UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Introduzindo conceitos de Física no ensino fundamental 2 através da modelagem matemática

Julio Cesar Porto Teixeira

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Julio Cesar Porto Teixeira

Introduzindo conceitos de Física no ensino fundamental 2 através da modelagem matemática

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

USP – São Carlos
Setembro de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P853i

PORTO TEIXEIRA, JULIO CESAR
Introduzindo conceitos de Física no ensino fundamental 2 através da modelagem matemática / JULIO CESAR PORTO TEIXEIRA; orientadora CLAUDIA INÉS GARCIA. -- São Carlos, 2019.
100 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Modelagem matemática.. 2. Introduzindo conceitos de Física no Ensino Fundamental 2. I. INÉS GARCIA, CLAUDIA, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Julio Cesar Porto Teixeira

Introducing concepts of Physics in elementary school 2 through mathematical modeling

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Claudia Inés Garcia

USP – São Carlos
September 2019

Este trabalho é dedicado à minha família que sempre acreditou em mim.
Em especial, à minha esposa, com amor e gratidão por sua compreensão
pela minha ausência no período dedicado a esta dissertação; e à
minha admirável e inesquecível filha ***Nicolle****, amor da minha*
vida, cujos exemplos de força, superação e perseverança
nortearam a sua trajetória e serviram de combustível para que
eu concluísse este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde, graça, paz e força para vencer todas as dificuldades que apareceram no caminho.

A todos os professores do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade de São Paulo, pela dedicação despedida em ministrar parte dos seus conhecimentos.

A todos aqueles que, de forma direta e indireta, contribuíram para o sucesso do PROFMAT.

À diretoria e à coordenadoria da Escola Estadual doutor Henrique Smith Bayma, que permitiram que fossem aplicadas as práticas experimentais aos alunos do 6^o ao 9^o anos do Ensino Fundamental, contribuindo, assim, com o resultado deste trabalho.

À minha orientadora, profa. Dra. Claudia Inés Garcia, por sua dedicação, paciência e compreensão.

“ Aprender é a única coisa de que a mente nunca se cansa,
nunca tem medo e nunca se arrepende.”
Leonardo da Vinci

RESUMO

TEIXEIRA, J. C. P. **Introduzindo conceitos de Física no ensino fundamental 2 através da modelagem matemática**. 2019. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Este trabalho tem por objetivo introduzir conceitos de Física no Ensino Fundamental 2, através da modelagem matemática, no intuito de contribuir com o aprendizado de conteúdos matemáticos a serem trabalhados, nos respectivos anos em que as práticas experimentais forem aplicadas. A modelagem matemática é apresentada como metodologia que visa incentivar a interdisciplinaridade, neste caso da Física e da Matemática, possibilitando ao aluno compreender o mundo a sua volta com exemplos do cotidiano. Quatro temas da Física foram relacionados para serem trabalhados: movimento, hidrodinâmica, óptica geométrica e eletricidade. As práticas foram aplicadas em ambiente de sala de aula, onde os alunos desenvolveram estratégias próprias, conduzindo-os à construção do próprio raciocínio para se compreender o conceito ao invés de resolver problemas com conceitos preestabelecidos. Tais situações foram apresentadas de maneira diferente dos exercícios dos livros adotados na Escola em que foram aplicadas essas práticas. Os alunos conseguiram solucionar as situações problemas, utilizando os conteúdos matemáticos, o que indica que a aplicação deste trabalho não somente pode obter bons resultados como pode incentivar o professor, exigida sua criatividade e dedicação, a ser parte integrante do processo ensino-aprendizagem, promovendo, até mesmo, a integração da matemática com as outras ciências.

Palavras-chave: Conceitos de Física. Ensino Fundamental. Modelagem Matemática. Conteúdos matemáticos. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

TEIXEIRA, J. C. P. **Introducing concepts of Physics in elementary school 2 through mathematical modeling**. 2019. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

This work aims to introduce concepts of physics in elementary School 2, through mathematical modeling, in order to contribute to the learning of mathematical contents to be worked in the respective years in which the Experimental practices are applied. The mathematical modeling is presented as a methodology that aims to encourage the interdisciplinarity, in this case physics and mathematics, allowing the student to understand the world around him, with examples of everyday life. Four themes of physics were related to be worked on: movement, hydrodynamics, geometric optics and electricity. The practices were applied in a classroom environment, where students developed their own strategies, leading them to construct their own reasoning to understand the concept rather than solve problems with the pre-established concepts. Such situations were presented differently from the exercises of the books adopted at the school in which these practices were applied. The students managed to solve the problems situations, using mathematical contents, showing that the application of this work may not only obtain good results as well can encourage the teacher, required his creativity and dedication, to be an integrating part of the teaching-learning process, even promoting the integration of mathematics with other sciences.

Keywords: Physics Concepts. Elementary School.Mathematical Modeling. Mathematical Contents. Interdisciplinarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

Durante o período que lecionei como professor de física, uma situação que me chamou a atenção foi o fato de perceber que tanto a Física como a Matemática continuavam sendo disciplinas temidas pela maioria dos alunos. No tocante à Física, o entendimento dos conceitos era duramente prejudicado pelo não entendimento da resolução matemática do problema ou ainda pelo equacionamento da problematização.

Tais situações me mostraram que os cálculos, embora básicos, porém considerados dificultosos para muitos dos alunos quando efetuados, eram assim realizados mecanicamente ou mesmo sem nenhuma compreensão. Surgiu então a idéia desafiadora de trabalhar com o aluno ajudando-o no entendimento da base matemática a ponto de dirimir boa parte de suas dificuldades, facilitando o conhecimento de conceitos, neste caso em particular da Física, no ensino médio.

Como escreveu D'Ambrosio (1986) a respeito da falta de aproveitamento ou de nível dos alunos em que se percebia, à época, a falta de comprometimento de profissionais do ensino: "... A missão é difícil...". O autor cita ainda Esther de Figueiredo Ferraz sobre a percepção da educação em países em desenvolvimento:

> 'A escola é como um ônibus velho, caindo aos pedaços e que se enche de passageiros, cada vez mais, e que não pode parar. Deve ser consertado, modernizado e ampliado enquanto vai andando'. O desafio é nossa profissão e a coragem nossa ferramenta. (D'AMBROSIO, 1986, p.92).

Para isso, precisaríamos de meios através dos quais conceitos da Física pudessem ser introduzidos ao mesmo tempo que conteúdos matemáticos estariam sendo trabalhados. Meios estes caracterizados pela utilização da Modelagem Matemática, que deveriam ser específicos aos alunos e à escola em que os mesmos seriam utilizados. Similarmente, a respeito de propostas curriculares, Almeida, Silva e Vertuan (2016) citam o seguinte:

> ... não se deve fazer tentativas de importar um pacote curricular pronto para ser usado, independentemente de seus benefícios ou potencialidades ou mesmo em termos dos sucessos ou fracassos previamente vislumbrados. A incorporação das atividades de Modelagem deve levar em consideração especificidade do contexto educacional, dando atenção aos professores, aos alunos e à própria estrutura escolar. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.20 e 21).

Para tal, a proposta deste trabalho é introduzir, ainda no Ensino Fundamental, conceitos da Física através da modelagem matemática, levando o aluno à melhor compreensão do raciocínio matemático que envolve a problematização, além de possibilitá-lo a vivenciar conceitos de uma ciência que lhe seriam apresentados somente no ensino médio.

Inicialmente, apresentaremos a modelagem matemática sendo transcorridas diferentes abordagens, sua aplicação no ensino da matemática, problemáticas encontradas no ensino fundamental e exemplo de interdisciplinaridade. Os temas e conceitos físicos apresentados neste trabalho foram propostos à diretoria e à coordenadoria de uma escola pública de São Paulo e aceitos, principalmente, em função da importância dos conteúdos matemáticos que seriam trabalhados através dos experimentos práticos, nos respectivos anos. Os conteúdos matemáticos, a saber, fração e simplificação; regra de três; congruência e semelhança de triângulos; e função polinomial do 1^o grau, foram trabalhados através dos temas: Movimento, para os alunos do 6o ano; Hidrodinâmica para os alunos do 7^o ano; Óptica Geométrica, para os alunos do 8^o ano; e Eletricidade, para os alunos do 9^o ano.

As práticas foram aplicadas em ambiente de sala de aula onde os alunos desenvolveram estratégias próprias que os conduziram à construção do raciocínio para se resolverem as situações problemas propostas para cada ano específico. Tais situações foram apresentadas de maneira diferente dos exercícios de alguns livros didáticos, principalmente pelos livros de Centurión e Jakubovic (2015), 6^o ao 9^o ano, adotados na escola em que foram aplicadas essas práticas. A proposta sempre foi possibilitar ao aluno a construção do raciocínio para se compreender o conceito ao invés de resolver problemas com os conceitos preestabelecidos.

Através da análise dos resultados, apesar das dificuldades apresentadas pelos alunos do 6^o ano, que também serão discutidas neste trabalho, podemos afirmar que, no geral, do 6^o ao 9^o ano, os alunos conseguiram solucionar as situações problemas, utilizando os conteúdos matemáticos, bem como, alguns deles tecerem comentários de outros conceitos físicos, que não os propostos nesta dissertação, valendo-se da mesma prática experimental. Sendo assim, a aplicação deste trabalho não somente obteve bons resultados como também pode incentivar o professor, exigida sua criatividade e dedicação, a ser parte integrante do processo ensino-aprendizagem, promovendo, até mesmo, a integração da matemática com outras ciências.

CAPÍTULO

2

MODELAGEM MATEMÁTICA

Representar o mundo real em uma sala de aula parece não ser nada fácil. Não importa as técnicas existentes, métodos ou estratégias, sempre será um desafio para o professor utilizar de todos os meios possíveis que possam fazer com que ele interaja com o aluno a ponto deste conseguir construir um raciocínio que o conduzirá à aprendizagem.

Esta representação de que trata especificamente as práticas experimentais aplicadas em sala de aula é feita através da modelagem matemática.

A Modelagem Matemática, então, pode surgir como uma ilha em que todas as ciências são convidadas à integração.

Segundo Skovsmose (2014), a educação matemática pode contribuir para que o aluno compreenda o meio em que ele vive e refere-se ao meio sociopolítico, econômico e etc., utilizando para isso a modelagem matemática. Nesta integração, o aluno faz os questionamentos necessários à construção do seu raciocínio para a resolução do problema que, inclusive, pode não ter relação com a matemática.

Segundo ainda o autor, a aplicação da modelagem matemática é uma ação que diverge de um sistema tradicional de ensino, pois necessitaria tempo de investigação, coleta de dados, análise de resultados e tudo mais, até a obtenção de um modelo válido ou não, que explique o problema a ser investigado.

Porém, como diz, ainda, Skovsmose (2014, p.19): “a noção de que estudar matemática torna os indivíduos mais inteligentes é bem antiga”. Nesse aspecto, o autor fala que a matemática contribui com a potencialização do aluno, no tocante ao desenvolvimento de sua inteligência.

Não queremos ressaltar aqui o avesso dessa situação. Várias ocasiões em que, segundo o autor, na maioria das vezes protagonizadas por professores, há o desdém daqueles que não percebem a elegância de uma demonstração, o que contribui para a não potencialização do aluno.

Para o autor, um fator interessante é que a importância da educação matemática não é discutida, pois com todas as mudanças que o sistema educacional sofreu ao longo do tempo, jamais foi eliminada das grades curriculares. Muito pelo contrário, sempre traz prestígio a quem se dedicava em estudá-la.

A modelagem matemática, segundo Skovsmose (2014), visa uma integração com vista à interdisciplinaridade, levando-se em consideração o meio em que o aluno vive, a situação econômica, bem como os recursos disponíveis.

Com relação à interdisciplinaridade fala o tema desta dissertação. Cada situação problema é trabalhada pelos alunos sem que tenham conhecimento prévio dos conceitos físicos relacionados. Por exemplo, com relação à prática aplicada aos alunos do 6^o ano do ensino fundamental, não se fala sobre o termo velocidade média e sim rapidez do movimento.

Não queremos que o aluno resolva um problema envolvendo velocidade, mas que descubra, com a prática experimental, que a rapidez de um movimento é dada pela relação existente entre a distância percorrida e o tempo necessário para isso; e que isso, sim, é velocidade.

Além disso, como o exemplo citado, outros conceitos serão introduzidos nos anos subsequentes em que o aluno terá a chance de trabalhar conteúdos matemáticos, do respectivo ano, em que o experimento estiver sendo aplicado.

Este objetivo visa ajudar o aluno com a compreensão do raciocínio matemático que envolve a problematização, adequado ao ano em que se encontra, além de possibilitá-lo a compreender determinados conceitos de uma ciência, a Física, que lhe seriam apresentados somente no ensino médio.

Dessa forma, ressaltamos, ainda, a importância deste trabalho e enfatizamos que os temas da Física, escolhidos para serem introduzidos para os alunos do 6^o ao 9^o anos do Ensino Fundamental, foram propostos à diretoria e à coordenadoria da Escola e aceitos, inclusive, em função da importância dos conteúdos matemáticos que seriam trabalhados, pelos experimentos práticos, nos respectivos anos.

A seguir comentaremos sobre diferentes abordagens de Modelagem Matemática, sua aplicação no ensino de Matemática, problemáticas encontradas no Ensino Fundamental segundo autoridades e profissionais da educação, e um exemplo de interdisciplinaridade apresentado por Luna (2007) em seu trabalho “Modelagem Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: Um estudo de caso no 1º ciclo”.

2.1 Diferentes abordagens

Quem surgiu primeiro? O ovo ou a galinha?

Perguntas como estas surgiram em brincadeiras infantis, fazendo que as respostas se tornassem muitas vezes redundantes. Porém, de forma similar, questionamentos têm sido perguntado ao longo do tempo, desafiando matemáticos, através de estudos, chegarem à conclusão sobre quem teria surgido primeiro, a ciência matemática ou a aplicação matemática?

Há uma linha tênue entre a ciência e sua aplicação. Segundo Bassanezi (2015), muitas ideias matemáticas surgiram a partir de problemas aplicados, assim como a matemática já desenvolvida passou a ser usada em situações novas e diversas.

O autor apresenta um esquema simples, dado por McLone, onde uma pesquisa à procura de dados é feita a partir de um tema e depois são traduzidos em linguagem matemática, compondo um modelo que, em seguida, será submetido à validação. Porém, para o autor, tal simplicidade parece desaparecer quando há dificuldades em encontrar pessoas com habilidades idiossincráticas de um matemático aplicado.

Com isso, percebemos que a capacidade de observar um problema e relacioná-lo a dados que podem interpretá-lo através de um modelo, pode ser uma grande dificuldade quando nos deparamos com o aumento da necessidade de entendermos o mundo real.

É claro que tomar a abstração de um problema, seja qual for o campo científico, sair à pesquisa de dados e variáveis, analisar hipóteses, compor um modelo matemático e submetê-lo à validação, não são ações esperadas em um ensino tradicional. Porém, se o professor optar por essa ação, muita criatividade prefigurará grandes e boas consequências.

Para Bassanezi, a modelagem matemática não somente exercita a criatividade como torna cada formulação de problemas originais tão estimulantes como sua resolução.

Desta forma, se a modelagem matemática propicia a criatividade, estimulando o incentivo de uma nova visão pedagógica, trabalhando conceitos, ideias e problemas práticos em ambientes de sala de aula, poderíamos considerar que a modelagem é um processo de ensino-aprendizagem?

Por outro lado, pensemos em algo misterioso cujo entendimento nos desperte a curiosidade. Se considerarmos que todos os procedimentos necessários que se relacionam entre si, não tem como objetivo maior a formulação do problema, mas sim da compreensão do mistério que o envolve, então, estamos falando de estratégia.

Como significado desse termo, alguns dicionários o apresentam como:

> A arte de coordenar a ação das forças militares, políticas, econômicas e morais implicadas na condução de um conflito ou na preparação da defesa de uma nação ou comunidade de nações (HOUAISS, 2009).

> Parte da arte militar que trata das operações e movimentos de um exército, até chegar, em condições vantajosas, à presença do inimigo (HOUAISS, 2009).

> Arte de aplicar com eficácia os recursos de que se dispõe ou de explorar as condições favoráveis e que porventura se desfrute, visando ao alcance de determinados objetivos (HOUAISS, 2009).

> Alguns mais simplificados apresentam o termo como ardil engenhoso, subterfúgio, manobra ou artifício militar (HOUAISS, 2009).

> A arte militar de planejar e executar movimentos e operações de tropas, navios ou aviões, visando alcançar ou manter posições relativas e potenciais bélicos favoráveis a futuras ações táticas sobre determinados objetivos (FERREIRA, 1993).

> Também é definida como a arte militar de escolher onde, quando e com quem travar um combate ou uma batalha (FERREIRA, 1993).

Porém, o que tem que ser enfático não é a expressão feminina destacada nas operações militares, mas a soma de esforços, técnicas, desenvoltura, habilidades, que visam alcançar um objetivo. Neste caso, a aprendizagem.

Para Bassanezi (2015), o fato é que quando se fala de Matemática, falamos da ciência em si. Porém, quando falamos de Educação Matemática, estamos nos referindo ao conjunto de técnicas que comporão o processo ensino aprendizagem cujos resultados, muitas vezes, mostram-se abrangentes e profundos.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016), a contextualização e a caracterização da Modelagem Matemática na educação Matemática têm tido diferentes abordagens e suas realizações dependem das concepções pedagógicas que norteiam as práticas educativas e as estruturas teóricas das pesquisas científicas.

Desta forma, segundo a visão dos autores, poderíamos então propor uma mudança da visão pedagógica do ensino tradicional cujos resultados parecem não ceder espaço à abrangência relativista da hipótese.

De um modo geral, segundo ainda os autores, uma atividade de Modelagem Matemática é descrita por uma situação inicial, que é chamada de problemática, de uma situação final, que é a solução da situação inicial e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários à passagem de uma situação a outra.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) citam, ainda, o dicionário (HOUAISS, 2009) que conceitua o termo modelagem como o ato de dar forma a algo por meio de um modelo. No entanto, complementam ainda que o conjunto de procedimentos necessários, citados anteriormente, pode envolver a uma investigação profunda da situação inicial, o que implica, inicialmente, em se obter todas as informações possíveis que conduzirão ao entendimento do problema e a definições de estratégias para sua resolução.

Definindo as metas, a segunda fase, para Almeida, Silva e Vertuan (2016) , seria a materialização do problema que consistem na transição da linguagem para a realização da descrição matemática. Nesta fase há a formulação de hipóteses e seleção de variáveis.

Para os autores, a resolução entraria na fase seguinte, que nada mais é que a criação de um modelo matemático que irá descrever o problema e possibilitar a futuros questionamentos e análises sobre a situação.

Almeida, Silva e Vertuan (2016) complementam, por fim, que a interpretação de resultados e a validação consiste na análise de uma resposta para o problema, a qual constitui um processo avaliativo que implicará na validação, ou não, do modelo matemático associado ao problema.

Consideremos, então, que é justamente na linha tênue que separa a materialização e a resolução que pode estar o julgamento das hipóteses que levam à construção do modelo.

Segundo Biembengut e Hein (2016), deve ser considerado o fato de que o ensino da matemática deve voltar-se não somente à promoção dos conhecimentos matemáticos, mas à habilidade em utilizá-los.

Nesse aspecto, a Modelagem Matemática é apresentada por esses autores como método de ensino de Matemática e, segundo eles, a modelagem matemática é um agente que poderá despertar no aluno o interesse por conteúdos matemáticos ainda desconhecidos.

Nossa expectativa é de que a modelagem matemática possa, inclusive, vir a despertar no aluno o interesse por outras ciências.

Ainda, segundo Biembengut e Hein (2016), a modelagem matemática tem como objetivos incentivar a pesquisa, promover a habilidade em formular e resolver problemas, lidar com temas de interesse, aplicar o conteúdo matemático e desenvolver a criatividade.

Já para Bassanezi (2015), a utilização da modelagem matemática se compara às ações de um técnico de futebol. Embora este ensaie com o time as jogadas mais efetivas, o resultado dependerá, ainda, da habilidade de cada jogador.

Com isso, deixemos claro que o diferencial neste trabalho é os temas introduzidos com o objetivo de que fossem trabalhados conceitos matemáticos dos conteúdos das grades curriculares dos respectivos anos em que as práticas experimentais seriam aplicadas, sendo igualmente correlato aos objetivos da utilização da modelagem matemática.

Além disso, visa à interdisciplinaridade haja vista a possibilidade de melhor compreensão de conceitos matemáticos com a introdução de conceitos de outra ciência.

Ressaltemos então a importância do papel do professor em manter seus alunos sempre estimulados, motivados para que suas ferramentas, estratégias, técnicas sejam entendidas e utilizadas na resolução dos problemas, podendo ser empregadas em situações concretas futuras.

O interessante é que não seja somente o aluno o alvo da aplicação da modelagem matemática, mas também o professor.

Corroborando essa idéia, Bassanezi (2015) diz o seguinte a respeito:

> Trabalhar com modelagem matemática em tais cursos não visa simplesmente à ampliação do conhecimento matemático dos professores cursistas, mas, sobretudo, o desenvolvimento da forma de pensar e agir desses profissionais (BASSANEZI, 2015, p.15).

Sendo assim, as habilidades idiossincráticas mencionadas no início desta seção, poderão surgir com o tempo, à medida que estiverem sendo desenvolvidas as formas de pensar e agir dos professores.

D'Ambrosio (1986) refere-se à prática de ensino em geral da seguinte forma:

> ... é uma ação pedagógica que visa o aprimoramento, mediante uma multiplicidade de enfoques, da ação educativa exercida no sistema educacional de maneira mais direta e característica, qual seja a forma por excelência dessa ação, isto é, o trabalho na sala de aula (D'AMBROSIO, 1986, p.37).

Segundo o autor, a multiplicidade de enfoques leva a buscar a melhor maneira de atingir um determinado fim que, por sua vez, visa o aperfeiçoamento tanto do professor como do aluno.

De qualquer forma, é a maneira como o autor explica o processo de trazer a realidade à ação.

Ainda para D'Ambrosio (1986), o conceito de ação pode modificar a realidade em um sentido mais amplo, seja ela social, material e psíquica. A modelagem matemática pode reunir ações transformadoras, pois desperta a criatividade e o interesse, aprimora o conhecimento, cria novos procedimentos para as soluções e questiona os existentes.

Desta feita, a prática de ensino da matemática se confunde com modelagem matemática? Embora em algumas situações exista uma linha tênue que as separa, poderíamos dizer baseados nos autores citados até aqui, que a primeira se insere na segunda.

Citando ainda D'Ambrosio (1986, p.63), com respeito à reflexão sobre "como ensinar matemática?", o autor diz o seguinte: "... nada mais é que a formulação de estratégias para se atingir os objetivos concordados".

O autor enfatiza, ainda, que em tais estratégias devem ser levadas em consideração o contexto sociocultural, procurando situar o aluno no ambiente da qual ele é parte. Nesse aspecto, o aluno deixa de ser meramente expectador e passa a ser atuante.

Por fim, embora haja diversidade de conceitos sobre modelagem matemática, promover ações pedagógicas criativas e motivacionais que possam conduzir o aluno à aprendizagem e, até mesmo, à compreensão do mundo em que ele vive, é, sem sombra de dúvida, o que esperamos ser a base que deve prevalecer, não importando a abordagem adotada pelo professor.

2.2 Sua aplicação no ensino da Matemática

Ao se aplicar a modelagem no ensino da Matemática, não estamos nos limitando a um ambiente onde o professor faz o papel de quem ensina e o aluno de quem aprende. Por mais que trabalhemos com o intuito de se manter o controle, sempre haverá o risco da abrangência e isso torna a Educação Matemática mais crítica do que se aparenta.

Segundo Skovsmose (2014), não existe uma única maneira da Educação Matemática ocorrer. Logo, sua definição é incerta.

> A Educação Matemática é indefinida. Ela não tem uma essência. Pode ser praticada de maneiras bem diferentes, com interesses sociais, políticos e econômicos bem distintos (SKOVSMOSE, 2014, p.115).

Como exemplo disso, este autor cita uma cena do filme "A vida é bela", de Roberto Benigni. Sobre ela, ele a descreve da seguinte maneira:

> A parte inicial, mais divertida, se passa numa cidade pequena do interior da Itália antes da Segunda Guerra Mundial. Fazia parte da ideologia fascista uma relativa admiração pelo nazismo alemão. Numa cena breve, uma professora italiana, que havia vindo da Alemanha, mostrava-se impressionada pelo fato dos alunos alemães serem capazes de responder problemas como este:
>
> Cuidar de um louco custa ao Estado 4 marcos por dia. Cuidar de um aleijado 4,5 marcos. De um epiléptico 3,5 marcos. A média é de 4 marcos por dia e o número de pacientes é de 300.000. Quanto seria economizado caso esses indivíduos fossem eliminados?
>
> A professora italiana não conseguia acreditar que crianças de sete anos conseguissem resolver problemas como esse. Afinal, ele envolve muitas contas. Eles precisariam ter visto álgebra. Um homem que escutava a professora chama a atenção para o fato de que o problema poderia ser resolvido em apenas uma multiplicação (ele aparentemente considerou que o número de loucos, aleijados e epilépticos fosse o mesmo): "300.000 vezes quatro . Matando-os a todos gera uma economia de 1.200.000 marcos por dia, certo?"A professora concordou, mas a questão para ela era o fato de que as crianças de sete anos na Alemanha conseguiram resolver o problema, enquanto na Itália, não (SKOVSMOSE, 2014, p.15 e 16).

Para Skovsmose (2014), de modo peculiar, problemas como esse podem abranger preocupações sócio-econômicas e/ou políticas, embora as informações contidas em seu enunciado sejam fechadas, suficientemente necessárias a sua resolução.

Porém, não queremos enfatizar neste trabalho a abrangência em si dos resultados dos problemas ou o risco de existirem análises que poderão sair do controle de quem os aplica, mas ressaltar que somado a todas as condições imagináveis que se deve considerar no público alvo, o exercício da criatividade ao se aplicar a modelagem, poderá culminar, também, na formulação do inesperado.

Para Biembengut e Hein (2016) existe, ainda, uma diferença entre modelagem e modelação matemática. Segundo os autores, modelagem parte de uma situação problema, inserida num tema, sobre o qual são desenvolvidos vários questionamentos, cujas respostas poderão surgir baseadas nas ferramentas matemáticas e/ou na própria investigação.

Para os autores, já na modelação matemática, o professor opta por um modelo conhecido e tenta recriá-lo em sala de aula, juntamente com os alunos, sendo respeitados o nível dos questionamentos e o currículo inicialmente proposto.

Segundo Biembengut e Hein (2016), ainda, a aplicação da modelagem no ensino da Matemática requer audácia, grande desejo em modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, pois tais propostas geram descobertas significativas.

Sobre esse contexto, Skovsmose (2014) diz que para aprender o indivíduo tem que ter intenções e motivos; e a aprendizagem é uma forma de ação. O autor afirma que o interesse de uma criança em aprender a falar faz parte de sua intencionalidade.

Consideraremos, então, a partir dessa última afirmação que, antes de ensinar, o professor deverá conhecer a intenção e os motivos dos alunos em aprender, aos quais lhe servirão como ferramentas a sua criatividade para se trabalhar novas técnicas pedagógicas, a fim de alcançar a aprendizagem de seus alunos.

Quanto à noção de motivo ou *foreground* de um indivíduo, Skovsmose (2014, p.34) esclarece ainda o seguinte: "refere-se às oportunidades que as condições sociais, políticas, econômicas e culturais proporcionam a ele". Porém, sobre a noção de motivação ou background de uma pessoa, o autor diz o seguinte: "refere-se a tudo que ela já viveu" Skovsmose (2014, p.35).

O autor salienta, ainda, que embora o *background* da pessoa é algo que cristalizou no passado, ele também pode ser mudado, se considerarmos que as interpretações da experiência vivida podem mudar. Além disso, tais afirmações são importantes e devem ser consideradas na aplicação da modelagem, pois estão relacionadas à aprendizagem como engajamento e rendimento dos alunos.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016) , os caminhos sinuosos da modelagem matemática são uma aventura além de muito estimulantes. Requer buscar o novo e o, às vezes incerto, caminho do ensinar e do aprender matemática.

Os autores complementam, ainda, dizendo que o foco está nos encaminhamentos e procedimentos que medeiam a transição da situação inicial (problemática) para a situação final (solução para o problema), mesmo que a modelagem matemática seja percebida como uma alternativa pedagógica.

Para os autores, ensino e aprendizagem estão diretamente ligados:

> Todavia, nesse contexto, o enfoque **resolução de um problema** e o enfoque **ações e interesse dos alunos** são importantes para o ensino e aprendizagem da Matemática. Também nesse contexto, ensino e aprendizagem não são **atos** independentes. Ou seja, o que e como o professor faz nas aulas com modelagem tem repercussão direta sobre o que o aluno faz e como faz para aprender (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.20), grifo do autor).

Não obstante, D'Ambrosio (1986), em sua obra, retrata uma visão descendente da Realidade à Ação. Descendente ao considerar a compreensão da realidade o produto final, face em que a ação, a razão que os moveu.

O autor resume, ainda, a ação científica como aquela que tem por objetivo tornar melhor a qualidade de vida do homem. Em sua obra, aqui citada, três reflexões são bem sugestivas. A primeira é apresentada a seguir:

> Ao invés de acúmulo de conteúdo, deve-se dar ênfase ao desenvolvimento de atitude científica em relação a problemas e de metodologia de coleta de informações que serão úteis, uma vez identificado o problema e definida a forma de atacá-lo (D'AMBROSIO, 1986, p.19).

Sobre a segunda reflexão, o autor diz que: "o ataque a problemas relevantes só pode ser feito através da interdisciplinaridade" D'Ambrosio (1986, p.19). Ele esclarece, ainda, que a interdisciplinaridade não seria tratada como uma reunião de conhecimentos cristalizados, mas algo a ser trabalhada no início da formação.

Como uma terceira reflexão, o autor complementa:

> É absolutamente essencial que ataquemos os problemas de metodologia para trazer esse conhecimento avançado e sofisticado ao nível de sua utilização quase imediata (D'AMBROSIO, 1986, p.21).

Para D'Ambrosio (1986), essas três reflexões vêm mostrar a direção para se alcançar interpretações dos problemas básicos que nos afetam, embora enfatizadas com o intuito de se concluir o papel que a atual metodologia de ensino está fazendo na formação do jovem cientista.

Se atentarmos, então, para o fato de que somos agentes investigadores de nossos próprios problemas e analisarmos hipóteses que podem levar a resultados diversos causando, às vezes, interpretações inesperadas de nossa própria realidade, estaríamos diante de um verdadeiro paradoxo.

D'Ambrosio (1986) denota tal preocupação em que reage a ideia de que seríamos meramente receptores de metodologia e modelos internacionais, vindo de países conhecidos como desenvolvidos. Segundo ele, isso nos torna meramente laboratórios, nos quais os conhecimentos seriam testados e aplicados e que tais preocupações e realidades estão inseridas em todos os níveis da Educação, guardando suas proporcionalidades.

Por conseguinte, esperamos, com isso, alunos mais críticos, criativos e que saiam em busca dos resultados com o mínimo de informações.

Com isso, esperaremos que a modelagem matemática associada à criatividade, motivação, levando-se em consideração o aspecto social, político e econômico, colha frutos de conhecimento, cujas sementes semeadas em terreno previamente preparado possam despertar expectativa e cuidados até que se chegue à época da colheita.

Consideraremos então que a aplicação da modelagem matemática pode estar ligada às ações que levam aos professores saírem da zona de conforto de suas tradicionais práticas pedagógicas.

Não obstante, ao ler a obra de D'Ambrosio (1986), poderemos manter ainda mais acesa a importância de viabilizar a matemática ou o ensino da matemática, utilizando-nos de todo o esforço possível, à aplicação de novas técnicas adequadas as nossas reais necessidades.

Para isso, estarão sendo desenvolvidas neste trabalho a motivação e a interdisciplinaridade com a introdução de conceitos da Física. A criatividade contribuirá para que sejam criadas novas técnicas que ajudarão não somente na compreensão dos fenômenos físicos apresentados nos temas a serem trabalhados nesta dissertação, como contribuirá na construção e na compreensão do conteúdo programático de Matemática do 6^o ao 9^o ano do Ensino Fundamental, ampliando o conhecimento matemático do aluno.

Nesta fase, a modelagem matemática assume o importante papel de condicionar o aluno à formulação de estratégias a fim de atingir os objetivos. Respeita-se o contexto sociocultural de que o aluno está vivendo, tornando-o atuante ao invés de mero expectador, despertando dupla motivação: do aluno e do professor. Do aluno, pois trabalhará na construção de seu próprio conhecimento e do professor, pois irá encarar o desafio de ir além das limitações de suas especializações e experiências, adquiridas nas práticas pedagógicas, a descobrir técnicas melhores que trarão compreensão à disciplina que leciona.

2.3 Problemáticas encontradas no Ensino Fundamental

Professores de algumas escolas públicas têm se esforçado para tornar possível ao aluno, dentro do ambiente da sala de aula, interpretar a complexidade do mundo real em que ele vive e, por consequência, melhorar o seu rendimento.

A exemplo disso, o Jornal Nacional, na série de reportagens sobre o ensino básico na rede pública, mostra um retrato do aprendizado dos alunos do 6^o ao 9^o anos. O desempenho é abaixo da meta, mas existem exemplos positivos também. (JORNAL; NACIONAL, 2017) .

Sobre a reportagem, alguns pontos bastante interessantes a seguir.

Segundo a reportagem, o alerta se traduz em números. Os mesmos alunos que nos anos iniciais do Ensino Fundamental tiraram notas acima da meta do Índice de Desempenho do Ensino Básico (Ideb), agora, mais velhos, no ensino médio, tiveram queda no rendimento e não cumpriram a meta.

A pedagoga da UNESP e professora do Instituto Singularidades, Lúcia Couto, afirmou que o fracasso escolar começa no Fundamental 2.

A pedagoga afirma ainda que, no Ensino Médio, o aluno ganha outro professor, especialista vindo das licenciaturas, com outra natureza formativa, porém com interesse mais voltado à área do seu conhecimento do que às práticas pedagógicas.

Já a presidente executiva do Todos pela Educação, Priscila Cruz, faz uma declaração mais preocupante, pois considera esse problema um nó invisível do Fundamental 2 e que está fazendo com que todos os que lutam para fomentar o bom ensino perca o 'jogo' da educação.

Para Pilar Lacerda, diretora da Fundação SM Brasil, a responsabilidade da escola não pode ser excluída, pois os alunos são adolescentes e suas dificuldades são por encontrarem uma escola que não fala a linguagem deles.

Na reportagem há ainda o enfoque para o problema de gestão municipal, no caso do Ensino Fundamental 1, sendo enfatizada que a substituição pela parceria estadual, nem sempre funciona.

Pilar Lacerda declara ainda que seria necessário começar a discutir mais profundamente a organização do Fundamental 2 e sobre qual esfera administrativa ele deveria ficar.

No contexto do Ensino Fundamental 2, a reportagem cita como exemplo o município de Novo Horizonte, no interior paulista, que assumiu a tarefa de cuidar da maior parte do Fundamental 2, com uma rede escolar enxuta e eficiente.

Secretário de Educação há 17 anos, o professor de matemática Paulo Magri comanda a força-tarefa que prepara as provas semanais. Segundo o professor, o que define o conteúdo são as maiores dificuldades dos alunos naquele período.

Segundo Paulo Magri, nos dias de avaliação, nas sextas-feiras, se for observado que o aluno não dominou aquele conteúdo, ele volta a estudá-lo.

Certa aluna comentou que a rotina em fazer prova já é normal.

Segundo o repórter que realizou a reportagem, à época, em Novo Horizonte, somando todas as escolas, totalizavam cerca de 15 mil provas aplicadas por semana. Complementa ainda que tal esforço foi recompensado por uma média invejável de 6,7 no Ideb, maior que a do estado de São Paulo e que a do país. A nota bateu até a média nacional das escolas particulares, disse ele.

Na mesma reportagem, o pai de um aluno comenta que o estudo que o filho estava recebendo poderia ser comparado ao de escolas particulares e que não teria condições de oferecer ao filho aquela educação, se assim fosse.

O repórter complementa dizendo que muitos pais escolheram também a escola pública para os filhos em outras regiões do país.

Nessa reportagem, o Jornal Nacional saiu de Novo Horizonte, em São Paulo, para ver o retrato de outra escola pública, em Brejo Santo, no Ceará.

A mãe de uma aluna que nunca havia estudado em escola pública, comentou que a escola pública de Brejo Santo tinha o mesmo potencial de uma particular.

Foi mostrado que as escolas municipais de Brejo Santo superaram a média nacional do Ideb das escolas particulares, tanto no Ensino Fundamental 2, quanto no Fundamental 1.

A reportagem enfatiza ainda que uma escola municipal de Brejo Santo, por exemplo, que estava entre as piores do Ceará há oito anos, na época da reportagem, apresentou um dos melhores índices do país. Para a mãe de um aluno, a mudança teria começado pela rigidez nos horários e pela fidelidade em cumprir as horas de aulas programadas.

O relato, feito pelo repórter, durante a reportagem é de que o ensino ficara mais divertido e os alunos, nos primeiros anos, se encantam com números e letras. Depois, contam com escolas exclusivas para o ensino do sexto ano até o nono. Acrescenta, ainda, que os professores se reuniam toda semana para alinhar o conteúdo que iria ser ensinado.

Na reportagem, é relatado, ainda, que em uma sala de aula com 30, 35 alunos, por mais que o professor se esforce, fica difícil acompanhar o desempenho de cada um deles. Por isso, todas as escolas municipais de Brejo Santo têm pelo menos um espaço: a sala do reforço, fora do horário normal de aula, onde os alunos com dificuldade nas disciplinas recebem uma atenção especial do professor e a oportunidade de alcançar o rendimento do resto da turma.

Segundo uma aluna que estava com dificuldade em matemática, declara o seguinte: "Quando a gente investe na gente, a gente não perde tempo, a gente só ganha".

O repórter esclarece que uma das preocupações nas escolas municipais de Novo Horizonte é investir nos professores para que eles passem por avaliações o tempo todo e da forma mais direta possível, no meio da aula e sem hora marcada. Os avaliadores chegam sem pedir licença e acompanham o trabalho na sala.

“Essas blitz têm muito mais o sentido, o objetivo de orientar e de formar o professor”, explicou uma especialista.

Os professores, que trabalhavam em tempo integral, aprovaram a iniciativa.

“A partir do momento que eu tenho uma crítica construtiva, eu só tenho a ganhar com isso”, disse outra professora.

Pois bem, todos esses relatos mostraram o esforço do corpo docente dessas escolas em sair da zona de conforto e engajar em uma coletividade em prol da melhoria da educação ao invés de serem meros espectadores.

Comentários como o da professora de ciências, Mariana Andrade, encorajam professores de outras áreas do conhecimento e incentivam a interdisciplinaridade: "A gente consegue trazer para o concreto aquilo que eles teriam só na imaginação na sala de aula".

A respeito do espaço que foi reservado na escola para as práticas experimentais, declarou Ayla da Silva Sousa, de 12 anos: "A gente, lá no quadro, a gente vai aprender teoricamente e aqui a gente vai montar essas experiências para a gente comprovar realmente".

Explicou a presidente executiva do Todos pela Educação o seguinte: "Todas as políticas dependem de professores bem formados e com condições de trabalho para poder garantir que todos os seus alunos aprendam".

A reportagem encerra dizendo que o Ministério da Educação declarou que, por causa dos resultados ruins do Ideb, começou a dar prioridade ao Ensino Fundamental, embora tenha papel suplementar nessa etapa, que é gerida por estados e municípios.

2.4 Exemplo de interdisciplinaridade

Segundo Barbosa (2004), ele afirma em seu artigo o seguinte:

> O ambiente de Modelagem está associado à problematização e investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto que o segundo, à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo (BARBOSA, 2004, p.75).

O autor ainda expressa em seu artigo que as atividades de Modelagem podem contribuir para desafiar a ideologia da certeza e colocar lentes críticas sobre as aplicações da matemática.

Luna (2007) coordenou um grupo de formação de professores, que gerou o projeto institucional Circuito Matemático, no qual organizaram o trabalho com a matemática através de situações-problema a partir de um contexto real. Os alunos desencadearam um processo investigativo sobre o que seria necessário para se montar um estabelecimento comercial. Dentre os quais, em seu artigo, foi destacado o estudo de caso com o tema "Assim funciona um restaurante Natural...", desenvolvido pelos alunos da 2^a série do Ensino Fundamental de uma instituição particular em Feira de Santana, no interior da Bahia.

Nesse projeto, os alunos interagiram com o sistema monetário e discutiram sobre o que seria necessário saber para o funcionamento de um restaurante natural. O tema foi proposto pela pesquisadora, porém a ampliação foi de responsabilidade dos alunos.

A pesquisa de campo foi bem criteriosa, pois os alunos investigaram sobre os pratos que eram vendidos, os ingredientes necessários à formação dos pratos, o custo de cada ingrediente bem como o seu valor nutricional e o preço de venda de cada sanduíche ou de cada prato.

Nessa oportunidade, tiveram a chance de trabalhar com balança de ponteiro e viram outra unidade de medida, a massa. Além disso, foi trabalhado o conceito de proporcionalidade, quando na simulação da criação de um sanduíche e o seu valor de venda. O sistema monetário também esteve bem presente, pois os alunos, ao simularem suas vendas, tiveram a chance de apresentarem as maneiras que poderiam dar o troco.

Luna (2007), embora tenha baseado seu trabalho nas concepções de modelagem apresentadas por alguns educadores matemáticos brasileiros, australianos e um sul africano, neste caso específico, poderíamos notar que ficou evidenciada a influência brasileira porque esta autora, em sua obra, apresenta a Modelagem como um ambiente de aprendizagem e, a exemplo do estudo de caso citado aqui, a modelagem é vivida como tal, pois os alunos tiveram que investigar situações reais de outra área de conhecimento, utilizando a matemática.

Luna (2007) disse ainda, em seu artigo, sobre esse tipo de abordagem:

> Assim, ao partir de uma reflexão sobre um problema real, que aparentemente não envolve a matemática, o aluno pode se surpreender com a obtenção de um modelo matemático que provoca a verificação da informação em questão, viabilizando o ensino do conteúdo matemático (LUNA, 2007, p.3).

Segundo ainda a autora, além do ganho da descoberta de que nem sempre os alimentos mais gostosos são os mais nutritivos, fez com que os alunos refletissem sobre uma alimentação saudável, provocou reuniões com nutricionistas, o que gerou uma mudança no cardápio semanal oferecido pela instituição de ensino.

Como professor de Física, durante a oportunidade em que ministrei aulas em cursos preparatórios para concursos públicos, escolas militares e pré-vestibulares, deparei-me com alunos com extremas dificuldades na disciplina de Física. Um ou outro conseguiam acompanhar o conteúdo da matéria, mas a maioria a encaravam como uma grande "vilã" que, novamente, os assombravam, mesmo sabendo que tinham visto parte do conteúdo pelo menos uma vez durante o ensino médio.

Como já sabemos, o aluno é alfabetizado no início do ensino fundamental e, ainda nesse período, tem os primeiros contatos com a Matemática. Por que não apresentar a Física, ainda no Ensino Fundamental, haja vista ser uma ciência que está fortemente em nosso cotidiano?

As crianças correm, exercitam e observam o mundo a sua volta. A todo instante, fenômenos físicos estão ocorrendo, mas estes, raramente têm sido alvos de assuntos a serem discutidos em sala de aula.

Falamos que a Física está presente em tudo. No entanto, ela só se torna alvo de estudo no ensino médio. Em três anos, o professor tenta ensinar um conteúdo que se torna maçante, para a maioria dos alunos, à medida que aumenta o grau de dificuldade de entendimento.

Na maioria das vezes, o docente não consegue terminar o conteúdo de Física constante na grade curricular. Além disso, os alunos veem suas dúvidas se acumularem e, com isso, a aprendizagem é completamente comprometida.

Concomitante a isso, não podemos desconsiderar uma possível queda do rendimento dos alunos em Matemática no ensino médio, em virtude de problemáticas surgidas no Ensino Fundamental, como já citado na seção 2.3 deste trabalho.

Almejamos, como quem defende a interdisciplinaridade, poder introduzir conceitos de Física, ainda no ensino Fundamental, de maneira que também pudessem ser trabalhados tanto conteúdos matemáticos não lembrados pelo aluno como os não conhecidos ainda, melhorando o seu desempenho na disciplina de Matemática.

CAPÍTULO

3

TEMA PARA O 6^o ANO: MOVIMENTO (VELOCIDADE MÉDIA)

O tema da Física a ser trabalhado no 6^o ano do Ensino Fundamental é Movimento, parte da cinemática.

A Cinemática é a parte da Física que estuda os movimentos dos corpos sem se preocupar com as causas que os produziram, ou seja, não se leva em consideração conceitos como força, atrito ou quaisquer outros conceitos que possam produzir, alterar ou cessar o movimento de um corpo. Neste caso, para ser introduzido o conceito de velocidade média, analisaremos, por exemplo, o movimento de um carro que percorre uma distância de 180 km em 3 horas. Mesmo sabendo que nesse percurso ele possa ter partido do repouso (inicialmente parado), acelerado, freado ou simplesmente ter parado em um dado instante, o fato é que ele percorreu 180 km em 3 horas. Logo, a velocidade média v é uma grandeza física que expressa o quanto o carro percorreu em certo intervalo de tempo. Sendo assim, $v = \Delta s/\Delta t$, onde Δs é o espaço percorrido, ou seja, a variação entre a posição final e inicial do movimento e Δt o intervalo de tempo medido entre o instante final e inicial do movimento. A velocidade média, então, é aquela que o carro desenvolveria de maneira constante durante todo o percurso.

Veremos a aplicação da prática proposta; os conceitos matemáticos a serem trabalhados; a análise desta aplicação para os alunos do 6^o ano; e, por fim, uma breve análise da apresentação dos conceitos matemáticos, trabalhados na prática, no livro adotado pela escola e sugestões de uma nova proposta.

3.1 Prática experimental: aplicação e objetivo.

De posse de um carro de brinquedo, movido à fricção, o aluno deverá fazer com que o mesmo percorra distâncias diferentes, em trajetórias retilíneas, e descobrir em qual dos movimentos realizados houve maior rapidez.

O objetivo é fazer com que o aluno descubra a relação entre a distância percorrida e o tempo necessário para tal, sem levar em conta o termo velocidade. Por esse motivo, o termo não será dito inicialmente.

Para a realização da prática o aluno disporá de um carrinho movido à fricção, uma trena e um cronômetro. No lugar do cronômetro, poderá ser utilizado o aplicativo do celular.

As distâncias serão medidas previamente e marcados os pontos de partida e chegada, no chão da sala de aula, com um giz, uma fita crepe ou outro marcador, conforme exemplificado na Figura 1.

Figura 1 – Material utilizado no tema do 6º ano

Fonte: Elaborada pelo autor.

O carrinho deverá ser solto exatamente na marca onde se convencionou o ponto de partida, iniciando-se a contagem do tempo, e o movimento finalizado exatamente quando ele cruzar o ponto de chegada, onde se dará o tempo final do seu percurso. Com isso, o aluno deverá apresentar, da melhor forma possível e para cada percurso percorrido pelo carrinho, o número que expressará o quanto o carrinho foi rápido.

3.2 Conceitos matemáticos a serem trabalhados: fração e simplificação.

Segundo Centurión e Jakubovic (2015), as frações surgiram no Egito antigo, cerca de 3.000 anos atrás, quando os chamados esticadores de corda tinham a tarefa de medir comprimentos dos lados de terrenos que o rei, ou faraó, distribuía entre os agricultores.

Conforme os autores, as terras que ficavam às margens do Rio Nilo eram mais férteis, mais valiosas, e a distribuição entre os agricultores tinha que ser feita com justiça e precisão. Além disso, a unidade de medida era a distância entre dois nós feitos em uma corda, igualmente espaçados. Pelo fato de muitas vezes a unidade não caber um número inteiro de vezes no comprimento a ser medido, houve, então, a necessidade de dividir a unidade em duas, três, quatro ou mais partes iguais.

Centurión e Jakubovic (2015) exemplificam o fato de precisarmos medir um comprimento em metros e o resultado não ser, necessariamente, um número natural. Os autores corroboram que para tais situações, as frações foram criadas.

A exemplo dos autores, quando dividimos uma figura em duas partes de mesma área, cada parte é um meio ou a metade da figura. Da mesma forma se a dividíssemos em três partes de mesma área, cada parte seria um terço ou a terça parte da figura e assim por diante.

Para os autores, o conceito de fração fica melhor explicado da seguinte forma: "Dois números naturais escritos na forma $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$ formam um fração desde que o denominador não seja zero" Centurión e Jakubovic (2015, p.146).

Nesse contexto, os autores afirmam ainda que o denominador indica em quantas partes o todo está dividido e o numerador indica quantas dessas partes devem ser consideradas.

Consideremos, então, o exposto pelos autores para fazer o seguinte questionamento: Poderia haver frações distintas, mas que representassem a mesma parte ou porção de um todo? A resposta para essa pergunta é sim.

Centurión e Jakubovic (2015) afirmam que $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ representam a mesma porção de um retângulo, logo são frações de igual valor. Dessa forma, essas frações são chamadas de equivalentes.

Os autores concluem, ainda, que se multiplicarmos o numerador e o denominador de qualquer fração por um mesmo número natural, sempre obteremos uma fração equivalente à inicial.

O intuito dessa prática seria fazer o caminho inverso, ou seja, com base nos dados obtidos que representarão uma fração, encontrarmos outra com numerador e denominador menores, até se tornarem irredutíveis.

> Quando uma fração não puder ser simplificada, diremos que se trata de uma fração irredutível. Portanto, numa fração irredutível, o único divisor comum do numerador e do denominador é 1 (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.153).

Na Física, trabalhamos com grandezas como comprimento, volume e tempo que são determinadas utilizando-se apenas um único instrumento de medida, como, por exemplo, uma trena, um copo medidor e um cronômetro, respectivamente.

No caso da velocidade média, isso não seria possível. Não estamos considerando os velocímetros que indicam diretamente o valor da velocidade de um carro, por exemplo. Digamos que esses, inclusive, têm em suas construções a associação de duas outras grandezas que se combinam para que seja expresso um único valor em seu mostrador analógico ou digital.

Observamos que durante uma viagem de carro, dificilmente a velocidade permanece constante durante todo o trajeto. A sinuosidade da estrada ou até mesmo o trânsito podem influenciar para que ela mude a cada momento. Mas se nós quiséssemos descobrir o valor da velocidade num dado instante? Segundo Stewart (2013), a dificuldade em encontrarmos essa velocidade está em tratarmos de um único instante de tempo t e não um intervalo de tempo.

Porém, aproveitando-se da definição da velocidade média, podemos aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores. Desse modo, à medida que encurtamos o período de tempo, a velocidade média fica cada vez mais próxima do seu valor para o instante de tempo t. Sendo assim, a velocidade instantânea no instante de tempo t é definida como o valor limite das velocidades médias, se ela existir.

Suponhamos que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a. (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a, exceto possivelmente no próprio a). Então, segundo Stewart (2013), dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L, tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a.

Ou seja, diremos que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a, se conseguirmos fazer os valores de $f(x)$ ficarem tão próximos de L o quanto quisermos, tomando x suficientemente próximo de a.

Denotamos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{3.1}$$

Consideremos agora $y = f(x)$. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{3.2}$$

E a variação correspondente em y será:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \tag{3.3}$$

Logo, o quociente das diferenças é denominado taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$ e pode ser interpratado como a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{3.4}$$

Vamos considerar a taxa média de variação em intervalos cada vez menores, fazendo x_2 tender a x_1 e, portanto, Δx tender a 0. O limite, se existir, dessas taxas médias de variação é chamado *taxa instantânea de variação de y em relação a x* em $x = x_1$, que é interpretada como a inclinação da tangente à curva $y = f(x)$ em $P(x_1, f(x_1))$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{3.5}$$

Chamamos a este limite de derivada $f'(x_1)$. Dessa forma, podemos interpretar a derivada $f'(a)$ como a taxa instantânea de variação de $y = f(x)$ em relação a x quando $x = a$. Ou seja, se $y = f(t)$ for a função posição de uma partícula que se move ao longo de uma reta, então $f'(a)$ será a taxa de variação instantânea do deslocamento em relação ao tempo. Isto é o mesmo que dizer que $f'(a)$ é a velocidade instantânea da partícula no instante $t = a$.

Ainda segundo Stewart (2013), o Teorema de Rolle diz que se f é uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a,b).
3. $f(a) = f(b)$

Então existe um número c em (a,b) tal que $f'(c) = 0$.

O Teorema de Rolle é utilizado na demonstração do Teorema do Valor Médio que diz que se existe uma função f que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$.
2. f é derivável no intervalo aberto (a,b).

Então existe um número c em (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{3.6}$$

De maneira equivalente, teremos:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{3.7}$$

Para demonstrarmos, aplicaremos o Teorema de Rolle a uma nova função h definida como a diferença entre f e a função cujo gráfico é a reta secante AB que passa pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. A equação da reta pode ser descrita da seguinte forma:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{3.8}$$

Ou como:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{3.9}$$

Podemos escrever a função $h(x)$ da seguinte maneira:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{3.10}$$

Precisamos verificar que h satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle.

1. A função h é contínua em $[a,b]$, pois é soma de f e uma função polinomial de primeiro grau, ambas contínuas.

2. A função h é derivável em (a,b) pois tanto f quanto a função polinomial de primeiro grau são deriváveis, pois $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3. $h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$
   $h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0$

Portanto, $h(a) = h(b)$.

Satisfeitas as hipótese do Teorema de Rolle, então existe um número c em (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Portanto:

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.11}$$

E assim:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.12}$$

Pensando em velocidades, este teorema relaciona a velocidade média com a velocidade instantânea. Ele diz que se a função posição possui certa suavidade, isto é, contínua em um intervalo $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe um tempo c com $a < c < b$ tal que a velocidade média no intervalo $[a,b]$ é igual à velocidade instantânea em c.

Grandezas como a velocidade média são determinadas através da medição de outras duas grandezas, neste caso, do espaço percorrido Δs e do intervalo de tempo Δt. Sendo assim, a velocidade média é expressa através da fração $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

A fração $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ representa como duas grandezas (espaço e tempo) se relacionam para se obter uma terceira (velocidade). A ideia de rapidez de um movimento fica então condicionada à fração $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, ou seja, o espaço que foi percorrido em certo intervalo de tempo.

O conceito de fração a ser trabalhado não será como a parte de um todo, como um terço de uma barra de chocolate ou quando expressamos que dois terços dos alunos de uma sala de aula foram aprovados.

É certo que quando comparamos dois percursos, um de 120 km e outro de 190 km, sendo, o primeiro, realizado em 3 horas e o segundo em 4 horas, não podemos dizer que o primeiro foi realizado com maior rapidez, haja vista ter sido percorrido no menor período de tempo, ou seja, 3 horas. Por outro lado, não poderíamos, ainda, dizer que a segunda situação foi menos rápida, haja vista ter percorrido uma maior distância o que ocasionou, também, um maior tempo.

Para obtermos a certeza de qual percurso foi realizado com maior rapidez, teremos que escrever as frações $v_1 = \frac{120km}{3h}$ e $v_2 = \frac{190km}{4h}$ para um mesmo intervalo de tempo, o seja, $1(uma)$

hora. Isso é conseguido dividindo-se o numerador e o denominador de cada fração por um divisor comum, até que se obtenha, no denominador, $1(uma)$ hora. Se dividirmos por 3 o numerador e o denominador da fração $v_1 = \frac{120km}{3h}$, obteremos $v_1 = \frac{120km \div 3}{3h \div 3} = \frac{40km}{1h}$, sendo assim representada por $v_1 = 40$ km/h.

Porém, se dividirmos por 4 o numerador e o denominador da fração $v_2 = \frac{190km}{4h}$, obteremos $v_2 = \frac{190km \div 4}{4h \div 4} = \frac{47,5km}{1h}$, sendo assim representada por $v_2 = 47,5$ km/h. Dessa forma, fica nítido que o segundo percurso foi realizado mais rápido que o primeiro, haja vista as frações serem representadas de maneira a se observar qual o maior percurso percorrido no mesmo intervalo de tempo.

A maneira pela qual obtemos uma rápida compreensão comparativa de grandezas que são representadas por frações e que se relacionam ao mesmo fenômeno, como no exemplo citado anteriormente, é através da simplificação dessas frações.

3.3 Análise da aplicação no 6^o ano

.

A proposta para os alunos do 6^o ano do Ensino Fundamental foi de como identificar o carrinho que realizou o movimento mais rápido na seguinte situação problema: "utilizando dois carrinhos de fricção e fazendo com que percorram distâncias diferentes, como identificar, entre eles, o que foi mais rápido"?

Para isso, a turma de 21 alunos foi dividida em três grupos com 7 alunos.

Bem, no início, foi comum observar entre eles que, mesmo se divertindo com os carrinhos, friccionando-os para que percorressem a mesa da sala de aula, em seu comprimento, a ideia de rapidez estava ligada ao tempo. O carrinho que chegasse primeiro a outra extremidade da mesa, logicamente, seria o mais rápido. Mas isso, obviamente, seria fácil identificar quando as distâncias percorridas fossem as mesmas e os carrinhos soltos ao mesmo tempo.

Para desconstruir esta ideia, ou seja, do mais rápido ser identificado como aquele que atingisse primeiro a outra extremidade da mesa ou que a rapidez estivesse ligada somente ao tempo, o que levou a eles imaginarem no início, foi proposto, então, que realizassem a prática soltando os carrinhos em instantes diferentes e que percorressem distâncias diferentes.

Para isso, caso utilizassem o chão da sala, foi orientado que limpassem o caminho por onde o carrinho percorreria, tendo o cuidado de que o percorresse em uma linha reta. Isso pelo fato de evitarmos que a trajetória fosse curva, pelo menos em algum trecho, o que acarretaria conceitos físicos mais complexos cujo entendimento seria dificilmente alcançado utilizando-se a prática proposta.

Depois de orientados, os alunos poderiam utilizar tanto a mesa como o próprio chão da sala, contanto que fizessem com que os carrinhos percorressem distâncias diferentes.

O interessante é que, neste momento, a proposta foi discutida entre os grupos formados, cada um com o seu carrinho, e a prática repetida várias vezes, entre eles, até que chegassem à conclusão de que não poderiam responder qual o carrinho realizou o movimento mais rápido, conhecendo apenas o tempo do percurso realizado por ele.

Os alunos descobriram na prática que a ideia da rapidez de um movimento está associada à distância percorrida pelo carrinho e ao tempo necessário para percorrê-la.

Cito, ainda, que o termo velocidade ou velocidade média, em nenhum momento foi citado, até que alguns alunos mencionaram em seus formulários resposta, preenchidos com o objetivo de registrarem os procedimentos adotados para alcançar o que era pedido na situação problema. Esclareço, também, que a transcrição dos passos realizados pelo aluno A foi feita na íntegra, mantendo-se, inclusive, os erros gramaticais.

Aluno A (12 anos):

Passo 1: Medimos a distância percorrida pelo carrinho – $2m42$ e $3m18$;

Passo 2: Cronometramos a velosidade do carrinho – $2,6$ e $1,38$;

Passo 3: Fisemos esse procedimento várias e várias vezes.

A prática serviu para mostrar que existem grandezas que são representadas pela associação de duas outras. A velocidade é um exemplo disso, pois a expressamos como velocidade média $= \frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$. Com isso, ficou claro que essas grandezas são expressas por frações, cujo conhecimento foi trabalhado entre os alunos, quando descobriram que para expressarem a velocidade tinham que dividir a distância que o carrinho percorreu pelo tempo que ele levou para percorrê-la.

Pelo fato dos alunos terem apresentado dificuldades para realizarem os cálculos de divisão, por razões dos dados colhidos não serem valores inteiros, foi permitido o uso da calculadora. No entanto, os alunos compreenderam a importância da utilização de frações para expressarem determinadas grandezas, como a velocidade.

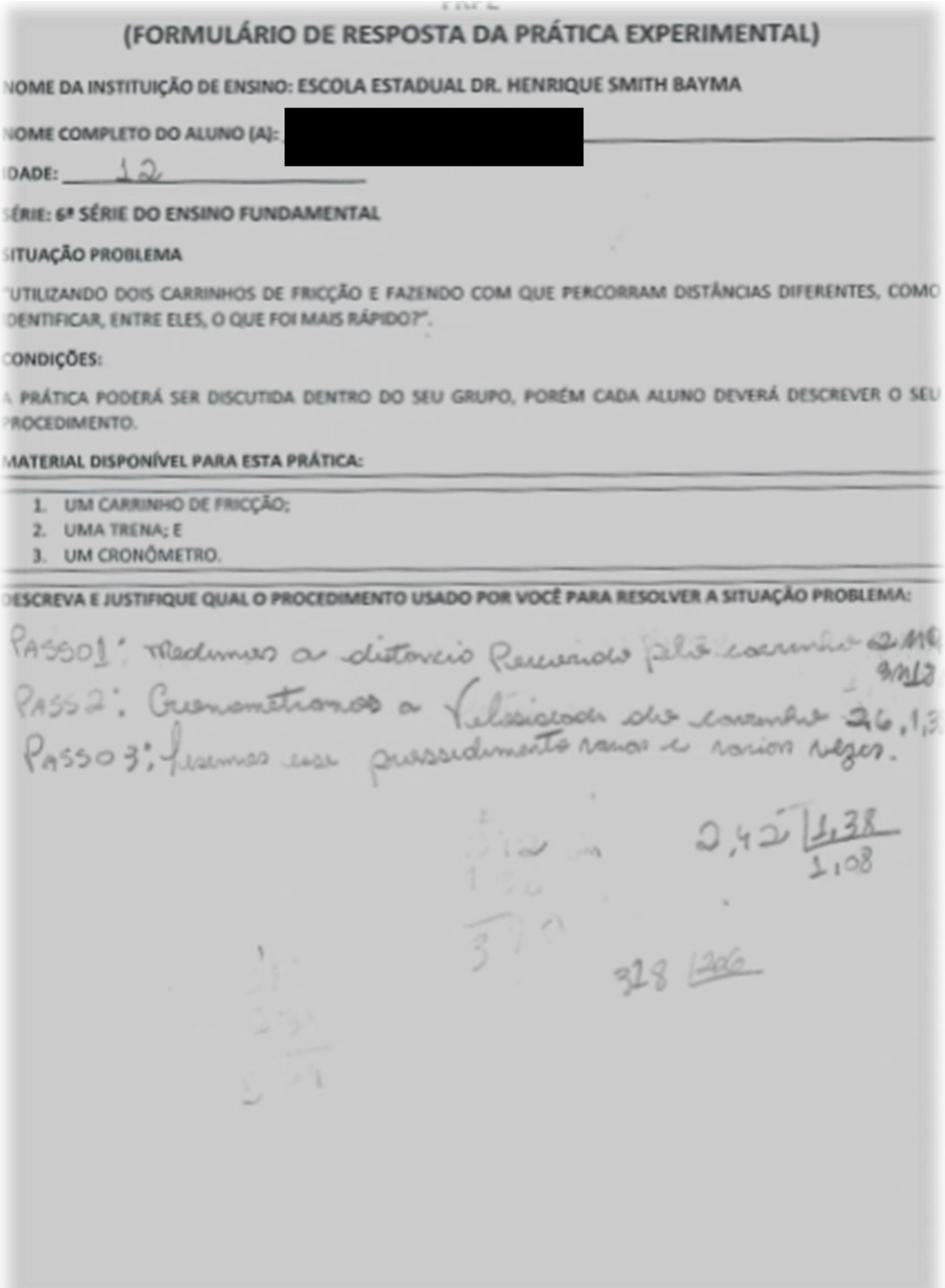
No intuito de facilitarem os cálculos, sem que houvesse perda do raciocínio de como cada um estaria construindo seu entendimento ou sua estratégia, os alunos foram orientados a arredondarem os números, a fim de se trabalharem com números inteiros.

A ideia do arredondamento, para eles, é que, na maioria das vezes, o número era arredondado para o inteiro imediatamente superior. Por exemplo, não importava se o tempo cronometrado fosse $1,18$, $1,34$ ou $1,65$, o número era arredondado para $2,0$.

Quanto a isso, não foi estabelecido, a rigor, o critério de arredondamento. A prática se desenvolveu em um ambiente onde eles ficaram à vontade para criarem seus próprios critérios e não perderem o raciocínio que estavam construindo.

É certo que os cálculos e os procedimentos relatados pelos alunos nos formulários resposta, mostraram, no geral, desorganização na escrita, no entanto, isso não foi prejudicial à

Figura 2 – Formulário de resposta do "aluno A" na prática experimental do 6º ano



(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

IOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

IOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

DADE: 12

ÉRIE: 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

ITUAÇÃO PROBLEMA

"UTILIZANDO DOIS CARRINHOS DE FRICÇÃO E FAZENDO COM QUE PERCORRAM DISTÂNCIAS DIFERENTES, COMO DENTIFICAR, ENTRE ELES, O QUE FOI MAIS RÁPIDO?".

ONDIÇÕES:

PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU ROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM CARRINHO DE FRICÇÃO;
2. UMA TRENA; E
3. UM CRONÔMETRO.

ESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

PASSO 1: medimos a distancia Percorrida pelo carrinho 2,42 3,12

PASSO 2: Cronometramos a Velocidade do carrinho 2,6, 1,3

PASSO 3: fizemos esse prossedimento varias e varias vezes.

2,42 | 1,38
1,08

328 | 1,26

Fonte: Elaborada pelo autor.

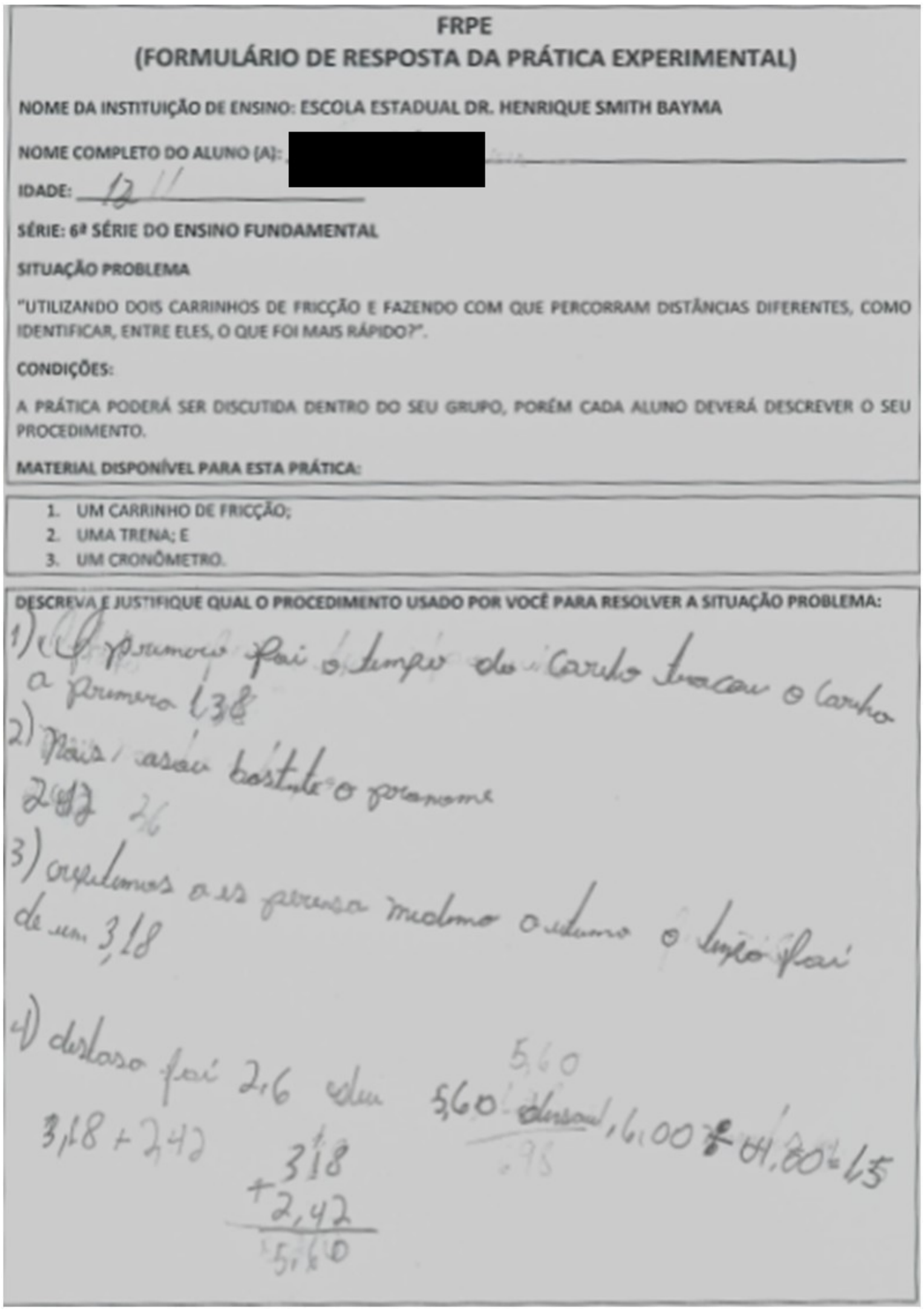
análise para este trabalho.

Muito me chamou a atenção o formulário da Figura 3.

Transcrição do procedimento adotado pelo Aluno B:

1. O primeiro foi o tempo do cariho trocou o cariho O primeiro 1,38

Figura 3 – Formulário de resposta do "aluno B" na prática experimental do 6^o ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 12 11

SÉRIE: 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

"UTILIZANDO DOIS CARRINHOS DE FRICÇÃO E FAZENDO COM QUE PERCORRAM DISTÂNCIAS DIFERENTES, COMO IDENTIFICAR, ENTRE ELES, O QUE FOI MAIS RÁPIDO?".

CONDIÇÕES:

A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM CARRINHO DE FRICÇÃO;
2. UMA TRENA; E
3. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1) O primeiro foi o tempo do carrinho traçou o carrinho a primeira 1,38
2) Nóis usou bastante o primeiro 2,42 2,6
3) Repetimos a es perensa medimo o aluno o tempo foi de um 3,18
4) distasa foi 2,6 deu 5,60 ... 6,00 ÷ 04,00 = 1,5

3,18 + 2,42

$$\begin{array}{r} 3{,}18 \\ +\,2{,}42 \\ \hline 5{,}60 \end{array}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Nois usou bastante o primeiro $2,42$ $2,6$

3. Repetimos a es perensa medimo ... o tempo foi de um $3,18$

4. Distasa foi $2,6$ deu $5,60$ ... , $6,00 \div 04,00 = 1,5$

Comparando os dados, anotados por ele, com os dados de outros alunos, percebe-se que a operação demonstrada no procedimento 4, enumerado por ele, ou seja, $3,18 + 2,42 = 5,60$, não se refere ao tempo e sim à distância. Logo depois, cito na mesma linha, ele arredonda o valor para $6,0$.

Voltando ao procedimento 1, após a troca do carrinho, a primeira distância, $2,42$ metros, foi percorrida em $1,38$ segundo. A segunda distância, $3,18$ m, foi percorrida em $2,6$ s. Na operação $1,38+2,6$, a soma $3,98$ segundos foi arredondada para $4,0$ segundos.

Enquanto os demais estavam dividindo cada distância pelo respectivo tempo, o que já caracterizaria o cálculo da velocidade média, o aluno B adotou um caminho diferente.

Ao realizar a operação $3,18+2,42=5,60$, enfatizando que ele aproxima a soma para $6,0$, está-se calculando a distância total percorrida pelo carrinho nesses dois trechos. Na operação $1,38+2,6$, aproximando a soma para $4,0$, está-se calculando o tempo total em que o carrinho levou para percorrer os mesmos dois trechos. Ao se dividir $6,0$ por $4,0$, resultando como quociente $1,5$, está-se calculando a velocidade média do carrinho.

Não se levou em consideração o tempo entre o término do primeiro percurso e o início do segundo. Numa situação real, isso se equivaleria a um carro que percorresse certa distância e permanecesse, por exemplo, parado até iniciar o próximo percurso. O tempo total seria o somatório dos tempos necessários para se percorrer as distâncias, acrescidos do tempo em que o carro permaneceu parado. Sendo assim, teríamos $v=\frac{d}{t}$, one d seria a distância total percorrida e t o tempo total gasto no trajeto, ou seja, uma única velocidade, constante, necessária para se percorrer todo o percurso levando-se o mesmo tempo.

O valor $1,5$ encontrado pelo aluno corresponde, então, à velocidade média levando-se em consideração o citado no parágrafo anterior.

No entanto, não houve preocupação, por parte do aluno, em expressar os valores obtidos com as respectivas unidades, o que poderia ter sido feito expressando-se $1,5$ m/s. Além disso, ele não se preocupou em descobrir em qual trecho o carrinho desenvolveu uma maior velocidade.

Embora, para realização da prática, a turma tenha sido dividida em quatro grupos, houve interação entre eles, possibilitando uma espécie de competição, instituída pela ansiedade de ver qual o carrinho, escolhido por eles, fora o mais rápido.

Foram utilizadas duas horas-aula distribuídas para as seguintes etapas: apresentação pessoal do aplicador, apresentação do kit experimental, exposição da situação problema, exposição dos resultados por parte dos alunos e o fechamento conclusivo do aplicador enfatizando o objetivo da prática.

A aplicação desta prática foi com 21 alunos, número que não representa a quantidade real em uma sala de aula de uma escola pública.

Numa situação real, com média de 40 alunos, seria melhor aplicada se fossem formados 10 grupos de 4 alunos e, pelo menos, 2 professores aplicadores, um para cada 5 grupos. Neste caso, poderiam ser utilizadas 3 horas-aula, sendo a terceira destinada apenas às duas últimas etapas.

Porém, os alunos trabalharam o conceito físico de velocidade média sem terem o conhecimento prévio para tal.

Os cálculos desenvolvidos por eles mostraram que trabalharam o conteúdo de fração, simplificação e divisão, alcançando, em parte, o objetivo proposto na atividade.

O principal fator que contribuiu para que o objetivo proposto a ser trabalhado na prática experimental ficasse prejudicado, foi o fato dos alunos terem dificuldades em efetuar operações com números não naturais. Isso fez com que o objetivo da realização da simplificação não tenha sido alcançado. Poderíamos pensar em um número natural para controlar a distância. No entanto, ao se medir o templo que o carrinho levaria para percorrê-la, dificilmente encontraríamos um número natural. Da mesma forma, poderíamos fixar um número natural para a tempo, mas dificilmente conseguiríamos encontrar um número natural para representar a distância que o carrinho percorreria no tempo previamente fixado.

Por conseguinte, podemos pensar na melhoria da prática ou mesmo na introdução de outro conceito da Física, no intuito de se continuar trabalhando o conteúdo de fração e simplificação ou de que este também seja modificado.

Não é fácil pensarmos em um conceito físico definido pela relação de duas grandezas representadas por números naturais. Geralmente uma poderá ser fixada com um número natural, enquanto a outra, não. Para evitarmos tal problemática e como melhoria da prática experimental adotada, consideraremos duas sugestões (adotadas na sala de aula com os alunos na aplicação desta prática): a aproximação dos números não naturais em naturais, como facilitador ao se explorar a simplificação de frações, no caso de existir para o numerador e denominador um divisor comum diferente de 1; e trabalharmos as distâncias com precisão de centímetros ou milímetros e o tempo com precisão de décimo ou centésimo de segundo, bastando , para isso, multiplicarmos o numerador e o denominador da fração por potências de 10, visando preservar a velocidade média como quociente de números naturais.

Caso se opte pela mudança da prática experimental, poderemos, ainda, pensar na densidade como outro conceito físico a ser introduzido no 6^o ano do ensino fundamental. Poderíamos apresentar aos alunos uma nova proposta: descobrirem o porquê um corpo afunda. Teríamos, então, amostras de líquidos e sólidos, onde pudessem ser medidas, empiricamente, suas massas e volumes e calculados os quocientes das divisões dessas respectivas grandezas, comparando-os entre si, com o objetivo de relacionar o fenômeno "afundar" com a densidade do material.

Enfatizemos que dificilmente massa e volume, concomitantemente, serão representados por números naturais. Se conseguirmos representar uma, certamente o outro não será. Isso poderia fazer com que os alunos continuassem com dificuldades para realizarem a divisão entre essas grandezas, fator observado com a coleta de dados extraídos dos formulários entregues aos alunos, e o objetivo da operação de simplificação continuar inalcançado. Sendo assim, à fim de que os alunos pudessem ter maior controle e confiança na realização dos cálculos, sem prejuízo do que fora proposto, a aproximação do número não natural para um número natural poderia ser adotada quando necessária.

Além disso, há a opção de se medir massas e volumes diferentes, porém da mesma substância, possibilitando não somente trabalhar os conteúdos matemáticos já propostos, como explorar o conteúdo de equivalência de frações.

Outrossim, caberá ao professor a motivação e a criatividade que o levarão à análise de resultados, nem sempre esperados, porém de grande importância.

3.4 O conteúdo no livro adotado pela escola e uma nova proposta.

Segundo Centurión e Jakubovic (2015), os autores declaram o seguinte:

> Simplificar uma fração é encontrar outra, equivalente à primeira, mas com numerador e denominador menores. A maneira mais utilizada de simplificar uma fração é dividir seu numerador e seu denominador por um divisor comum (maior que 1) (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.152).

No livro adotado pela escola, no 6^o ano do ensino fundamental, podemos ver o conteúdo matemático trabalhado na prática aplicada no assunto “Frações: equivalência e simplificação”.

Os autores escrevem ainda o seguinte: “Multiplicando-se o numerador e o denominador de qualquer fração por um mesmo número natural, não nulo, sempre se obtém uma fração equivalente à inicial” Centurión e Jakubovic (2015, p.152).

Bem, os exemplos encontrados no capítulo do livro com gráficos de barra, esquemas de proporções para se calcular a incógnita, são propostas que visam fixar o entendimento da equivalência e da simplificação. Não há como negar que tais exemplos e as explicações são muito didáticos.

No entanto, fração está ligada ao entendimento da parte de um todo. Exemplos como estes, retirados do conteúdo do livro mostram isso:

1. Dividindo-se igualmente 3 pizzas entre 7 pessoas, quanto cada um receberá?

2. Flávio dividiu 30 bombons entre 5 amigos. Essa divisão pode ser representada por uma fração. Qual é essa fração?

3. Em uma votação o representante da turma foi eleito com 34 de um total de 85 votos. Qual é a fração que representa essa votação?

4. (Desafios e surpresas) A distância entre duas cidades é de 325 quilômetros. Hoje, o trem que liga essas cidades viaja a 65 quilômetros por hora. Planeja-se substituí-lo por um trem-bala, que viaja a 390 quilômetros por hora.

   a) Em quantas horas o trem atual faz a viagem?

   b) Em que fração de hora o trem-bala a fará? Quantos minutos levarão essa viagem?

Os exemplos 1 e 3 têm como resultados as frações irredutíveis $\frac{3}{7}$ e $\frac{34}{85}$ (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.156 e 157).

A ideia de fração irredutível é aquela em que não se consegue dividir o numerador e o denominador da fração por um mesmo número natural maior que 1.

No exemplo 4, o trem-bala viaja a 390 quilômetros por hora, que, na verdade pode ser representada na forma $\frac{(390km)}{(1hora)} = 390$. Uma fração de denominador 1.

Neste exemplo específico a velocidade aparece apenas como um dado, pois o objetivo é calcular as letras a e b do problema.

A proposta da prática aplicada aos alunos do 6^o ano do ensino fundamental, com a introdução do conceito de velocidade média, é trabalhar a ideia de existirem grandezas que são representadas por frações, pela simplificação delas ou dividindo-se o numerador pelo denominador, como já mencionado no início desta análise.

Conduzir os alunos a raciocinarem que deveriam calcular a velocidade média dos carrinhos, fez com que eles obtivessem frações formadas por números racionais. Embora na prática tenha sido admitido o arredondamento, para facilitar os cálculos, pois se pensava na continuidade do raciocínio e não somente no resultado obtido com os dados exatos colhidos na prática, nem assim a simplificação foi fácil.

Como a representação da velocidade é melhor entendida com um único número real, optou-se pela divisão do numerador pelo denominador, haja vista estes, também, não serem naturais.

Uma prática divertida, do cotidiano, que contribuiu não somente para que os alunos entendessem que as frações poderiam representar, inclusive, grandezas como a velocidade e que simplificando ou dividindo-as, seria a melhor maneira de representá-las.

A prática experimental permite também que o professor possa trabalhar outros conteúdos matemáticos do 6^o ano do ensino fundamental, como, por exemplo, operações com números racionais.

Uma das professoras do 6^o ano declarou cerca de três meses após a aplicação deste trabalho na escola: “Gostei muito do projeto e gostaria de incentivar a ter outros iguais a este, porque um conteúdo adicional, que tem tudo a ver com o cotidiano, colocado na prática só tem a contribuir com o nosso trabalho”.

CAPÍTULO

4

TEMA PARA O 7^o ANO: HIDRODINÂMICA (VAZÃO)

Segundo Junior, Ferraro e Soares (2007), a Hidrodinâmica é o estudo dos fluídos (líquidos e gases) em movimento, como a água escoando ao longo de um tubo ou no leito de um rio, o sangue que corre pelas veias de uma pessoa, a fumaça emitida pela chaminé de uma fábrica.

Segundo os autores, embora nesse ramo da ciência estuda-se o movimento dos fluídos em geral, o nome Hidrodinâmica (do grego: hydro, água) é conservado por tradição, pois originalmente esse estudo se restringia ao movimento da água.

O experimento a ser trabalhado no referido ano do Ensino Fundamental se restringirá ao escoamento da água. Tal escoamento pode ocorrer de maneira que a velocidade do fluido se altere a cada instante ou permaneça inalterada com o passar do tempo. O experimento irá considerar a segunda maneira.

Segundo Junior, Ferraro e Soares (2007), em uma situação real, a viscosidade é resultado do atrito entre as moléculas do fluido e parte dele, por sua vez, se oporá ao movimento relativo de outra. Os autores complementam ainda que um fluído incompressível e não-viscoso significa que sua densidade não varia ao longo do percurso e que não há dissipação de energia ao longo do trajeto.

Esse aspecto é que iremos considerar neste tema.

Além disso, consideraremos também que o escoamento do fluido (água) seja vertical. Por conseguinte, a pressão muda a cada instante em que o nível do fluido no interior do recipiente é alterado.

O kit experimental a ser utilizado será um recipiente com água e uma torneira instalada na sua parte mais baixa. Porém, a aceleração gravitacional será considerada constante, não importando o nível da água do interior desse recipiente.

No interior da torneira, também iremos considerar que a água flua de maneira constante, ou seja, sem haver alteração de sua velocidade com o tempo, não importando os desvios que o fluido venha a sofrer no seu interior.

Seja ΔV o volume da água que sairá do recipiente com velocidade constante, o qual poderá ser medido utilizando-se um copo medidor, num certo intervalo de tempo Δt.

A vazão ao passar pela seção transversal da "boca" da torneira é definida como: $Z = \Delta V/\Delta t$, onde Z é a vazão, ΔV é o volume de água e Δt o intervalo de tempo.

Os autores ainda complementam que a unidade de vazão, bastante utilizada, é o litro por segundo $\frac{l}{s}$ e sua correspondência com o Sistema Internacional é o $\frac{m^3}{s}$.

$$1m^3/s = 1000l/s = 10^3 l/s \tag{4.1}$$

A seguir veremos a aplicação da prática proposta, o conceito matemático a ser trabalhado, a análise desta aplicação para os alunos do 7^o ano, uma breve análise da apresentação do conteúdo matemático apresentado no livro adotado pela escola e sugestões de uma nova proposta.

4.1 Prática experimental: aplicação e objetivo.

A proposta para os alunos do 7^o ano do Ensino Fundamental foi de descobrir quanto tempo levava para se esvaziar um galão de 20 litros de água, porém, sem esvaziá-lo por completo e utilizando um copo medidor de 500 ml.

Para realização desta prática o aluno disporá dos seguintes materiais:

a) um galão com a capacidade de 20 litros com uma torneira instalada;

b) um regulador de água adaptável à torneira;

c) um copo medidor;

d) um balde; e

e) um cronômetro (Neste caso, foi permitido usar a função cronômetro do celular).

A prática foi realizada em uma sala de aula contendo 20 alunos, entre meninos e meninas, divididos em três grupos: dois de 7 alunos e um de 6 alunos.

Durante a atividade, os alunos foram participativos dentro do seu grupo e cada um apresentou o formulário de resposta da prática experimental preenchido com os procedimentos adotados.

Figura 4 – Material utilizado no tema do 7º ano

(a) Galão de água (b) Copo Medidor (c) Cronômetro

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Conceito matemático a ser trabalhado: regra de três.

Uma curiosidade sobre a regra de três é que SILVA *et al.* (2011) diz que esse termo originalmente era chamado de regra de cinco, sete, nove, onze, conforme o número de grandezas envolvidas.

O autor ainda complementa que quando a regra surgiu no Ocidente, fez um sucesso entre os comerciantes a ponto de ser chamada de regra de ouro, devido a inúmeras aplicações.

Os nomes além de cinco eram raramente utilizados e comumente chamados pelo nome genérico de Dupla regra de três ou regra de três composta. Smith (1958, p.491).

De acordo com Gómez (2006), teorias das razões e proporções, eram consideradas as mais importantes por se destacarem pelas inúmeras aplicações.

A regra de três é um mecanismo que permite a resolução de problemas vinculados à proporcionalidade entre três valores que se conhecem e um quarto que é uma incógnita. Graças à regra, pode-se descobrir o valor deste quarto termo.

A regra de três simples pode ser, ainda, direta ou inversa. Ela será direta quando, por exemplo, um termo de uma grandeza aumenta e o seu correspondente, da outra grandeza, também aumenta na mesma proporção. Será inversa quando, por exemplo, o aumento de um termo corresponderá à diminuição do outro.

Para exemplificar segue um exercício onde será utilizada a regra de três simples direta: “Em 5 horas uma máquina produz 120 peças. Quantas peças ela produzirá em 8 horas?”.

O problema é organizado conforme mostrado na tabela 1:

Tabela 1 – Tabela de grandezas tempo x produção

Tempo (horas)	Produção (peças)
5	120
8	x

Tabela 2 – Tabela de grandezas Velocidade (Km/h) x Tempo (horas)

Velocidade (Km/h)	Tempo (horas)
100	2
120	x

Com esses dados podemos escrever a seguinte proporção e calcularmos o quarto termo.

$$\frac{5}{8} = \frac{120}{x} \tag{4.2}$$

Em continuidade, enunciaremos um exercício onde será utilizada a regra de três simples inversa, mostrado na Tabla 2: "Um carro movido a velocidade constante de 100 km/h e em trajetória retilínea percorre uma distância em 2 horas. Se o mesmo carro percorresse a mesma distância, sobre as mesmas condições, porém com uma velocidade constante de 120 km/h, quanto tempo levaria?"

O problema é organizado conforme mostrado na Tabla 2. No entanto, com o aumento da velocidade a distância será percorrida em um tempo menor. Logo, para calcularmos o quarto termo, poderemos escrever a proporção da seguinte forma:

$$\frac{100}{120} = \frac{x}{2} \tag{4.3}$$

Porém, neste trabalho vamos utilizar apenas o conceito de regra de três simples, ou seja, com duas grandezas e quatro termos onde três dos termos são conhecidos.

4.3 Análise da aplicação no 7^o ano.

A turma composta de 20 alunos foi dividida em um grupo de 6 alunos e dois grupos de 7 alunos.

No intuito de economizar, a prática foi realizada com um volume de água menor que o proposto. Foi orientado, também, que poderiam esvaziar o volume de água que excedesse à marcação inteira graduada no galão.

O grupo 1 recebeu um galão com um volume de água que passava um pouco dos 15 litros. O volume excedente foi esvaziado por eles para que iniciassem a prática com o galão contendo o volume inteiro de 15 litros de água.

Após discutirem e terem efetuados os cálculos, foi-lhes perguntado sobre os procedimentos adotados por eles. As respostas da ”aluna C” foram transcritas, na íntegra, do seu formulário mostrado na Figura 5.

- Professor “Qual o 1^o passo que vocês pensaram em fazer para resolver o problema?”
- Aluna C (12 anos) – “Encher o copo de 500 ml enquanto cronometro. Deu 10 segundos”.
- Professor – “E depois? Qual foi o próximo passo?”
- Aluna C (12 anos) – “Fazer o dobro de 500 ml (1 litro). Deu 20 segundos”.
- Professor – “E depois, o que fizeram?”
- Aluna C (12 anos) – “Multiplicar pela quantidade de água?”

O formulário mostrado na Figura 5 expressa o cálculo feito pela aluna C. Nele consta duas situações, ou seja, os tempos para esvaziar 15 e 20 litros.

Na 1^a situação, ela multiplicou 20 segundos por 15 litros, obtendo o produto 300 segundos. Depois, multiplicou 20 segundos por 20 litros, obtendo o produto 400 segundos.

Todos os alunos do grupo, segundo seus respectivos formulários, responderam que cronometraram 10 segundos para encher 500 ml de água; depois multiplicaram por 2, obtendo o tempo de 20 segundos para encher 1 litro, o equivalente a 2 copos medidores de 500 ml, o que seria o mesmo que esvaziar 1 litro do galão em 20 segundos.

Em seguida, raciocinaram em multiplicar 20 segundos por 20 litros ou 15 litros, dependendo do volume a ser considerado.

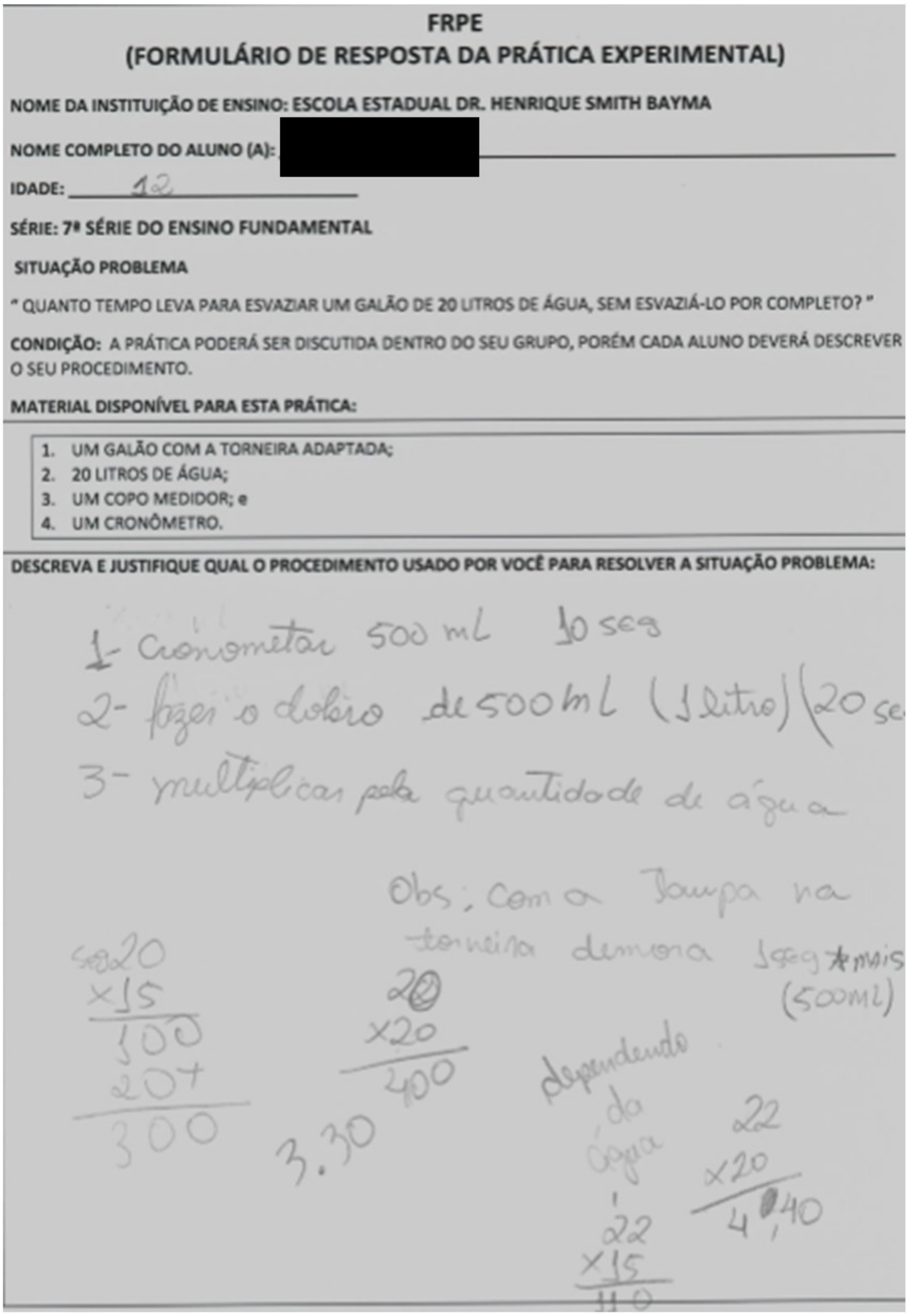
Os cálculos foram realizados corretamente. Mesmo sem terem o conhecimento prévio, os alunos identificaram que a vazão tem relação com o volume de um fluído e o tempo necessário para esse volume escoar.

A notação da razão $\text{Vazão} = \text{volume}/\text{tempo}$ não foi citada, em nenhum momento, para os grupos. No entanto, os alunos mostraram que não tiveram dificuldades em construir o raciocínio físico nem de utilizar a regra de três como ferramenta matemática para resolverem o problema.

Embora não tenham mostrado organização nos cálculos, os alunos também expuseram oralmente que dobravam o tempo de esvaziamento do copo medidor de 500 ml para obterem o tempo de esvaziamento de 1 litro. Posteriormente, calcularam o tempo de esvaziamento completo do galão multiplicando-se o tempo correspondente ao esvaziamento de 1 litro pelo volume total de água contido no galão.

Observamos que mesmo havendo a transposição do cálculo para obterem o tempo de esvaziamento de 1 litro, o conteúdo da regra de três foi facilmente trabalhado pelos alunos, alcançando-se, com isso, o objetivo proposto.

Figura 5 – Formulário de resposta da "aluna C" na prática experimental do 7^o ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 12

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

" QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? "

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1- Cronometar 500 mL 10 seg
2- fazer o dobro de 500 mL (1 litro) (20 se
3- multiplicar pela quantidade de água

Obs: Com a Tampa na torneira demora 1 seg a mais (500 mL)

seg 20 × 15 = 100 + 20 = 300

20 × 20 = 400

3,30

dependendo da água

22 × 20 = 4,40

22 × 15 = 110

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi colocado, ainda, um regulador de vazão na torneira e perguntado se iria alterar ou não o tempo de esvaziamento que eles haviam calculado.

A prática foi repetida por todos nessa nova condição e, a seguir, temos a transcrição íntegra extraída do formulário da aluna D (12 anos):

- "Obs.: Com a tampa na torneira só levou apenas 1 segundo a mais, ou seja, não mudou quase nada". Continua ainda ..."Dependendo do nível da água pode estar caindo forte quando fraca".

Ela explicou, oralmente, que faria o cálculo da seguinte maneira:

- "1 segundo a mais que multiplicar por 2 para dar 1 litro; depois por 15 litros; 2 vezes 15 dá 30. Então o tempo total, agora, é 330 segundos".

O conteúdo de regra de três é mostrado no raciocínio lógico da aluna. No entanto, um fato novo chama a atenção quando ela fez a segunda afirmação: "Dependendo do nível da água pode estar caindo forte quando fraca".

É certo que à medida que é diminuído o nível de água dentro do galão, a pressão do líquido diminui e, com isso, altera a velocidade com que a água sai da torneira.

Em estudos mais avançados no Ensino Médio, no conteúdo de hidrodinâmica, da Física, tal conceito é apresentado como o teorema de Stevin.

> A pressão em um ponto situado à profundidade h no interior de um líquido é dada pela pressão na superfície, exercida pelo ar (p_A), chamada pressão atmosférica, somada à pressão exercida pela coluna de líquido situada acima do ponto e expressa pelo produto dgh (JUNIOR; FERRARO; SOARES, 2007, p.426).

O ponto considerado aqui é onde foi instalada a torneira no galão, ou seja, na parte mais baixa, havendo uma coluna de água acima dela. A fórmula é apresentada a seguir:

$$p_B = p_A + dgh \tag{4.4}$$

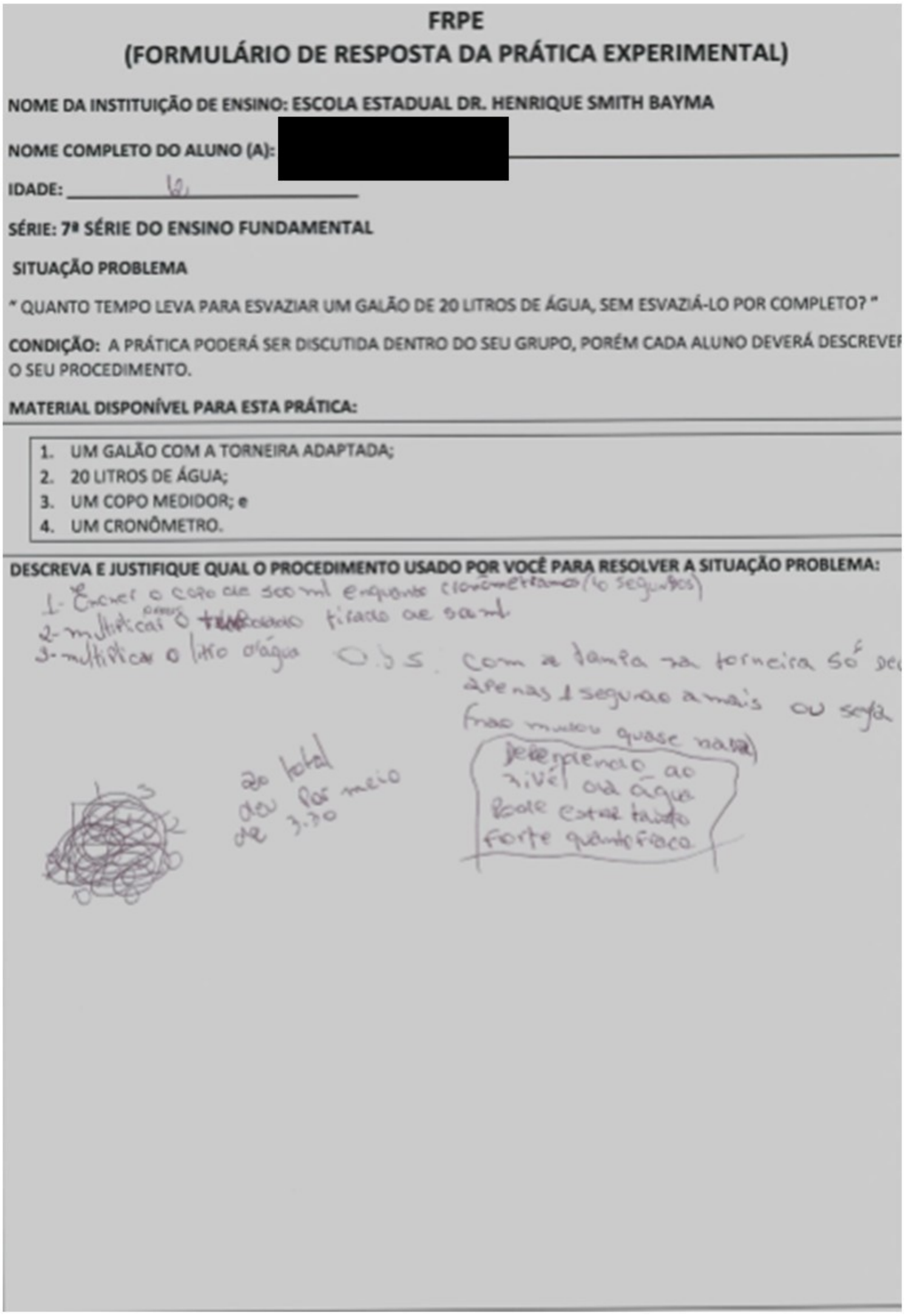
Como pode ser observado, quanto menor o valor de h, mantendo-se as outras variáveis constantes, menor será o valor de p_B e vice-versa.

Porém, o que ocorre no interior da torneira, quando trocamos o adaptador, é o que se denomina equação da continuidade:

> ... a velocidade de escoamento de um fluido é inversamente proporcional à área da seção transversal do tubo. Por exemplo: diminuindo a área, a velocidade de escoamento aumenta na mesma proporção e a vazão permanece a mesma ... (JUNIOR; FERRARO; SOARES, 2007, p.458).

Porém, foi possível tal conceito físico ser observado e citado por uma aluna do 7º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública, em uma prática onde o objetivo era de introduzir o conceito de vazão e trabalhar o conteúdo de regra de três.

Figura 6 – Formulário de resposta da "aluna D" na prática experimental do 7º ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 16

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

" QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? "

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1- Encher o copo de 500 ml enquanto cronometramos (10 segundos)
2- multiplicar o tempo tirado de 500 ml
3- multiplicar o litro d'água

O.b.s. com a tampa da torneira só deu apenas 1 segundo a mais ou seja (não mudou quase nada)

ao total deu por meio de 3:30

Dependendo ao nível da água pode estar tanto forte quanto fraco

Fonte: Elaborada pelo autor.

O grupo 2 não teve dificuldade de compreender o conceito físico de vazão. No entanto, o raciocínio utilizado para o cálculo do tempo de esvaziamento do galão não foi o de regra de três.

Inicialmente, eles cronometraram o tempo para se esvaziar 5 litros de água. Depois, fizeram o cálculo com 3 parcelas iguais ao tempo encontrado e obtiveram a soma correspondente ao tempo de esvaziamento de 15 litros. Como no galão que receberam continha pouco mais que 15 litros, os alunos cronometraram também o tempo de esvaziamento do volume excedente. Esse raciocínio é mostrado na transcrição íntegra extraída do formulário da aluna E (13 anos).

- Aluna E : "Nosso primeiro raciocínio foi esvaziar 5 litros e marcamos o tempo que demoramos e depois adicionamos os outros 10 litros conforme o tempo que havia custado para cada 5 litros e depois cronometramos o tempo a mais do restante da água, pois não havia 15 litros exatos; havia mais".

Os cálculos mostrados por todos do grupo retratam o seguinte:

Foram cronometrados 3 minutos e $17,47$ segundos para esvaziar 5 litros de água do galão. Como se desejavam esvaziar 15 litros, somaram 3 parcelas de 3' 17,47". O tempo de esvaziamento do volume que excedeu os 15 litros foi de $29,84$ segundos.

O cálculo, mostrado a seguir, está representado na figura 7.

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & : & 17 & : & 47 \\
3 & : & 17 & : & 47 \\
3 & : & 17 & : & 47 \\
\hline
9 & : & 52 & : & 41 \\
 & + & 29 & : & 84 \\
\hline
9 & : & 82 & : & 25 \\
 & & & & \\
10 & : & 22 & : & 25
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 82 \\
- & 60 \\
\hline
 & 22
\end{array}
$$

Ao final, o grupo converteu 09' $82,25$" em 10' 22,25" subtraindo-se 60 segundos de 82, o que corresponde a 1 minuto, sendo este adicionado a 9 minutos, obtendo a resultado final de 10' 22,25".

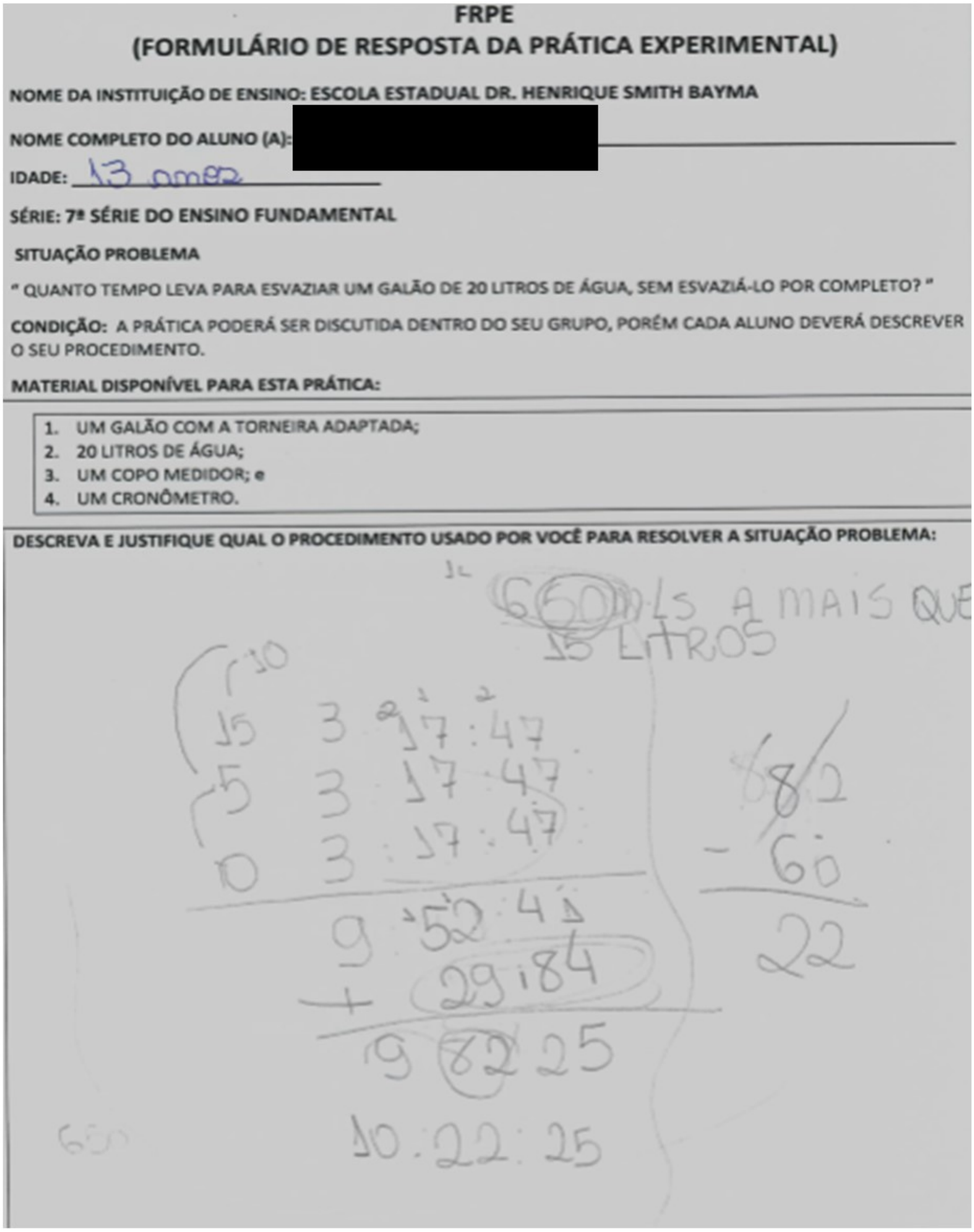
Mesmo após ter sido enfatizado que não poderiam esvaziar um volume maior que a capacidade do copo medidor, ou seja, 500 ml, o grupo não modificou sua estratégia.

Conforme se vê, por exemplo, no formulário resposta da Figura 9.

O aluno dividiu 1 litro em duas parcelas de 500 ml (capacidade máxima do copo medidor). Assim fez para o 2^o litro, 3^o... até os 15 litros, totalizando 30 parcelas de 500 ml. O tempo de esvaziamento de 500 ml foi de 24,85". Depois, multiplicou-se 24,85" por 30, o que corresponderia a 30 copos de 500 ml, ou seja, 15 litros.

O cálculo está demonstrado no verso do formulário resposta do aluno, Figura 10.

Figura 7 – Formulário de resposta da "aluna E" na prática experimental do 7º ano


FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 13 anos

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

" QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? "

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

660 mLs A MAIS QUE 15 LITROS

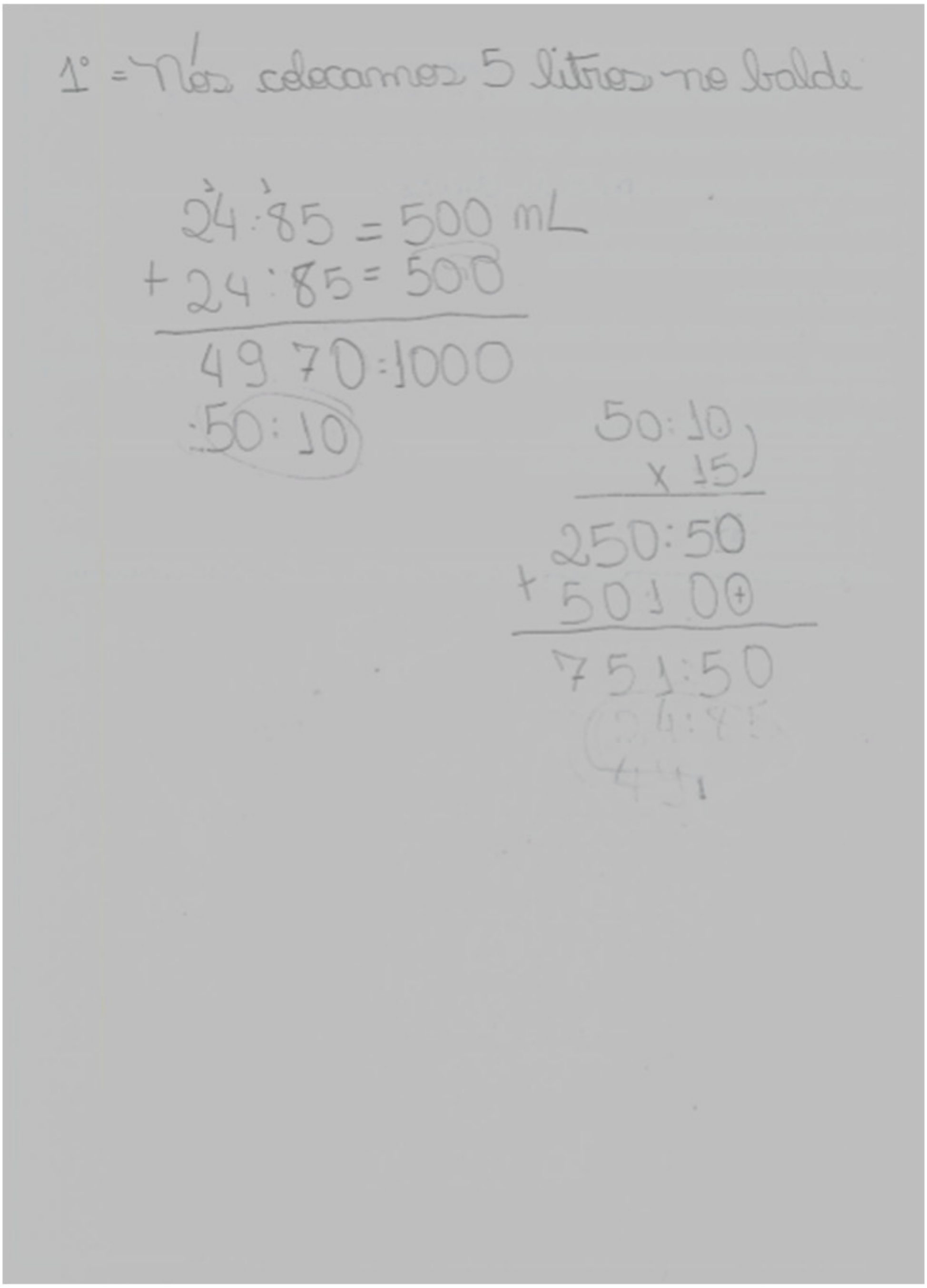
15 3 17 : 47
5 3 17 : 47
10 3 17 : 47
9 52 : 41
+ 29 : 84
9 82 25
10 : 22 : 25

82
− 60
22

Fonte: Elaborada pelo autor.

$$
\begin{array}{rcl}
24 & : & 85 \\
 & x & 30 \\
\hline
00 & : & 00 \\
745 & : & 50
\end{array}
$$

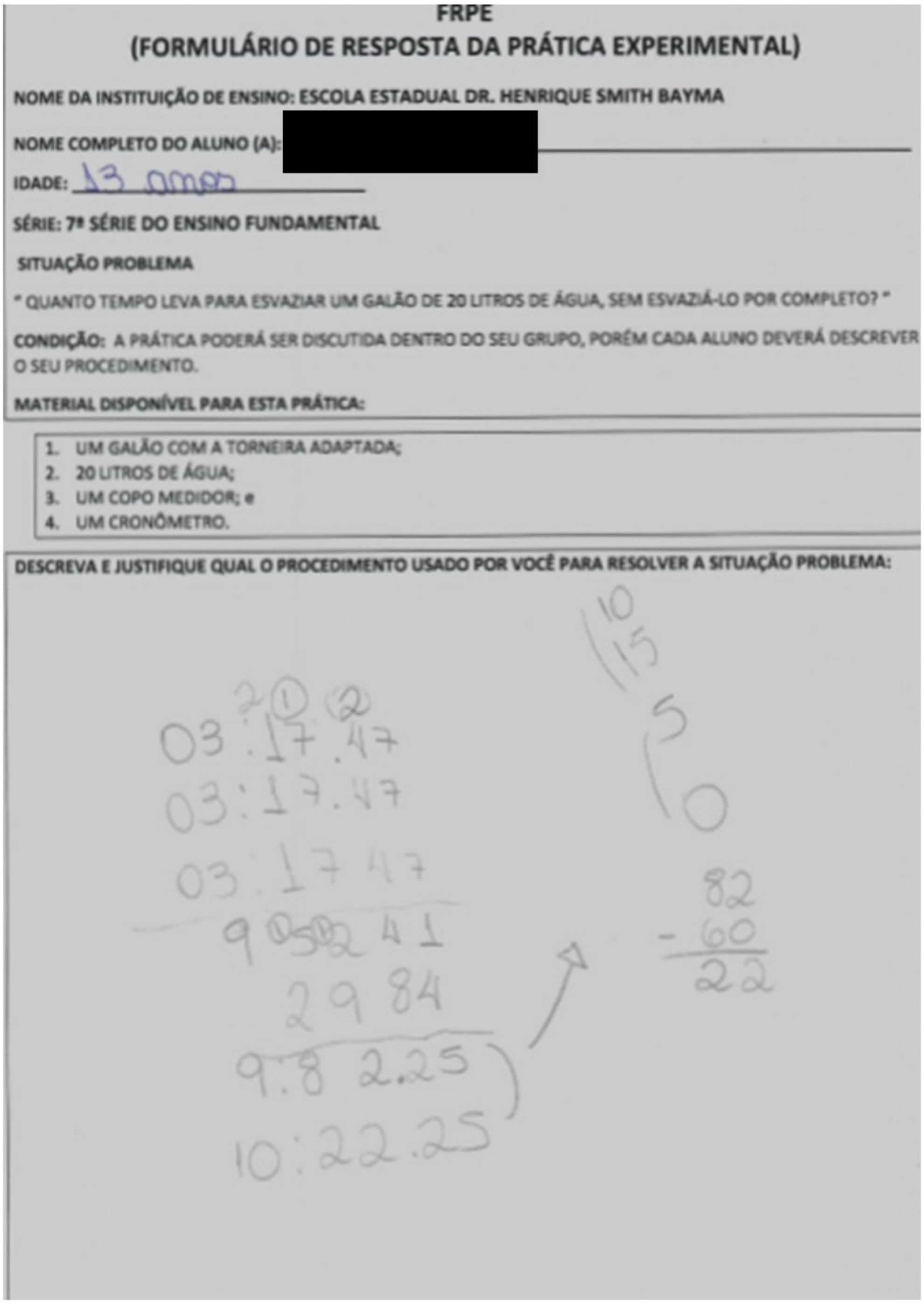
Figura 8 – Verso do Formulário de resposta da “aluna E” na prática experimental do 7^{o} ano



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$
\begin{array}{r|l}
745 & 60 \\ \cline{2-2}
-60 & 12 \\ \cline{1-1}
145 & \\
-120 & \\ \cline{1-1}
025 &
\end{array}
$$

Figura 9 – Formulário de resposta do “aluno F” na prática experimental do 7º ano



FRPE

(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 13 anos

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

" QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? "

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

10
15
5
0

03:17.47
03:17.47
03:17 47
9052 41
29 84
9:8 2.25
10:22.25

82
− 60
22

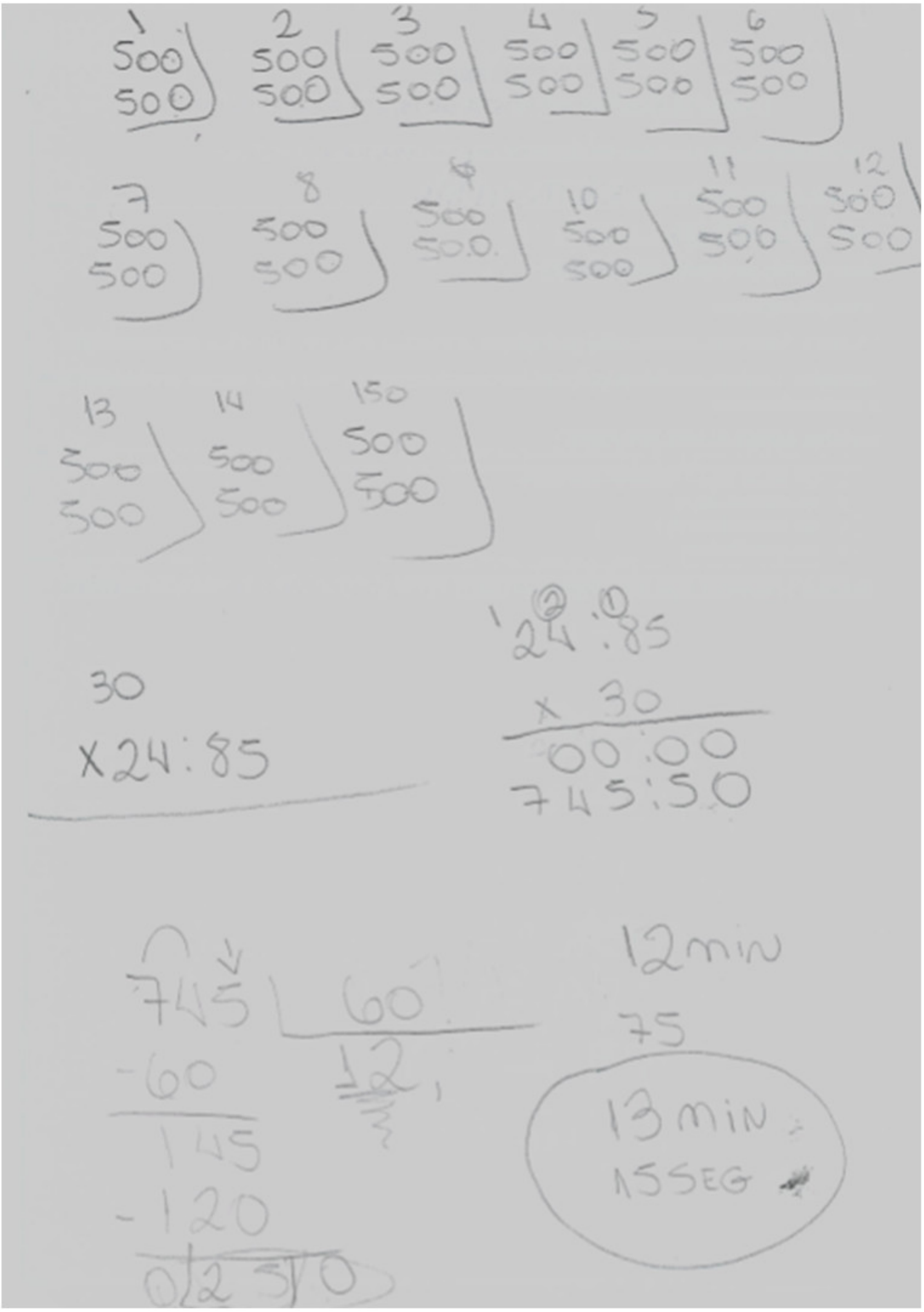
Fonte: Elaborada pelo autor.

12 min
75 seg

13 min
15 seg

O erro foi o fato de adicionar os 25 segundos restantes a 50, obtendo a soma 75. Não foi observado por eles que o valor 50 não correspondia a 50 segundos e sim 50 centésimos de segundos, ou seja, $0,50$.

Figura 10 – Verso do Formulário de resposta do "aluno F" na prática experimental do 7º ano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desta maneira, o valor de 12 minutos e 75 segundos, convertido para 13 minutos e 15 segundos, como resposta do tempo necessário para esvaziar o galão de 15 litros de água está errado. O tempo correto seria, então, 12 minutos e $25,50$ segundos.

Quanto ao grupo 3, foi aceito pelos componentes dois valores do tempo cronometrado para encher o copo medidor de 500 ml, 14 e 15 segundos. Devido às repetidas vezes com que realizou a prática, o tempo cronometrado teve variação de 1 segundo, sendo aceito os dois valores mencionados.

De igual modo, o grupo relacionou o volume esvaziado ao tempo de esvaziamento, mostrando, com isso, que o conceito físico de vazão também foi assimilado por eles, sem que eles tivessem o conhecimento prévio para isso.

Também foi utilizada a estratégia de relacionar o volume do copo e o tempo de enchimento (que é o mesmo tempo de esvaziamento) com o volume total do galão e o tempo necessário para esvaziá-lo. Isso mostra que eles não tiveram dificuldades para trabalhar o conteúdo de regra de três na prática experimental.

Este grupo trabalhou com um volume de 17 litros de água no galão e o tempo de enchimento do copo medidor de 500 ml, adotado por eles, foi de 15 segundos.

Embora tenha construído o raciocínio esperado, o cálculo que o grupo apresentou como tempo de esvaziamento do galão está incorreto.

O raciocínio foi o seguinte: levam 15 segundos para encher 500 ml, então quanto tempo levaria para encher 17 litros? Ao multiplicarem 15 por 17, obteve-se o produto 255 segundos e este foi o tempo considerado por eles.

Ao fazerem isso, os alunos consideraram o tempo de 15 segundos como o tempo necessário para encher (ou esvaziar) 1 litro do galão. Não atentaram que o volume do copo com que trabalharam era de 500 ml, ou seja, $0,5$ litros.

O cálculo poderia ter sido feito, então, multiplicando-se 15 por 17 e depois dividindo por $0,5$ ou multiplicando-se 15 segundos por 2, para se obter o tempo de enchimento (ou esvaziamento) de 1 litro, obtendo-se o produto 30 segundos, para em seguida multiplicar o novo produto ao volume de água contido no galão, que neste caso era de 17 litros. Dessa forma, o resultado que deveria ser encontrado era de 510 segundos ou 8 minutos e 30 segundos.

Esta última observação seria caso o grupo quisesse seguir o procedimento adotado pelos alunos componentes dos demais grupos.

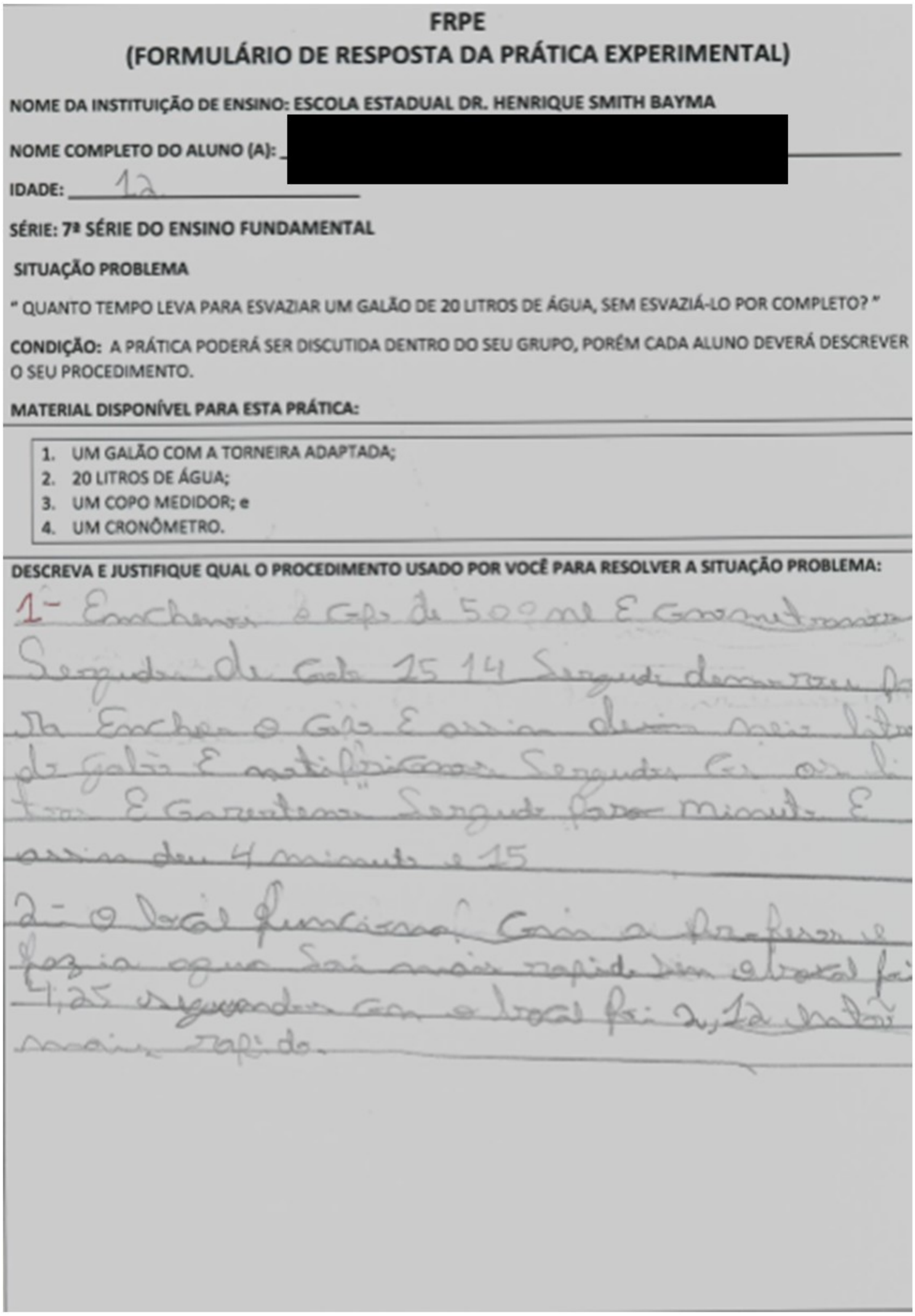
A este grupo específico também foi pedido que repetissem a prática utilizando o adaptador na torneira do galão. Algumas anotações bastante relevantes foram registradas pelos alunos, como as apresentadas pela aluna G, na Figura 11, cuja transcrição íntegra mostramos a seguir:

- "O bocal funciona como um propulsor e fazia a água sair mais rápido. Sem o bocal foi $4,25$ segundos, com o bocal foi $2,12$. Então mais rápido."

  Já o aluno H, na Figura 12, relata o seguinte:

- "... com o bocal nois pessamos que o bocal fazia uma pressão no bocal centralizando, mais

Figura 11 – Formulário de resposta da “aluna G” na prática experimental do 7º ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 12

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

“ QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? ”

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1- Enchemos o copo de 500 ml E cronometramos segundos de cada 15 14 segundos demorava para encher o copo E assim dividimos meio litro do galão E multiplicamos segundos com os litros E cronometramos segundos para minuto E assim deu 4 minuto e 15

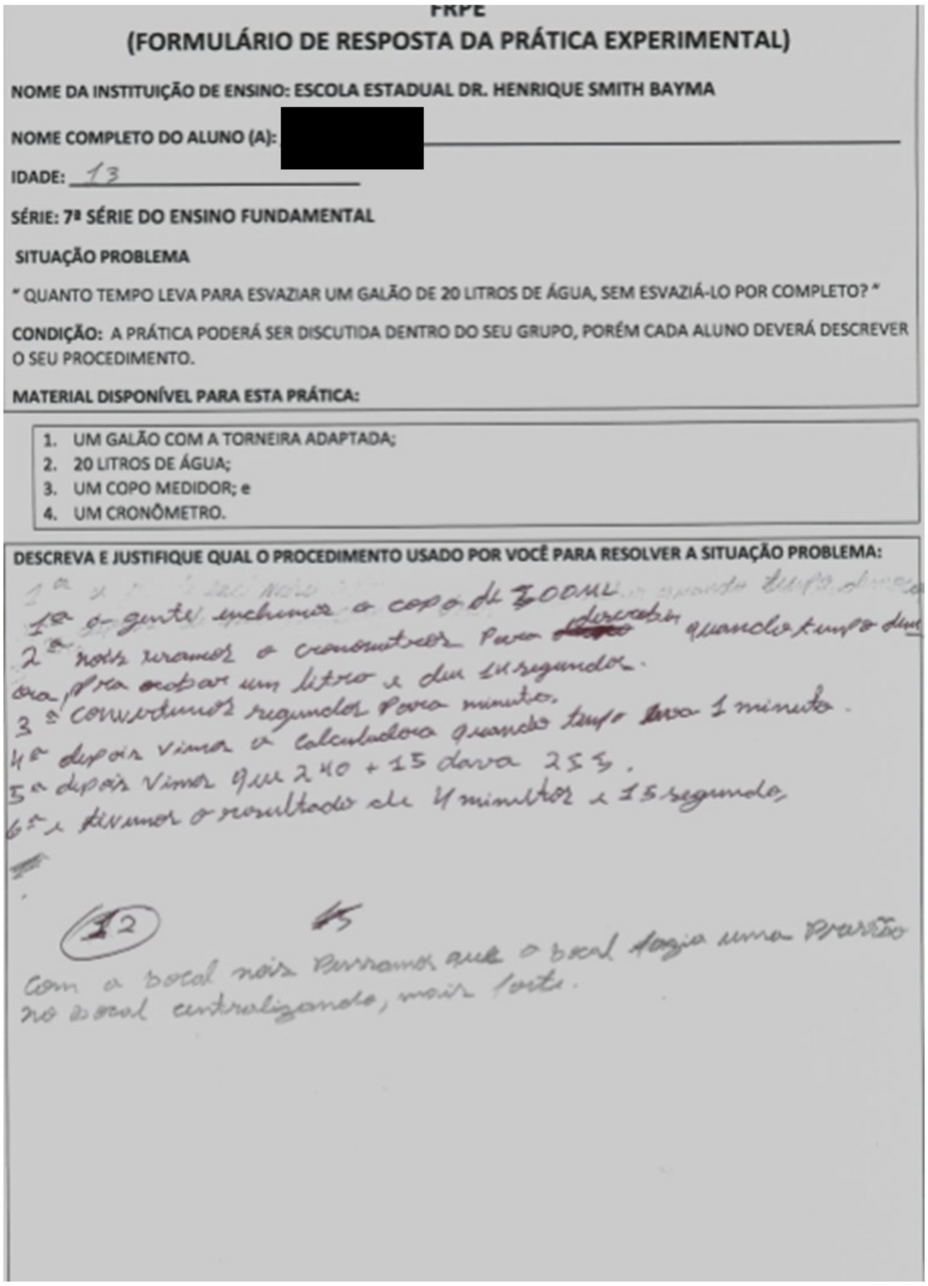
2- o local funcionou como a professora [illegible] fazia agua sai mais rapido sem o local foi 4,25 segundos com o local foi 2,12 então mais rapido.

Fonte: Elaborada pelo autor.

forte.”

Tal observação é muito interessante, pois foi notado por ele que a utilização do adaptador fazia com que a água saísse com uma pressão“... mais forte”.

Figura 12 – Formulário de resposta da "aluna H" na prática experimental do 7º ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 13

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

" QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? "

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1ª a gente enchemos o copo de 300ml
2ª nois viramos o cronometro Para descobrir quando tempo dura
ora pra acabar um litro e deu 14 segundos.
3ª convertemos segundos Para minutos.
4ª depois vimos a calculadora quando tempo leva 1 minuto.
5ª depois Vimos que 240 + 15 dava 255.
6ª e tivemos o resultado de 4 minutos e 15 segundos,

12

45

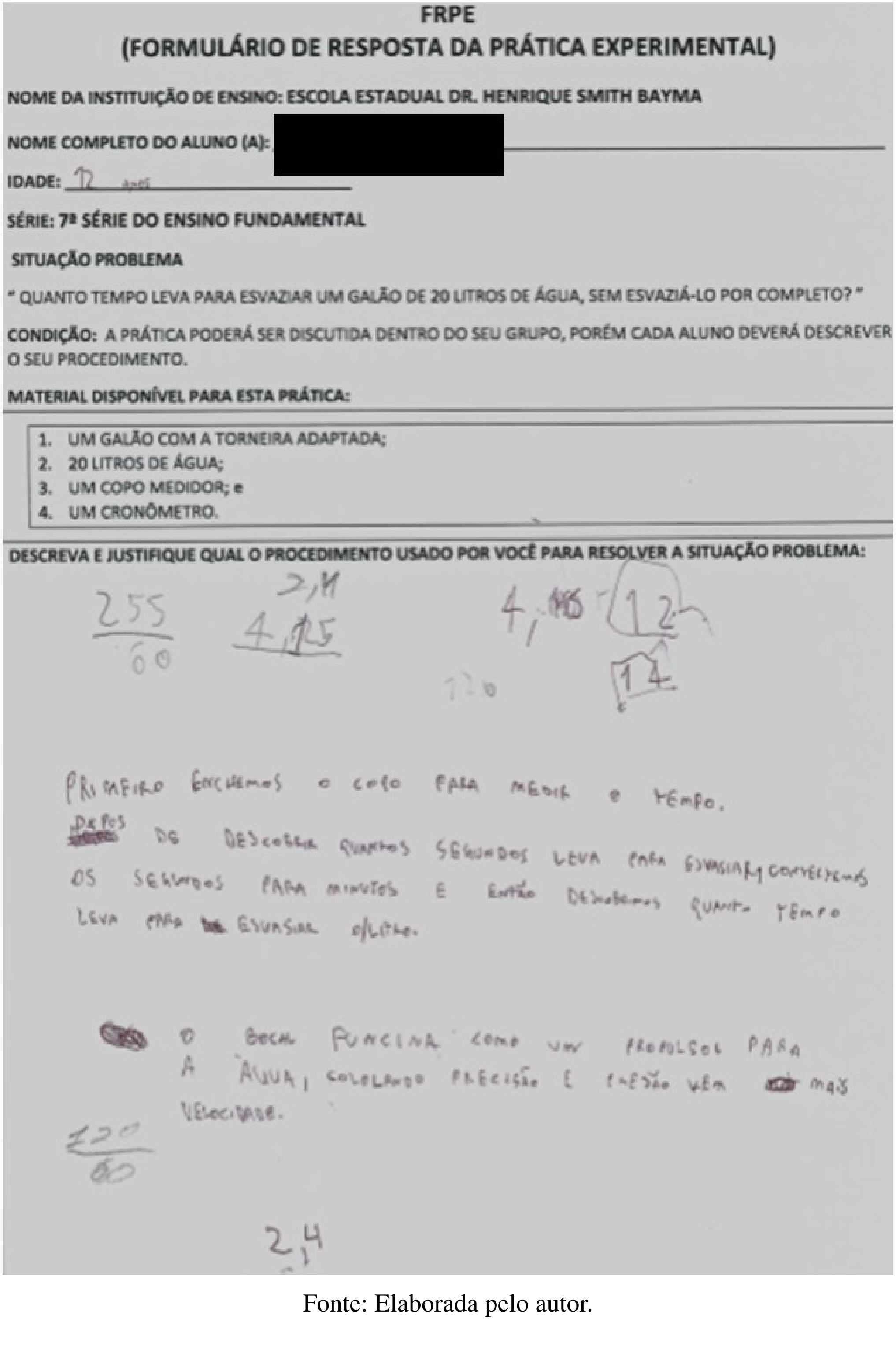
Com a bocal nois Percebemos que o bocal fazia uma Pressão no bocal centralizando, mais forte.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando certo volume de água passa por um tubo (torneira), na saída da água é percebida uma pressão do líquido. Porém, quando diminuímos a área da seção reta na saída do tubo (torneira), a pressão exercida pelo mesmo volume de água aumenta. Isso também pode ser visto quando brincamos com uma mangueira de jardim. Ao tamparmos, com o dedo, parte da saída da água na extremidade da mangueira, percebemos na ponta do nosso dedo um aumento de pressão da água.

No caso da aluna I (12 anos), ela observou que a utilização do adaptador fazia com que a água saísse com maior velocidade, conforme transcrição íntegra do seu formulário, Figura 13.

Figura 13 – Formulário de resposta da "aluna I" na prática experimental do 7º ano


FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 12 anos

SÉRIE: 7ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

" QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVAZIAR UM GALÃO DE 20 LITROS DE ÁGUA, SEM ESVAZIÁ-LO POR COMPLETO? "

CONDIÇÃO: A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM GALÃO COM A TORNEIRA ADAPTADA;
2. 20 LITROS DE ÁGUA;
3. UM COPO MEDIDOR; e
4. UM CRONÔMETRO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

255 / 60 2,4 / 4,25 4,15 12 14 120

PRIMEIRO ENCHEMOS O COPO PARA MEDIR O TEMPO.
DEPOS DE DESCOBRIR QUANTOS SEGUNDOS LEVA PARA ESVASIAR, CONVERTEMOS OS SEGUNDOS PARA MINUTOS E ENTÃO DESCOBRIMOS QUANTO TEMPO LEVA PARA ESVASIAR O/LITRO.

O BOCAL FUNCINA COMO UM PROPULSOR PARA A ÁGUA, COLOCANDO PRECISÃO E PRESSÃO VEM MAIS VELOCIDADE.

120 / 60

2,4

Fonte: Elaborada pelo autor.

- "O bocal funciona como um propulsor para a água, colocando precisão e pressão vem mais velocidade."

A vazão de um fluído pode ser calculada Vazão $= \frac{V}{\Delta t} = \frac{(A \times d)}{\Delta t}$, onde "A" é a área da seção reta por onde sai o volume de água e "d" a distância que o volume de água percorre dentro do prolongador do adaptador. A razão $\frac{d}{\Delta t} = v =$ velocidade, considerada constante na prática que foi aplicada. Dessa forma, vazão também pode ser calculada como o produto da área pela velocidade, ou seja, $Z($ vazão$) = A \cdot$ v(velocidade).

Como a vazão é constante, diminuindo a área, o valor da velocidade do fluxo é aumentado. Logo, a observação da aluna I, quando disse que "... vem mais velocidade", está correta. Embora a expressão correta seja "maior velocidade."

Voltando ao exemplo da brincadeira com a mangueira de jardim, quando diminuímos a área da seção reta, tampando parte da saída da água com o dedo, há um aumento da velocidade do fluxo de água, fazendo com que ela tenha um maior alcance.

Também foram utilizadas duas horas-aula distribuídas nas seguintes etapas: apresentação pessoal do aplicador, apresentação do kit experimental, exposição da situação problema, exposição dos resultados por parte dos alunos e o fechamento conclusivo do aplicador enfatizando o objetivo da prática. No entanto, a aplicação desta prática foi com 20 alunos, número que não representa a quantidade real em uma sala de aula de uma escola pública.

Numa situação real, com média de 40 alunos, mantenho a opinião de que seria mais bem aplicada se fossem formados 10 grupos de 4 alunos e, pelo menos, 2 professores aplicadores, um para cada 5 grupos. Neste caso, poderiam ser utilizadas 3 horas-aula, sendo a terceira destinada apenas às duas últimas etapas. O custo de cada kit (galão graduado, torneira, copo medidor) vai de $R\$40,00$ a $R\$60,00$. O cronômetro pode ser utilizado o aplicativo dos celulares dos próprios alunos.

A prática experimental proposta para o 7^o ano do Ensino Fundamental foi importante para os alunos trabalharem o conceito de vazão e exercitarem o conteúdo de regra de três, embora alguns alunos tenham optado para o raciocínio aritmético para resolverem a situação problema.

No entanto, a aplicação da prática experimental mostrou que outros conceitos físicos poderiam ser introduzidos, face às últimas observações relatadas nesta seção, assim como trabalhados outros conteúdos matemáticos, através da modelagem matemática.

4.4 O conteúdo no livro adotado pela escola e uma nova proposta.

Centurión e Jakubovic (2015) expressam a ideia de regra de três com exemplos do cotidiano. Os autores declaram, na introdução do assunto, o seguinte:

> Imaginando uma máquina que produz parafusos, podemos supor que, duplicando o tempo de funcionamento da máquina, duplicará a produção de parafusos; triplicando o tempo, triplicará a produção etc. Portanto, a produção da máquina é diretamente proporcional ao tempo do seu funcionamento. A máquina poderia ter as produções indicadas no quadro

abaixo. Com esses dados, poderia ser escrita a proporção (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.139).

$$\frac{3}{5} = \frac{60}{100} \tag{4.5}$$

No exemplo, se qualquer um dos termos for desconhecido, o valor da incógnita pode ser facilmente obtido resolvendo a regra de três.

As grandezas do problema têm significados próprios. Quero dizer que se há uma taxa de produtividade de 20 peças por hora, o aluno fica determinado a calcular o que se deseja a partir dos dados que possui. Essa taxa não é descoberta pelo aluno para se resolver o problema.

Seria diferente se o desafio fosse para calcular o tempo necessário para que a máquina produzisse 100 peças, por exemplo, sem cronometrar o tempo de produção das 100, é claro. Isso poderia levar o aluno a pensar não somente em tempo ou em produção, mas, indiretamente, na produtividade da máquina, antes mesmo de ser construído o raciocínio da regra de três.

Isso é o que foi proposto com a aplicação da prática para o 7^o ano. A possibilidade de fazer com que o aluno raciocine sobre o tema vazão, mesmo sem ter conhecimento prévio do conceito físico e antes mesmo de construir o raciocínio da regra de três para se resolver o problema.

Diante dos relatos contidos nos formulários respostas, embora a falta de organização dos dados tenha sido um fator marcante, obteve-se um resultado esperado e muito satisfatório, face ao tempo que foi destinado à aplicação da prática.

Uma professora do 7^o ano, cerca de três meses após a aplicação deste trabalho na escola, declarou o seguinte: “estávamos ministrando os conteúdos referentes à razão, proporção direta e inversamente proporcional e o projeto que envolve a prática, referente à vazão, veio como um complemento, de baixo custo, porém com riquezas de detalhes. Aprimorou aquilo que estava sendo contemplado na teoria, sendo sua implementação aprovada por nós professores e bem recebida pelos alunos que participaram do projeto, de maneira que parabenizo a iniciativa de se desenvolver um projeto como este”.

CAPÍTULO

5

TEMA PARA O 8^o ANO: LEI DA REFLEXÃO (ÓPTICA GEOMÉTRICA)

Segundo Junior, Ferraro e Soares (2007), reflexão é um fenômeno físico que consiste em que a energia, ao ser transmitida, colide com a superfície refletora, retornando à região da qual ela foi transmitida.

Podemos citar tipos de energia: energia térmica (calor), energia luminosa (luz) e ondas mecânicas, produzidas pela vibração de uma corda fixa em uma das extremidades. O fenômeno da reflexão é semelhante quando lançamos um corpo contra uma superfície e ele, após a colisão, retorna à região da qual ele foi lançado.

Este estudo se limitará em demonstrar a reflexão da luz e de partículas, pois o conceito e as leis envolvidas são os mesmos em ambas as situações. Além disso, a superfície refletora será considerada plana e polida ou espelhada, no caso da reflexão da luz e simplesmente plana quando se tratar de reflexão de partículas.

Consideraremos a reflexão de um raio de luz numa superfície refletora plana e polida ou espelhada. Com base nesses parâmetros, as leis da reflexão são assim enunciadas:

> Primeira lei da reflexão: O raio refletido, a normal e o raio incidente estão situados no mesmo plano.
>
> Segunda lei da reflexão: O ângulo de reflexão θR é igual ao ângulo de incidência θI (JUNIOR; FERRARO; SOARES, 2007, p.239).

A seguir, veremos a aplicação da prática proposta, os conceitos matemáticos a serem trabalhados, a análise desta aplicação para os alunos do 8^o ano, uma breve análise da apresentação dos conceitos matemáticos, trabalhados na prática, no livro adotado pela escola e sugestões de uma nova proposta.

Figura 14 – Os ângulos de reflexão e de incidência são iguais.

Fonte: Halliday, Resnick e Walker (1994).

5.1 Prática experimental: aplicação e objetivo.

A prática experimental a ser aplicada tem como objetivo fazer com que os alunos identifiquem a relação existente entre os ângulos de incidência e reflexão quando colidimos um feixe de laser numa superfície refletora.

Após a prática anterior e utilizando um prato com água, o aluno construirá estratégias para se calcular a altura de uma edificação ou de um ponto qualquer dentro da sala de aula. Espera-se que ele venha posicionar o prato com água em um ponto no chão entre a edificação que se deseja medir a altura e ele. Ele deverá observar o reflexo do ponto que se deseja medir a altura no meio do prato. Neste ponto, ele medirá: a distância dele ao meio do prato, a altura dos olhos e a distância do meio do prato ao referido ponto. Com esses dados, espera-se que o aluno descubra a relação entre os triângulos formados pelo reflexo do ponto, o pé da vertical onde o referido ponto está localizado e o próprio com o triângulo formado pelo reflexo do ponto na água, pelo calcanhar do observador no exato momento em que ele observa o reflexo no prato e pela altura de seus olhos.

Para a realização desta prática o aluno disporá dos seguintes materiais: um prato com água e de fundo preto (o fundo preto é apenas para que o aluno visualize o reflexo do ponto mais nitidamente) e uma trena.

Para simular o experimento, o aluno disporá também de:

a) uma caixa de madeira com fundo preto e superfícies internas refletoras;

b) um transferidor de 180 graus;

c) um lápis pequeno apontado;

d) uma trena pequena ou uma régua; e

e) uma ponteira laser.

Figura 15 – Material utilizado no tema do 8^o ano

Fonte: Elaborada pelo autor.

Já na prática de simulação o aluno, ao fazer o laser incidir numa superfície refletora, irá expressar a relação que há entre o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão que surgem quando o laser incide em um ponto na superfície refletora da caixa e reflete.

Nesta simulação, o aluno fará com que o feixe do laser incida na primeira superfície refletora. Este feixe refletirá na segunda superfície interna, adjacente à primeira e, por sua vez, refletirá na terceira superfície interna, adjacente à segunda e defronte à primeira. Nesta última, o aluno colocará rente a ela o lápis com a ponta na direção do reflexo do laser e sua base apoiada à segunda superfície interna da caixa.

A ponta do lápis simboliza a altura dos olhos do observador.

Figura 16 – Laser refletor incide na ponta do lápis

Fonte: Elaborada pelo autor.

O aluno irá calcular a distância da base da primeira superfície ao ponto laser que incidiu nela sem ter que medi-la diretamente.

Para isso, primeiramente o aluno deverá, ao incidir o laser na primeira superfície, fazê-lo com que o mesmo reflita na terceira superfície, defronte à primeira, exatamente na ponta do lápis fixo a ela.

Neste ponto, o aluno deverá ser capaz de expressar a relação que há entre as figuras geométricas formadas pelos feixes incidentes e refletidos e pelas respectivas superfícies internas da caixa.

Da mesma maneira o aluno colocará o prato com água entre a parede em que foi marcado o ponto em que se deseja medir a altura e ele próprio, numa posição tal que ele consiga ver o reflexo do ponto no centro do prato. Feito isso, será medida a distância dele ao centro do prato, a altura de seus olhos e a distância do centro do prato à base da parede onde foi marcado o ponto em que se deseja calcular sua altura.

5.2 Conceitos matemáticos a serem trabalhados: Congruência e Semelhança.

Em todos os livros didáticos de matemática que conceitua congruência, o fazem exemplificando a congruência de triângulos.

Vamos nos valer da definição de congruência apresentada por Neto (2013), em que diz:

> Dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles pelo espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro (NETO, 2013, p.25).

Esta definição pode, sem sombra de dúvida, ser atribuída à congruência de qualquer figura plana, ou seja, se uma figura plana, independente da quantidade de lados, puder ser movida pelo espaço, sem ser deformada, até fazê-la coincidir com outra figura plana, elas são congruentes.

Como o objetivo desta seção é trabalhar o conceito de congruência de triângulos, citaremos a definição de BARBOSA (2006):

> Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes (BARBOSA, 2006, p.45).

No entanto, Centurión e Jakubovic (2015) apresentam os seguintes critérios de congruência de triângulos:

a) Caso LAL (lado-ângulo-lado), se dois triângulos têm dois lados e o ângulo formado por eles respectivamente congruentes, esses triângulos são congruentes;
b) Caso LLL (lado-lado-lado), se dois triângulos têm os lados respectivamente congruentes, então eles são congruentes;

c) Caso ALA (ângulo-lado-ângulo), se dois triângulos têm dois ângulos e o lado entre eles com as mesmas medidas, respectivamente, então os triângulos são congruentes; e

d) Caso LAA (lado-ângulo-ângulo), se dois triângulos têm dois ângulos e o lado oposto a um desses ângulos com as mesmas medidas, respectivamente, então os triângulos são congruentes.

(CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.167-170).

Da mesma forma, o conceito de semelhança é exemplificado nos livros didáticos com a semelhança de triângulos. Em razão do objetivo deste item, cito a definição de semelhança de triângulos, por BARBOSA (2006):

> Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais (BARBOSA, 2006, p.109).

.

Esta definição deixa claro que a semelhança de dois triângulos se relaciona com a congruência dos ângulos e a proporcionalidade dos seus lados homólogos.

5.3 Análise da aplicação no 8^o ano.

A proposta para o 8^o ano do Ensino Fundamental foi resolver a seguinte situação problema: "Como calcular a altura que um objeto está do solo, utilizando um prato com água."

Bem, para isso a turma constituída de 18 alunos foi dividida em três grupos com 6 alunos.

No intuito de ajudar os alunos a construírem seus raciocínios a respeito do problema proposto, foi utilizado por eles um kit de material com o objetivo de simularem o problema. O kit era composto de um caixilho de madeira com superfícies internas refletoras, uma ponteira laser, um transferido de 180^o e um lápis pequeno ou objeto similar.

A prática simuladora consistia em o aluno incidir o laser em uma superfície interna refletora do caixilho e fazer com que o raio refletido, após sofrer a segunda reflexão na superfície refletora adjacente, atingisse a ponta do lápis ou do objeto similar. Este, por sua vez, estava encostado à superfície refletora de frente àquela em que o laser incidiu pela primeira vez, como ilustrado na Figura 16.

O lápis ou objeto similar representava o observador posto em pé, onde a ponta representava a altura dos olhos.

Os raios refletidos formavam com as respectivas superfícies refletoras dois triângulos considerados retângulos, pois os caixilhos foram intencionalmente construídos com suas superfícies adjacentes perpendiculares entre si.

Queremos deixar claro que é possível encontrarmos o problema proposto apresentado, de forma similar, na internet ou em livros de outros autores bem como o kit de simulação para trabalhos similares dentro de conteúdos da geometria inclusive. No entanto, a idéia de associar o kit de simulação com a situação problema foi possibilitar ao aluno visualizar os feixes de laser que, aqui, representam o feixe da luz natural não percebida.

Foi explicado também que o fenômeno da visão ocorre quando a luz entra nos olhos e a imagem é formada na retina. Resumidamente, a ideia era enfatizar que para conseguirmos enxergar algo, é necessário que a luz chegasse aos nossos olhos. Na prática simuladora com o caixilho, o fenômeno da visão era representado somente quando o raio refletido do laser atingia a ponta do lápis, considerada como altura dos olhos do observador.

Várias simulações foram realizadas pelos alunos em que o raio incidente do laser incidia em pontos diferentes da superfície refletora até que os respectivos raios refletidos incidissem na ponta do lápis, simulando o fenômeno da visão.

Para seguirmos com a prática orientada foram explicados aos alunos os conceitos de normal, ângulo incidente e ângulo de reflexão. Logo após, os alunos utilizaram o transferidor para medirem os ângulos citados exatamente no ponto onde o feixe do laser incidia na superfície refletora.

Ao perceberem que os ângulos eram iguais, começaram a construir uma relação entre os triângulos formados pelas superfícies refletoras e os raios incidentes e refletidos. “Parecem ser iguais só que de tamanhos diferentes” – dito por um dos alunos.

Com base na Figura 17a para auxíliar a construção dessa relação os alunos foram orientados a medirem com uma régua ou uma trena as distâncias “a” e “b” a partir do ponto em que o laser incidia na superfície refletora até as suas extremidades. Da mesma forma, a distância “n” que vai do ponto incidente do laser até a intersecção da superfície refletora com a superfície em que o raio incidiu; e o tamanho do lápis ou do objeto similar “m”.

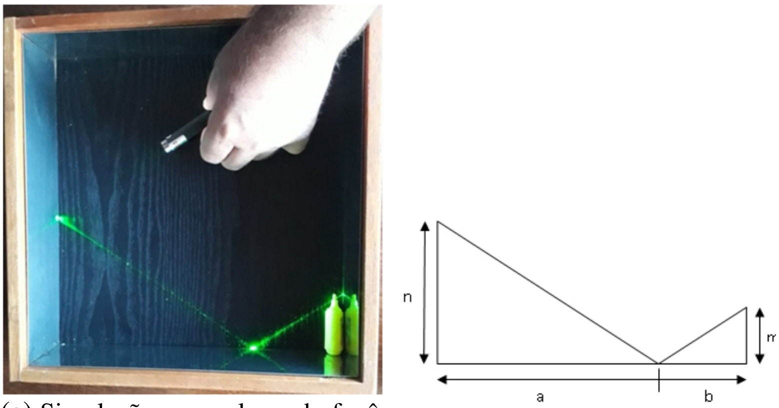
Dividindo-se “n” por “m”, obteremos o quociente “k” que representa o coeficiente de proporcionalidade entre essas distâncias. Esse coeficiente deve ser o mesmo coeficiente existente entre as distâncias “a” e “b”. Isso ocorrendo, os terceiros lados dos dois triângulos, feixes incidente e refletido, também terão a mesma proporcionalidade. Dessa forma, poderemos afirmar que os triângulos formados são semelhantes. Esse fato foi logo observado pelos alunos quando calcularam o valor de “k”.

É claro que a precisão dos instrumentos de medida utilizados nesta prática influenciou no grau de exatidão com que foi realizada. No entanto, não afetou o objetivo da mesma.

Após terem praticado no caixilho e com a ponteira laser, os alunos foram conduzidos para fora da sala de aula, em uma área coberta, para reproduzirem a situação da sala.

A proposta agora era de calcular a altura que se encontrava um buraco na telha da

Figura 17 – Prática experimental simuladora do tema do 8º ano.



(a) Simulação com o laser do fenômeno da visão

(b) Esquema de triângulos formados

Fonte: Elaborada pelo autor.

cobertura onde estávamos. Os materiais a serem utilizados para resolver o problema eram um prato com água e uma trena.

No fundo do prato havia sido colado um pedaço de EVA preto, no formato do seu fundo, para ficar mais nítido o reflexo do objeto que se queria observar.

Dessa forma, foi explicado aos alunos que o prato com água era uma superfície espelhada, como as paredes refletoras do caixilho e o que fora praticado na sala de aula, utilizando-se o caixilho, teria a mesma aplicação naquela área coberta.

Houve dificuldades em associar o que fora praticado na sala com o novo cenário em que se encontravam. Porém, após uns minutos de discussão entre eles, começaram a surgir as primeiras ideias, como podemos ver relatadas no formulário resposta da aluna J, Figura 18. Nele é descrito os primeiros procedimentos do grupo, antes mesmo de medir as distâncias que seriam necessárias para se resolver o problema proposto.

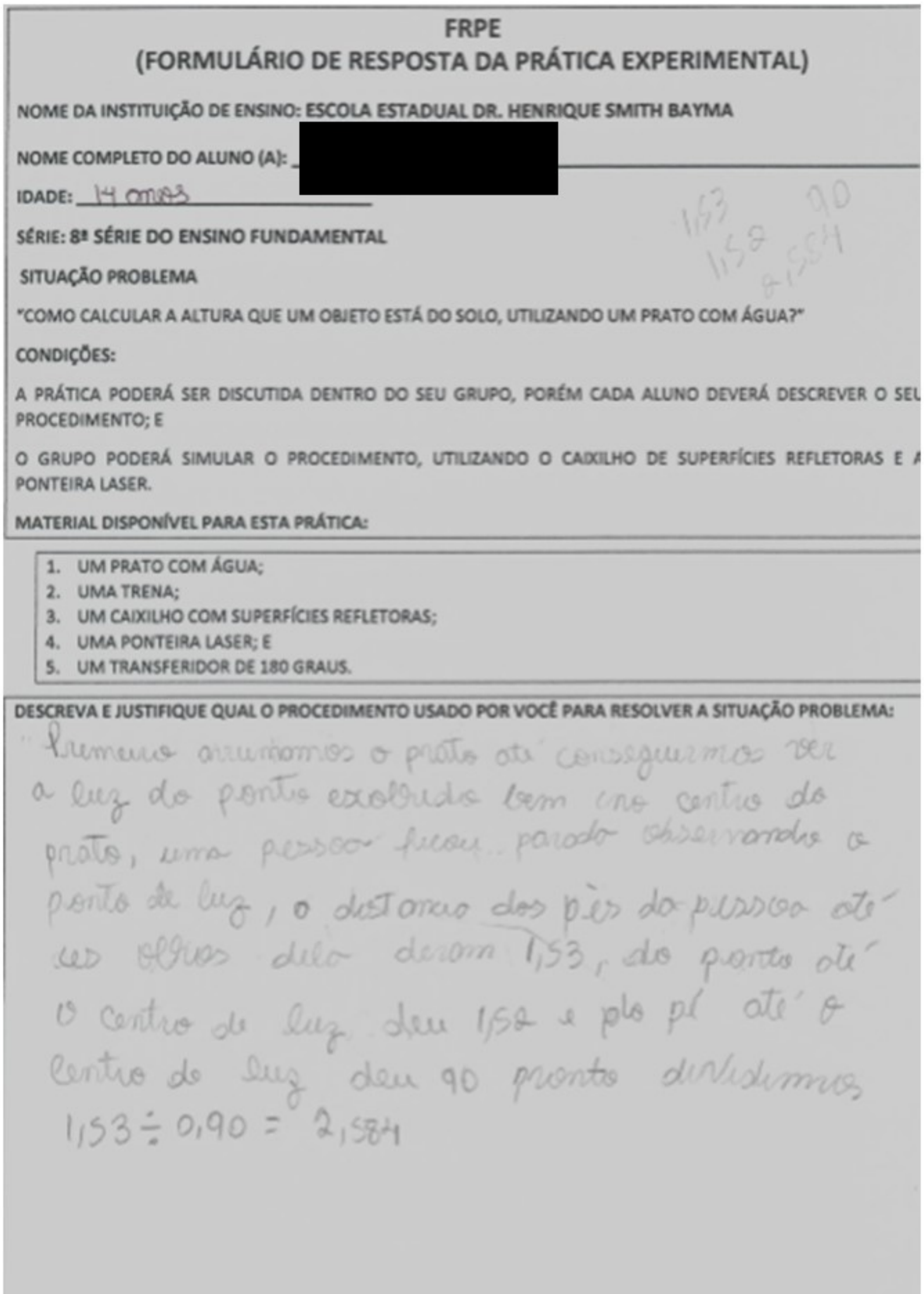
O interessante é que a aluna relata sua real intenção na prática: colocar o prato com água no chão, numa posição entre o observador (aluno) e o buraco na telha, de tal modo que o reflexo do buraco pudesse ser visto, pelo observador, no centro do prato. Conforme transcrito do formulário da Figura 18:

- “Primeiro arrumamos o prato até conseguirmos ver a luz do ponto escolhido bem no centro do prato, uma pessoa ficou parada observando o ponto de luz...”

A prática também foi desenvolvida em grupo e os procedimentos adotados pelos alunos foram praticamente os mesmos, diferenciando apenas na clareza com que foram escritos.

Como podemos ver no formulário resposta da aluna K, Figura 19, os procedimentos que ela adotou para calcular a altura que estava o buraco na telha do solo:

Figura 18 – Formulário de resposta da "aluna J" na prática experimental do 8^o ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 14 anos

SÉRIE: 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

1,53 90
1,52 2,584

SITUAÇÃO PROBLEMA

"COMO CALCULAR A ALTURA QUE UM OBJETO ESTÁ DO SOLO, UTILIZANDO UM PRATO COM ÁGUA?"

CONDIÇÕES:

A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO; E

O GRUPO PODERÁ SIMULAR O PROCEDIMENTO, UTILIZANDO O CAIXILHO DE SUPERFÍCIES REFLETORAS E A PONTEIRA LASER.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM PRATO COM ÁGUA;
2. UMA TRENA;
3. UM CAIXILHO COM SUPERFÍCIES REFLETORAS;
4. UMA PONTEIRA LASER; E
5. UM TRANSFERIDOR DE 180 GRAUS.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

"Primeiro arrumamos o prato até conseguirmos ver a luz do ponto escolhido bem no centro do prato, uma pessoa ficou parado observando o ponto de luz, a distancia dos pés da pessoa até os olhos dela deram 1,53, do ponto até o centro de luz deu 1,52 e pelo pé até o centro de luz deu 90 pronto dividimos 1,53 ÷ 0,90 = 2,584

Fonte: Elaborada pelo autor.

Transcrição do texto da aluna K.

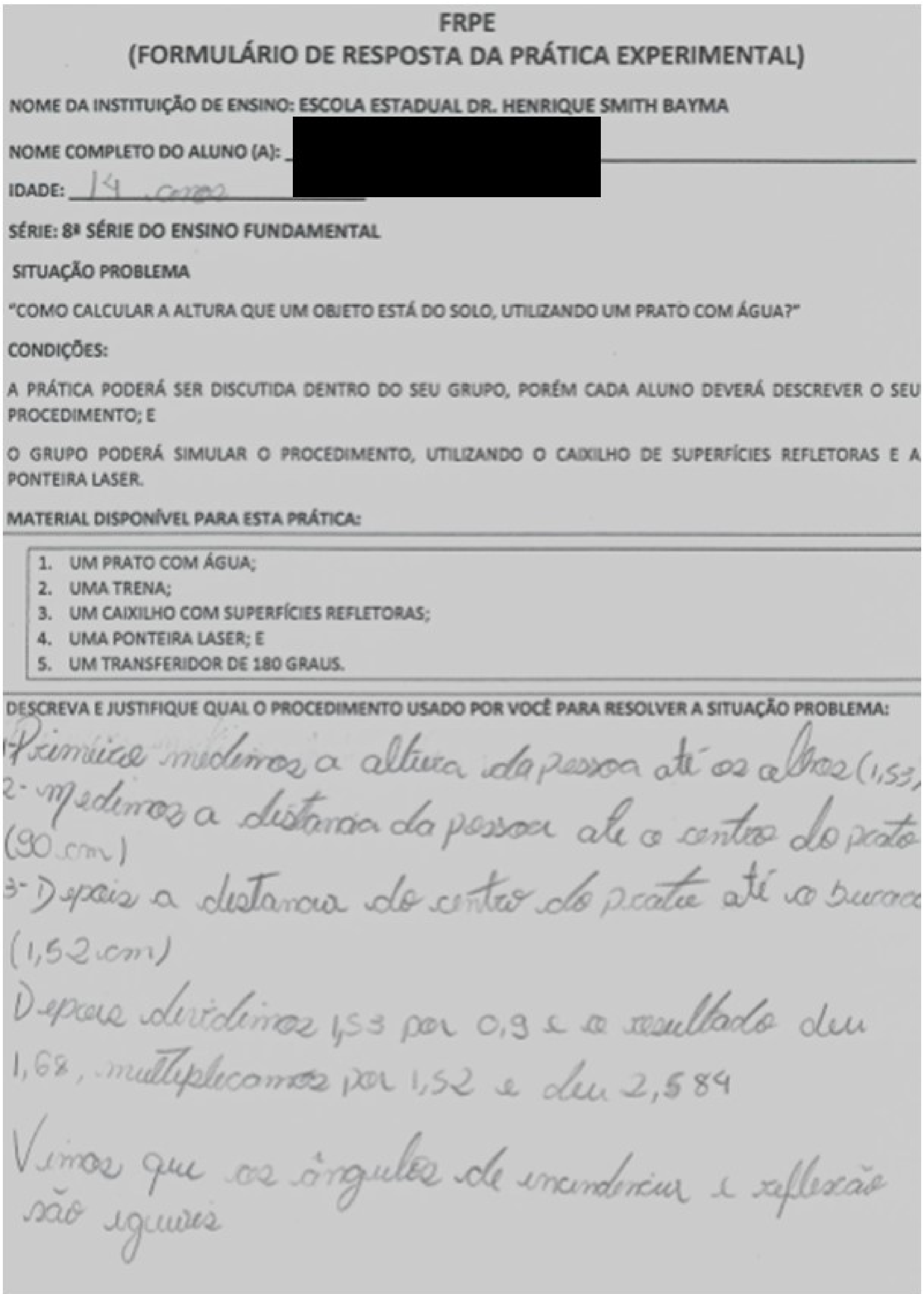
a) Primeiro medimos a altura da pessoa até os olhos $1,53$

b) Medimos a distância da pessoa até o centro do prato 90 cm

c) Depois a distância do centro do prato até o buraco $1,52$ m

d) Depois dividimos $1,52$ por $0,9$ e o resultado deu $1,68$, multiplicamos por $1,53$ e deu $2,584$.

Figura 19 – Formulário de resposta da "aluna K" na prática experimental do 8º ano



FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 14 anos

SÉRIE: 8ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

"COMO CALCULAR A ALTURA QUE UM OBJETO ESTÁ DO SOLO, UTILIZANDO UM PRATO COM ÁGUA?"

CONDIÇÕES:

A PRÁTICA PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO; E

O GRUPO PODERÁ SIMULAR O PROCEDIMENTO, UTILIZANDO O CAIXILHO DE SUPERFÍCIES REFLETORAS E A PONTEIRA LASER.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UM PRATO COM ÁGUA;
2. UMA TRENA;
3. UM CAIXILHO COM SUPERFÍCIES REFLETORAS;
4. UMA PONTEIRA LASER; E
5. UM TRANSFERIDOR DE 180 GRAUS.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1- Primeiro medimos a altura da pessoa até os olhos (1,53)
2- Medimos a distância da pessoa até o centro do prato (90 cm)
3- Depois a distância do centro do prato até o buraco (1,52 cm)

Depois dividimos 1,53 por 0,9 e o resultado deu 1,68, multiplicamos por 1,52 e deu 2,584

Vimos que os ângulos de incidência e reflexão são iguais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Foi medida com uma trena a altura que o buraco na telha se encontrava do chão, sendo encontrada a distância de $2,85$ metros. A diferença de $0,266$, ou seja, $26,6$ cm pode ser atribuída a alguns fatores como:

a) A posição da projeção no chão do buraco foi arbitrária;

b) A medida, à trena, da altura dos olhos do aluno, colocado como observador, sofreu aproximações;

c) A distância medida do final do calcanhar do aluno até o centro do prato, onde se via a imagem do buraco da telha, dependia também de uma leitura precisa na trena; e

d) A distância do centro do prato ao ponto considerado como o da projeção, no chão, do buraco da telha, além de depender de uma leitura precisa, tinha como referência a própria projeção arbitrária do buraco.

Apesar dos fatores citados anteriormente, uma diferença menor que 10 por cento foi aceita, haja vista que os objetivos eram: que o conceito físico da Lei da Reflexão, da Óptica Geométrica, fosse assimilado pelos alunos; e que fosse trabalhado o conteúdo de proporcionalidade e semelhança de triângulos para resolver o problema proposto.

A prática proposta para o 8^o ano serviu, inclusive, para mostrar a dificuldade que os alunos tiveram em construir uma visão geométrica. Não digo com relação a identificar, nos objetos, suas diferentes formas, tamanhos e volumes, mas de projetar o imaginário numa região, formando figuras geométricas não comumente observadas no dia a dia.

Na simulação com o caixilho, os alunos visualizaram o feixe incidente e refletido do laser e as figuras geométricas que estes feixes formavam com a superfície refletora, neste caso, triângulos. Porém, ter a visão geométrica de triângulos sendo formados pelo feixe incidente e refletido, imaginários, da luz, pela projeção desses feixes no chão e pela linha imaginária que unia o buraco da telha a sua projeção no chão, não era uma situação comum aos alunos.

Por essas razões, houve a necessidade de transformar a aplicação em uma prática orientada, respeitando-se a capacidade de construção do conhecimento de cada um.

Também foram utilizadas duas horas-aula distribuídas nas seguintes etapas: apresentação pessoal do aplicador, apresentação do kit experimental, exposição da situação problema, exposição dos resultados por parte dos alunos e o fechamento conclusivo do aplicador enfatizando o objetivo da prática. No entanto, a aplicação desta prática foi com 18 alunos, número que não representa a quantidade real em uma sala de aula de uma escola pública.

Numa situação real, com média de 40 alunos, a sugestão é que a prática seja aplicada dividindo-se a turma em 10 grupos de 4 alunos e, pelo menos, 2 professores aplicadores, um para cada 5 grupos. Neste caso, poderiam ser utilizadas 3 horas-aula, sendo a terceira hora destinada apenas às duas últimas etapas.

O custo de cada kit pode variar se o professor quiser fazer o caixilho de simulação. O que foi utilizado na prática foi feito de madeira e as superfícies refletoras, de metal, mas podem ser utilizados espelhos ou papel laminado encontrados em casa de artigos de festas de aniversários. Porém, o professor tem a liberdade de criar seu próprio experimento de simulação.

O kit para a resolução da situação problema, na realidade, consiste em um prato com um fundo preto e uma trena. Como a prática será realizada em sala de aula ou em dependência próxima a ela, a sugestão é de que seja utilizada trena de 5 m a 10 m de extensão. Um objeto posto a uma altura muito grande, implicaria em posicionar o prato a uma distância grande da sua base e, consequentemente, precisaríamos de trenas maiores de 50 m ou 100 m de comprimento.

O custo do kit (prato, e.v.a. preto e trena) varia de $R\$8,00$ a $R\$20,00$.

5.4 O conteúdo no livro adotado pela escola e uma nova proposta.

Segundo Centurión e Jakubovic (2015), no livro adotado pela escola no 8º ano do ensino fundamental, os autores dizem o seguinte:

> Triângulos congruentes são aqueles que podem ser sobrepostos de maneira que os vértices coincidam. Entretanto, não é necessária essa sobreposição para verificar a congruência, bastando, para isso, conhecermos os **critérios de congruência de triângulos**. (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.167, grifo dos autores).

Os alunos tiveram a oportunidade de observar a congruência de triângulos na prática simulada com o caixilho e a ponteira laser, na sala de aula. Porém, para a solução do que fora proposto, os alunos trabalharam o conteúdo de semelhança de triângulos.

Com relação a esse assunto, os mesmos autores citam no livro do 9^o ano do ensino fundamental, o seguinte:

> Para dois polígonos serem semelhantes, eles precisam satisfazer as duas condições: **terem ângulos respectivamente congruentes e lados respectivamente proporcionais**. Com os triângulos, no entanto, ocorre uma particularidade: basta satisfazer a apenas uma das condições para que sejam semelhantes. (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.16, grifo dos autores).

Os exercícios propostos pelo livro adotado no 9^o ano sobre o assunto expõem de forma direta a comparação entre duas figuras onde os alunos poderão observar uma das duas condições expostas anteriormente. São exercícios que estimulam os cálculos, já prefigurada uma das condições.

Os desenhos e diagramas de setas nos exercícios de desafios auxiliam a visualização dos triângulos semelhantes.

Alguns desses exercícios são consequentemente utilizados para provar o Teorema de Tales (enunciado a seguir), com figuras prontas, desenhos de plantas de terrenos em forma de trapézios, conduzindo os alunos ao diagrama formado por retas paralelas cortadas por transversais.

> Se três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, então essas paralelas determinam nas transversais segmentos proporcionais (CENTURIóN; JAKUBOVIC, 2015, p.24).

A proposta deste trabalho, especificamente para os alunos do 8^o ano, não é apresentar diretamente as figuras geométricas para os alunos visualizarem a semelhança entre elas. Ao contrário, visa estimular o aluno à criação, à construção do raciocínio e de estratégias para resolver a situação problema.

Não se tem um diagrama de setas, muito menos o desenho de figuras geométricas, colocadas lado a lado, para servirem de auxílios ao raciocínio.

Diante dessa situação desafiadora, transcrevemos a citação íntegra do aluno sobre os triângulos formados, durante a prática simuladora realizada em sala de aula com o caixilho de superfícies refletoras e com a ponteira laser: “Parecem ser iguais só que de tamanhos diferentes”.

Atribui-se, também à dificuldade inicial, o fato dos próprios alunos terem que visualizar as figuras congruentes ou semelhantes, utilizando apenas o caixilho com a ponteira laser.

Era necessária a ação do aluno em fazer incidir o laser na superfície refletora em uma posição tal que o raio refletido formasse, em outra superfície, outro triângulo de dimensões proporcionais ao primeiro.

Após orientações para se descobrir a proporcionalidade entre as figuras formadas foi possível, com várias repetições, inclusive com os grupos fora da sala de aula, a visualização das figuras geométricas formadas pelo feixe de luz (linha imaginária) que incidia no prato com água que funcionava como superfície refletora.

Embora a prática orientada tenha exigido uma compreensão múltipla de geometria ao traçar a trajetória do feixe de luz no espaço, os alunos tiveram condições de resolver a situação problema, conforme observamos nos formulários apresentados por eles.

Três meses após a aplicação deste trabalho na escola, uma professora do 8^o ano declarou o seguinte: “é interessante o fato de se trabalhar um assunto prático de um conteúdo que os alunos só veriam no ensino médio e depois fazerem com que percebam que boa parte destes temas eles já desenvolvem no ano que estão. Esse projeto ajudou, através da prática, mostrar ao aluno que tudo faz sentido”.

CAPÍTULO

6

TEMA PARA O 9^o ANO: LEI DE OHM (ELETRICIDADE)

Para falarmos sobre a lei de Ohm, serão necessários esclarecimentos prévios sobre carga elétrica, corrente elétrica, diferença de potencial e resistência elétrica.

Segundo Halliday, Resnick e Walker (1994), toda matéria é composta por átomos que, por sua vez, são constituídos por partículas elementares chamadas de prótons, elétrons e nêutrons. Estas partículas possuem uma propriedade física fundamental responsável pela interação eletromagnética entre elas chamada carga elétrica.

Os autores definem, como carga elétrica elementar, a menor quantidade de carga que pode ser encontrada na natureza. Ela está associada à quantidade de carga do próton e do elétron, cujo valor é igual a $1,6.10^{-19}$ C, sendo "C", Coulomb¸ a unidade de carga elétrica no Sistema Internacional.

Só para lembrar, deixemos claro que de acordo com o modelo atômico, os prótons e nêutrons se localizam no núcleo do átomo, enquanto os elétrons estão orbitando a sua volta, ou seja, na eletrosfera.

Halliday, Resnick e Walker (1994) conceituam um corpo carregado aquele cuja quantidade de prótons e de elétrons existentes nele está em desequilíbrio. No caso de escassez de elétrons, o corpo estaria carregado positivamente e se houver excesso de elétrons, carregado negativamente.

Segundo os autores, toda carga "Q" produz um Campo Elétrico no espaço que a cerca. Porém, este Campo só é percebido em termos da força eletrostática que surge quando colocamos outra carga "q", a uma distância "d" da primeira, na mesma região em que o Campo Elétrico é produzido.

Para eles, ainda, cada unidade de carga em um ponto no espaço está associada uma energia potencial. Esta energia potencial é chamada, simplesmente, de potencial elétrico.

Desta forma, podemos então dizer que quando temos dois pontos A e B, no espaço, com potenciais diferentes, existirá, então, uma diferença de potencial (ddp) que será responsável pelo deslocamento de cargas.

A este deslocamento de cargas, postas em uma região em que existe um campo elétrico e que surgirá somente se houver uma ddp, Halliday, Resnick e Walker (1994) chamou de corrente elétrica.

Logo, podemos medir a corrente elétrica em termos da quantidade de carga elétrica que é deslocada de um ponto a outro em certo intervalo de tempo.

A prática experimental que será aplicada não considerará os deslocamentos de cargas que não geram corrente elétrica, o que implicaria em outro estudo. A corrente aqui a ser considerada é a gerada em um circuito elétrico simples, facilmente encontrado nas residências.

Então, para produzirmos uma corrente elétrica, precisamos de um dispositivo que mantenha uma diferença de potencial entre dois terminais. No caso de um circuito elétrico simples, entre as extremidades de um fio condutor. Esse dispositivo é chamado de fonte de tensão ou simplesmente fonte, que poderá ser uma pilha, uma bateria, uma tomada ou qualquer tipo de gerador.

Segundo Junior, Ferraro e Soares (2007, p.189), gerador ou gerador elétrico é o aparelho que realiza a transformação de uma forma qualquer de energia em energia elétrica.

Para a prática experimental aplicada, utilizaremos como fonte uma tomada da própria sala de aula ou de qualquer outra dependência da Escola.

A característica do material que determina essa diferença de potencial chama-se resistência elétrica. Um dispositivo que é introduzido no circuito, cuja função é oferecer certa resistência à passagem da corrente, é chamado de resistor.

A seguir, veremos a aplicação da prática proposta, o conceito matemático a ser trabalhado, a análise desta aplicação para os alunos do 9^o ano, uma breve análise da apresentação do conteúdo matemático constante no livro adotado pela escola e sugestões de uma nova proposta.

6.1 Prática experimental: aplicação e objetivo.

A prática experimental a ser aplicada consiste em se observar não somente como se comporta a corrente elétrica que passa por um eletrodoméstico quando o ligamos a uma fonte de ddp variável, mas também como se comporta um resistor, em um circuito simples, quando este é ligado a fontes de diferentes tensões gerando, consequentemente, diferentes correntes elétricas.

Para isso, será utilizado um multímetro, que é um instrumento que mede a tensão elétrica a qual o eletrodoméstico será submetido e um amperímetro para medir a intensidade da corrente elétrica gerada.

A unidade de tensão elétrica no Sistema Internacional, SI, é o Volt “V”; da corrente elétrica é o ampere, “A”; e a resistência elétrica, o Ohm, cujo símbolo é Ω.

Figura 20 – Material utilizado no tema do 9º ano

Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2 Conceito matemático a ser trabalhado: função do 1^o grau.

Antes de tratarmos sobre o assunto de função de 1^o grau, iniciemos com a definição de função dada por Stewart (2013), que a define da seguinte maneira:

> Uma função f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A faz corresponder exatamente um elemento chamado $f(x)$, em um conjunto B (STEWART, 2013, p.3).

O conjunto A é chamado de domínio da função e o conjunto B de contradomínio. Este último é composto por $f(x)$, onde x pertence ao domínio A. Neste caso, f seria a sentença matemática que associa os elementos do domínio ao contradomínio.

Segundo ainda o autor, o símbolo que representa um elemento arbitrário x no domínio de uma função f é denominado variável independente, e o que representa um número qualquer $y = f(x)$ é chamado de variável dependente.

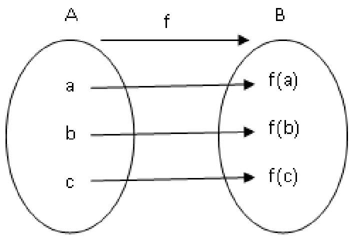
Stewart (2013) enfatiza uma maneira de visualizar uma função que é o diagrama de flechas, muito mostrado nos livros didáticos de matemática. Cada flecha conecta um elemento do conjunto A (domínio) a um elemento do conjunto B (contra domínio). A flecha indica que $f(a)$ está associada a “a”, $f(b)$ a “b”, $f(c)$ a “c” e etc., conforme diagrama da Figura 21.

Outro método, bem comum, consiste em fazer o gráfico da função. Segundo o autor, se f for uma função com domínio A, então seu gráfico será o conjunto de pares ordenados.

$$\{(x, f(x))|x \in A\} \tag{6.1}$$

Segundo Stewart, é possível representar uma função de quatro maneiras:

Figura 21 – Diagrama de flechas



Fonte: Elaborada pelo autor.

a) verbalmente (descrevendo-a com palavras);

b) numericamente (por meio de uma tabela de valores);

c) visualmente (através de um gráfico); e

d) algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita).

Para Stewart (2013), existem várias funções que podem ser usadas para modelar as relações do mundo real.

Neto (2014) cita que um importante conceito no estudo das funções é o de continuidade. Porém, sua definição é feita ponto a ponto de seu domínio.

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida no domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$ um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \backslash \{a\}$. Dizemos que a função f é contínua em a se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{6.2}$$

Seja $f : D \to \mathbb{R}$. Podemos dizer que f é contínua se f for contínua em todos os elementos de D.

Teorema 1. Teorema do Valor Intermediário: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe um número $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

Uma aplicação do Teorema do Valor Intermediário é mostrar que as imagens de intervalos por funções contínuas são intervalos.

Teorema 2. Teorema Imagem de um Intervalo: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo I. Então $f(I)$ é um intervalo.

Demonstração. Mostraremos que a imagem $f(I)$, do intervalo I por f possui a seguinte propriedade: se α e β são elementos de $f(I)$, então o intervalo de extremos α e β está contido em $f(I)$. Esta caracterização dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são intervalos é bastante intuitiva e poderia ser demonstrada rigorosamente usando a completude de $\mathbb{R}$. Estamos considerando todos os tipos de intervalos, inclusive $\mathbb{R}$ e $\{a\} = [a,a]$.

Se f é constante, $f(I)$ reduz-se a um conjunto com um único elemento. Supondo f não constante e sejam α e β elementos de $f(I)$. Então, existem a e b em I tais que $f(a) = \alpha$ e $f(b) = \beta$. Suponhamos, sem perder em generalidade, que $a < b$. Usamos a hipótese de I ser um intervalo, então $[a,b] \subset I$. A função f, contínua em I, quando restrita a $[a,b]$, ainda é uma função contínua. Agora, suponhamos y um elemento qualquer entre α e β. Portanto, y é um elemento entre $f(a)$ e $f(b)$ e, pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a f restrita à $[a,b]$, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = y$. Isso quer dizer que todos os elementos entre α e β são elementos de $f(I)$, ou seja, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. □

Segundo Neto (2014), outra aplicação bastante interessante do Teorema do Valor Intermediário é que todo polinômio $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de grau ímpar, admite pelo menos uma raiz real.

Proposição 1. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio definido por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, com n um inteiro ímpar e $a_n \neq 0$. Então p possui uma raiz real.

Demonstração. Podemos supor sem perda da generalidade que $a_n > 0$ e escrever da seguinte maneira:

$$p(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) \tag{6.3}$$

Dessa forma, $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$, uma vez que n é um número ímpar. Isso significa que, pelos resultados anteriores, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. □

Chamamos de ponto fixo de um função $f : A \to A$ a um ponto $a \in A$ tal que $f(a) = a$. Ou seja, uma função f admite um ponto fixo se, e somente se, $f(x) = x$ admite solução.

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário, provaremos que toda função contínua do intervalo $[0,1]$ nele mesmo admite um ponto fixo.

Teorema 3. Teorema do Ponto Fixo: Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Então existe um ponto $a \in [0,1]$ tal que $f(a) = a$.

Demonstração. Se $f(0) = 0$, a tese do teorema está satisfeita. Portanto, podemos supor que $f(0) > 0$. Analogamente, se $f(1) = 1$, o teorema se cumpre. Assim, vamos supor, também, que $f(1) < 1$.

Como $f(x) \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, podemos considerar a função contínua dada por $g(x) = f(x) - x$, definida no intervalo $[0,1]$.

Podemos ver que:

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0 \tag{6.4}$$

$$g(1) = f(1) - 1 < 0, \quad pois \quad f(1) < 1. \tag{6.5}$$

Ou seja:

$$g(0) > 0 > g(1) \tag{6.6}$$

Aplicando à função g o Teorema do Valor Intermediário, vemos que existe $a \in [0,1]$ tal que $0 = g(a) = f(a) - a$ e, portanto:

$$f(a) = a \tag{6.7}$$

□

Por definição, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Segundo Lima (2013), são ainda casos particulares de funções afins as funções lineares, $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

Porém, este trabalho irá se limitar à função afim e a sua particularidade conhecida como função linear que é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade, sendo a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios, segundo afirma o autor.

Quanto à terminologia, Lima (2013) diz que se a função afim f é dada por $f(x) = ax + b$, não é adequado chamar o número a de coeficiente angular da função f, pois não há, na maioria dos casos, ângulo algum no problema estudado. Para o autor, o nome mais apropriado que deve ser utilizado é taxa de variação (ou taxa de crescimento), conforme falamos nesta seção. Além disso, ao ser considerado o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir as grandezas x e $f(x)$.

Resumindo, o autor conclui, então, que temos taxa de variação de uma função e coeficiente angular de uma reta.

Na maioria dos textos escolares o termo função do 1^o grau ou função polinomial do 1^o grau é utilizado em razão da função afim e função linear serem polinômios de 1^o grau, ou seja, o expoente da variável independente x é igual a 1. Por conseguinte, o gráfico de toda função do 1^o grau é uma reta.

6.3 Análise da aplicação no 9^o ano.

A proposta apresentada ao 9^o ano do Ensino Fundamental foi de identificar a relação existente entre a tensão elétrica (diferença de potencial) e a corrente elétrica em um circuito elétrico simples apresentado em sala de aula.

Para isso, a turma de 20 alunos foi dividida em três grupos: um com 6 alunos e dois com 7 alunos.

Foram preparados 3 kits, um para cada grupo de alunos. Cada kit era composto de:

a) uma caixa plástica com circuito elétrico simples, adaptado com um dimmer (peça cuja finalidade é de variar a corrente elétrica do circuito);

b) uma lâmpada com suporte;

c) um multímetro;

d) um amperímetro; e

e) uma folha de papel milimetrado.

Para que os alunos entendessem o funcionamento do kit que lhes foi apresentado, foram explicados alguns conceitos físicos, bem como a definição e importância dos instrumentos que seriam utilizados.

Conceituamos o gerador como todo equipamento responsável por gerar energia para o circuito, fazendo este funcionar, como por exemplo: uma pilha, uma bateria, uma tomada na qual conectamos os eletrodomésticos em nossa casa.

As tomadas existentes na sala de aula seriam utilizadas como geradores para o funcionamento do circuito elétrico. Teve-se o cuidado de orientar os alunos para que não conectassem o circuito em uma tomada que gerava uma tensão de 220 Volts, previamente identificada, para que não houvesse o risco de queimar o equipamento.

Na orientação aos alunos, dizemos que a energia gerada, também chamada de tensão elétrica ou diferença de potencial (ddp), pode ser medida utilizando-se o multímetro. Este instrumento foi apresentado a eles, bem como a maneira que iriam manuseá-lo para obter a leitura indicativa em seu mostrador digital.

Continuadamente dizemos que a unidade de tensão elétrica (ddp) é o Volt e enfatizamos, também, a importância de observarmos a tensão indicativa nos equipamentos e nas tomadas onde serão conectados.

Foi apresentada uma lâmpada com a indicação de 127 Volts e foi explicado que aquela seria a tensão máxima que ela poderia ser submetida. Do contrário, poderia queimá-la.

Explicamos o conceito de corrente elétrica como a quantidade de carga elétrica (elétrons) que passa, por exemplo, em um fio, em certo intervalo de tempo. Esta corrente seria medida utilizando-se o amperímetro, cujo funcionamento bem como o modo de manuseá-lo, foi-lhes explicados.

Dizemos, também, que a unidade de corrente elétrica é o Ampere (A) e explicamos, ainda, como efetuar a leitura correta no mostrador digital do amperímetro, após adotarmos a escala que apresentasse uma precisão mais ideal para aquela prática experimental.

Realizadas as orientações, utilizamos um dos kits para mostrá-los como seria realizada a prática. Conectamos na tomada e colocamos o suporte com a lâmpada no circuito. O controle de apagar e de acender a lâmpada era feito através do *dimmer* adaptado à caixa plástica do circuito. A lâmpada aumentava e diminuía o seu brilho dependendo do sentido para o qual o *dimmer* era girado. Isso despertou muito interesse nos alunos, por saberem que poderiam controlar o brilho da lâmpada.

Após a apresentação com o kit que utilizamos como modelo, os alunos passaram a exercitar, cada grupo com seu kit, relatando suas observações e construindo, primeiramente, uma tabela onde foram anotadas as leituras das tensões e respectivas leituras das correntes elétricas.

A aluna L e o aluno M relatam, respectivamente em seus formulários, Figura 22 e Figura 24, suas experiências e os procedimentos que adotaram para resolver a situação proposta.

Transcrição do texto do formulário da Figura 22.

- "1º Passo: Foi muito interessante medir a corrente e tensão através do multímetro e pelo amperímetro".
- "2º Passo: Passamos o valor para uma tabela para poder associar".
- "3º Passo: Fizemos gráfico traçado e, através disso, descobri que tudo isso é diretamente proporcional".
- "Eu diminui a luz e aumentei e diante disso percebi que muda as tensões e correntes, como em nossa casa se a luz está forte caso ligamos algum aparelho que puxa mais energia, a lâmpada diminui tanto a tensão quanto a corrente.(grandezas diretamente proporcionais)".

Já o aluno M descreve em seu formulário, Figura 24, o seguinte:

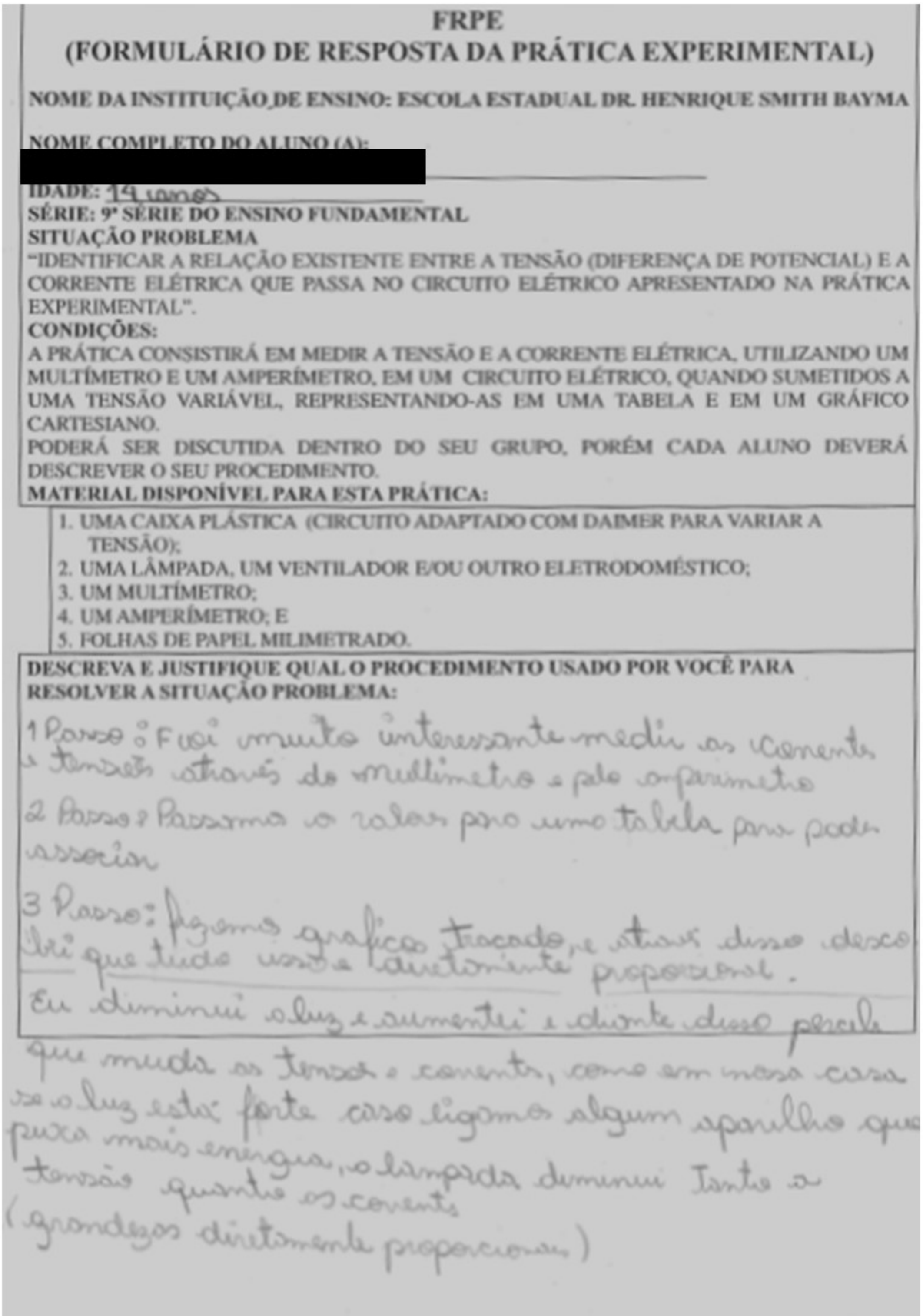
- "O meu primeiro passo foi usar o multímetro e o amperímetro para medir a tensão e a corrente, depois fizemos uma tabela para marcar os resultados após isso fizemos um gráfico e traçamos ele".
- "Conclusão – a corrente e a tenção são grandezas diretamente proporcionais".

Observando os demais relatos nos formulários respostas, verificou-se que os alunos não tiveram dificuldades em observar que a corrente elétrica aumentava com o aumento da tensão e diminuía com a diminuição desta.

Nas tabelas construídas por eles, foi obedecida a precisão do amperímetro, que era de $0,1$ Ampere. A cada variação de $0,1$ A, anotava-se a corrente e a tensão correspondente. Não foi determinada a quantidade de pontos ou de par de leituras que poderiam fazer. No entanto, as leituras que fizeram foram o suficiente para que chegassem à conclusão que havia uma relação proporcional entre a corrente elétrica e a tensão.

Representar as informações obtidas da prática experimental foi inicialmente um desafio.

Figura 22 – Formulário de resposta da “aluna L” na prática experimental do 9º ano


FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A): [redacted]

IDADE: 14 anos

SÉRIE: 9ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL

SITUAÇÃO PROBLEMA

“IDENTIFICAR A RELAÇÃO EXISTENTE ENTRE A TENSÃO (DIFERENÇA DE POTENCIAL) E A CORRENTE ELÉTRICA QUE PASSA NO CIRCUITO ELÉTRICO APRESENTADO NA PRÁTICA EXPERIMENTAL”.

CONDIÇÕES:

A PRÁTICA CONSISTIRÁ EM MEDIR A TENSÃO E A CORRENTE ELÉTRICA, UTILIZANDO UM MULTÍMETRO E UM AMPERÍMETRO, EM UM CIRCUITO ELÉTRICO, QUANDO SUMETIDOS A UMA TENSÃO VARIÁVEL, REPRESENTANDO-AS EM UMA TABELA E EM UM GRÁFICO CARTESIANO.

PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.

MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UMA CAIXA PLÁSTICA (CIRCUITO ADAPTADO COM DAIMER PARA VARIAR A TENSÃO);
2. UMA LÂMPADA, UM VENTILADOR E/OU OUTRO ELETRODOMÉSTICO;
3. UM MULTÍMETRO;
4. UM AMPERÍMETRO; E
5. FOLHAS DE PAPEL MILIMETRADO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

1 Passo: Foi muito interessante medir as corrente e tensões através do multímetro e pelo amperímetro

2 Passo: Passamos o valor para uma tabela para poder associar

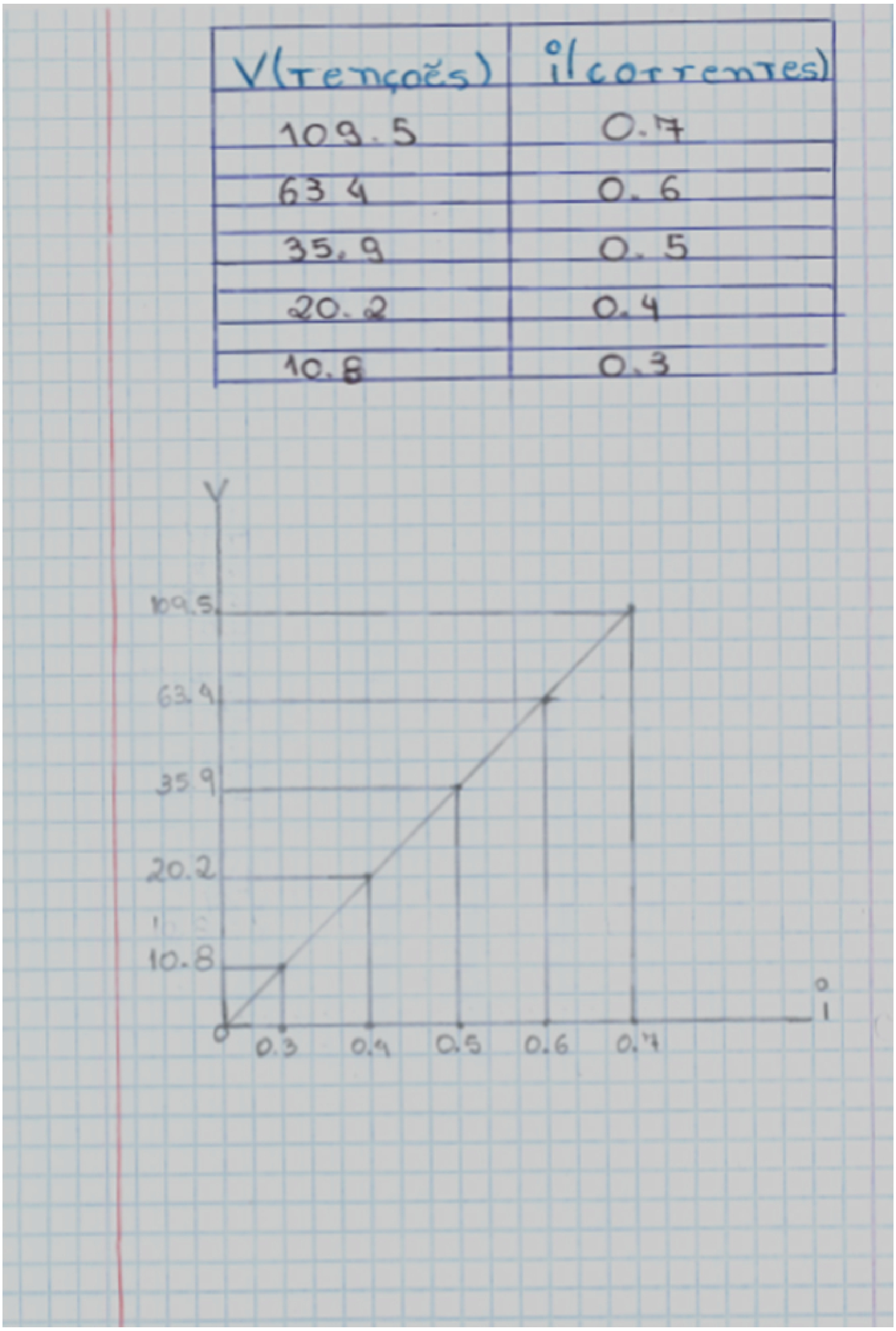
3 Passo: fizemos graficos trocado, e através disso descobri que tudo isso é diretamente proporsional.

Eu diminui a luz e aumentei e diante disso percebi que muda as tensão e corrente, como em nossa casa se a luz está forte caso ligamos algum aparelho que puxa mais energia, a lâmpada diminui Tanto a tensão quanto as corrente (grandezas diretamente proporcionais)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Lima (2013), num contexto concreto, o conceito de função é motivado por meio de situações (ditas) cotidianas. Segundo o autor, o objetivo alegado, nesse contexto, é convencer os alunos da importância do conceito matemático de função, por meio da modelagem

Figura 23 – Tabela e gráfico da "aluna L" na prática experimental do 9º ano



Fonte: Elaborada pelo autor.

de situações supostamente familiares a eles.

Figura 24 – Formulário de resposta da “aluna M” na prática experimental do 9º ano

FRPE
(FORMULÁRIO DE RESPOSTA DA PRÁTICA EXPERIMENTAL)

NOME DA INSTITUIÇÃO DE ENSINO: ESCOLA ESTADUAL DR. HENRIQUE SMITH BAYMA

NOME COMPLETO DO ALUNO (A):
[redacted]
IDADE: 15 anos
SÉRIE: 9ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL
SITUAÇÃO PROBLEMA
“IDENTIFICAR A RELAÇÃO EXISTENTE ENTRE A TENSÃO (DIFERENÇA DE POTENCIAL) E A CORRENTE ELÉTRICA QUE PASSA NO CIRCUITO ELÉTRICO APRESENTADO NA PRÁTICA EXPERIMENTAL”.
CONDIÇÕES:
A PRÁTICA CONSISTIRÁ EM MEDIR A TENSÃO E A CORRENTE ELÉTRICA, UTILIZANDO UM MULTÍMETRO E UM AMPERÍMETRO, EM UM CIRCUITO ELÉTRICO, QUANDO SUMETIDOS A UMA TENSÃO VARIÁVEL, REPRESENTANDO-AS EM UMA TABELA E EM UM GRÁFICO CARTESIANO.
PODERÁ SER DISCUTIDA DENTRO DO SEU GRUPO, PORÉM CADA ALUNO DEVERÁ DESCREVER O SEU PROCEDIMENTO.
MATERIAL DISPONÍVEL PARA ESTA PRÁTICA:

1. UMA CAIXA PLÁSTICA (CIRCUITO ADAPTADO COM DAIMER PARA VARIAR A TENSÃO);
2. UMA LÂMPADA, UM VENTILADOR E/OU OUTRO ELETRODOMÉSTICO;
3. UM MULTÍMETRO;
4. UM AMPERÍMETRO; E
5. FOLHAS DE PAPEL MILIMETRADO.

DESCREVA E JUSTIFIQUE QUAL O PROCEDIMENTO USADO POR VOCÊ PARA RESOLVER A SITUAÇÃO PROBLEMA:

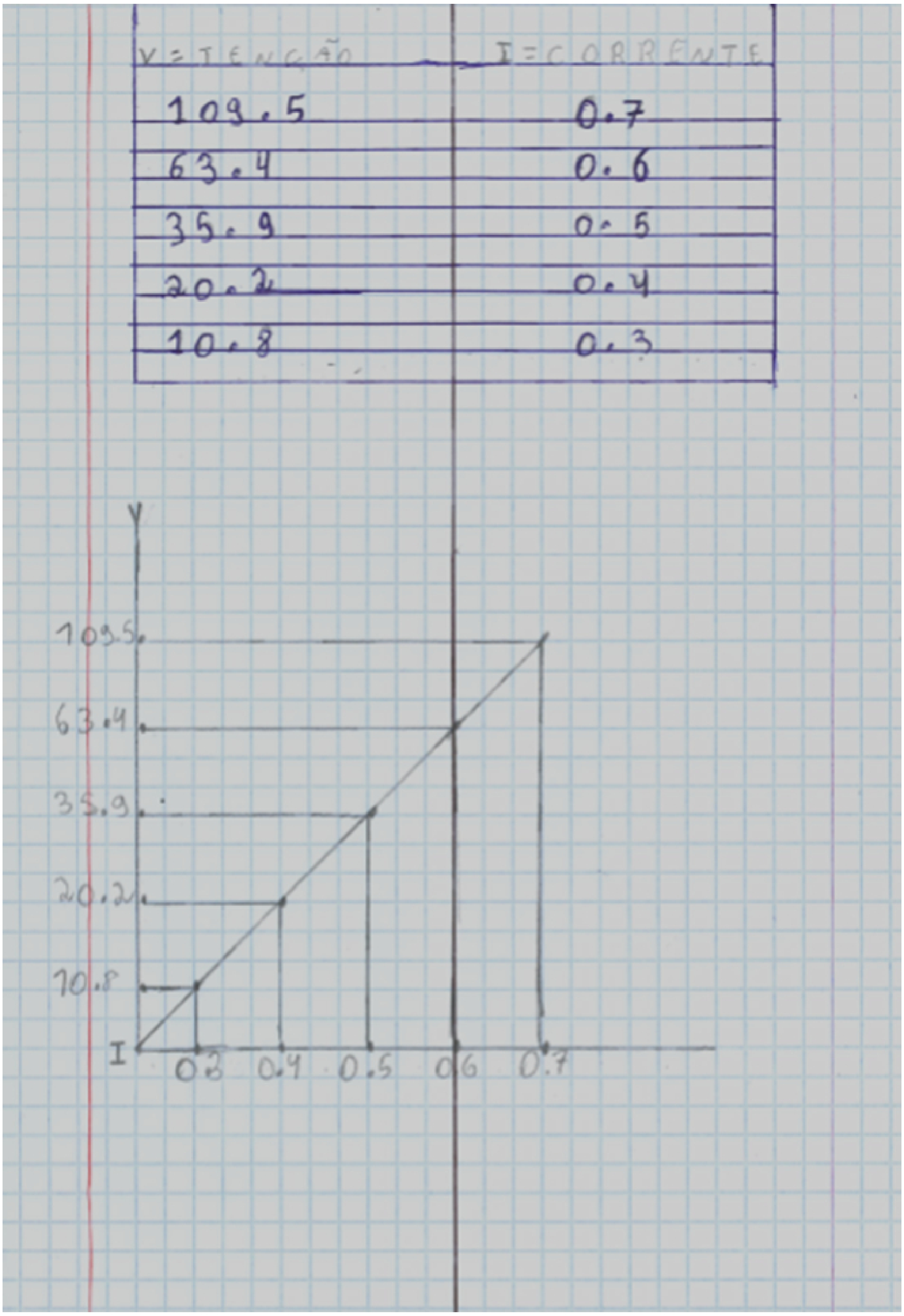
O nosso primeiro passo foi usar o multímetro e o perímetro para medir a tenção e a corrente, depois fizemos uma tabela para marcar os resultados, após isso fizemos um gráfico e traçamos ele.
Conclusão - a corrente e a tenção são grandezas diretamente proporcionais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Diante das formas que tais informações poderiam ser representadas, a observação de que variando a corrente que passava pela lâmpada a tensão também variava, levou com que os alunos L e M admitissem uma associação entre essas grandezas.

Mesmo os alunos não conhecendo a lei dessa associação, a prática experimental possibilitou que eles criassem uma associação entre corrente e tensão, sendo estas representadas em tabelas e gráficos cartesianos. Ou seja, a prática deixou claro aos alunos que cada x (corrente) estaria associado a um $f(x)$ (tensão elétrica ou ddp), conforme conceito apresentado na seção anterior.

Figura 25 – Tabela e gráfico da "aluna M" na prática experimental do 9º ano



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para que uma função afim fiquei inteiramente determinada, basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Isto porque o gráfico de f é uma linha reta e, como sabemos, uma reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos (LIMA, 2013, p.24).

A representação, por parte dos alunos, das informações obtidas em um gráfico de linha, remete-nos à percepção da continuidade. Os alunos, diante da liberdade de poderem efetuar quantas medições quisessem, perceberam que a prática experimental possibilitou-os a observarem que alterações da corrente, mínimas que fossem, acarretariam, concomitantemente, alterações da tensão.

Conforme Stewart (2013), o limite de uma função quando x tende a a, pode muitas vezes ser encontrado simplesmente calculando o valor da função em a e que funções, com essa propriedade, são chamadas de contínuas em a.

O autor complementa ainda dizendo que a definição matemática de continuidade tem correspondência bem próxima ao significado da palavra continuidade no uso comum (um processo contínuo é aquele que ocorre gradualmente, sem interrupções ou mudanças abruptas).

> A definição diz que f é contínua em a se $f(x)$ tende a $f(a)$ quando x tende a a. Assim, uma função contínua f tem a propriedade de que uma pequena mudança em x produz somente uma pequena alteração em $f(x)$. De fato, a alteração em $f(x)$ pode ser mantida tão pequena quanto desejarmos, mantendo-se a variação em x suficientemente pequena. Se f está definida próximo de a (em outras palavras, f está definida em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em a), dizemos que f é descontínua em a (ou que f tem uma descontinuidade em a) se f não é contínua em a (STEWART, 2013, p.109).

No entanto, verificamos que o mostrador digital do multímetro indicava números diferentes para uma mesma leitura da corrente elétrica. Desta forma, após análise da aplicação da prática com uso da modelagem, no caso de querermos calcular a constante R (resistência) que corresponde ao quociente da divisão da Tensão pela corrente, consideramos o instrumento não ideal para o circuito utilizado em sala de aula. Com isso, os alunos não efetuaram a comprovação, conforme demonstrada na seção 6.2, que o gráfico de linha traçado por eles seria realmente uma reta e que a equação $V(i) = R.i$ (1^a lei de Ohm) uma função polinomial do 1^o grau.

A prática, na verdade, contribuiu para que os alunos descobrissem como se comportava a corrente elétrica variando-se a tensão e vice versa.

A visão da proporcionalidade foi o primeiro despertar dos alunos ao identificarem que o brilho da lâmpada estava associado diretamente ao valor de tensão desejada, conforme era girado o *dimmer*, e a corrente elétrica respectiva.

Como fora dito pela aluna L, Figura 22, "**Eu diminui a luz e aumentei e diante disso percebi que muda as tensões e correntes** (grifo nosso), como em nossa casa se a luz está forte caso ligamos algum aparelho que puxa mais energia, a lâmpada diminui tanto a tensão quanto a corrente".

Na verdade, quando a aluna faz essa observação ela está associando o brilho da lâmpada à queda de tensão e corrente elétrica. Tal observação é válida, pois o brilho, chamado por ela, nada mais é do que a potência elétrica dissipada pela lâmpada.

Esta potência P associa-se à tensão V e à corrente i através da fórmula $P = V.i$. Como $V = R.i$, então $P = R.i.i = R.(i)^2$.

Isso mostra que a prática possibilita que seja trabalhada outra função, como a quadrática, inclusive sendo introduzido outro conceito da Física, denominado potência elétrica.

6.4 O conteúdo no livro adotado pela escola e uma nova proposta.

Segundo Centurión e Jakubovic (2015), no livro adotado pela escola no 9^o ano do ensino fundamental, a ideia de função é explicada através de exemplos, que logo é convertida em uma tabela e depois representada, também, em um diagrama.

Neste, a associação é apontada como uma função, em que teremos um conjunto como domínio e outro como contradomínio.

Os exercícios, deste conteúdo específico, apresentam em seus enunciados: uma tabela, contendo os dados das duas variáveis que estão associadas através de uma sentença matemática; a sentença matemática que conduz o aluno a construir uma tabela e um gráfico cartesiano; ou, nos exemplos de desafios, situações problemas da vida cotidiana, porém com os dados prontos, preparados para conduzirem às possíveis soluções.

No início do capítulo que trata desse assunto, os autores enfatizam um dos erros cometidos por Aristóteles em seu enunciado: ‘O movimento para baixo de uma massa de ouro ou chumbo ou de qualquer outro corpo dotado de peso é tanto mais rápido quanto maior for o seu tamanho’ Centurión e Jakubovic (2015, p.178).

Segundo os autores, foi somente com Galileu Galilei, há quase 2000 anos depois, que foi descoberto que a queda dos corpos era proporcional ao quadrado do tempo gasto na queda.

É claro que estamos falando por volta do século XV, século da morte de Galileu. Porém, o tempo não exclui o trabalho e a dificuldade que, às vezes, se tem para modelar um fenômeno.

A prática aplicada aos alunos do 9^o ano, na qual foi proposta a situação problema, era um circuito elétrico simples, construído com materiais simples, fáceis de serem encontrados e de fácil manuseio.

Trata-se de um assunto comum à Física, principalmente aos alunos do ensino médio que estudam o conteúdo de eletricidade.

Bem, a precisão dos instrumentos utilizados não contribuiu para que os alunos tivessem uma análise mais próxima de uma função polinomial do 1^o grau, ao traçarem o gráfico cartesiano. Com isso, a ideia de que as grandezas, corrente e tensão, seriam diretamente proporcionais não ficou clara, mesmo sendo dita por alguns em seus formulários, aqui expostos.

No entanto, com a repetição da prática por parte dos alunos, mesmo com a dificuldade que tiveram em dizer de que maneira a corrente e a tensão se relacionavam, houve, ainda, aqueles que disseram que pelo fato da corrente aumentar com o aumento da tensão e diminuir com a diminuição desta, de alguma forma elas estavam ligadas. Isso, para os demais, foi o suficiente para construir a ideia de proporcionalidade entre essas grandezas.

Porém, a prática despertou a motivação e a curiosidade dos alunos que girou em torno do brilho da lâmpada utilizada no experimento, da corrente elétrica que passava por ela e da tensão elétrica.

Por conseguinte, uma sugestão de uma nova proposta seria trabalhar o conteúdo de função quadrática concomitantemente à introdução do conceito de potência dissipada. Esta potência P, como dito anteriormente, associa-se à tensão V e à corrente i através da fórmula $P = V.i$. Como $V = R.i$, então $P = R.i.i = R.(i)^2$.

Por fim, devido o tempo destinado às orientações que foram necessárias e ao acompanhamento em tempo integral durante o manuseio dos instrumentos, o tempo total destinado à prática aplicada ao 9^o ano, autorizado pela diretoria da Escola, foi insuficiente. Apesar disso, os resultados alcançados foram satisfatórios.

De igual maneira, três meses após a aplicação deste trabalho na escola, uma professora do 9^o ano declarou o seguinte: “é muito bom agregar em nossos alunos a prática de toda a base teórica que apresentamos e esse projeto veio exatamente fechar com chave de ouro, pois explicou e reforçou, através da prática, aquilo que em conjunto estávamos trabalhando e, projetos como esses, sempre são bem vindos”.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Como foi apresentado no início deste trabalho, a Educação Matemática é um conjunto de técnicas que irá compor o processo ensino aprendizagem, cujos resultados, muitas vezes, mostram-se abrangentes e profundos. Esse conjunto de técnicas, que jamais pode ser engessado, pode gerar uma diversidade de métodos, estratégias, práticas experimentais ou qualquer outro meio para tornar o aprendizado mais atrativo. Isso, é claro, dependerá muito do professor, cuja motivação e criatividade serão sempre os elos mais fortes.

Aprendizado mais atrativo gera interesse. O interesse motiva e a motivação conduz ao aprendizado. Então é um ciclo. Por isso, este trabalho apresentou a interdisciplinaridade de duas disciplinas, Física e Matemática, onde se trabalhou conteúdos da matemática com fulcro a melhorar o desempenho do aluno, nesta disciplina, utilizando-se para isso a modelagem matemática.

Inicialmente, o critério foi escolher uma escola pública, com poucos recursos, cujas dificuldades encontradas fossem compartilhadas com os professores, convidando-os à integração e a proporcionarem aos alunos uma motivação baseada em um contexto do dia a dia.

Concernente ao aspecto motivacional, Almeida, Silva e Vertuan (2016) escrevem o seguinte:

> Esse é, provavelmente, um dos aspectos mais evocados na literatura para justificar a inclusão de atividades de Modelagem Matemática na prática escolar, ancorando-se em argumentos que defendem que situações de ensino que proporcionam ao aluno contato com o contexto real podem motivá-los para o envolvimento nas atividades e para a construção de conhecimento (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.30).

Foi de suma importância a diretoria e a coordenadoria da Escola Estadual doutor Henrique Smith Bayma, escola escolhida, terem autorizado a aplicação das práticas experimentais como apoiado logisticamente com os recursos que lhes foram possíveis.

Posteriormente, ficou estabelecida como critério a heterogeneidade de desempenho dos alunos em sala de aula, mantendo-se, inclusive, em cada turma, aqueles que apresentaram baixo desempenho na matéria até o momento da aplicação das práticas experimentais.

É muito importante considerarmos o baixo desempenho de alguns alunos com o objetivo de tentarmos resgatar o interesse pelo aprendizado. Segundo ainda Almeida, Silva e Vertuan (2016), citam o seguinte:

> A maneira mais eficaz de lidar com tradições arraigadas, como é, por exemplo, o insucesso de muitos alunos em Matemática, é levar em consideração as relações pessoais cotidianas em que os sujeitos transitam. Isto nos leva a pensar que uma motivação contextualizada com o curso ou com a vida real cria nos alunos uma afetividade com a disciplina e com o desejo de aprender (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p.30).

Logicamente, aplicar a modelagem matemática com o tempo hábil para investigação, coleta de dados, análise, criação de um modelo e sua avaliação, requer tempo que, raramente, teremos em uma sala de aula. Se possível fosse, teríamos cargas horárias bastante extensas para cada conteúdo de uma disciplina. Certamente que o estudo de caso de Luna (2007), citado na seção 2.4 desta dissertação, não foi realizado em apenas duas horas de aula.

Por esta razão, a maneira com que cada conceito físico seria introduzido e cada conteúdo matemático seria trabalhado foi cuidadosamente estudada e analisada, à fim de que pudéssemos aplicar a modelagem matemática de uma forma sintetizada, no tempo de duas horas disponibilizado pela diretoria, porém sem prejuízo das fases necessárias para atingirmos o resultado final.

Enfatizamos também que apesar das orientações necessárias a algumas práticas experimentais, os alunos não tiveram ciência, previamente, de nenhum dos conceitos introduzidos, variáveis necessárias bem como a maneira de relacioná-las.

Somado ao fato de que os alunos utilizaram o tempo para criar suas próprias estratégias para melhor construção do raciocínio, podemos afirmar, sem sombra de dúvida, a predominância da modelagem matemática ao invés de uma modelação matemática, haja vista a integração dos alunos através da modelagem ter sido gradativa, promovendo uma articulação entre definição, investigação e resolução, conforme corroboram Almeida, Silva e Vertuan (2016).

A introdução dos conceitos de Física no Ensino Fundamental 2 utilizando a modelagem matemática, possibilitou maior participação dos alunos, levando-os à construção do entendimento dos conceitos matemáticos e físicos à medida que eram apresentados os problemas. As aplicações das práticas experimentais não somente despertaram nos professores da escola maior motivação e interesse pela continuidade deste projeto, como possibilitaram aos alunos enxergarem que a Física está no cotidiano de suas vidas, resultando numa aproximação mais amistosa, dos alunos, com esta disciplina, que só seria estudada no ensino médio. Tais fatos são observados nos comentários dos professores, após a aplicação deste trabalho e, principalmente, nos relatórios dos alunos que expressaram um raciocínio físico, inclusive diverso ao que fora proposto pela prática.

O professor que deseja implantar a modelagem não somente para consolidar a compreensão de conceitos matemáticos como também para ser utilizada à fim de exercer a interdisciplinaridade com outras ciências deverá atentar para o tempo de duração das atividades. Não obstante, é importantíssimo considerarmos o tempo de construção intuitiva que varia de indivíduo para indivíduo.

Com respeito a isso, D'Ambrosio (1986) afirma o seguinte:

> A substituição do ideal de rigor no ensino da Matemática pela aceitação de uma construção intuitiva, experimental, com repetições em maior e maior profundidade e o reconhecimento que apreciação de rigor se cultiva e varia de indivíduo para indivíduo, assim como se afina o ouvido para música, e que alguns atingirão um certo nível enquanto outros jamais alcançarão tal nível, parece-me a chave da integração (D'AMBROSIO, 1986, p.92).

Embora houvesse a necessidade de professores auxiliares e de acréscimo do tempo para a aplicação das práticas experimentais, fatos esses que foram apresentados como sugestões para futuras aplicações, ditos no interior desta dissertação, os objetivos propostos de cada atividade foram alcançados.

Além disso, as práticas experimentais possibilitam aos professores trabalharem outros conceitos da Física, como pressão, teorema de Pascal e potência elétrica.

A formalística das respostas apresentadas pelos alunos, forma de expressão e redação, podem ser trabalhadas visando uma integração entre a Matemática e a Língua Portuguesa, em busca, também, de melhor desempenho nesta última disciplina.

Por fim, acreditamos que a utilização da modelagem matemática pode, e muito, contribuir com a introdução de conceitos de qualquer ciência, respeitada a construção do próprio raciocínio que conduzirá o aluno à compreensão em qualquer fase do ensino.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W. d.; SILVA, K. P. d.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo: editora Contexto, 2016. Citado nas páginas 19, 20, 24, 25, 28, 29, 99 e 100.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? por que? como? 2004. Citado na página 33.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana (com mais exercícios)**. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Citado nas páginas 74 e 75.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. 1. ed. [S.l.]: São Paulo: Contexto, 2015. Citado nas páginas 23, 24, 25 e 26.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. [S.l.]: São Paulo, editora Contexto, 2016. Citado nas páginas 25 e 28.

CENTURIóN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje: na medida certa. 6o ao 9o ano**. 1. ed. São Paulo: editora Leya, 2015. Citado nas páginas 20, 38, 39, 49, 50, 68, 69, 74, 75, 81, 82 e 96.

D'AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação: reflexões sobre educação (e) matemática**. 6. ed. São Paulo: editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986. Citado nas páginas 19, 26, 29, 30 e 101.

FERREIRA, A. B. d. H. M. Língua portuguesa. **Rio de Janeiro: Nova Fronteira**, 1993. Citado na página 24.

GÓMEZ, B. Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. **A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Coords.), José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática**, p. 49–69, 2006. Citado na página 53.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física–vol. 3 (3ª edição)**. [S.l.]: Rio de Janeiro: LTC, 1994. Citado nas páginas 72, 83 e 84.

HOUAISS, A. Dicionário da língua portuguesa houaiss. **São Paulo: Editora Objetiva**, 2009. Citado nas páginas 23 e 24.

JORNAL; NACIONAL. **Desempenho dos alunos do 6^o ao 9^o ano da rede pública é abaixo da meta**. 2017. Disponível em: <http://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2017/11/desempenho-dos-alunos-do-6-ao-9-ano-da-rede-publica-e-abaixo-da-meta.html>. Acesso em: 04/06/2018. Citado na página 30.

JUNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. d. T. **Os fundamentos da física**. [S.l.]: Moderna, 2007. Citado nas páginas 51, 57, 71 e 84.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado nas páginas 88, 91 e 94.

LUNA, A. V. de A. Modelagem matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: Um estudo de caso no 1º ciclo. Conferência Interamericana de Educacion Matematica, v. 12, 2007. Citado nas páginas 22, 33, 34 e 100.

NETO, A. C. M. **Geometria**. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 74.

NETO, A. C. M. **Fundamentos de cálculo**. [S.l.]: Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado nas páginas 86 e 87.

SILVA, D. P. d. *et al.* Regra de três: prática escolar de modelagem matemática. Universidade Federal do Pará, 2011. Citado na página 53.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. [S.l.]: Papirus Editora, 2014. Citado nas páginas 21, 22, 27 e 28.

SMITH, D. E. **History of mathematics**. [S.l.]: Courier Corporation, 1958. v. 429. Citado na página 53.

STEWART, J. **Cálculo, Volume 1, 7ª edição**. [S.l.]: Editora Cengage Learning, 2013. Citado nas páginas 40, 41, 85, 86 e 95.