 + 0}_{2} & \underbrace{2.2 - 3}_{1} & \underbrace{1.2 - 2}_{0} & \end{array}$$

logo, $x^3 - 3x - 2 = (x - 2).(x^2 + 2x + 1)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + 2x + 1$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bhaskara (4) tem-se que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

sendo, $a = 1, b = 2\ e\ c = 1$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

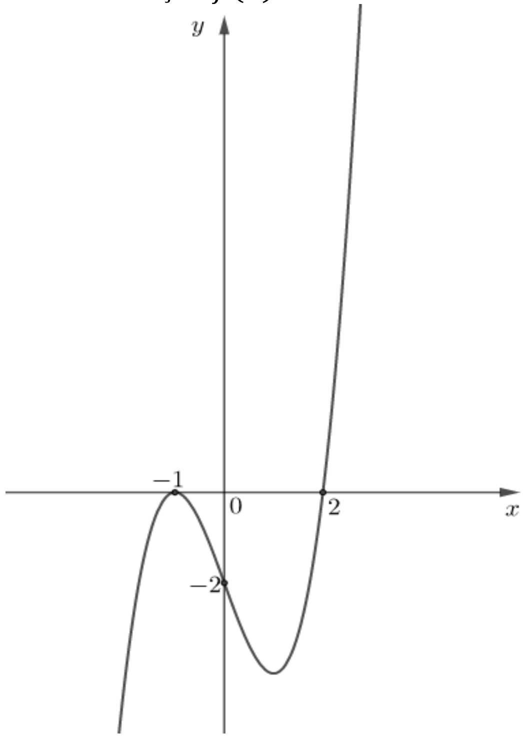
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

portanto, as três raízes da equação são: $S = \{1, 1, 2\}$, como mostra-se na figura (8).

Figura 8 - Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x - 2$ da questão (2)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

3º) Questão apresentada por Vertuoso (2019, p.34): Resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$.

*Resolução:*

Inicialmente pode-se perceber que a equação cúbica, se encontra na forma (71), faz-se uma substituição de $y = x - \frac{a}{3}$ e determina-se os valores de $p = -\frac{a^2}{3} + b\ e\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ para escrever a equação cúbica na forma (65) e resolvê-la usando a fórmula de Cardano. Tem-se:

$$p = -\frac{(-6)^2}{3} + 6 = -6 \quad e\ q = \frac{2.(-6)^3}{27} - \frac{(-6).6}{3} + (-5) = -9$$

Assim chega-se a $y^3 - 6y - 9 = 0$, como a solução dessa equação é igual a da questão 1, sabemos que $y = 3$ e consequentemente, tem-se $x = 3 - \frac{(-6)}{3} = 5$, com isso determina-se uma das raízes de $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = 0$ e com ela pode-se extrair as demais usando o dispositivo de Briot – Ruffini (ver 3.2.4.5.6).

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -6 & 6 & -5 & 5 \\
\hline
1 & \underbrace{1.5-6}_{-1} & \underbrace{(-1).5+6}_{1} & \underbrace{1.5-5}_{0} &
\end{array}$$

logo, $x^3 - 6x^2 + 6x - 5 = (x-5).(x^2 - x + 1)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $x^2 - x + 1 = 0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bhaskara (4) tem-se que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

sendo, $a = 1, b = -1\ e\ c = 1$

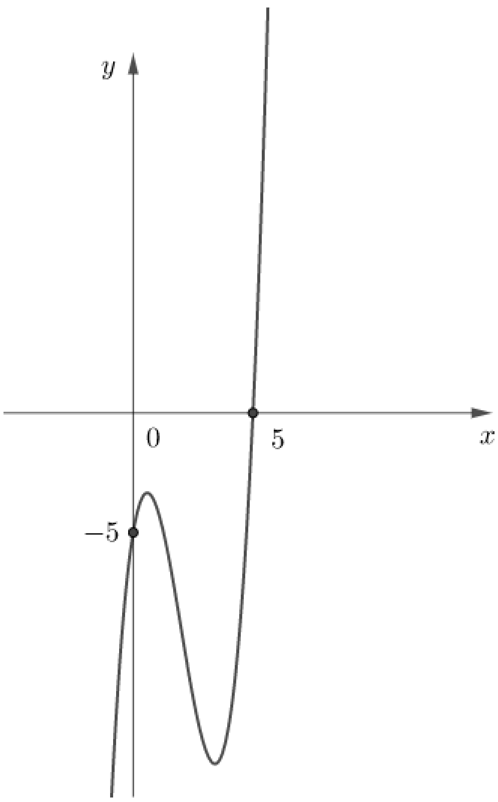
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

portanto, as três raízes da equação são: $S = \left\{5, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$, como mostra-se na figura (9).

Figura 9- Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$ da questão (3)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

4º) Questão apresentada por Lima (1987, p.18): Resolver a equação $x^3 - 6x - 4 = 0$.

*Resolução:*

Inicialmente pode-se perceber que a equação já se encontra na forma (73) na variável $x$, o que indica $p = -6\ \ e\ q = -4$. Assim tem-se:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = -4$$

Nesse caso em que o $D < 0$, a equação cúbica sempre nos fornecerá três raízes reais (ver tabela 2), como mostra-se a seguir:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{-4}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$$

Neste caso, o discriminante (82) da equação, deu negativo, isso remete-se a três raízes reais ver tabela (2), todavia depara-se com um desafio a mais, que no caso será extrair raízes cúbicas de números complexos. Utilizando-se do conhecimento sobre números complexos apresentado no capítulo 2, para determinar tais raízes. As raízes de um número complexo $z = a + bi$ podem ser calculadas pela equação (16). Para tanto, antes de usa-la, precisa-se determinar:

- a parte real e imaginária. Para $z_1 = 2 + 2i,\ a = 2\ e\ b = 2$;
- em seguida, calcula-se o módulo do número complexo de acordo com (11),

$$p = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

- A partir do valor do módulo, determina-se o seno e o cosseno, e a partir deles, inferir o argumento utilizando o círculo trigonométrico, têm-se

$$\cos\theta = \frac{a}{p} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{a}{p} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Com os valores de seno e cosseno obtidos pode-se inferir que $\theta = 45°$ graus e o equivalente em radiano a $\theta = \frac{\pi}{4}$ no intervalo de $[0,2\pi]$. Diante desses valores, aplica-se na fórmula (16),

$$w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + 0.\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{3} + 0.\frac{2\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left[\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) + i.\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{12}+2}{4} + \frac{\sqrt{12}-2}{4}i$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{2\sqrt{3}+2}{4} + \frac{2\sqrt{3}-2}{4}i$$

$$\Rightarrow w_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$$

Como os argumentos das raízes cúbicas formam uma progressão aritmética (PA) de razão $\theta = \frac{2\pi}{3}$, as raízes seguintes são:

$$w_1 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 = -1 + i$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\left[\left(\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{-\sqrt{12}+2}{4} + \frac{-\sqrt{12}-2}{4}i$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{-2\sqrt{3}+2}{4} + \frac{-2\sqrt{3}-2}{4}i$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} + \frac{-\sqrt{3}-1}{2}i$$

Agora é necessário determinar as raízes cúbicas de $z_2 = 2 - 2i,\ a = 2\ e\ b = -2$, mas como o processo para a obtenção dessas raízes é análogo, não se faz necessário repetir o processo, então têm-se:

$$t_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i$$

$$t_1 = -1 - i$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i$$

Diante das respectivas raízes cúbicas, determina-se os nove valores possíveis para a soma que compõem $x$:

$$x_1 = w_0 + t_0 = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i\right) + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x_2 = w_0 + t_1 = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i\right) + -1 - i = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 3}{2} i$$

$$x_3 = w_0 + t_2 = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i\right) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i\right) = \sqrt{3} + 1$$

$$x_4 = w_1 + t_0 = (-1 + i) + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{3 + \sqrt{3}}{2} i$$

$$x_5 = w_1 + t_1 = (-1 + i) + (-1 - i) = -2$$

$$x_6 = w_1 + t_2 = (-1 + i) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{3 - \sqrt{3}}{2} i$$

$$x_7 = w_2 + t_0 = \left(\frac{-\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} i\right) + \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i\right) = -\sqrt{3} + 1$$

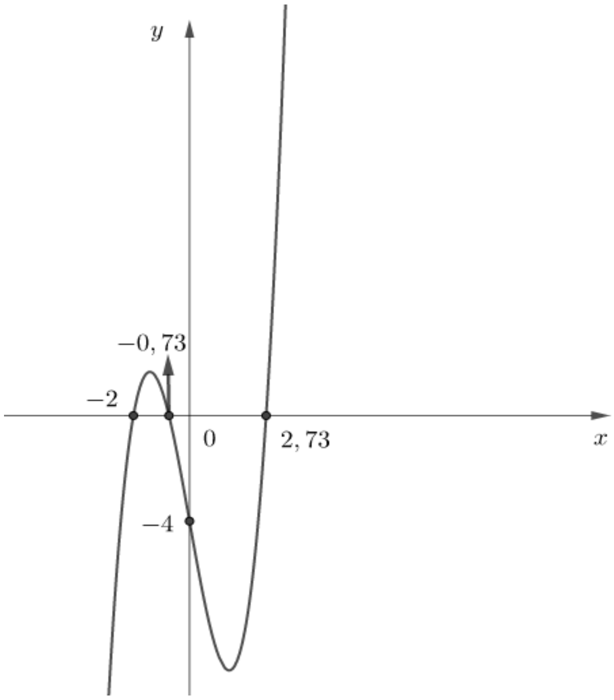
$$x_8 = w_2 + t_1 = \left(\frac{-\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} i\right) + (-1 - i) = \frac{-\sqrt{3} - 2}{2} + \frac{-\sqrt{3} - 3}{2} i$$

$$x_9 = w_2 + t_2 = \left(\frac{-\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} i\right) + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

É importante ressaltar que, dos nove valores possíveis para a soma que compõem $x$, três deles são raízes legítimas e as outras seis são raízes estranhas, portanto é necessário testar cada um deles para eliminar as raízes estranhas. Porém, utilizando-se das informações a respeito do descriminante (82), nota-se que $D < 0$, o que implica que as raízes são todas reais ver tabela (2), e por sua vez, dos nove valores possíveis para a soma, apenas três resulta em números reais.

Portanto, as três raízes da equação são: $S = \{-2, -\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1\}$, como mostra-se na figura (10).

Figura 10 - Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x - 4$ da questão (4)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

5º) Questão apresentada por Paiva (2009, p.181): Em um mesmo dia, Carlos tomou emprestado R$ 20.000,00 de um banco A, à taxa anual $x$ de juro simples, e R$ 10.000,00 do banco B, à taxa anual $x$ de juro composto. Três anos depois ele pagou quantias iguais aos dois bancos, liquidando as dívidas.

a) Sabendo que no decorrer desses três anos não foi feita nenhuma amortização das dívidas, qual é a equação na incógnita $x$, que relaciona as quantias pagas aos bancos?

b) Resolvendo a equação sugerida no item a, obtém – se a taxa $x$. Qual é essa taxa?

*Resolução:*

Do enunciado tem-se as dívidas $D_A$ $e$ $D_B$ após três anos.

a) Banco A: $D_A = 20000 + 20000.x.3$ e Banco B: $D_B = 10000.(1+x)^3$, logo a equação que relaciona as quantias pagas aos dois bancos é:

$$D_A = D_B$$

$$20000 + 20000x.3 = 10000.(1 + x)^3$$

que é equivalente a:

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$$

b) Inicialmente pode-se perceber que a equação cúbica, se encontra na forma (71), se faz uma substituição de $y = x - \frac{a}{3}$ e determina-se os valores de $p = -\frac{a^2}{3} + b \ e \ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ para escrever a equação cúbica na forma (65) e resolvê-la usando a fórmula de Cardano. Tem-se:

$$p = -\frac{3^2}{3} - 3 = -6 \quad e \quad q = \frac{2.3^3}{27} - \frac{3.(-3)}{3} + (-1) = 4$$

com os valores de $p \ e \ q$, pode-se escrever a equação $y^3 - y + 4 = 0$ e assim tem-se,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = -4$$

Nesse caso em que o $D < 0$, a equação cúbica sempre nos fornecerá três raízes reais ver tabela (2), como mostra-se a seguir:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{-4}}$$

$$x = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}$$

Como observado, na questão 4 apresentada por Lima (1987, p.18), extrai-se as três raízes reais do números complexos acima. Assim, não há outro caminho, menos trabalhoso, do que utilizar-se do conhecimento sobre números complexos apresentado no capítulo 2, para determinar tais raízes. As raízes de um número complexo $z = a + bi$ podem ser calculadas pela equação (16). Para tanto, antes de usa-la, precisa-se determinar:

- a parte real e imaginária. Para $z_1 = -2 + 2i, \ a = -2 \ e \ b = 2$;

- em seguida, calcula-se o módulo do número complexo de acordo com (11),

$$p = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

- a partir do valor do módulo, determina-se o seno e o cosseno, e a partir deles, inferir o argumento utilizando o círculo trigonométrico, têm-se

$$\cos\theta = \frac{a}{p} = \frac{-2}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{a}{p} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Com os valores de seno e cosseno obtidos pode-se inferir que $\theta = 135°$ graus e o equivalente em radiano a $\theta = \frac{3\pi}{4}$ no intervalo de $[0{,}2\pi]$. Diante desses valores, aplica-se na fórmula (16),

$$w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left[cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + 0.\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + 0.\frac{2\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_0 = 1 + i$$

Como os argumentos das raízes cúbicas formam uma progressão aritmética (PA) de razão $\theta = \frac{2\pi}{3}$, as raízes seguintes são:

$$w_1 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\left[\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + i\,\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{4} + i\,\frac{-2 + \sqrt{12}}{4}$$
$$\Rightarrow w_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} + \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4}i$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\left[\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{-2+\sqrt{12}}{4} + \frac{-2-\sqrt{12}}{4}i$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} + \frac{-2-2\sqrt{3}}{4}i$$

$$\Rightarrow w_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$$

Agora é necessário determinar as raízes cúbicas de $z_2 = -2 - 2i,\ a = -2\ e\ b = -2$, mas como o processo para a obtenção dessas raízes é análogo, não se faz necessário repetir o processo, então têm-se:

$$t_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$$

$$t_1 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{4}$$

$$t_2 = 1 - i$$

Diante das respectivas raízes cúbicas, determina-se os nove valores possíveis para a soma que compõem y:

$$y_1 = w_0 + t_0 = (1+i) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}+3}{2}i$$

$$y_2 = w_0 + t_1 = (1+i) + \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}+3}{2}i$$

$$y_3 = w_0 + t_2 = (1+i) + (1-i) = 2$$

$$y_4 = w_1 + t_0 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$y_5 = w_1 + t_1 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-\sqrt{3}+1}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}$$

$$y_6 = w_1 + t_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-3+\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_7 = w_2 + t_0 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}$$

$$y_8 = w_2 + t_1 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i) = \frac{-3+\sqrt{3}}{2} + \frac{-3-\sqrt{3}}{2}i$$

$$y_9 = w_2 + t_2 = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i\right) + (1-i) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-3-\sqrt{3}}{2}i$$

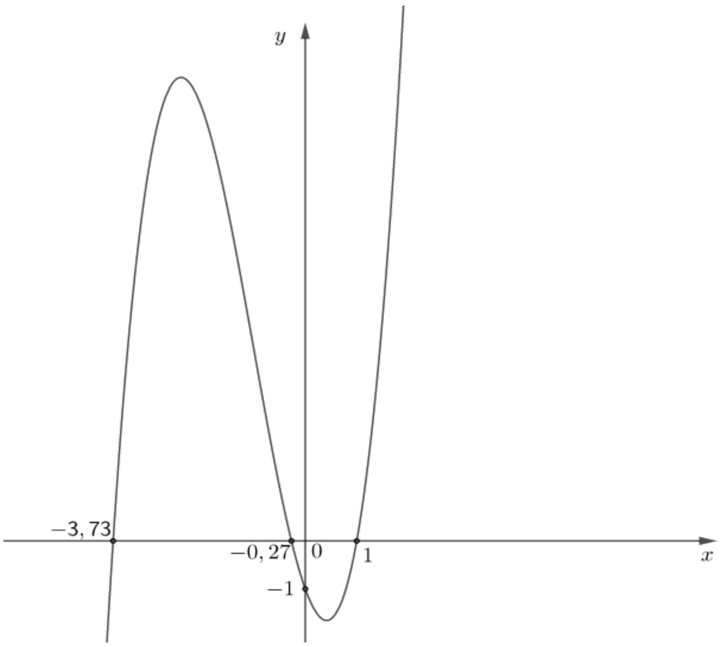
É importante ressaltar que, dos nove valores possíveis para a soma que compõem y, três deles são raízes legítimas e seis são raízes estranhas, portanto é necessário testar cada um deles para eliminar as raízes estranhas. As três raízes da equação $y^3 - y + 4 = 0$ são $2,\ -1 + \sqrt{3}\ \ e\ -1 + \sqrt{3}$, consequentemente para determinar as raízes da $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$, usa-se $x = y - \frac{3}{3} = y - 1$, assim tem-se:

$$y = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

$$y = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{3} - 1 = -2 + \sqrt{3}$$
$$y = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow x = -1 - \sqrt{3} - 1 = -2 - \sqrt{3}$$

Portanto, as três raízes da equação são: $1, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$, mas como a taxa de empréstimo é positiva, conclui-se que a taxa anual é $x = 1$, ou seja, 100%, como mostra a figura (11).

Figura 11 - Gráfico da função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ da questão (5)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

6º) Questão sugerido por Dante (2017, p.242): Quando um reservatório está parcialmente cheio, uma torneira é aberta para enchê-lo. Depois de aberta a torneira, o volume de água que ainda falta para encher o reservatório, em metros cúbicos, é dado pela função $v(t) = t^3 - 2t^2 -$

$4t+8$, com $t$ dado em horas. Sendo assim, determine o volume, em $m^3$, da água contida no reservatório no momento em que a torneira foi aberta e o tempo (em horas) necessário para que o reservatório fique completamente cheio.

*Resolução:*

Quando a torneira foi aberta $t=0$ tem-se:

$$v(0)=0^3-2.0^2-4.0+8=8\,m^3$$

o reservatório está cheio quanto $v(t)=0\ m^3$. Então:

$$t^3-2t^2-4t+8=0$$

Inicialmente pode-se perceber que a equação cúbica, se encontra na forma (71) na variável $t$, faz-se uma substituição de $y=t-\frac{a}{3}$ e determina-se os valores de $p=-\frac{a^2}{3}+b\ e\ q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$ para escrever a equação cúbica na forma (73) e resolvê-la usando a fórmula de Cardano. Tem-se:

$$p=-\frac{(-2)^2}{3}-4=-\frac{16}{3}\quad e\quad q=\frac{2.(-2)^3}{27}-\frac{(-2).(-4)}{3}+8=\frac{128}{27}$$

com os valores de $p\ e\ q$, pode-se escrever a equação $y^3-\frac{16}{3}y+\frac{128}{27}=0$ e assim tem-se,

$$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{\frac{128}{27}}{2}\right)^2+\left(\frac{-\frac{16}{3}}{3}\right)^3=\left(\frac{2^{12}}{3^6}\right)-\left(\frac{2^{12}}{3^6}\right)=0$$

Nesse caso em que o $D=0$, a equação cúbica $y^3-\frac{16}{3}y+\frac{128}{27}=0$ sempre fornecerá três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais (ver tabela 2), como se mostra a seguir:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{128}{54}+\sqrt{0}}+\sqrt[3]{-\frac{128}{54}-\sqrt{0}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{64}{27} + 0} + \sqrt[3]{-\frac{64}{27} - 0}$$

$$x = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

Como $t = x - \frac{a}{3} = -\frac{8}{3} - \frac{(-2)}{3} = -\frac{6}{3} = -2$, determina-se uma das raízes de $t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0$ e com ela pode-se extrair as demais raízes usando o dispositivo de Briot – Ruffini (ver 3.2.4.5.6) na divisão de $t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0$ por $t + 2$ baixando o grau da equação.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 8 & & -2 \\ \hline 1 & \underbrace{1.(-2) - 2}_{-4} & \underbrace{(-4).(-2) - 4}_{4} & \underbrace{4.(-2) - 5}_{0} & & \end{array}$$

logo, $t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = (t + 2).(t^2 - 4t + 4)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bhaskara (4) tem-se que,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

sendo, $a = 1, b = -4\ e\ c = 4$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.4}}{2.1}$$

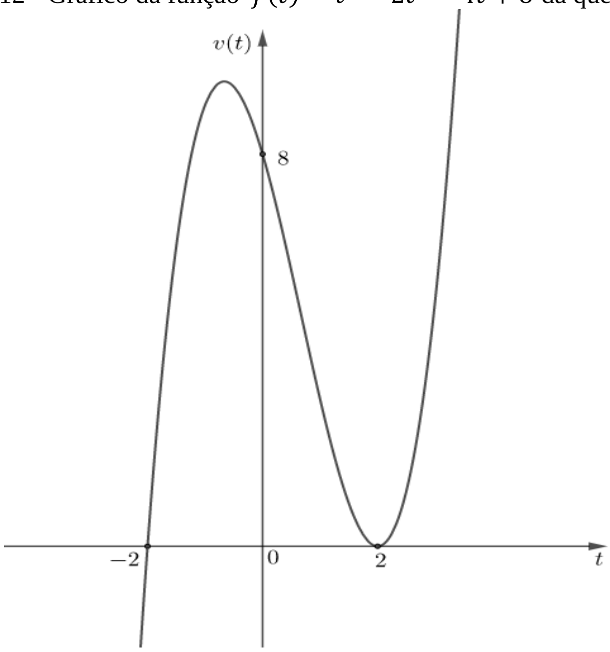
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

Portanto, as três raízes da equação são: $-2, 2\ e\ 2$ como previsto, tem-se uma raiz dupla. Mas como trata – se de uma variável que tem que ser positiva (tempo), conclui-se que levarão duas horas ($t = 2$), encher o reservatório, como mostra a figura (12).

Figura 12 - Gráfico da função $f(t) = t^3 - 2t^2 - 4t + 8$ da questão (6)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

7º) Questão apresentada por Paiva (2009, p.175): Um engenheiro projetou duas caixas d’água de mesma altura: Uma em forma de cubo e a outra em forma de paralelepípedo reto-retângulo com 6 $m^2$ de área da base como mostra na figura (13). O volume da caixa cúbica deve ter 4 $m^3$ a menos que o volume da outra caixa.

a) Indicando por $x$ a medida, em $m$, de cada aresta da caixa cúbica, que é também a medida da altura da outra caixa, qual é a equação que relaciona os volumes dessa caixa?

b) Resolvendo a equação sugerida no item a, obtém-se a medida da aresta da caixa cúbica. Qual é essa medida?

*Resolução:*

Figura 13 - Representação das caixas da questão7


Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

a) como $a.b = 6\ m^2$, tem-se:

$$x^3 = a.b.x - 4 \Rightarrow x^3 - 6x + 4 = 0$$

b) Inicialmente pode-se perceber que a equação já se encontra na forma (73), o que indica $p = -6 \ e \ q = 4$. Assim tem-se:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{3}\right)^3 = -4$$

Nesse caso em que o $D < 0$, a equação cúbica sempre nos fornecerá três raízes reais ver tabela (2), como mostra-se a seguir:

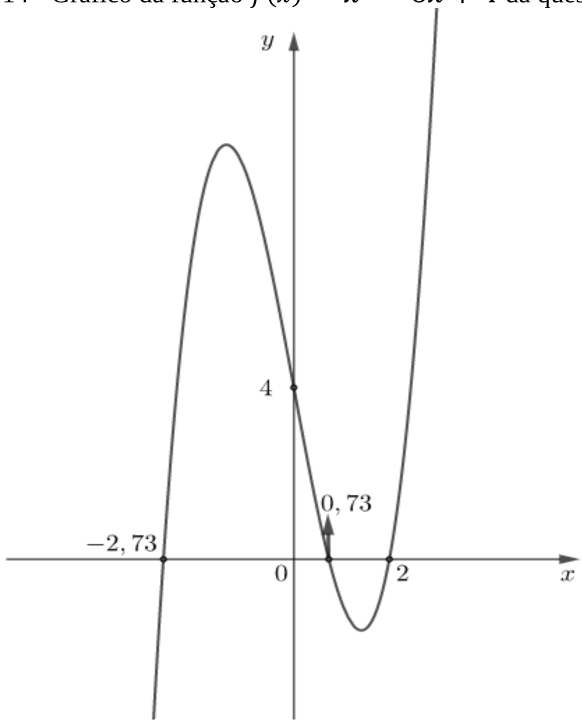
$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{-4}}$$

$$x = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i}$$

Esse valor de $x$ já foi calculado na questão 5 sugerida por (PAIVA, 2009), portanto as raízes já foram extraídas, são elas $2, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$, como trata – se de uma figura geométrica, $x > 0$, então conclui-se que o cubo possui aresta $2\,m\ ou\ \left(-1 + \sqrt{3}\right) m$, como apresentado na figura (14).

Figura 14 - Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x + 4$ da questão (7)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

8º) Questão apresentada por Paiva (2009, p.175): Quando um reservatório está cheio de água, uma torneira é aberta para esvazia-lo. A quantidade de água remanescente no reservatório, em $m^3$, após $t$ horas do inicio do esvaziamento, é dada pela função polinomial $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$. Supondo que não seja acrescida mais água no reservatório, responda:

a) Qual é a quantidade de água, em $m^3$, contida no reservatório após $30$ minutos do início do esvaziamento?

b) Enquanto tempo, após o início do esvaziamento, toda água do reservatório terá sido escoada?

*Resolução:*

a) Se $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$, é a quantidade de água remanescente no reservatório após $t$ horas do início do esvaziamento, então após $30$ minutos, ou $\frac{1}{2}$ hora, tem-se:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \left(\frac{3}{8}\right) = 0{,}375$$

Conclui-se que após $30$ minutos há $0{,}375\ m^3$ de água no reservatório.

b) Toda água terá sida utilizada para $f(t) = 0$, ou seja:

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0$$

Inicialmente pode-se perceber que a equação cúbica, se encontra na forma (71) na variável $t$, faz-se uma substituição de $y = t - \frac{a}{3}$ e determina-se os valores de $p = -\frac{a^2}{3} + b\ e\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ para escrever a equação cúbica na forma (73) e resolvê-la usando a fórmula de Cardano. Tem-se:

$$p = -\frac{(-1)^2}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \quad e \quad q = \frac{2.(-1)^3}{27} - \frac{(-1).(-1)}{3} + 1 = \frac{16}{27}$$

com os valores de $p\ e\ q$, pode-se escrever a equação $y^3 - \frac{4}{3}y + \frac{16}{27} = 0$ e assim tem-se,

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{16}{27}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\frac{4}{3}}{3}\right)^3 = \left(\frac{2^6}{3^6}\right) - \left(\frac{2^6}{3^6}\right) = 0$$

Nesse caso em que o $D = 0$, a equação cúbica $y^3 - \frac{4}{3}y + \frac{16}{27} = 0$, sempre fornecerá três raízes reais, sendo pelo menos duas iguais ver tabela (2), como mostra-se a seguir:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{16}{54}+\sqrt{0}}+\sqrt[3]{-\frac{16}{54}-\sqrt{0}}$$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{8}{27}+0}+\sqrt[3]{-\frac{8}{27}-0}$$

$$x=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

Como $t=x-\frac{a}{3}=-\frac{4}{3}-\frac{(-1)}{3}=-\frac{3}{3}=-1$, determina-se uma das raízes de $t^3-t^2-t+1=0$ e com ela pode-se extrair as demais raízes usando o dispositivo de Briot – Ruffini (ver 3.2.4.5.6) na divisão de $t^3-t^2-t+1=0$ por $t+1$ baixando o grau da equação.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & \underbrace{1.(-1)-2}_{-2} & \underbrace{(-2).(-1)-1}_{1} & \underbrace{1.(-1)-1}_{0} & \end{array}$$

logo, $t^3-t^2-t+1=(t+1).(t^2-2t+1)$.

Assim, resolvendo a equação do segundo grau $t^2-2t+1=0$, determina-se as duas raízes que faltam dessa equação. Utilizando a fórmula de Bhaskara (4) tem-se que,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

sendo, $a=1, b=-2\ e\ c=1$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1.1}}{2.1}$$

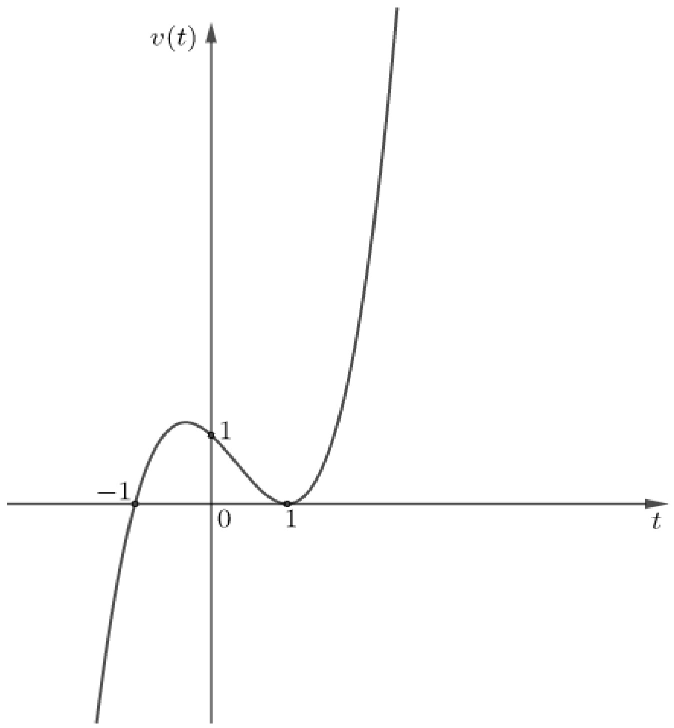
$$x=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm 0}{2}$$

$$x_1=x_2=1$$

Portanto, as três raízes da equação são: $-1, 1\ e\ 1$ como previsto, tem-se uma raiz dupla. Mas como trata – se de uma variável que tem que ser positiva (tempo), conclui-se que após 1 hora ($t=1$), toda a água do reservatório terá sido utilizada, como mostra a figura 15.

Figura 15 - Gráfico da função $f(t) = t^3 - t^2 - t + 1$ da questão (8)




Fonte: Elaborado pelo autor do trabalho

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo do contexto histórico foi possível visualizar a evolução das resoluções das equações de 1° e 2° grau até a resolução das equações cúbicas, através dos esforços de grandes matemáticos, que contribuíram direta ou indiretamente na construção desse processo. Dentre esses matemáticos estão Cardano e Tartaglia, que não foram responsáveis pela descoberta da resolução, mas foram essenciais para que a fórmula viesse a público, revelando verdadeiramente quem de fato era responsável pela descoberta.

Nota-se com isso, que estudar a história da equação de terceiro grau e apresentar um método geral de resolução dessas equações, oferecem aos alunos a oportunidade de se aprofundarem na matemática, bem como de resolver problemas que antes, pareciam impossíveis. Trabalho construído com o intuito de ensinar a fórmula de Cardano aos alunos da educação básica, em especial aos alunos do 3° ano do ensino médio, que seria de grande valor histórico e cientifico, por isso a escolha desse tema.

Observou-se que os problemas de equações cúbicas também podem ser solucionados aplicando a fórmula de Cardano, gerando no aluno uma combinação de curiosidade, motivação e o fortalecimento de sua base matemática, isso pode despertar o interesse do aluno em resolver equações do terceiro grau, apresentando-lhes a fórmula como uma estratégia a mais. Acredita-se que dessa forma é possível desenvolver tal método no ensino básico, ajustando e aperfeiçoando as técnicas para melhor compreensão do aluno.

Espera-se que este trabalho contribua como fonte de pesquisa ou estudo para estudantes de matemática, professores do ensino básico ou superior que estejam interessado em inserir a história da matemática nas resoluções de equações cúbicas via a fórmula de Cardano.

## REFERENCIAS


ÁVILA, Geraldo. **Variáveis Complexas e Aplicações.** 3ªed.Rio de Janeiro. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.2000.p.13

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ªed.São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1999.p.194-346.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental**. Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, 1998.152p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12640:parametros-curriculares-nacionais-1o-a-4o-series. Acesso em: 17 out.2019.

BRASIL, Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. 600p. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf . Acesso em: 17 out. 2019.

CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria/Números Complexos.**3ªed.Rio de Janeiro.SBM-Coleção do Professor de Matemática, 2005.p.107.

CARNEIRO, Raylson Dos Santos. **Métodos de Resolução de Equações do Terceiro Grau.** 2015.68p. Trabalho de Conclusão de Curso. Programa de Mestrado Profissional em Matemática –PROFMAT. -Universidade Federal do Tocantins, Tocantins. 2015

DANTE, Luís Roberto. **Matemática Contexto & Aplicações.** Vol.3. 3ªed. São Paulo. Editora Ática, 2017.p.242.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** 3ªed. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2008.

GARBY, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas.** 4ªed. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2010.p.9-134.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar vol.6: Complexos, polinômios, equações.** 8ªed. São Paulo. Editora Saraiva, 2013.

LIMA, Erlon Lages. **A Equação do Terceiro Grau.** In Revista Matemática Universitária. Nº5.SBM, junho de1987. p. 9-23.

LIMA, Erlon L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.**Vol.3.6ªed. Rio de Janeiro. SBM-Coleção do Professor de Matemática, 2006.

MATEMATICA FACIL. **Os Papiros da matemática egípcia- O Papiro de Rhind ou Ahmes.** 8 de Novembro de 2015. São Paulo. Disponível em: https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html. Acesso em: 24 de Out. 2019

NETO, Aref A. et al. **Números complexos, polinômios, equações algébricas:** 2º grau. Vol.7.1ªed.São Paulo. Editora Moderna LTDA, 1982.p.170-239.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva.** Vol.3.1ªed. São Paulo. Editora Moderna, 2009.p.165-181.

SANTOS, Sergio Ricardo dos. **As Equações Polinomiais do 3º e 4º Graus: Sua História e Suas Soluções.** 2013. 78p. Trabalho de Conclusão de Curso. Programa de Mestrado Profissional em Matemática-PROFMAT. -Universidade Federal de Sergipe, Sergipe. 2013

SILVA, Fabiano Luiz D. **As Diferentes estratégias de resolução das equações algébricas até o terceiro grau.** 2015. 70p.Dissertação. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, para obtenção do Mestrado. Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte.2015.

SILVA, Watila Porto. **Proposta de Sequencia Didática para o ensino de equação do 3º grau com utilização da resolução de problemas**. 2018. 55p. Dissertação. Colegiado do Mestrado Profissional em Matemática- PROFMAT. – Universidade Estadual de Santa Cruz, Bahia. 2018

SOUZA, Fábio Nicácio Barbosa. **Uma abordagem geométrica para as equações cúbicas.** 2013. 74p. Dissertação para Mestrado Profissional em Matemática. Departamento de Matemática – Universidade Rural de Pernambuco, Recife. 2013

VERTUOSO, Valcir Borges. **Equações algébricas: história e ensino.** 2019. 62p. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT. Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Universidade Federal de Mato Grosso, Mato Grosso,2019.