UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

TIAGO MINUCELLI GARCIA

MATEMÁTICA ATUARIAL COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2019

TIAGO MINUCELLI GARCIA

MATEMÁTICA ATUARIAL COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2019

G216m

Garcia, Tiago Minucelli
Matemática atuarial como ferramenta de apoio ao ensino da matemática financeira / Tiago Minucelli Garcia. -- São José do Rio Preto, 2019
71 f. : tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientador: Jéfferson Luiz Rocha Bastos

1. Matemática. 2. Matemática Financeira. 3. Ciência Atuarial. 4. Ensino médio. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TIAGO MINUCELLI GARCIA

MATEMÁTICA ATUARIAL COMO FERRAMENTA DE APOIO AO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos – Orientador
(IBILCE/UNESP – São José do Rio Preto)

Prof[a]. Dr[a]. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
(IBILCE/UNESP – São José do Rio Preto)

Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi
(FAMAT/UFU – Uberlândia – MG)

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
12 de abril de 2019

Dedico à minha esposa, meus pais e meu irmão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela sabedoria concedida durante o aprendizado de cada disciplina do curso, o que possibilitou o desenvolvimento desta pesquisa. Sem Ele, nada teria sentido.

Agradeço também a minha família: minha esposa Daiane, por caminhar ao meu lado em todos os momentos, minha grande companheira; meus pais Fred e Tereza, pela estrutura e constantes ensinamentos forjados durante minha vida; meu irmão Diego, amigo incondicional a quem posso sempre recorrer, cujo apoio foi imprescindível para a existência deste trabalho.

Aos colegas do programa PROFMAT. Cito especialmente José Antonio, Larissa, Andressa e Tiago. Agradeço pelos bons momentos passados durante essa jornada, pelas excelentes trocas de experiência e pela constante motivação e incentivo de cada um.

Agradeço, também, à Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado e ao Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi, por prontamente aceitarem participar e contribuir com este trabalho.

Finalmente, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos, por ter assumido, com imenso comprometimento, esta orientação, pela paciência demonstrada em momentos de dificuldade e pelas incontáveis contribuições e sugestões dadas com a finalidade de aprimorar a pesquisa.

.

As batalhas na vida nunca estão ganhas. A vida é um negócio contínuo, assim como o sucesso, e requer esforço contínuo.

Margaret Thatcher, New York Times, 1989.

RESUMO

O presente trabalho propõe a utilização da Matemática Atuarial como apoio ao ensino da Matemática Financeira, envolvendo, ainda, alguns conceitos de Probabilidade. Para isso, é proposta uma simples aplicação que se vale de planilhas eletrônicas, a fim de abordar, no cotidiano do aluno, temas como Seguro de Vida e Previdência Complementar. A base teórica está fundamentada principalmente em Azevedo (2005) e Carvalho (2015), além dos PCNs, PCNEM e BNCC, os quais propõem, como sentido do aprendizado, que o conteúdo ensinado seja útil à vida e ao trabalho, além de possibilitar ao aluno uma leitura e interpretação da realidade, a fim de desenvolver suas capacidades. Após a explanação teórica das noções da Matemática Atuarial, como resultado, o capítulo final do trabalho dispõe de duas planilhas de fácil confecção para o cálculo de previdência complementar e seguro de vida, as quais podem ser aplicadas pelo professor durante a exposição do conteúdo.

Palavras-chave: Matemática Atuarial. Matemática Financeira, planilhas eletrônicas.

ABSTRACT

The present work proposes the use of Actuarial Mathematics as a support to the teaching of Financial Mathematics, involving some concepts of Probability. Therefore, a simple application is proposed which uses electronic spreadsheets, in order to approach, in the student's daily routine, subjects such as Life Insurance and Supplementary Pension. The theoretical framework is mainly based on Azevedo (2005) and Carvalho (2015), besides to PCNs, PCNEM and BNCC, which propose, as a sense of learning, that the content taught is useful to life and work, as well as enabling the student a reading and interpretation of reality in order to develop their capabilities. After the theoretical explanation of the notions of Actuarial Mathematics, as a result, the final chapter of this paper has two spreadsheets for calculation of supplementary pension and life insurance, which can be easily prepared and applied by the teacher during the content exposition.

Keywords: Actuarial Mathematic. Financial Mathematic, electronic spreadsheets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Ensino Médio, ao tratar da Matemática, busca, de modo geral, contextualizar os temas apresentados, aplicando na sala de aula cada item aprendido no cotidiano dos alunos. Como apoio aos professores, a fim de estabelecer diretrizes que visem à melhoria do ensino, foram criados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), os quais não exigem que os professores e, até mesmo, os materiais didáticos obrigatoriamente os sigam, mas que servem de ajuda ao desenvolvimento do trabalho educativo das escolas.

Além dos PCNs, existem, também, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), que são específicos por áreas. Os correspondentes à área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias são direcionados a auxiliar o professor no desenvolvimento de competências específicas de disciplinas como a Matemática, no sentido de que o aluno seja capaz de atingir as habilidades básicas da disciplina lecionada.

Na apresentação da proposta, o documento já direciona quais as expectativas para cada área de conhecimento tratada nele (BRASIL, 1999, p. 4):

> Este documento procura apresentar, na seção sobre *O Sentido do aprendizado* na área, uma proposta para o Ensino Médio que, sem ser profissionalizante, efetivamente propicie um aprendizado útil à vida e ao trabalho, no qual as informações, o conhecimento, as competências, as habilidades e os valores desenvolvidos sejam instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal ou de aprendizado permanente, evitando tópicos cujos sentidos só possam ser compreendidos em outra etapa de escolaridade.

Tratando exclusivamente da Matemática, no PCNEM está definido que,

> no ensino médio, etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL, 2002, p. 111).

A existência de um documento oficial (o PCNEM) que ampara o professor no que tange ao ensino da Matemática é de suma importância, tendo em vista a dificuldade de se ensinar esse conteúdo extremamente teórico e complexo. Para além de um ensino automático, justamente por ser excessivamente teórico, é necessário que o professor saiba tornar esse conteúdo específico em algo interessante, trazendo à tona o desejo de aprendizagem dos alunos.

As diretrizes apresentadas nos PCNEM trazem o sentido de que o ensino da Matemática deve ocorrer de forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos do aluno, de modo que ele seja capaz de desenvolver competências e habilidades essenciais à formação da vida (BRASIL, 2002).

Recentemente, o Ministério da Educação desenvolveu a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento base para as aprendizagens previstas em toda a educação básica. Ainda em fase de implementação, a BNCC tem sido gradativamente aplicada nas escolas durante o ano de 2019, com previsão de ter sua implantação integralmente finalizada no início de 2020.

A BNCC visa ao desenvolvimento de dez competências gerais da educação básica. Destaca-se, entre elas, a sexta competência:

> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. (BRASIL, 2018, p. 9)

Como se observa, a BNCC continua com o mesmo foco dos PCNs e dos PCNEM, corroborando a ideia de que a vivência e cultura que cada aluno traz para dentro da sala de aula deve ser usada em favor do desenvolvimento do ensino que será apresentado a ele.

Tratando especificamente da Matemática no ensino médio, a BNCC mais uma vez afirma a real necessidade de se vincular o conteúdo estuado ao cotidiano dos alunos: “os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida – por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles” (BRASIL, 2018, p. 535).

Desse modo, o presente trabalho tem como foco apresentar uma ferramenta de ensino de Matemática Financeira para alunos do ensino médio, analisando esse tema por meio da Matemática Atuarial.

A Matemática Atuarial é um ramo da Matemática Financeira dedicada a estudar diferentes áreas do universo financeiro que possuem certo risco na aplicação, valendo-se de dados estatísticos e de ferramentas da Matemática, como a Probabilidade e a Matemática Financeira. Os principais ramos de atuação da Matemática Atuária são os seguros e as previdências, como seguro de vida, seguro de automóveis e previdência complementar, temas que, de certa forma, são novidade aos alunos, o que causa uma maior atração por parte deles.

A partir do contexto exposto e dos objetivos apresentados, este trabalho está organizado em três capítulos.

O Capítulo I, *Matemática Financeira: Principais Tópicos*, apresenta os pontos centrais da Matemática Financeira, conteúdo teórico que será base para o trabalho, uma vez que os cálculos relacionados à Matemática Atuarial estão intimamente ligados ao tema. Serão analisadas taxas, fluxos de caixa, rendas, séries de pagamentos.

No Capítulo II, *Noções de Matemática Atuarial*, o presente trabalho aborda pontos da Matemática Atuarial, com o intuito de introduzir, no ensino médio, alguns conceitos do cotidiano relacionados ao tema, como seguros e previdência.

Finalmente, no Capítulo III, *Planilha Eletrônica: Proposta de Aplicação*, será apresentada uma possível aplicação da Matemática Atuarial por meio da Informática. Tal proposta poderá ser utilizada pelo professor em sala.

1 MATEMÁTICA FINANCEIRA: PRINCIPAIS TÓPICOS

O dinheiro sofre variações no decorrer do tempo. Isto é facilmente notado no cotidiano, visto nos noticiários e jornais. Diversos fatores impõem ao dinheiro tais modificações, mas o tempo é o que possui mais peso. Nesse sentido, algumas ferramentas são adotadas para corrigir essa perda monetária.

De acordo com Azevedo (2005), a Matemática se subdivide em um ramo específico, chamado de Matemática Financeira, que se preocupa com o estudo das variações monetárias que ocorrem ao longo do tempo. Neste campo de estudo, a Matemática possibilita o acompanhamento das variações que ocorrem por conta dos juros que fazem parte de todo fluxo de caixa.

Ao estudar a variação do dinheiro, a Matemática Financeira revela uma íntima ligação com o cotidiano das pessoas, uma vez que, corriqueiramente, há diversos tipos de operações financeiras em diferentes produtos, como: financiamentos imobiliários, financiamentos de veículos, empréstimos bancários pessoais, consórcios, previdência complementar, seguros. Essas operações financeiras possuem em comum a aplicação de um determinado valor por um determinado período, o que gera a ocorrência de juros que acarretam um aumento do valor final.

Para um melhor entendimento da Matemática Financeira, vejamos, a seguir, os principais termos utilizados nesse campo de estudo, usando como referência Azevedo (2005):

Capital ou Principal (P): valor da aplicação financeira; pode ser expresso em moeda ou em bens e direitos, valorado no início da operação;

Períodos de Capitalização (n): quantidade de períodos por que o capital permanecerá aplicado à devida taxa de juros;

Taxa de Juros (i): taxa que, expressa em porcentagem, será aplicada ao capital durante os períodos de capitalização, a fim de gerar os juros;

Juros (J): valor obtido da aplicação do capital a uma determinada taxa de juros, ou seja,

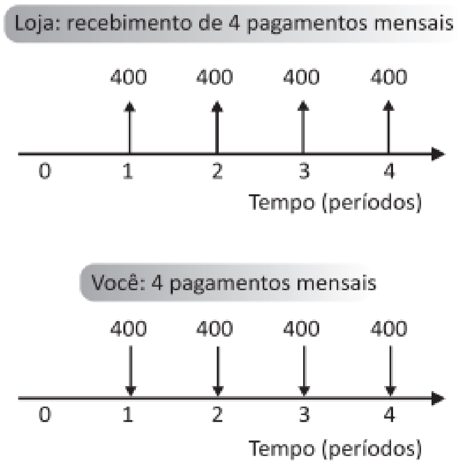
$$J = Pi;$$

Montante (M): valor final, obtido após a ocorrência dos juros:

$$M = P + J.$$

Fluxo de Caixa: movimento contínuo referente às entradas e saídas de dinheiro ao longo do tempo. Sua representação se dá por flechas para cima (entradas) e para baixo (saídas), como se observa na representação a seguir de um produto que teve seu valor total à vista, correspondente à R$ 1.500,00, parcelado: para o vendedor, há o recebimento de quatro parcelas de R$ 400,00, enquanto que, para o comprador, há o pagamento dessas mesmas quatro parcelas:

Figura 1 – Fluxo de caixa.



Fonte: PUCCINI, 2012, p. 18.

Nesse sentido, os juros, mais especificamente, equivalem à remuneração paga pelo dinheiro emprestado no decorrer do tempo. Assim, se uma pessoa precisa de um valor para comprar um produto hoje, mas não tem esse dinheiro, toma a quantia emprestada de outra pessoa, a quem pagará os juros correspondentes ao tempo em que permanecer devendo. Do mesmo modo, quem ofereceu o empréstimo será remunerado por não utilizar esse dinheiro imediatamente.

Para o cálculo dos juros, podem-se utilizar dois sistemas: sistema de capitalização simples e sistema de capitalização composto.

a) Sistema de capitalização simples

No sistema de capitalização simples, a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial. Não há, portanto, juros incidentes sobre cada parcela de juros obtidos a cada período. Assim, o acréscimo no capital comporta-se de forma linear, como uma progressão aritmética (AZEVEDO, 2005).

O montante, nesse sistema, é obtido da seguinte forma:

$$M = P + J, \text{ onde: } J = Pin.$$

b) Sistema de capitalização composta

No sistema de capitalização composta, os juros incidem sobre o montante obtido ao final do período de capitalização anterior e passam a integrar o capital para o cálculo dos juros do período seguinte, ou seja, o montante sofre variação exponencial (como uma progressão geométrica) e não linear, como no sistema de capitalização simples (AZEVEDO, 2005). Desse modo, a obtenção do montante pode ser representada conforme o seguinte quadro:

Quadro 1 – Juros compostos.

Períodos (n)	Variação	Montante (M)
0	P	
1	$P(1+i)$	$P(1+i)$
2	$P(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^2$
3	$P(1+i)(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^3$
4	$P(1+i)(1+i)(1+i)(1+i)$	$P(1+i)^4$
.	.	.
.	.	.
n	$P(1+i)(1+i)\ldots(1+i)$	$P(1+i)^n$

Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 11.

Assim, o montante obtido após a aplicação do capital por *n* períodos será:

$$M = P\,(1+i)^n.$$

Exemplo 1 *(adaptado de AZEVEDO, 2005, p. 4):*

João toma R$ 5.000,00 emprestados de Pedro, a serem pagos de acordo com o sistema de capitalização composta, após 4 meses, a uma taxa de juros de 3% ao mês. Qual será o valor pago por João a Pedro ao final dos 4 meses?

Temos:

P = R$5.000,00

i = 3% ao mês

n = 4 meses.

O montante recebido por Pedro ao final dos 4 meses será calculado do seguinte modo:

$$M = P(1+i)^n;$$
$$M = 5.000\,(1+0{,}03)^4;$$
$$M = 5.000 \times 1{,}034;$$
$$M = 5.000 \times 1{,}1255;$$
$$M = R\$\,5.627{,}54.$$

Aplicando o sistema de capitalização simples ao exemplo 1, podemos observar a diferença entre os modos de capitalização:

$$J = Pin = 5.000 \times 0{,}03 \times 4 = 600$$

Logo,

$$M = P + J = R\$5.600{,}00.$$

Como se observa, os montantes obtidos após a operação financeira não são os mesmos nas duas situações apresentadas. No sistema de capitalização simples, a incidência da taxa de juros ocorre de forma independente sobre cada mês. Já na aplicação do sistema composto, há uma maior incidência de juros e, portanto, o montante se torna maior.

A expressão $(1+i)^n$ é chamada de **Fator de Valor Futuro** (FVF), referindo-se ao fator de multiplicação para se obter o valor da aplicação após *n* períodos de capitalização, considerando a taxa de juros *i*.

O sistema de capitalização composta é o mais comum entre as operações financeiras de modo geral.

No Anexo I, estão disponíveis noções básicas sobre a Progressão Geométrica, ferramenta fundamental para os cálculos da Matemática Financeira.

Nas próximas subseções, serão apresentados alguns importantes conceitos para um bom entendimento dos cálculos na Matemática Financeira, como taxas, valores presente e futuro, renda e séries de pagamento.

1.1 Taxas

A seguir, vamos apresentar as definições de alguns conceitos relacionados às taxas de juros, utilizados na Matemática Financeira, de acordo com os períodos de aplicação.

1.1.1 Taxas proporcionais

De acordo com PUCCINI (2012), duas taxas são proporcionais entre si se mantêm a mesma proporção com relação aos seus respectivos períodos de aplicação, ou seja, as taxas de juros i_1, relativa ao período n_1, e i_2, relativa ao período n_2 (com n_1 e n_2 na mesma unidade) são proporcionais se:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{i_1}{i_2}\,.$$

Exemplo 2 *(adaptado de PUCCINI, 2012):*

Uma taxa de juros de 30% ao ano corresponde proporcionalmente a uma taxa mensal de 2,5%, pois:

$$\frac{12}{1} = \frac{30}{2{,}5}.$$

Como se observa no exemplo acima, a razão entre os períodos é a mesma que a razão entre as taxas, logo, as taxas são proporcionais.

1.1.2 Taxas equivalentes

Duas taxas são ditas equivalentes quando produzem o mesmo efeito sobre um capital durante o mesmo período de tempo (PUCCINI, 2012).

Exemplo 3 *(adaptado de PUCCINI, 2012):*

Duas taxas, uma de 2,5% ao mês e outra de 30% ao ano, são equivalentes? Vamos dividir em dois casos:

i) Considerando o sistema de capitalização simples, vamos adotar um capital de R$1.000,00 e observar os montantes M_1 e M_2 obtidos a partir da aplicação das duas taxas dadas:

$$M = P + Pin$$
$$M_1 = 1.000 + 1.000 \times 0{,}025 \times 12$$
$$M_1 = 1.000 + 300$$
$$M_1 = R\$1.300{,}00\,.$$

$$M_2 = 1.000 + 1.000 \times 0{,}3 \times 1$$
$$M_2 = 1.000 + 300$$
$$M_2 = R\$\,1.300{,}00\,.$$

ii) Vamos considerar agora o sistema de capitalização composta. Adotando o mesmo capital de R$1.000,00, analisemos os montantes M_1 e M_2:

$$M = P(1+i)^n$$
$$M_1 = 1.000 \times (1 + 0{,}025)^{12}$$
$$M_1 = 1.000 \times 1{,}025^{12}$$
$$M_1 = R\$\,1.344{,}89.$$

$$M_2 = 1.000 \times (1 + 0{,}3)^1$$
$$M_2 = 1.000 \times 1{,}3$$
$$M_2 = R\$\,1.300{,}00.$$

A partir dos resultados no exemplo dado, observamos que as taxas são equivalentes quando tratamos do sistema de capitalização simples, mas não são equivalentes quando aplicadas ao sistema de capitalização composta. Isso se deve ao fato de que a capitalização composta funciona como uma progressão geométrica, que possui variação exponencial, fazendo o dinheiro aumentar mais rapidamente que a capitalização simples, já que esta equivale a uma progressão aritmética.

A tabela a seguir apresenta uma comparação quanto à equivalência entre as taxas no sistema de capitalização simples e composto. Considerando uma taxa de 0,2% ao dia, podemos ver as taxas equivalentes com a capitalização mensal, bimestral, trimestral, quadrimestral, semestral e anual. Fica claro o aumento da diferença entre as taxas com o decorrer do tempo:

Tabela 1 – Taxas de equivalência: juros simples x juros compostos.

Taxas	Juros Simples (%)	Juros Compostos (%)
Diária	0,2	0,2
Mensal	6,0	6,18
Bimestral	12,0	12,74
Trimestral	18,0	19,70
Quadrimestral	24,0	27,09
Semestral	36,0	43,28
Anual	72,0	105,30

Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 20.

Como explicitado anteriormente, os juros compostos incidem sobre o valor principal de forma cumulativa e exponencial, fazendo com que, quanto mais vezes o dinheiro é capitalizado, maior será o montante obtido.

1.1.3 Taxa nominal e taxa efetiva

No sistema de capitalização composta, nem sempre a taxa de juros mencionada corresponderá diretamente ao percentual de fato aplicado ao capital. Segundo Azevedo (2005), cada caso dependerá dos períodos de capitalização aos quais o capital estará sujeito. Nesse sentido, o efeito final produzido com a aplicação do capital, em termos percentuais, corresponde à **taxa efetiva**. Já a taxa inicialmente mencionada, é a **taxa nominal**.

Exemplo 4 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

João toma R$5.000,00 emprestados de Pedro a uma taxa de 24% ao ano, capitalizada mensalmente. João pagará Pedro após um ano. Desse modo, a taxa nominal a que os R$5.000,00 emprestados estará sujeito é a de 24%. Porém, a capitalização será mensal, ou seja, haverá 12 períodos de capitalização. Desse modo, ao efetuar os cálculos devemos considerar a taxa como:

$$i = \frac{24}{12} = 2\% \text{ } ao \text{ } mês.$$

Portanto, o montante obtido seria:

$$M = 5.000 \times (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$M = 5.000 \times 1{,}02^{12}$$

$$M = R\$\ 6.341{,}21.$$

Observamos que os juros obtidos com a operação correspondem a aproximadamente 26,82%. Portanto, a taxa efetiva da operação é de 26,82% ao ano, maior que a taxa nominal (24% o ano).

A tabela a seguir compara a taxa efetiva em diferentes períodos de capitalização, considerando uma taxa nominal de 72% ao ano:

Tabela 2 – Taxa nominal e taxa efetiva: período de capitalização x taxa efetiva anual

Períodos de Capitalização	Taxa do Período	Taxa Efetiva Anual
Mensal	72/12 = 6%	101,22%
Bimestral	72/6 = 12%	97,38%
Trimestral	72/4 = 18%	93,88%
Quadrimestral	72/3 = 24%	90,66%
Semestral	72/2 = 36%	84,96%
Anual	72/1 = 72%	72,00%

Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 21.

Com uma análise dos dados apresentados na tabela acima, é possível compreender que, quanto mais vezes o valor é capitalizado, maior será a taxa efetiva anual, característica do sistema de capitalização composta.

1.2 Valor presente em um fluxo de caixa

Em um fluxo de caixa, os valores são descritos de acordo com o decorrer do tempo. Durante estes períodos, se for considerada uma taxa de juros, pode-se entender que cada um dos valores indicados podem ser descritos no presente, descontando-se os referidos juros. O valor obtido é o **Valor Presente** (PV) daquela parcela (PUCCINI, 2012).

De modo análogo ao Fator de Valor Futuro (FVF), existe o **Fator de Valor Presente** (FVP), que se refere ao fator de multiplicação que traz o valor da aplicação após *n* períodos de capitalização a uma taxa *i* de juros ao seu valor no momento presente. Nesse caso,

$$FVP = (1+i)^{-n}.$$

Exemplo 5 *(adaptado de PUCCINI, 2012):*

Um contribuinte tem os seguintes débitos inscritos na prefeitura de sua cidade: uma parcela de $ 10.000,00 vencível em 30 dias, uma segunda parcela de $ 10.000,00 vencível em 60 dias e uma última parcela de $ 15.000,00 vencível em 90 dias. Sabendo que o dinheiro sofre valorização de 3% ao mês, que valor a prefeitura deverá cobrar se esse contribuinte desejar pagar à vista esses débitos? Em outras palavras, qual o valor à vista da dívida equivalente às três parcelas?

O valor nominal da dívida do contribuinte é R$ 10.000,00 + R$ 10.000,00 + R$ 15.000,00 = R$ 35.000,00. Porém, quando se considera o valor presente dessa dívida, tem-se:

$$PV = 10.000 \times (1 + 0{,}03)^{-1} + 10.000 \times (1 + 0{,}03)^{-2} + 15.000 \times (1 + 0{,}03)^{-3}$$

$$PV = 9.708{,}74 + 9.425{,}96 + 13.727{,}12$$

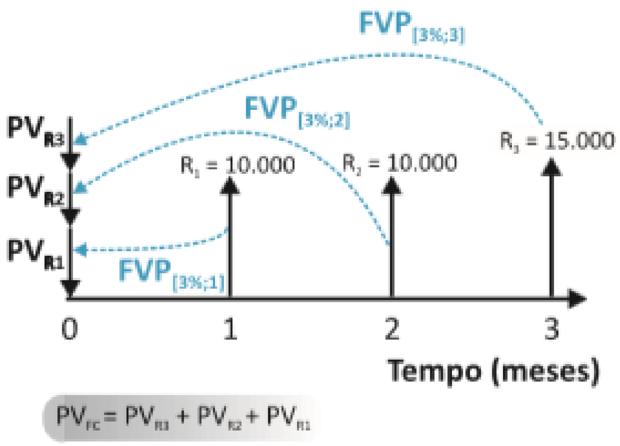
$$PV = 9.708{,}74 + 9.425{,}96 + 13.727{,}12$$

$$PV = 32.861{,}82.$$

Desse modo, o valor da dívida, para que seja paga à vista, deve ser R$ 32.861,82, referente ao valor presente do fluxo de caixa.

A figura a seguir ilustra o fluxo de caixa do exemplo 5:

Figura 2 – Valor presente do fluxo de caixa.



Fonte: PUCCINI, 2012, p. 86

1.3 Renda

A renda refere-se a uma série de pagamentos feitos em diferentes períodos. Quando os períodos de tempo que separam tais pagamentos são constantes, essa série é considerada uniforme (PUCCINI, 2012).

As rendas uniformes são classificadas em rendas antecipadas e rendas postecipadas. A série de pagamentos uniforme pode se dar a partir de um valor principal, referente ao valor atual da série (P), ou a série de pagamentos pode ser feita objetivando um montante final, que corresponde ao valor futuro da série (M).

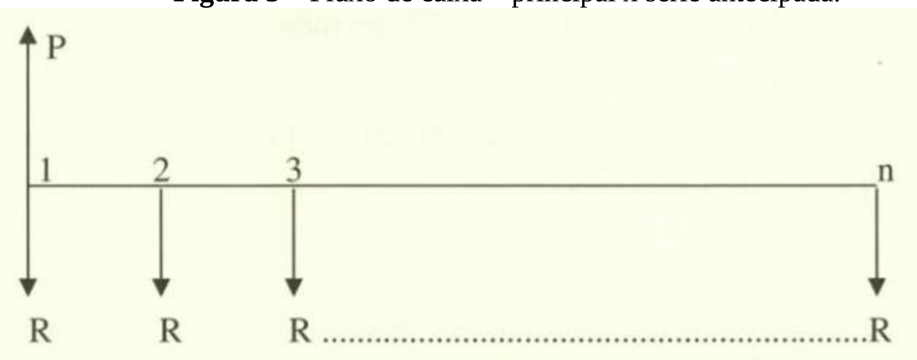
A seguir, será apresentada cada uma dessas séries uniformes. O valor de cada pagamento será expresso por *R*, enquanto *n* refere-se à quantidade de pagamentos efetuados e *i* à taxa de juros à qual a operação será submetida.

1.3.1 Valor presente x prestações

1.3.1.1 Série antecipada

Conforme Azevedo (2005), a série **antecipada** corresponde à série de pagamentos feita no início de cada período, ou seja, os pagamentos se iniciam imediatamente (AZEVEDO, 2005). O fluxo de caixa a seguir demonstra uma situação hipotética de uma dívida que deve ser paga em *n* parcelas, sendo a primeira parcela paga imediatamente e as demais com períodos uniformes:

Figura 3 – Fluxo de caixa – principal x série antecipada.



Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 33.

O valor do principal deve ser igual à soma das prestações trazidas ao seu valor presente, por meio do Fator de Valor Presente (FVP). A relação entre o principal e o valor de cada prestação é a seguinte:

$$P = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-(n-1)}$$

$$P = R\left(1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}\right).$$

O termo $\left(1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)}\right)$ é uma soma de progressão geométrica de n termos – cuja demonstração está no Anexo I – com primeiro termo $a_1 = 1$, e razão $q = (1+i)^{-1}$. Logo:

$$P = R\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}}$$

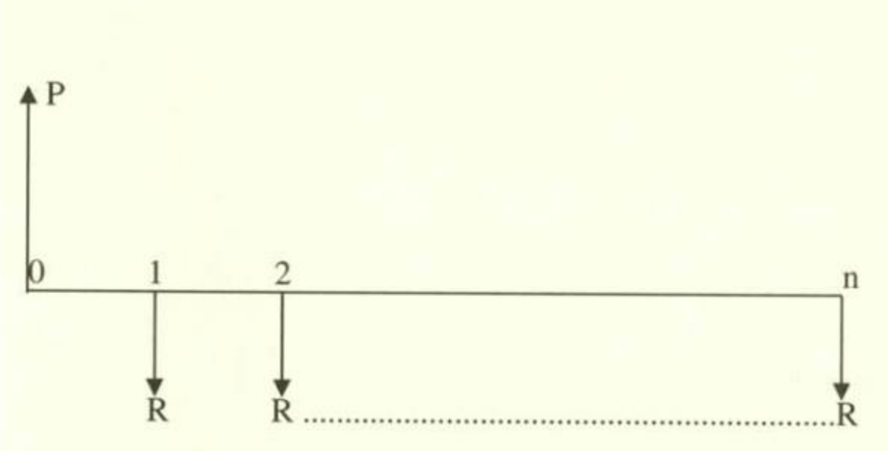
$$P = R\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{(1+i)}}$$

$$P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}.$$

1.3.1.2 Série postecipada

Neste caso, quando a série é **postecipada**, a série de pagamentos é feita no final de cada período, ou seja, os pagamentos se iniciam ao final do primeiro período de capitalização, de acordo com Azevedo (2005). O fluxo de caixa a seguir representa uma dívida que será paga em n parcelas, sendo a primeira parcela paga ao final do primeiro período e as demais com períodos uniformes:

Figura 4 – Fluxo de Caixa – Principal x Série Postecipada.



Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 35.

A relação entre o principal e o valor de cada prestação, para a situação de série de pagamentos postecipada pode ser obtida de forma análoga à série de pagamentos antecipada, do seguinte modo:

$$P = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-n}$$

$$P = R((1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-n})$$

$$P = R(1+i)^{-1}\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{(1+i)}}$$

$$P = R(1+i)^{-1}\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$$

$$P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Exemplo 6 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

Considere uma empresa que toma um empréstimo de $20.000,00 que será pago em 10 prestações iguais, mês a mês, sendo a primeira quitada no ato da operação. Considerando uma taxa de 1% ao mês, qual deverá ser o valor de cada parcela?

Nesse problema, temos:

P = R$20.000,00;

n = 10;

i = 1% ao mês.

Utilizando a fórmula da série de pagamentos antecipada, temos:

$$20.000 = R\frac{(1+0{,}01)^{10}-1}{0{,}01(1+0{,}01)^{9}}$$

$$R = 20.000\frac{0{,}01(1{,}01)^{9}}{(1{,}01)^{10}-1}$$

$$R = 2.090{,}73.$$

A prestação R será R$ 2.090,73.

Tomemos a mesma situação, considerando os mesmos valores, mas com a primeira prestação paga após decorrido o primeiro mês, temos:

P = R$20.000,00;

n = 10;

i = 1% ao mês.

O cálculo da prestação é dado por:

$$20.000 = R\frac{(1+0{,}01)^{10}-1}{0{,}01(1+0{,}01)^{10}}$$

$$R = 20.000\frac{0{,}01(1{,}01)^{10}}{(1{,}01)^{10}-1}$$

$$R = 2.111{,}64.$$

A prestação R será R$ 2.111,64.

1.3.2 Montante x prestações

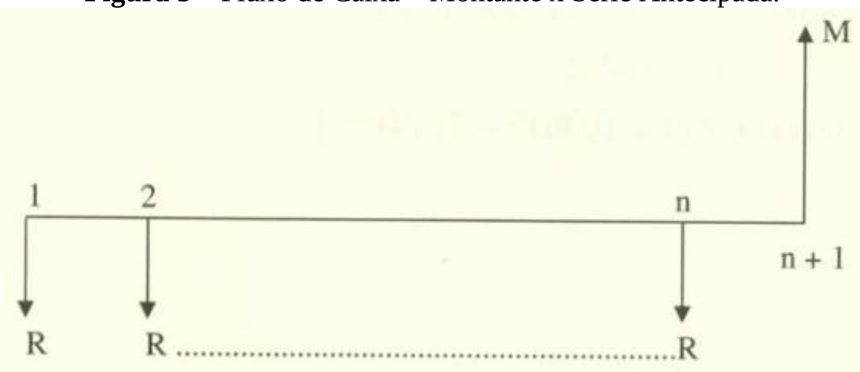
Neste item, serão comparados o valor das prestações com o montante obtido ao final de uma série de pagamentos.

1.3.2.1 Série antecipada

Para esta situação, de acordo com Azevedo (2005), faz-se uma série de pagamentos, a fim de se obter um montante que será resgatado um período após o último pagamento.

O fluxo de caixa a seguir representa esse caso:

Figura 5 – Fluxo de Caixa – Montante x Série Antecipada.



Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 37.

O valor do montante deve ser igual à soma das prestações levadas ao seu valor futuro, por meio do Fator de Valor Futuro (FVF). A relação entre o montante obtido e o valor de cada pagamento, em uma série antecipada, é dada por:

$$M = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + \cdots + R(1+i)$$

$$M = R\big((1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n\big)$$

$$M = R(1+i)\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

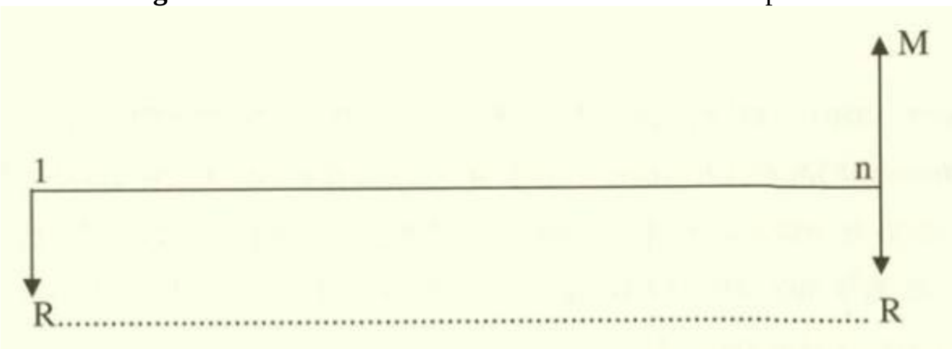
$$M = R\frac{(1+i)((1+i)^n - 1)}{i}.$$

1.3.2.2 Série postecipada

No caso da série postecipada, o montante será resgatado ao mesmo tempo, a fim de se obter um montante que será resgatado junto ao último pagamento.

Na figura a seguir, está demonstrado o fluxo de caixa que exemplifica a situação:

Figura 6 – Fluxo de Caixa – Montante x Série Postecipada.



Fonte: AZEVEDO, 2005, p. 38.

A relação entre o montante final e o valor dos pagamentos em uma série postecipada pode ser obtida analogamente à anterior:

$$M = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i) + R$$

$$M = R(1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1})$$

$$M = R\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}$$

$$M = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Exemplo 7 *(adaptada AZEVEDO, 2005):*

Deseja-se obter, após um ano, um valor de R$100.000,00. Para tanto, será feita uma série de 12 pagamentos, mês a mês, os quais serão aplicados a uma taxa de 3% ao mês. Vamos determinar o valor de cada pagamento em cada situação: i) o montante sendo resgatado um mês após o último pagamento; ii) o montante sendo resgatado junto ao último pagamento.

Desse modo, no caso i, temos:

$$100.000 = R\frac{(1+0{,}03)((1+0{,}03)^{12}-1)}{0{,}03}$$

$$R = 100.000\frac{0{,}03}{(1+0{,}03)((1+0{,}03)^{12}-1)}$$

$$R = 100.000 \times \frac{0{,}03}{(1+0{,}03)((1+0{,}03)^{12}-1)}$$

$$R = 6.840{,}98.$$

Logo, deverão ser feitos 12 pagamentos de R$6.480,98.

Agora, alterando a característica da retirada do montante, o qual será obtido ao mesmo tempo em que se efetua o último pagamento, temos:

$$100.000 = R\frac{(1+0{,}03)^{12}-1}{0{,}03}$$

$$R = 100.000\frac{0{,}03}{(1+0{,}03)^{12}-1}$$

$$R = 100.000\frac{0{,}03}{(1+0{,}03)^{12}-1}$$

$$R = 7.046{,}21.$$

Desse modo, o valor dos pagamentos será R$ 7.046,21.

1.3.3 Renda perpétua

Nos termos de Azevedo (2005), tomando a fórmula da série de pagamentos postecipada e fazendo *n* tender ao infinito, obtém-se uma série de pagamentos infinita, chamada também de **renda perpétua**. A renda perpétua é utilizada em várias situações, como algumas aplicações financeiras e locação de imóveis.

$$P = R\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}.$$

Quando tendemos *n* ao infinito, temos:

$$P = \frac{R}{i}.$$

Exemplo 8 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

Uma casa, cujo valor é de R$ 250.000,00, será alugada. Considerando que o dinheiro vale 1% ao mês, qual deverá ser o valor do aluguel?

$$250.000 = \frac{P}{0{,}01}$$

$$P = 250.000 \times 0{,}01$$

$$P = 2.500.$$

O aluguel cobrado será de R$ 2.500,00.

No capítulo seguinte, serão abordadas noções da Matemática Atuarial, tema central do presente trabalho. As ferramentas expostas até aqui servirão de base para os cálculos a serem expostos.

2 NOÇÕES DE MATEMÁTICA ATUARIAL

O objetivo dessa área da Matemática é calcular valores dos prêmios, séries de pagamentos, prazos, levando em conta o risco de cada aplicação, baseando-se em dados estatísticos (AZEVEDO, 2005).

A seguir, serão apresentados alguns conceitos fundamentais ligados à Atuária para sua melhor compreensão do conteúdo. O professor do ensino médio poderá incluir alguns desses conceitos em sua pauta de ensino da Matemática Financeira, objetivando inserir o aluno no universo da Matemática Atuarial.

Os exemplos que serão indicados neste capítulo podem ser trabalhados em sala, visando à interpretação de tabelas, análise de dados, interpretação e aplicação de fórmulas,

Ainda, no Anexo II, estão dispostos alguns dos principais conceitos e definições sobre Probabilidade, tema que também se faz presente na Matemática Atuarial. O anexo possui alguns exemplos de exercícios que podem ser aplicados pelo professor durante sua introdução à Matemática Atuarial

2.1 Esperança matemática

A **esperança matemática (E)** refere-se ao valor presente do montante que se espera receber em um determinado evento, levando-se em conta a probabilidade de obtê-lo, e pode ser calculada da seguinte forma:

$$E = Qpv^n.$$

Onde:

E = esperança matemática, ou seja, o valor que se espera receber;

Q = ganho possível;

p = probabilidade de que ocorra o ganho total Q;

v^n = fator de descapitalização ou fator de valor presente, onde $v = 1/(1+i)$, em que i é a taxa de capitalização do dinheiro no tempo e n é a quantidade de vezes que o valor é capitalizado.

Exemplo 9 *(AZEVEDO, 2005):*

"Uma rifa, que levará quatro meses para o seu sorteio, apresenta como prêmio um automóvel no valor de R$ 60.000,00. Sabendo-se que o total de bilhetes é 15.000, qual o

valor pelo qual deverá ser vendida cada cartela, se a taxa de juros é de 1% ao mês?" (p. 101)

$$E = 60.000 \frac{1}{15.000} \left(\frac{1}{1 + 0{,}01} \right)^4$$

$$E = 3{,}84.$$

A cartela de rifa deverá ser comercializada a R$ 3,84, levando-se em conta a valorização do dinheiro durante os 4 meses até o sorteio, e a probabilidade para que certa cartela seja a contemplada.

Na Matemática Atuarial, a esperança matemática refere-se ao prêmio que deverá ser pago no início, ou durante a aplicação, sendo, prêmio, segundo Azevedo (2005), o "valor pago pelo segurado ao segurador, para que este assuma a responsabilidade por um determinado risco." (p. 95).

2.2 Tábuas de mortalidade

De acordo com Azevedo (2005), as tábuas de mortalidade apresentam estatisticamente o risco de morte de cada indivíduo por faixa etária. Tendo em vista que a idade é o principal fator de variação do risco de morte das pessoas, as tábuas de mortalidade são as principais ferramentas nas quais estão baseados os estudos da Matemática Atuarial.

Basicamente, os dados estatísticos são obtidos a partir de uma população previamente determinada, analisando-se, ano a ano, o percentual de pessoas que permanecem vivas em cada idade, até que não haja sobreviventes.

Existem diferentes tábuas de mortalidade, as quais são normatizadas pela Superintendência de Seguros Privados (SUSEP), no entanto, independentemente de qual seja, elas são divididas em colunas, normalmente nomeadas do seguinte modo:

x = idades, em anos;
l_x = pessoas que estão vivas com a idade x;
d_x = pessoas que morrem com a idade x;

q_x = taxa de mortalidade para a idade x, dada pela razão entre a quantidade de pessoas que morrem com a idade x e a quantidade de pessoas que chegam vivas à idade x, dada por:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

A tabela a seguir apresenta parte da tábua de mortalidade AT-2000, considerando uma população inicial de 100.000 pessoas. Ressalta-se que, ante à proporcionalidade dos dados e ao fato de que as populações estudadas podem ter vários tamanhos, os valores das variáveis l_x e d_x podem conter números decimais:

Tabela 3 – Tábua de Mortalidade AT-2000.

x	**l_x**	**d_x**	**q_x(%)**
0	100.000,00	231,10	0,2311
1	99.768,90	90,39	0,0906
2	99.678,51	50,24	0,0504
3	99.628,27	40,65	0,0408
...	...	...	...
25	98.637,41	67,67	0,0686
26	98.569,74	70,38	0,0714
27	98.499,36	72,69	0,0738
...	...	...	...
39	97.568,27	92,20	0,0945
40	97.476,07	101,67	0,1043
41	97.374,40	113,73	0,1168
...	...	...	...
50	95.627,12	318,44	0,3330
51	95.308,68	347,59	0,3647
52	94.961,09	377,95	0,3980
53	94.583,15	409,64	0,4331
...	...	...	...
111	12,08	8,07	66,8186
112	4,01	2,96	73,9483
113	1,04	0,85	81,8254
114	0,19	0,17	90,4945
115	0,02	0,02	100,0000

Fonte: Adaptado de AZEVEDO, 2005, p. 103.

Podemos, ainda, atribuir uma variável p_x à taxa de pessoas que sobrevivem à idade x, que é dada por:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Podemos observar facilmente que $p_x + q_x = 1$, uma vez que $l_{x+1} = l_x - d_x$.

A partir da tábua de mortalidade apresentada, é possível extrair diversas informações, por exemplo, d_{50} = 318,44 representa o número de pessoas que morreram com mais de 50 e menos de 51 anos do grupo incialmente estudado, representando 0,3330% das pessoas que estavam vivas ao completarem 50 anos. Esse percentual pode ser observado, também, como a probabilidade de que uma pessoa com 50 anos morra antes de completar 51 anos.

Outra informação obtida é que se pode encontrar a probabilidade de uma pessoa viva quando completa x anos estar viva ainda ao completar $x+n$ anos, fazendo:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Onde l_{x+n} é a quantidade de pessoas vivas ao completarem $x+n$ anos e l_x a quantidade de pessoas vivas quando completam x anos e n é a quantidade de anos decorridos entre os períodos.

Exemplo 10 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

Qual a probabilidade de alguém com 39 anos sobreviver à idade de 53 anos?

Basta calcular a razão entre l_{53} *e* l_{39}*, ou seja:*

$$\frac{l_{53}}{l_{39}} = \frac{94.583,15}{97.568,27} = 0,9694.$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa com 39 anos completar 53 anos é de 96,94%.

Exemplo 11 *(AZEVEDO, 2005):*

"Qual a probabilidade de alguém com 27 anos morrer a partir dos 50 anos sem, contudo, completar 53 anos? (p. 105)"

Este exemplo deve ser visto como a probabilidade de que ocorram dois eventos consecutivos. Assim, calculamos primeiro a probabilidade de que a pessoa de 27 anos esteja ainda viva com 50 anos:

$$P_1 = \frac{l_{50}}{l_{27}} = \frac{95.627,12}{98.499,36} = 0,9708.$$

Agora, vamos calcular a probabilidade P_2 de que uma pessoa com 50 anos morra antes de completar 53 anos.

Para o cálculo de P_2, o evento desejado considerado é a soma da quantidade de pessoas que morrem com 50, 51 e 52 anos, e o espaço amostral é a quantidade de pessoas que estavam vivas com 50 anos. Desse modo, calculamos a probabilidade de que uma pessoa com 50 anos completos morra com 50, 51 ou 52 anos. Ou seja, antes de completar 53 anos.

$$P_2 = \frac{d_{50} + d_{51} + d_{52}}{l_{50}} = \frac{318,44 + 347,59 + 377,95}{95,627,12} = 0,0109.$$

Para que os eventos ocorram sucessivamente, teremos a probabilidade dada por:

$$P = P_1 \times P_2 = 0,9708 \times 0,0109 = 0,0106.$$

Portanto, a probabilidade de que a uma pessoa com 27 anos complete 50 anos, mas não complete 53, é de 1,06%.

2.3 Expectativa completa de vida

Segundo Azevedo (2005), a expectativa completa de vida, chamada também de **Vida Média (VM)**, refere-se à quantidade média de anos a qual se espera que viva uma pessoa com x anos.

Tomando as d_x pessoas que morreram com x anos, e considerando uniforme a distribuição das mortes durante o ano, admitimos que essas pessoas viveram x anos e meio. Assim, podemos dizer que o total de anos vividos pelas l_x pessoas entre as idades x e $x+1$ é:

$$0,5d_x + l_{x+1} = 0,5(l_x - l_{x+1}) + l_{x+1} = 0,5(l_x + l_{x+1}).$$

Considerando ainda a distribuição uniforme das mortes, o total de anos vividos pelas pessoas com a idade ω, deve ser $0,5l_{\omega}$.

Podemos dizer então que o total de anos vividos pelas pessoas l_x deverá ser:

$$0{,}5(l_x + l_{x+1}) + 0{,}5(l_{x+1} + l_{x+2}) + \cdots + 0{,}5(l_{\omega-1} + l_\omega) + 0{,}5l_\omega \ =$$

$$= 0{,}5l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega.$$

Logo, a Vida Média (VM) de uma pessoa com *x* anos poderá ser obtida dividindo o total de anos acima pela quantidade l_x de pessoas vivas com idade *x*, fazendo:

$$VM_x = \frac{0{,}5l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega}{l_x},$$

e, finalmente:

$$VM_x = \ 0{,}5 + \frac{(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega)}{l_x}.$$

Exemplo 12 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*
Qual a expectativa completa de vida (vida média) para alguém com 111 anos?

$$VM_{111} = \ 0{,}5 + \frac{(l_{112}+l_{113}+l_{114}+l_{115})}{l_{111}} = 0{,}5 + \frac{4{,}01+1{,}04+0{,}19+0{,}02}{12{,}08} = 0{,}9354.$$

A expectativa completa de vida para uma pessoa com 111 anos é de 0,9354 anos, ou seja, aproximadamente 11 meses.

2.4 Tábuas de comutação

As **tábuas de comutação**, segundo Azevedo (2005), são obtidas por meio dos valores d_x e l_x das tábuas de mortalidade, levando em conta o efeito da taxa de juros *i*, considerando ainda o fator de descapitalização $v = 1/(1+i)$.

A tábua de comutação tem seus valores variados, conforme a taxa de juros de variação do dinheiro dada. Ela é composta, além das mesmas colunas presentes na tábua de mortalidade, de outras seis colunas, das quais 3 são referentes a funções de sobrevivência (D_x, N_x e S_x) e 3 a funções de morte (C_x, M_x e R_x).

Tais funções têm for finalidade facilitar alguns cálculos que serão vistos posteriormente.

As funções elencadas acima serão dadas, respectivamente por:

$$D_x = l_x \times v^x$$

$$N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k$$

$$S_x = \sum_{k=x}^{\omega} N_k$$

$$C_x = d_x \times v^{x+1}$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_k$$

$$R_x = \sum_{k=x}^{\omega} M_k.$$

Onde ω representa a última idade da tabela, ou idade terminal.

As ferramentas apresentadas até aqui darão suporte para o estudo de alguns exemplos de seguros e previdência complementar que veremos a seguir.

A tabela seguinte apresenta parte da Tábua de Comutação AT-2000 à taxa de 6% ao ano, a qual será apresentada integralmente no Anexo III:

Tabela 4 – Tábua de Comutação AT-2000 a 6% ao ano.

x	l_x	d_x	$q_x(\%)$	Dx	Nx	Sx	Cx	Mx	Rx
0	100000,00	231,10	0,2311	100000,00	1730595,57	28979767,52	218,02	2041,76	90231,37
1	99768,90	90,39	0,0906	94121,60	1630595,57	27249171,96	80,45	1823,74	88189,61
2	99678,51	50,24	0,0504	88713,52	1536473,96	25618576,39	42,18	1743,29	86365,86
3	99628,27	40,65	0,0408	83649,82	1447760,44	24082102,43	32,20	1701,11	84622,57
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
25	98637,41	67,67	0,0686	22982,38	383423,40	5853856,09	14,87	1279,17	52073,05
26	98569,74	70,38	0,0714	21666,62	360441,02	5470432,69	14,59	1264,30	50793,88
27	98499,36	72,69	0,0738	20425,61	338774,40	5109991,68	14,22	1249,70	49529,59
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
39	97568,27	92,20	0,0945	10054,95	157927,71	2165560,46	8,96	1115,64	35348,82
40	97476,07	101,67	0,1043	9476,84	147872,76	2007632,75	9,32	1106,68	34233,17
41	97374,40	113,73	0,1168	8931,09	138395,93	1859759,99	9,84	1097,36	33126,49
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
50	95627,12	318,44	0,3330	5191,44	74373,86	895812,29	16,31	981,60	23667,50
51	95308,68	347,59	0,3647	4881,28	69182,42	821438,43	16,79	965,29	22685,90
52	94961,09	377,95	0,3980	4588,18	64301,14	752256,01	17,23	948,50	21720,61
53	94583,15	409,64	0,4331	4311,25	59712,96	687954,87	17,62	931,27	20772,12
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
111	12,08	8,07	66,8186	0,02	0,03	0,04	0,01	0,02	0,02
112	4,01	2,96	73,9483	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01
113	1,04	0,85	81,8254	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
114	0,19	0,17	90,4945	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
115	0,02	0,02	100,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Fonte: Autor.

2.5 Seguros e Previdência

O artigo 757 do Código Civil Brasileiro estabelece que “pelo contrato de seguro, o segurador se obriga, mediante o pagamento do prêmio, a garantir interesse legítimo do segurado, relativo a pessoa ou a coisa, contra riscos predeterminados”. Assim, o seguro se divide em diversos ramos, como: seguro de vida, de saúde, de automóveis, de imóveis, e outros. Todas as formas de seguro têm o mesmo objetivo: proteger o segurado contra imprevisibilidades futuras que possam lhe causar prejuízo, tais como: acidentes, furtos, doença, etc.

A previdência, por sua vez, está relacionada a uma remuneração a ser recebida a longo prazo, após um período de investimentos. Os valores são recebidos, em geral, após o período laboral do indivíduo, como uma aposentadoria. Existe no Brasil a Previdência Social, na qual a maioria dos trabalhadores está inserida. Mas há ainda outros produtos relacionados à previdência complementar que podem ser contratados por qualquer pessoa.

A seguir, passamos a apresentar algumas definições indispensáveis para melhor compreensão sobre os Seguros e Previdência, retiradas de Azevedo (2005), o qual se baseou na Resolução CNSP 96 de 18 de outubro de 2002 e na Previdência Aberta Complementar da SUSEP:

Prêmio: valor correspondente a cada um dos aportes destinados ao custeio da cobertura contratada. É a soma em dinheiro, paga pelo segurado ao segurador, para que este assuma a responsabilidade por um determinado risco;

Benefício: pagamento que os beneficiários recebem em função da ocorrência do evento gerador durante o período de cobertura;

Carregamento: valor resultante da aplicação de percentual sobre os prêmios pagos, destinado a atender às despesas administrativas, de corretagem e de colocação do plano de seguro;

Evento Gerador: morte, invalidez, ou sobrevivência do participante, ocorrida durante o período de cobertura do plano;

Indenização: pagamento a ser efetuado ao segurado, por ocasião de sua sobrevivência ao período de diferimento;

Período de Cobertura: prazo compreendido pelos períodos de diferimento e de pagamento da indenização;

Período de Diferimento: período entre a data de início de vigência da cobertura individual e da data contratada para início de pagamento da indenização;

Período de Pagamento da Indenização: período e que o assistido (ou assistidos) fará jus ao pagamento da indenização, sob a forma de renda, podendo ser vitalício ou temporário;

Prazo de Carência: lapso de tempo, contado a partir do início da vigência do plano, durante o qual, na ocorrência do evento gerador, os beneficiários não terão direito ao recebimento do benefício

A seguir, vamos analisar alguns produtos relacionados a seguros e previdência, baseados nos conceitos, fórmulas e definições vistos até aqui. Basicamente, os produtos serão analisados equilibrando-se receitas e despesas, de modo que não haja prejuízo e nem abuso por parte do segurador no ato da contratação do seguro.

Nos exemplos que serão apresentados, vamos considerar o prêmio a ser pago pelo contratante livre do carregamento, que é característica comercial da contratação, analisando, assim, apenas o cunho matemático de cada operação.

2.5.1 Seguro dotal

De acordo com Azevedo (2005), o **seguro dotal** consiste no pagamento de um dote caso o segurado sobreviva a n anos. Desse modo, numa situação hipotética, l_x pessoas deverão pagar um prêmio único e inicial, denotado por $_n\boldsymbol{E_x}$, para que, daqui n anos, as l_{x+n} pessoas sobreviventes recebam uma determinada **importância segurada ($\boldsymbol{IS}$)**.

Assim, para que sejam equilibradas as receitas e despesas, temos, trazendo a valor presente o valor de *IS*, por meio do fator de descapitalização v^n:

$$l_x \times \ _nE_x = \ l_{x+n} \times IS \ x \ v^n$$

Multiplicando por v^x em ambos os lados:

$$l_x \times \ _nE_x \times v^x = \ l_{x+n} \times IS \times v^n \times v^x.$$

Sabemos que $l_x \times v^x = D_x$. Então:

$$_nE_x \times D_x = \ D_{x+n} \times IS,$$

e, portanto,

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \times IS.$$

Exemplo 13 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*
Imaginemos que uma pessoa de 40 anos faça um Seguro Dotal no valor de R$ 50.000,00 a ser recebido quando completar 70 anos. Qual será o prêmio, sabendo-se que a tábua de comutação é a AT-2000, 6% ao ano?

$$_{30}E_{40} = \frac{D_{70}}{D_{40}} \times IS$$

$$_{30}E_{40} = \frac{1.377{,}59}{9.476{,}84} \times 50.000$$

$$_{30}E_{40} = \ 7.268{,}19.$$

Desse modo, uma pessoa com 40 anos deverá dispor de um prêmio único e puro de R$ 7.268,19 para que, com 70 anos, receba R$ 50.000,00.

Devemos observar que os valores são válidos de acordo com a tábua de mortalidade fornecida e com a taxa de juros referente à variação do dinheiro. No exemplo apresentado e nos seguintes, faremos uso da tábua de comutação baseada na tábua de mortalidade AT-2000 com taxa de 6% ao ano.

2.5.2 Rendas anuais

Outro tipo de produto são as rendas anuais. Nesse caso, o segurado opta por receber pagamentos periódicos, e não um único valor, como o seguro dotal. As rendas são pagas anualmente em valores iguais (R).

De acordo com Azevedo (2005), as rendas anuais podem ser **imediatas** ou **diferidas**, **vitalícias** ou **temporárias** e **antecipadas** ou **postecipadas**.

Vamos estudar as rendas anuais antecipadas, ou seja, pagas ao início de cada período.

2.5.2.1 Rendas anuais vitalícias, antecipadas e imediatas

O cálculo do prêmio deve seguir o mesmo conceito daquele desenvolvido para o seguro dotal, ou seja, igualando-se as receitas e despesas. Nesse caso, porém, numa situação hipotética, como despesas, teremos múltiplas rendas *R*, pagas anualmente aos sobreviventes l_{x+n}, as quais deverão ser trazidas a valor presente por meio do fator de descapitalização *v* para fins de comparação. As receitas correspondem aos **prêmios** denotados por $\ddot{a}_x$ pagos pelas pessoas l_x.

Assim:

$$l_x \times \ddot{a}_x = \; l_x \times R + l_{x+1} \times R \times v + l_{x+2} \times R \times v^2 \dots \dots + l_\omega \times R \times v^{\omega - x}$$

$$l_x \times \ddot{a}_x = \; (l_x + l_{x+1} \times v + l_{x+2} \times v^2 \dots \dots + l_\omega \times v^{\omega - x}) \times R.$$

Multiplicando ambos os lados por v^x, temos:

$$l_x \times \ddot{a}_x \times v^x = \; (l_x \times v^x + l_{x+1} \times v^{x+1} + l_{x+2} \times v^{x+2} \dots \dots + l_\omega \times v^\omega) \times R.$$

Como, $D_x = l_x \times v^x$:

$$D_x \times \ddot{a}_x = (D_x + D_{x+1} + D_{x+2} \dots \dots + D_\omega) \times R$$

$$D_x \times \ddot{a}_x = \left(\sum_{k=x}^{\omega} D_k\right) \times R.$$

Sabemos ainda, que $N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k$. Então:

$$D_x \times \ddot{a}_x = N_x \times R$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x \times R}{D_x}.$$

Assim, l_x pessoas pagarão um prêmio $\ddot{a}_x$ para que recebam, de forma vitalícia, uma renda anual *R* no início de cada período.

Exemplo 14 *(adaptado de AZEVEDO, 2005): Qual o prêmio único e puro que uma pessoa de 35 anos deverá pagar para obter uma renda de R$ 40.000,00 imediata e vitaliciamente no início de cada ano?*

$$\ddot{a}_{35} = \frac{N_{35} \times 40.000}{D_{35}}$$

$$\ddot{a}_{35} = \frac{204.653{,}51 \times 40.000}{12.735{,}88}$$

$$\ddot{a}_{35} = 642.762{,}05.$$

O prêmio único e puro que deverá ser pago é de R$ 642.762,05.

2.5.2.2 Rendas anuais vitalícias, antecipadas e diferidas

Se a renda for **diferida de *n* anos**, ou seja, com início de pagamento após decorridos *n* anos, o índice da função *N* deverá ser acrescido de *n*, devendo ser considerado N_{x+n}. O índice do fator D_x permanece inalterado, visto que D_x refere-se ao tempo atual, e leva em conta a idade atual do segurador.

Neste caso, o prêmio será denotado por ${}_{n/}\ddot{a}_x$, onde o índice ***n/*** refere-se ao período de diferimento do prêmio.

Exemplo 15 *(adaptado de AZEVEDO, 2005): Qual o prêmio único e puro que uma pessoa de 35 anos deverá pagar para obter uma renda de R$ 40.000,00 que começará a ser paga daqui a 25 anos, vitaliciamente e no início de cada ano?*

$${}_{25/}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{35+25} \times 40.000}{D_{35}}$$

$${}_{25/}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{60} \times 40.000}{D_{35}}$$

$${}_{25/}\ddot{a}_{35} = \frac{34.547{,}44 \times 40.000}{12.735{,}88}$$

$${}_{25/}\ddot{a}_{35} = 108.504{,}29.$$

O prêmio único e puro que deverá ser pago é de R$ 108.504,29.

Os exemplos 14 e 15 apresentam rendas anuais vitalícias antecipadas. O primeiro mostra renda imediata. Já o segundo descreve uma renda diferida de 25 anos, o que justifica o ajuste no índice do fator *N*.

2.5.2.3 Rendas anuais temporárias

Há casos em que a renda anual é **temporária**, ou seja, paga por *t* anos. Nesse ponto, devemos considerar novo ajuste no equilíbrio das receitas e despesas, uma vez que a renda *R* não será paga aos sobreviventes após o período *t*.

O índice ***/t*** indica que a renda será paga durante um determinado período *t*.

Para estes casos, temos, considerando rendas anuais *R*, imediatas, antecipadas, pagas durante *t* anos a contratantes com idade *x* na atualidade:

$$_{/t}\ddot{a}_x \times l_x = l_x \times R + l_{x+1} \times R \times v + l_{x+2} \times R \times v^2 + \cdots + l_{x+t-1} \times R \times v^{t-1}.$$

Multiplicando por v^x em ambos os lados, temos:

$$_{/t}\ddot{a}_x \times D_x = (D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+t-1}) \times R$$

$$_{/t}\ddot{a}_x \times D_x = (N_x - N_{x+t}) \times R$$

$$_{/t}\ddot{a}_x = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \times R.$$

O mesmo ajuste no índice das funções *N* deverá ser aplicado também a esse caso, ou seja, para uma série diferida de *n* períodos, deve-se acrescer *n* aos índices.

Exemplo 16 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

Qual o prêmio único e puro que uma pessoa de 35 anos deverá pagar para obter uma renda de R$ 40.000,00 que começará a ser paga daqui a 15 anos, durante 20 anos e no início de cada ano?

As rendas serão diferidas de 15 anos e temporárias por 20 anos. Assim:

$$_{15/20}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{35+15} - N_{35+15+20}}{D_{35}} \times 40.000$$

$$_{15/20}\ddot{a}_{35} = \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{35}} \times 40.000$$

$$_{15/20}\ddot{a}_{35} = \frac{74.373,86 - 13.785,08}{12.735,88} \times 40.000$$

$$_{15/20}\ddot{a}_{35} = 190.293,19.$$

O prêmio único e puro que deverá ser pago é de R$ 190.293,19.

2.5.3 Rendas subanuais

As tábuas de mortalidade apresentam dados estatísticos relativos a períodos anuais. Assim, os cálculos diretos sobre prêmios e rendas foram feitos de modo a se basearem em tais períodos. Porém, mais corriqueiramente, os produtos contratados, como a previdência complementar, referem-se a rendas subanuais. As rendas subanuais podem ser pagas de forma semestral, quadrimestral, por exemplo. Mas, em sua maioria, são contratadas para serem pagas mensalmente.

Da mesma forma como ocorre com as rendas anuais, as rendas subanuais podem ser vitalícias ou temporárias, imediatas ou diferidas, antecipadas ou postecipadas. Porém, vamos nos ater às rendas vitalícias, imediatas e antecipadas, as quais podem exemplificar um sistema simples de previdência complementar, o qual será objeto de aplicação no capítulo seguinte. Veremos, então, fórmulas para o cálculo de rendas mensais vitalícias, antecipadas e imediatas.

2.5.3.1 Rendas mensais vitalícias, antecipadas e imediatas

Tomando:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x};$$

$$_{1/}a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x};$$

$$_{/1}a_x = \frac{N_x - N_{x+1}}{D_x};$$

onde, como já visto, os índices *1/* e */1* indicam, respectivamente, o **diferimento de 1 período** e a duração, ou seja, a **temporariedade de 1 período**.

Temos:

$$\frac{N_x - N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\frac{D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$1 = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - 1$$

$${}_{1/}a_x = a_x - 1.$$

Logo, se o ano for fracionado em *m* períodos, estes terão duração de $\frac{1}{m}$ ano, ou seja:

$${}_{\frac{1}{m}/}a_x = a_x - \frac{1}{m}.$$

Denotando por $a_x^{(m)}$ o **valor médio atual** de cada fração de período $\frac{1}{m}$ antecipada após *m* períodos, segundo Azevedo (2005), teremos:

$$m \times a_x^{(m)} = a_x + a_x - \frac{1}{m} + a_x - \frac{2}{m} \ldots\ldots + a_x - \frac{m-1}{m}.$$

O lado direito refere-se a uma progressão aritmética. Somando, temos:

$$a_x^{(m)} = a_x - \frac{m-1}{2m}.$$

Para *m* = 12, ou seja, para períodos mensais:

$$a_x^{(12)} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24}.$$

Para obtermos o prêmio, devemos multiplicar o fator $a_x^{(12)}$ pela quantidade de períodos e pela renda que será paga. Desse modo, a fórmula para cálculo do prêmio $ä_x$ pago a uma pessoa com idade *x*, que deseja receber a renda mensal *R*, de forma vitalícia, imediata e antecipada é:

$$ä_x = \left(\frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24}\right) \times R \times 12.$$

Exemplo 17 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*
Qual o prêmio que uma pessoa de 40 anos deverá pagar para obter uma renda mensal de R$ 1.000,00 que começará a ser paga imediatamente, vitaliciamente e no início de cada mês?

$$ä_{40} = \left(\frac{N_{40}}{D_{40}} - \frac{11}{24}\right) \times 1.000 \times 12$$

$$ä_{40} = \left(\frac{147.872{,}76}{9.476{,}84} - \frac{11}{24}\right) \times 1.000 \times 12$$

$$ä_{40} = 181.743{,}12.$$

Nesta situação, o prêmio que deverá ser pago é de R$ 181.743,12.

2.5.3.2 Contribuição mensal para renda mensal vitalícia, antecipada e imediata

Vamos agora dividir o prêmio em parcelas de contribuição iguais, que devem ser pagas até o momento em que se deseja iniciar o recebimento da renda mensal. O objetivo aqui é simular um sistema de previdência complementar mais próximo aos produtos comercializados no cotidiano.

Vamos supor então que uma pessoa com idade *x* deseja obter uma renda mensal *R* vitalícia, antecipada e imediata ao completar *x+y* anos e, para isso, fará contribuições mensais *C* durante os *y* anos.

Para obtermos o valor de cada contribuição *C*, devemos levar em conta o valor desse dinheiro que será aplicado ao longo dos *y* anos. Assim, o prêmio $ä_{x+y}$ que seria pago logo que a pessoa completasse *x+y* anos, deve ser diluído ao longo dos *y* anos anteriores, em prestações *C*. Basta levarmos cada um dos valores *C* a valor futuro na data *x+y*.

Neste caso, a série de contribuições *C* pode ser vista como uma série de pagamentos antecipada, a fim de se obter um montante $\ddot{a}_{x+y}$ ao final do período. Consideremos *i* a taxa de valorização do dinheiro ao longo do tempo, como visto anteriormente, essa relação é dada por:

$$\ddot{a}_{x+y} = C \times \frac{(1+i) \times ((1+i)^{12y} - 1)}{i},$$

onde *12y* representa a quantidade de meses em que as contribuições são feitas.

Feito o cálculo do prêmio único que seria pago no momento em que a pessoa completa *x+y* anos, para obtermos uma relação única entre as contribuições *C* e as rendas *R*, basta fazer:

$$\ddot{a}_{x+y} = \left(\frac{N_{x+y}}{D_{x+y}} - \frac{11}{24}\right) \times R \times 12$$

$$C \times \frac{(1+i) \times ((1+i)^{12y} - 1)}{i} = \left(\frac{N_{x+y}}{D_{x+y}} - \frac{11}{24}\right) \times R \times 12.$$

Exemplo 18 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*
Qual o valor da renda mensal vitalícia, imediata e antecipada que uma pessoa de 40 anos obterá ao completar 70 anos, tendo em vista que irá contribuir mensalmente com R$ 500,00 até que complete os 70 anos, levando em conta que o dinheiro aplicado terá valorização de 0,5% ao mês?

$$500 \times \frac{(1+0{,}005) \times ((1+0{,}005)^{360} - 1)}{0{,}005} = \left(\frac{N_{70}}{D_{70}} - \frac{11}{24}\right) \times R \times 12.$$

$$504.768{,}8088 = 114{,}5800 \times R.$$

$$R = 4.405{,}37.$$

A renda vitalícia será de R$ 4.405,37.

Exemplo 19 *(adaptado de AZEVEDO, 2005): Qual o valor das prestações mensais que uma pessoa de 40 anos deverá contribuir para obter uma renda mensal de R$ 1.000,00 que começará a ser paga imediatamente, vitaliciamente e no início de cada mês, quando esta completar 70 anos, levando em conta que o dinheiro aplicado terá valorização de 0,5% ao mês?*

$$C \times \frac{(1+0{,}005) \times ((1+0{,}005)^{360}-1)}{0{,}005} = \left(\frac{N_{70}}{D_{70}} - \frac{11}{24}\right) \times 1.000 \times 12.$$

$$C \times 1009{,}5376 = 114.579{,}9657.$$

$$C = 113{,}50.$$

As contribuições deverão ser de R$ 113,50.

Vimos, nos exemplos 18 e 19, formas para se calcularem a renda vitalícia e as contribuições em um sistema simples de previdência complementar. Tais cálculos serão abordados no capítulo seguinte, quando da proposta de aplicação do presente trabalho.

2.5.4 Seguro em caso de morte

O seguro em caso de morte é um produto que também é muito comercializado por financeiras. O que difere este produto do seguro dotal é que, neste caso, mediante ao pagamento de um prêmio A_x, uma indenização Q será paga ao beneficiário quando da morte do individuo contratante que tem idade x no ato da contratação. Cabe dizer ainda que, segundo Azevedo (2005), a indenização será paga aos beneficiários dos falecidos com idade x (d_x) ao final do ano, ou seja, no instante $x+1$.

Para calcularmos os valores de prêmio e da indenização a ser paga, seguiremos com o mesmo modelo do seguro dotal, igualando receitas e despesas. Porém, conforme indica Azevedo (2005), a diferença com relação ao caso anterior será dada pelo lado da despesa, pois será considerado o número de mortos d_x.

Devemos levar em conta ainda o fator de descapitalização v^n, ano a ano. Assim, equilibrando as receitas e despesas, temos:

$$l_x \times A_x = d_x \times Q \times v + d_{x+1} \times Q \times v^2 + \cdots + d_\omega \times Q \times v^{\omega+1}.$$

Multiplicando ambos os lados por v^x, temos:

$$l_x \times v^x \times A_x = Q \times (d_x \times v^{x+1} + d_{x+1} \times v^{x+2} + \cdots + d_\omega \times v^{\omega+1}).$$

Sabemos que $l_x \times v^x = D_x$ e que $d_x \times v^{x+1} = C_x$ Então:

$$D_x \times A_x = Q \times (C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega).$$

Vimos ainda que $M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_k$. Então:

$$A_x = \frac{M_x \times Q}{D_x}.$$

Exemplo 20 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

Qual o prêmio que uma pessoa com 35 anos deverá pagar por um seguro em caso de morte para que seu beneficiário receba uma importância segurada de R$ 40.000,00?

$$A_{35} = \frac{1.151{,}72 \times 40.000}{12.735{,}88}$$

$$A_{35} = 3.617{,}23.$$

O prêmio a ser pago será de R$ 3.617,23.

Exemplo 21 *(adaptado de AZEVEDO, 2005):*

Qual o valor da indenização que os beneficiários de uma pessoa com 35 anos vão receber por um seguro em caso de morte, tendo em vista o prêmio pago pelo segurado no valor de R$ 10.000,00?

$$10.000 = \frac{1.151{,}72 \times Q}{12.735{,}88}$$

$$Q = \frac{127.358.800}{1.151{,}72}$$

$$Q = 110.581{,}39.$$

A indenização será de R$ 110.581,39.

Os exemplos 20 e 21 apresentaram formas simples de se calcularem prêmio e valor da indenização para seguros em caso de morte. Vamos abordar o assunto novamente no capítulo seguinte, quando da proposta de aplicação a ser apresentada.

3 PLANILHA ELETRÔNICA: PROPOSTA DE APLICAÇÃO

Segundo Caetano *et al* (2012), os recursos disponíveis nas planilhas eletrônicas possibilitam diversas aplicações no ensino de Matemática. Dentre esses recursos destacam-se a manipulação e operações com grandes quantidades de dados numéricos, articulação entre diversas formas de representação, ferramentas lógicas e ferramentas estatísticas.

Tendo em vista que, atualmente os computadores estão acessíveis nas escolas para a maior parte dos alunos, cabe dizer que é importante fomentar a ideia do uso das ferramentas eletrônicas disponíveis no ensino da Matemática. Neste sentido, o objetivo deste capítulo é oferecer, para o professor do ensino médio, uma proposta de aplicação em sala de aula a respeito de alguns exemplos vistos, relacionando-os com as planilhas eletrônicas.

As planilhas eletrônicas possuem uma linguagem própria, o que pode dificultar a compreensão dos alunos quanto às fórmulas e parâmetros apresentados. Vamos abordar aqui a sintaxe das funções que serão utilizadas na confecção das planilhas. Ressalta-se que, não se tratando do principal objetivo do presente trabalho, fica a cargo doprofessor aprofundar-se com os alunos ou não em cada passo da elaboração da planilha.

O software utilizado na aplicação a seguir apresentada foi o *Microsoft Office Excel* (MICROSOFT, 2010).

3.1 Funções do *Excel*

a) Função PROCV

A função PROCV é uma função de pesquisa e referência. Seu objetivo é encontrar uma informação em uma determinada matriz. A sintaxe da função PROCV é a seguinte:

=PROCV(valor_procurado; matriz_tabela; núm_índice_coluna; [procurar_intervalo]).

a) valor_procurado: valor que será rastreado na matriz desejada. Este valor deve estar na primeira coluna da matriz;

b) matriz_tabela: matriz onde será procurado o valor indicado;

c) índice_coluna: coluna onde consta o dado que se deseja obter como retorno, de acordo com o valor procurado indicado;

d) procurar_intervalo: esse parâmetro é opcional. Caso seja indicado VERDADEIRO, a correspondência poderá ser aproximada. Caso FALSO, a correspondência deve ser exata. Não sendo preenchida, o valor padrão será VERDADEIRO.

b) Função VF

A função VF retorna o valor futuro de uma série de pagamentos uniforme. A sintaxe da função VF é a seguinte:

=VF(taxa; nper; pgto; [vp]; [tipo])

a) taxa: refere-se à taxa de juros que será aplicada sobre as parcelas;

b) nper: quantidade de pagamentos feitos;

c) pgto: valor de cada parcela da série de pagamentos;

d) vp: parâmetro opcional. Refere-se ao valor presente da série de pagamentos. Caso não seja preenchido, por padrão, adota-se vp = 0;

e) tipo: parâmetro opcional. Indica o vencimento do pagamento. Caso 1, pagamento no início do período. Caso 0, ao final do período. Se não for especificado, por padrão adota-se tipo = 0.

c) Função SOMA

A função SOMA retorna o valor da soma dos valores contidos nas células indicadas ou de intervalos de células. A sintaxe da função SOMA é a seguinte:

=SOMA(num1; [num2];...)

Cada item num1, num2, etc., corresponde ao número que será somado. A função pode receber referências a células ou intervalo de células da planilha.

3.2 Elaboração das planilhas eletrônicas

As planilhas eletrônicas referentes à proposta de aplicação, como mencionado, serão confeccionadas em um arquivo do *software Excel* (MICROSOFT, 2010). Ao iniciar um novo documento, por padrão, a pasta de trabalho inicia-se com 3 planilhas (outras podem ser adicionadas), as quais serão suficientes para a presente proposta.

a) Planilha AT-2000

Renomeando a primeira planilha como *AT-2000*, digitamos nela a Tábua de Comutação AT-2000 à taxa de 6% ao ano, conforme a figura a seguir:

Figura 7 – Planilha AT-2000 a 6% ao ano

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	lx	dx	qx(%)	Dx	Nx	Sx	Cx	Mx	Rx
2	0	100000,00	231,10	0,002311	100000,00	1730595,57	28979767,52	218,02	2041,76	90231,37
3	1	99768,90	90,39	0,000906	94121,60	1630595,57	27249171,96	80,45	1823,74	88189,61
4	2	99678,51	50,24	0,000504	88713,52	1536473,96	25618576,39	42,18	1743,29	86365,86
5	3	99628,27	40,65	0,000408	83649,82	1447760,44	24082102,43	32,20	1701,11	84622,57
6	4	99587,62	35,55	0,000357	78882,73	1364110,63	22634341,99	26,57	1668,92	82921,46
7	5	99552,07	32,25	0,000324	74391,10	1285227,90	21270231,36	22,74	1642,35	81252,54
8	6	99519,82	29,96	0,000301	70157,54	1210836,80	19985003,46	19,92	1619,61	79610,19
9	7	99489,86	28,45	0,000286	66166,44	1140679,26	18774166,65	17,85	1599,69	77990,58
10	8	99461,41	32,62	0,000328	62403,32	1074512,82	17633487,39	19,31	1581,84	76390,89
11	9	99428,78	35,99	0,000362	58851,74	1012109,50	16558974,57	20,10	1562,53	74809,06
12	10	99392,79	38,76	0,000390	55500,41	953257,76	15546865,07	20,42	1542,43	73246,53
13	11	99354,03	41,03	0,000413	52338,46	897757,35	14593607,31	20,39	1522,01	71704,10
14	12	99312,99	42,80	0,000431	49355,51	845418,88	13695849,96	20,07	1501,62	70182,09
15	13	99270,19	44,27	0,000446	46541,74	796063,37	12850431,08	19,58	1481,55	68680,48
16	14	99225,91	45,45	0,000458	43887,72	749521,63	12054367,71	18,96	1461,96	67198,93
17	15	99180,47	46,61	0,000470	41384,54	705633,91	11304846,08	18,35	1443,00	65736,97
18	16	99133,85	47,68	0,000481	39023,67	664249,37	10599212,16	17,71	1424,65	64293,96
19	17	99086,17	49,05	0,000495	36797,08	625225,70	9934962,79	17,18	1406,94	62869,31
20	18	99037,12	50,51	0,000510	34697,04	588428,62	9309737,09	16,69	1389,76	61462,37
21	19	98986,61	52,26	0,000528	32716,36	553731,58	8721308,48	16,30	1373,07	60072,61
22	20	98934,35	54,31	0,000549	30848,20	521015,21	8167576,90	15,98	1356,77	58699,54
23	21	98880,03	56,66	0,000573	29086,10	490167,02	7646561,69	15,72	1340,79	57342,77
24	22	98823,38	59,20	0,000599	27423,99	461080,92	7156394,67	15,50	1325,07	56001,98
25	23	98764,18	61,93	0,000627	25856,19	433656,93	6695313,75	15,29	1309,57	54676,90
26	24	98702,26	64,85	0,000657	24377,34	407800,74	6261656,82	15,11	1294,28	53367,33

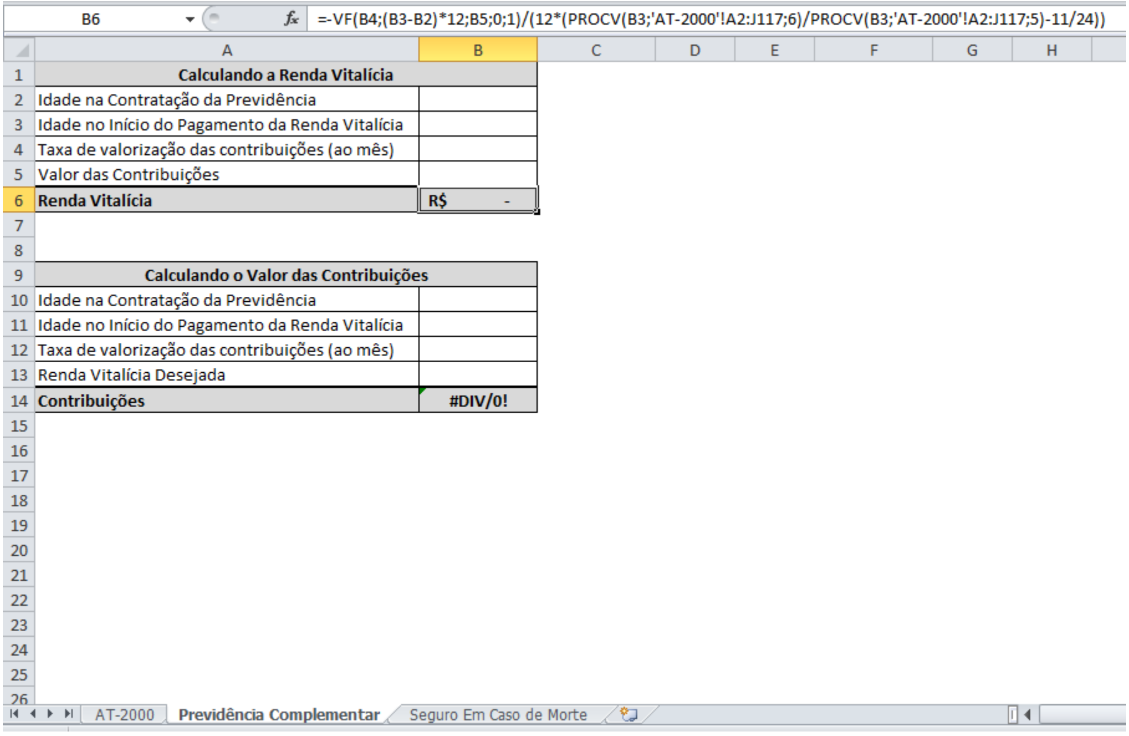
AT-2000 | Previdência Complementar | Seguro Em Caso de Morte

Fonte: Autor

b) Planilha Previdência Complementar

Após renomear a segunda planilha para *Previdência Complementar*, vamos formata-la para que fique da seguinte forma:

Figura 8 – Planilha Previdência Complementar



Fonte: Autor

A célula B6 receberá a fórmula:

=-VF(B4;(B3-B2)*12;B5;0;1)/(12*(PROCV(B3;'AT-2000'!A2:J117;6)/PROCV(B3;'AT-2000'!A2:J117;5)-11/24)).

A fórmula acima é a responsável por calcular o valor da renda vitalícia, dados os parâmetros Idade na Contratação da Previdência, Idade no Início do Pagamento da Renda Vitalícia, Taxa de Valorização das Contribuições (ao mês), Valor das Contribuições.

A célula B14 receberá a fórmula:

=(12*B13*(PROCV(B11;'AT-2000'!A2:J117;6)/PROCV(B11;'AT-2000'!A2:J117;5)-11/24))/(-VF(B12;(B11-B10)*12;1;0;1)).

A fórmula acima é a responsável por calcular o valor das contribuições, dados os parâmetros Idade na Contratação da Previdência, Idade no Início do Pagamento da Renda Vitalícia, Taxa de Valorização das Contribuições (ao mês), Renda Vitalícia Desejada.

Desse modo, montamos uma planilha em duas partes. Uma primeira para calcular a renda vitalícia ante os dados fornecidos, e, logo abaixo, outra responsável por calcular a contribuição necessária para que se obtenha determinada renda vitalícia.

Assim, tomando os exemplos 18 e 19, que calculam respectivamente renda vitalícia e valor das contribuições de acordo com os parâmetros dados nos exemplos, teríamos, após preenchida a planilha, a seguinte situação:

Figura 9 – Exemplos 18 e 19 aplicados à planilha Previdência Complementar

	A	B	C
1	**Calculando a Renda Vitalícia**		
2	Idade na Contratação da Previdência	40	
3	Idade no Início do Pagamento da Renda Vitalícia	70	
4	Taxa de valorização das contribuições (ao mês)	0,50%	
5	Valor das Contribuições	R$ 500,00	
6	**Renda Vitalícia**	**R$ 4.405,37**	
7			
8			
9	**Calculando o Valor das Contribuições**		
10	Idade na Contratação da Previdência	40	
11	Idade no Início do Pagamento da Renda Vitalícia	70	
12	Taxa de valorização das contribuições (ao mês)	0,50%	
13	Renda Vitalícia Desejada	R$ 1.000,00	
14	**Contribuições**	**R$ 113,50**	
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			

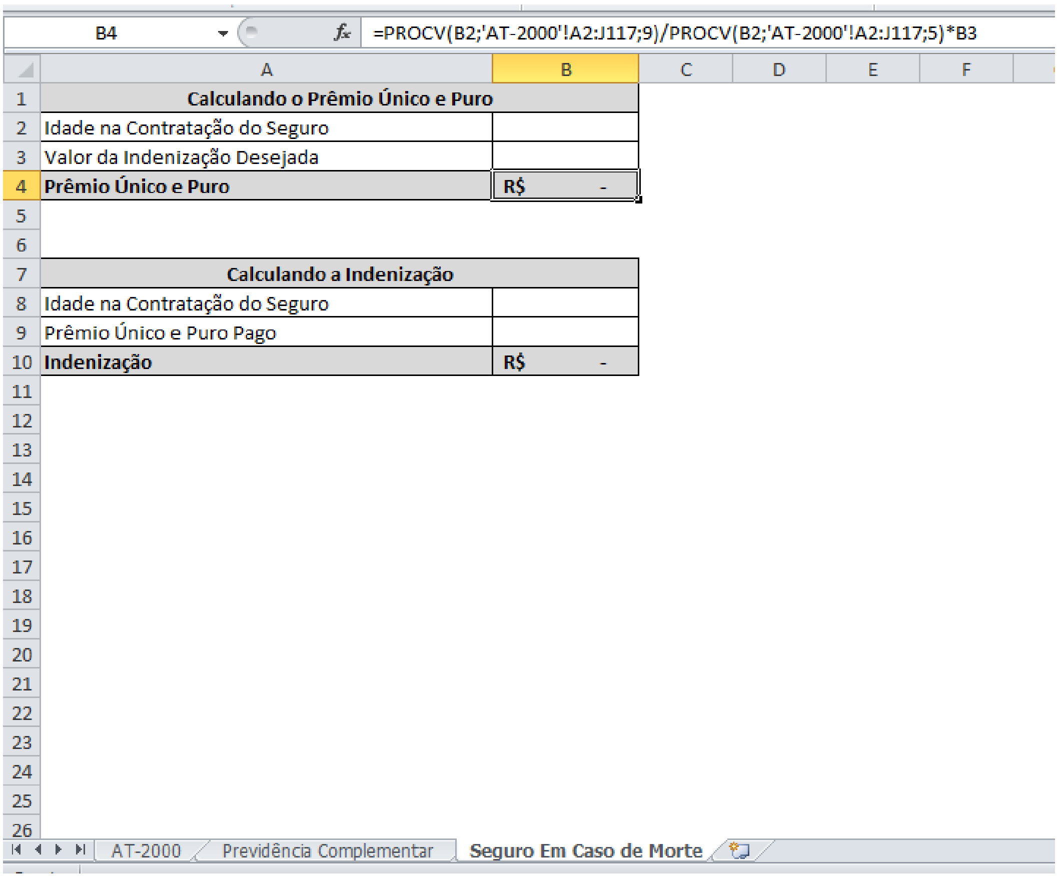
AT-2000 | **Previdência Complementar** | Seguro Em Caso de Morte

Fonte: Autor

c) Planilha Seguro em Caso de Morte

Após renomear a planilha como nos itens anteriores, vamos formata-la do seguinte modo:

Figura 10 – Planilha Seguro em Caso de Morte



Fonte: Autor

A célula B4 receberá a fórmula:

=PROCV(B2;'AT-2000'!A2:J117;9)/PROCV(B2;'AT-2000'!A2:J117;5)*B3.

Esta fórmula é a responsável por calcular o valor do prêmio único e puro que deverá ser pago, dados os parâmetros Idade na Contratação Seguro e Valor da Indenização Desejada.

A célula B10 receberá a fórmula:

=PROCV(B8;'AT-2000'!A2:J117;5)/PROCV(B8;'AT-2000'!A2:J117;9)*B9.

A fórmula acima é a responsável por calcular o valor da Indenização, dados os parâmetros Idade na Contratação da Previdência e Prêmio Único e Puro Pago.

Assim, esta planilha também fica dividida em duas partes. A primeira calcula o prêmio devido de acordo com a indenização que se deseja receber. Já a segunda, calcula a indenização que será recebida conforme o prêmio pago.

Tomando os exemplos 20 e 21, que calculam respectivamente prêmio e indenização, de acordo com os parâmetros dados nos citados exemplos, teríamos, após preenchida a planilha, a seguinte situação:

Figura 11 – Exemplos 20 e 21 aplicados à planilha Seguro em Caso de Morte

	A	B
1	**Calculando o Prêmio Único e Puro**	
2	Idade na Contratação do Seguro	35
3	Valor da Indenização Desejada	R$ 40.000,00
4	**Prêmio Único e Puro**	**R$ 3.617,23**
5		
6		
7	**Calculando a Indenização**	
8	Idade na Contratação do Seguro	35
9	Prêmio Único e Puro Pago	R$ 10.000,00
10	**Indenização**	**R$ 110.581,83**

AT-2000 | Previdência Complementar | **Seguro Em Caso de Morte**

Fonte: Autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou uma ferramenta de ensino de Matemática Financeira e probabilidade para alunos do ensino médio, analisando o ensino da Matemática Financeira e da probabilidade por meio da Matemática Atuarial.

A partir da conceitualização dos conteúdos centrais da Matemática Financeira e da Atuarial, foi possível desenvolver uma ferramenta de aplicação por meio de planilhas eletrônicas, a qual poderá ser utilizada por professores, permitindo um melhor desenvolvimento dos alunos, conforme previsto nos PCNs, no PCNEM e, mais atualmente, na BNCC.

Assim, o presente trabalho procurou apresentar uma alternativa para a abordagem da Matemática Financeira e da Probabilidade no Ensino Médio. É importante também ressaltar que a aplicação do conteúdo apoiada na Informática é ferramenta importante para o professor, e que este deve se manter atento às necessidades de adaptação de outras atividades que complementem o currículo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AZEVEDO, Gustavo Henrique W. de. *Seguros, Matemática Financeira e Atuarial*: Noções Aplicadas ao Seguro. Rio de Janeiro: Funenseg, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

______. Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

______. *Lei n. 10.406*, de 10 de jan. de 2002. Código Civil. Brasília, 2002.

CAETANO, Paulo; GIRALDO, Victor; MATTOS, Francisco. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

CORDEIRO FILHO, Antonio. *Cálculo Atuarial Aplicado*. 2ª edição. São Paulo: Atlas, 2014.

IBA (Instituto Brasileiro de Atuária). Disponível em: http://www.atuarios.org.br. Acesso em 26 out. 2018.

MICROSOFT. *Office 2010*: Excel. Versão Professional Plus. Microsoft, 2010.

PUCCINI, Ernesto Coutinho. *Matemática Financeira e análise de investimentos*. 2ª edição. Brasília: CAPES: UAB, 2012.

ANEXO I
PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

É primordial apresentar ainda os principais conceitos das Progressões Geométricas, visto que, tanto em Matemática Financeira como no conteúdo que será explanado posteriormente, a Matemática Atuarial, são abordadas séries de pagamento, as quais se referem a progressões geométricas.

Definição: Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica a_n na qual a taxa de crescimento (ou decrescimento) de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. (CARVALHO, 2015), ou seja:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

As séries de pagamento inseridas no cenário financeiro indicam, portanto, progressões geométricas, sendo os juros aplicados, a referida taxa de crescimento constante.

a) Termo geral da progressão geométrica

Seja uma progressão geométrica (a_1, a_2, a_3...), com taxa de crescimento i. Conforme CARVALHO (2015), cada termo da progressão geométrica é igual ao anterior multiplicado por $1+i$. Logo, a progressão geométrica é uma sequência na qual o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior é constante. Esse quociente é a razão da progressão geométrica, representado por q. Essa razão é $q = 1+i$.

Assim, o termo geral de uma progressão geométrica é dado por:

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}.$$

Exemplo *(CARVALHO, 2015): "A torcida de certo clube é hoje igual a* P_0 *e decresce 5% ao ano. Qual será a torcida desse clube daqui a n anos?"*

Como a torcida decresce 5% ao ano, a cada ano a torcida será 95% da anterior, ou seja, a razão é dada por q = 0,95. O primeiro termo da sequência é P_0*. Logo, depois de n anos, teremos:*

$$P_n = P_0 \times 0{,}95^n.$$

b) Soma dos termos da progressão geométrica

A soma da progressão geométrica de n termos *(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)* é dada por:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Multiplicando ambos os lados por q, temos:

$$qS_n = qa_1 + qa_2 + \cdots + qa_n$$

Logo,

$$qS_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}$$

Assim,

$$S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1 q^n$$

$$S_n = a_1 \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}.$$

Assim, a fórmula acima pode obter a soma dos termos da progressão geométrica a partir do seu primeiro termo e de sua razão.

c) Soma dos infinitos termos da progressão geométrica de razão |*q*|<*1*

De acordo com CARVALHO (2015), nas progressões geométricas com infinitos termos em que $|q|<1$, a soma dos termos será obtida por:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{(1-q^n)}{(1-q)} = a_1 \frac{(1-0)}{(1-q)}$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{(1-q)}.$$

ANEXO II
PROBABILIDADE

Conforme CARVALHO (2015), a Probabilidade está intimamente ligada à Estatística e é uma ferramenta importante para diferentes cálculos. Como se observa, o assunto está presente no cotidiano, quer seja em jogos de azar, envolvendo dados, por exemplo, quer seja no levantamento e apuração de dados populacionais. A probabilidade tem utilidade ainda na área atuarial, assunto a ser abordado mais a frente.

Algumas definições importantes sobre o tema serão apresentadas a seguir:

a) Espaço amostral

O espaço amostral, segundo CARVALHO (2015), engloba todos os possíveis resultados de uma ação tomada aleatoriamente.

Exemplo (adaptado de CARVALHO, 2015):

Ao se lançar um dado, existem 6 resultados possíveis. O Espaço Amostral será representado por *S*. *S* deve ser enumerável. No exemplo citado, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

b) Eventos

Os eventos são subconjuntos de *S*, e, para que ocorra o evento desejado, o resultado obtido da aplicação da ação deve pertencer ao subconjunto do evento. Utilizando ainda o exemplo acima, $A = \{4,5,6\}$ é um subconjunto de *S*, que compreende os resultados obtidos maiores que 3.

Sendo *A* e *B* eventos de *S*:

i) $A \cup B$ corresponde ao evento que ocorre caso ocorra *A* ou ocorra *B*.

ii) $A \cap B$ ocorre quando ocorrem, necessariamente, *A* e *B*.

iii) $A \backslash B$ ocorre quando *A* mas não ocorre *B*.

iv) $\bar{A}$ é o evento oposto de *A*, e ocorre somente se o evento *A* não ocorre.

c) Probabilidade

Chama-se *P(A)* a probabilidade de ocorrência do evento *A*. *P(A)* poderá ser calculada do seguinte modo:

$$P(A) = \frac{j}{n}$$

onde j é a quantidade de elementos do evento A e n é a quantidade de elementos do espaço amostral S.

Exemplo (adaptado de CARVALHO, 2015):

Lançam-se dois dados não viciados. Qual a probabilidade de a soma dos valores obtidos ser igual a 7?

Nesse caso, temos:

$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (5,6), (6,6)\}$, onde $n = 36$

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$, onde $j = 6$

Então:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

O Teorema a seguir contém as propriedades das probabilidades (CARVALHO, 2015):

Teorema (Propriedades da Probabilidade).

Se A e B são eventos, então:

i) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

ii) $P(\varnothing) = 0$;

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

iv) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$;

v) Se $A \supset B$ então $P(A) \geq P(B)$.

d) Probabilidade condicional

A probabilidade condicional é utilizada para se calcular a ocorrência de um determinado evento, sabendo-se antecipadamente que um outro evento ocorreu (CARVALHO, 2015).

Assim, calcula-se a probabilidade de ocorrência do evento *A*, tendo já ocorrido o evento *B*, $P(A|B)$.

$P(A|B)$ é dada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplo *(adaptado de CARVALHO, 2015):*

Ao lançar um dado não viciado, considera-se o evento A, a ocorrência de número par. Sabe-se previamente que o número obtido não é o 2 (evento B). Desse modo:

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$, *onde* $n = 6$

$A = \{2,4,6\}$, *onde* $j_A = 3$

$B = \{1,3,4,5,6\}$, *onde* $j_B = 5$

$A \cap B = \{4,6\}$, *onde* $j_{A \cap B} = 2$

Então:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}}$$

$$P(A|B) = \frac{2}{5}.$$

ANEXO III

TÁBUA DE COMUTAÇÃO AT-2000 A 6% AO ANO

x	Lx	dx	qx(%)	Dx	Nx	Sx	Cx	Mx	Rx
0	100000,00	231,10	0,002311	100000,00	1730595,57	28979767,52	218,02	2041,76	90231,37
1	99768,90	90,39	0,000906	94121,60	1630595,57	27249171,96	80,45	1823,74	88189,61
2	99678,51	50,24	0,000504	88713,52	1536473,96	25618576,39	42,18	1743,29	86365,86
3	99628,27	40,65	0,000408	83649,82	1447760,44	24082102,43	32,20	1701,11	84622,57
4	99587,62	35,55	0,000357	78882,73	1364110,63	22634341,99	26,57	1668,92	82921,46
5	99552,07	32,25	0,000324	74391,10	1285227,90	21270231,36	22,74	1642,35	81252,54
6	99519,82	29,96	0,000301	70157,54	1210836,80	19985003,46	19,92	1619,61	79610,19
7	99489,86	28,45	0,000286	66166,44	1140679,26	18774166,65	17,85	1599,69	77990,58
8	99461,41	32,62	0,000328	62403,32	1074512,82	17633487,39	19,31	1581,84	76390,89
9	99428,78	35,99	0,000362	58851,74	1012109,50	16558974,57	20,10	1562,53	74809,06
10	99392,79	38,76	0,000390	55500,41	953257,76	15546865,07	20,42	1542,43	73246,53
11	99354,03	41,03	0,000413	52338,46	897757,35	14593607,31	20,39	1522,01	71704,10
12	99312,99	42,80	0,000431	49355,51	845418,88	13695849,96	20,07	1501,62	70182,09
13	99270,19	44,27	0,000446	46541,74	796063,37	12850431,08	19,58	1481,55	68680,48
14	99225,91	45,45	0,000458	43887,72	749521,63	12054367,71	18,96	1461,96	67198,93
15	99180,47	46,61	0,000470	41384,54	705633,91	11304846,08	18,35	1443,00	65736,97
16	99133,85	47,68	0,000481	39023,67	664249,37	10599212,16	17,71	1424,65	64293,96
17	99086,17	49,05	0,000495	36797,08	625225,70	9934962,79	17,18	1406,94	62869,31
18	99037,12	50,51	0,000510	34697,04	588428,62	9309737,09	16,69	1389,76	61462,37
19	98986,61	52,26	0,000528	32716,36	553731,58	8721308,48	16,30	1373,07	60072,61
20	98934,35	54,31	0,000549	30848,20	521015,21	8167576,90	15,98	1356,77	58699,54
21	98880,03	56,66	0,000573	29086,10	490167,02	7646561,69	15,72	1340,79	57342,77
22	98823,38	59,20	0,000599	27423,99	461080,92	7156394,67	15,50	1325,07	56001,98
23	98764,18	61,93	0,000627	25856,19	433656,93	6695313,75	15,29	1309,57	54676,90
24	98702,26	64,85	0,000657	24377,34	407800,74	6261656,82	15,11	1294,28	53367,33
25	98637,41	67,67	0,000686	22982,38	383423,40	5853856,09	14,87	1279,17	52073,05
26	98569,74	70,38	0,000714	21666,62	360441,02	5470432,69	14,59	1264,30	50793,88
27	98499,36	72,69	0,000738	20425,61	338774,40	5109991,68	14,22	1249,70	49529,59
28	98426,67	74,61	0,000758	19255,22	318348,79	4771217,28	13,77	1235,48	48279,88
29	98352,06	76,12	0,000774	18151,54	299093,56	4452868,49	13,25	1221,71	47044,40
30	98275,94	77,05	0,000784	17110,84	280942,03	4153774,93	12,66	1208,46	45822,69
31	98198,89	77,48	0,000789	16129,64	263831,19	3872832,90	12,01	1195,80	44614,23
32	98121,41	77,42	0,000789	15204,64	247701,55	3609001,72	11,32	1183,80	43418,43
33	98043,99	77,45	0,000790	14332,68	232496,91	3361300,17	10,68	1172,48	42234,63
34	97966,54	77,49	0,000791	13510,72	218164,23	3128803,26	10,08	1161,80	41062,15
35	97889,05	77,53	0,000792	12735,88	204653,51	2910639,04	9,52	1151,72	39900,36
36	97811,52	77,66	0,000794	12005,46	191917,63	2705985,53	8,99	1142,20	38748,64
37	97733,86	80,43	0,000823	11316,91	179912,17	2514067,89	8,79	1133,21	37606,44
38	97653,42	85,15	0,000872	10667,55	168595,26	2334155,72	8,78	1124,42	36473,24

39	97568,27	92,20	0,000945	10054,95	157927,71	2165560,46	8,96	1115,64	35348,82
40	97476,07	101,67	0,001043	9476,84	147872,76	2007632,75	9,32	1106,68	34233,17
41	97374,40	113,73	0,001168	8931,09	138395,93	1859759,99	9,84	1097,36	33126,49
42	97260,67	128,58	0,001322	8415,71	129464,84	1721364,06	10,50	1087,51	32029,14
43	97132,09	146,18	0,001505	7928,86	121049,13	1591899,22	11,26	1077,02	30941,62
44	96985,90	166,33	0,001715	7468,80	113120,27	1470850,10	12,08	1065,76	29864,60
45	96819,57	188,60	0,001948	7033,95	105651,48	1357729,83	12,93	1053,68	28798,84
46	96630,97	212,39	0,002198	6622,87	98617,53	1252078,35	13,73	1040,75	27745,17
47	96418,57	237,48	0,002463	6234,26	91994,65	1153460,83	14,49	1027,02	26704,42
48	96181,09	263,54	0,002740	5866,89	85760,39	1061466,17	15,17	1012,53	25677,40
49	95917,56	290,44	0,003028	5519,64	79893,50	975705,79	15,77	997,37	24664,87
50	95627,12	318,44	0,003330	5191,44	74373,86	895812,29	16,31	981,60	23667,50
51	95308,68	347,59	0,003647	4881,28	69182,42	821438,43	16,79	965,29	22685,90
52	94961,09	377,95	0,003980	4588,18	64301,14	752256,01	17,23	948,50	21720,61
53	94583,15	409,64	0,004331	4311,25	59712,96	687954,87	17,62	931,27	20772,12
54	94173,51	442,43	0,004698	4049,60	55401,71	628241,91	17,95	913,65	19840,85
55	93731,08	475,87	0,005077	3802,43	51352,11	572840,20	18,21	895,70	18927,20
56	93255,21	509,64	0,005465	3568,98	47549,68	521488,09	18,40	877,49	18031,49
57	92745,57	543,58	0,005861	3348,57	43980,70	473938,41	18,52	859,09	17154,00
58	92201,99	577,65	0,006265	3140,51	40632,13	429957,71	18,56	840,58	16294,91
59	91624,34	613,33	0,006694	2944,18	37491,63	389325,57	18,59	822,02	15454,33
60	91011,01	652,55	0,007170	2758,94	34547,44	351833,95	18,66	803,42	14632,31
61	90358,46	697,03	0,007714	2584,11	31788,50	317286,50	18,81	784,76	13828,89
62	89661,43	748,49	0,008348	2419,03	29204,39	285498,00	19,05	765,96	13044,13
63	88912,94	808,49	0,009093	2263,06	26785,36	256293,61	19,41	746,90	12278,17
64	88104,45	878,23	0,009968	2115,55	24522,30	229508,25	19,89	727,49	11531,27
65	87226,23	958,88	0,010993	1975,90	22406,76	204985,94	20,49	707,60	10803,78
66	86267,35	1051,43	0,012188	1843,57	20430,85	182579,19	21,20	687,11	10096,18
67	85215,92	1156,55	0,013572	1718,02	18587,28	162148,34	22,00	665,91	9409,08
68	84059,37	1274,34	0,015160	1598,77	16869,27	143561,05	22,87	643,91	8743,17
69	82785,03	1402,88	0,016946	1485,41	15270,49	126691,79	23,75	621,05	8099,26
70	81382,16	1539,75	0,018920	1377,59	13785,08	111421,30	24,59	597,30	7478,21
71	79842,41	1682,36	0,021071	1275,02	12407,49	97636,22	25,35	572,71	6880,91
72	78160,05	1828,01	0,023388	1177,50	11132,47	85228,73	25,98	547,36	6308,20
73	76332,04	1974,79	0,025871	1084,87	9954,97	74096,26	26,48	521,38	5760,84
74	74357,25	2123,05	0,028552	996,99	8870,09	64141,29	26,85	494,91	5239,46
75	72234,21	2273,72	0,031477	913,70	7873,11	55271,19	27,13	468,05	4744,55
76	69960,49	2426,65	0,034686	834,85	6959,41	47398,09	27,32	440,92	4276,50
77	67533,84	2581,48	0,038225	760,27	6124,56	40438,68	27,42	413,60	3835,58
78	64952,36	2736,57	0,042132	689,82	5364,29	34314,11	27,42	386,18	3421,98
79	62215,79	2888,49	0,046427	623,36	4674,47	28949,83	27,30	358,77	3035,80
80	59327,29	3033,29	0,051128	560,77	4051,11	24275,36	27,05	331,46	2677,03
81	56294,01	3166,54	0,056250	501,98	3490,34	20224,25	26,64	304,41	2345,57
82	53127,47	3283,76	0,061809	446,93	2988,36	16733,91	26,06	277,78	2041,15
83	49843,71	3380,70	0,067826	395,57	2541,43	13745,56	25,31	251,72	1763,38

84	46463,01	3453,22	0,074322	347,87	2145,86	11204,13	24,39	226,40	1511,66
85	43009,79	3497,81	0,081326	303,79	1797,99	9058,27	23,31	202,01	1285,26
86	39511,98	3511,15	0,088863	263,28	1494,20	7260,28	22,07	178,71	1083,24
87	36000,82	3490,57	0,096958	226,31	1230,92	5766,08	20,70	156,63	904,54
88	32510,26	3434,09	0,105631	192,80	1004,61	4535,16	19,21	135,93	747,90
89	29076,17	3339,63	0,114858	162,67	811,81	3530,55	17,63	116,72	611,97
90	25736,53	3207,08	0,124612	135,84	649,14	2718,74	15,97	99,09	495,25
91	22529,45	3038,34	0,134861	112,18	513,30	2069,60	14,27	83,13	396,15
92	19491,11	2837,42	0,145575	91,56	401,12	1556,30	12,57	68,85	313,03
93	16653,69	2610,08	0,156727	73,80	309,56	1155,18	10,91	56,28	244,17
94	14043,61	2363,40	0,168290	58,71	235,76	845,62	9,32	45,37	187,89
95	11680,21	2105,30	0,180245	46,07	177,05	609,86	7,83	36,05	142,53
96	9574,91	1843,79	0,192565	35,63	130,98	432,81	6,47	28,21	106,48
97	7731,12	1586,65	0,205229	27,14	95,35	301,83	5,25	21,74	78,27
98	6144,47	1343,69	0,218683	20,35	68,22	206,48	4,20	16,49	56,53
99	4800,78	1120,36	0,233371	15,00	47,87	138,26	3,30	12,29	40,04
100	3680,42	919,15	0,249741	10,85	32,87	90,39	2,56	8,99	27,75
101	2761,26	740,67	0,268237	7,68	22,02	57,52	1,94	6,43	18,77
102	2020,59	584,57	0,289305	5,30	14,35	35,50	1,45	4,49	12,34
103	1436,02	450,04	0,313391	3,55	9,05	21,15	1,05	3,04	7,85
104	985,99	336,16	0,340940	2,30	5,49	12,10	0,74	1,99	4,81
105	649,82	241,99	0,372398	1,43	3,19	6,61	0,50	1,25	2,82
106	407,83	166,48	0,408210	0,85	1,76	3,42	0,33	0,75	1,57
107	241,35	108,32	0,448823	0,47	0,91	1,66	0,20	0,42	0,82
108	133,03	65,81	0,494681	0,25	0,44	0,75	0,11	0,22	0,40
109	67,22	36,72	0,546231	0,12	0,19	0,31	0,06	0,11	0,18
110	30,50	18,42	0,603917	0,05	0,08	0,11	0,03	0,05	0,07
111	12,08	8,07	0,668186	0,02	0,03	0,04	0,01	0,02	0,02
112	4,01	2,96	0,739483	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01
113	1,04	0,85	0,818254	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
114	0,19	0,17	0,904945	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
115	0,02	0,02	1,000000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00