Universidade
Estadual de Londrina

Epaminondas Alves dos Santos

O Princípio das Casas de Pombos: Uma proposta de ação pedagógica usando a metodologia da Resolução de Problemas

Londrina

2019

Epaminondas Alves dos Santos

O Princípio das Casas de Pombos: Uma proposta de ação pedagógica usando a metodologia da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Universidade Estadual de Londrina – UEL

Mestrado Profissional em Matemática (Profmat - SBM)

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina

2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

S237o Santos, Epaminondas Alves dos.

O Princípio das Casas de Pombos : Uma proposta de ação pedagógica usando a metodologia da Resolução de Problemas / Epaminondas Alves dos Santos. - Londrina, 2019.

54 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2019.

Inclui bibliografia.

1. Princípio das Casas de Pombos - Tese. 2. Resolução de Problemas - Tese. 3. Metodologias de Ensino - Tese. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

Epaminondas Alves dos Santos

O Princípio das Casas de Pombos: Uma proposta de ação pedagógica usando a metodologia da Resolução de Problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Orientador

Prof. Dra. Ana Márcia F. T. de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dra. Bárbara Nivalda P. A. S. Robim
Universidade Estadual do Norte do Paraná

Londrina
2019

Dedico este trabalho a todos os professores que me influenciaram na minha trajetória e, de modo especial, ao professor Túlio, meu orientador, com quem compartilhei minhas dúvidas e angústias na produção desta dissertação.

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus que tão grandioso que me permitiu o dom da vida, da sabedoria e que sempre guia meus passos.

Agradeço também à minha mãe, os meus irmãos e minhas filhas que estiveram sempre ao meu lado, me incentivando e me apoiando em toda essa caminhada.

Um agradecimento especial à minha esposa Luzia que se fez presente em todo o decorrer desse trabalho, desde o momento da admissão ao programa, passando por todas as fases de provas e qualificação até a entrega e apresentação deste trabalho.

Ela sempre foi compreensiva e me deu forças em todos os momentos que tanto necessitei. Agradeço também aos mentores e gestores do programa de mestrado do Profmat-SBM pela oportunidade de um crescimento profissional ímpar e que, sem dúvida, gerará ótimos resultados para a educação brasileira.

Enfim, agradeço a todo o corpo docente da Universidade Estadual de Londrina e, em particular, ao meu orientador, o professor Dr. Túlio Oliveira de Carvalho, por ter direcionado meu trabalho e que contribuiu de forma fundamental para sua conclusão.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes."
(Martin Luther King Jr.)

Resumo

Este trabalho tem como objetivo propor no âmbito do ensino fundamental e médio a inserção do tema matemático relacionado ao Princípio das Casas de Pombos (PCP) de Dirichlet, com a utilização da metodologia da Resolução de Problemas. Essa inserção se mostra vantajosa, visto se tratar de um conteúdo intuitivo e flexível, cujos conteúdos podem perpassar os vários níveis de ensino e propiciar aplicações em diversas áreas da Matemática, tais como a Análise Combinatória e a Teoria dos Números. No ensino fundamental o PCP pode ser utilizado como coadjuvante na aprendizagem dos conceitos de incógnita e função, entre outros. A opção pela metodologia da Resolução de Problemas deveu-se ao fato de acreditarmos que a mesma propicia ao aluno um papel de protagonismo na solução de problemas, o que não ocorre, em geral, no ensino tradicional. Os problemas propostos partem de uma reflexão sobre os conteúdos estruturantes da educação básica, considerando não só a negligência aos problemas de contagem e combinatória na aula de matemática, mas principalmente no aspecto de alguns dos livros didáticos conduzirem o professor à metodologia tradicional expositiva, com conteúdos estanques, tirando do aluno o papel de gerador de conhecimento. O caráter instigante da metodologia da Resolução de Problemas pode trazer certas dificuldade para aplicação, num primeiro momento, mas apresenta resultados compensadores ao final. Nessa pesquisa apresentamos uma lista de problemas com indicações de como desenvolvê-los em sala de aula a partir da metodologia da Resolução de Problemas e o resultado de uma aplicação preliminar feita com 20 alunos de um curso de formação de docentes.

Palavras-chaves: Princípio das Casas de Pombos, Resolução de Problemas, Metodologias de Ensino.

Abstract

This work aims to propose in the context of elementary and secondary education the insertion of the mathematical theme related to the Dirichlet's Pigeonhole Principle, with the use of Problems Solving methodology. This insertion shows advantageous, since it is an intuitive and flexible content, permeating the various levels of education and providing applications in various parts of mathematics, such as the combinatorics and the theory of numbers. In elementary school, the Pigeonhole Principle can be used as an support in learning the concepts of functions and unknowns, among others. The option for the Problems Solving methodology was due to the fact that we believe it provides the student with a role of protagonism in solving problems, which does not usually occur in traditional teaching. The proposed problems originate from a reflection on the structuring contents of basic education, considering not only the neglect of the problem of counting and combinatorics in the mathematics class, but mainly in the aspect of the textbook directing the Teacher to the traditional expositive methodology, with stagnant content, taking the role of the knowledge generator from the student. The instigating character of the problem solving methodology may bring some difficulty for application at first, but it presents rewarding results at the end. In this research we present a list of problems with indications of how to develop them in the classroom from the Problem Solving methodology and the result of a preliminary application made with 20 students of a teacher training course.

Key-words: Pigeonhole Principle, Problem Solving, Methodology.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Figura Ilustrativa do PCP 14
Figura 2 – Dirichlet 15
Figura 3 – Os estágios da Resolução de Problemas segundo Pólya 26
Figura 4 – Ilustração da solução do Exemplo 3.1 32
Figura 5 – Ilustração da solução do Exemplo 3.3 33
Figura 6 – Ilustração da solução do Exemplo 3.4 34
Figura 7 – Ilustração da solução do Exemplo 3.5 35
Figura 8 – Ilustração da solução do Exemplo 3.8 36

Lista de abreviaturas e siglas

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
PCP	Princípio das Casas de Pombos
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

Sumário

1 Introdução **12**
2 O Princípio das Casas dos Pombos **14**
2.1 Recortes da Biografia de Dirichlet 15
3 Referenciais Teóricos **18**
3.1 Diferenciando problemas matemáticos “convencionais” e “não-convencionais” 18
3.2 A metodologia da Resolução de Problemas 20
3.3 A Resolução de Problemas na Perspectiva de Pólya 21
3.4 Uma análise do método de Pólya em uma aplicação 25
4 Coletânea de Problemas e Sugestão de Encaminhamento em Sala de Aula 31
4.1 A Relação entre o PCP e outras Áreas da Matemática – Exemplos 31
4.2 Sugestões de Fontes para Aprofundamento e Aplicações 40
5 Familiarizando os Alunos com Problemas e Soluções pelo Princípio das Casas de Pombos **42**
6 Considerações Finais **51**

Referências **53**

1 Introdução

Este trabalho apresenta o Princípio das Casas dos Pombos (PCP), com vistas a enfatizar características que o tornam particularmente útil no processo de ensino-aprendizagem em Matemática. Também conhecido por Princípio de Dirichlet ou Princípio das Gavetas, esse princípio tem como enunciado: “se $N+1$ pombos devem ocupar N casas, pelo menos uma das casas será ocupada por dois ou mais pombos.”

Este é um teorema do tipo existencial, ao garantir que dois elementos de certo conjunto compartilham uma propriedade. Um exemplo em outro contexto é o que assegura a densidade dos números racionais em $\mathbb{R}$, e cuja demonstração pode ser vista em (LIMA, 1997, p. 19):

Teorema. *Dados dois números reais a e b com $a < b$ existe sempre um número racional r tal que $a < r < b$.*

A ideia geral de uma aplicação do PCP consiste em identificar um conjunto de propriedades, que serão as *casas*, e um conjunto de elementos, que serão os *pombos*, de modo que haja uma quantidade menor de propriedades do que de elementos.

Esse princípio foi utilizado pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet ao resolver um problema sobre aproximações de um número irracional por uma sequência de números racionais em 1854, aparentemente pela primeira vez (veja o Exemplo 3.17, Seção 3.1). Apesar de se apoiar numa ideia bastante elementar e intuitiva, o PCP apresenta uma vasta gama de aplicações em problemas com variados níveis de complexidade, além de envolver diversas áreas da Matemática tais como Lógica Matemática, Análise Combinatória, Sequências, Geometria, Funções, entre outras.

Defendemos nesse trabalho que a adoção da metodologia da Resolução de Problemas na concepção de Pólya pode ser uma experiência profícua para se trabalhar o PCP no âmbito do ensino fundamental e médio. A *forma de pensar* que esta metodologia procura induzir tem fundamento na heurística moderna que segundo (PÓLYA, 1977, p. 87) “é um ramo de estudo que procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais típicas desse processo que tenham utilidade”.

Mostramos, com exemplos, a aplicabilidade do Princípio das Casas de Pombos nos níveis do ensino fundamental e médio, apontando caminhos para que essa aplicação possa ser implementada por meio da metodologia da Resolução de Problemas. Trazemos ainda justificativa para a escolha metodológica, a saber, a simbiose entre um tópico matemático flexível, portanto adaptável a vários contextos, e uma metodologia que favorece o protagonismo do aluno. Cabe salientar, entretanto, que há diferentes perspectivas a respeito da metodologia chamada *Resolução de Problemas*, e não temos intenção de esgotar a discussão sobre seus encaminhamentos no ensino do PCP, mas encorajar outros professores a fazê-lo, apontando alguns caminhos possíveis.

O trabalho está estruturado em outros cinco capítulos com o seguinte teor: no Capítulo 2 apresentamos duas versões equivalentes do príncipio das casas dos pombos e apresentamos alguns fatos da biografia de Dirichlet. No Capítulo 3 trazemos os referenciais teóricos, discutindo sobre a formulação de problemas e as metodologias de resolução de problemas, focando posteriormente na perspectiva de Pólya. No Capítulo 4 tratamos de demonstrar o caráter flexível do PCP apresentando uma conjunto de problemas com soluções, classificados entre várias áreas da Matemática, além de uma seção com sugestões de fontes de materiais sobre o PCP para aplicações e aprofundamento. No Capítulo 5 é apresentado e discutido o resultado de um trabalho sobre o PCP realizado com uma turma de 20 alunos de nível secundário de uma escola do interior do Paraná. No Capítulo 6 apresentamos as considerações finais e perspectivas.

2 O Princípio das Casas dos Pombos

O Princípio das Casas de Pombos ou Princípio do Pombal consiste na afirmação de que se N pombos devem ser postos em M casas, e se $N > M$, então pelo menos uma casa irá conter mais de um pombo. Em linguagem de funções, isto quer dizer que se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então qualquer função de A em B não pode ser injetiva. Esse princípio é também conhecido como Teorema de Dirichlet ou Princípio das Gavetas de Dirichlet, pois supõe-se que o primeiro relato deste princípio tenha sido feito por Lejeune Dirichlet, um destacado matemático alemão, cujo nome completo é Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

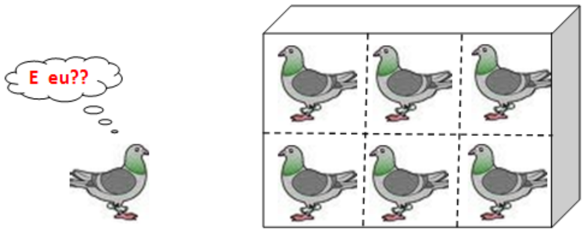


Figura 1 – Figura Ilustrativa do PCP (Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP)

O Princípio das Casas de Pombos é um exemplo de um argumento de cálculo de estimativas que pode ser aplicado a muitos problemas, inicialmente envolvendo contagens em conjuntos finitos, mas também incluindo aqueles que envolvem decomposições finitas de conjuntos infinitos. Embora se trate de uma evidência elementar, o princípio é útil para resolver problemas que, à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, deve-se identificar, na situação dada, quem faz o papel dos "pombos" e quem faz o papel das "casas". Aqui apresentamos as duas demonstrações aplicando conhecimentos de lógica matemática, no entanto, existem outras maneiras de demonstrações do PCP, como por exemplo, por indução finita. Portanto, a apresentação do PCP torna-se de um momento muito oportuno para se introduzir técnicas de demonstrações aprofundando conhecimentos de lógica e de propriedades dos números naturais.

O Princícipio das Casas de Pombos - a "versão simples"

Proposição 2.1. *Seja dado um pombal com N casas e suponha que haja M pombos querendo ocupá-las. Se $M > N$, então alguma casa deverá ser ocupada por mais de um pombo.*

Demonstração. A prova se faz por redução ao absurdo. Suponhamos que em cada casa não existisse mais do que um pombo, então ao contar todos os pombos contidos nas N casas não teríamos mais do que N pombos, contrariando a hipótese de haver $M > N$ pombos distribuídos nas N casas. □

O Princípio das Casas de Pombos - a "versão geral"

Proposição 2.2. *Se distribuirmos $Nk+1$ pombos em N casas, então alguma dessas casas conterá pelo menos $k+1$ pombos.*

Demonstração. Por absurdo, Suponhamos que em cada casa não exista mais do que k pombos, então, contando todos os pombos contidos nas N casas não teremos mais do que Nk pombos, contrariando a hipótese de termos $Nk+1$ pombos distribuídos nas N casas. □

2.1 Recortes da Biografia de Dirichlet

Com o objetivo de dar um embasamento histórico ao tema matemático que é o objeto de pesquisa desse trabalho, apresentamos uma breve síntese biográfica de seu autor, referenciando no tempo e no espaço, além das suas relações pessoais, os seus feitos mais importantes, que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. O texto desta seção foi extraído e adaptado com base em leituras das fontes: (WAGNER et al., 2015; ROBALO, 2009).

Em 13 de fevereiro de 1805 nascia em Düren, uma cidade ao leste da Alemanha, no seio de uma família de origem belga, Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Seu pai era o chefe dos correios da cidade. Desde a mais tenra idade Dirichlet já demonstrava grande inclinação pela Matemática, motivo que o levou a ingressar aos doze anos no Gymnasium de Düren onde permaneceu por dois anos, sendo considerado um aluno de destaque por seu comportamento e interesse nas aulas. Era um ávido leitor dos textos matemáticos da época, não medindo esforços para adquirir as obras.

Figura 2 – Dirichlet (Fonte: Mactutor)

Em seguida, seus pais decidiram transferi-lo para um colégio jesuíta em Colônia, onde teve Georg Simon Ohm como professor. Permaneceu lá por mais quatro anos até concluir o ensino básico. Descontente com a qualidade educacional alemã da época, aos dezesseis anos decidiu mudar-se pra Paris para estudar no Collège de France e na Faculté des Sciences.

Nessa época ele passou a ser assíduo frequentador de palestras com notáveis matemáticos, tais como Fourier, Legendre, Poisson, entre outros. Em 1825, Dirichlet voltou para a Alemanha e contribuiu para uma grande reforma do ensino, a qual fez com que esse se transformasse num dos melhores do mundo. Em 1828 ele começa a lecionar na Faculdade Militar de Berlim, cargo que ocupa até 1855 quando, vai pra Göttingen ocupar a posição que ficara vaga com a morte de Gauss.

Em 1831 ele casou-se com Rebecca Mendelssohn, neta do filósofo Moses Mendelssohn e irmã do compositor Felix Mendelsohn. As principais contribuições de Dirichlet para a Matemática deram-se na Teoria dos Números, tendo desenvolvido uma abordagem algébrica para essa teoria.

O seu primeiro trabalho importante que atraiu a atenção do meio matemático da época, rendendo-lhe notoriedade, foi uma demonstração de casos particulares do *Último Teorema de Fermat*:

Teorema 2.3. *Para n natural, $n > 2$, não existem inteiros x, y e z não nulos tais que $x^n + y^n = z^n$.*

Dirichlet provou esse teorema para $n = 5$ e algum tempo depois, para $n = 14$.

Realizou importantes estudos sobre condições de convergência de séries trigonométricas e as utilizou para representar funções arbitrárias, as quais foram mais tarde utilizadas por Fourier na resolução de equações diferenciais.

Dirichlet também é considerado o pai da moderna definição de função. A definição dada a seguir, extraída de (GIOVANNI; BONJORNO; GIOVANNI JR., 1994, p. 33) é um exemplo de interpretação dessa ideia.

Definição 2.4. Sendo A e B dois conjuntos não vazios e uma relação f de A em B, essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x do conjunto A está associado um e um só elemento y do conjunto B.

Ele a usou pela primeira vez em 1837, provocando um importante avanço no desenvolvimento da álgebra. Naquele mesmo ano ele provou um teorema que estabelecia uma relação entre os termos de uma certa família de progressões aritméticas e a sequência dos números primos, o *Teorema de Dirichlet*:

Teorema 2.5. *Sejam a_1, $b \in \mathbb{N}$ tais que $\text{mdc}(a_1,\ b) = 1$ então a progressão aritmética $a_n = a_1 + b \cdot (n-1)$ contém infinitos números primos.*

Em 1838 o matemático realizou um importante trabalho para a teoria analítica dos números introduzindo a série que leva seu nome.

Definição 2.6. Uma *série de Dirichlet* é uma série formal dada por $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ em que s e a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ são números naturais.

Outro importante resultado obtido por Dirichlet foi o teorema da aproximação racional de um número real.

Teorema 2.7. *Se α um número irracional, então existem infinitos números racionais $r = p/q$ tais que $|\alpha - r| < \frac{1}{q^2}$.*

Consta-se que, ao provar esse teorema, Dirichlet lançou mão pela primeira vez do Princípio das Casas de Pombos. Uma demonstração desse teorema é dada no Exemplo 3.17 na Seção 3.2 desse trabalho.

Dirichlet faleceu em Göttingen em 1859 aos 53 anos e sua obra foi compilada e publicada após a sua morte em 1863 juntamente com outros trabalhos em teoria dos números pelo matemático e colega Richard Dedekind sob o título de "*Aulas sobre Teoria dos Números*".

No próximo capítulo vamos iniciar uma análise mais crítica e aprofundada sobre a metodologia da Resolução de Problemas discorrendo sobre o contexto histórico da sua origem e suas características para, em seguida, demonstrar que ela pode ser uma opção viável de se trabalhar o tema do Princípio das Casas de Pombos.

3 Referenciais Teóricos

3.1 Diferenciando problemas matemáticos "convencionais" e "não-convencionais"

Nas últimas décadas, houve um desenvolvimento crescente de novas ideias sobre o processo de ensino-aprendizagem em Matemática advindas da área de pesquisa conhecida por Educação Matemática. Entre outros aspectos, essas ideias buscam refletir sobre as dificuldades de aprender Matemática pelas metodologias tradicionais, destacando certa necessidade de mudança nos papéis do aluno e do professor frente à resolução de problemas.

Identifica-se uma distinção preliminar entre problemas "convencionais" e "não-convencionais". Segundo Smole e Diniz (2001, p. 89),

> um problema tradicional ou convencional apresenta as seguintes características:
>
> • é apresentado por meio de frases, diagramas ou parágrafos curtos;
>
> • vem sempre após a apresentação de determinado conteúdo;
>
> • todos os dados de que o resolvedor precisa aparecem explicitamente no texto;
>
> • pode ser resolvido pela aplicação direta de um ou mais algoritmos;
>
> • tem como tarefa básica em sua resolução a identificação de quais operações são apropriadas para mostrar a solução e transformação das informações do problema em linguagem matemática;
>
> • é ponto fundamental a solução numericamente correta, a qual sempre existe e é única.

Os problemas convencionais são encontrados em abundância no livros didáticos e têm sua importância na fixação conteúdos matemáticos. Porém, em virtude da sua especificidade, o uso exclusivo de problemas convencionais pode incutir no aluno uma sensação de insegurança no enfrentamento de outros problemas em que haja a necessidade de interpretação. Por outro lado, o aluno pode chegar a uma solução sem que tenha compreendido o significado da mesma, uma vez que é treinado a usar regras e procedimentos automáticos.

Vejamos o que as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006 apregoa a respeito da utilização dos problemas convencionais na aula de Matemática:

> Isso não significa que os exercícios do tipo "calcule...", "resolva..." devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades, mas de forma alguma são suficientes para preparar os alunos tanto para que possam continuar aprendendo, como para que construam visões de mundo abrangentes ou, ainda, para que se realizem no mundo social ou do trabalho. (BRASIL, 2002, p. 113)

Um exemplo de problema tradicional pode ser dado quando, em uma aula, após definir a média aritmética de n números, demonstrar a sua fórmula e ilustrar com um exemplo de aplicação, o professor propõe o seguinte problema: "Calcule a média aritmética dos números 5, 4, 2 e 1". Nessa situação, o professor espera que o aluno se lembre da fórmula matemática e do exemplo dado, faça a substituição dos valores nessa fórmula e efetue os cálculos, chegando assim, à solução desejada, ou seja, $M_a = \frac{5+4+2+1}{4} = \frac{12}{4} = 3$.

Exercícios como esse podem não auxiliar que o aluno refleta sobre o significado de média aritmética. Não possibilitando a reflexão de que esse conteúdo matemático pode ser aplicado em situações do cotidiano, mas o transforma num mero processo de memorização de fórmulas e cálculos mecanizados sem sentido.

Em contrapartida, segundo Smole e Diniz (2001, p. 90),

> [...] a primeira característica da perspectiva metodológica da Resolução de Problemas é considerar como um problema toda e qualquer situação que permita alguma problematização. Essas situações podem ser atividades planejadas, jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não-convencionais e mesmo convencionais, desde que permitam o processo investigativo.

As questões e comandos de um problema não convencional são, em geral, mais abertas a fim de permitir ao aluno utilizar o seu conhecimento prévio e decidir que estratégias irá utilizar na busca de uma solução.

O mesmo exemplo da média aritmética pode ser explorado pelo professor de outra maneira. Se em determinada aula o professor traz doze balas, escolhe quatro alunos e dá cinco balas para o primeiro, quatro para o segundo, duas para o terceiro e uma para o quarto. Então ele em seguida pode propor as seguintes questões à turma:

1. Você achou justa a distribuição das balas? Justifique a sua resposta.
2. De que forma essa distribuição pode ser refeita levando em consideração a igualdade de condição dos contemplados?
3. Que operações terão que ser efetuadas para "desfazer" essa distribuição e fazer outra mais justa?
4. Nesse caso quantas balas cada um dos quatro alunos deverá receber?
5. É possível transferir a ideia desse problema para outras situações? Cite alguns exemplos.

Ao final, um leque de conceitos mais amplo terá sido abordado, *com o esforço de cálculo semelhante*. Por exemplo, espera-se que a operação de subtração seja utilizada no item 3, e ainda há conceitos intuitivos que associam *justiça* à média aritmética.

Situações-problema como essa podem parecer confusas para os alunos à primeira vista e de difícil realização, o que, em geral, faz uma boa parte dos professores recuarem e se renderem aos métodos tradicionais de ensino, pelo comodismo e simplicidade que esses proporcionam, ou ainda, pelo fato de terem sido ensinados dessa maneira. Porém, note-se que a metodologia aplicada nessa última atividade, dependendo da condução pelo professor, pode, de modo bem mais significativo, introduzir os conceitos matemáticos.

Parece-nos desejável que na introdução de um conceito matemático o professor tenha que tomar cuidado na escolha de um problema que permita um diálogo com os conhecimentos prévios dos discentes e busque, de modo gradativo, formalizá-lo.

Uma vez escolhido o tipo de problema adequado para cada nível de ensino e a metodologia a ser adotada, o professor deve ter em mente quais os objetivos que precisam ser alcançados nas atividades propostas. Dante (1991) apresenta sete objetivos que considera importantes ao ensinar por meio da Resolução de Problemas:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se desenvolver com as aplicações matemáticas;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

3.2 A metodologia da Resolução de Problemas

O ponto de partida deste trabalho vem da percepção consensual entre professores, pedagogos e estudiosos do assunto de que se faz necessário uma mudança de postura dos professores no que se refere à prática pedagógica. Esta mudança pode ser efetivada com a adoção, dentre outros recursos, de metodologias contemporâneas e eficientes no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Nas últimas décadas, inúmeros pesquisadores têm contribuído no campo das metodologias para a prática do ensino da Matemática, entre as quais podemos destacar a Modelagem Matemática, a Etnomatemática, a Resolução de Problemas, a Investigação Matemática, o uso das Novas Tecnologias e da História da Matemática no contexto da aula de Matemática, também citadas em Paraná (2018) que dá diretrizes para o ensino da Matemática na educação básica do Paraná.

Escolhemos a metodologia da Resolução de Problemas como alternativa viável para ser aplicada no contexto das ideias relacionadas ao Princípio das Casas de Pombos, pois acreditamos que essa metodologia é a mais flexível em termos de permitir ao professor uma melhor adequação do seu tempo didático na sua aplicação, podendo as indagações inerentes aos estágios da metodologia serem verbais e até dirigidas para o coletivo de uma sala de aula. Além disso, ela permite ao aluno um papel mais ativo frente à resolução de problemas.

Inicialmente, é preciso observar que o simples fato de resolver um problema não garante que se esteja trabalhando com a metodologia da resolução de problemas. É preciso ter em mente que para a pretendida apreensão de conhecimentos pelo estudante, no ambiente desta metodologia, vários fatores devem ser levados em consideração, começando pela concepção e caracterização de um problema, passando pelo enunciado do problema a ser trabalhado e a forma como serão feitos os questionamentos durante a sua efetiva realização pelo estudante.

Para uma melhor compreensão sobre a Resolução de Problemas, vejamos inicialmente uma definição de problema matemático.

Para Toledo (2006):

> [Um problema matemático refere-se a qualquer] situação em que devemos chegar a um objetivo em que não conhecemos o caminho a ser trilhado. De outra forma não seria um problema, mas sim a aplicação de conhecimentos previamente conhecidos.

A concepção de problema aqui referida difere da tradicional – essa distinção iremos explicitar mais adiante – exigindo do aluno uma certa posição de desconforto na abordagem inicial da resolução de um problema e de forma sutil, estabelece a relação intrínseca entre essa concepção de problema a capacidade deste em produzir conhecimento.

Podemos perceber aqui um olhar crítico aos problemas convencionais que, de forma exagerada, enfatizam o uso mecanizado de algoritmos e as fórmulas de resolução, em detrimento do "pensar" matemático. Em geral, problemas elaborados dentro dessa concepção são do tipo "lista de exercícios" e "siga o modelo", que servem apenas para fixação de algoritmos.

3.3 A Resolução de Problemas na Perspectiva de Pólya

A Resolução de Problemas é uma estratégia didático-metodológica plausível de ser adotada tanto no âmbito do ensino fundamental como do ensino médio, pois a mesma favorece o desenvolvimento intelectual do aluno permitindo uma postura mais pessoal e criativa diante da resolução de problemas que se lhe apresentam no seu dia a dia.

A forma de trabalhar com metodologia da Resolução de Problemas não é uniforme entre todos os pesquisadores da área. (SMOLE; DINIZ, 2001), por exemplo, partem de uma perspectiva mais ampla trabalhando as habilidades de leitura e escrita na resolução de problemas. Esta pode ser uma boa forma de se trabalhar a metodologia no nível do ensino básico pois o tempo didático disponível é maior e esse é um momento de fundamental importância na construção de conceitos matemáticos que vão embasar os estudos posteriores.

O livro de Pólya (1977) pode ser considerado seminal neste contexto. Partindo do conceito grego de heurística, associado ao seu trabalho matemático, denominou a metodologia de resolução de problemas de *"a arte da descoberta"*.

Para Pólya (1977, p. 88), "o raciocínio heurístico não é o raciocínio final e rigoroso, mas um raciocínio provisório e plausível cujo objetivo é o de descobrir a solução do problema que se apresenta pois, às vezes, antes de ter a certeza sobre uma solução, faz-se suposições".

No trecho a seguir, Pólya procura explanar a sua concepção de heurística quando comenta uma das fases da sua visão de Resolução de Problemas:

> O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma 'ideia brilhante'. A melhor coisa que um professor pode fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma idéia luminosa [...] (PÓLYA, 1977, p. 5-6, grifo do autor).

No trecho a seguir Pólya deixa claro os objetivos de se adotar o método heurístico na resolução de problemas em Matemática.

> O estudo de Heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino de Matemática.(PÓLYA, 1977, p. 87, grifo do autor).

Ao se optar pelo ensino de Matemática com a utilização da metodologia da Resolução de Problemas, o professor deve considerar certas implicações que decorrem dessa decisão tais como a dificuldade de encontrar material didático adequado, o tempo didático em geral insuficiente para um trabalho mais aprofundado, entre outras.

É preciso também reconhecer uma dificuldade fundamental na prática metodológica, que está relacionada ao fato de nós professores, em geral, não termos tido aulas que não fossem expositivas. O aspecto da condução das aulas é uma componente importante, demanda pesquisa e estudo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009).

A última frase dessa citação deixa claro o papel delicado do professor ao se optar por essa metodologia. Para Pólya (1977), a resolução de problemas deve ser pautada num processo investigativo que enfatize a importância de levar o aluno a "pensar" pois, segundo ele, esse é princípio mais importante da aprendizagem em Matemática. Insiste também que se tome cuidado para que esse processo não seja transformado num método que induza em "o que pensar" ou "o que fazer".

Nas últimas décadas a metodologia da Resolução de Problemas vem ganhando importância e espaço nas práticas pedagógicas, visto a crescente dificuldade de o professorado precisar se reinventar. A influência sobre a organização e composição de currículos e a produção de materiais pedagógicos (teóricos) já se faz presente. Entende-se esta metodologia em analogia à concepção de construção de conceitos, colocando o aluno como sujeito no processo de ensino-aprendizagem, baseando-se na sua experiência e interação com o ambiente e as pessoas.

No final dos anos 1990 foram publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que já refletiam essa mudança de mentalidade quanto aos rumos indicados pelas pesquisas no movimento da Educação Matemática. Dentre outras diretrizes, esses documentos, corroborados por documentos seguintes, tais como os PCN de 2002 e as Orientações Curriculares de 2006, enfatizam a adoção da Resolução de Problemas no ensino de Matemática no Brasil.

> Para alcançar os objetivos estabelecidos de promover as competências gerais e o conhecimento de Matemática, a proposta dos PCNEM privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. A resolução de problemas é a perspectiva metodológica escolhida nesta proposta e deve ser entendida como a postura de investigação frente a qualquer situação ou fato que possa ser questionado. (BRASIL, 2002, p. 129).

Neste documento, percebe-se uma clara intenção de adotar a Resolução de Problemas como proposta pedagógica para o ensino de Matemática, com ênfase no uso de situações-problema, ou seja, problemas essencialmente contextuais e "abertos" ou "não convencionais" por entender que os mesmos permitem uma melhor investigação e construção de conhecimentos matemáticos.

Também as Orientações Curriculares para o Ensino Médio de 2006 sinalizam a importância fundamental da metodologia da Resolução de Problemas na aprendizagem de Matemática, por entender que esta propicia ao aluno a construção de conceitos sob a mediação do professor conforme preconiza o trecho a seguir:

> As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideias tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático. (BRASIL, 2006, p. 81).

Para finalizar este capítulo, apresentamos razões que justificam o ensino do Princípio das Casas de Pombos no ensino fundamental e médio.

A inserção do PCP no elenco de conteúdos oferecidos aos alunos do ensino fundamental e médio pode trazer grandes benefícios para a aprendizagem, visto que o mesmo é embasado em uma ideia simples [1] que oferece possibilidades de exercitar diversas habilidades e competências preconizadas pelas diretrizes atuais de ensino, tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e a atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A esse respeito, destacamos o que estabelece o Referencial Curricular do Paraná (PARANÁ, 2018, p. 810–811), documento ainda em fase de implementação baseado na BNCC:

> Como fundamentação teórico-metodológica, assume-se, nesse documento, a Educação Matemática como uma área de pesquisa que possibilita ao professor balizar suas práticas educativas em uma ação que leva em consideração, além dos conhecimentos matemáticos, os aspectos cognitivos, as questões sociais, culturais, econômicas, políticas, entre outras. As tendências metodológicas dessa área – por exemplo, a resolução de problemas, a modelagem matemática, a etnomatemática, a história da matemática, a investigação matemática, as mídias tecnológicas, entre outras, são estratégias que permitem desenvolver os conhecimentos matemáticos. Tais estratégias permitem um trabalho interdisciplinar, contextual e articulado entre os diversos conhecimentos da própria Matemática, assim como a comunicação entre os conhecimentos e saberes das diferentes disciplinas.

Uma das habilidades desejáveis apontadas pelas novas diretrizes educacionais é a da "transferência" de aprendizagem, que consiste na capacidade que o aluno deve ter em aplicar, de maneira rápida e oportuna, o que aprendeu em novas situações e contextos. Ela possui grande importância no processo de ensino-aprendizagem pois um conhecimento só se torna pleno quando pode ser aplicado em situações diferentes daquelas que lhe deram origem. Veja o que diz as Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> [...] pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de idéias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. (BRASIL, 2006, p. 118).

Essa transferência pode acontecer pela observação de aspectos comuns e similaridades entre as situações-problema. No entanto essas características nem sempre são aparentes e de fácil percepção para todos os estudantes. Por essa razão, espera-se que alguns alunos a façam de forma mais espontânea enquanto outros exijam maior estímulo por parte do professor.

Acreditamos que o PCP, dada a sua versatilidade de aplicações (veja a Seção 3.2), quando trabalhado de forma adequada, por meio da Resolução de Problemas, pode favorecer o exercício da habilidade da transferência e da generalização e também propiciar a contextualização e a interdisciplinaridade.

[1] Pode-se introduzir um debate com a pergunta: "Simples para quem?" A resposta à esta pergunta, no presente trabalho é: para quem se interessa pelo enunciado e se habitua a ele.

Por outro lado, dada a sua peculiar caracterização, em geral, o PCP tem sido deixado de lado quando da escolha do currículo para o ensino fundamental e médio, como preconiza (COSTA, 2013, p. 11):

> Apesar de ser uma das principais ferramentas da combinatória e ser utilizado nas mais diversas áreas da Matemática, o Princípio das Casas de Pombos (PCP), facilmente compreendido e quase óbvio, não está presente nos livros didáticos brasileiros, não é valorizado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (que focam o estudo da Combinatória por meio de técnicas de contagem) e não possui suas inúmeras potencialidades exploradas ao longo do ensino básico. O PCP difere de muitos conteúdos abordados no ensino fundamental e médio na medida em que, sendo um argumento frequentemente usado em provas de teoremas, não oferece uma fórmula ou equação na qual é possível substituir variáveis para se chegar a um resultado desejado.

O PCP tem relações com muitos ramos da Matemática tais como Lógica Matemática, Teoria dos Números, Combinatória, Álgebra, Geometrias (Plana, Espacial e Analítica), Aritmética e Funções, entre outros. Com esta vasta gama de aplicações, que serão exemplificadas na Seção 3.2, esse trabalho pretende demonstrar que o PCP possui as características expostas no início da citação anterior.

3.4 Uma análise do método de Pólya em uma aplicação

Na sua obra original *"How to solve it?"*, de 1945, traduzida no Brasil em 1977, o influente matemático húngaro Pólya propôs um método de resolver problemas baseado em heurística, decompondo-o em quatro estágios, com o professor induzindo os alunos através de indagações adaptadas a estes, tentando direcionar o raciocínio matemático dos mesmos na busca de uma solução do problema. A palavra heurística tem origem grega. O dicionário Novo Aurélio Século XXI traz, entre outras significações:

> **heurística.**[Do lat. cient. *heuristica* (<gr. *heuristiké* [*téchne*], 'arte de encontrar', 'descobrir').] ***S. f.* 1.** Conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas. [Cf. *heureca.*] **2.** Procedimento pedagógico pelo qual se leva o aluno a descobrir por si mesmo a verdade que lhe querem inculcar. (FERREIRA, 1999, p. 1040).

Pólya utilizava essa técnica em suas aulas, tendo como base os seguintes princípios:

- Se não puder compreender um problema, monte um esquema;
- Se não puder encontrar a solução, tente fazer um mecanismo inverso para tentar chegar à solução (engenharia reversa);
- Se o problema for abstrato, tente propor o mesmo problema num exemplo concreto;

- Tente abordar primeiro um problema de maneira mais geral, para depois adentrar no específico.

Esses e outros princípios adotados por Pólya, em conjunto com um esquema de indagações didáticas provocativas, formam o que foi denominado por ele de *a arte de resolver problemas*, amplamente divulgada nas últimas quatro décadas.

Um exemplo mais recente de utilização do método pode ser encontrado em Tao (2013) em cujo primeiro capítulo o autor expõe uma perspectiva pessoal de como utilizar o método heurístico na resolução de problemas.

Dentre outras características, esse autor destaca como um primeiro e decisivo passo na resolução de um problema a percepção de que tipo de problema se está enfrentando. Para Tao:

> [...] Há três tipos de problemas:
> • questões do tipo mostre que... ou calcule..., em que se deve provar que uma certa afirmação é verdadeira, ou manipular uma expressão para obter um certo resultado;
> • questões do tipo encontre... ou encontre todos..., em que se pede para determinar algum objeto (ou todos os objetos) satisfazendo certas condições;
> • questões do tipo existe ou não..., em que se tem que provar uma afirmação ou fornecer um contraexemplo (e portanto recai num dos dois tipos anteriores) [...] (TAO, 2013, p. 2).

Segundo ele, a classificação do tipo de problema já pode dar pistas de como "atacá-lo", evitando-se assim algumas abordagens infrutíferas na tentativa da solução.

A Figura 3 ilustra com um esquema as conexões entre os estágios da metodologia da Resolução de Problemas segundo Pólya:

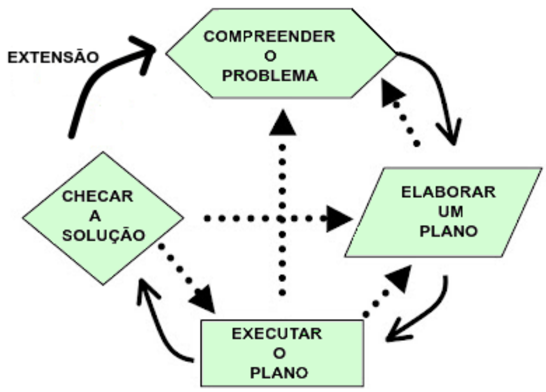


Figura 3 – Os estágios da Resolução de Problemas segundo Pólya. (Fonte: Do Autor)

Os estágios são, em resumo, os seguintes: compreensão do problema, concepção de um plano, execução deste plano, exame da solução de forma retrospectiva e prospectiva. A seguir, apresentamos com mais detalhes cada fase.

1. Compreender o problema

   Analisar o problema detalhadamente até encontrar, com precisão, quais são os dados e a sua condição. Nessa fase tenta-se perceber o que é necessário, isto é, trabalhar para o fim que se deseja, ou ainda, determinar:

   - O que se pede no problema?
   - Quais são os dados e as condições do problema?
   - É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
   - É possível estimar a resposta?

2. Conceber um plano

   Tentar, usando a experiência passada, encontrar um plano de ação, um método de solução. Isso pode acontecer gradualmente, ou, então, após várias tentativas, ou seja, tentar responder ou se engajar em:

   - Qual é plano para resolver o problema?
   - Que estratégia pode-se tentar desenvolver?
   - Lembrar de um problema semelhante;
   - Tentar resolver o problema por partes.

3. Executar o plano

   Experimentar o plano de solução passo a passo. O plano proporciona apenas um roteiro geral. É preciso examinar e executar os detalhes um a um até que tudo fique perfeitamente claro, ou seja:

   - Executar o plano elaborado, verificando-o passo a passo;
   - Efetuar todos os cálculos, indicados no plano;
   - Executar todas as estratégias pensadas para resolver o mesmo problema.

4. Examinar a solução encontrada

   Verificar o resultado por outros caminhos e efetuar uma revisão crítica do trabalho realizado.

   - Examinar se a solução obtida está correta;
   - Existe outra maneira de resolver o problema?
   - É possível usar este método para resolver outros problemas?

Para exemplificar os estágios da Resolução de Problemas descritos, vamos analisar de forma hipotética, para cada estágio da metodologia, os possíveis resultados em relação a cada indagação proposta por Pólya para resolver o Problema 1:

Problema 1. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir em um grupo de modo que possamos ter a certeza de que duas delas façam aniversário em um mesmo dia do mês?

1. Compreender o problema:

    - O que se pede no problema?

      Esse é um momento extremamente delicado da resolução, no qual, em geral, o professor tende a dar "pistas" aos alunos e, muitas vezes, estes o encorajam a fazê-lo, por comodismo, tirando deles a oportunidade de exercitar o pensamento matemático.

      Neste momento é importante que o professor tenha cautela deixando os alunos refletirem por algum tempo até chegar a uma conclusão de que se trata de um problema matemático que exige a "garantia" de um certo resultado.

    - Quais são os dados e as condições do problema?

      De modo geral, pode demorar um pouco para eles perceberem que os dados estão implícitos no texto, por exemplo, a quantidade de dias de um mês (28 em fevereiro, 29 em fevereiro de ano bissexto, 30 ou 31). Outro ponto importante é decidir qual desses números tomar, de acordo com a exigência do enunciado.

    - É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

      Não aplicado a esse problema.

    - É possível estimar a resposta?

      Nesse momento, cada "chute" dado por um aluno, ou grupo, deve ser acompanhado por um questionamento do professor sobre qual foi o raciocínio usado para fazer aquela estimativa. Em algum tempo, eles passarão a perceber que a resposta está atrelada ao número de dias do mês.

2. Conceber um plano:

    - Executar o plano elaborado, verificando-o passo a passo.

      É importante que o professor auxilie os alunos a perceber que a descoberta do estágio anterior abre espaço para a aplicação do PCP. Com a ajuda do professor será possível implementar as hipóteses do PCP, encaminhando a solução do problema.

    - Efetuar todos os cálculos, indicados no plano.

      Esse é o momento de confrontar todos os dados numéricos levantados com as hipóteses do PCP e buscar a validação do resultado obtido.

- Executar todas as estratégias pensadas para resolver o problema.

Esse é o momento de efetivar todas as estratégias e cálculos planejados. Aqui, faz muita diferença o conhecimento prévio do aluno ou do grupo em relação aos conhecimentos de outras áreas da Matemática que darão suporte aos cálculos.

3. Executar o plano:

   - Examinar se a solução obtida está correta.

     Aqui será importante que o professor enfatize que uma resposta correta está na dependência de que os dados e a solução obtida satisfaçam as hipóteses e a conclusão do PCP, respectivamente.

   - Existe outra maneira de resolver o problema?

     Nesse momento, pode haver da parte dos alunos, sugestões de resolução por outros meios, como, por exemplo, por meio de diagramas ou figuras.

   - É possível usar este método para resolver outros problemas?

     A resposta a essa indagação provavelmente será afirmativa e neste caso, o professor pode instigar os alunos questionando-os sobre novos exemplos de aplicações.

4. Examinar a solução encontrada:

   - Examinar se a solução obtida está correta.

     Esse é o momento de verificar todos os dados e cálculos efetuados, verificando se os mesmos satisfazem as condições do PCP.

   - Existe outra maneira de resolver o problema?

     A resposta possivelmente será afirmativa, mas se questionados pelo professor sobre como se daria esse novo método, as respostas não seriam tão óbvias, dependendo do nível de compreensão dos alunos em relação ao problema em questão.

   - É possível usar este método para resolver outros problemas?

     Esse talvez seja o momento mais importante da resolução de um problema envolvendo o PCP. Pois é o momento de transferir um método de solução para outro problema correlato, mas que, devido às características do PCP, e de problemas de contagem, em geral, o contexto envolvido pode mudar completamente.

     O professor pode sugerir mudanças no texto do problema, transformando-o em um problema totalmente diferente e propô-lo novamente, como forma de fixação de conteúdos.

     Assim, no exemplo dado, o professor poderia mudar a parte da frase "... ter a certeza de que duas delas façam aniversário em um mesmo dia do mês?", alterando a palavra "mês" pra "semana", ou mesmo a palavra "duas" por "três", obrigando os alunos a pensar em condições alternativas que levam a abordagens semelhantes, mas não idênticas.

4 Coletânea de Problemas e Sugestão de Encaminhamento em Sala de Aula

4.1 A Relação entre o PCP e outras Áreas da Matemática – Exemplos

Sabemos que o nosso aluno do ensino regular não está habituado, em geral, a resolver problemas que exijam uma demonstração lógica de resultado, ou seja, do tipo “prove que ...” ou “demonstre que ...”. Por isso é necessário que o professor faça uma preparação no sentido de provê-lo de conhecimentos básicos de lógica matemática para tal. No caso do PCP, faz-se necessário instruir sobre a noção de encadeamento ou implicações lógicas, ou seja, para se provar um resultado envolvendo o PCP, basta mostrar que se as variáveis (pombos e casas) satisfazem as condições necessárias ao princípio, ou seja, que o número de pombos é maior que o número de casas, então, pelas regras da lógica matemática, o resultado segue.

Outra dificuldade para alguns problemas envolvendo o PCP, está em identificar, quais variáveis farão o papel dos “pombos” e quais farão o papel das “casas”. Uma regra geral que pode auxiliar na identificação desses elementos é a observação de que o PCP tem como objetivo provar que haja dois ou mais pombos em uma mesma casa.

Assim, cabe ao aluno observar no enunciado do problema a que variáveis está atrelada a condição “... garantir que haja dois ou mais ...” pois essa variável fará o papel dos “pombos” na aplicação do princípio. A partir daí, estipular o maior valor que a outra variável “casas” deve assumir para que se garanta as condicionantes do PCP.

No caso das aplicações em geometria, certas variáveis não ficam explícitas no texto cabendo ao professor, de modo cuidadoso, auxiliar os alunos por meio de indagações a perceber de forma analógica que distribuir os pontos no interior de uma figura corresponde, no PCP, a distribuir os pombos nas casas. Logo, eles perceberão que os pontos fazem o papel dos “pombos” e as “casas” deverão ser as divisões da figura. Cabe então ao aluno, determinar o número de partes em que a figura deve ser dividida e como deverá dividi-la para que as áreas sejam iguais. Na sequência, basta estipular a maior distância entre dois pontos em qualquer dessas partes (por meio de conhecimentos geométricos) e verificar se satisfazem a condição exigida no problema. Veja os Exemplos 3.1, 3.3 e 3.5 desta seção.

Mas sem dúvidas a maior dificuldade seria de conhecer o PCP e tentar adaptar sua aplicação. Esta dificuldade se reduz na medida em que mais professores e estudantes conhecem o PCP e resolvem problemas envolvendo o mesmo.

Apesar dos conteúdos envolvidos nos problemas da próxima seção serem, na sua maioria, pertinentes ao currículo do ensino médio, a maior parte dos exemplos apresentam um nível de dificuldade de resolução que os tornam pouco produtivos de se aplicar nesse nível de ensino. As exceções são os que envolvem o tópico Geometria, casos dos Exemplos 4.1, 4.3 e 4.5. Os demais são indicados para o ensino superior ou para aprofundamento por parte do professor. Para utilização como material de apoio no ensino fundamental e médio, recomendamos o Problema 1 da Seção 3.3, os Problemas 2, 3 e 4 da Seção 4.2 e as listas de Problemas apresentadas no Trabalho 1 e Trabalho 2 do Capítulo 5.

Nesta seção do texto trazemos exemplos para ilustrar uma das mais importantes características do PCP que é a sua flexibilidade e capacidade de interação com diferentes áreas da matemática abrangendo vários níveis de ensino. Os exemplos foram extraídos e adaptados de Oliveira e Fernàndez (2010).

Geometria Plana

Exemplo 4.1. *Prove que entre quaisquer 5 pontos escolhidos dentro de um triângulo equilátero de lado 1 sempre existe um par deles cuja distância não é maior que* $\frac{1}{2}$.

Solução: Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1 e D, E e F os pontos médios de AC, AB e BC, respectivamente. Note que podemos dividir esse triângulo em quatro triângulos equiláteros congruentes de lado $\frac{1}{2}$ conforme indica a figura 4:

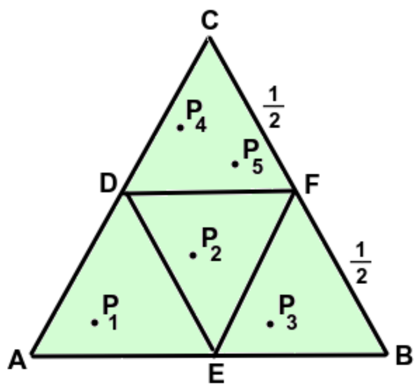


Figura 4 – Ilustração da solução do Exemplo 3.1 (Fonte: Do Autor)

Se considerarmos os 5 pontos como sendo os pombos e os 4 triângulos como sendo as casas, o PCP garante que algum triângulo conterá dois desses pontos. Como a maior distância entre dois pontos de qualquer desses triângulos não é maior que a medida de seus lados, ou seja, não mede mais do que $\frac{1}{2}$ e o problema está resolvido. $\square$

Exemplo 4.2. *Considere um conjunto de 25 pontos no plano tais que entre quaisquer 3 deles existe um par com distância menor que 1. Prove que existe um círculo de raio 1 que contém pelo menos 13 dos 25 pontos dados.*

Solução: Vamos estabelecer uma enumeração arbitrária $P_1, P_2, P_3, ..., P_{25}$ para os pontos. Seja C_1 um círculo de raio 1 com centro em P_1. Se os próximos 12 pontos do conjunto pertencerem a C_1, o problema está resolvido. Caso contrário, existe um índice i, $1 < i \leq 13$, tal que $P_i \notin C_1$. Seja C_2 um círculo de raio 1 com centro em P_i.

Considere o ponto P_{i+1}. Suponha, por absurdo, que P_{i+1} não pertença a C_1 e nem a C_2. Neste caso, temos, $\overline{P_1P_{i+1}} > 1$, $\overline{P_{i+1}P_i} > 1$ e $\overline{P_iP_1} > 1$, mas essa condição é vedada pela hipótese, logo, P_{i+1} pertence a C_1 ou a C_2. De forma análoga, conclui-se que $P_{i+2}, P_{i+3}, ...,$ P_{25} também pertencem a C_1 ou a C_2.

Assim, ao final, temos que os 25 pontos considerados pertencem a $C_1 \cup C_2$. Como $25 = 2 \cdot 12 + 1$, pela versão geral do PCP, pondo os pontos como os (pombos) e os dois círculos como as (casas), temos que um dos círculos, C_1 ou C_2 conterá pelo menos 13 pontos, como queríamos provar. □

Exemplo 4.3. *No interior da região delimitada por um triângulo equilátero de lado 4 são marcados 10 pontos. Obtenha uma estimativa para a menor distância entre pares de pontos.*

Solução: A menor distância entre dois pontos é zero, quando dois deles coincidem. A questão é avaliar o máximo que eles podem estar afastados. Podemos dividir o triângulo dado em 9 triângulos equiláteros e congruentes de lado medindo $\frac{4}{3}$, conforme mostra a Figura 5.

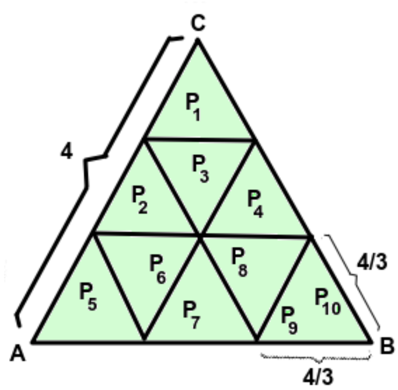


Figura 5 – Ilustração da solução do Exemplo 3.3 (Fonte: Autor)

Ao distribuirmos os 10 pontos (pombos) pelos 9 triângulos (casas), temos, pelo PCP que pelo menos um desses triângulos conterá dois desses pontos. Como a maior distância entre dois pontos em um triângulo equilátero corresponde à medida de seu lado, temos que a maior distância entre esses dois pontos é $\frac{4}{3}$, o que mostra que a menor distância não é maior do que $\frac{4}{3}$. □

Exemplo 4.4. *Um disco fechado de raio 1 contém 7 pontos, tais que as distâncias entre quaisquer dois deles é maior ou igual a 1. Prove que o centro do disco é um desses pontos.*

Solução: Intuitivamente, os pontos na borda do disco, que é a circunferência de raio 1 teriam mais espaço para ficar à distância mínima de 1. Como o comprimento da circunferência é igual a $2\cdot\pi\cdot r \approx 2\cdot 3,14\cdot 1 = 6,28 < 7$ temos que não há mais que 6 pontos com essa condição.

Esta construção nos sugere o argumento de dividir o disco em seis setores $S_1,\cdots,S_6$, cada um com ângulo de $\frac{\pi}{3}$. Ao usarmos o PCP, considerando os setores como casas, concluímos que um dos setores contém 2 pontos. A distância entre dois pontos quaisquer num destes setores é no máximo 1 (veja Figura 6), e este máximo ocorre precisamente quando os pontos se situam nos vértices destes setores, ou no centro.

Suponha que os pontos $P_1,\cdots,P_7$ sejam distribuídos um em cada setor. Suponha ainda que nenhum dos pontos $P_1,\cdots,P_6$ seja o centro. Quando se chega em P_7, para que sua distância seja 1 em relação aos demais, ele não pode estar no interior do setor S_i, para qualquer i pois neste caso $d(P_7,P_i) < 1$. Por isto P_7 é o centro da circunferência. Note ainda que, para que $d(P_7,P_i) = 1$, é necessário que os pontos $P_1,\cdots,P_6$ estejam na circunferência.

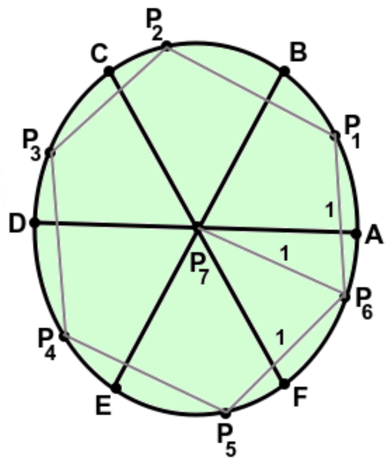


Figura 6 – Ilustração da solução do Exemplo 3.4 (Fonte: Do Autor)

□

Exemplo 4.5. *Na região delimitada por um retângulo de largura quatro e altura três são marcados sete pontos. Prove que existe ao menos um par desses pontos tal que a distância entre eles não é maior que* $\sqrt{5}$.

Solução: Dividimos o retângulo dado em seis retângulos congruentes de largura dois e altura um, conforme mostra a Figura 7.

Usando o PCP, pondo os sete pontos como os (pombos) e os seis retângulos como as (casas), temos que algum dos retângulos conterá dois pontos. Note que a maior distância entre dois pontos em um retângulo corresponde à medida da sua diagonal. Sendo d a medida da diagonal desse retângulo e $d^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow d = \sqrt{5}$. Com isto, concluímos que existem dois pontos cuja distância não é maior que $\sqrt{5}$. □

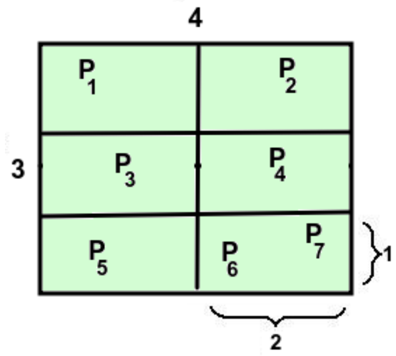


Figura 7 – Ilustração da solução do Exemplo 3.5 (Fonte: Do Autor)

Sequências

Exemplo 4.6. *Um certo livreiro vende pelo menos um livro por dia. Sabendo que o livreiro vendeu 463 livros durante 305 dias consecutivos, mostre que em algum período de dias consecutivos o livreiro vendeu exatamente 144 livros.*

Solução: Considere a sequência S_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, 305$, em que S_k é o número de livros vendidos desde o primeiro dia até o k-ésimo dia, inclusive. Temos que

$$1 \leqslant S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_{305}$$

Além disso, $S_{305} = 463$. Note que o número de livros vendidos do dia $p+1$ até o dia q, inclusive, é dado por $S_q - S_p$. Queremos demonstrar que é possível determinar p e q tais que $S_q - S_p = 144$.

Considere a sequência de 610 números

$$S_1, S_2, \ldots, S_{305}, S_1 + 144, S_2 + 144, \ldots, S_{305} + 144 \,.$$

Eles devem pertencer ao conjunto

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 463 + 144\} = \{1, 2, 3, \ldots, 607\}$$

Pelo PCP, como os elementos da sequência (pombos) são em maior número que o conjunto A (casas), pelo menos dois dos números da sequência são iguais. Como $S_1 < S_2 < \ldots < S_{305}$, os números iguais devem estar em metades diferentes da sequência, ou seja, existem p e q tais que

$$S_q = S_p + 144 \Rightarrow S_q - S_p = 144$$

Com isso, provamos que o livreiro vendeu exatamente 144 livros entre os dias $p+1$ e q, inclusive. □

Exemplo 4.7. *Em relação ao exemplo anterior, para quais valores de i é possível encontrar um período de dias consecutivos em que o livreiro tenha vendido exatamente i livros?*

Solução: Para poder aplicar o mesmo raciocínio do problema anterior, devemos ter $S_{305} + i < 610$. Com isto, $i < 610 - 463 = 147$. Assim, $i \leq 146$.

Por outro lado, aumentando o número de dias de observação das vendas do livreiro, contanto que em cada dia ele venda pelo menos um livro, esta cota superior aumenta. □

Combinatória

Exemplo 4.8. *Considere o conjunto de pontos no plano com coordenadas inteiras, chamado* reticulado. *Suponha que cada ponto do reticulado plano é pintado de vermelho ou azul. Mostre que necessariamente existe algum retângulo com vértices no reticulado todos da mesma cor.*

Solução: Considere os pontos do reticulado de coordenadas $(k,1)$, $(k,2)$, $(k,3)$, $k = 1,2,\cdots$. As cores destes pontos podem ter uma de oito combinações: VVV, VVA, VAV, AVV, AAA, AAV, AVA, VAA, em que V denota a cor vermelha e A a cor azul.

Agora, podemos usar o PCP para concluir que uma destas disposições se repete para $k = k_1$ e $k = k_2$. Em qualquer que seja a disposição que se repita, poderemos selecionar 4 pontos que formem um retângulo e tenham a mesma cor. A Figura 8 ilustra uma dessas possibilidades.

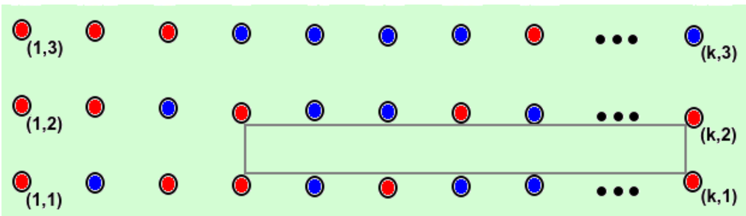


Figura 8 – Ilustração da solução do Exemplo 3.8 (Fonte: Do Autor)

□

Aritmética

Exemplo 4.9. *O conjunto dos dígitos* $\{1,2,\ldots,9\}$ *é dividido em três grupos. Prove que o produto dos números de algum dos grupos deve ser maior que 71.*

Solução: Sejam G_1, G_2 e G_3 os grupos e P_1, P_2 e P_3 os seus respectivos produtos.

Primeiro note que

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 9! = (9 \cdot 8)(7 \cdot 5 \cdot 2)(6 \cdot 4 \cdot 3) = 72^2 \cdot 70 = 362880 .$$

Como 71 é primo e não figura entre os dígitos, nenhum dos produtos é igual a 71.

Vamos usar a letra M pra simbolizar um produto maior que 71 e m para um produto menor que 71. Se valesse $P_i \leq m$, $i = 1,2,3$, então $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \leq m^3 < 71^3 = 357911 < 9!$, o que prova, por absurdo, que pelo menos um dos produtos é maior do que 71.

Neste raciocínio, o argumento tem duas casas m, M e três pombos, mas foi preciso o cálculo para ver que cada uma das casas precisa ser ocupada.

Outro argumento que resolve o problema é usando a desigualdade entre média aritmética, média geométrica e média harmônica.

$$\begin{aligned}\frac{P_1+P_2+P_3}{3} > \sqrt[3]{72^2 \times 70} > \frac{3}{\frac{2}{72}+\frac{1}{70}} &= \frac{3 \times 36 \times 70}{106} \\ = 36 \times \frac{35 \times 3}{53} = 36 \times \frac{105}{53} &= 36 \times (2 - \frac{1}{53}) = 72 - \frac{36}{53} > 71\ .\end{aligned}$$

Com isto, um dos números P_1, P_2, P_3 deve ser maior do que 71. □

Exemplo 4.10. *Prove que se N é ímpar então para qualquer bijeção $p : I_N \longrightarrow I_N$ do conjunto $I_N = \{1,2,...,N\}$ o produto $P(p) = (1-p(1))(2-p(2))...(N-p(N))$ é necessariamente par.*

Solução: Note que em I_N temos $\frac{N+1}{2}$ elementos ímpares e $\frac{N-1}{2}$ elementos pares, ou seja, há um elemento ímpar a mais do que os pares em I_N.

Para que $P(p)$ fosse ímpar, $i - p(i)$ deveria ser ímpar para cada $i \in I_N$. Considere o subconjunto dos números ímpares do domínio como os pombos e o subconjunto dos número pares do contradomínio como as casas. Pelo PCP, deveríamos ter dois elementos ímpares do domínio com a mesma imagem par, mas como a função p é injetiva, isso não pode ocorrer, ou seja, para algum número ímpar $2j+1 \in I_N$, $p(2j+1)$ também é ímpar. Consequentemente a diferença $2j+1-p(2j+1)$ é par. Dessa forma, teremos $P(p)$ par já que teríamos um fator par no produto. □

Exemplo 4.11. *Mostre que entre nove números que não possuem divisores primos maiores que cinco, existem dois cujo produto é um quadrado.*

Solução: Seja $\{N_1, N_2, N_3, ..., N_9\}$ um conjunto com 9 números cujas decomposições apresentam apenas os fatores 2, 3 e 5. Assim, para todo i, $1 \leq i \leq 9$, N_i tem a forma $2^{x_i} \cdot 3^{y_i} \cdot 5^{z_i}$, em que x_i, y_i e z_i são inteiros não negativos.

Avaliamos a paridade destes expoentes: elas podem ser *escolhidas* de $2 \times 2 \times 2 = 8$ modos. Usando o PCP pondo os nove números como os (pombos) e os oito modos de arranjar as paridades dos expoentes de 2, 3 e 5 como as (casas), temos que existem i e j, $i \neq j$ com $1 \leqslant i, j \leqslant 9$, tais que os números N_i e N_j têm o mesmo arranjo para as paridades dos expoentes de 2, 3 e 5. Desse modo, o produto $N_i \cdot N_j = 2^{x_i+x_j} \cdot 3^{y_i+y_j} \cdot 5^{z_i+z_j}$, apresentará expoentes pares para 2, 3 e 5 já que soma de dois números de mesma paridade é par. Com isto, $N_i \cdot N_j$ é um quadrado. □

Exemplo 4.12. *Prove que existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 1997.*

Solução: Considerando a sequência infinita $3, 3^2, 3^3, \ldots$ das potências de 3 como os pombos e o conjunto finito $\{0, 1, 2, \ldots, 1996\}$ dos possíveis restos na divisão por 1997 como as casas, o PCP garante a existência de pelo menos duas potências de 3 cujos restos na divisão por 1997 sejam os mesmos.

Assim, a diferença entre essas duas potências é um número divisível por 1997, como queríamos provar. □

Exemplo 4.13. *São escolhidos 6 números distintos quaisquer pertencentes ao conjunto*

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

Então existem dois desses seis números cuja soma é ímpar.

Solução: Note que o conjunto A possui 5 elementos ímpares e 5 elementos pares. Então podemos escrever A como a união disjunta dos conjuntos $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, os números ímpares, e $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, números pares. Seja $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ um subconjunto qualquer de A com 6 elementos. Agora, suponha que os elementos de A' sejam escolhidos de I, temos, pelo PCP, que um número ímpar seria escolhido duas vezes. Absurdo! Logo, um dos elementos de A' é par. Pelo mesmo argumento, vemos que A' necessariamente contém um número ímpar. Assim, a soma desses dois elementos, um par e um ímpar, resulta numa soma ímpar como queríamos provar. □

Exemplo 4.14. *Do conjunto* $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$ *escolhemos 51 números. Demonstre que, entre os 51 números escolhidos, existem dois tais que um é múltiplo do outro.*

Solução: Note inicialmente que qualquer número do conjunto A pode ser posto na forma $2^n q$, com n inteiro não negativo e q ímpar. Assim, usando o PCP, pondo os 51 números escolhidos como os pombos e os 50 números ímpares $1, 3, 5, \ldots, 99$ do conjunto A como as casas, temos que, entre os números escolhidos, há dois cujo fator ímpar (q) de suas representações se repete. Sejam $n_1 = 2^m q$ e $n_2 = 2^n q$, com $m < n$, os números escolhidos em que isso ocorre. Como o 2^m divide 2^n, e q é fator comum, temos que n_1 divide n_2, ou seja, n_2 é múltiplo de n_1, como queríamos provar. □

Geometria Analítica

Exemplo 4.15. *Seja C um conjunto formado por cinco pontos de coordenadas inteiras no plano. Prove que o ponto médio de algum dos segmentos com extremos em C tem também coordenadas inteiras.*

Solução: Sejam $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, ..., $A_5 = (x_5, y_5)$ os pontos de C. Note que existem apenas quatro possibilidades para os arranjos das coordenadas desses pontos. A saber: (p, p), (i, i), (p, i) e (i, p), onde i representa um inteiro ímpar e p um inteiro par. Como temos 5 pontos (pombos) e 4 arranjos para as suas coordenadas (casas), pelo PCP temos que para dois desses pontos se repete o mesmo arranjo de coordenadas. Sejam A_i e A_j, com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, ..., 5\}$ tais que isso ocorra e $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overline{A_i A_j}$. Temos que $x_M = \frac{x_i + x_j}{2}$ e $y_M = \frac{y_i + y_j}{2}$. Como a soma de dois ímpares é par e a soma de dois pares também é par, vemos que qualquer dos arranjos que se repita para as coordenadas desses pontos, fará com que as somas $x_i + x_j$ e $y_i + y_j$ sejam pares e, consequentemente, x_M e y_M sejam inteiros. Como queríamos provar. □

Análise

Exemplo 4.16. *Seja x um número real arbitrário. Prove que entre os números*

$$x, 2x, 3x, ..., 101x$$

existe um tal que sua diferença com um certo número inteiro é menor que 0,011.

Solução: A parte fracionária de um número $z \in \mathbb{R}$ é denotada por $0 \leq \{z\} < 1$. A parte inteira de z, denotada por $[z]$, é o menor inteiro k tal que $k \leq z < k + 1$. Por definição, $z = [z] + \{z\}$.

Vamos considerar as partes fracionárias $\{ix\}$, $1 \leq i \leq 101$. Dividindo o intervalo $[0, 1)$ em cem intervalos semi-abertos de comprimento $0,01$ cada, conclui-se pelo PCP que existem $i_1 < i_2$, $1 \leq i_1, i_2 \leq 101$ tais que $\{i_2 x\}$ e $\{i_1 x\}$ pertencem ao mesmo intervalo. Assim $|\{i_2 x\} - \{i_1 x\}| < 0,01$. Como $i_2 x - i_1 x = (i_2 - i_1)x$ e $1 \leq i_2 - i_1 \leq 101$, pondo $k = i_2 - i_1$, temos que kx pertence à sequência dada. Seja n a parte inteira do número kx.

Então $kx = n + \{kx\}$, ou seja, $kx - n < 0,01 < 0,011$. □

Exemplo 4.17. *Seja a um número irracional. Prove que existem infinitos números racionais $r = p/q$ tais que $|a - r| < 1/q^2$.*

Demonstração. Este resultado é conhecido como Teorema de Dirichlet.

Seja m um número inteiro e a um número irracional fixados. Consideremos a sequência $0, \{a\}, \{2a\}, \{3a\}, ..., \{ma\}$ das partes fracionárias dos números ia, $0 \leq i \leq m$.

Dividindo o intervalo $[0, 1)$ em m intervalos semiabertos de comprimento $\frac{1}{m}$ e usando o PCP, pondo como pombos os $m + 1$ números da sequência e como casas os intervalos, temos que existe um desses intervalos contendo dois números da sequência, ou seja, existem índices i_1 e i_2 com $1 \leq i_1 < i_2 \leq m$ tais que $|\{i_2 a\} - \{i_1 a\}| < \frac{1}{m}$. Como $i_2 a - i_1 a = (i_2 - i_1)a$ e $1 \leq i_2 - i_1 \leq m$, pondo $q = i_2 - i_1$, e denotando por p a parte inteira de qa, temos que $|qa - p| < \frac{1}{m} < \frac{1}{q}$. Dividindo essa desigualdade por q, temos que $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

Como m é arbitrário, temos que é possível encontrar uma sequência (infinita) de números racionais $r = \frac{p}{q}$ tais que $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. □

Como já foi visto na apresentação do PCP, na Seção 1.3, a definição de função sobrejetora, no caso em que o número de elementos do domínio é maior que o número de elementos do contradomínio, pode ser usada também como definição do PCP. Mas, um excelente exercício do PCP é a prova da recíproca dessa afirmação, como veremos a seguir, mostrando a equivalência entre as duas definições.

Exemplo 4.18. *Se A e B são dois conjuntos não vazios com o número de elementos de A maior que o número de elementos de B e f uma função sobrejetora de A em B. Mostre que se colocarmos os elementos de A como os "pombos" e os elementos de B como as "casas", vale a conclusão do PCP, ou seja, haverá pelo menos uma casa com mais de um pombo.*

Solução: Consideremos dois conjuntos não vazios A e B onde o número de elementos de A é m e o número de elementos de B é n, com $m > n$. Seja f uma função sobrejetora de A em B. Se para cada elemento de A escolhermos um, e um só, elemento de B (condição de existência de função), sendo f uma função sobrejetora (todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A), e se f fosse também injetora e, portanto, bijetora, deveríamos ter m elementos em B o que é um absurdo, pois B tem n elementos e $n < m$. Logo, f não pode ser injetora, ou seja, há pelo menos um elemento de B que é imagem de mais de um elemento de A.

A leitura do problema com o PCP é mais imediata: se pusermos os elementos de A como pombos e os elementos de B como casas, o fato provado nesse problema equivale ao PCP: as funções sobrejetoras no caso em que o número de elementos do domínio seja maior que o número de elementos do contradomínio não podem ser injetoras. □

Na seção seguinte apontaremos algumas indicações de fontes com coleções de problemas e material teórico sobre o Princípio das Casas de Pombos que podem servir tanto para aprofundamento de alunos bem como para subsidiar o trabalho de professores interessados em aplicar esse conteúdo em suas aulas.

4.2 Sugestões de Fontes para Aprofundamento e Aplicações

O aprofundamento no tema pode ser feito com um elenco de problemas e de fontes de pesquisa que podem ser utilizados na condução de aulas sobre o PCP.

Problema 2. Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir em um grupo de modo que possamos ter a certeza de que duas delas façam aniversário em um mesmo dia do mês?

Problema 3. Escolha 11 números no conjunto $\{1,2,\cdots,19,20\}$. Independentemente da escolha, há dois entre estes números cuja diferença vale cinco.

Problema 4. Doze pessoas lançam dois dados. Então duas destas pessoas obtiveram a mesma soma. Explique.

No artigo Pitombeira (1986) na Revista do Professor de Matemática, podem ser encontradas demonstrações, aplicações e uma boa lista de problemas com aplicações do PCP para aprimoramento do professor ou para uso didático em sala de aula.

Outras fontes de exemplos de aplicações e sugestões de exercícios sobre o PCP podem ser encontradas em Moreira, Martínez e Saldanha (2012, p. 11–16), com alguns exercícios em um nível mais elevado, incluídos em Olimpíadas Internacionais de Matemática e também em Lima et al. (2007, p. 196–206), que apresenta os enunciados e resoluções dos exercícios do volume 2 da coleção *A Matemática do Ensino Médio*.

Na próxima seção vamos apresentar e posteriormente fazer uma breve análise sobre dois trabalhos escolhidos de forma aleatória dentre os que foram realizados em uma atividade sobre o PCP com alunos de nível secundário.

5 Familiarizando os Alunos com Problemas e Soluções pelo Princípio das Casas de Pombos

O trabalho apresentado a seguir é um exemplo de uma atividade sobre o PCP que foi realizada com uma turma de 20 alunos do quarto ano do curso de formação de docentes do período noturno em um colégio estadual do interior do Paraná. O objetivo principal dessa atividade foi a familiarização dos alunos com o PCP, buscando mostrar a possibilidade de aplicações em diversas situações do cotidiano.

Em virtude do pequeno período didático disponível (4 horas/aula), foi apresentado de forma sucinta o Princípio das Casas de Pombos com a resolução de alguns exemplos com base na metodologia da Resolução de Problemas e seus estágios, para em seguida ser proposta a atividade.

Para essa atividade foi proposto que cada grupo fizesse uma pesquisa e apresentasse uma lista de exercícios resolvidos sobre o PCP, levando-se em conta algumas das indagações presentes no trabalho de Pólya (1977) principalmente as que se referem às variáveis envolvidas (pombos) e (casas), a relação entre as variáveis e a condição de validade do PCP.

Reporta-se aqui dois dos trabalhos apresentados nessa ocasião. Visando preservar a privacidade dos alunos envolvidos, excluímos a capa do trabalho apresentado. Para esse trabalho a turma foi dividida em grupos de quatro ou cinco alunos. Cada um desses grupos deveria formular, resolver e apresentar um trabalho manuscrito composto de seis problemas envolvendo o PCP. Os problemas deveriam contemplar as versões simples e geral do PCP e a metodologia da Resolução de Problemas. As indagações que deveriam ser consideradas na resolução de cada um dos problemas eram as seguintes:

- Quais eram as variáveis envolvidas no problema?
- Qual dessas variáveis faría o papel dos pombos? E qual faría o papel das casas?
- Qual era a relação entre as variáveis?
- As condicionantes das variáveis satisfazem as hipóteses do PCP?

TRABALHO DO GRUPO 1

Exercícios

① Quantos alunos deve haver em uma sala para podermos afirmar que pelo menos dois estudantes tenham a mesma nota em uma determinada prova, se a nota é graduada em um número inteiro de 0 a 10?

casas: notas possíveis na prova (11)

pombos: alunos (12)

relação: associamos cada aluno a uma possível nota na prova.

Como 12 = 11 + 1, pelo P.C.P teremos dois estudantes com a mesma nota na prova.

② Quantas pessoas precisam estar em uma sala para que pelo menos duas pessoas têm seus nomes iniciados pela mesma letra?

casas: letras no alfabeto (26)

pombos: pessoas (27)

relação: associamos cada pessoa a uma letra do alfabeto.

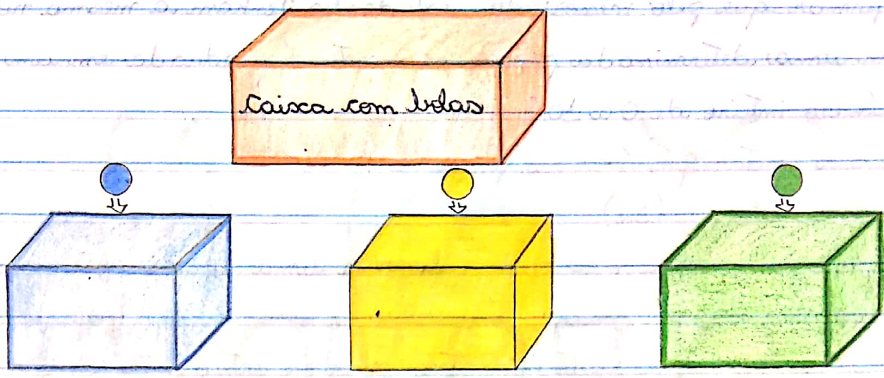
Como 27 = 26 + 1, pelo P.C.P teremos duas pessoas com seus nomes iniciados pela mesma letra.

③ Uma caixa contém 3 tipos de bolas (azuis, verdes, amarelos). Qual o número mínimo de bolas que devemos retirar da caixa para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?

casas: uma caixa azul, uma caixa verde e uma caixa amarela (3)

pombos: bolas (4)

relação: associamos a cada bola a sua cor. Pelo P.C.P, como temos 3 casas e 4 pombos, uma das casas receberá, pelo menos 2 pombos, ou seja, uma das caixas conterá, pelo menos duas bolas. Dessa forma, pelo menos duas bolas retiradas têm a mesma cor.



Distribuindo, então cada bola em sua respectiva caixa, com a retirada da quarta bola, esta poderá ser de qualquer cor. Assim precisamos retirar, no mínimo, 4 bolas para garantirmos que tenhamos duas bolas de mesma cor.

4) Em uma floresta existem 106 jaqueiras. É conhecido que cada uma dessas jaqueiras não produz anualmente mais do que 92 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras na floresta que têm a mesma quantidade de frutos.

casas: quantidade de frutos (0, 1, 2, 3, ..., 92); (93)

pombos: jaqueiras (106)

relação: associamos cada jaqueira a quantidade de frutos que ela contém.

Temos 106 jaqueiras e 93 casas identificadas pelos números 0; 1; 2; 3; ...; 92. O número K associado a cada casa significa que nela serão colocadas jaqueiras que têm exatamente K frutos.

Como $106 > 94 = 93 + 1$, o P.C.P nos garante que existem, pelo menos duas jaqueiras com a mesma quantidade de frutos.

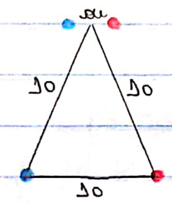
5) Quantas vezes é preciso jogar (no mínimo) um dado de modo a garantir que um mesmo valor apareça duas vezes?

casas = valores possíveis no dado (6)

pombos = mínimo de jogadas (7)

relação = associamos cada jogada a um valor possível do dado. Como 7 = 6+1, pelo P.C.P aparecerá duas vezes o mesmo valor no dado.

6) Todos os pontos de um plano são pintados de azul ou vermelho. Provemos que é possível encontrar dois pontos da mesma cor que distam exatamente 10 cm.



casas = cores (2)

pombos = pontos (3)

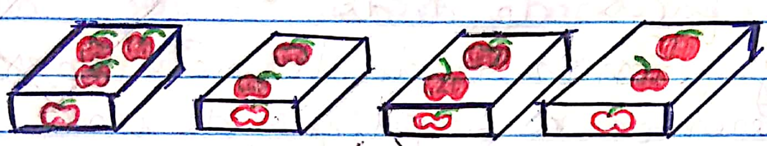
relação: como são duas cores e três pontos. Pelo P.C.P teremos dois pontos da mesma cor.

TRABALHO DO GRUPO 2

"Trabalho de Matemática"

Tema: Princípio das casas de pombos

1) Um agricultor têm 4 caixas para guardar maçãs. Ele quer que, pelo menos uma das caixas tenham, no mínimo, 3 maçãs. Quantas maçãs ele deve ter para garantir isso?



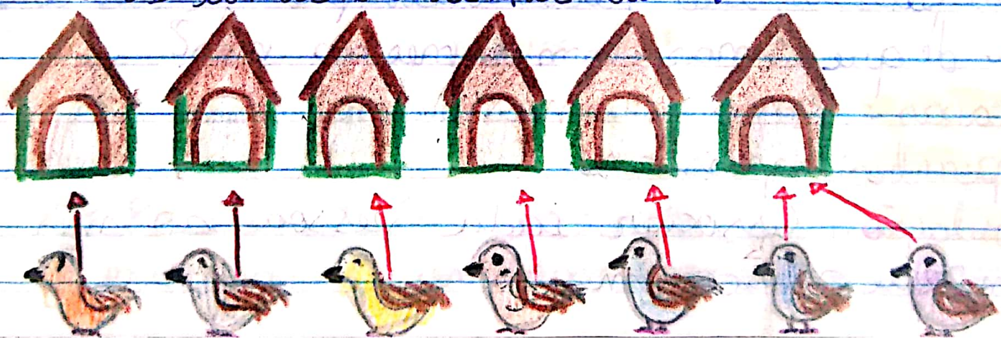
casas: caixas (4)

pombos: a quantidade de maçãs (9)

relação: associamos cada maçã às caixas. (4)

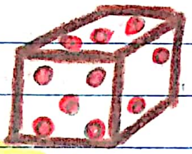
Resposta: Deve ter no mínimo nove maçãs

2) Qual o número mínimo de pombos que devemos juntar nas casas, para que pelo menos uma contenha dois?



casas: casas (6)
pombos: pombos (7)
relação: associar cada pombo à uma casa
Resposta: cinco casas ficaram com um pombo e a 6ª casas ficou com dois dando o total de 7 pombos!

3) Quantas rolagens de dados, são necessárias para se ter certeza de que um número vai cair duas vezes?



Pombos: o número de rolagens
casas: 6 faces do dado
relação: jogaremos o dado sete vezes assim teremos a repetição de um número.
Resposta:
Se temos seis possibilidades, se jogarmos sete vezes 6+1, teremos um número que irá se repetir.

4) Existem N pessoas em uma sala. Quantas pessoas são necessárias para se ter certeza de que 3 nasceram no mesmo mês?
casas: mês que nasceram
pombos: pessoas
relação: Associar cada pessoa ao mês em que nasceram.

respesta: Tem 12 meses, então se pegarmos 24 pessoas, ainda não dá três no mesmo mês, mas se adicionarmos mais uma, teremos certeza de que três nasceram no mesmo mês

Jan. Fev. Mar. Abr. Mai. Jun. Jul. Agos.

Set. Out. Nov. Dez.

$3+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=25$ pessoas

5) Um grupo de seis estagiários foi designado para rever 50 processos e cada processo deveria ser revisto por apenas um dos estagiários. No final do trabalho, todos os estagiários trabalharam e todos os processos foram revistos. ~~É correto afirmar~~ É correto afirmar que:

a) um dos estagiários reviu 10 processos;

b) todos os estagiários reviram, cada um, pelo menos 5 processos;

c) um dos estagiários só reviu 2 processos;

d) Quatro estagiários reviram 7 processos e dois estagiários reviram 6 processos;

e) pelo menos um dos estagiários reviu 9 processos ou mais.

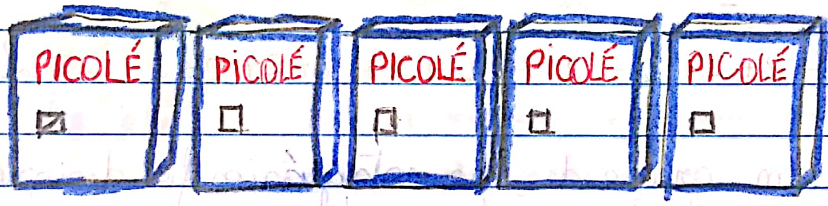
$6 \times 8 = \boxed{48 + 2 \text{ processos}}$

6 estagiários reviram 8 processos, porém

os dois últimos processos foram revistos por pelo menos um estagiário.

Resposta: Pelo menos um reviu nove ou mais processos

6) Qual o número mínimo de picolé que se deve ter para que um sorveteiro distribua em 5 caixas e ao menos 5 em um lote?



Casa: as caixas (5)

Pombo: a quantidade de picolés (21)

relação: distribuir os picolés de acordo com as casas até que pelo menos uma fique com 5 unidades dentro.

Resposta: Deve ter no mínimo 21 picolés pois $4 \times 5 = 20$ mais um picolé 21 e assim faz com que uma caixa tenha 5 picolés

Apesar do tempo bastante limitado para o desenvolvimento desse trabalho, obtivemos um resultado satisfatório em relação ao nível de assimilação do conceito do PCP. Pode-se notar também uma boa receptividade dos alunos em relação à metodologia aplicada na resolução dos problemas.

A exigência de que os trabalhos fossem manuscritos foi motivada pela ideia de manter os alunos numa relação mais próxima dos problemas, buscando evitar que se fizessem simples cópias de textos da internet ou afins. De modo geral, a autenticidade das resoluções pode ser constatada pela sutileza dos erros conceituais e de concordância em alguns dos textos.

Nota-se também uma disparidade na forma de se aplicar o PCP. Alguns alunos são mais objetivos na aplicação do princípio, muitas vezes até omitindo a desigualdade essencial à conclusão, enquanto outros são até repetitivos. Percebe-se também alguma predileção em relação à representação pictórica de algumas soluções.

No exercício 6 do Trabalho 1 é de se notar uma exigência irrelevante em relação aos dados do problema. O fato de os pontos distarem exatamente 10 cm não tem a menor importância em relação ao resultado. Poderia ser trocada por qualquer medida sem prejuízo do resultado. Essa situação pode ser explorada pelo professor para discutir o conceito de generalização: "E se a exigência fosse de os pontos distarem x centímetros?"

Também no exercício 4 do Trabalho 2 a quantidade r de pessoas na sala não tem nenhuma relação com a resposta obtida. Um bom motivo para o professor interpelar o aluno com o seguinte questionamento: "Que mudança pode ser feita no enunciado do exercício para que a variável r faça sentido naquele contexto?"

No exercício 4 do Trabalho 1, um dado pode "despistar" a condição para a aplicação do PCP, pois o número 106 excede em muito a exigência mínima do princípio que é $94 = 93 + 1$. O professor pode aproveitar essa situação para debater o papel das desigualdades, da exigência mínima e do intervalo de soluções do PCP.

Esses são alguns exemplos de observações que podem ser feitas em trabalhos desse tipo e que podem ser usadas pedagogicamente, pelo professor, para promover a compreensão de conceitos matemáticos e subsidiar o processo avaliativo.

6 Considerações Finais

Buscamos nesse trabalho incentivar a adoção da Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de Matemática no ensino fundamental e médio, por entender que a mesma pode servir de coadjuvante para a superação de dificuldades de aprendizagem, uma vez que ela se baseia no conhecimento prévio do aluno, na sua capacidade de manipular situações novas, aguça sua curiosidade e propõe novas formas de pensar e agir no sentido de resolver situações-problema tanto no ambiente da sala de aula como no seu cotidiano.

A metodologia da Resolução de Problemas pode exigir do professor uma mudança de atitude, muitas vezes ousada, considerando as dificuldades que lhe são impostas no âmbito do seu trabalho pedagógico implicando num certo rompimento com as práticas tradicionais do ensino de Matemática, que por comodismo persistem no nosso meio. A ideia é colocar o aluno em um papel central do processo de aprendizagem, sendo protagonista na produção de conhecimento e não mero reprodutor de fórmulas e algoritmos automatizados.

Um passo importante para que o professor aprenda a trabalhar com a metodologia da Resolução de Problemas é que ele se coloque no lugar de aluno, para perceber como ele pensa e age na tentativa de resolver problemas. Segundo Pólya (1977, p. 6), "Para sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas."

Nesse processo, cabe ao professor o papel de mediador e incentivador, buscando incutir no aluno o senso crítico e de autonomia na realização das tarefas propostas. É claro que essa incumbência impõe uma certa preparação e autonomia para que, de modo criterioso, possa adaptar os problemas matemáticos e torná-los mais contextualizados, ou seja, que façam sentido para vida das pessoas e se aproximem dos problemas do cotidiano delas.

Os enunciados dos problemas e suas interpretações devem possibilitar ao aluno fazer as inferências necessárias para compreensão dos conceitos propostos e permitir a aquisição das habilidades da generalização e transferências dos conteúdos matemáticos aprendidos para novas situações.

Por último, a opção pela aplicação da metodologia da Resolução de Problemas no trabalho com o Princípio das Casas de Pombos, deveu-se ao fato de se tratar de um conceito elementar e intuitivo, mas com uma vasta gama de possibilidades de aplicações nos vários níveis de ensino e suas muitas relações com diversos tópicos da Matemática, servindo-se bem aos propósitos desse trabalho.

A utilização da metodologia da Resolução de Problemas, tendo o PCP como pano de fundo, pode propiciar uma exploração mais ampla de todas as potencialidades desse importante tema matemático, podendo levar os alunos a melhor compreender vários conceitos, tais como as propriedades de funções, e problemas de aproximação em geometria, entre outros.

Referências

BRASIL. MEC. *Orientações Educacionais Complementares aos PCN*. Brasília, DF, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2019.

BRASIL. MEC. *Orientações curriculares para o ensino médio*. Brasília, DF, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2019.

COSTA, A. L. B. da. *O Ensino do Princípio das Casas dos Pombos no Ensino Básico*. Dissertação (Mestrado) — Profmat - SBM, 2013.

DANTE, L. R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1991.

FERREIRA, A. B. de H. *Novo Aurélio Século XXI*: o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. [S.l.]: Nova Fronteira, 1999.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. *Matemática fundamental, 2º grau*: volume único. São Paulo: FTD, 1994.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio Vol. 4*: Enunciados e soluções dos exercícios. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática, v. 4).

LIMA, H. L. *Análise Real*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. (Coleção Matemática Universitária, v. 1).

MOREIRA, C. G. T. d. A.; MARTÍNEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. *Tópicos de Teoria dos Números*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, K. I. M. de; FERNÀNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática*: Um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 283 p.

ONUCHIC, L. d. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Resolução de problemas na licenciatura em matemática: Rumo à compreensão e à aquisição das grandes ideias contidas na matemática escolar. In: IV SIPEM - SEMINÁRIO INTERNACIONAL de PESQUISA em EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Anais*. [S.l.], 2009.

PARANÁ. SEED. *Referencial Curricular do Paraná*: Princípios, direitos e orientações. Curitiba, PR, 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_parana_cee.pdf>. Acesso em: 15 ago. 2019.

PITOMBEIRA, J. B. Princípio da casa dos pombos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 8, p. 21–26, jun. 1986.

PÓLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

ROBALO, M. Gustav Lejeune Dirichlet. *Instituto Superior Técnico - Un. Lisboa - PT*, 2009. Disponível em: <http://e-escola.tecnico.ulisboa.pt/personalidade/dirichlet-johann-peter-gustav-lejeune>. Acesso em: 15 ago. 2019.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Ler, Escrever e Resolver Problemas*: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. ISBN 978-85-7307-761-2.

TAO, T. *Como Resolver Problemas Matemáticos*: Uma perspectiva pessoal. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

TOLEDO, M. A. Um estudo de um modelo para solução de problemas matemáticos. *UNIMESP - Centro Universitário Metropolitano de São Paulo*, ago. 2006. Disponível em: <http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com/2010/08/um-estudo-de-um-modelo-para-solucao-de.html>. Acesso em: 25 jul. 2019.

WAGNER, A. et al. Dirichlet. *Clubes de Matemática da OBMEP*, 2015. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/b_dirichlet/>. Acesso em: 15 ago. 2019.