UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Daniel Ferreira da Silva

Uma introdução à integral de Riemann contextualizada ao Ensino Médio

São José do Rio Preto

2019

Daniel Ferreira da Silva

Uma introdução à integral de Riemann contextualizada ao Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

São José do Rio Preto

2019

S586i

Silva, Daniel Ferreira da

Uma introdução à integral de Riemann contextualizada ao Ensino Médio / Daniel Ferreira da Silva. -- São José do Rio Preto, 2019

58 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Fabiano Borges da Silva

1. Funções integráveis. 2. Riemann. 3. Funções contínuas. 4. Teorema Fundamental do Cálculo. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Daniel Ferreira da Silva

Uma introdução à integral de Riemann contextualizada ao Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva
UNESP- Câmpus de Bauru
Orientador

Prof^a Dr^a. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
UNESP- Câmpus Bauru

Prof. Dr. Ismael da Silva Pena
IFSP- Câmpus Birigui

Bauru

25 de outubro de 2019

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus por proporcionar através de inúmeras pessoas que este trabalho pudesse estar finalizado, dentre elas, em especial à minha família pois é o alicerce de qualquer conquista e, aos professores do PROFMAT por entenderem e nos darem condições de progredir.

O caminho foi árduo e longo, mas a esperança da vitória e a torcida de todos aqueles que nos amam, fazem com que sejamos capazes de coisas até então muito distantes de nossa realidade social e profissional.

Um agradecimento especial à minha esposa Cristiane e meus filhos que acompanharam esse processo desde o início, vivenciando todas as frustrações e alegrias da jornada, e não poderia deixar de citar os professores Tatiana Miguel Rodrigues e Fabiano Borges da Silva, por acreditarem até o último momento. Sem dúvida vocês fizeram a diferença.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a definição da integral de Riemann por meio de somatórios de retângulos que aproximam pela falta e pelo excesso a região sob uma curva definida por uma função. Posteriormente mostramos que as funções contínuas definidas num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ são integráveis e fornecemos um exemplo de função não integrável. Finalmente apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo e uma abordagem para a teoria de integração que pode ser aplicada no contexto do Ensino Médio.

Palavras-chave: Funções integráveis, Riemann, Funções contínuas, Teorema Fundamental do Cálculo.

Abstract

In this work we present the definition of the Riemann integral by summing rectangles that approximate the region under a curve defined by a function due to lack and excess. Then we show that continuous functions defined in a closed and limited interval $[a, b]$ are integrable, and after we provide an example of an unintegrable function. Finally we present the Fundamental Calculus Theorem and an approach to integration theory that can be applied in the High School context.

Keywords : Integrable functions, Continuous functions, Riemann, Fundamental Calculus Theorem.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A ideia de abordar conceitos iniciais do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, traz à tona o quão relevante esse contato, ainda que superficial, pode ser para o aluno obter uma melhor compreensão de fenômenos modelados por funções e também um melhor aproveitamento de cursos que se valem do Cálculo como base inicial.

Conceitos introdutórios do Cálculo como o limite, derivada e até integrais no estudo das funções polinomiais por exemplo, se tratados com a relevância adequada no Ensino Médio, podem dirimir grande parte das deficiências apresentadas pelos discentes na interpretação algébrica e geométrica de modelos matemáticos e de situações da Física.

Grande parte dessas dificuldades não encontram-se na simbologia ou métodos de resolução, mas na interpretação de sua aplicabilidade na forma de ferramenta científica, o que se agrava quando são apresentados às técnicas de integração.

Este trabalho propõe uma abordagem geral sobre a integral de Riemann, precursora das técnicas de integração hoje utilizadas e que nasceu baseada na formalização matemática a partir da estimativa de áreas de regiões definidas por funções reais estritamente positivas, além de problemas físicos.

A abordagem tomada por Riemann quanto ao conceito de integrabilidade é construída a partir da ideia geométrica das somas das áreas dos subintervalos de uma região $\Re$ em retângulos. Dada uma função contínua não negativa definida no intervalo [a, b], neste intervalo é definido uma partição de forma a inscrever e circunscrever retângulos a curva.

A soma das áreas desses retângulos é que dá uma estimativa por falta e por excesso, respectivamente, da área abaixo da curva. Quanto maior o número de retângulos e mais estreita sua base, mais precisa será essa estimativa.

A integral de Riemann é definida como o limite dessas estimativas quando a medida máxima das partições tende a zero. Dificuldades são encontradas nesse processo se a função não é contínua. Funções com um número limitado de pontos de descontinuidade podem ser integráveis, mas uma função com muitos pontos de descontinuidade, como a função $X_{\mathbb{Q}}$ (a função característica dos números racionais), é um exemplo onde não podemos aplicar a integral de Riemann.

O objetivo desse trabalho é proporcionar um embasamento teórico a respeito de uma técnica tão difundida em cursos de nível superior, porém pouco absorvida em suas definições e aplicações. Até chegar à integração, em seus métodos mais apurados, o aluno deve percorrer uma longa trajetória passando pelo estudo do comportamento das funções, funções limitadas e contínuas, até culminar na ideia somatório do cálculo de áreas sob curvas usando aproximação, uma forma dedutiva de se chegar ao valor estimado da integral definida.

Nos dois primeiros capítulos estão definições e resultados essenciais para que a integral seja definida. No capítulo seguinte estão alguns exemplos de funções contínuas e descontínuas integráveis além de não integráveis, e no último capítulo são apresentadas aplicações que poderiam ser trabalhadas no ensino médio, desde que construído o percurso que permita ao aluno a correta percepção da aplicabilidade. Ao aluno da 3ª série do Ensino Médio é possível apresentar os conceitos de limites, a derivada e até o cálculo de áreas sob curvas de funções polinomiais, facilitando a resolução e compreensão de algumas modelagens que decorrem dessa condição.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo são apresentados conceitos e demostrações necessários para chegarmos à integral de Riemann e suas propriedades, tomando por base Swokowski (1983) e Lima(2006). Em particular, mostraremos neste trabalho que as funções contínuas definidas em um intervalo fechado $[a, b]$ são integráveis.

Dada uma função f definida em um intervalo compacto (limitado e fechado) $[a, b]$, daremos a definição de continuidade de f em relação a este intervalo.

1.1 Supremo e ínfimo

Para definir se um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, deve-se analisar suas cotas superior e inferior, caso existam.

1. Se existir um M, tal que $X \subset (-\infty, M]$, então X é limitado superiormente e M é considerado uma cota superior de X.

2. Se existir um m, tal que $X \subset [m, +\infty)$, então X é limitado inferiormente e m é uma cota inferior para X.

Dentro do conjunto dos reais podemos analisar vários exemplos tanto de conjuntos ilimitados, como o conjunto dos números naturais que não possui uma maior cota superior; e também conjuntos limitados superior e inferiormente como o intervalo real das frações próprias positivas $[0, 1]$. De maneira mais abrangente, podemos citar o exemplo a seguir.

Exemplo 1. *Se um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, então o conjunto Y de $\mathbb{R}$ dado por $Y = \{-x : x \in X\}$ é limitado inferiormente. De fato, se X é limitado superiormente e $a > 0$ é tal que $x \leq a$, para todo $x \in X$, então $-x \geq -a$ para todo $x \in X$; mas como $y = -x$ é um elemento do conjunto Y, pode-se concluir que $y \geq -a$, para todo $y \in Y$, logo Y é limitado inferiormente.*

De acordo com o axioma da completude de $\mathbb{R}$ temos:

Teorema 1.1.1. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então X possui uma menor cota superior.*

Dessa forma, sendo M a menor cota superior de X, dizemos que M é o supremo de X, denotando por

$$M = supX$$

Por sua vez, seguindo o Exemplo 1, temos como consequência que Y admite uma maior cota inferior m denominada ínfimo de X, e denotada por

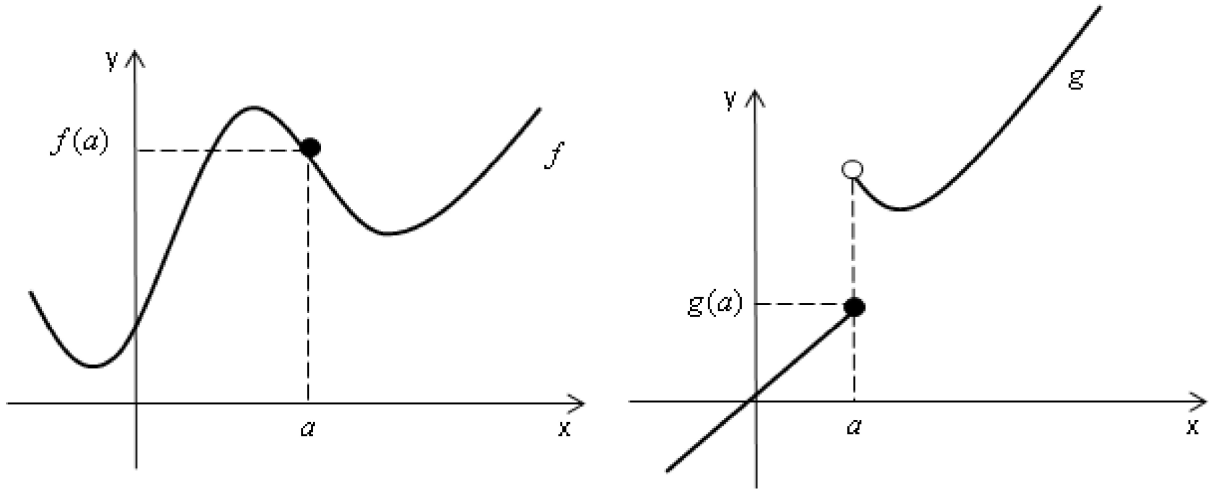
$$m = infX.$$

1.2 Funções contínuas

Analisando os gráficos de duas funções reais f e g que se encontram na Figura 1.1, verificamos que f não tem ponto de descontinuidade ou salto no intervalo contendo o ponto a. Já a função g para $x = a$ apresenta um salto ou ponto de descontinuidade.

De maneira formal, em f podemos verificar que para todo $\epsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$(que depende de ϵ), tal que $f(a)$ permanece entre $f(a) - \epsilon$ e $f(a) + \epsilon$, quando x percorre o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

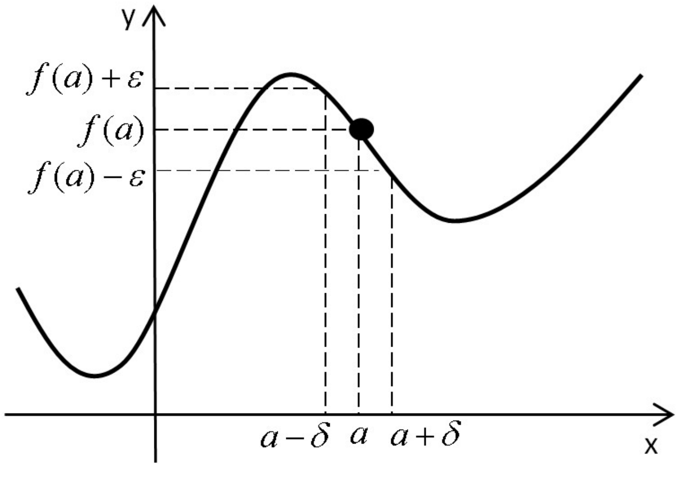
Figura 1.1: A função f contínua em a e g tem uma descontinuidade em a.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Em outras palavras, temos na Figura 1.2 que à medida que um valor do domínio x varia em um subintervalo real $(a-\delta, a+\delta)$, a imagem necessariamente varia no subintervalo $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$.

Figura 1.2: Continuidade de f.

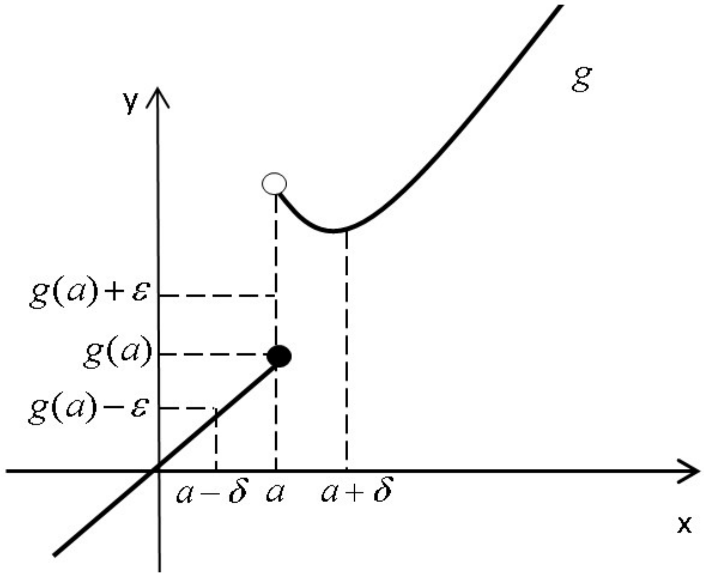


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

O que não se verifica em g como na Figura 1.3, já que para $\epsilon > 0$, independente do valor de $\delta > 0$, no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, $g(x)$ não permanece necessariamente no intervalo

$(g(a) - \epsilon, g(a) + \epsilon)$.

Figura 1.3: Descontinuidade de g para $x = a$.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Definição 1. *Uma função f é contínua em um ponto a, pertencente ao domínio de f, se são satisfeitas três condições:*

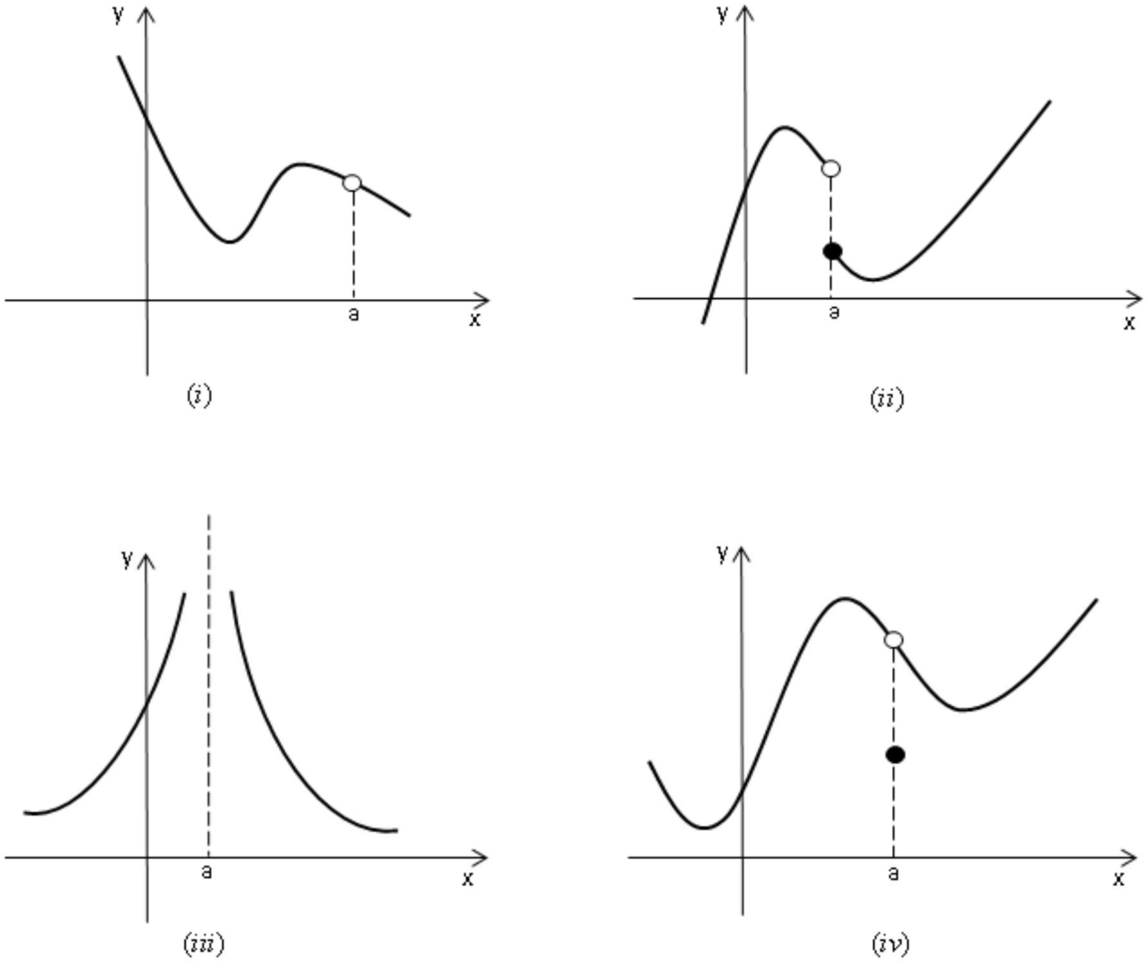
(i) f é definida em um intervalo aberto contendo a;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Caso f não atenda simultaneamente às três condições da definição, dizemos então que f é descontínua em a. Nos exemplos da Figura 1.4 podemos verificar alguns casos particulares onde os critérios de continuidade não se estabelecem.

Figura 1.4: Exemplos de descontinuidade.



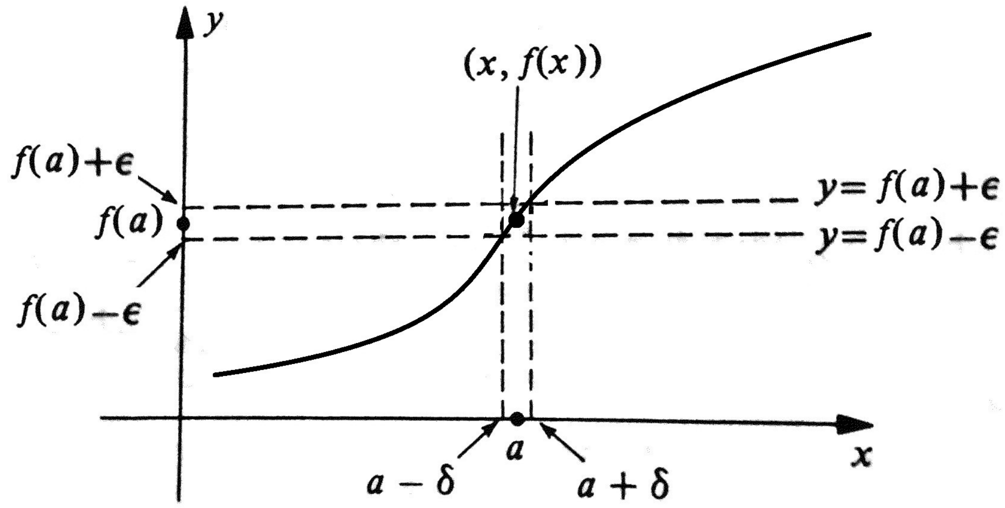
Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Em (i) temos que $f(a)$ não se define, em (ii) e (iii) há descontinuidade em razão do $\lim_{x \to a} f(x)$ não existir. Já em (iv) temos definidos tanto $f(a)$, bem como existe o $\lim_{x \to a} f(x)$, porém apresentam valores distintos, divergindo da terceira condição da Definição 1.

Valer lembrar que estamos verificando a continuidade das funções citadas em relação a um intervalo que contenha a abscissa a. Isso significa que continuidade é um fenômeno local e essas funções podem apresentar continuidade em relação a outros intervalos distintos.

Em termos gráficos, para que haja a continuidade da função observa-se que para todo par de retas horizontais da forma $y = f(a) \pm \epsilon$, existem pares de retas verticais $x = a \pm \delta$ formando uma região retangular onde, se $a-\delta < x < a+\delta$, então $f(a)-\epsilon < f(x) < f(a)+\epsilon$.

Figura 1.5: Função contínua.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Em termos de ϵ e δ, a Definição 1 pode ser escrita da seguinte forma:

Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo a, então f é contínua em a se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Exemplo 2. *A função afim $f(x) = mx + n$, com m e n constantes reais, é contínua.*

Vamos mostrar que f é contínua em $x = a$.

Se $m = 0$ a função $f(x) = n$, isto é, constante e portanto é contínua.

Supondo então $m \neq 0$, temos:

$$|f(x) - f(a)| = |(mx + n) - (ma + n)| = |m(x - a)| = |m|.|x - a|.$$

Assim, dado um $\epsilon > 0$, se

$$|x-a| < \frac{\epsilon}{|m|} \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon.$$

Portanto, f é contínua em $x = a$ e, sendo este um valor arbitrário do domínio, então f é contínua em todo o intervalo dos reais.

Um outro exemplo interessante e útil para os propósitos deste trabalho é o estudo da continuidade da função quadrática $f(x) = x^2$.

Exemplo 3. *Vamos mostrar que $f(x) = x^2$ é contínua.*

Para que f seja contínua, deve ser contínua para todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Verificando inicialmente para $a = 0$, dado um $\epsilon > 0$, deve existir um $\delta > 0$ de forma que

$$|x-0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0^2| < \epsilon.$$

Para que $|x^2| < \epsilon$ basta que $|x| < \sqrt{\epsilon}$ logo, tomando $\delta = \sqrt{\epsilon}$ temos que se

$$|x-0| < \delta \Rightarrow |x^2 - 0^2| < \epsilon.$$

Logo, f é contínua em $x = 0$.

Agora, escolhendo arbitrariamente um $a \neq 0$, vamos provar a continuidade de f:

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon \Leftrightarrow a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon.$$

Se $\epsilon < a^2$ e $\epsilon > 0$, segue que

$$a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon \Longleftrightarrow \sqrt{a^2-\epsilon} < |x| < \sqrt{a^2+\epsilon}$$

Se $a > 0$, tomamos o intervalo o intervalo $I = (\sqrt{a^2-\epsilon}, \sqrt{a^2+\epsilon})$, assim se

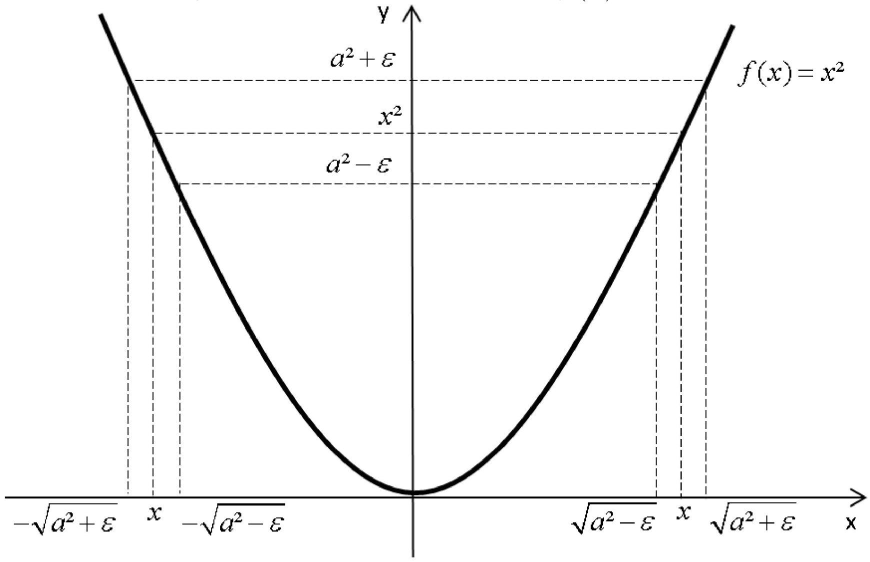
$$x \in I \Rightarrow a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon.$$

Se $a < 0$, tomamos o intervalo o intervalo $I = \left(-\sqrt{a^2+\epsilon}, -\sqrt{a^2-\epsilon}\right)$, assim se

$$x \in I \Rightarrow a^2 - \epsilon < x^2 < a^2 + \epsilon.$$

Interpretando graficamente:

Figura 1.6: Continuidade de $f(x) = x^2$.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Portanto, $f(x) = x^2$ é contínua para todo $a \in \mathbb{R}$.

A seguir, daremos alguns exemplos de funções cuja prova segue diretamente das propriedades de limites e as demonstrações não abordaremos neste trabalho.

- As funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$ são contínuas para todo número real x.

- A função exponencial $h(x) = e^x$ é contínua para todo número real x.

- Se f e g são funções contínuas em um ponto a, então:

  (i) $f + g$ é contínua em a;

  (ii) $f - g$ é contínua em a;

  (iii) $f \times g$ é contínua em a;

  (iv) $\frac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

As funções polinomiais da forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ são obtidas por meio de somas e produtos de funções contínuas, logo segue dos Exemplos 2 e 3 que todas as polinomiais serão contínuas para todo o x real.

1.3 Funções uniformemente contínuas

Nesta seção apresentamos um resultado equivalente à noção usual de continuidade, porém mais consistente, observando funções definidas em intervalos $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Definição 2. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

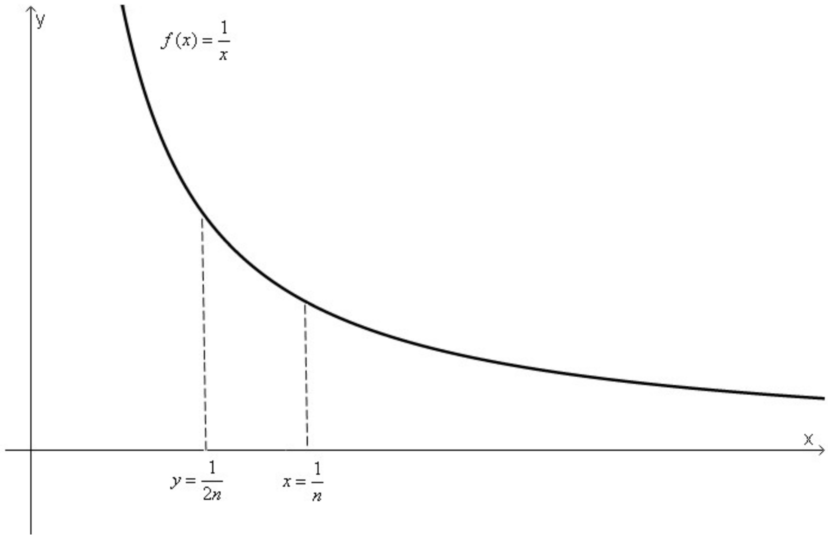
É imediato que toda função uniformemente contínua é contínua, mas a recíproca não é verdadeira. Isto é, a diferença entre as Definições 1 e 2 é que dado um $\epsilon > 0$ para uma função uniformemente contínua a existência do $\delta > 0$ é garantida pela Definição 2 e depende exclusivamente do ϵ escolhido, valendo para quaisquer x, y pertencentes ao intervalo X. Já na função contínua o valor de δ está condicionado tanto a ϵ quanto a um $x_0 \in X$ arbitrário.

A continuidade de $f : X \to \mathbb{R}$ no ponto $c_i \in X$ significa que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de $f(c_i)$ quanto se queira, desde que x se torne suficientemente próximo de c_i. Quando há continuidade uniforme é possível tornar $f(x)$ e $f(y)$ tão próximos um do outro quanto se queira, desde que $x, y \in X$ também se aproximem.

Exemplo 4. *Considere a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.*

Esta função é contínua em $(0, +\infty)$.

Figura 1.7: Função $f(x) = \frac{1}{x}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Porém, dado $\epsilon > 0$, com $0 < \epsilon < 1$ seja qual for o $\delta > 0$ escolhido, tomando $x = \frac{1}{n}$ e $y = \frac{1}{2n}$, para n um natural não negativo e $n > \frac{1}{\delta}$, temos que

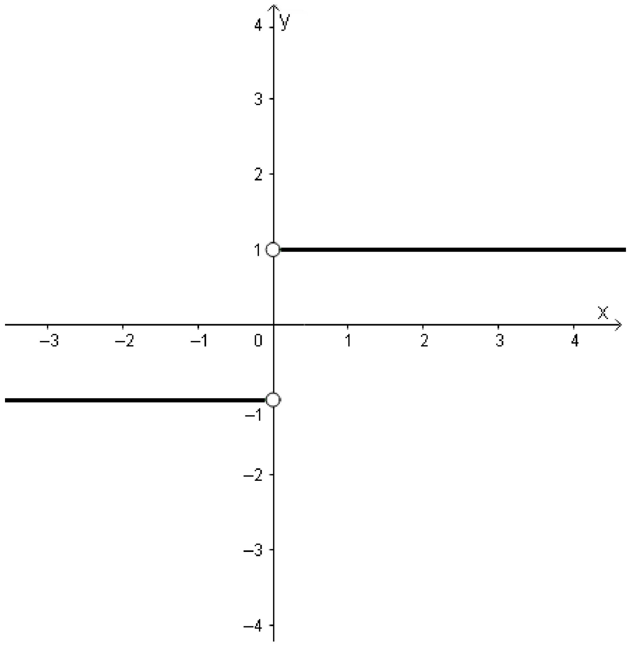
$$|y - x| = \left| \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{1-2}{2n} \right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \delta,$$

mas $|f(y) - f(x)| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = |2n - n| = n \geq 1 > \epsilon$.

Exemplo 5. *Vamos verificar que a função* $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{x}{|x|}$ *não é uniformemente contínua.*

Esta função apresenta continuidade em todo o intervalo de seu domínio $\mathbb{R} - \{0\}$ sendo constante em cada vizinhança de $x \neq 0$, ou seja, temos $f(x) = 1$, se $x > 0$ e $f(x) = -1$, se $x < 0$.

Figura 1.8: Função $f(x) = \frac{x}{|x|}$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Entretanto se tomarmos um $0 < \epsilon < 2$, para qualquer $\delta > 0$ escolhido, existem pontos $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$.

De fato, tomando por exemplo x e y respectivamente $\frac{\delta}{4}$ e $\frac{-\delta}{4}$, teremos

$$|x - y| = \left|\frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

porém

$$\left|f\left(\frac{\delta}{4}\right) - f\left(\frac{-\delta}{4}\right)\right| = |1 + 1| \geq \epsilon.$$

Sendo assim, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$ é uma função contínua, mas não uniformemente contínua.

Proposição 1. *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada Lima (2006, p.84).

A continuidade de uma função f em um intervalo fechado $[a, b]$ é indispensável aos teoremas relacionados a seguir, e estes são fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho. Suas demonstrações podem ser verificadas em Guidorizzi (2001).

1.4 Teorema de Weierstrass

Teorema 1.4.1. *Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.*

Em outras palavras, por Weierstrass se f for contínua em $[a, b]$, então f assumirá em $[a, b]$ valor máximo e valor mínimo.

1.5 Teorema de Rolle

Teorema 1.5.1. *Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Seja f uma função constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ em (a, b); logo existirá um c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Supondo agora que f não seja constante em $[a, b]$, porém contínua, pelo teorema de Weierstrass existem x_1 e x_2 em $[a, b]$, tais que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são respectivamente os valores máximo e mínimo de f em $[a, b]$.

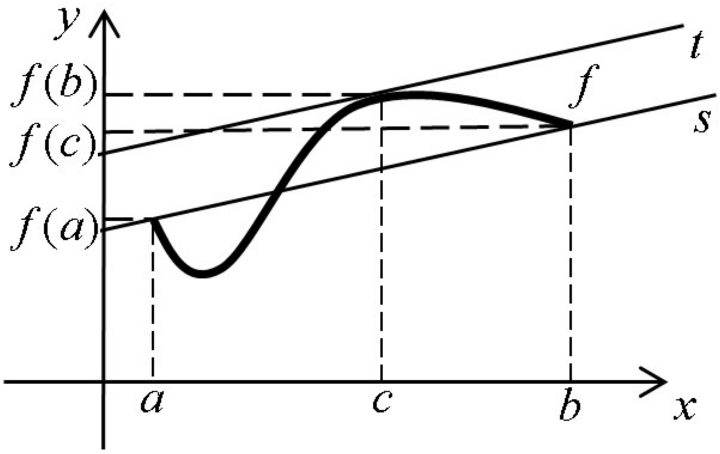
Como $f(x_1) \neq f(x_2)$, pois estamos supondo f não constante em $[a, b]$, segue que ou x_1 ou x_2 pertence a (a, b) (por hipótese $f(a) = f(b)$), daí $f'(x_1) = 0$ ou $f'(x_2) = 0$. Portanto, existe um c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$. ■

1.6 Teorema do valor médio

Analisando o gráfico de uma função f definida em um intervalo $[a, b]$, se s é uma reta que contém os pontos $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$, então existe ao menos um ponto $(c; f(c))$, com $a < c < b$, de forma que a reta t tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta s. Sendo a taxa de variação de s dada por $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, e $f'(c)$ a variação de t, então

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Figura 1.9: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Teorema 1.6.1. *Teorema do valor médio-TVM*

Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existirá pelo menos um c em (a,b) tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ ou } f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demonstração. Suponha s uma função dada por $s(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ e $g(x) = f(x) - s(x)$, $x \in [a,b]$. Como g é contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e $g(a) = g(b)$, pelo teorema de Rolle existe um c em (a,b) tal que $g'(c) = 0$. Logo, $g'(x) = f'(x) - s'(x)$ e $s'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Assim

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

então,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Portanto,

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

■

Capítulo 2

Integral de Riemann

Segundo Eves (2004) e Stewart (2011), seguindo o legado de Karl Weierstrass (1815-1897) na rigorização da matemática e generalização abstrata, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) exerceu notável influência em diversos ramos da matemática, deixando uma herança rica de ideias que influenciaram as descobertas seguintes, dentre elas conceitos amplos de espaço e geometria que favoreceram o desenvolvimento da teoria da relatividade de Albert Einstein (1879-1955).

Filho de um pastor luterano, nasceu em 1826 em uma aldeia em Hanover e mesmo com modestas posses teve acesso a uma boa educação. Iniciou na universidade de Berlim e posteriormente na universidade de Göttingen onde defendeu seu doutorado sob orientação de Carl Friedrich Gauss(1777-1855), com uma tese no campo da teoria das funções complexas. Neste trabalho encontram-se as equações diferenciais de Cauchy-Riemann, que permitem que as funções de variável complexa possam ser trabalhadas analiticamente, além de outras considerações topológicas da análise. Foi Riemann que deixou clara a ideia de integrabilidade através da divisão de uma região não poligonal em subintervalos de regiões retangulares cada vez menores, e pela estimativa das somas das áreas dessas regiões tornou possível a determinação de área sob uma curva, ou ainda, entre duas curvas distintas. A definição dada por Riemann abriu caminho para a generalização da integral, mais tarde com Henri León Lebesgue (1875- 1941). Deixou contribuições também nos campos da física-matemática, teoria dos números e fundamentos da geometria.

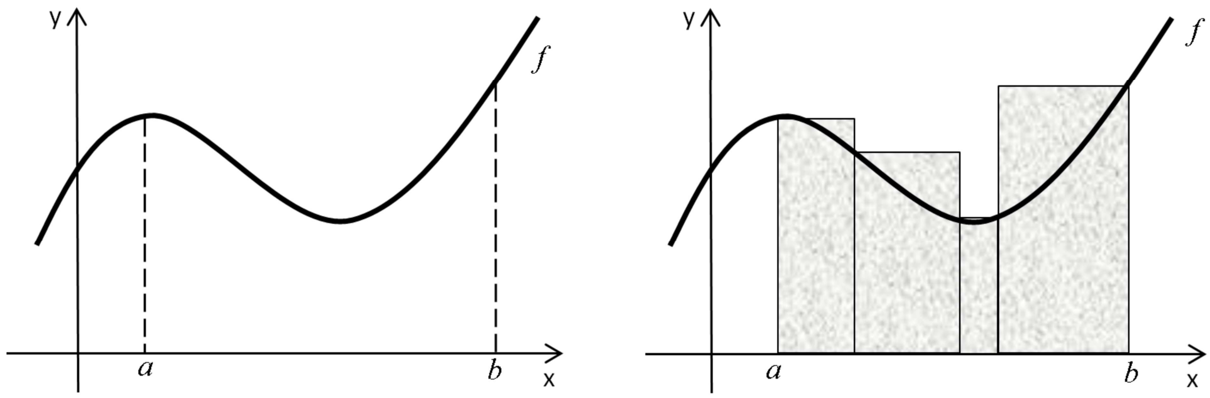
Em 1859 Riemann teve a honra de suceder a Dirichlet como professor titular em

Göttingen, vaga esta ocupada anteriomente por ninguém menos que Gauss, falecendo em 1866 de tuberculose antes de completar quarenta anos de idade.

Calcular áreas de regiões planas remete sempre a conceitos determinados pelas próprias características das figuras, como em polígonos convexos e regiões circulares. Já para uma região não limitada por essas figuras, como regiões sob curvas, devemos observar que não existe uma relação fechada. O método da exaustão utilizado na Grécia antiga consiste em aproximar uma região dada por meios de outras, cujas áreas são conhecidas. Essa aproximação a partir da divisão dessa região curva em regiões conhecidas (como retângulos) pode ser um recurso trabalhoso, porém válido para esse fim.

Parte do problema é tornar uma ideia intuitiva como essa aproximação em uma definição mais precisa. Para isso, vamos supor uma região plana $\Re$ limitada pelo gráfico de uma função polinomial f não negativa definida em um intervalo de números reais $[a, b]$, as retas verticais $x = a$ e $x = b$, além dos eixos coordenados xy, usando uma partição desse intervalo em regiões retangulares.

Figura 2.1: Partições de f.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

2.1 Soma de Riemann

Uma partição P de um intervalo real $[a, b]$ é uma sequência finita $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ de números reais tal que:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Ou seja, uma partição de um intervalo fechado é uma sequência estritamente crescente de números $x_i \in [a, b]$.

Sejam dois números reais a e b com $a < b$, e uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então consideremos uma partição de $[a, b]$ não necessariamente uniforme $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ com $a \in P$ e $b \in P$, tal que:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) = b - a,$$

As somas desses dados são representadas por:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1}[x_{i+1} - x_i]f(c_i)$$

Esse somatório representa a união de todas as áreas das partições representadas por regiões retangulares de bases $x_{i+1} - x_i$, e alturas determinadas por $f(c_i)$, sendo $c_i \in [x_{i+1} - x_i]$ e $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Portanto, podemos escrever

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i$$

onde $\Delta x_i = |x_{i+1} - x_i|$, e S é chamada de **soma de Riemann**.

Propriedades

1. Se o intervalo $[a, b]$ é finito e a função limitada nesse intervalo tal que $f(c_i) \leq M_i = supf(c_i)$, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$, então

$$S_{sup} : \sum_{i=0}^{n-1}[x_{i+1} - x_i]M_i \geq S$$

Ou seja, se utilizarmos uma partição que inclua o supremo de f, essa soma denotada por S_{sup} será maior que o valor real da soma.

2. Já se tivermos $f(c_i) \geq m_i = inf f(c_i)$, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ então

$$S_{inf} : \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1} - x_i] m_i \leq S$$

Ou seja, se utilizarmos uma partição que inclua o ínfimo de f, essa soma denotada por S_{inf} será menor que o valor real da soma.

Logo,

$$S_{inf} \leq S \leq S_{sup}.$$

2.2 Norma de uma partição

Sejam P e Q partições de um intervalo real $[a, b]$. Dizemos que Q refina P quando $P \subset Q$, ou seja, acrescentando a P quaisquer pontos obtém-se uma nova partição de intervalos menores que os de P.

Exemplo 6. *Dado o intervalo real* $[0, 1]$ *e uma partição*

$$P = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, 1\}.$$

Se a esta partição acrescentarmos valores como em

$$Q = \{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$$

temos que $P \subset Q$*, ou seja , obtemos uma partição de intervalos menores, mais refinada que* P*.*

Seja a norma de uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ a medida de seu maior intervalo, note que se Q refina P, então $||Q|| \leq ||P||$.

O objetivo de se refinar uma partição gerando uma outra de menor norma, é através desta se obter uma melhor aproximação da área sob a região curva por meio da soma das áreas dos retângulos que a formam, sendo o limite dessa soma para quando o número de partições tende ao infinito, a ideia base da integral de Riemann.

2.3 Integral de Riemann

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, e

$$m_i = inf\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

a medida do ínfimo de f em $[x_{i-1}, x_i]$;

$$M_i = sup\{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

a medida do supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$;

$$\omega_i = M_i - m_i$$

a variação em cada intervalo de uma partição P, e

$$\|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

a norma da partição P.

Então, $m_i \leq f(x) \leq M_i$ para todo o valor de $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Chamaremos de soma inferior (ou por falta) de f relativamente à partição P, o valor indicado por

$$s(f; P) = m_1(x_1 - x_0) + ...m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

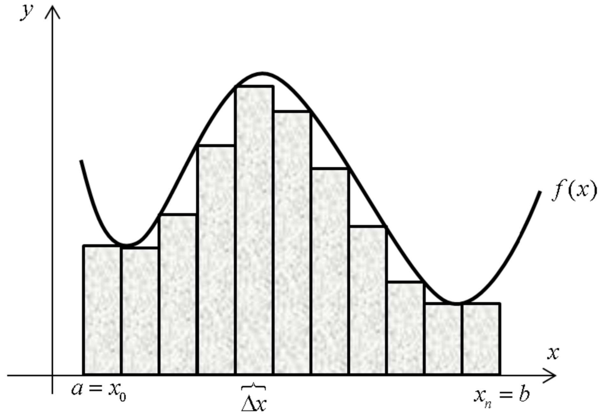
Por sua vez, a soma superior (ou por excesso) de f é definida por

$$S(f; P) = M_1(x_1 - x_0) + ...M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Para uma $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, os números $s(f; P)$ e $S(f; P)$ são valores aproximados, respectivamente, pela falta e pelo excesso da área delimitada pelo gráfico de f.

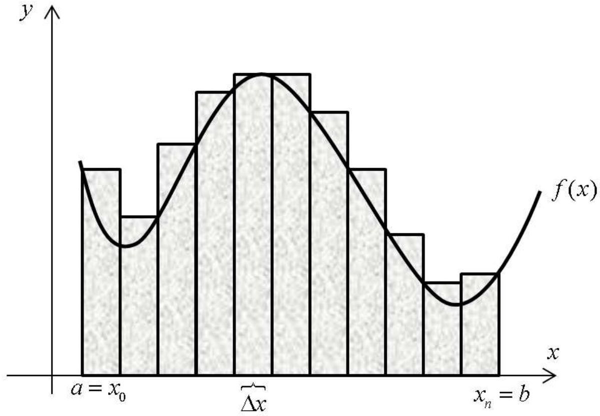
Uma função limitada em um intervalo fechado $[a, b]$ é dita **integrável** segundo Rie-

Figura 2.2: Soma por falta



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 2.3: Soma por excesso



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

mann se, e somente se, dado um $\epsilon > 0$ muito pequeno, existirem partições P e Q de tal forma que

$$S(f;Q) - s(f;P) < \epsilon. \tag{2.1}$$

Isto significa que estamos subtraindo as somas das áreas dos retângulos obtidos pelo excesso (ou somas superiores), das somas das áreas dos retângulos obtidos pela falta (ou somas inferiores), e se esses valores coincidem ou estão muito próximos, chamamos este valor de integral de Riemann e denotaremos por $\int_a^b f(x)dx$, a qual é chamada de integral definida.

Ou seja, f é integrável se os valores de $S(f;Q)$ e $s(f;P)$ se aproximam à medida em que vamos refinando a partição, ou ainda, se a área por excesso obtida por meio dos retângulos vai se aproximar da área obtida dos retângulos pela falta.

Vale destacar também que quando realizamos o refinamento da partição P, a norma da mesma tende a valores cada vez menores ao passo que o número de pontos em cada partição tende ao infinito.

Teorema 2.3.1. *Condições de integrabilidade*

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, temos como equivalentes as seguintes afirmações:

(i) f é integrável;

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a,b]$, tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \epsilon$;

(iii) Para todo $\epsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$, tal que

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) < \epsilon.$$

A demonstração desse teorema pode ser vista em Lima (2006, p.141).

Definição 3. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável e não negativa, definimos a área da região sob o gráfico de f e acima do eixo x como*

$$A(\Re) = \int_a^b f(x)dx.$$

Se a função f não assumir apenas valores positivos, ocorre que o limite das somas de Riemann pode ser interpretado como a resultante das diferenças entre as áreas das regiões acima e abaixo do eixo das abscissas.

Agora, pretendemos explicar que para uma função integrável f, podemos obter $\int_a^b f(x)dx$ por meio de um limite da forma

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

onde ξ_i são pontos escolhidos arbitrariamente nos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$.

Uma partição pontilhada do intervalo $[a,b]$ é um par $P^* = (P, \xi)$ onde $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ é uma partição de $[a,b]$ e $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é uma lista de n números escolhidos de forma que $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ (veja Figura 2.4).

Dada uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma partição pontilhada P^* de $[a,b]$, tem-se a soma de Riemann

$$\sum (f; P^*) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|t_{i-1} - t_i|. \tag{2.2}$$

É claro que, seja qual for a forma de pontilhar a partição P, teremos

$$s(f;P) \leq \sum (f; P^*) \leq S(f;P). \tag{2.3}$$

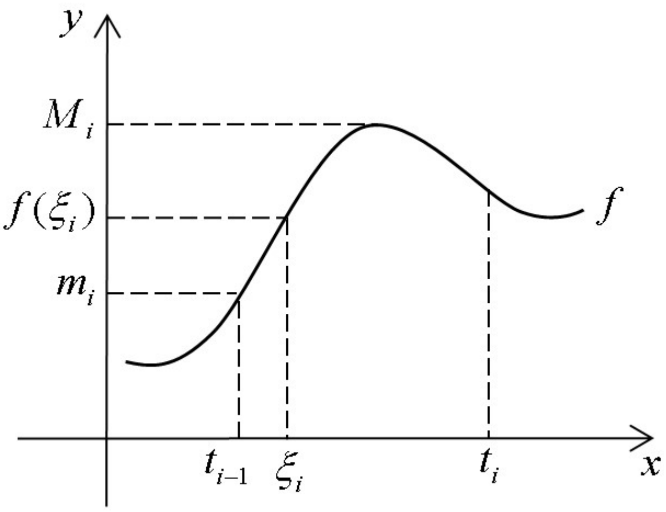
Assim, dizemos que o número real I é o limite de $\sum(f;P^*)$ quando temos $||P|| \to 0$, e denotamos por $I = \lim_{||P||\to 0}\sum(f;P^*)$ quando para qualquer $\epsilon > 0$ dado, podemos obter um $\delta > 0$ tal que $\left|\sum(f;P^*) - I\right| < \epsilon$, seja qual for a partição pontilhada P^*, com $||P|| < \delta$.

Teorema 2.3.2. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável, então*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{||P^*||\to 0}\sum(f;P^*)\\ &= \lim_{||P^*||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)|t_{i-1} - t_i|.\end{aligned}$$

A demonstração desse teorema encontra-se em ”Análise Real”, vol 1, pág 141.

Figura 2.4: f é integrável com $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Como vimos no Teorema 2.3.2, f é integrável e segue do refinamento dessa partição, à medida que $|t_i - t_{i-1}|$ se torna tão pequeno quanto se queira, com $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, não importará o ξ_i escolhido, $f(\xi_i)$ estará no intervalo $[m_i, M_i]$.

Observação 1. *O símbolo $\int$ foi apresentado por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e é chamado de sinal da integral. Nota-se a semelhança de $\int$ com um S estilizado, dado que sua primeira visão foi em relação a limites de somatórios e em $\int_a^b f(x)dx$, a e b são os limites da integração, $f(x)$ é o integrando e dx pode ser associado à variação Δx da variável dependente.*

Capítulo 3

Funções contínuas são integráveis

Trataremos neste capítulo sobre alguns exemplos de funções contínuas e descontínuas, relacionando particularmente sua área com o valor da integral definida no intervalo.

Através dos resultados apresentados nos capítulos anteriores, uma das formas de obtermos um parâmetro para a área $\Re$ de uma região sob o gráfico de uma curva de f é considerar partições do intervalo do domínio formando regiões retangulares, onde essa área estará estimada entre os valores das somas das áreas das partições considerando os valores superiores e inferiores da curva, culminando na integral definida neste intervalo.

Essa estimativa só é válida se a medida em que refinamos a partição, os valores das somas se aproximam cada vez mais.

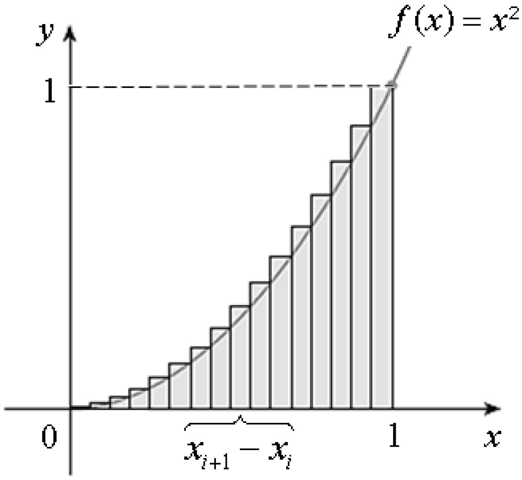
Exemplo 7. *O problema da área.*

Estimar a área S sob a parábola $y = x^2$, no intervalo real $[0, 1]$ e verificar que a função $y = x^2$ é integrável.

Observamos que a área S deve ser um valor estimado entre 0 e 1, já que S está contido em uma região quadrada com lados de comprimento igual a 1.

Supondo que S possa ser dividida em faixas retangulares a partir de retas verticais x_i, teremos S representada por i retângulos de bases medindo $[x_{i+1} - x_i]$ e alturas iguais aos respectivos valores de $f(x_i)$.

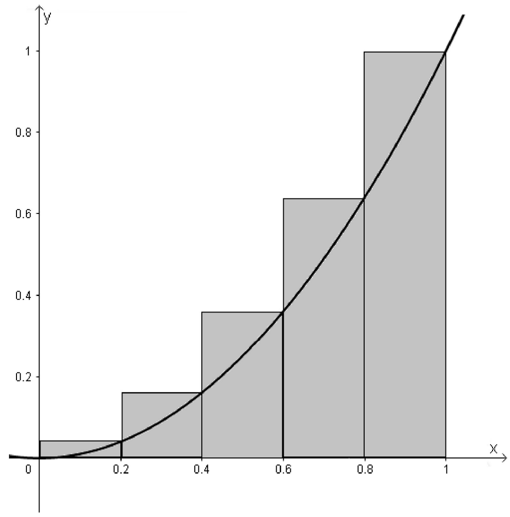
Figura 3.1: Partições de $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Tomando as retas verticais $x = \frac{1}{5}, x = \frac{2}{5}, x = \frac{3}{5}$ e $x = \frac{4}{5}$, como na Figura 3.2, podemos definir cada faixa como uma região retangular com bases de mesma medida que os subintervalos $[0, \frac{1}{5}]$, $[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}]$, $[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}]$, $[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}]$, $[\frac{4}{5}, 1]$ e alturas equivalentes aos valores de $f(x)$ correspondentes às extremidades direitas dos subintervalos.

Figura 3.2: Soma das partições de $f(x) = x^2$ pela direita.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Sendo assim, cada retângulo terá largura igual a $\frac{1}{5}$, e as alturas respectivamente iguais a $(\frac{1}{5})^2$, $(\frac{2}{5})^2$, $(\frac{3}{5})^2$,$(\frac{4}{5})^2$ e 1^2. Logo, podemos indicar por $S(f;P)$ a soma das áreas desses retângulos, e

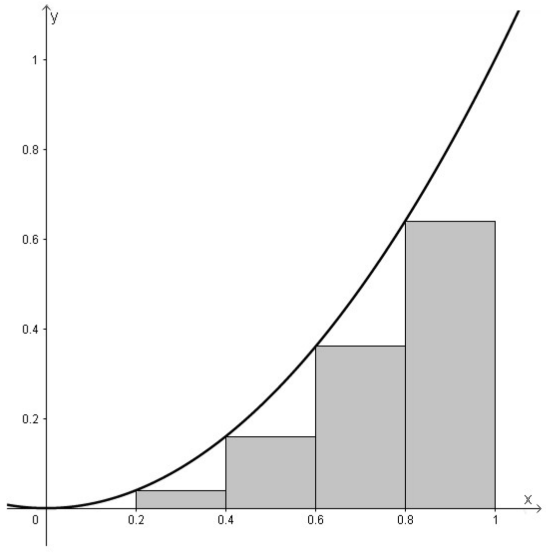
$$S(f;P) = \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{5}.(\frac{1}{5})^2 + \frac{1}{5}.(\frac{2}{5})^2 + \frac{1}{5}.(\frac{3}{5})^2 + \frac{1}{5}.(\frac{4}{5})^2 + \frac{1}{5}.(1)^2 = \frac{11}{25}.$$

Portanto, podemos inferir que a área real S é menor que a soma $S(f;P)$, ou seja,

$$S < 0,44.$$

Já se tomarmos como referência retângulos de mesmas medidas de base, porém com alturas agora definidas pelos valores de f das extremidades do lado esquerdo dos subintervalos, teremos como como respectivos valores apenas $(\frac{1}{5})^2$, $(\frac{2}{5})^2$, $(\frac{3}{5})^2$, e $(\frac{4}{5})^2$, já que o primeiro retângulo teria altura igual à $f(0) = 0$.

Figura 3.3: Soma das partições de $f(x) = x^2$ pela esquerda.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Então, denotamos a soma das áreas dessas regiões por $s(f;P)$ e

$$s(f;P) = \frac{1}{5}.0 + \frac{1}{5}.(\frac{1}{5})^2 + \frac{1}{5}.(\frac{2}{5})^2 + \frac{1}{5}.(\frac{3}{5})^2 + \frac{1}{5}.(\frac{4}{5})^2 = \frac{6}{25}.$$

Seguindo a observação inicial, estimamos a área real S é maior que a soma $s(f;P)$, ou seja, que

$$S > 0,24.$$

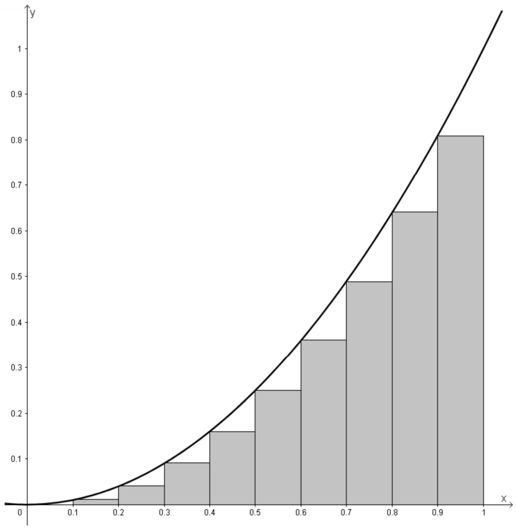
Sendo assim,

$$0,24 < S < 0,44.$$

Repetindo esse processo com partições de intervalos ainda menores, como o que ocorre quando dividimos em faixas de largura igual a $\frac{1}{10}$ e alturas iguais a $f(x_i)$ pela esquerda e pela direita dos subintervalos, obtém-se as estimativas de $S(f;P)$ e $s(f;P)$ mais próximas.

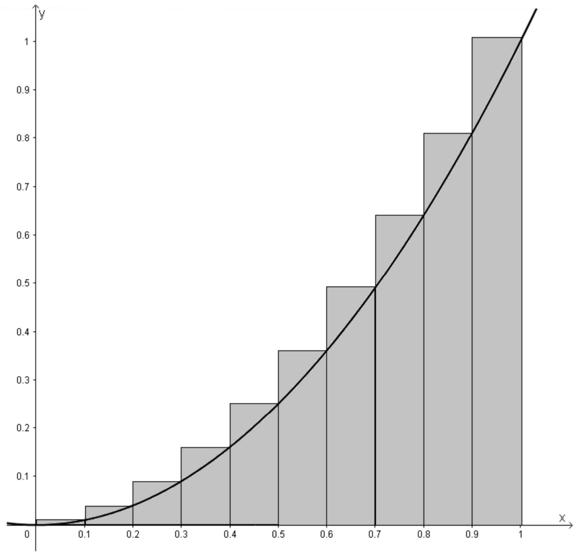
$$0,285 < S < 0,385.$$

Figura 3.4: Soma por falta



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Figura 3.5: Soma por excesso



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Podemos dizer que o valor de S, de maneira mais precisa que no início do problema (entre 0 e 1), está no intervalo real mais refinado 0,285 e 0,385. Para estimativas com números cada vez maiores de subintervalos, isto é, para faixas de largura cada vez menor em cada subintervalo, essa estimativa é cada vez mais precisa pois os valores da diferença $|S(f;P) - s(f;P)|$ serão ϵ cada vez menores.

Evidentemente os valores da Tabela 3.1 foram obtidos com auxílio de recursos compu-

Tabela 3.1: Valores das somas superiores e inferiores de $f(x) = x^2$

n intervalos	$s(f;P)$	$S(f;P)$
20	0,30875	0,035875
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234	0,3434
100	0,32835	0,33835
1000	0,3328335	0,3338335

Fonte: Stewart, 2011.

tacionais, sendo o processo empírico muito trabalhoso. Fica claro também que à medida que n tende ao infinito, $|S(f;P) - s(f;P)|$ tende a zero, ficando cada vez mais próximo do valor real da área de S.

Vimos no Teorema 2.3.1 (iii) que uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe uma partição P_ϵ do intervalo $[a, b]$ tal que

$$S(f;P_\epsilon) - s(f;P_\epsilon) < \epsilon.$$

Vejamos um exemplo de função limitada que não é integrável segundo o critérios de integrabilidade de Riemann.

Exemplo 8. *A função de Dirichlet.*

Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \notin \mathbb{Q} \\ 1 \ se \ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Escolhida uma partição $P = 0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = 1$ *do intervalo* $[0, 1]$*, em todos os intervalos* $[x_i, x_{i+1}]$ *dessa partição teremos números racionais e irracionais.*

Portanto, para um i *tal que* $1 < i < n$*, teremos como menor valor* $m_i = 0$ *e maior valor* $M_i = 1$*, de forma que*

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i) = 0$$

e

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i) = 1.$$

Logo, verifica-se que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1} - x_i] M_i \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1} - x_i] m_i$$

e portanto

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_i f(c_i)\Delta x_i$$

não existe e f é não integrável. Isso ocorre pois mesmo sendo uma função limitada, f é descontínua em todos os pontos de seu domínio.

Teorema 3.0.1. *Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Se f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, segue da Proposição 1 que f é uniformemente contínua.

Logo, dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$.

Tomando $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\frac{b-a}{n} < \delta$, encontramos uma partição P com $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ através de pontos da forma $t_i = a+i(\frac{b-a}{n})$, com $i = 0, 1, 2, 3 \ldots, n$.

Com isso, verificamos que a oscilação ω_i de f em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ é sempre menor do que ou igual a $\frac{\epsilon}{b-a}$. Logo, $\sum_{i=0}^{n} \omega_i(t_i - t_{i-1}) \leq \epsilon$, o que garante que f é integrável. ■

Encontrar o valor de uma integral definida por meio de limite é um processo trabalhoso. Uma maneira mais fácil de encontrar o limite é usar o Teorema Fundamental do Cálculo, que consiste em encontrar uma primitiva F para uma função integrável f. Considera-se que Isaac Barrow (1630-1677) foi o primeiro a demonstrar esse importante teorema em sua obra *Lectiones*, estabelecendo de maneira plena a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral.

Essa função primitiva é da forma $F(x) + k$ e, sendo k uma constante, dizemos que $y = F(x) + k$ é uma família de primitivas de f em I. Para representar essa família de funções definidas no intervalo I usamos a notação

$$\int f(x)dx = F(x) + k.$$

O domínio de f em $\int f(x)dx$ deverá ser sempre um intervalo, ainda que implícito.

Teorema 3.0.2 (Teorema Fundamental do Cálculo - TFC)**.** *Se f é uma função integrável em $[a,b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração do TFC. Suponha agora que f é integrável em $[a,b]$ e ainda, que admita uma função F neste intervalo, a qual chamaremos de primitiva de f em $[a,b]$, de maneira que $F'(x) = f(x)$ em $[a,b]$. Para uma partição $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ desse intervalo temos

$$\sum_{i=1}^{n}[F(x_{i+1}) - F(x_i)] = F(b) - F(a)$$

e decorre do Teorema 1.6.1 (TVM), para uma escolha conveniente de um c_i do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, que

$$\sum_{i=1}^{n} F'(c_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

Decorre que se em cada partição P de $[a,b]$ os valores c_i forem escolhidos da mesma maneira como acima, teremos

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i} f(c_i)\Delta x_i = F(b) - F(a)$$

e

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

■

Retomemos por exemplo, as aproximações para a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ pela perspectiva do TFC.

Exemplo 9. *Vamos estimar a área S sob a parábola $y = x^2$ no intervalo $[0,1]$.*

Sabendo que o limite do somatório das áreas de partições P do intervalo $[0,1]$ pode ser representado pela integral definida $\int_0^1 f(x)dx$, podemos encontrar uma primitiva $F(x)$ para $f(x)$ de forma que $F'(x) = f(x)$.

Visto que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ implica que $F'(x) = x^2$, podemos afirmar que $F'(x) = f(x) = x^2$. Portanto, uma primitiva para f é a função $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$.

Escolhendo convenientemente $k = 0$, teremos

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 d(x) &= \left.\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{3} - 0 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Observando o resultado do Exemplo 7, podemos verificar que as aproximações de área utilizando partições de um número cada vez maior de intervalos, ou seja, com um número de partições tendendo ao infinito e normas cada vez mais próximas de zero, é um método válido pois o limite tende ao valor encontrado por meio do Teorema Fundamental do Cálculo.

Outra observação relevante é que nem toda função tem uma primitiva, isto é, o Teorema Fundamental do Cálculo nem sempre é aplicável e calcular a integral definida por meio de limites, em grande parte dos casos é algo inviável.

O fato de ter em seu domínio pontos de descontinuidade não descaracteriza a integrabilidade de uma função, desde que esse número de pontos seja finito.

Proposição 2. *1. Se f for contínua e $[a,b]$, ou ainda se f tiver um número finito de descontinuidades, então f é integrável em $[a,b]$, ou seja, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.*

2. *Se tivermos duas funções f e g integráveis em um mesmo intervalo $[a,b]$, por exemplo, tais que para apenas um número finito de pontos ocorra $f(x) \neq g(x)$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

3. *Sejam dados uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e um número real $c \in (a,b)$. Se as restrições de f aos intervalos $[a,c]$ e $[c,b]$ são funções integráveis, então f também é integrável, com*

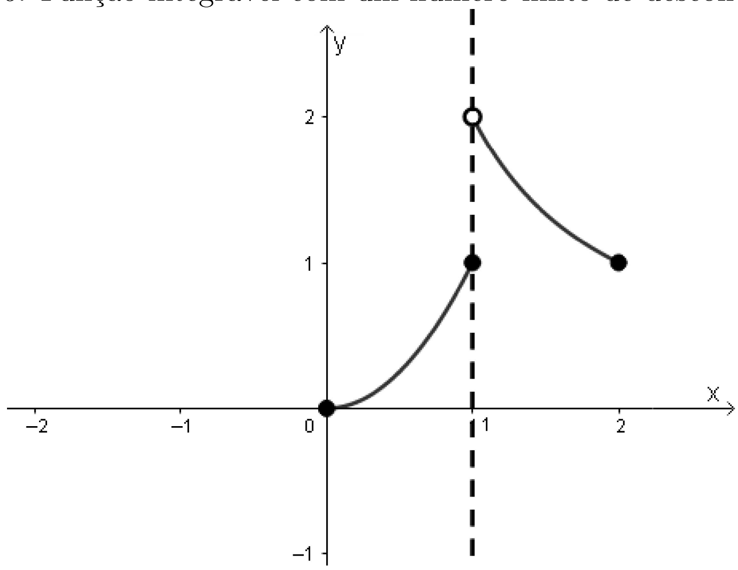
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Daremos a seguir uma ilustração de como podemos utilizar este resultado.

Exemplo 10. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ se \ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2}{x} \ se \ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Figura 3.6: Função integrável com um número finito de descontinuidades



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

A função f é limitada no intervalo $[0,2]$ e descontínua apenas em $x = 1$. Diante disso *é possível integrar essa função da seguinte forma*

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$$

Em $[0,1]$, $f(x) = x^2$ *logo,*

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Já em $[1,2]$, f *e* g *divergem apenas em* $x = 1$, *então*

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2ln2$$

Portanto, f *é integrável no intervalo* $[0,2]$ *e sua integral é dada por*

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{3} + 2ln2.$$

Capítulo 4

Soma de Riemann: uma proposta para o ensino médio

O propósito deste capítulo é apresentar uma sugestão para calcular área sob gráfico de uma função por meio da soma de Riemann. Para isto usaremos as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, as quais possuem um termo geral $S(n)$ para as somas parciais da área de n retângulos que aproximam da área sob o gráfico da função.

4.1 A função $f(x) = x^2$

Vimos no Exemplo 7 que a área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 1]$ foi obtida através de aproximações de áreas de regiões retangulares de bases $\frac{1}{n}$ e as respectivas alturas como pontos de $f(x) = x^2$ pela esquerda e pela direita, ou seja, nos pontos $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, ..., \frac{n}{n}$ sendo iguais a $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \left(\frac{3}{n}\right)^2, ..., \left(\frac{n}{n}\right)^2$. Assim, temos por exemplo

$$S(f; P) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$S(f; P) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2). \tag{4.1}$$

Pelo método da indução, é possível mostrar que $(1^2+2^2+3^2+...+n^2)$ é equivalente a

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Seja $P(n) = (1^2+2^2+3^2+...+n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, então:
(i) $P(1) = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2$;

(ii) Supondo $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, para este valor de n temos

$$(1^2+2^2+3^2+...+n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tomando o próximo termo da sequência de quadrados e acrescentando-o a ambos os membros da igualdade, obtém-se

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Agora manipulando a igualdade de modo que o segundo membro,

$$\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6},$$

se torne equivalente a

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)(6n+6)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita $P(n) = (1^2+2^2+3^2+...+n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ e, retomando a Equação (4.1),

$$\begin{aligned} S(f;P) &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}. \end{aligned}$$

Então essa expressão pode ser tomada como a soma das áreas dos retângulos aproximantes da partição P. Vale destacar que a expressão de $S(f;P)$ depende apenas de n, e por isso denota-se por $S(n)$, que representa a soma dos retângulos que aproximam a área sob o gráfico em função de n. Para determinar a área sob o gráfico, basta calcular o limite $S(n)$ quando n tende ao infinito. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6} \times 1 \times 2 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Para o limite acima é necessário que o professor forneça uma noção intuitiva para o limite

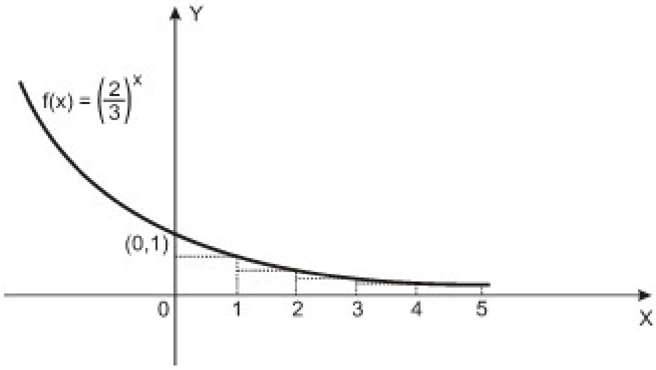
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Isto pode ser feito atribuindo valores para n e observando que $1/n$ tende a zero, à medida que os valores de n aumentam.

Vale lembrar que a aproximação através do limite de uma soma é amplamente trabalhada no ensino médio quando são apresentadas as recorrências lineares na forma de progressões geométricas ou exponenciais decrescentes. Nas progressões geométricas em que $0 < q < 1$, por exemplo, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n tende ao infinito, ou seja, q^n torna-se tão próximo de zero à medida em que n torna-se suficientemente grande, isto é, $\lim_{n\to\infty} S(n) = \frac{a_1}{1-q}$.

Exemplo 11. *Na Figura 4.1, temos parte do gráfico da função* $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ *e uma sequência infinita de retângulos associados a esse gráfico.*

Figura 4.1: Gráfico de $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ dividido em partições de largura 1 e altura $(\frac{2}{3})^x$.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Qual é o valor da soma das áreas de todos os retângulos desta sequência infinita em unidade de área ?

Como a medida da base de cada um dos retângulos é igual a 1, segue que a soma pedida é dada pela soma $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots$*, ou seja,*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S(n) &= \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots \\
&= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \\
&= 2\ u.a.
\end{aligned}$$

De forma alguma busca-se com esse exemplo, dizer que uma soma de Riemann é uma progressão geométrica mas sim trazer essa ideia para as partições de um intervalo real que cobrem a região sob uma curva de f, pois quanto mais refinada esta for e menor a sua norma, a soma desses subintervalos converge para a medida da área de $\Re = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$, à medida em que a largura dos retângulos que cobrem a região se torna cada vez menor.

Ainda com relação ao exemplo da $f(x) = x^2$, podemos observar por meio da Tabela 3.1 que quanto maior o valor de n, isto é, quanto mais pontos tiver mais refinada será essa partição, assim $s(f;P)$ e $S(f;P)$ tornam-se aproximações cada vez melhores para a área S. Usando o limite para essas somas, definimos a área dessa região como o limite das somas das áreas dos retângulos aproximantes

$$S = \lim_{n\to\infty} s(f;P) = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \frac{1}{3}.$$

4.2 A função $f(x) = x^3$

De forma análoga a da função$f(x) = x^2$, podemos estimar a área sob a curva de $f(x) = x^3$ no intervalo $[0,1]$, através de partições P em regiões retangulares de larguras cada vez menores e iguais a $\frac{1}{n}$, e respectivas alturas $\left(\frac{1}{n}\right)^3, \left(\frac{2}{n}\right)^3, \left(\frac{3}{n}\right)^3, ..., \left(\frac{n}{n}\right)^3$. Logo,

$$S(f;P) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^3 + ... + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3$$

e

$$S(f;P) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^3} \times (1^3 + 2^3 + ... + n^3). \tag{4.2}$$

Tratando particularmente do somatório $(1^3 + 2^3 + ... + n^3)$, podemos verificar que

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3+5 &= 2^3 \\ 7+9+11 &= 3^3 \\ 13+15+17+19 &= 4^3, \end{aligned}$$

isto é, se a soma dos termos de uma linha k desse triângulo equivale a k^3, então $(1^3 + 2^3 + ... + n^3)$ equivale à soma das n primeiras linhas do triângulo acima.

Neste triângulo também nota-se que a sequência das linhas é a sequência dos números ímpares, que é uma progressão aritmética de razão 2. Sendo assim, a soma das linhas nada mais é que a soma dos termos dessa progressão aritmética.

Se em cada linha n há n elementos, o total K de elementos das n primeiras linhas será dado por $K = \frac{(1+n)n}{2}$, e utilizando a relação $S = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$ para a soma e $a_n = a_1 + (n-1)r$

para um termo geral dessa PA, encontramos o último termo da $n - \acute{e}sima$ linha que é igual a $n(n+1)-1$. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \frac{(1+n(n+1)-1)\times K}{2} \\ &= \frac{(n(n+1))}{2}\times\frac{(n(n+1))}{2} \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por outro lado,

$$(1+2+3+...+n) = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.4}$$

Portanto, ao substituirmos a Equação (4.4) em (4.3), obtemos a identidade

$$(1+2+3+...+n)^2 = (1^3+2^3+...+n^3).$$

Retomando a Equação (4.2)

$$\begin{aligned} S(f;P) &= \frac{1}{n^4}(1+2+3+...+n)^2 \\ &= \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Fazendo o limite de S, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2+3+...+n)^2 \\ &= \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}(n+1)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo, a estimativa da área para o intervalo pedido é dado por

$$A = \lim_{n\to\infty} S = \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4}.$$

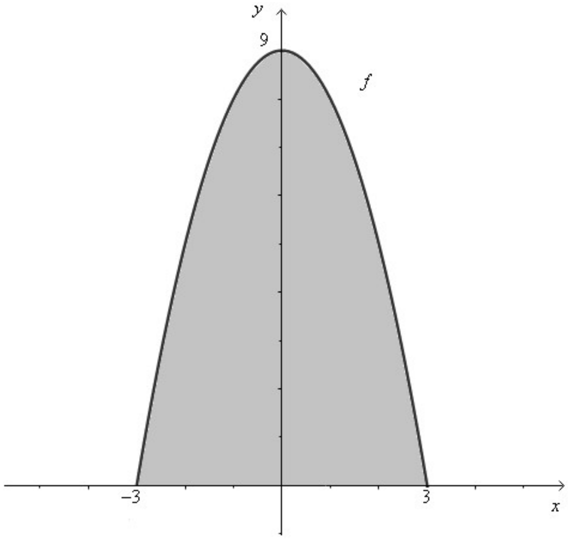
4.3 Aplicação do ENEM

Como exemplo prático de como a integração pode ser útil ao aluno do ensino médio, temos também a seguinte questão do Exame Nacional do Ensino Médio que pode ser resolvida na sugestão de uma função quadrática ou de maneira mais objetiva usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 12. *Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:* $y = 9 - x^2$*, sendo* x *e* y *medidos em metros.*

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

Figura 4.2: Modelo matemático da tampa do túnel.

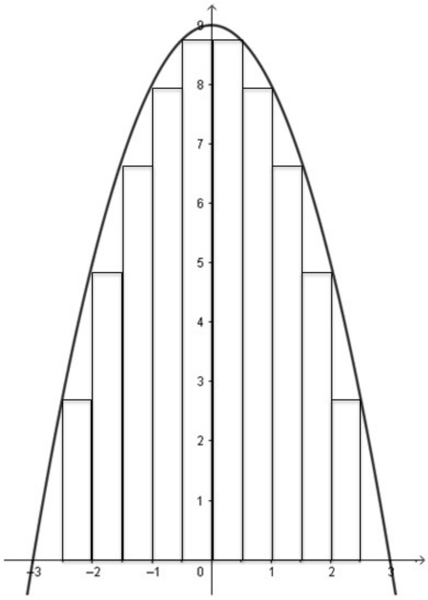


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Utilizando uma partição P de $y = 9 - x^2$, em intervalos de amplitude $\frac{1}{2}$, o somatório das áreas dos retângulos aproximantes da área da região sob a função $f(x) \geq 0$, como na Figura 4.3, pela falta é dado por:

$$\begin{aligned} s(f;P) &= \frac{1}{2}\left(9-\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(9-\left(-2\right)^2\right)+...+\frac{1}{2}\left(9-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(5\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right) \\ &= \frac{242}{8} \\ &= 30,25. \end{aligned}$$

Figura 4.3: Partições de $y = 9 - x^2$ por falta.

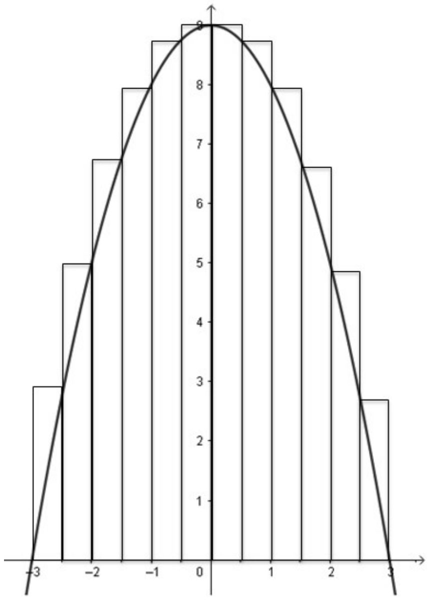


Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Tomando a partição P, agora pela cobertura da região da área de sob a função $f(x) \geq 0$ por excesso, como na Figura 4.4:

$$
\begin{aligned}
S(f;P) &= \frac{1}{2}\left(9-\left(-\frac{5}{2}\right)^2\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(9-\left(0\right)^2\right)+...+\frac{1}{2}\left(9-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(9\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)\\
&= \frac{322}{8}\\
&= 40,25.
\end{aligned}
$$

Figura 4.4: Partições de $y = 9 - x^2$ por excesso.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2019.

Logo, temos que a área estimada da tampa do túnel está no intervalo

$$30,25 < S < 40,25.$$

Refinando a partição P, obtemos uma partição Q de forma que os intervalos possuam amplitude de $\frac{1}{5}$, e a estimativa da área pedida através da soma por falta da partição Q é:

$$\begin{aligned}
s(f;P) &= \frac{1}{5}\left(9-\left(-\frac{14}{5}\right)^2\right)+\frac{1}{5}\left(9-\left(-\frac{13}{5}\right)^2\right)+...+\frac{1}{5}\left(9-\left(\frac{14}{5}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{29}{25}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{56}{25}\right)+...+\frac{1}{5}\left(\frac{29}{25}\right)\\
&= \frac{4270}{125}\\
&= 34,16.
\end{aligned}$$

Já a estimativa da área pedida através da soma por excesso da partição Q fica:

$$\begin{aligned}
S(f;P) &= \frac{1}{5}\left(9-\left(-\frac{14}{5}\right)^2\right)+\ldots+\frac{1}{5}\left(9-\left(0\right)^2\right)+...+\frac{1}{5}\left(9-\left(\frac{14}{5}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{29}{25}\right)+\ldots+\frac{1}{5}\left(9\right)+...+\frac{1}{5}\left(\frac{29}{25}\right)\\
&= \frac{4720}{125}\\
&= 37,76.
\end{aligned}$$

Logo, podemos afirmar que a estimativa da área da tampa do túnel, de maneira mais precisa, encontra-se no intervalo

$$34,16 < S < 37,76.$$

De fato, de maneira mais objetiva e avançada, pode-se fazer uso do Teorema Fundamental do Cálculo para estimar a área dessa região, através da integral definida no intervalo $[-3,3]$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{3}(9-x^2)dx\\
&= 9x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-3}^{3}\\
&= 27-9-(-27+9)\\
&= 36\ m^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a área em questão é de $36m^2$.

Claramente não é toda função em que esse procedimento é viável, por isso a importância do Teorema Fundamental do Cálculo. Este é o principal elo de ligação entre o Cálculo Integral e o Diferencial e ambos são imprescindíveis na interpretação e modelagem matemática de fenômenos físicos, como o trabalho.

Os exemplos e aplicações a seguir encontram-se em Flemming (2006).

4.4 Trabalho

A integral definida não está somente relacionada à área de uma região sob ou entre curvas, na Física podemos encontrar outras aplicações para esse conceito. Ao aplicar-se uma força F a um objeto, dependendo do tipo de movimento (empurrar ou puxar), a intensidade dessa força pode ser variável, isto é, em pontos distintos do movimento a força pode variar consideravelmente em função do atrito ou outros fatores.

O trabalho W realizado por uma força F a um objeto, faz com que este se desloque a uma determinada distância d na direção da força. Caso essa força seja constante, o trabalho ficará definido como o produto $W = F \times d$. Já se essa força varia com o movimento, o trabalho realizado por ela é determinado pela integral definida.

Supondo que o movimento de um objeto seja realizado sobre o eixo das abscissas, estando sujeito a uma força variável F, sendo $F = F(x)$ uma função contínua em $[a, b]$. Para definir o trabalho que uma força F realiza sobre um objeto em deslocamento no intervalo $[a, b]$, admitiremos uma partição P desse intervalo tal que $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$.

Seja c_i um valor do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta x_i = [x_i - x_{i-1}]$, então a força em um ponto c_i é o valor de $F(c_i)$. Ao passo em que Δx_i se torna cada vez menor, como F é contínua, sua variação é muito pequena em $[x_{i-1}, x_i]$. Então, a aproximação do trabalho realizado pela força $F = F(x)$ sobre o objeto quando este se desloca em um desses intervalos é dada por $W_i = F(c_i)\Delta x_i$.

Em outros termos, quanto menor Δx_i mais $F(c_i)\Delta x_i$ se aproxima do trabalho realizado pela força sobre o objeto no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Logo, a aproximação do trabalho realizado por essa força quando o objeto se desloca de a até b é $\sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$. Como visto, esse somatório é uma soma de Riemann e a aproximação será cada vez mais precisa à medida em que $\|P\|$ da partição P se torne menor e, W fica definido como o limite desse somatório, conduzindo à integral definida.

$$W = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_i F(c_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)dx. \tag{4.5}$$

A unidade de medida do Trabalho é o $Newton/metro$ ou $Joule$, sendo suas notações dadas respectivamente por Nm ou J.

Exemplo 13. *Um bloco apoiado em uma superfície horizontal é puxado utilizando uma força de* $300+25senx$ *Newtons sobre ela, deslocando-se* x *metros. Qual deve ser o trabalho para deslocar esse bloco por* 10 *metros?*

Usando a Equação (4.5) temos

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{10} (300 + 25senx)dx \\
&= (300 + 25cosx)\Big]_0^{10} \\
&= 300 \times 10 - 25cos10 - 300 \times 0 + 25cos0 \\
&= 3000 - 24,62 + 25 \\
&= 3000,38\ Nm\ (Newtons \times metro = Joules).
\end{aligned}$$

Como nesse exemplo surge uma função trigonométrica, pode-se fazer uso de uma tabela de integrais trigonométricas apenas para direcionar o aluno para a conclusão, deixando que o mesmo busque aprofundamento posterior.

4.5 Lei de Hooke

Outro exemplo de análise física da força é o trabalho resultante da distensão e compressão de uma mola. Para distender uma mola por x metros além de seu comprimento natural por uma força $F(x)$, vale a relação $F(x) = kx$, onde k é a constante da mola.

Colocando uma mola sobre o eixo x com a origem no ponto onde começará a deformação, o trabalho realizado para estendê-la de x_1 até x_2 é dado pela integral definida

$$W = \int_{x_1}^{x_2} kxdx,$$

sendo válida também no caso de compressão.

Exemplo 14. *Uma mola tem um comprimento de 0,8m. Uma força de 4N é exigida para conservar a mola esticada em 1 m. Calcular o trabalho realizado para que a mola se estenda de seu comprimento natural até 1,2 m.*

Localizando a mola sobre o eixo x, devemos inicialmente determinar a contante da mola e pela lei de Hooke temos $F(x) = kx$. Como $F(1) = 4$, então

$$\begin{aligned} F(1) &= 4 \\ 1k &= 4 \\ k &= 4. \end{aligned}$$

Logo $F(x) = 4x$. Portanto, o trabalho será dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{0,4} 4xdx \\ &= 4\frac{x^2}{2}\Big]_0^{0,4} \\ &= 2(0,4)^2 \\ &= 0,32\ Joules. \end{aligned}$$

Exemplo 15. *Um tanque tem a forma de um cilindro circular reto de raio igual a 4m e altura 8m. Supondo que este esteja cheio de água e que o peso da água por m^3 é de 9807 Newtons, achar o trabalho realizado para esvaziar o tanque pela parte superior, considerando que a água seja deslocada por meio de um êmbolo, partindo da base do tanque.*

Como a força elevatória é igual ao peso da água sobre o êmbolo localizado a y metros do fundo do tanque, o volume acima do êmbolo será dado por $\pi r^2(8-y)$. Logo,

$$F(y) = \pi r^2(8-y)9807$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} F(y) &= \pi r^2(8-y)9807 \\ &= \pi 4^2(8-y)9807 \\ &= 156912\pi(8-y). \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho necessário para esvaziar esse tanque será

$$\begin{aligned} W &= \int_0^8 156912\pi(8-y)dy \\ &= 156912\pi \int_0^8 (8-y)dy \\ &= 156912\pi\left(8y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_0^8 \\ &= 156912\pi\left(64 - \frac{8^2}{2}\right) \\ &= 5021184\ \pi Joules. \end{aligned}$$

4.6 Conclusão

Trabalhar a Matemática desde a Educação Básica até o Ensino Superior é um desafio, principalmente no que se refere às demonstrações e resultados abstratos, por vezes ignorados, mas que fazem parte essencial da beleza dessa ciência fundamental à construção e justificação de ideias das Ciências em geral.

Dessa forma, mostrar o encanto e a dimensão que a Matemática tem em um mundo cada vez mais tecnológico é de suma importância para que esta continue a evoluir.

Nesse trabalho buscou-se apresentar de maneira geral, uma ferramenta muito usada de forma mecânica e ainda sim pouco compreendida em sua aplicabilidade.

A apresentação dos princípios fundamentais do Cálculo de maneira progressiva ainda no Ensino Médio, ou seja, limites, derivadas e por fim algumas integrais através de somas de Riemann (e Teorema Fundamental do Cálculo através de primitivas polinomiais, em casos de notável avanço e interesse por parte dos alunos), contribui para o desenvolvimento e melhor compreensão do comportamento de funções, recorrências lineares (progressões), além de diversas situações da Física que também podem ser simplificadas com o auxílio das derivadas polinomiais.

A vivência do autor nessa aplicação no Ensino Médio mostra-se gratificante e de retorno mais que satisfatório quanto aos egressos que vivenciam sua incursão no Ensino Superior.

Dessa forma, este trabalho buscou fomentar o raciocínio dedutivo e propor um melhor entendimento a respeito das bases que precedem as técnicas de integração.

Uma aplicação tão minuciosa proporciona ao aluno a possibilidade ao desafio, isto é, de se aventurar a descobertas e busca de resultados mais avançados.

Referências

[1] SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com Geometria Analítica**. ed McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1983.

[2] GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de Cálculo**. ed LTC, 2001.

[3] LIMA,E.L. **Análise Real volume 1, Funções de uma variável** IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[4] STEWART, J. **Cálculo volume I**. ed Cengage Learning, 2013. São Paulo, 2011.

[5] EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. editora da Unicamp, Campinas, 2004.

[6] FLEMMING, D.M. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. ed Pearson Prentice Hall, 2006.