UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

EGIDIO COSTA FILHO

MATRIZES: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2013

EGIDIO COSTA FILHO

MATRIZES: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

DISSERTAÇÃO apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática"

Orientador: Profª. Dra. Patricia Hess

CURITIBA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

C837 Costa Filho, Egidio
Matrizes : uma aplicação no ensino médio a partir de transformações geométricas / Egidio Costa Filho. – 2013.
102 f. : il. ; 30 cm

Orientadora: Patricia Hess.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Curitiba, 2013.
Bibliografia: f. 93.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. Matrizes (Matemática). 3. Álgebra linear. 4. Prática de ensino. 5. Matemática – Dissertações. I. Hess, Patricia, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD (22. ed.) 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 005

"Matrizes: uma aplicação no ensino médio a partir de transformações geométricas"

por

Egidio Costa Filho

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 02 de agosto de 2013. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Profa. Patricia Hess, Dra.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Moiseis dos Santos Cecconelo, Dr.
(UFMT)

Prof. André Fabiano Steklain Lisboa, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Ao ensino de matemática.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde, força e proteção durante toda essa caminhada.

A minha família, presente em todos os momentos.

A SBM, UTFPR e CAPES por proporcionarem essa oportunidade.

Aos professores do PROFMAT por seus valiosos ensinamentos.

Aos colegas da Turma de 2011, em especial, aos amigos de viagem, Márcio Lúcio e Glebison de Souza.

A minha orientadora, Profª. Dra. Patrícia Hess, pela enorme contribuição e por toda a sua paciência durante a orientação deste trabalho.

RESUMO

FILHO, Egidio Costa. MATRIZES: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS. 102 f. DISSERTAÇÃO – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

O estudo de matrizes no ensino médio é quase sempre centrado no ensino de técnicas operatórias, mesmo foco dado pelos materiais didáticos que abordam esse assunto nesse nível de ensino. O texto propõe uma visão diferenciada a essa prática de ensino, mostrando de forma simples, clara e de fácil compreensão para um aluno do ensino médio algumas aplicações de matrizes, usando para isso as transformações geométricas de translação, rotação e transformação de escala.

Palavras-chave: Matriz, Translação, Rotação, Escala.

ABSTRACT

FILHO, Egidio Costa. MATRIX: AN APPLICATION IN HIGH SCHOOL FROM GEOMETRIC TRANSFORMATIONS. 102 f. DISSERTAÇÃO – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

The study of matrices in high school is almost always centered on the teaching of operative techniques, same focus given by textbooks that address this issue at this level of education. This text proposes a different approach, showing in a clear and simple way some applications as translation, rotation and scaling.

Keywords: Matrix, Translation, Rotation, Scale.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que por natureza é fascinante, exige um alto grau de abstração e ainda sim possibilita usá-la em diversas aplicações, descrevendo muitos fenômenos da natureza. O ensino dessa disciplina na educação básica deve ser norteada tendo em vista garantir situações de aprendizagens significativas, buscando quando possível a contextualização dos conteúdos, para que desta forma, aos poucos, os alunos adquiram o gosto pela matemática e sejam naturalmente conquistados por essa ciência. Quando um professor de matemática, no decorrer de alguma aula, ouve algum aluno dizendo de forma espontânea frases do tipo: "ah! que legal", ou então, "agora eu entendi onde esses cálculos são usados", ele tem a sensação de que está cumprindo a sua tarefa, pois percebe que o aluno compreendeu o assunto lecionado.

Dentre os conteúdos matemáticos existentes na grade curricular do ensino médio, o estudo de matrizes é um conteúdo que não apresenta grandes dificuldades na aprendizagem, porém, as aulas são quase sempre centradas em técnicas operatórias e o material didático existente para o ensino médio não traz, em sua grande maioria, exemplos e exercícios contextualizados que possam ser usados nas aulas.

Durante as aulas iniciais do estudo de matrizes, uma pergunta muito comum feita pelos alunos é a seguinte: "Professor, porque devemos aprender matrizes"? Respostas como: "Esse assunto é cobrado no vestibular", ou ainda, "o aluno do ensino médio precisa ter conhecimentos básicos de matrizes que serão usados nas aulas de álgebra linear em um curso superior", não saciam a curiosidade inerente ao aluno fazendo com que compreendam o conteúdo de forma superficial ou percam o interesse pelo assunto.

Considerando que matrizes são usadas atualmente como um importante recurso tecnológico, o ensino de matrizes deve considerar tal condição, e isso é estabelecido nos parâmetros curriculares nacionais que recomenda utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos, (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000).

Esse texto vem ao encontro dessa visão diferenciada, onde se buscou elaborar um material que procurasse mostrar aplicações de matrizes de forma simples, clara e de fácil compreensão para um aluno do ensino médio. A estratégia utilizada foi trabalhar as transformações geométricas no plano, como translação, rotação e transformação de escala, assunto de álgebra linear aplicado a computação gráfica, abordado aqui sem excessivo rigor matemático acessível a esse nível de ensino.

A inspiração inicial para esse texto surgiu a partir da leitura de (DANTE, 2003). Em seu livro, na parte final do capítulo sobre matrizes, ele aborda algumas aplicações relacionada a matrizes utilizando transformações geométricas, porém, de forma rápida e superficial.

Ao fazer uma pesquisa sobre materiais que abordam estes conteúdos, foram encontrados materiais muito elementares, que trabalham apenas com a intuição geométrica do aluno, o que caberia a uma atividade envolvendo alunos do ensino fundamental, ou materiais que envolvem um conhecimento matemático mais avançado, o que não caberia ao ensino médio.

Este trabalho é então direcionado ao estudo de matrizes no ensino médio e tem como público alvo professores de matemática, que podem encontrar sugestões e ideias de atividades que ajudem a enriquecer as suas aulas. Porém, pensamos que um aluno tem totais condições de acompanhar o material, pois os pré-requisitos para a uma boa leitura são assuntos simples como a localização de pontos no plano cartesiano, operações de adição e multiplicação de matrizes e algumas identidades trigonométricas básicas. Supomos então que o aluno já estudou as operações básicas envolvendo matrizes.

Como base de estudo para este material, usamos como principais referências (DANTE, 2003), (BOLDRINI, 1980), (LAY, 1999), (FILGUEIRAS, 1987),(LIMA, 2011) e (ANTON; BUSBY, 2003).

De forma geral, em todos os capítulos do texto apresentamos a teoria seguida de vários exemplos de aplicação e exercícios resolvidos mostrando formas de contextualização do conteúdo estudado. Outro recurso usado como uma alternativa de facilitar a compreensão do assunto foi, sempre que possível, acrescentar ao texto figuras ilustrando o tema estudado, assim o leitor cria hipóteses e tem uma melhor assimilação da teoria. No final de cada capítulo propomos exercícios envolvendo a teoria com diversos graus de dificuldade.

Iniciamos com o capítulo Representação Matricial de Estruturas. Nele mostramos que, quando uma imagem é formada por pontos e segmentos de reta e está contida em um plano cartesiano, podemos usar uma matriz para armazenar a posição dos pontos que a formam e outra matriz que indica como esses pontos estão conectados. É um capítulo importante, pois essas matrizes podem ser utilizadas quando trabalhamos com as transformações geométricas.

No capítulo seguinte, Translação, começamos trabalhando o conceito de translação visto como um deslocamento que um objeto realiza a partir de certos eixos de referência. Neste texto não vamos trabalhar o conceito de vetor pois entendemos que uma forma de facilitar é fazer toda a teoria usando apenas coordenadas cartesianas e deslocamentos horizontais e verticais. Mostramos que uma translação no plano pode ser efetuada por uma soma de matrizes.

No terceiro capítulo, Rotação, falamos inicialmente sobre rotação de pontos no plano em torno da origem. Usamos algumas relações trigonométricas para deduzir a fórmula utilizada nesse tipo de rotação, fórmula essa que se dá a partir da multiplicação de matrizes. Além de pontos, mostramos que é possível rotacionar estruturas e imagens, não somente em torno da origem, mas em torno de um ponto arbitrário qualquer, rotações essas que também que podem ser efetuadas a partir da multiplicação de matrizes.

No próximo capítulo, Transformação de Escala, definimos transformação de escala como o processo de ampliação ou redução nas medidas de uma imagem. Se a imagem estiver contida em um plano cartesiano e levando-se em consideração que uma imagem é formada por um conjunto de pontos, aplicar uma transformação de escala em uma imagem é aplicar um certo deslocamento em cada ponto que a forma, deslocamento este em relação a algum ponto de referência. Começamos falando sobre transformação de escala em relação a origem e depois generalizamos falando sobre transformação de escala em relação a um ponto arbitrário e mostramos que o processo pode ser efetuado a partir de uma multiplicação de matrizes.

Por último, no capítulo Composição de Transformações Geométricas, falamos que em um processo de manipulação de imagens realizado na computação gráfica, translação, rotação e transformação de escala são procedimentos comuns e que para facilitar as operações matemáticas podemos utilizar apenas uma matriz que represente a composição de diferentes transformações necessárias em um processo. Como a translação se dá por soma de matrizes, há a necessidade de trabalharmos com coordenadas homogêneas de um ponto e desta forma, a translação pode ser efetuada através de multiplicação de matrizes, assim como a rotação e a transformação de escala.

No Anexo A são apresentadas as respostas e algumas sugestões de soluções dos exercícios propostos nas seções finais de cada capítulo.

2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE ESTRUTURAS

Muitas imagens são formadas basicamente por pontos e segmentos de retas que ligam alguns desses pontos. Na figura 1 podemos visualizar exemplos de imagens formadas por pontos e por segmentos de retas.

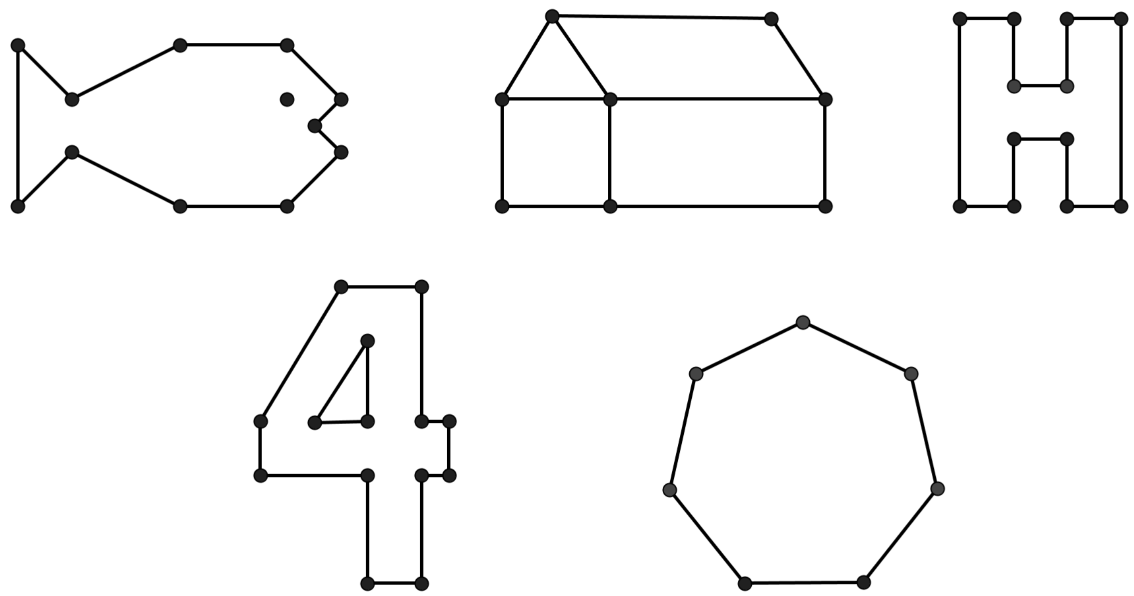


Figura 1: Imagens formadas por pontos e segmentos de reta

As imagens com esse tipo de formação são chamadas de *estruturas* e os pontos localizados nas extremidades dos segmentos de retas que formam uma estrutura são chamados de *vértices*. Quando uma estrutura está contida em um plano Π definido por um sistema de eixos ortogonais OX e OY os seus vértices são localizados por meio de um par ordenado de números reais (x,y), que informam a posição de cada vértice no plano cartesiano.

O par ordenado (x,y) são as coordenadas ou posição dos vértices, em que a coordenada x é referente ao eixo OX, também chamado de eixo das abscissas e a coordenada y do vértice é referente ao eixo OY, também chamado de eixo das ordenadas. Podemos nomear os vértices de uma estrutura usando uma letra maiúscula do nosso alfabeto identificando-o por suas coordenadas, como por exemplo, $P = (x,y)$.

Exemplo 2.1. *Dado a estrutura mostrada na figura 2, informe a posição de cada vértice que a forma.*

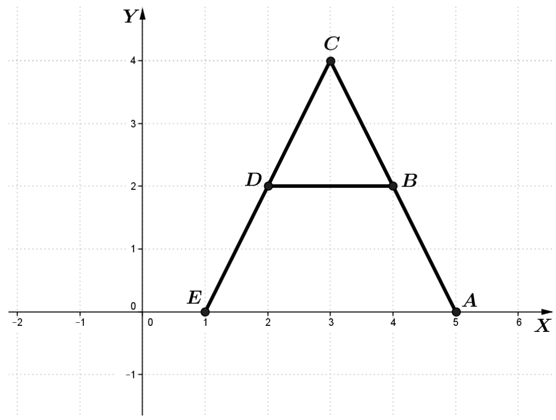


Figura 2: Estrutura de pontos

Solução: A estrutura mostrada na figura 2 é formada pelos vértices $ABCDE$ e a posição de cada vértice é: $A = (5,0)$, $B = (4,2)$, $C = (3,4)$, $D = (2,2)$ e $E = (1,0)$.

□

Uma maneira conveniente de armazenar a posição dos vértices de uma estrutura é formar a *matriz de vértice* V que tem as coordenadas dos vértices como coluna de V, (ANTON; BUSBY, 2003).

A matriz V dos vértices da figura 2 pode ser dada por $V = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Neste exemplo, a primeira coluna de V foi formada pelas coordenadas do vértice A, a segunda, pelas coordenadas do vértice B, a terceira, pelas coordenadas do vértice C, a quarta, pelas coordenadas do vértice D e a quinta coluna foi formada pelas coordenadas do vértice E.

De forma geral, quando formamos uma matriz V dos vértices de uma estrutura, não há uma ordem específica que deve ser seguida para listagem dos vértices na matriz. Contudo, uma vez formada a matriz V, podemos criar uma matriz que informa como esses vértices estão conectados. Chamamos essa matriz de *matriz de conexões*, (ANTON; BUSBY, 2003).

A matriz C, quadrada de ordem n, que informa as conexões dos n vértices de uma estrutura, será formada pelas entradas 1 ou 0. O elemento c_{ij} de C será:

- 1, se o vértice listado na coluna i da matriz V estiver conectado ao vértice listado na coluna j da matriz V.

- 0, se o vértice listado na coluna i da matriz V não estiver conectado ao vértice listado na coluna j da matriz V.

A matriz de conexões da matriz V formada pelos vértices da estrutura da figura 2 é dada por:

$$C_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos detalhar a formação dos elementos que pertencem a primeira linha da matriz de conexões C.

- $c_{11} = 1$, pois o vértice A que foi listado na primeira coluna da matriz V está conectado ao vértice A, listado na primeira coluna da matriz V. Aqui, por convenção, entenderemos que todos os vértices estão conectados a si mesmo. Por consequência, os elementos da diagonal principal de C são iguais a 1.

- $c_{12} = 1$, pois o vértice A que foi listado na primeira coluna da matriz V está conectado ao vértice B, listado na segunda coluna da matriz V.

- $c_{13} = 1$, pois o vértice A que foi listado na primeira coluna da matriz V está conectado ao vértice C, listado na terceira coluna da matriz V.

- $c_{14} = 0$, pois o vértice A que foi listado na primeira coluna da matriz V não está conectado ao vértice D, listado na quarta coluna da matriz V.

- $c_{15} = 0$, pois o vértice A que foi listado na primeira coluna da matriz V não está conectado ao vértice E, listado na quinta coluna da matriz V.

Exemplo 2.2. *Dada a estrutura formada por* 4 *vértices mostrada na figura 3, escreva três diferentes matrizes que armazenem a posição dos vértices dessa estrutura e as matrizes de conexões relacionadas a essas matrizes dos vértices.*

Solução: Os vértices $A = (5,4)$, $B = (3,5)$, $C = (1,4)$ e $D = (3,1)$ formam a estrutura da figura 3. Para a formação da matriz dos vértices V, a ordem em que as coordenadas dos vértices são dispostas nas colunas de V é irrelevante, e desta forma, o número de diferentes matrizes dos vértices que podemos formar é dado pela permutação dos 4 vértices, ou seja, 24 formações distintas.

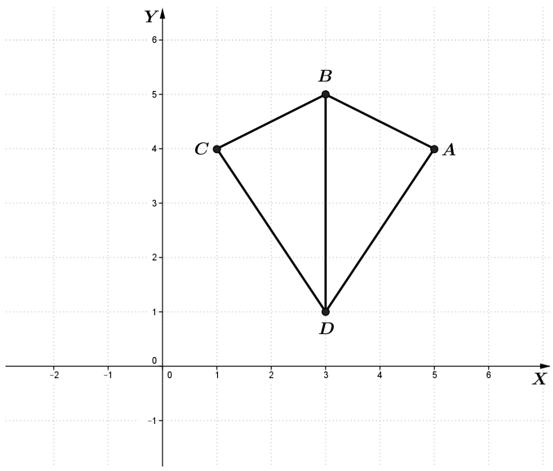


Figura 3: Estrutura formada por 4 **vértices**

Vamos escrever 3 dessas diferentes matrizes e também a matriz das conexões relacionadas a essas matrizes.

- Ordem usada para a formação das colunas de V: *ABCD*

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ordem usada para a formação das colunas de V: *DACB*

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ordem usada para a formação das colunas de V: *BCDA*

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{A} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

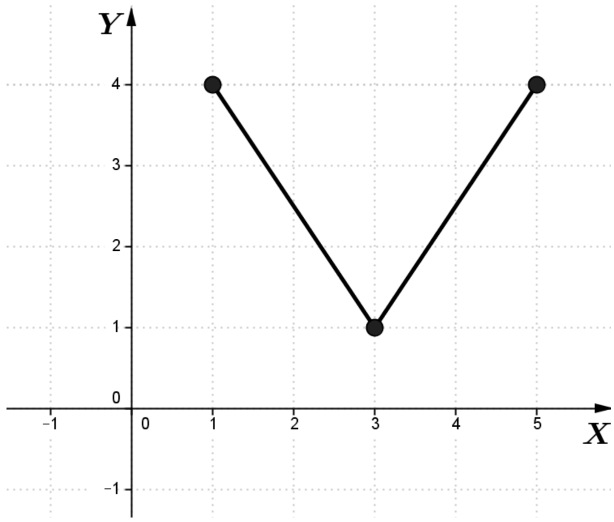
$\square$

De forma geral, utilizando a matriz dos vértices e a matriz de conexões, conseguimos obter uma representação algébrica para muitas figuras formadas por pontos e segmentos, que são entes geométricos. Os objetos com fronteiras curvas podem ser aproximados por estruturas escolhendo pontos bem próximos uns dos outros ao longo das curvas e conectando-os por segmentos de retas, (ANTON; BUSBY, 2003).

Nos capítulos seguintes, trabalharemos com algumas transformações geométricas aplicadas em estruturas. Veremos que transformações geométricas podem ser representados por meio de operações envolvendo matrizes e neste sentido a utilização das matrizes dos vértices de uma estrutura é algo muito importante, pois facilita o trabalho com essas transformações.

2.1 EXERCÍCIOS

1) Qual dos itens apresenta a matriz que armazena a posição dos vértices e a matriz conexão relacionada a essa matriz dos vértices da estrutura abaixo?



a) $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

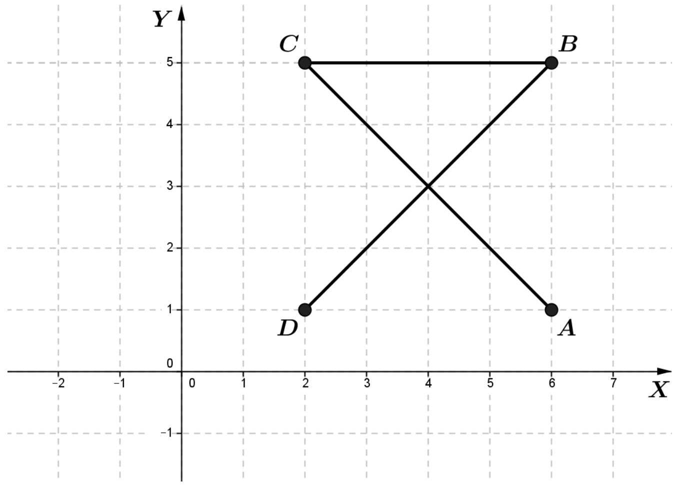
b) $V = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $V = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $V = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $V = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

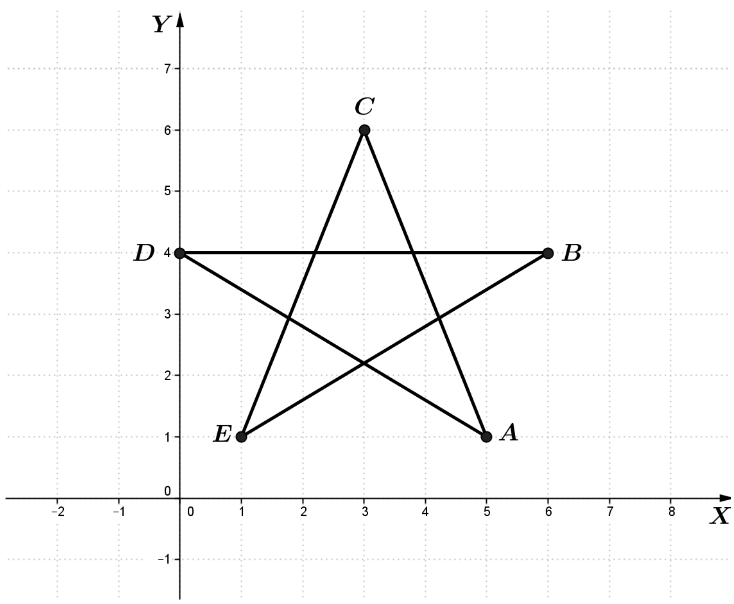
2) A matriz $V = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz que armazena a posição dos vértices da estrutura da figura abaixo. Nesses termos, qual das matrizes de conexões está relacionada a essa matriz V?



a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

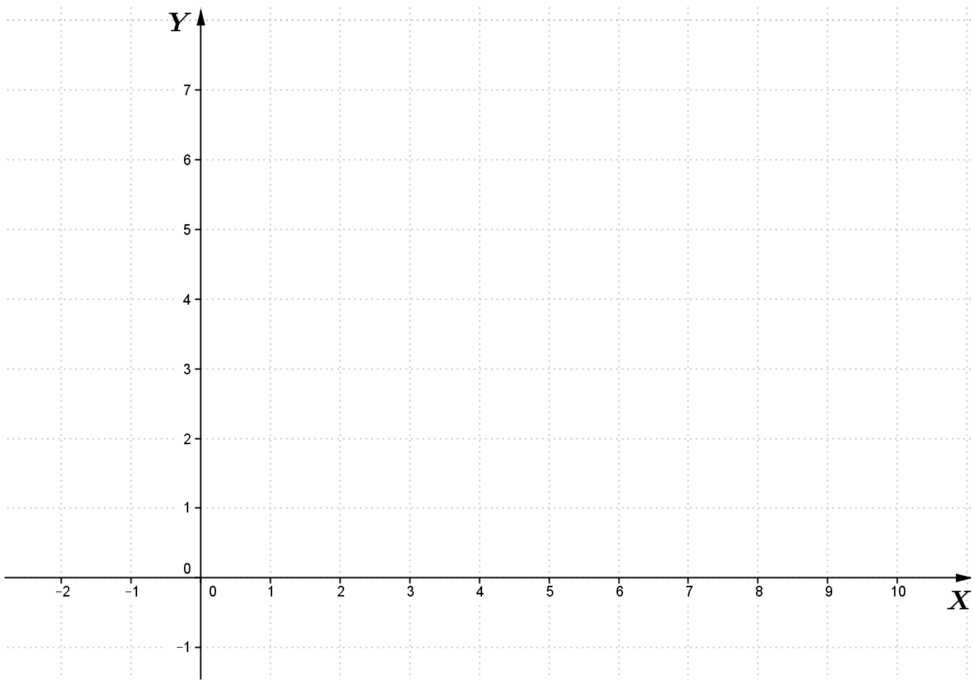
d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Observando a estrela de cinco pontas ilustrada na figura abaixo, determine uma matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura e a matriz de conexões associada a essa matriz dos vértices.



4) Abaixo, temos a matriz V que armazena a posição dos vértices de uma estrutura e a matriz C que informa como esses vértices estão conectados. Represente o esboço dessa estrutura no plano cartesiano abaixo.

$$V = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 5 & 3 & 9 & 7 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 1 & 7 & 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad C_{8\times 8} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



3 TRANSLAÇÃO

Começaremos pedindo que o leitor reflita por alguns instantes na seguinte pergunta: O que você entende por translação?

De imediato, lembrando as aulas de geografia, poderíamos pensar no movimento que o planeta Terra realiza em torno do Sol, esse movimento é chamado movimento de Translação.

A abordagem que queremos para translação não está relacionada ao movimento realizado pelo planeta Terra. Veremos mais adiante as diferenças entre esse conceito e o conceito que trabalharemos neste texto.

Na busca de uma ideia intuitiva de translação, podemos comentar algo muito comum que fazemos em nossas casas, que é a alteração na posição de alguns móveis, trocando-os de lugar, talvez por acharmos que no momento outra disposição destes móveis seja mais conveniente. Se o movimento realizado nos móveis não apresentar nenhum giro, podemos dizer que foi realizado um movimento de translação.

As vezes, ao transitarmos por alguma rodovia, avistamos um comboio de caminhões. Dependendo do ângulo de visão, a impressão que temos é que os caminhões são todos iguais, diferenciados apenas pela posição relativa que ocupam.

Seguindo por uma rodovia reta, podemos pensar que todos os demais caminhões são translações do primeiro caminhão do comboio. Assim, na figura 4, os caminhões B, C, D e E podem ser entendidos como translações do caminhão A.

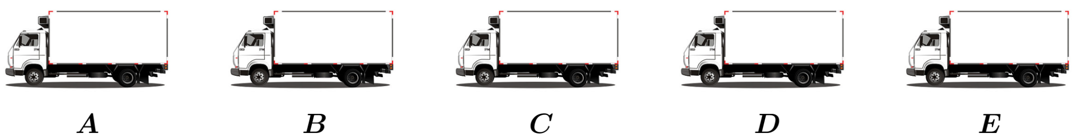
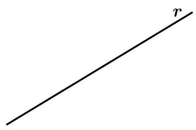


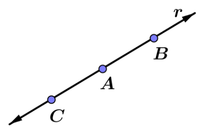
Figura 4: Exemplo de translação 1

Aqui, queremos enfatizar translação como movimento quando um objeto sofre uma alteração em sua posição inicial. Movimento pelo qual há um deslocamento seguindo uma direção e um sentido.

É importante deixarmos bem claro o conceito de direção e sentido. Quando falamos em direção estamos nos referindo a uma rota, um caminho, um percurso a ser seguido. A reta r, mostrada na figura 5 (a) indica uma direção. Tendo uma direção definida, há a necessidade de dizermos qual é o sentido a ser seguido. Observando a figura 5 (b), vemos dois sentidos possíveis, sentido AB e sentido AC.



(a) Direção



(b) Sentido

Figura 5: Conceito de direção e sentido

O movimento de Translação realizado pelo planeta Terra é um movimento elíptico que a Terra realiza em torno do Sol. Portanto, não se encaixa na abordagem de translação que queremos pois não ocorre seguindo uma direção linear.

Se deslizarmos um livro sobre uma mesa, sem girá-lo, podemos deslizá-lo em qualquer direção e sentido que estaremos transladando esse livro.

Relacionando o exemplo do livro com um plano cartesiano definido por um sistema de eixos ortogonais OX e OY de origem O, qualquer movimento realizado pelo livro pode ser determinado por dois deslocamentos, um paralelo ao eixo OX, para a direita ou para a esquerda e outro paralelo ao eixo OY, para cima ou para baixo. Ver figura 6.

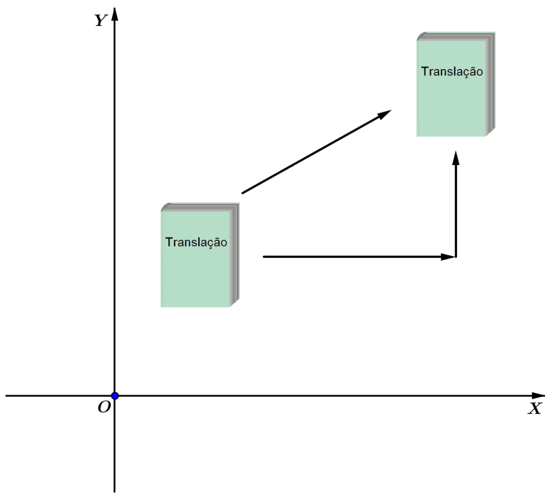


Figura 6: Exemplo de translação 2

É importante notarmos que após a translação sofrida, o livro manteve a sua forma e tamanho originais. Esta propriedade está intimamente ligada ao fato de que translação é uma isometria. Isometria no plano é definida como uma transformação que não altera as distâncias entre os pontos dos objetos transformados, (LIMA, 1996).

Neste capítulo estudaremos a translação no plano cartesiano, veremos como caracterizá-la a partir de um sistema de eixos ortogonais e mostraremos que uma translação pode ser realizada a partir de soma de matrizes.

3.1 COORDENADAS DE UM PONTO APÓS UMA TRANSLAÇÃO

Seja o plano Π definido pelo sistema de eixos ortogonais OX e OY de origem O. Se P é um ponto que pertence a Π, ele pode ser determinado a partir de um par ordenado de números reais (x,y) e será identificado por $P = (x,y)$.

Se transladarmos o ponto $P = (x,y)$ ele terá novas coordenadas, digamos $P' = (x',y')$. Podemos determinar as coordenadas do ponto P' em função das coordenadas do ponto P. Para isso vamos estabelecer que:

- O deslocamento horizontal, paralelo ao eixo das abscissas, terá a unidades de medida. Para indicar que o deslocamento ocorreu para a direita usaremos $a > 0$ e para indicar que o deslocamento ocorreu para a esquerda usaremos $a < 0$.
- O deslocamento vertical, paralelo ao eixo das ordenadas, terá b unidades de medida. Para indicar que o deslocamento ocorreu para cima usaremos $b > 0$ e para indicar que o deslocamento ocorreu para baixo usaremos $b < 0$.

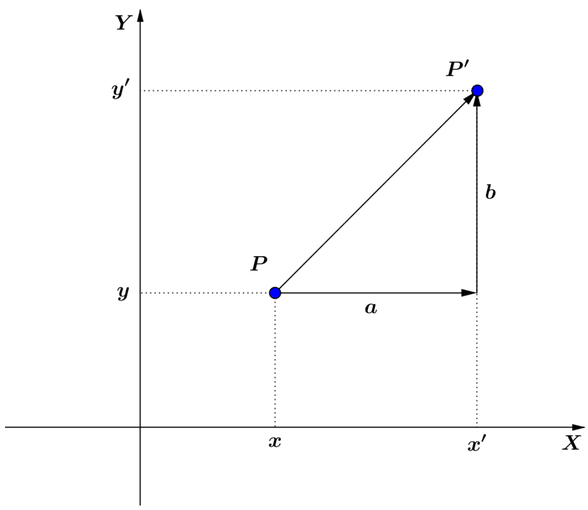


Figura 7: Translação do ponto P

A figura 7 mostra que o ponto P sofreu uma translação com um deslocamento de a unidades de medida para a direita e b unidades de medida para cima.

A abscissa do ponto P' pode ser obtida ao adicionarmos a unidades de medida a abscissa do ponto P. Da mesma forma, a ordenada do ponto P' pode ser obtida ao adicionarmos b unidades de medida a ordenada do ponto P.

Assim, pelas coordenadas do ponto P, podemos determinar as coordenadas do ponto P' através do sistema

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}. \tag{1}$$

Considerando as coordenadas do ponto $P = (x,y)$ e do ponto $P' = (x',y')$ na forma de matrizes coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, respectivamente, podemos determinar as coordenadas do ponto P' por meio de soma de matrizes. Conhecendo a, referente ao deslocamento horizontal do ponto P, e b, referente ao deslocamento vertical do ponto P, temos a matriz coluna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Desta forma, as coordenadas do ponto $P' = (x',y')$ são dadas pela equação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Vale comentar que o sistema (1) é equivalente a equação (2).

Exemplo 3.1. *Determine as novas coordenadas do ponto* $P = \left(-\frac{7}{2}, 4\right)$ *após uma translação de* 5 *unidades para a direita e* 3 *unidades para baixo.*

Solução: Como o ponto $P = \left(-\frac{7}{2}, 4\right)$ sofreu uma translação de 5 unidades para a direita e 3 unidades para baixo, os valores de a e b são $a = 5$ e $b = -3$.

Vamos utilizar a equação (2) para determinar as novas coordenadas do ponto P após a translação. Poderíamos também determinar as coordenadas do ponto P' utilizando o sistema (1), porém recomendamos o trabalho com matrizes, pois é o que focaremos no decorrer de todo o texto.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto P após a translação são $P' = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$. A figura 8 ilustra a translação do ponto P.

$\square$

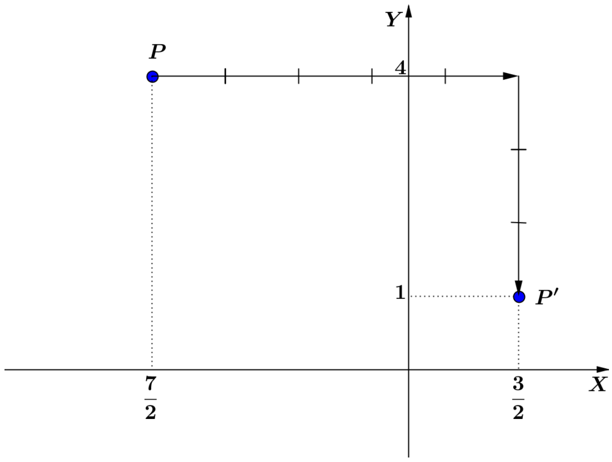


Figura 8: Novas coordenadas do ponto P

Exemplo 3.2. *O segmento de reta $\overline{AB}$ com $A = (1, -4)$ e $B = (5, -1)$ será transladado em 6 unidades para a esquerda e 4 unidades para cima. Determine a nova posição do segmento $\overline{AB}$.*

Solução: Para transladar o segmento $\overline{AB}$ basta transladar os pontos A e B que são os seus extremos.

Como a translação será de 6 unidades para a esquerda e 4 unidades para cima, os valores de a e b serão $a = -6$ e $b = 4$.

O ponto A' será o transladado do ponto A e o ponto B' será o transladado do ponto B, e por consequência, o segmento de reta $\overline{A'B'}$ será o resultado da translação do segmento de reta $\overline{AB}$. Pela equação (2) temos:

Ponto A'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ponto B'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Os pontos $A' = (-5, 0)$ e $B' = (-1, 3)$ são os extremos do segmento de reta $\overline{A'B'}$. A figura 9 mostra a nova posição do segmento de reta $\overline{AB}$.

$\square$

Observando a figura 9, temos a impressão que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são

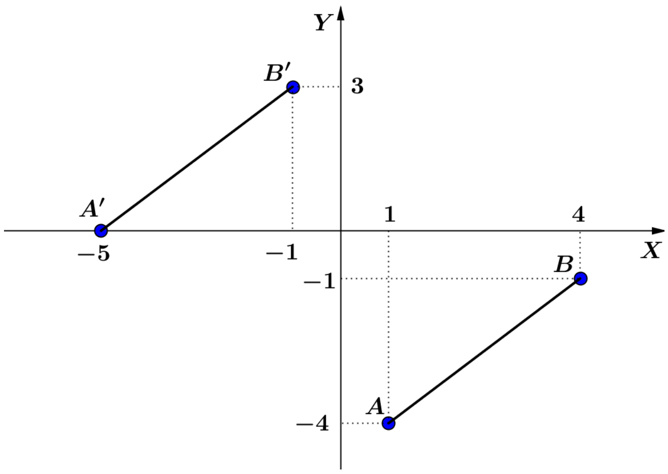


Figura 9: Translação do segmento de reta $\overline{AB}$

congruentes e paralelos. De fato, isto ocorre e é uma propriedade importante da translação que enunciaremos a seguir.

Propriedade 3.3. *Uma translação transforma o segmento de reta $\overline{AB}$ no segmento de reta $\overline{A'B'}$, tal que $\overline{A'B'}$ tem o mesmo comprimento e é paralelo a $\overline{AB}$.*

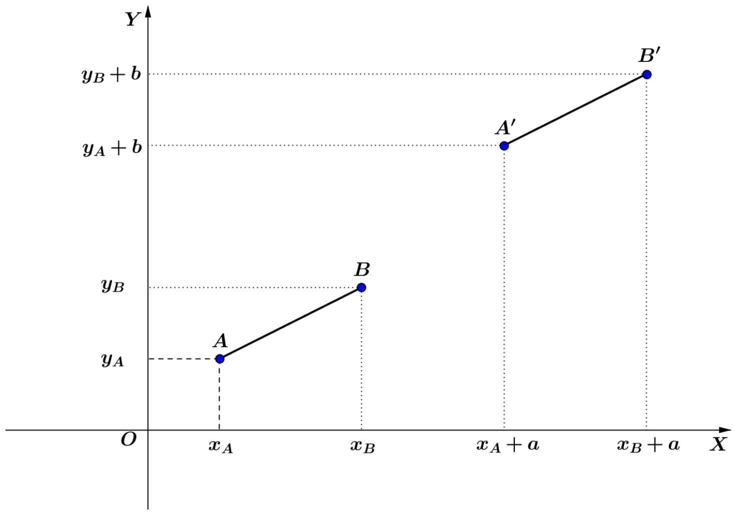


Figura 10: Propriedade da translação

Demonstração: Seja um segmento de reta $\overline{AB}$ com $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$. Por uma translação com deslocamento horizontal a e deslocamento vertical b, o segmento de reta $\overline{AB}$ será transformado no segmento de reta $\overline{A'B'}$ e as coordenadas dos pontos A' e B' são $A' = (x_A + a, y_A + b)$ e $B' = (x_B + a, y_B + b)$, ver figura 10.

Lembrando que a distância entre dois pontos quaisquer $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ é dado por $d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_p)^2 + (y_Q - y_P)^2}$, vamos determinar o comprimento do segmento de reta $\overline{A'B'}$. Então:

$$
\begin{aligned}
d_{A'B'} &= \sqrt{(x_{B'}-x_{A'})^2+(y_{B'}-y_{A'})^2} \\
&= \sqrt{(x_B+a-(x_A+a))^2+(y_B+b-(y_A+b))^2} \\
&= \sqrt{(x_B+a-x_A-a)^2+(y_B+b-y_A-b)^2} \\
&= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\
&= d_{AB}
\end{aligned}
$$

Portanto $d_{A'B'} = d_{AB}$ provando que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são congruentes.

Para provar que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são paralelos basta mostrar que eles possuem a mesma inclinação em relação ao eixo das abscissas através do cálculo dos seus respectivos coeficientes angulares. Lembrando que o coeficiente angular de um segmento de reta $\overline{PQ}$ com $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ é dado por $M_{PQ} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - y_P}$, a inclinação do segmento de reta $\overline{A'B'}$ é:

$$
\begin{aligned}
M_{A'B'} &= \frac{y_{B'}-y_{A'}}{x_{B'}-x_{A'}} \\
&= \frac{y_B+b-(y_A+b)}{x_B+a-(x_A+a)} \\
&= \frac{y_B+b-y_A-b}{x_B+a-x_A-a} \\
&= \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \\
&= M_{AB}
\end{aligned}
$$

Como $M_{A'B'} = M_{AB}$, fica provado que os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são paralelos.

$\square$

Exemplo 3.4. *Translade os segmentos de reta* $\overline{OA}$ *e* $\overline{OB}$ *em* 10 *unidades para a esquerda e* 2 *unidades para cima. Dados:* $O = (3,3)$, $A = (7,1)$ *e* $B = (7,5)$.

Solução: Como a translação será de 10 unidades para a esquerda e 2 unidades para cima, os valores de a e b serão $a = -10$ e $b = 2$.

O ponto O' será o transladado do ponto O, o ponto A' será o transladado do ponto A e o ponto B' será o transladado do ponto B. Pela equação (2) temos:

Ponto O'

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Ponto A'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ponto B'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Assim, a translação do segmento de reta $\overline{OA}$ é o segmento de reta $\overline{O'A'}$ e a translação do segmento de reta $\overline{OB}$ é o segmento de reta $\overline{O'B'}$ com $O' = (-7,5)$, $A' = (-3,3)$ e $B = (-3,7)$.

A figura 11 ilustra a translação dos segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

$\square$

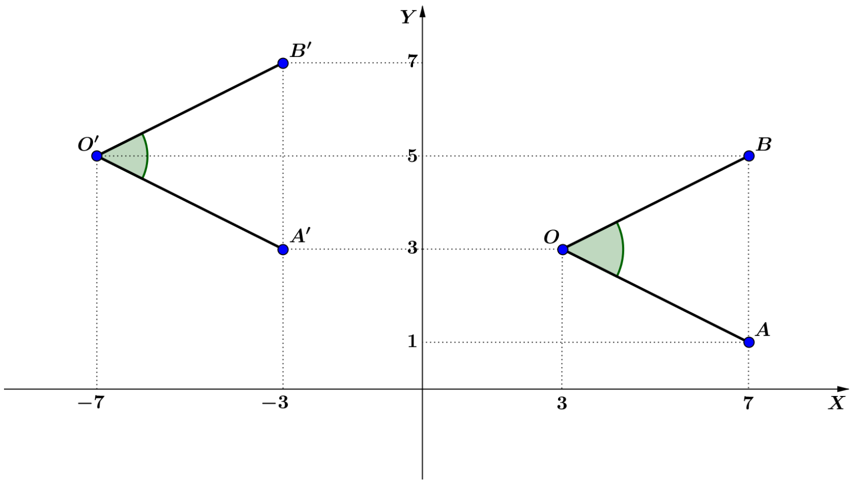


Figura 11: Translação dos segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$

Os segmentos de reta $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ formam o ângulo $A\widehat{O}B$ pois possuem o ponto O em comum. Da mesma forma os transladados $\overline{O'A'}$ e $\overline{O'B'}$ formam o ângulo $A'\widehat{O'}B'$ pois possuem o ponto O' em comum. Como consequência da propriedade 3.3, podemos afirmar que os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ são congruentes, pois, $\overline{O'A'}$ é paralelo a $\overline{OA}$ e $\overline{O'B'}$ é paralelo a $\overline{OB}$.

3.2 TRANSLAÇÃO DE POLÍGONOS

Vimos que por uma translação, segmentos de reta são transformados em segmentos de reta paralelos e com o mesmo comprimento e como consequência disso, ângulos formados por segmentos de reta não se alteram após uma translação.

Como um polígono nada mais é que uma figura plana limitada por segmentos de reta, através de uma translação, um polígono sempre é transformado em um polígono congruente e para transladá-lo, basta aplicarmos a translação em todos os seus vértices.

Exemplo 3.5. *Sejam* $A = (1,1)$, $B = (7,3)$ *e* $C = (3,5)$ *as coordenadas dos vértices de um triângulo. Quais são as novas coordenadas dos vértices desse triângulo após ele sofrer uma translação de* 8 *unidades para a esquerda e* 7 *unidades para baixo?*

Solução: Para transladar o triângulo, devemos aplicar a translação em todos os seus vértices. Como o deslocamento foi de 8 unidades para a esquerda e 7 unidades para baixo, temos $a = -8$ e $b = -7$.

Pela translação, o triângulo ABC será transformado no triângulo $A'B'C'$. O vértice A' será o transladado do vértice A, o vértice B' será o transladado do vértice B e o vértice C' será o transladado do vértice C. Pela equação (2) temos:

Vértice A'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Vértice B'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Vértice C'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Assim, $A' = (-7,-6)$, $B' = (-1,-4)$ *e* $C' = (-5,-2)$ são as novas coordenadas dos vértices do triângulo após a translação. A figura 12 ilustra a translação do triângulo ABC.

□

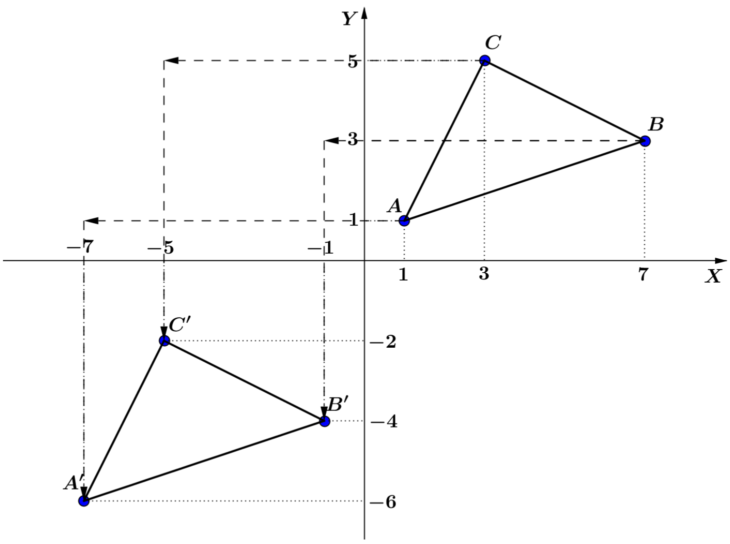


Figura 12: Translação do triângulo ABC

Determinar as novas coordenadas dos vértices do triângulo ABC após uma translação é algo mais trabalhoso se transladarmos individualmente cada vértice. Porém, como o triângulo é uma estrutura formada por pontos e segmentos de reta, este processo pode ser facilitado com a utilização da matriz dos vértices V dessa estrutura.

Para este processo, precisamos também de uma matriz T, matriz essa que represente a translação sofrida pela estrutura. T será formada da seguinte forma:

- O número de colunas de T deve ser igual a quantidade de vértices da estrutura que será transladada.
- T terá duas linhas. Os elementos da primeira linha serão formados pelo valor referente ao deslocamento horizontal da translação e os elementos da segunda linha serão formados pelo valor referente ao deslocamento vertical da translação.

Desta forma, a matriz V' que fornece as coordenadas dos vértices de uma estrutura após uma translação é dada por:

$$V' = T + V. \tag{3}$$

em que T é a matriz da translação e V é a matriz formada pelos vértices da estrutura que sofrerá a translação.

No exemplo 3.5, o triângulo sofreu um deslocamento horizontal de 8 unidades para a esquerda e 7 unidades para baixo, assim, temos $a = -8$ e $b = -7$. A matriz T da translação será formada por 3 colunas, pois a estrutura possui 3 vértices, e será dada por $T = \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}$.

Uma matriz dos vértices desse triângulo e a matriz de conexões relacionada a essa matriz dos vértices são, respectivamente: $V = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, por (3), a matriz dos vértices após a translação é:

$$\begin{aligned} V' &= T + V \\ &= \begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -1 & -5 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como as colunas de V' armazenam a posição dos vértices da estrutura após a translação, as novas coordenadas dos vértices do triângulo transladado são: $(-7,-6)$, $(-1,-4)$ e $(-5,-2)$.

Vale ressaltar que a matriz de conexões não é utilizada no processo de determinação das novas coordenadas de uma estrutura após uma translação, mas ela é importante pois translações não alteram a forma como os vértices estão conectados. Então usando a matriz V' e a matriz de conexões relacionada a matriz V podemos representar a estrutura após a translação.

Exemplo 3.6. *Abaixo, temos a matriz* V *que armazena a posição dos vértices de uma estrutura e a matriz* C, *matriz de conexão relacionada a* V, *que informa como os vértices dessa estrutura estão conectados. Faça o esboço dessa estrutura após ela sofrer uma translação de* 6 *unidades para a direita e* 5 *unidades para cima.*

$$V = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -5 & -5 \\ -4 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solução: Como o deslocamento foi de 6 unidades para a direita e 5 unidades para cima, temos $a = 6$ e $b = 5$. A estrutura possui 5 vértices, logo a matriz T referente a essa translação é dada por $T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Desta forma, por (3):

$$\begin{aligned} V' &= T + V \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -5 & -5 \\ -4 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para fazer o esboço desta estrutura após a translação, basta utilizar a matriz dos vértices V' e a matriz de conexões C, a mesma da matriz V, pois uma translação não altera a forma como os vértices são conectados. Portanto, utilizando a matriz V' e C

$$V' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos obter o esboço da estrutura após a translação, mostrada na figura 13.

□

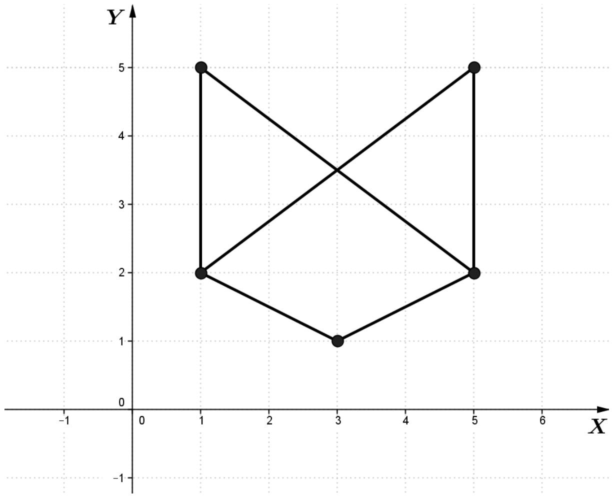


Figura 13: Esboço da estrutura após uma translação

Exemplo 3.7. *O quadrado ABCD de vértice* $A = (9, -3)$ *e diagonal* $d = 3\sqrt{2}$ *foi transformado por uma translação no quadrado* $A'B'C'D'$ *de vértice* $C' = (-7, 2)$*, conforme é mostrado na figura 14. Determine a matriz* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *da translação do quadrado ABCD, em que* a *é o valor referente ao deslocamento horizontal e* b *é o valor referente ao deslocamento vertical.*

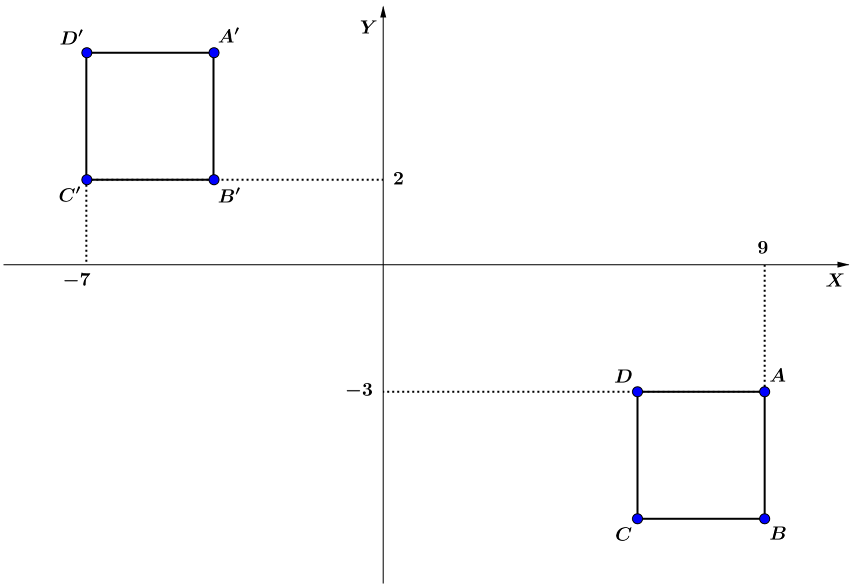


Figura 14: Translação do quadrado *ABCD*

Solução: Vamos determinar a medida l do lado do quadrado $ABCD$ usando o fato de que a medida da sua diagonal é $d = 3\sqrt{2}$. Como a diagonal de todo quadrado é dado por $d = l\sqrt{2}$, o lado l do quadrado $ABCD$ vale 3.

Analisando a figura 14, pelas coordenadas do vértice A e pela medida do lado do quadrado, podemos concluir que as coordenadas do vértice C do quadrado $ABCD$ são $C = (6,-6)$.

O vértice $C' = (-7,2)$ é o transladado do vértice $C = (6,-6)$. Portanto, pela equação (2) temos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Adicionando a matriz $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ de ambos os lados da igualdade:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Segue que, $\begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}$ é a matriz da translação do quadrado $ABCD$.

$\square$

3.3 EXERCÍCIOS

1) Sejam $A = (-4,2)$, $B = (-7,-6)$ e $C = (1,-2)$ as coordenadas dos vértices de um triângulo. Quais são as novas coordenadas dos vértices desse triângulo após ele sofrer uma translação de 9 unidades para a direita e 7 unidades para cima?

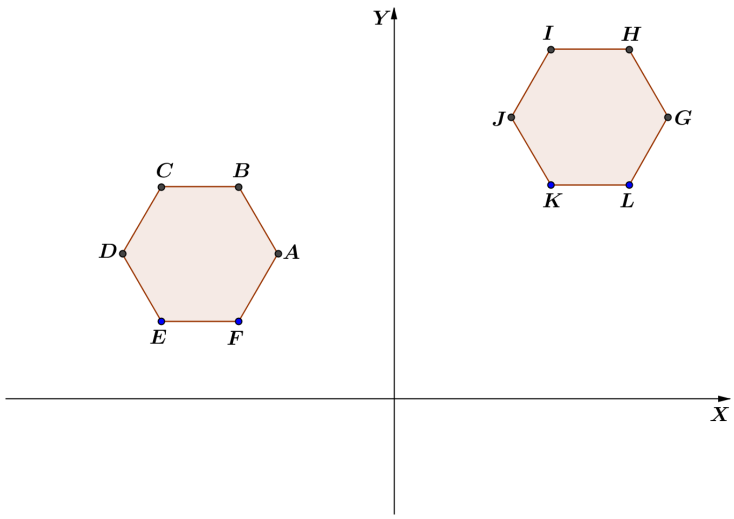
2) Na figura abaixo, os hexágonos regulares $ABCDEF$ e $GHIJKL$ são congruentes. Se transladarmos o hexágono $ABCDEF$, quantas translações são possíveis dentro das condições estabelecidas em cada item? Justifique a sua resposta.

a) Pelo menos um dos vértices do hexágono transladado coincidir com o vértice K?

b) Pelo menos um dos vértices do hexágono transladado coincidir com os vértices K e L?

c) Pelo menos um dos vértices do hexágono transladado coincidir com os vértices K e I?

d) Pelo menos um dos vértices do hexágono transladado coincidir com os vértices K e H?

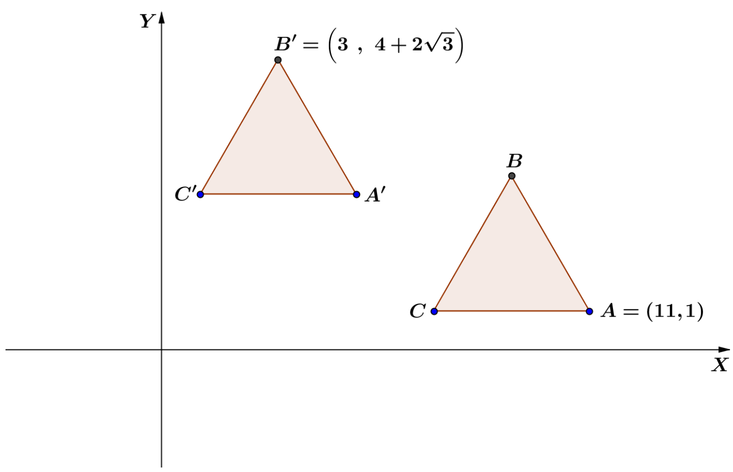


3) Um móvel partindo do ponto $A = (5,2)$ percorreu 4 unidades para o leste, depois 6 unidades para o norte e finalmente 12 unidades para o oeste até chegar ao ponto B. Determine:

a) A matriz $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ que representa a translação do móvel, do ponto A diretamente ao ponto B, em que a é o valor referente ao deslocamento horizontal e b é o valor referente ao deslocamento vertical.

b) A distância do ponto A ao ponto B.

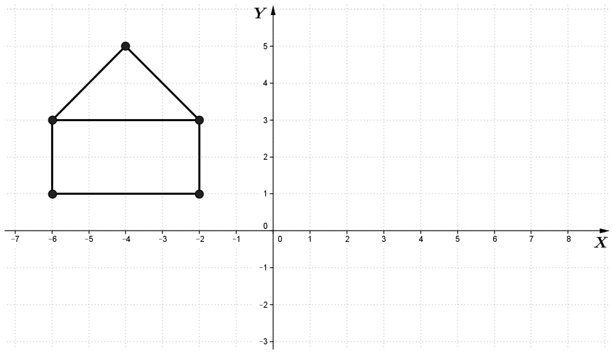
4) O triângulo equilátero ABC de vértice $A = (11,1)$ foi transformado por uma translação no triângulo $A'B'C'$ de vértice $B' = (3, 4+2\sqrt{3})$, conforme é mostrado na figura abaixo. Sabendo-se que a medida do lado do triângulo equilátero é de 4 $u.m.$, determine a matriz $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ da translação do triângulo ABC, em que a é o valor referente ao deslocamento horizontal e b é o valor referente ao deslocamento vertical.



5) Qual das matrizes armazena a posição dos vértices da estrutura representada na figura abaixo após uma translação de 9 unidades para a direita e 3 unidades para baixo?

a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

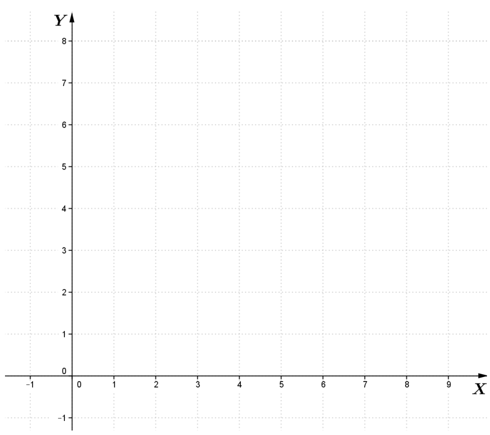
d) $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$



6) Abaixo, temos a matriz V que armazena a posição dos vértices de uma estrutura e a matriz C, matriz de conexão relacionada a V, que informa como os vértices dessa estrutura estão conectados.

$$V = \begin{pmatrix} -11 & -9 & -5 & -3 & -7 & -7 & -5 \\ -1 & -3 & -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_{7\times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faça o esboço dessa estrutura após ela sofrer uma translação de 12 unidades para a direita e 4 unidades para cima.

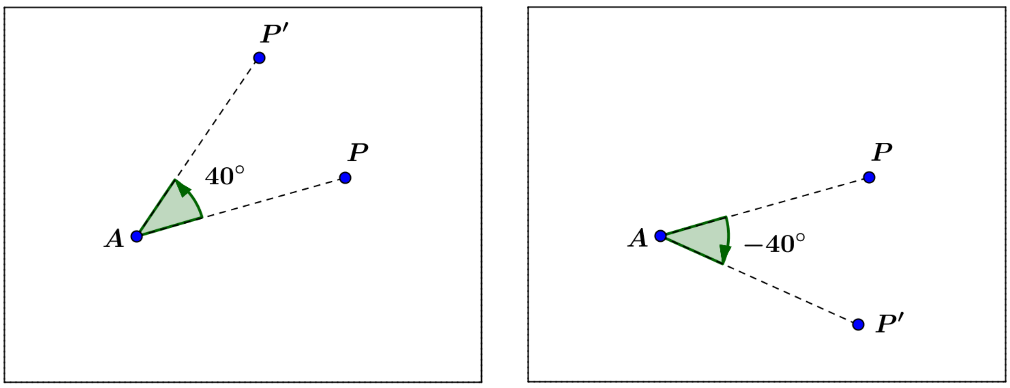


4 ROTAÇÃO

Podemos definir rotação como um movimento giratório que um objeto realiza em torno de um ponto fixo. Brinquedos como carrossel ou roda gigante em parques de diversões são exemplos de objetos que realizam rotações.

Uma rotação sempre é realizada em torno de um ponto de referência e quando um objeto realiza a rotação, esse movimento giratório ocorre descrevendo um arco de circunferência. Considerando um plano definido por um sistema de eixos ortogonais, para rotacionarmos um ponto em relação a outro, precisamos das seguintes definições:

- O sentido da rotação, que pode ser o sentido horário, quando o movimento giratório respeita o giro dos ponteiros de um relógio, ou o sentido anti-horário, quando o movimento giratório é o contrário ao giro dos ponteiros de um relógio.
- O ângulo da rotação, indicando o quanto o ponto irá girar, que pode ser dado em graus ou em radianos.
- O ponto que servirá de referência para a rotação.



(a) Rotação de 40° no sentido anti-horário (b) Rotação de 40° no sentido horário

Figura 15: Rotação do ponto *P* em torno do ponto *A*

A figura 15 ilustra duas diferentes rotações do ponto P em torno do ponto A. Uma rotação de 40° no sentido anti-horário é mostrada na figura 15 (a), e uma rotação de 40° no sentido horário, na figura 15 (b). Observe que, com o processo de rotação, o ponto P foi transformado no ponto P'.

Por convenção, dizemos que o sentido anti-horário é o sentido positivo e o sentido horário é o sentido negativo. A rotação mostrada na figura 15 (b) foi de -40°, pois ocorreu no sentido horário.

Vale comentar que uma rotação não altera a distância entre os pontos dos objetos rotacionados, portanto, assim como a translação, a rotação também é uma isometria.

4.1 ROTAÇÃO EM TORNO DA ORIGEM

Sejam Π o plano definido pelo sistema de eixos ortogonais OX e OY com origem no ponto O e $P = (x, y)$ um ponto que pertence ao plano Π.

Vamos deslocar o ponto P em relação a origem do plano fazendo com que ele descreva um arco de θ graus no sentido anti-horário, o arco formado terá como centro a origem.

Quando o ponto P sofre esse tipo de deslocamento, dizemos que P sofreu uma rotação de um ângulo de θ graus no sentido anti-horário em torno da origem. Desta forma, P terá novas coordenadas, digamos $P' = (x', y')$, situação ilustrada na figura 16.

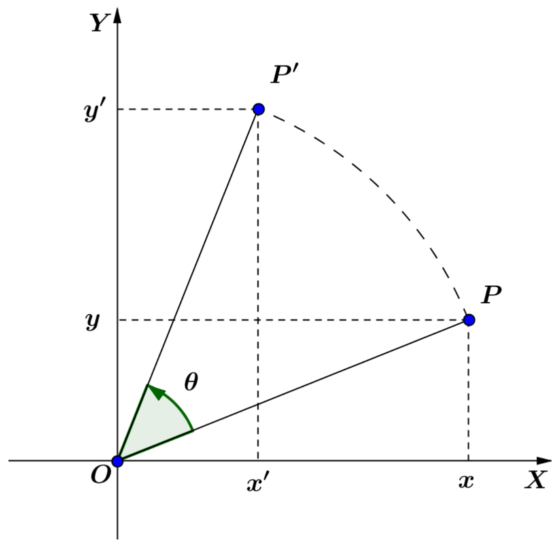
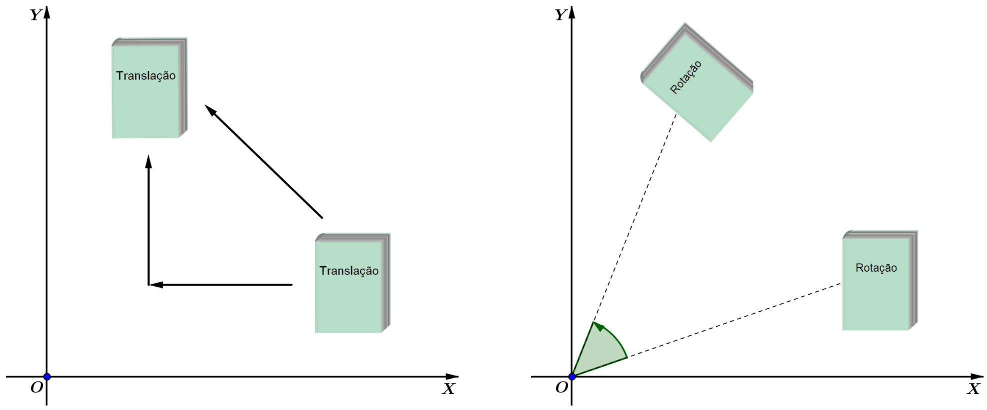


Figura 16: Arco descrito pelo ponto P

Pela figura 16, notamos que a rotação transformou o ponto P no ponto P'. Analisando a transformação do ponto P no ponto P', poderíamos pensar que o mesmo resultado seria obtido por uma translação do ponto P, com um deslocamento horizontal para a esquerda e um deslocamento vertical para cima.

Essa coincidência pode ser verificada quando temos um único ponto, mas quando temos um conjunto de pontos, uma figura por exemplo, translações e rotações são transformações distintas. Para exemplificar podemos obervar a figura 17, em que a imagem 17 (a) sofreu uma transformação de translação e a imagem 17 (b) sofreu uma transformação de rotação.



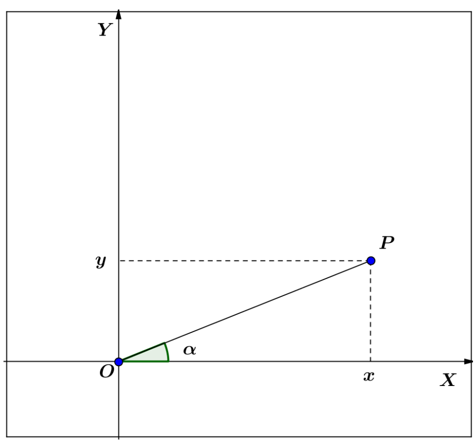
(a) Translação (b) Rotação

Figura 17: Translação e rotação de imagens

Note que a transformação na imagem 17 (a) não pode ser obtida por uma rotação, da mesma forma que a transformação na imagem 17 (b) não pode ser obtida por uma translação.

A partir das coordenadas do ponto P e de algumas relações trigonométricas podemos obter as coordenadas do ponto P'. Nossa intenção é mostrar que essas novas coordenadas também podem ser obtidas pela multiplicação de matrizes. Para uma melhor compreensão do texto, é importante que o leitor esteja familiarizado com algumas noções básicas de trigonometria.

Pelas coordenadas do ponto $P = (x, y)$ temos:

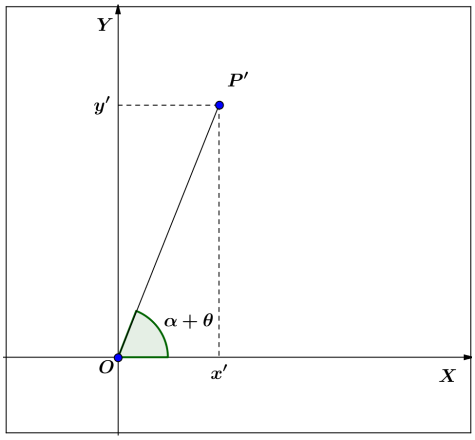


$$\cos\alpha = \frac{x}{|OP|} \quad \Rightarrow \quad x = |OP|\cos\alpha \tag{4}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{|OP|} \quad \Rightarrow \quad y = |OP|\operatorname{sen}\alpha \tag{5}$$

sendo $|OP|$ o comprimento do segmento $\overline{OP}$.

De forma análoga, pelas coordenadas de $P' = (x', y')$ temos:



$$\cos(\alpha+\theta) = \frac{x'}{|OP'|} \quad \Rightarrow \quad x' = |OP'|\cos(\alpha+\theta) \quad (6)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \frac{y'}{|OP'|} \quad \Rightarrow \quad y' = |OP'|\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \quad (7)$$

sendo $|OP'|$ o comprimento do segmento $\overline{OP'}$.

Das relações trigonométricas, sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha$ e $\cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$. Como o ponto de referência para a rotação é a origem, temos que a distância do ponto P ao ponto O é igual a distância do ponto P' ao ponto O, ou seja, $|OP| = |OP'|$. Assim de (6)

$$\begin{aligned}
x' &= |OP'|\cos(\alpha+\theta) \\
&= |OP|(\cos\alpha\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta) \\
&= \underbrace{|OP|\cos\alpha}_{(4)}\cos\theta - \underbrace{|OP|\operatorname{sen}\alpha}_{(5)}\operatorname{sen}\theta \\
&= x\cos\theta \quad - \quad y\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

De forma análoga, de (7)

$$\begin{aligned}
y' &= |OP'|\operatorname{sen}(\alpha+\theta) \\
&= |OP|(\operatorname{sen}\alpha\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\alpha) \\
&= \underbrace{|OP|\operatorname{sen}\alpha}_{(5)}\cos\theta + \underbrace{|OP|\cos\alpha}_{(4)}\operatorname{sen}\theta \\
&= y\cos\theta \quad + \quad x\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ são obtidas pelo sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ y' &=& x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{array}\right. . \qquad (8)$$

Para mostrar que as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ podem ser determinadas usando multiplicação de matrizes, devemos considerar as coordenadas do ponto $P = (x, y)$ e $P' = (x', y')$ na forma das matrizes coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, respectivamente.

De acordo com o ângulo θ, ângulo de rotação do ponto P em relação a origem do sistema, podemos formar a matriz quadrada $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ e obter as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ pela equação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Vale comentar que o sistema (8) é equivalente a equação (9).

A matriz definida por $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é chamada matriz de rotação. Observemos que a matriz de rotação só depende do ângulo θ e não do ponto a ser rotacionado, por isso, é sempre bom tê-la em mente.

Em linhas gerais, a equação (9) diz que as novas coordenadas do ponto P após uma rotação em torno da origem são obtidas ao aplicarmos a matriz de rotação à matriz que representa as coordenadas do ponto P.

Se quisermos rotacionar, em torno da origem, um polígono ou qualquer outra estrutura definida por pontos e segmentos de reta, basta efetuarmos a multiplicação entre a matriz de rotação e a matriz V. A matriz resultante dessa multiplicação é a matriz que armazena as coordenadas dos vértices da estrutura após a rotação.

Desta forma, sendo V' a matriz que armazena as coordenadas dos vértices de uma estrutura após uma rotação e $[R_\theta]$ a matriz de rotação de um ângulo de θ em torno da origem, V' é dado por

$$V' = [R_\theta]\, V \tag{10}$$

.

Exemplo 4.1. *O ponto $P = (3,1)$ sofreu uma rotação de $60°$ em torno da origem. Sabendo-se que a rotação ocorreu no sentido anti-horário, determine a nova posição do ponto P.*

Solução: Após a rotação, o ponto P foi transformado no ponto P' de coordenadas (x', y'). Vamos determinar as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ usando multiplicação de matrizes.

Como $P = (3,1)$ e o ângulo $\theta = 60°$, pela equação (9) temos:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ são $P' = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$. A figura 18 ilustra a rotação sofrida pelo ponto P.

$\square$

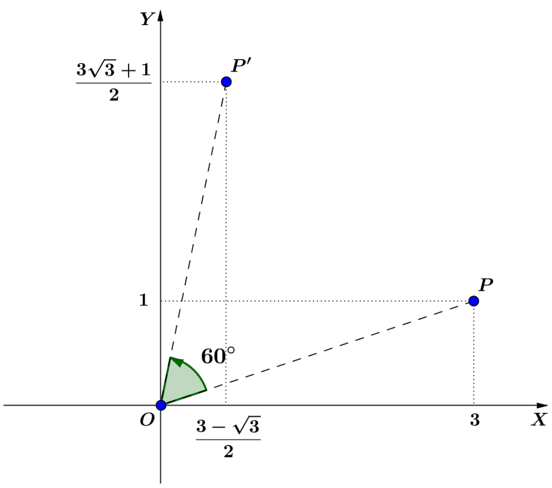


Figura 18: Rotação de ponto em torno da origem

Exemplo 4.2. *O triângulo ABC mostrado na figura 19, com $A = (1,1)$, $B = (3,0)$ e $C = (5,2)$ sofreu uma rotação de $\frac{5\pi}{6}$ radianos em torno da origem. Sabendo-se que a rotação se deu no sentido anti-horário, determine as novas coordenadas dos vértices do triângulo após a rotação.*

Solução: Vamos determinar as novas coordenadas dos vértices do triângulo após a rotação usando o fato de que um triângulo é uma estrutura formada por pontos e por segmentos de reta.

Uma matriz dos vértices desse triângulo e a matriz de conexões relacionada a essa

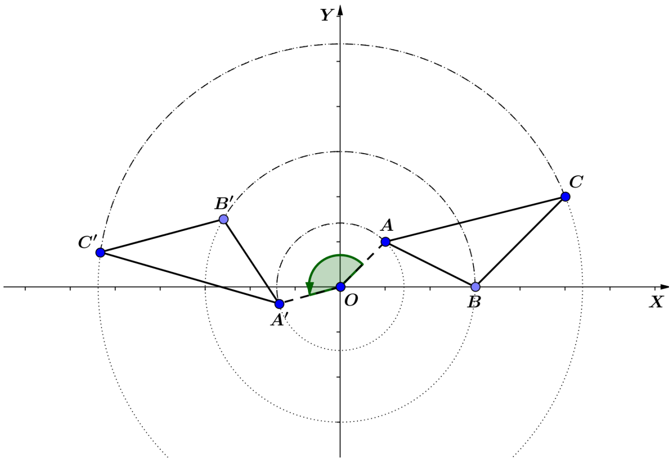


Figura 19: Rotação do triângulo *ABC*

matriz dos vértices são, respectivamente: $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, por (10), a matriz V' que armazena as coordenadas dos vértices do triângulo após a rotação é:

$$\begin{aligned} V' &= [R_\theta]\, V \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}-1}{2} & \frac{-3\sqrt{3}}{2} & \frac{-5\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cada coluna de V' armazena a posição de um vértice do triângulo após a rotação, então, as novas coordenadas são: $\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(\frac{-5\sqrt{3}-2}{2}, \frac{5-2\sqrt{3}}{2}\right)$.

□

Exemplo 4.3. *A seguir é dada a matriz V que armazena a posição dos vértices de uma estrutura e a matriz C, matriz de conexão relacionada a V, que informa como os vértices* *dessa estrutura estão conectados.*

$$V = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 & 12 & 13 & 11 \\ 8 & 7 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_{6\times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Faça o esboço dessa estrutura após ela sofrer uma rotação de 90° *no sentido anti-horário em torno da origem e uma translação de* 9 *unidades para a direita e* 7 *unidades para baixo.*

Solução: Vamos determinar a matriz V' que armazena as coordenadas dos vértices da estrutura após a rotação. Por (10), temos:

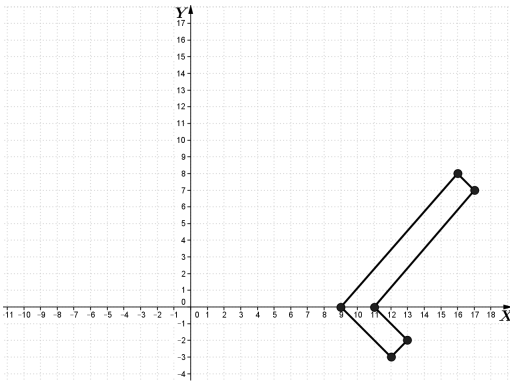
$$\begin{aligned} V' &= [R_\theta]\, V \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 & 12 & 13 & 11 \\ 8 & 7 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 & 12 & 13 & 11 \\ 8 & 7 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 & 12 & 13 & 11 \\ 8 & 7 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & -7 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 16 & 17 & 9 & 12 & 13 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Após a rotação, a estrutura sofreu uma translação de 9 unidades para a direita e 7 unidades para baixo, portanto, os valores referentes a translação são $a = 9$ e $b = -7$. Sendo V'' a matriz que armazena as coordenadas dos vértices da estrutura após a translação, por (3), temos:

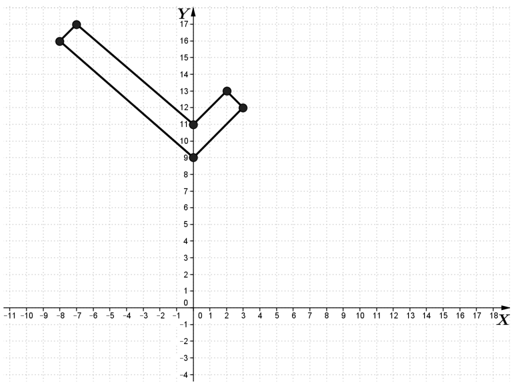
$$\begin{aligned} V'' &= T + V' \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -7 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 16 & 17 & 9 & 12 & 13 & 11 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 12 & 11 & 9 \\ 9 & 10 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para fazer o esboço desta estrutura após a rotação e a translação, basta utilizar a matriz dos vértices V'' e a matriz de conexões C, a mesma relacionada a matriz V, pois rotações e translações não alteram a forma como os vértices são conectados. A figura 20 (a) ilustra a estrutura antes das transformações, a figura 20 (b) ilustra a estrutura após a rotação de 90° em torno da origem e a figura 20 (c) ilustra a estutura após a rotação e a translação.

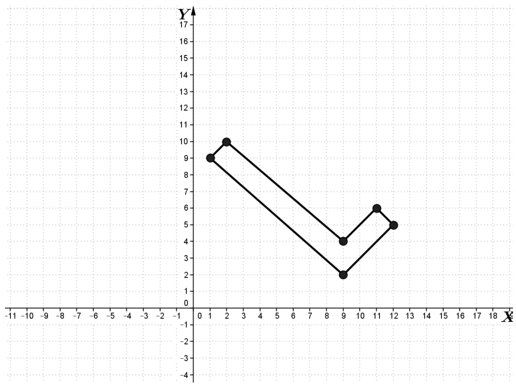
□



(a) Estrutura antes das transformações



(b) Estrutura após a rotação



(c) Estrutura após a rotação e a translação

Figura 20: Rotação e translação de uma estrutura

Exemplo 4.4. *Um carro de corrida começou a percorrer um circuito que tem o formato circular. Ele partiu do ponto A de coordenadas* $A = (4,3)$ *e já na primeira volta apresentou problemas mecânicos vindo a parar no ponto B de coordenadas* $B = \left(\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-4-3\sqrt{3}}{2}\right)$*, como mostra a figura 21.*

Sabendo-se que o sentido da volta na pista de corrida é o sentido anti-horário, determine o ângulo θ *e a matriz que representa a rotação efetuada pelo carro de corrida em relação ao ponto central da pista circular no percurso realizado, do ponto A até o ponto B.*

Solução: Partindo do ponto A, por uma rotação de θ graus no sentido anti-horário, o carro passou a ocupar a posição B. Como o formato da pista de corrida é circular, o ponto B pode ser obtido aplicando ao ponto A uma rotação de θ em torno do centro da pista que pode ser entendido como a origem de um sistema cartesiano. Assim, pela equação (9) temos:

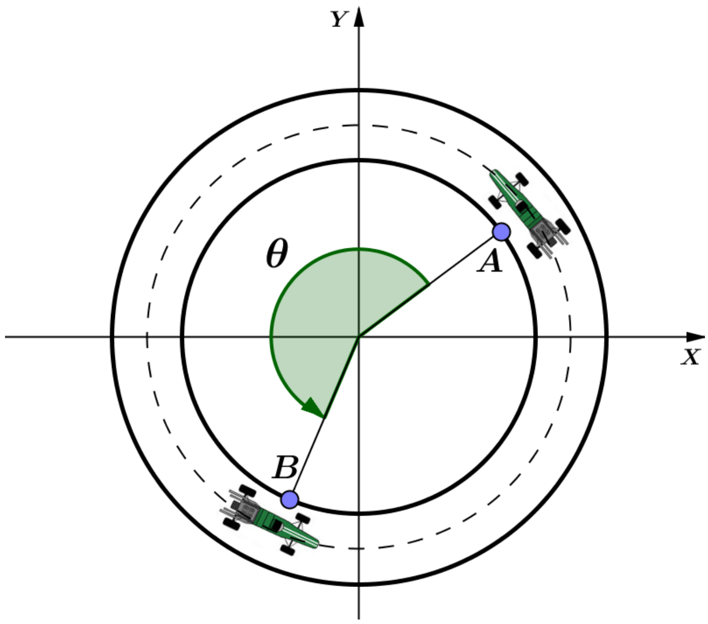


Figura 21: Ilustração do exemplo 4.4

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \dfrac{3-4\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-4-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta \\ 4\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

O sistema de equações $\begin{cases} 4\cos\theta - 3\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3-4\sqrt{3}}{2} \\ 3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-4-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ é obtido através da igualdade das matrizes.

Multiplicando a primeira equação por 4 e a segunda equação por 3 obtemos o sistema $\begin{cases} 16\cos\theta - 12\operatorname{sen}\theta = \dfrac{12-16\sqrt{3}}{2} \\ 9\cos\theta + 12\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-12-9\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Adicionando as duas equações podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
25\cos\theta &= \frac{-25\sqrt{3}}{2} \\
\cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de $\cos\theta$ na equação $4\cos\theta - 3\,\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{3-4\sqrt{3}}{2}$ para determinar o valor de $\mathrm{sen}\,\theta$, temos:

$$\begin{aligned}
4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) - 3\,\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{3-4\sqrt{3}}{2}\\
-3\,\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{3-4\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\\
-3\,\mathrm{sen}\,\theta &= \frac{3}{2}\\
\mathrm{sen}\,\theta &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Desta forma, o ângulo θ que satisfaz $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = -\dfrac{1}{2}$ é $\theta = 210°$, e $\begin{pmatrix} \cos 210° & -\mathrm{sen}\,210° \\ \mathrm{sen}\,210° & \cos 210° \end{pmatrix}$ é a matriz da rotação pedida.

□

Sabemos que um ponto $P = (x, y)$ após sofrer uma rotação de um ângulo de θ graus em torno da origem, é transformado no ponto P' de coordenadas (x', y'). Se a rotação se dá no sentido anti-horário, as coordenadas do ponto P' podem ser determinadas por multiplicação de matrizes pela equação (9).

Porém, uma rotação pode ocorrer tanto no sentido anti-horário quanto no sentido horário, e desta forma, precisamos saber como determinar as coordenadas de um ponto após uma rotação em torno da origem também no sentido horário.

Essa tarefa pode ser realizada apenas levando-se em consideração o sinal do ângulo de rotação θ, pois, por convenção, $\theta > 0$ indica que a rotação se dá no sentido anti-horário e $\theta < 0$ indica que a rotação se dá no sentido horário. Assim, pela equação (9), as novas coordenadas de um ponto após uma rotação em torno da origem e no sentido horário, podem ser determinadas simplesmente usando $\theta < 0$.

De forma geral, ao fazermos a rotação do ponto $P = (x, y)$, rotação essa de um ângulo θ e no sentido horário, basta considerarmos $-\theta$ na matriz rotação da equação (9):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\mathrm{sen}(-\theta) \\ \mathrm{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

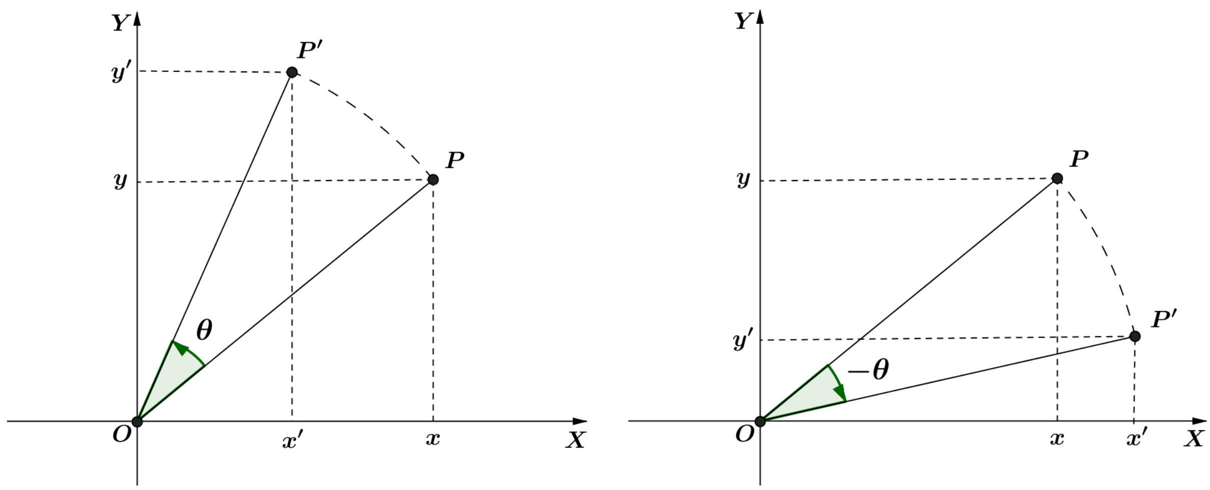
A função cosseno é uma função par e a função seno é uma função ímpar, com isso

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$. Portanto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{11}$$

A figura 22 mostra a rotação do ponto P no sentido anti-horário e no sentido horário. Resumidamente, para determinarmos as coordenadas do ponto P', que são as novas coordenadas do ponto P, após uma rotação em torno da origem:

- Se a rotação ocorrer no sentido anti-horário, ilustrada na figura 22 (a), usamos a equação (9).
- Se a rotação ocorrer no sentido horário, ilustrada na figura 22 (b), usamos a equação (9) com $-\theta$ em seu ângulo de rotação, ou usamos a equação (11). Lembrando que, como a equação (11) já é uma generalização para rotações no sentido horário, devemos usar $\theta > 0$.



(a) Rotação no sentido anti-horário (b) Rotação no sentido horário

Figura 22: Rotação em torno da origem no sentido anti-horário e no sentido horário

A matriz de rotação $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ da equação (11), usada para rotações no sentido horário, é a transposta e inversa da matriz de rotação $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ da equação (9), usada para rotações no sentido anti-horário. Essas matrizes são importantes e quando trabalhamos com rotações no plano, precisamos obrigatoriamente trabalhar com uma dessas matrizes. O que determina qual matriz deverá ser utilizada é o sentido da rotação, horário ou anti-horário.

Vamos pensar agora no seguinte problema: Um ponto $P = (x,y)$ sofre uma rotação em torno da origem no sentido anti-horário se transformando no ponto $P' = (x',y')$. Conhecendo as coordenadas de P' e o ângulo de rotação θ, é possível determinar as coordenadas do ponto P?

A resposta a essa pergunta é afirmativa. Quando o ponto P sofre uma rotação de um ângulo θ em torno da origem no sentido anti-horário, as suas novas coordenadas, $P' = (x',y')$, podem ser determinadas pela equação (9). Porém, podemos pensar também que, rotacionando o ponto P' por um ângulo $-\theta$ em torno da origem, P' será transformado por essa rotação no ponto P.

Assim, conhecendo as coordenadas de P' e o ângulo de rotação θ, é possível determinar as coordenadas do ponto P rotacionando o ponto P' em torno da origem, e usando θ como ângulo de rotação, no sentido horário. A figura 23 ilustra essa situação.

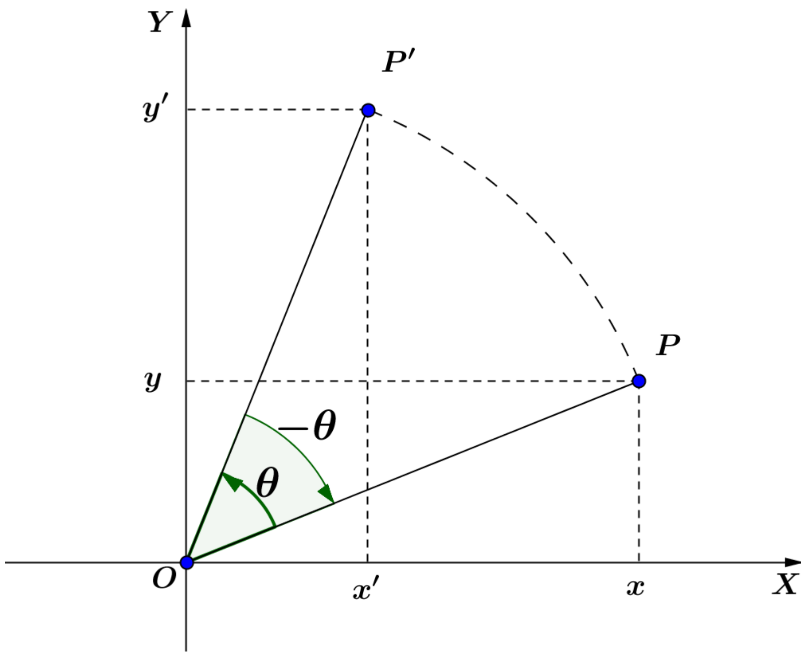


Figura 23: Obtendo P pela rotação de P'

Exemplo 4.5. *Um ponto P de coordenadas (x,y) após sofrer uma rotação de 60° no sentido anti-horário passou a ter coordenadas $P' = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$. Sabendo-se que a rotação ocorreu em torno da origem, determine as coordenadas do ponto P.*

Solução: Para obter as coordenadas do ponto P, podemos entender que P é a imagem do ponto $P' = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2}\right)$ por uma rotação de 60° em torno da origem, sendo essa, uma rotação no sentido horário.

Vamos usar a equação (11), mas lembrando que $P' = (x', y')$ será rotacionado e obteremos as coordenadas de $P = (x, y)$. Então:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \operatorname{sen} 60^\circ \\ -\operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{3-\sqrt{3}+9+\sqrt{3}}{4} \\ \dfrac{-3\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas primitivas do ponto $P' = \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2} \right)$ são $P = (3, 1)$. Este exemplo está relacionado ao exemplo 4.1, e a figura 18 ilustra a posição do ponto P e do ponto P'.

$\square$

4.2 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO QUALQUER

Como vimos, quando rotacionamos um ponto mudamos a sua posição fazendo com que ele descreva um arco de circunferência. As rotações que utilizam a origem como centro do arco da circunferência descrito por este ponto são chamadas de rotações em torno da origem, mostrada na figura 24.

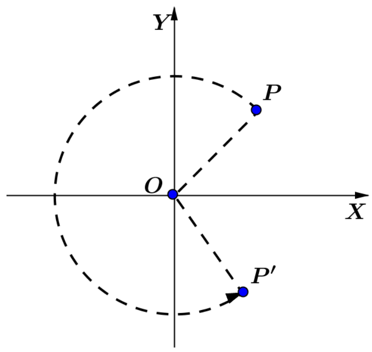


Figura 24: Rotação do ponto P em torno da origem

Vimos também que as coordenadas de um ponto $P = (x, y)$ após uma rotação de um ângulo de θ graus em torno da origem podem ser determinadas pelo sistema (8) e também por multiplicação de matrizes pela equação (9) ou (11), em que a escolha da equação depende do sentido da rotação, horário ou anti-horário. Estas relações só permitem determinar uma rotação tendo a origem como ponto de referência.

Porém, de acordo com o problema a ser abordado, podemos determinar um ponto arbitrário distinto da origem que servirá de referência para a rotação. Esse ponto arbitrário será chamado de P_0.

Desta forma, quando rotacionamos o ponto P em torno de P_0, o ponto P_0 se torna o centro do arco da circunferência descrito pela rotação do ponto P, situação mostrada na figura 25.

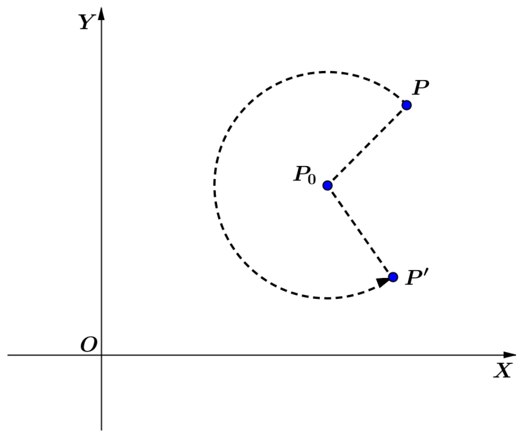


Figura 25: Rotação do ponto P em torno de um ponto arbitrário

Assim, surge de forma natural o seguinte questionamento: É possível determinar as coordenadas do ponto P após uma rotação em torno do ponto P_0?

Sim, isso pode ser feito, porém precisamos adaptar esse tipo de rotação fazendo com que o problema recaia em uma rotação em torno da origem e assim, podemos rotacionar o ponto P usando as equações já conhecidas para rotações em torno da origem.

Como P_0 é distinto da origem, sendo $P' = (x', y')$ a imagem do ponto $P = (x, y)$ após uma rotação de um ângulo de θ graus em torno do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, devemos tomar os seguintes procedimentos:

- Transladar o ponto P e o ponto P_0 pela matriz translação $\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$. Desta forma, o ponto P_0 será transladado para a origem e o ponto P será transformado por essa translação no ponto $R = (z, w)$.

- Após a translação, rotacionar o ponto R em torno da origem obtendo o ponto $R' = (z', w')$.
- Obter as coordenadas do ponto P' transladando o ponto R' pela matriz translação $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Após esse procedimento, o ponto P' passa a ser a imagem do ponto P pela rotação em torno de P_0. A translação final, de fato deve ser a partir da matriz $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, pois ela desfaz a translação feita inicialmente.

Exemplo 4.6. *O ponto $P = (5,2)$ sofreu uma rotação de $90°$ no sentido anti-horário em torno do ponto $P_0 = (3,1)$. Determine as novas coordenadas do ponto P após essa rotação.*

Solução: Como a rotação do ponto P ocorreu em torno do ponto $P_0 = (3,1)$, devemos transladar os pontos P_0 e P pela matriz $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Transladando o ponto P_0, o identificamos com a origem, pois $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por essa mesma translação, o ponto P será transformado no ponto $R = (z,w)$, com coordenadas

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos rotacionar o ponto R sob um ângulo de $90°$ no sentido anti-horário transformando-o no ponto $R' = (z', w')$. Como agora a rotação se dá em torno da origem, pela equação (9), temos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por fim, basta obter as coordenadas do ponto $P' = (x', y')$ transladando o ponto $R' =$

$(-1,2)$ pela matriz translação $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Desta forma, as novas coordenadas do ponto P após essa rotação são $P' = (2,3)$. A figura 26 ilustra o procedimento tomado para determinarmos as novas coordenadas do ponto P.

□

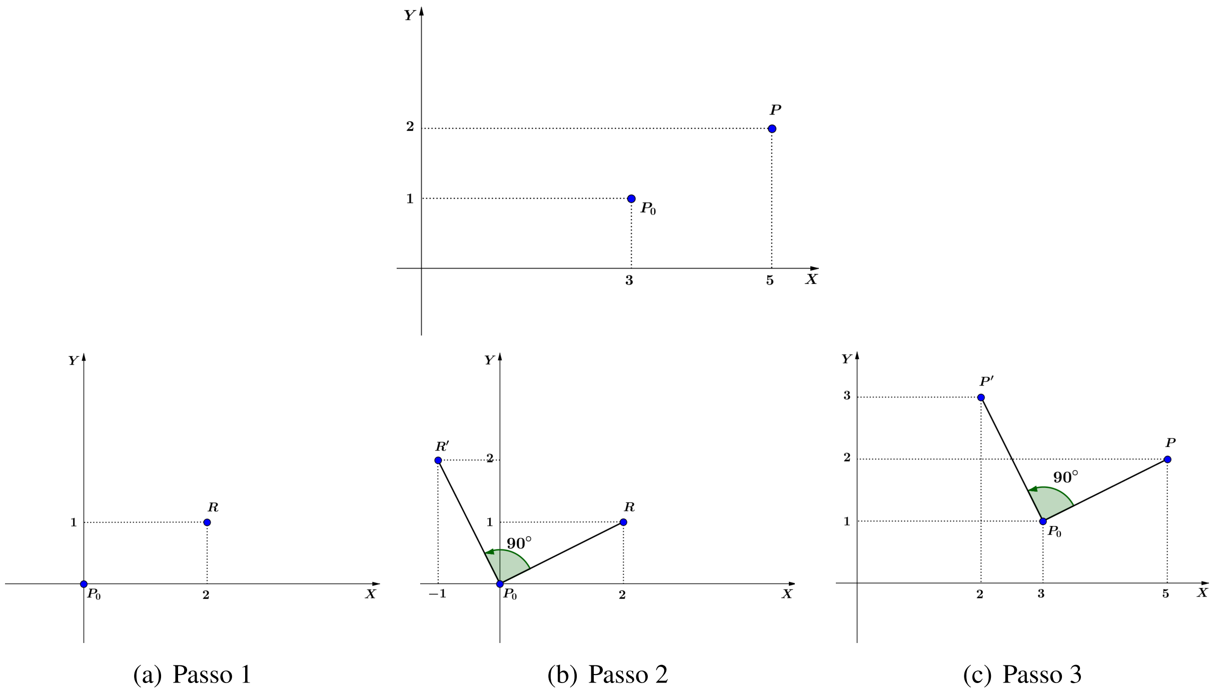
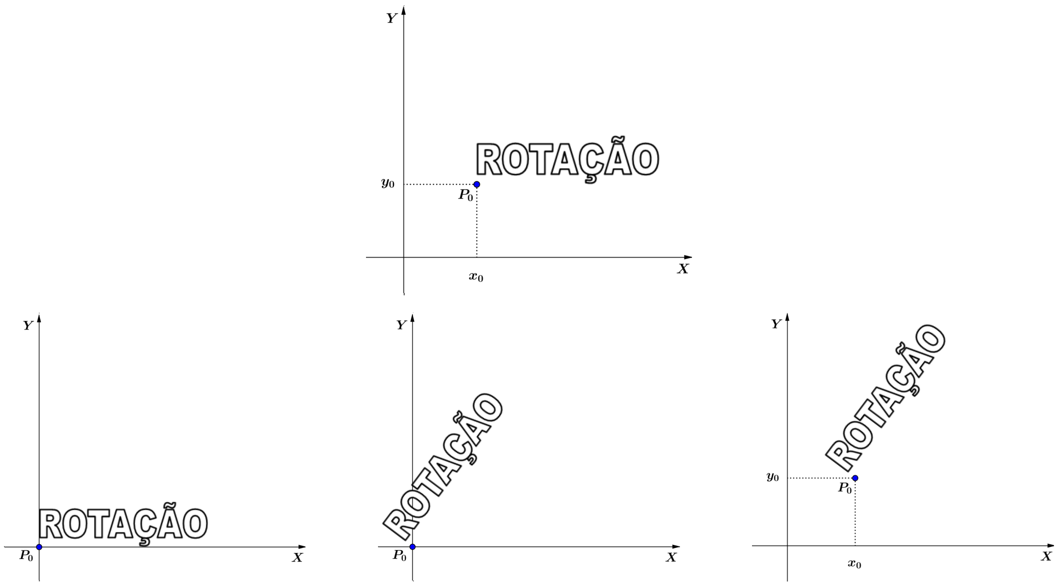


Figura 26: Rotação do ponto P em torno de um ponto arbitrário

Rotações de imagens em torno de um ponto arbitrário P_0 também podem ser realizadas, pois uma imagem nada mais é que um conjunto de pontos no plano. O procedimento é basicamente o mesmo que o visto para rotações de um ponto P em torno de um ponto P_0 distinto da origem. Portanto, devemos:

- Transladar os pontos (x,y) que pertencem a imagem pela matriz translação $\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$. Desta forma, P_0 será transladado para a origem.
- Após a translação, rotacionar os pontos (x,y), que pertencem a imagem, em torno de P_0. Como agora, $P_0 = (0,0)$, a rotação se dá em torno da origem.
- Transladar os pontos (x,y) que pertencem a imagem pela matriz translação $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

A figura 27 mostra a rotação de uma imagem tendo o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ como ponto de referência da rotação.



(a) Passo 1 (b) Passo 2 (c) Passo 3

Figura 27: Rotação de uma imagem em torno de um ponto arbitrário

Exemplo 4.7. *Dados os vértices $A = (3,2)$ e $B = (8,2)$ de um triângulo equilátero, determine o seu vértice C sabendo-se que esse triângulo está contido no $1°$ quadrante do plano cartesiano.*

Solução: Já temos o lado AB do triângulo equilátero. Para obter o vértice C vamos usar o fato de que os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°.

O vértice C deve pertencer ao $1°$ quadrante, então uma das formas de determiná-lo é aplicando a B uma rotação de $60°$ em torno do vértice A. Essa rotação deve ocorrer no sentido anti-horário, caso contrário, o vértice C não pertencerá ao $1°$ quadrante. A figura 28 ilustra a rotação do vértice B em torno do vértice A.

Como o ponto de referência para a rotação é o vértice A, distinto da origem, devemos:

Passo 1: Transladar o lado AB do triângulo equilátero fazendo com que o vértice $A = (3,2)$ coincida com a origem.

As matrizes coluna $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ representam os vértices A e B, respectivamente. Assim, o lado AB será transladado adicionando a essas matrizes a matriz translação $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Translação do vértice A $\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

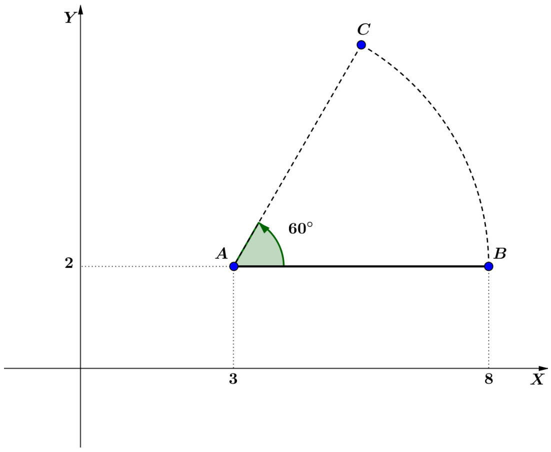


Figura 28: Rotação de 60º do vértice B em torno do vértice A

Translação do vértice B $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Passo 2: Após a translação, as coordenadas do vértice A são $A = (0,0)$. Com isso, vamos rotacionar o transladado do vértice B sob um ângulo de $60°$ no sentido anti-horário, porém agora, a rotação é em torno da origem. Pela equação (9), temos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 60° & -\operatorname{sen} 60° \\ \operatorname{sen} 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

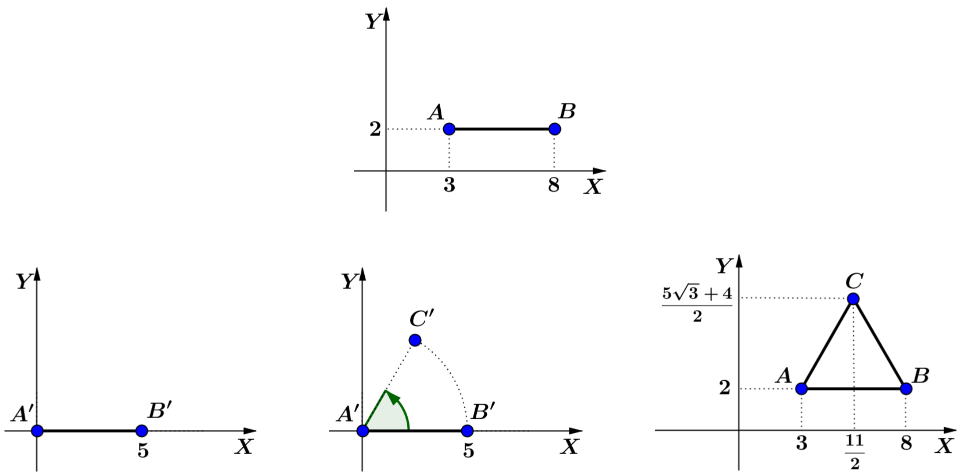
Passo 3: Obter as coordenadas do vértice C do triângulo equilátero transladando o rotacionado do vértice B pela matriz translação $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}+4}{2} \end{pmatrix}$$

Resposta: As coordenadas do vértice C do triângulo equilátero são $\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}+4}{2}\right)$.

A figura 29 ilustra o procedimento tomado para determinarmos as coordenadas do vértice C do triângulo equilátero.

$\square$



(a) Passo 1 (b) Passo 2 (c) Passo 3

Figura 29: Rotação triângulo equilátero

Nesse exemplo, aplicamos ao vértice B do triângulo duas translações e uma rotação. A ordem da aplicação das transformações foi: translação, rotação e translação. Houve a necessidade de trabalharmos com três matrizes de transformações distintas. Uma para a primeira translação, outra para a rotação e outra para a última translação.

As transformações efetuadas de forma separada é uma tarefa muito trabalhosa. Porém, existe uma forma de representar as três transformações utilizando apenas uma matriz. Estudaremos esse assunto no capítulo sobre composição de transformações geométricas.

4.3 EXERCÍCIOS

1) Abaixo, temos 3 matrizes que representam rotações no sentido anti-horário em torno da origem.

I) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ II) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ III) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

As matrizes que representam uma rotação de 180°, 270° e 90°, são, respectivamente:

a) III, I e II b) III, II e I c) I, II e III

d) I, III e II e) II, I e III

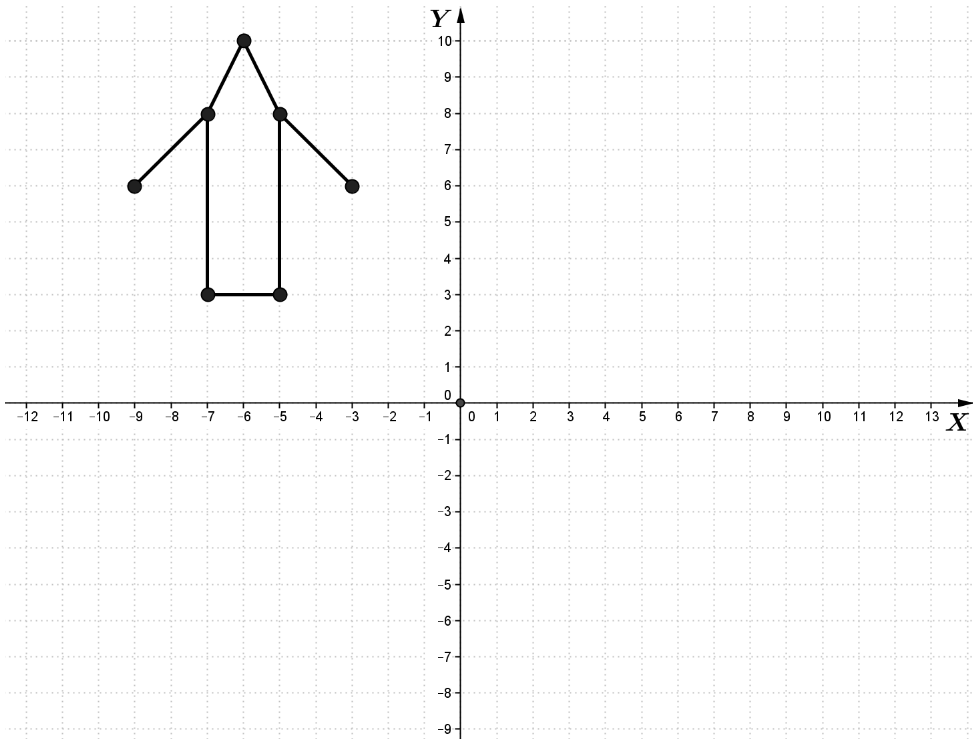
2) Qual das matrizes abaixo representa uma rotação de 210° no sentido anti-horário em torno da origem?

a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

3) O triângulo ABC de coordenadas $A = (2, -2)$, $B = (6, -2)$ e $C = (10, -4)$ sofreu uma rotação de $\frac{5\pi}{4}$ radianos em torno da origem. Sabendo-se que a rotação se deu no sentido horário, determine as novas coordenadas dos vértices do triângulo após a rotação.

4) Abaixo temos uma estrutura formada por 7 vértices.



a) Determine uma matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura e a matriz de conexão relacionada a essa matriz dos vértices.

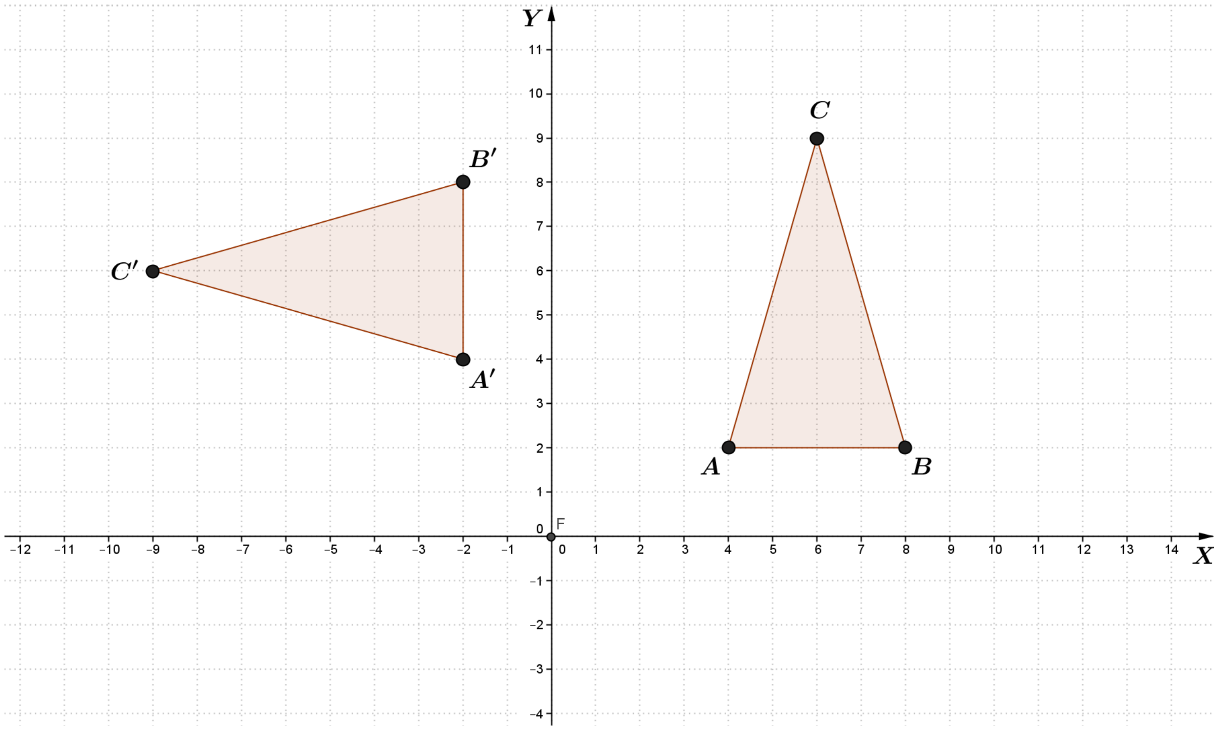
b) Determine uma matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura após ela sofrer uma rotação de 90° no sentido horário em torno da origem.

c) Sabendo-se que após a rotação, a estrutura sofreu uma translação de 2 unidades para a esquerda e 10 unidades para baixo, determine a matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura após essa translação.

d) Faça o esboço da estrutura após a rotação e também após a translação.

5) Dados os vértices $A = (-1, 2)$ e $B = (-7, 1)$ de um triângulo equilátero, determine o seu vértice C sabendo-se que esse triângulo está contido no 2° quadrante do plano cartesiano.

6) O triângulo $A'B'C'$ foi obtido aplicando ao triângulo ABC uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem.



Porém é possível obtermos o triângulo $A'B'C'$ a partir do triângulo ABC utilizando sequências de transformações adequadas. Abaixo são listadas algumas sequências de transformações, sendo que uma delas pode ser utilizada para obter o triângulo $A'B'C'$ à partir do triângulo ABC. Qual delas?

a) Aplicando ao triângulo ABC uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice A seguida de uma translação com deslocamento horizontal para a esquerda de 6 unidades e deslocamento vertical para cima de 3 unidades.

b) Aplicando ao triângulo ABC uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice B seguida de uma translação com deslocamento horizontal para a esquerda de 10 unidades e deslocamento vertical para cima de 5 unidades.

c) Aplicando ao triângulo ABC uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice C seguida de uma translação com deslocamento horizontal para a esquerda de 15 unidades e deslocamento vertical para cima de 3 unidades.

d) Aplicando ao triângulo *ABC* uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice *A* seguida de uma translação com deslocamento horizontal para a esquerda de 6 unidades e deslocamento vertical para baixo de 2 unidades.

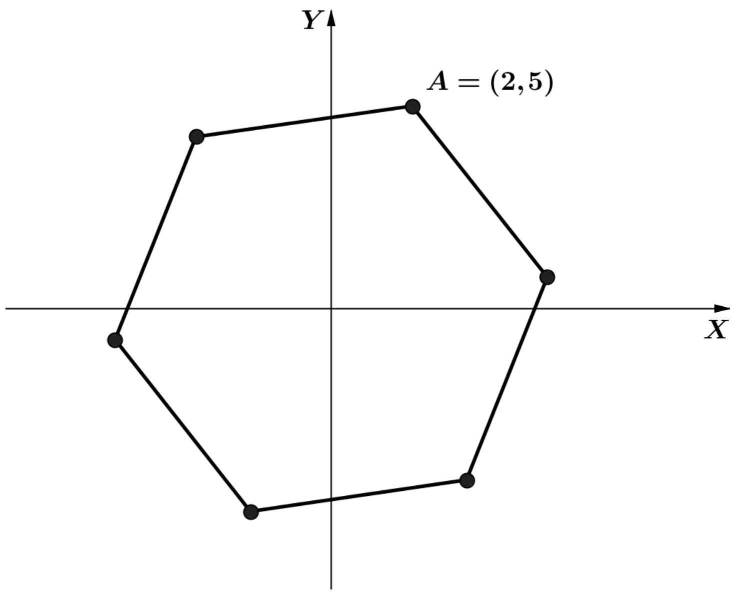
e) Aplicando ao triângulo *ABC* uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno do vértice *C* seguida de uma translação com deslocamento horizontal para a esquerda de 15 unidades e deslocamento vertical para baixo de 3 unidades.

7) O ponto $A = (2,5)$ é um dos vértices do hexágono regular da figura abaixo. Sabendo-se que o centro desse hexágono é a origem do sistema cartesiano, determine:

a) As coordenadas dos outros vértices desse hexágono.

b) A medida do lado desse hexágono.

c) A área desse hexágono.



5 TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA

A palavra escala tem muitos sentidos e o seu significado pode variar dependendo do contexto em que é utilizada. Na música, por exemplo, um conjunto de notas dispostas em uma determinada ordem é definido como escala.

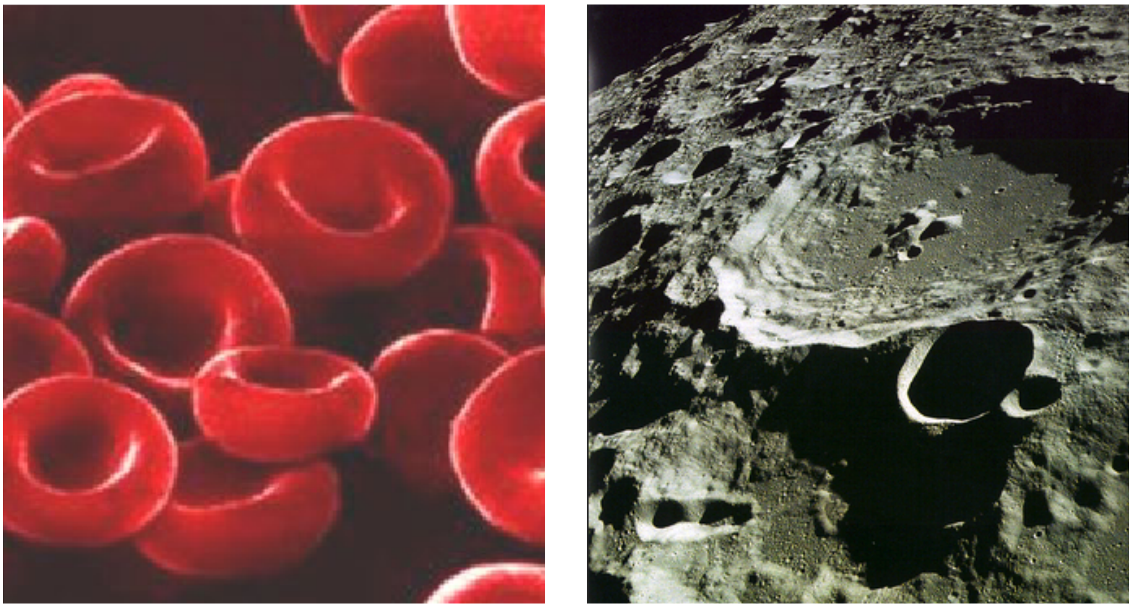
Grandezas como temperatura, distâncias, massa, área, volume, entre outros, são mensuradas a partir de uma determinada referência. As referências usadas para mensurar grandezas são chamadas de escala de medida. Desta forma, dentro da mesma escala de medida é possível fazer comparações entre grandezas de mesma natureza. Dentre essas escalas podemos citar: escala de medida de comprimento; escala de medida de temperatura; escala Richter, usada para medir a intensidade de um terremoto, etc.

Para representar objetos em uma folha de papel, na maioria das vezes é necessário reduzir ou ampliar o tamanho desse objeto, pois o que se pretende representar é muito grande ou muito pequeno. Quando realizamos esse processo de ampliação ou redução das medidas de um objeto, precisamos especificar o quanto as medidas foram alteradas, e isto deve ser feito através da razão entre a medida do objeto no papel e a sua medida real. Neste contexto, escala pode ser entendida como o valor que indica o quanto as dimensões do objeto foram alteradas.

A representação de uma cidade por meio de mapas ou quando um arquiteto projeta a planta de uma casa são exemplos de reduções feitas nas dimensões de um objeto para que seja possível representá-lo em uma folha de papel.

Atualmente, com o avanço da tecnologia, uma atividade que ganha cada vez mais importância é a manipulação de imagem tais como alterações em sua cor, luminosidade, contraste, etc. Um tipo de manipulação que se destaca é a alteração nas dimensões de uma imagem ampliando ou reduzindo o seu tamanho original. No presente texto, queremos abordar escala definida como uma alteração realizada nas dimensões de uma imagem e chamaremos esse processo de transformação de escala.

A figura 30 mostra imagens que tiveram as suas dimensões alteradas, portanto, sofreram transformação de escala.



(a) Glóbulos vermelhos do sangue (b) O lado escuro da lua

Figura 30: Imagens modificadas por Transformação de Escala

Em alguns estudos científicos, transformações de escala em imagens são realizadas constantemente. Podemos citar estudos do espaço feitos a partir da captura de imagem por satélites e observatórios, tais imagens só podem ser analisadas de forma mais detalhada quando sofrem transformação de escala. Pesquisas em dimensões nanométricas[1] não seriam possíveis se as imagens obtidas não sofressem transformação de escala e tivessem as suas dimensões aumentadas. Em (HUANG, 2012), podemos visualizar a escala do universo, desde o comprimento de Planck[2] até as maiores dimensões conhecidas.

Neste capítulo, veremos como o processo de transformação de escala pode ser representado por multiplicação de matrizes.

5.1 TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA EM RELAÇÃO A ORIGEM

Imagem é uma representação visual de um objeto, e matematicamente, podemos entender que uma imagem é formada por um conjunto de pontos. Sendo assim, para definirmos transformação de escala em uma imagem qualquer, vamos estabelecer que este conjunto de pontos que forma a imagem está contido em um plano Π definido por um sistema de eixos ortogonais OXY.

Desta forma, aplicar transformação de escala em uma imagem é simplesmente aplicar

[1] Um nanômetro é uma subunidade do metro e corresponde a $1 \times 10^{-9} metros$, ou seja, um bilionésimo do metro.

[2] Comprimento de Planck é um espaço de $1,6161 \times 10^{-35} metros$ e corresponde a distância que a luz percorre no vácuo durante um tempo de Planck, (SHU, 1982).

um certo deslocamento em cada ponto que a forma. Vale salientar que o deslocamento desses pontos é em relação a algum outro ponto do plano, ponto este que serve de referência para a transfomação e por consequência, dizemos que a transformação de escala ocorreu em relação a esse ponto de referência.

É muito comum usarmos a origem do sistema de eixos, ou seja, o ponto $O = (0,0)$, como ponto de referência para a transformação de escala. Dizer que a transformação de escala em uma imagem ocorre em relação a origem, significa dizer que:

- Se o ponto $P = (x,y)$ que pertence a imagem estiver sobre a origem, então P não sofrerá nenhuma alteração em sua posição após a transformação de escala.
- Se o ponto $P = (x,y)$ que pertence a imagem não estiver sobre a origem, então P sofrerá uma alteração em sua posição após a transformação de escala.

Para exemplificarmos o processo de transformação de escala em uma imagem tendo a origem como ponto de referência, vamos considerar o triângulo de vértices $A = (0,1)$, $B = (2,0)$ e $C = (1,3)$ contido no plano Π, conforme mostra a figura 31.

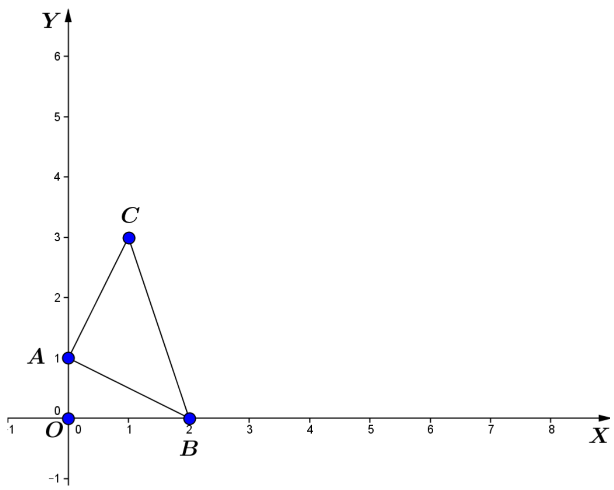


Figura 31: Triângulo ABC

Como o triângulo é formado por segmentos de reta, para realizar esta operação basta aplicar a transformação de escala somente nos vértices do triângulo que teremos a transformação de escala em todo o triângulo.

Além do ponto de referência para a transformação, que neste caso é a origem, sempre que aplicarmos uma transformação de escala precisamos dos fatores de escala da transformação, que são os valores que especificam o quanto a escala do triângulo será alterada. Esses fatores estão diretamente relacionados às coordenadas x e y dos pontos que formam a imagem que sofrerá a transformação. Assim, devemos considerar:

- o fator multiplicativo, E_x, para a coordenada x de cada vértice do triângulo, que será o fator de escala no eixo OX.
- o fator multiplicativo, E_y, para a coordenada y de cada vértice do triângulo, que será o fator de escala no eixo OY.

Esta transformação se dará multiplicando a abscissa x de cada vértice do triângulo pelo fator multiplicativo E_x, e a ordenada y de cada vértice do triângulo pelo fator multiplicativo E_y.

De forma geral, sendo (x, y) as coordenadas de um dos vértices do triângulo ABC e (x', y') as coordenadas desse vértice após sofrer a transformação de escala, podemos definir (x', y') pelo sistema

$$\begin{cases} x' = E_x x \\ y' = E_y y \end{cases} . \tag{12}$$

Repetindo o mesmo processo para todos os vértices do triângulo, será definido um novo triângulo que é exatamente o resultado da transformação de escala do triângulo ABC.

Para que a transformação de escala possa ser abordada usando multiplicação de matrizes, devemos considerar as coordenadas (x, y) de cada vértice do triângulo na forma da matriz coluna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, bem como as coordenadas (x', y') deste vértice após a transformação de escala na forma da matriz coluna $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Os fatores E_x e E_y serão considerados na forma da matriz diagonal $[E] = \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix}$, chamada de matriz transformação de escala.

Assim, as coordenadas do vértice do triângulo ABC após sofrer a transformação de escala será dado pela equação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{13}$$

O processo deve se repetir para todos os vértices do triângulo. Vale comentar que o sistema (12) é equivalente a equação (13).

Com isto, já temos condições de realizar a transformação de escala no triângulo ABC. Esta transformação se dará em relação a origem e os fatores de escala que iremos considerar neste exemplo são os fatores $E_x = 4$ e $E_y = 2$. Com este processo, o triângulo ABC será transformado no triângulo $A'B'C'$, com o vértice A sendo transformado no vértice A', o vértice B no vértice B' e o vértice C no vértice C'.

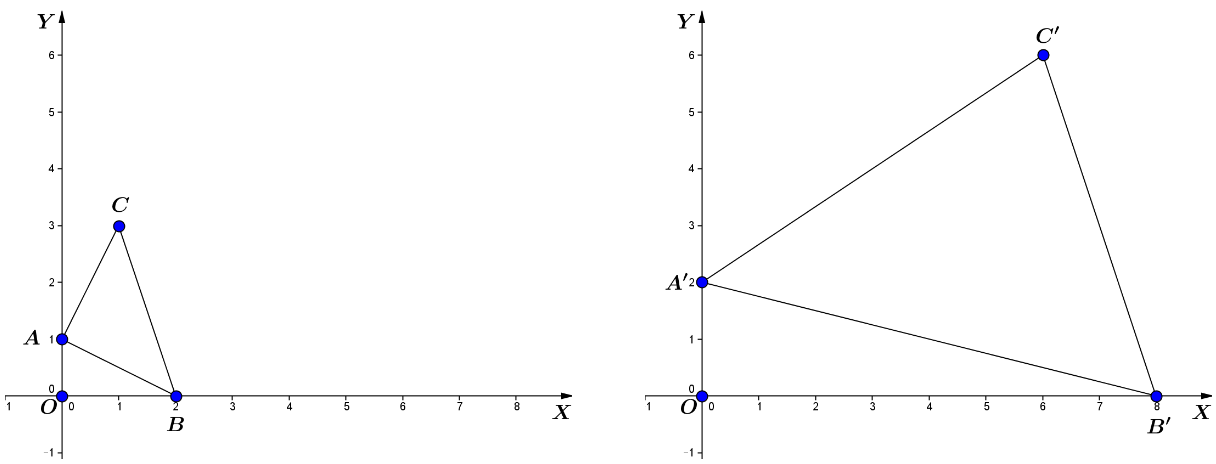
Em todo o texto sinalizamos a preferência pelo trabalho com multiplicação de matrizes, portanto vamos usar a equação (13) para aplicar a transformação de escala no triângulo ABC.

Sendo assim, o vértice $A = (0,1)$ representado na forma da matriz coluna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, será transformado no vértice A' por $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

O vértice $B = (2,0)$ representado na forma da matriz coluna $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, será transformado no vértice B' por $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

O vértice $C = (1,3)$ representado na forma da matriz coluna $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, será transformado no vértice C' por $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Portanto $A' = (0,2)$, $B' = (8,0)$, $C' = (4,6)$ são as novas coordenadas dos vértices do triângulo ABC. A figura 32 ilustra esta transformação de escala, com o triângulo ABC, mostrado na figura 32 (a) e o triângulo $A'B'C'$, mostrado na figura 32 (b).



(a) Triângulo ABC (b) Triângulo $A'B'C'$

Figura 32: Transformação de escala no triângulo $ABCD$

Como o triângulo é uma estrutura formada por pontos e segmentos de reta, o processo de transformação de escala pode ser realizado aplicando a matriz $[E]$, matriz transformação de escala, à matriz V, que é a matriz que armazena as coordenadas dos vértices do triângulo.

De forma geral, sendo V' a matriz que armazena as coordenadas dos vértices de uma estrutura após o processo de transformação de escala, V' é dado por:

$$V' = [E]\, V \tag{14}$$

Para o exemplo anterior, uma matriz que armazena as coordenadas dos vértices do triângulo e a matriz de conexões relacionada a essa matriz dos vértices são, respectivamente:

$V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $C_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, por (14), a matriz V' que armazena as coordenadas dos vértices do triângulo após a transformação de escala é

$$\begin{aligned} V' &= [E]\, V \\ &= \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cada coluna de V' armazena as coordenadas de um vértice do triângulo após a rotação, então, as novas coordenadas são: $(0,1)$, $(2,0)$ e $(1,3)$.

A matriz de conexões não é utilizada no processo de determinação das novas coordenadas de uma estrutura após uma transformação de escala, mas assim como a translação e a rotação, a transformação de escala não altera a forma como os vértices de uma estrutura são conectados. Então, usando a matriz V' e a matriz de conexões relacionada a matriz V podemos representar a estrutura após a transformação.

Veja que os triângulos ABC e $A'B'C'$ não são semelhantes e isso já era esperado pois usamos fatores de escala diferentes nos eixos coordenados OX e OY. O que deveria ser feito para que os triângulos ABC e $A'B'C'$ fossem semelhantes? Responderemos esta pergunta mais adiante.

É fácil verificar que, após essa transformação, o triângulo teve as suas medidas modificadas pois os pontos que o formam sofreram um certo deslocamento. Com isso, houve uma alteração na distância dos pontos que formam o triângulo em relação ao ponto de referência da transformação, que no caso é a origem. Desse modo, a transformação de escala não é uma isometria.

Se quiséssemos, poderíamos ter calculado as coordenadas dos vértices do triângulo

$A'B'C'$ pelo sistema (12), que num primeiro momento parece ser um método mais simplificado quando comparado ao método da multiplicação de matrizes. Porém, o método da multiplicação de matrizes ganha maior importância pois é utilizado no processo de composição das transformações, que iremos estudar mais adiante.

Quando não mencionamos o ponto de referência para a transformação de escala, fica subentendido que a transformação ocorerrá em relação a origem.

Exemplo 5.1. *Sejam* $A = (0,0)$, $B = (2,-2)$, $C = (4,0)$ *e* $D = (2,2)$ *as coordenadas dos vértices de um quadrilátero. Determine as novas coordenadas dos vértices desse quadrilátero após ele sofrer uma transformação de escala em relação a origem cujo fatores de escala são* $E_x = 2$ *e* $E_y = 3$*?*

Solução: Temos uma tranformação de escala em relação a origem com fatores $E_x = 2$ e $E_y = 3$. Uma matriz que armazena as coordenadas dos vértices do quadrilátero e a matriz de conexões relacionada a essa matriz dos vértices são, respectivamente: $V = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Assim, por (14), a matriz V' que armazena as coordenadas dos vértices do quadrilátero após a transformação de escala é:

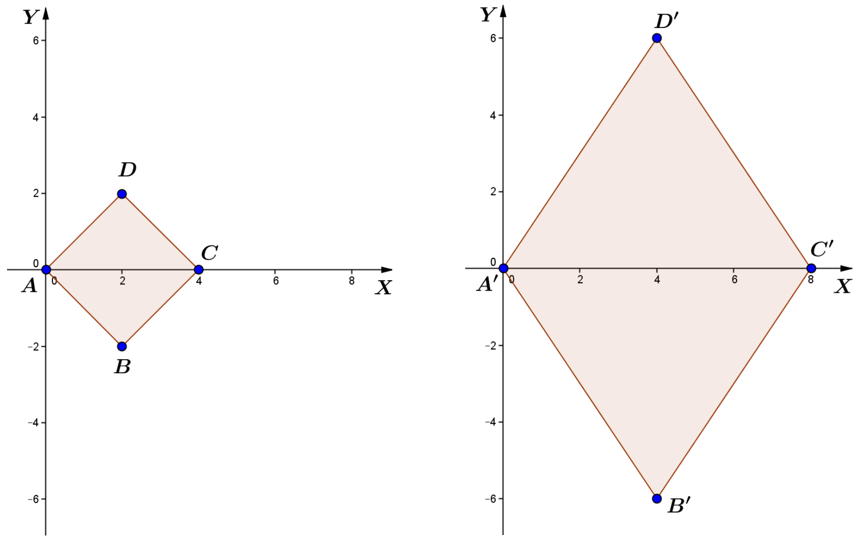
$$\begin{aligned} V' &= [E]\,V \\ &= \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto $(0,0)$, $(4,-6)$, $(8,0)$ e $(4,6)$ são as novas coordenadas dos vértices do quadrilátero.

A figura 33 ilustra a transformação de escala, o quadrilátero $ABCD$ é mostrado na figura 33 (a) e o quadrilátero $A'B'C'D'$ é mostrado na figura 33 (b).

$\square$

Veja que o único vértice que não sofreu nenhuma alteração em sua posição inicial foi



(a) Quadrilátero $ABCD$ (b) Quadrilátero $A'B'C'D'$

Figura 33: Transformação de escala no quadrilátero $ABCD$

o vértice A. Essa é uma propriedade da transformação de escala em relação a origem, como já mencionado, não altera a posição de pontos que se encontram na origem.

De acordo com os fatores de escala E_x e E_y de uma transformação de escala em relação a origem, temos diferentes modificações na imagem:

- Fatores maiores que 1 aumentam as dimensões da imagem, pois afastam os seus pontos da origem.

- Fatores entre 0 e 1 diminuem as dimensões da imagem, pois aproximam os seus pontos da origem.

Se o fator for igual a 1, a imagem não sofre nenhuma alteração em relação ao eixo correspondente ao fator de escala. Fatores de escala menores que 0 não serão trabalhados neste texto.

Exemplo 5.2. *O quadrilátero ABCD sofreu uma transformação de escala em relação a origem e em seguida uma rotação de* $30°$ *em torno da origem sendo transformado no quadrilátero* $A'B'C'D'$*, conforme mostra a figura 34.*

Sabendo-se que a rotação se deu no sentido horário e que o vértice $A = (1,6)$ *do quadrilátero ABCD foi transformado no vértice* $A' = \left(\dfrac{3\sqrt{3}+3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}\right)$ *do quadrilátero* $A'B'C'D'$ *após essas duas transformações, diga qual é a matriz da transformação de escala sofrida pelo quadrilátero ABCD.*

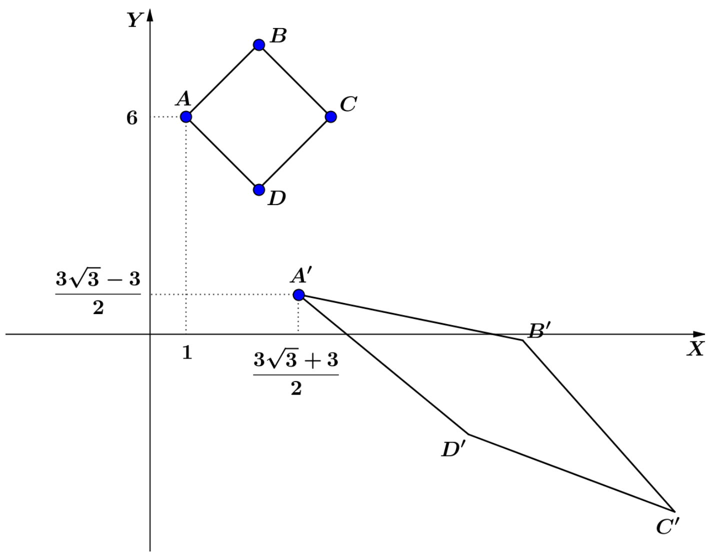


Figura 34: Escala e rotação no quadrilátero *ABCD*

Solução: Vamos estabelecer que, após a transformação de escala, o vértice A foi transformado num ponto P. Desta forma, podemos considerar o vértice A' como a rotação do ponto P em torno da origem por um ângulo de 30° no sentido horário.

Assim, para determinar as coordenadas do ponto P basta rotacionar em torno da origem o vértice A' por um ângulo de 30° no sentido anti-horário. Com $P = (x', y')$ e $A' = \left(\frac{3\sqrt{3}+3}{2}, \frac{3\sqrt{3}-3}{2}\right)$, pela equação (9) temos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\operatorname{sen} 30^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3}{4} \\ \frac{3\sqrt{3}+3+9-3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, as coordenadas do ponto P são $P = (3, 3)$. Conforme definimos, pela transformação de escala o vértice $A = (1, 6)$ foi transformado no ponto $P = (3, 3)$. Então, utilizando a equação (13) temos:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_x \\ 6E_y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Segue que, $E_x = 3$ e $E_y = \frac{1}{2}$, e a matriz da transformação de escala pedida é $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

□

Nas transformações de escala em que $E_x = E_y$, as deformações na imagem ocorrem de forma idêntica em relação aos eixos ordenados OX e OY. A imagem que recebe esse tipo de transformação tem as suas medidas modificadas de forma proporcional. A essa transformação de escala damos o nome de expansão ou contração uniforme.

Se aplicarmos uma transformação de escala em um polígono qualquer utilizando fatores de escala iguais, ou seja, $E_x = E_y$, teremos a razão entre dois segmentos quaisquer do polígono original igual a razão entre os segmentos correspondentes do polígono transformado. Portanto, em uma expansão ou contração uniforme, o polígono original é sempre semelhante ao polígono transformado.

Para exemplificar esse fato, vamos aplicar duas transformações de escala em que $E_x = E_y$ no hexágono regular mostrado na figura 35.

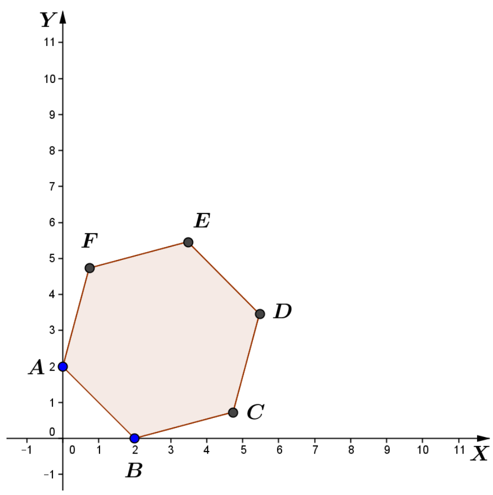
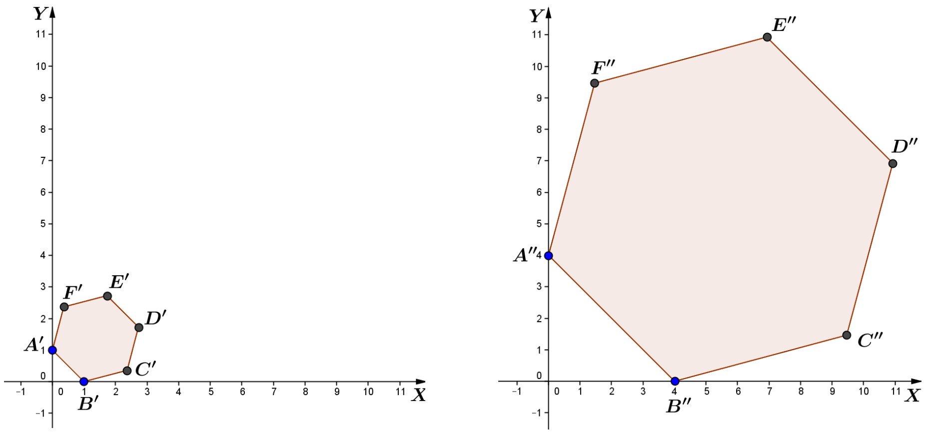


Figura 35: Hexágono regular

Neste tipo de transformação, por termos $E_x = E_y$, e com o intuito de simplificar a notação, indicaremos que o fator de escala usado será k, ou seja, $k = E_x = E_y$. A figura 36 ilustra duas transformações de escala do hexágono regular da figura 35. Na figura 36 (a), o fator de escala usado foi $k = \dfrac{1}{2}$, e na figura 36 (b), o fator de escala usado foi $k = 2$.



(a) Hexágono regular contraído

(b) Hexágono regular expandido

Figura 36: Transformação de escala no hexágono regular

Podemos verificar que, nas duas transformações, as alterações nas dimensões do hexágono regular foram proporcionais, resultando em uma igualdade entre as razões de segmentos correspondentes do hexágono original e dos hexágonos transformados, como por exemplo $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{B''C''}} = 1$. Desta forma, concluimos que os hexágonos são semelhantes, e portanto, os hexágonos transformados também são hexágonos regulares.

Além disso, se $k > 1$ temos a *expansão uniforme*, pois a figura aumenta o tamanho de forma proporcional, se $k = 1$ temos a *transformação identidade*, a figura não sofre nenhum tipo de alteração e se $0 < k < 1$ temos a *contração uniforme*, pois a figura diminui o seu tamanho de forma proporcional.

A figura 36 (a) sofreu uma contração uniforme, já que o fator de escala da transformação foi $k = \dfrac{1}{2}$, e a figura 36 (b) sofreu uma expansão uniforme, pois o fator de escala usado foi $k = 2$.

5.2 TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA EM RELAÇÃO A UM PONTO QUALQUER

A transformação de escala é geralmente aplicada tendo a origem como ponto de referência, como citado na seção anterior. Porém, de acordo com o problema a ser abordado, podemos determinar um ponto arbitrário distinto da origem que servirá de referência para a transformação.

Caso isso ocorra, devemos adaptar a nova situação fazendo com que o problema recaia numa transformação de escala em relação a origem.

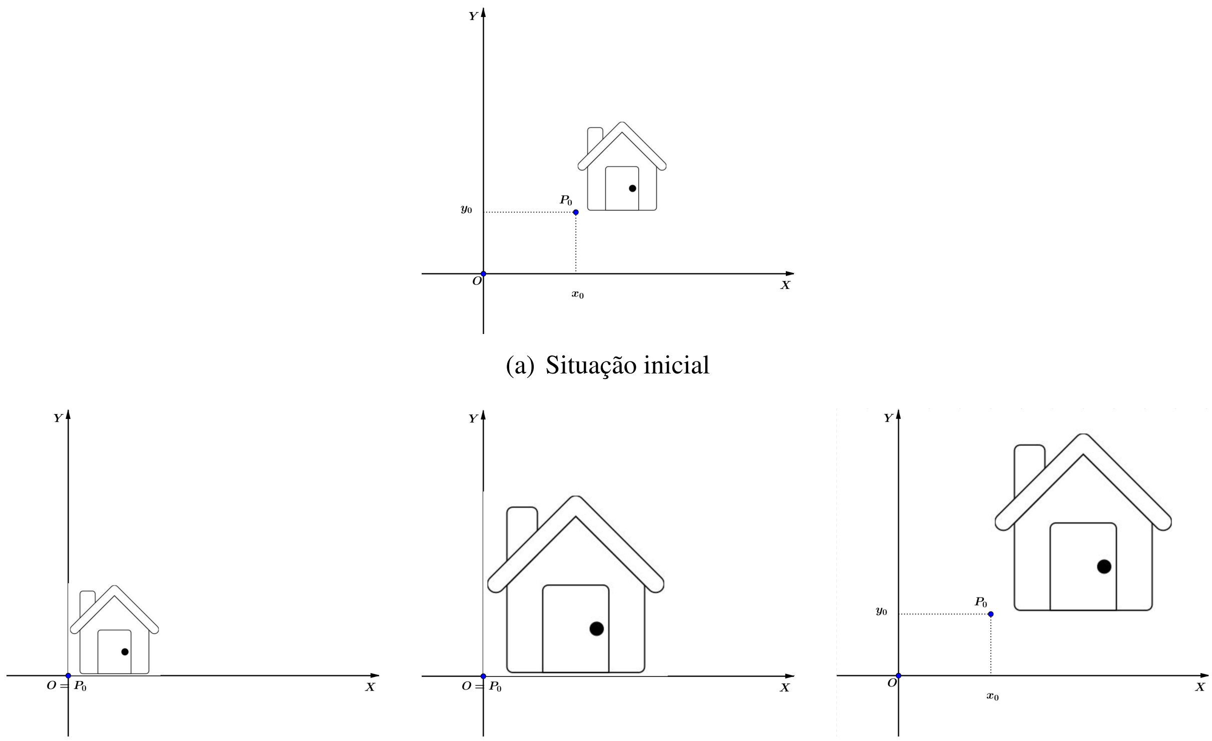
Sendo $P_0 = (x_0, y_0)$, distinto da origem, o ponto de referência para a transformação de escala, os seguintes procedimentos devem ser tomados:

- Transladar os pontos (x, y) que pertencem a imagem pela matriz translação $\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$. Desta forma, P_0 será transladado para a origem.

- Aplicar a transformação de escala em relação a origem.

- Transladar os pontos (x, y) que pertencem a imagem pela matriz translação $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Esse procedimento foi aplicado na figura 37, onde a imagem sofreu uma expansão uniforme em relação ao ponto $P_0 = (x_0, y_0)$.



(a) Situação inicial

(b) Passo 1

(c) Passo 2

(d) Passo 3

Figura 37: Transformação de escala em torno de um ponto qualquer

Exemplo 5.3. *A figura 38 mostra uma imagem contida num quadrilátero de vértices* $A = (4, 2)$, $B = (6, 2)$, $C = (6, 4)$, $D = (4, 4)$. *Esta imagem sofreu uma transformação de escala em relação ao vértice A aumentando as suas dimensões em* 300% *em relação ao eixo OX e* 200% *em relação ao eixo OY. Determine a nova posição da imagem.*

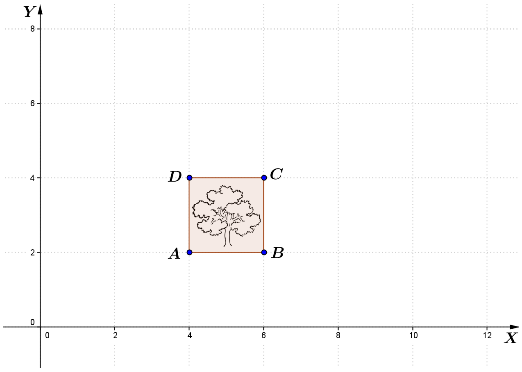


Figura 38: Imagem contida no quadrilátero *ABCD*

Solução: Como a imagem está contida no quadrado $ABCD$, vamos aplicar a transformação nos seus vértices obtendo o quadrilátero $A'B'C'D'$ e deste modo, teremos a nova posição da imagem, pois ela estará contida nesse quadrilatéro.

Uma matriz que armazena as coordenadas dos vértices do quadrilátero e a matriz de conexões relacionada a essa matriz dos vértices são, respectivamente: $V = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ e

$$C_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passo 1**:** A transformação de escala ocorreu em relação ao vértice $A = (4,2)$, por esse motivo devemos adaptar a situação fazendo com que o problema recaia em uma transformação de escala em relação a origem. Para isso, basta transladar os vértices do quadrilátero pela matriz translação $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Por (3), temos:

$$\begin{aligned} V' &= T + V \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Passo 2**:** Agora temos uma transformação de escala em relação a origem. Como ocorreu um aumento na imagem de 300% em relação ao eixo OX e de 200% em relação ao eixo OY, os fatores de escala que serão utilizados são: $E_x = 4$ e $E_y = 3$. Sendo V'' a matriz que armazena as coordenadas dos vértices do quadrilátero após a transformação de escala, por (14) temos:

$$\begin{aligned} V'' &= [E]\,V' \\ &= \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Passo 3**:** Por fim, vamos obter a matriz V''' que armazena as coordenadas dos vértices do quadrilátero $A'B'C'D'$ aplicando a matriz translação $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ à matriz V'' . Por (3), temos:

$$\begin{aligned} V''' &= T + V'' \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 12 & 12 & 4 \\ 2 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, $(4,2)$, $(12,2)$, $(12,8)$ e $(4,8)$ são os vértices do quadrilátero $A'B'C'D'$ em que a imagem está contida. Como a transformação de escala ocorreu em relação ao vértice A, ele não sofreu alteração em sua posição inicial. A figura 39 mostra a transformação sofrida pela imagem do exemplo 5.3.

$\square$

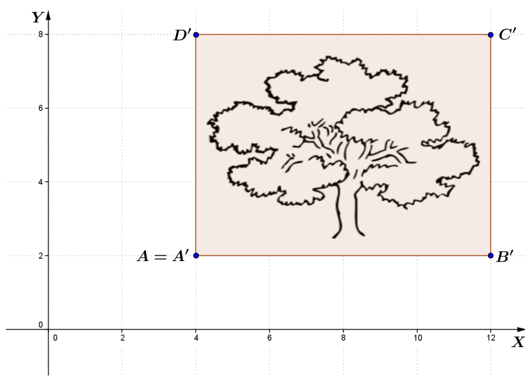


Figura 39: Imagem modificada por transformação de escala

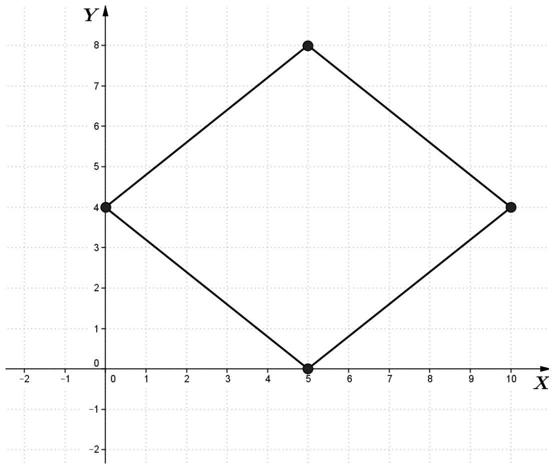
Vale ressaltar que, como os fatores de escala E_x e E_y são diferentes, a transformação ocorrida não foi uniforme, haja vista que tínhamos um quadrado $ABCD$ que foi transformado no retângulo $A'B'C'D'$.

5.3 EXERCÍCIOS

1) Para que um polígono sofra uma transformação de escala em relação a origem e tenha as suas dimensões aumentadas em 200%, a matriz que deve ser aplicada às matrizes que representam as coordenadas dos vértices do polígono é a matriz:

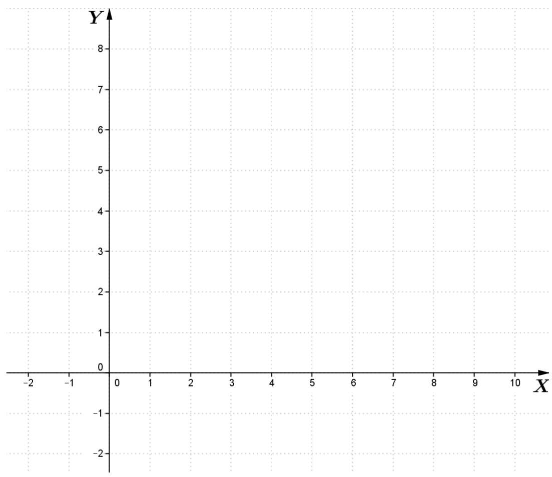
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 300 \end{pmatrix}$

2) A matriz $V = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ armazena as coordenadas dos vértices do losango representado no plano cartesiano abaixo.



a) Determine a matriz V' que armazena as coordenadas dos vértices após o losango sofrer uma transformação de escala em relação a origem de fatores $E_x = \dfrac{1}{5}$ e $E_y = \dfrac{1}{4}$.

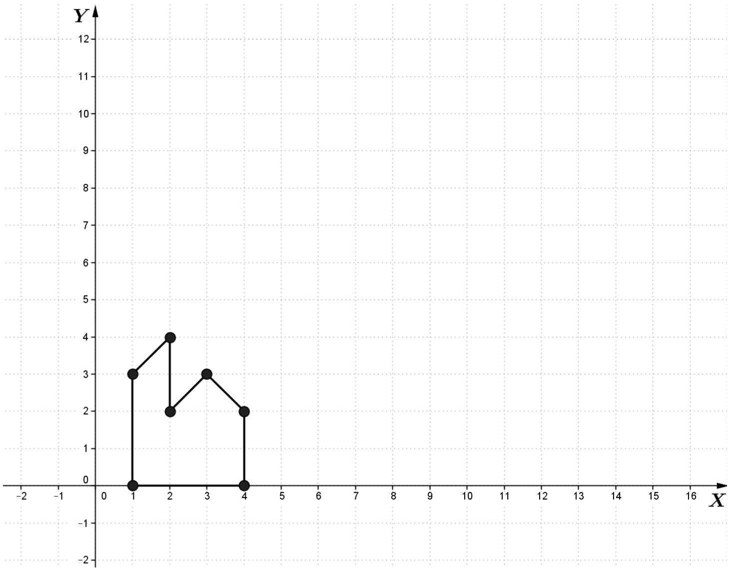
b) Faça o esboço e calcule a área do quadrilátero gerado pela transformação de escala no losango.



3) A estrutura representada abaixo é formada por 8 pontos. Aplicaremos à essa estrutura uma transformação de escala em relação a origem de fatores $E_x = 3$ e $E_y = 2$ e em seguida uma translação com deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita e 4 unidades para cima:

a) Determine a matriz que armazena as coordenadas dos vértices dessa estrutura após as duas transformações.

b) Faça o esboço dessa estrutura após essas transformações.



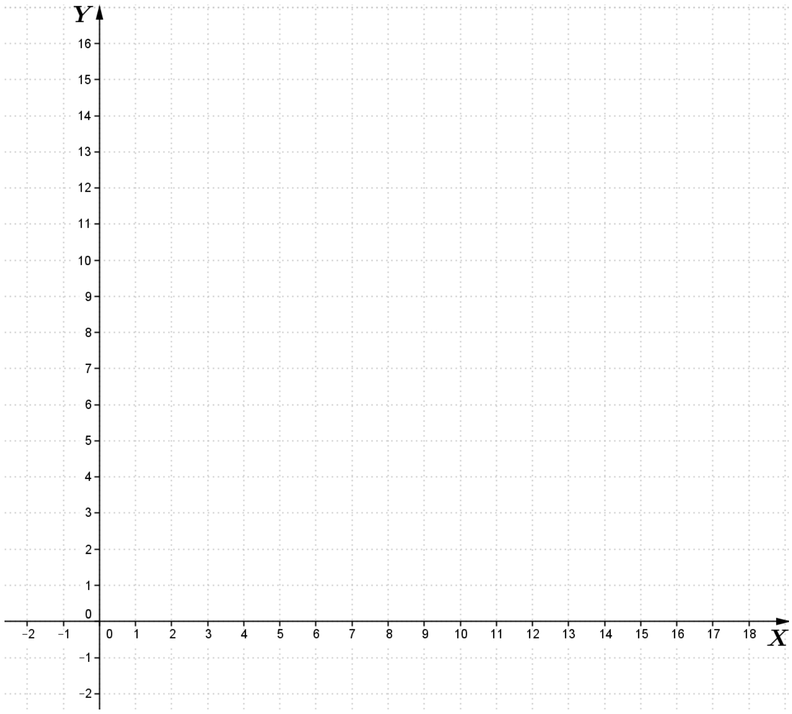
Com os dados a seguir, responda as questões 4 à 7.

A matriz $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 2 & 2 & \frac{11}{4} & \frac{11}{4} & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ armazena a posição dos vértices da planificação de um sólido geométrico e a matriz C abaixo informa como esses vértices estão conectados.

$$C_{10\times10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Qual é a matriz V que armazena a posição dos vértices dessa planificação após ela sofrer uma transformação de escala uniforme em relação a origem tendo as suas dimensões aumentadas em 300%?

5) Faça o esboço dessa planificação após a transformação de escala.



6) A planificação é de qual sólido geométrico?

a) Pirâmide reta de base triângular.

b) Prisma reto de base retangular.

c) Prisma reto de base triângular.

d) Tetraedro.

e) Prisma oblíquo de base triangular.

7) A área total e o volume desse prisma são, respectivamente?

a) 176 $u.a.$ e 192 $u.v.$

b) 176 $u.a.$ e 96 $u.v.$

c) 152 $u.a.$ e 192 $u.v.$

d) 128 $u.a.$ e 192 $u.v.$

e) 152 $u.a.$ e 96 $u.v.$

6 COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Nos capítulos anteriores, estudamos a matemática envolvida no processo de algumas manipulações que podem ser realizadas em pontos quando associados a um sistema de eixos ortogonais. Estes conceitos são naturalmente estendidos ao tratamento de imagens, pois uma imagem nada mais é que um conjunto de pontos.

Em um processo de manipulação de imagens, translação, rotação e transformação de escala são procedimentos comuns e, em muitos casos, essas diferentes transformações ocorrem em um mesmo processo. Matematicamente, podemos associar uma matriz a cada transformação envolvida nas etapas de manipulação da imagem e desta forma, cada etapa é efetivada quando aplicamos a matriz da respectiva transformação à cada matriz coluna que representa as coordenadas dos pontos que pertencem a imagem.

Com o intuito de otimizar os procedimentos matemáticos envolvidos nesse processo, vamos mostrar que é possível representar diferentes transformações utilizando apenas uma matriz, resultante da multiplicação das matrizes que representam cada transformação envolvida na manipulação da imagem.

O problema que avistamos nessa tarefa de otimização está no fato de que a translação não se dá por multiplicação de matrizes, como ocorre com a rotação e com a transformação de escala. Podemos tratar a translação também como multiplicação de matrizes, mas para que isso seja possível há a necessidade trabalharmos com coordenadas homogêneas.

6.1 COORDENADAS HOMOGÊNEAS

Um ponto P que pertence ao plano cartesiano Π é representado por sua abscissa x e sua ordenada y pela notação $P = (x, y)$, chamada de representação cartesiana do ponto. Outra forma de representarmos P é usando coordenadas homogêneas, para isso, devemos acrescentar uma terceira coordenada a notação cartesiana do ponto. Assim, sendo $P = (x, y)$ um ponto do plano cartesiano, ele pode ser representado em coordenadas homogêneas por $P = (x, y, 1)$.

Deste modo, usando coordenadas homogêneas, representamos pontos do plano, que são elementos de $\mathbb{R}^2$, utilizando 3 coordenadas. Isto é uma característica das coordenadas homogêneas, que de forma geral, possibilita representar elementos de $\mathbb{R}^n$ por $n+1$ coordenadas. Coordenadas homogêneas é um tema estudado em geometria projetiva e não iremos nos aprofundar nesse assunto pois não é o que buscamos para esse texto, recomendamos ao leitor que busca um maior aprofundamento a leitura de (GOMES; VELHO, 2008).

Veremos agora como devem ser representadas as transformações de translação, rotação e transformação de escala por meio de coordenadas homogêneas a fim de que seja possível fazer a composição dessas operações.

6.2 TRANSLAÇÃO EM COORDENADAS HOMOGÊNEAS

Em coordenadas cartesianas a translação de um ponto $P=(x,y)$ é feita através da soma de matrizes e as suas novas coordenadas (x',y') são dadas pela equação (2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Já em coordenadas homogêneas, para efetuar uma translação, o ponto P deve ser representado por $P=(x,y,1)$ e as suas novas coordenadas $(x',y',1)$ são calculadas por multiplicação de matrizes pela equação

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Exemplo 6.1. *O ponto $P=(-3,4)$ sofreu uma translação de 8 unidades para a direita e 6 unidades para baixo. Determine a nova posição do ponto P utilizando coordenadas cartesianas pela equação (2) e também por meio de coordenadas homogêneas pela equação (15).*

Solução: Como o ponto $P=(-3,4)$ sofreu uma translação de 8 unidades para a direita e 6 unidades para baixo, os valores de a e b são $a=8$ e $b=-6$.

Utilizando coordenadas cartesianas, pela equação (2) temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Assim, as coordenadas do ponto P após a translação são $P'=(5,-2)$. Utilizando coordenadas homogêneas, devemos representar as coordenadas do ponto P por $P = (-3,4,1)$, e pela equação (15), temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+0+8 \\ 0+4-6 \\ 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Em coordenadas homogêneas, a nova posição do ponto P é dado por $P' = (5,-2,1)$.

□

6.3 ROTAÇÃO EM COORDENADAS HOMOGÊNEAS

Para rotacionarmos um ponto $P = (x,y)$ em torno da origem por um ângulo de θ graus no sentido anti-horário, usamos multiplicação de matrizes e a sua nova posição é dada em coordenadas cartesianas pela equação (9)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Em coordenadas homogêneas, a rotação de um ponto P em torno da origem por um ângulo de θ graus também é dado por multiplicação de matrizes, porém agora, a sua nova posição é determinada por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Exemplo 6.2. *O ponto $P = (5,-2)$ sofreu uma rotação de $270°$ em torno da origem. Sabendo-se que a rotação se deu no sentido anti-horário, determine a nova posição do ponto P utilizando coordenadas cartesianas através da equação (9) e também por meio de coordenadas homogêneas pela equação (16).*

Solução: Utilizando coordenadas cartesianas, pela equação (9) temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 270° & -\operatorname{sen} 270° \\ \operatorname{sen} 270° & \cos 270° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Assim, as coordenadas do ponto P após a rotação são $P' = (-2,-5)$. Representando o ponto P em coordenadas homogêneas por $P = (5,-2,1)$ e utilizando a equação (16) temos:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 270^\circ & -\operatorname{sen} 270^\circ & 0 \\ \operatorname{sen} 270^\circ & \cos 270^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0-2+0 \\ -5+0+0 \\ 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Em coordenadas homogêneas, a nova posição do ponto P é $P' = (-2,-5,1)$.

□

6.4 TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA EM COORDENADAS HOMOGÊNEAS

Usamos multiplicação de matrizes para realizar a transformação de escala em uma imagem qualquer, e as novas coordenadas dos pontos que formam a imagem são dadas, em coordenadas cartesianas, pela equação (13)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x & 0 \\ 0 & E_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A transformação de escala também pode ser realizada em coordenadas homogêneas, que se dá por multiplicação de matrizes através da equação:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

6.5 MATRIZ DA COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES

De forma análoga ao que ocorre em coordenadas cartesianas, podemos associar cada transformação a sua respectiva matriz, também em coordenadas homogêneas. São elas:

- Matriz translação representada por $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

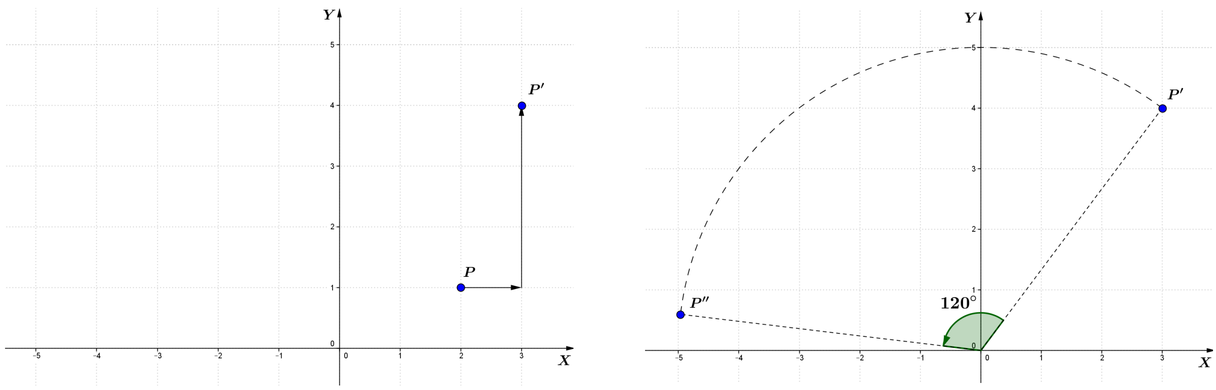
- Matriz rotação representada por $[R] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, usada para rotações em torno da origem.

- Matriz escala representada por $[E] = \begin{pmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Esta translação tem a origem como ponto de referência.

Devemos associar uma das matrizes acima a cada transformação envolvida no processo de manipulação de um ponto ou de uma imagem e, usando multiplicação de matrizes, todas as etapas do processo serão representadas por apenas uma matriz.

Exemplo 6.3. *Um ponto $P = (2,1)$ sofreu uma translação de 1 unidade para a direita e 3 unidades para cima e em seguida, uma rotação de $120°$ em torno da origem. Sabendo-se que a rotação se deu no sentido anti-horário, encontre a matriz que representa a sucessão de operações indicadas.*

Solução: Para que seja possível encontrarmos a matriz que representa a sucessão de operações indicadas, devemos trabalhar com coordenadas homogêneas. A figura 40 ilustra as transformações sofridas pelo ponto P, uma translação, ilustrada na figura 40 (a) e em seguida uma rotação, ilustrada na figura 40 (b).



(a) Translação (b) Rotação

Figura 40: Translação seguida de rotação

Temos uma composição de duas transformações, uma translação e uma rotação, que serão representadas pela matriz $[RoT]$. Como o ponto $P = (2,1)$ sofreu um deslocamento de 1 unidade para a direita e 3 unidades para cima, os valores de a e b referentes a translação são $a = 1$ e $b = 3$. O ângulo de rotação é de $\theta = 120°$, desta forma:

$$\begin{aligned}
[RoT] = [R][T] &= \begin{pmatrix} \cos 120° & -\operatorname{sen} 120° & 0 \\ \operatorname{sen} 120° & \cos 120° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, esta matriz é a matriz que representa a composição destas duas transformações. Vamos determinar a nova posição do ponto P após essas transformações aplicando a matriz $[RoT]$ à matriz $[P]$, onde $[P]$ é uma matriz coluna formada pelas coodenadas homogêneas do ponto P.

$$[RoT][P] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3-4\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-4+3\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

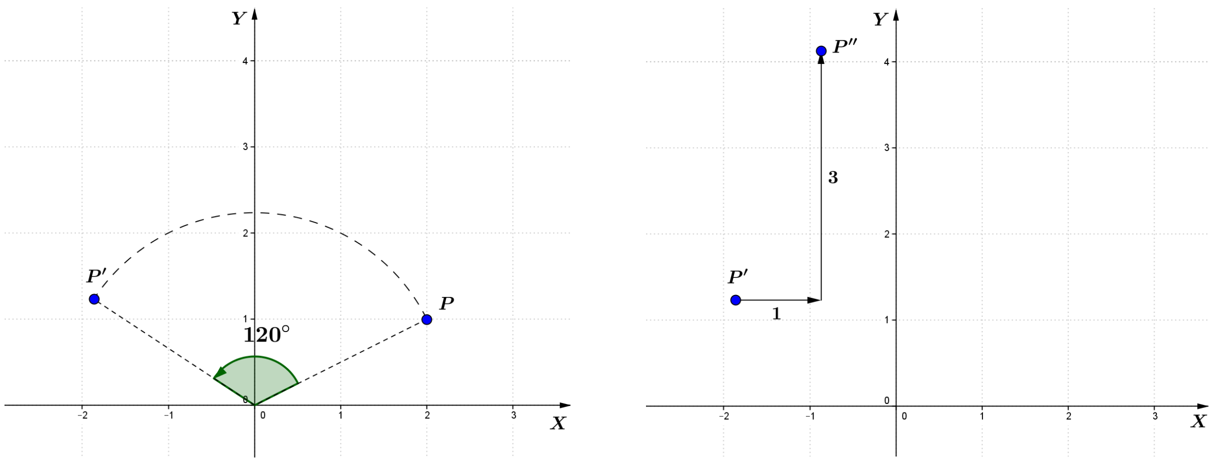
As novas coordenadas cartesianas de P são $P' = \left(\frac{-3-4\sqrt{3}}{2}, \frac{-4+3\sqrt{3}}{2} \right)$.

□

Vale salientar que, quando buscamos representar uma sequência de transformações envolvidas em um determinado processo, estamos trabalhando com multiplicação de matrizes, e como sabemos, a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja, sendo M e N duas matrizes, o produto MN não é necessariamente igual a NM.

Sendo assim, a matriz que representa uma composição de transformações deve ser formada obedecendo, rigorosamente, a ordem inversa a transformação sofrida pelo ponto. No exemplo anterior, vimos que o ponto sofreu primeiro uma translação $[T]$ e em seguida uma rotação $[R]$, com isso, a matriz da composição foi obtida por $[RoT]$.

Se no exemplo 6.3, tivéssemos representado a matriz da composição por $[ToR]$, estaríamos dizendo que o ponto sofreu primeiro uma rotação para em seguida sofrer uma translação. A figura 41 ilustra exatamente essa sequência, ou seja, aplicando primeiro a rotação de $120°$, mostrada na figura 41 (a) e em seguida, a translação de 1 unidade para a direita e 3 unidades para cima, mostrada na figura 41 (b).



(a) Rotação (b) Translação

Figura 41: Rotação seguida de translação

Veja que, a mudança na ordem da realização das transformações significou uma transformação diferente do apresentado na resolução do exemplo 6.3.

É possível demonstrar que, duas ou mais translações sucessivas são comutativas, e neste caso específico, não precisamos nos preocupar com as ordem das transformações. Da mesma forma, rotações e transformações de escalas sucessivas também são operações comutativas. Em um processo de manipulação de pontos ou de imagem, as transformações que ocorrem geralmente são variadas, por isso sempre é bom observar a ordem das transformações, mesmo que em alguma etapa do processo ocorram operações sucessivas do mesmo tipo.

No exemplo 4.7, do capítulo Rotação, foi fornecido as coordenadas dos vértices A e B de um triângulo equilátero e deveríamos determinar o vértice C levando em consideração o fato de que o triângulo ABC estava contido no 1^o quadrante do plano cartesiano. No exemplo, aplicamos ao vértice B uma rotação de $60°$ no sentido anti-horário em torno do vértice A. Vamos repensar esse exemplo, porém agora o foco é encontrar a matriz que representa a composição das transformações necessárias para se obter o vértice C.

Exemplo 6.4. *Dados os vértices $A = (3,2)$ e $B = (8,2)$ de um triângulo equilátero e sabendo* *que ele está contido no* 1° *quadrante do plano cartesiano, determine a matriz que representa a composição das transformações necessárias para se obter o vértice C desse triângulo equilátero.*

Solução: Seguindo a solução apresentada no exemplo 4.7, as etapas que devem ser realizadas são:

- Transladar o vértice B em 3 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo, ou seja, utilizando $a = -3$ e $b = -2$ para que assim, a rotação ocorra em torno da origem, operação $[T_1]$.
- Aplicar uma rotação de 60° em torno da origem no sentido anti-horário, operação $[R]$.
- Obter o vértice C do triângulo aplicando uma translação de 3 unidades para a direita e 2 unidades para cima, utilizando os valores $a = 3$ e $b = 2$, operação $[T_2]$.

Desta forma, em coordenadas homogêneas, teremos:

$$\begin{aligned}
[T_2 o R o T_1] = [T_2][R][T_1] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\operatorname{sen} 60^\circ & 0 \\ \operatorname{sen} 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2-3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando a matriz $[T_2 o R o T_1]$ à matriz $[B]$, em que $[B]$ é uma matriz coluna formada pelas coordenadas do vértice B, obtemos as coordenadas do vértice C do triângulo equilátero. Sendo assim, a matriz $[T_2 o R o T_1]$ é a matriz que representa a composição das transformações necessárias para obter o vértice C do triângulo equilátero. A figura 29 ilustra as três transformações realizadas neste processo.

□

No exemplo 5.3, do capítulo Transformação de Escala, uma imagem contida no quadrado $ABCD$ sofreu uma transformação de escala em torno de um ponto distinto da origem.

Vamos repensar nesse exemplo, porém agora focando a busca da matriz que representa a composição das transformações necessárias para a realização da transformação de escala no quadrado $ABCD$.

Exemplo 6.5. *Uma imagem contida num quadrado de vértices* $A=(4,2)$, $B=(6,2)$, $C=(6,4)$, $D=(4,4)$ *sofreu uma transformação de escala em relação ao vértice A acarretando um aumento na imagem de* 300% *em relação ao eixo OX e de* 200% *em relação ao eixo OY. Encontre a matriz que representa a composição das transformações necessárias para a realização dessa transformação de escala.*

Solução: Seguindo a solução apresentada no exemplo 5.3, as etapas que devem ser realizadas são:

- Transladar os vértices do quadrado em 4 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo utilizando $a=-4$ e $b=-2$ para que a transformação de escala ocorra em relação a origem, operação $[T_1]$.
- Aplicar a transformação de escala usando os fatores de escala $E_x = 4$, pois o aumento na imagem em relação ao eixo OX foi de 300%, e $E_y = 3$, pois o aumento na imagem em relação ao eixo OY foi de 200%, operação $[E]$.
- Realizar uma translação de 4 unidades para a direita e 3 unidades para cima utilizando $a=4$ e $b=2$, operação $[T_2]$.

Desta forma, em coordenadas homogêneas, teremos:

$$\begin{aligned}
[T_2oEoT_1] = [T_2][E][T_1] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sendo assim, $[T_2oEoT_1]$ é a matriz que representa a composição das transformações necessárias para a realização dessa transformação de escala que é efetivada quando aplicamos a matriz $[T_2oEoT_1]$ à cada matriz coluna formada pelas coordenadas homogêneas dos vértices do quadrado $ABCD$. A figura 38 mostra a imagem contida no quadrado $ABCD$ e a figura 39 mostra a imagem após a transformação de escala.

$\square$

Exemplo 6.6. *Após um processo de manipulação de imagem, uma imagem inicial foi transformada em uma imagem final, situação ilustrada na figura 42. Com esse processo, o ponto* $A = (-8,4)$ *que pertence a imagem inicial foi transformado no ponto* $A' = (12,6)$ *que pertence a imagem final. Usando coordenadas homogêneas, encontre a matriz que representa a composição das transformações necessárias para a realização desse processo de manipulação.*

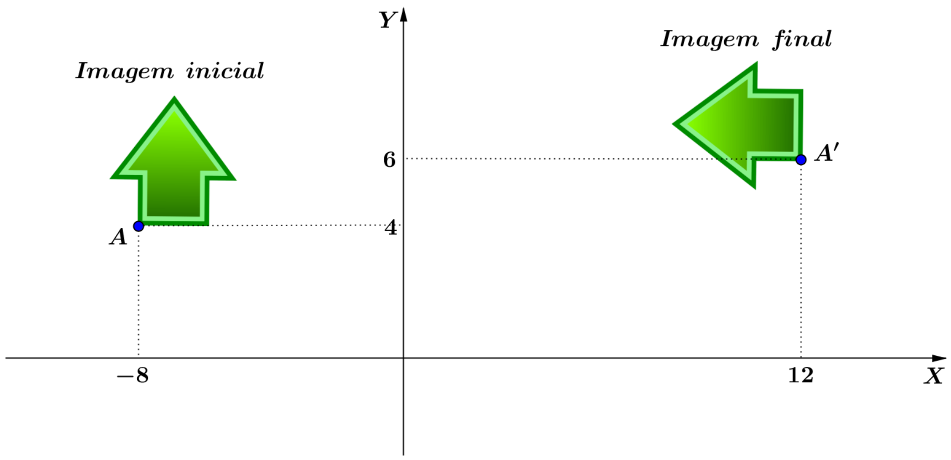
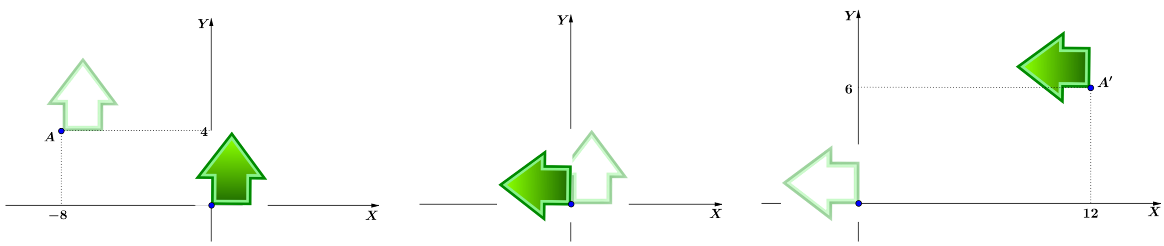


Figura 42: Sequência de transformações

Solução: Vamos usar o fato de que o ponto $A = (-8,4)$ deve ser transformado no ponto $A' = (12,6)$. Assim, uma sequência de operações que devem ser realizadas são:

- Transladar os pontos da imagem inicial utilizando $a = 8$ e $b = -4$. Desta forma, o ponto A irá coincidir com a origem, operação $[T_1]$, ilustrada na figura 43 (a).
- Aplicar uma rotação de $90°$ em torno da origem no sentido anti-horário, operação $[R]$, ilustrada na figura 43 (b).
- Aplicar uma translação utilizando $a = 12$ e $b = 6$ para que ao final do processo, o ponto A seja transformado no ponto A', operação $[T_2]$, ilustrada na figura 43 (c).



(a) Translação 1 (b) Rotação (c) Translação 2

Figura 43: Transformações envolvidas no processo de manipulação de imagem

Desta forma, em coordenadas homogêneas, teremos:

$$
\begin{aligned}
[T_2oRoT_1] = [T_2][R][T_1] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ & 0 \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 16 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $[T_2oRoT_1]$ é a matriz que representa a composição das transformações envolvidas nesse processo de manipulação de imagem.

□

Exemplo 6.7. *A imagem da bandeira do Brasil, localizada na origem do sistema cartesiano, sofreu uma transformação de escala uniforme em relação a origem aumentando as suas dimensões em* 100%*, e uma translação de* 40 *unidades para a direita e* 27 *unidades para cima e desta forma, pode ser posicionada no mastro, situação ilustrada na figura 44. Responda:*
a) Qual é a matriz que representa a composição dessas duas transformações?
b) Sabendo que a área da imagem da bandeira do Brasil antes das transformações era igual a 70 *u.a., diga qual é a área da imagem da bandeira do Brasil após as transformações.*

Figura 44: Transformação de Escala e Translação

Solução: A imagem da bandeira do Brasil sofre primeiro uma transformação de escala, operação $[E]$ e em seguida uma translação, operação $[T]$. Assim, a composição das transformações é $[ToE]$.

Com a transformação de escala uniforme, houve um aumento nas dimensões da imagem em 100%, portanto, devemos usar o fator de escala $k = 2$. Os valores de a e b referentes a translação são $a = 40$ *e* $b = 27$, pois houve um deslocamento para a direita de 40 unidades e um deslocamento para a cima de 27 unidades.

Desta forma, em coordenadas homogêneas, teremos:

$$
\begin{aligned}
[ToE] = [T][E] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 40 \\ 0 & 2 & 27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sendo assim, $[ToE]$ é a matriz que representa a composição dessas duas transformações.

Seja A_i a área da imagem da bandeira do Brasil antes das transformações e A_f a área da imagem da bandeira do Brasil após as transformações. Translação é uma isometria, portanto não altera a área de uma imagem. Como a transformação de escala foi uniforme, a imagem da bandeira do Brasil modificada é semelhante a imagem da bandeira do Brasil inicial com $K = 2$ sendo a constante de proporcionalidade, assim temos:

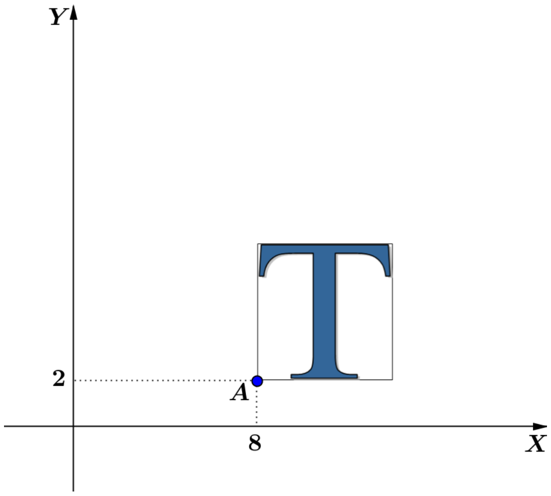
$$
\begin{aligned}
\frac{A_f}{A_i} &= k^2 \\
\frac{A_f}{70} &= 2^2 \\
A_f &= 280\, u.a.
\end{aligned}
$$

Após as transformações, a área da imagem da bandeira do Brasil é igual a 280 $u.a.$.

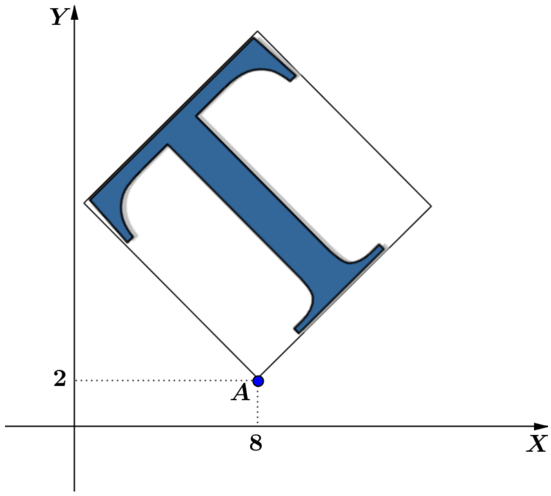
□

Exemplo 6.8. *Uma imagem sofreu uma rotação de* 45° *no sentido anti-horário e uma transformação de escala uniforme tendo suas dimensões aumentadas em* 80%. *A figura 45 (a) ilustra a imagem antes das transformações e a figura 45 (b) ilustra a imagem após as transformações. Sabendo-se que as duas transformações ocorreram em torno do ponto* $A = (8,2)$, *use coordenadas homogêneas para encontrar a matriz que representa a composição das transformações sofridas pela figura 45 (a).*

Solução: As duas transformações são efetivadas com a realização das seguintes etapas:



(a) Imagem inicial



(b) Imagem final

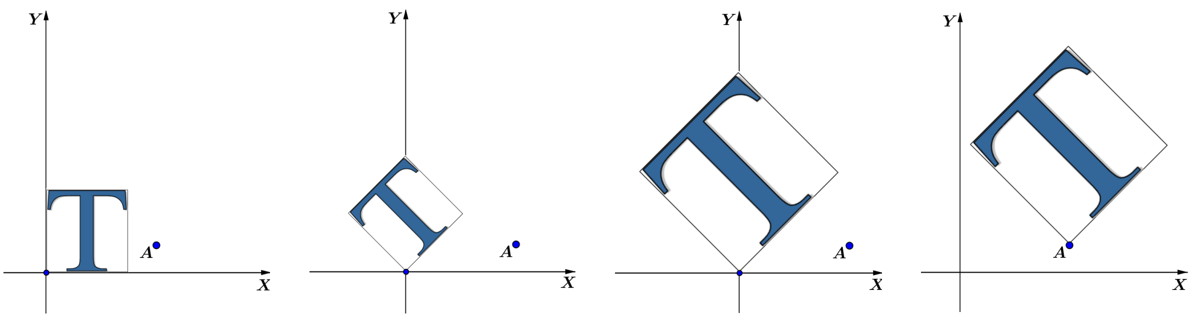
Figura 45: Rotação e Transformação de Escala

- Aplicação de uma translação de 8 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo. Desta forma, as transformações de rotação e transformação de escala ocorrerão em torno da origem, operação $[T_1]$, ilustrada na figura 46 (a).

- Aplicação de uma rotação de 45° no sentido anti-horário e em torno da origem, operação $[R]$, ilustrada na figura 46 (b).

- Aplicação de uma transformação de escala uniforme em relação a origem, operação $[E]$, ilustrada na figura 46 (c). Como houve um aumento nas dimensões da imagem em 80%, devemos usar $k = \dfrac{9}{5}$.

- Aplicação de uma translação de 8 unidades para a direita e 2 unidades para cima, operação $[T_2]$, ilustrada na figura 46 (d).



(a) Translação 1

(b) Rotação

(c) Transformação de escala

(d) Translação 2

Figura 46: Sequências de transformações

Em coordenadas homogêneas, a composição das transformações é dada por:
$[T_2oEoRoT_1] = [T_2][E][R][T_1] =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\operatorname{sen} 45^\circ & 0 \\ \operatorname{sen} 45^\circ & \cos 45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9\sqrt{2}}{10} & \frac{-9\sqrt{2}}{10} & \frac{-27\sqrt{2}+40}{5} \\ \frac{9\sqrt{2}}{10} & \frac{9\sqrt{2}}{10} & \frac{-45\sqrt{2}+10}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sendo assim, $[T_2oEoRoT_1]$ é a matriz que representa a composição das transformações sofridas pela figura 45 (a).

□

Vale comentar que, de forma geral, a matriz quadrada de ordem 3 que representa a composição das transformações do tipo translação, rotação e transformação de escala dada por

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

tem a seguinte formação:

- A submatriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ do canto superir esquerdo de M é formada pelos elementos que são responsáveis pelas rotações, pelas transformações de escala ou por uma composição destes dois tipos de transformações.

- A submatriz $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ do canto superior direito de M é formada pelos elementos que são responsáveis pelas translações que aparecem na composição.

- A submatriz $\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ da terceira linha da matriz M é invariante e dada por

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.6 EXERCÍCIOS

1) Seja T_1 uma translação com deslocamento horizontal de a unidades e deslocamento vertical de b unidades e T_2 uma translação com deslocamento horizontal de c unidades e deslocamento vertical de d unidades. Mostre, utilizando coordenadas homogêneas, que aplicar uma translação T_1 e em seguida uma translação T_2 é o mesmo que aplicar uma translação T_3 com deslocamento horizontal de $a+c$ unidades e deslocamento vertical de $b+d$ unidades.

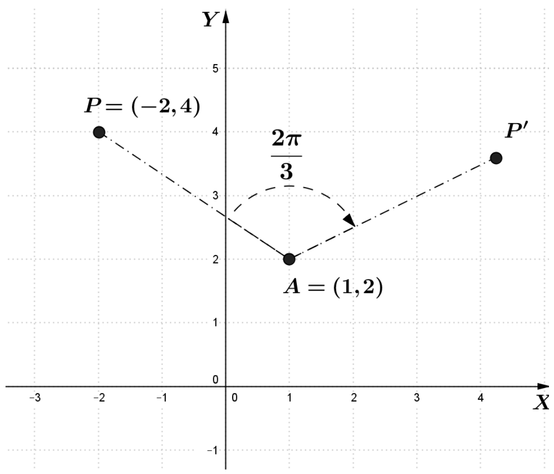
2) Seja R_α uma rotação em torno da origem por um ângulo α e R_β uma rotação em torno da origem por um ângulo β. Mostre, utilizando coordenadas homogêneas, que aplicar uma Rotação R_α e em seguida uma rotação R_β é o mesmo que aplicar uma rotação $R_{\alpha+\beta}$ em torno da origem por um ângulo $\alpha+\beta$.

3) Seja E_1 uma transformação de escala com fatores de escala $E_x = a$ e $E_y = b$ e E_2 uma transformação de escala com fatores de escala $E_x = c$ e $E_y = d$. Mostre, utilizando coordenadas homogêneas, que aplicar uma transformação de escala E_1 e em seguida uma transformação de escala E_2 é o mesmo que aplicar uma transformação de escala E_3 com fatores de escala $E_x = ac$ e $E_y = bd$.

4) O ponto $P = (-2,4)$ sofreu uma rotação de $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos no sentido horário em torno do ponto $A = (1,2)$. Determine:

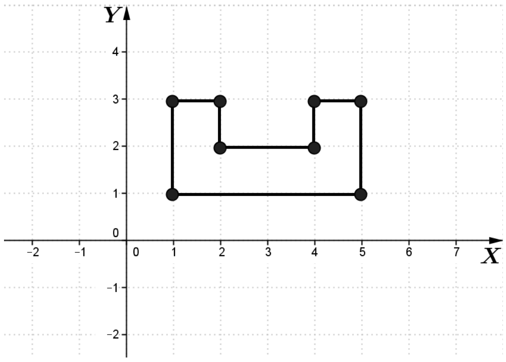
a) A matriz em coordenadas homogêneas que representa a composição das transformações necessárias para efetuar essa rotação.

b) As novas coordenadas do ponto P após essa rotação.

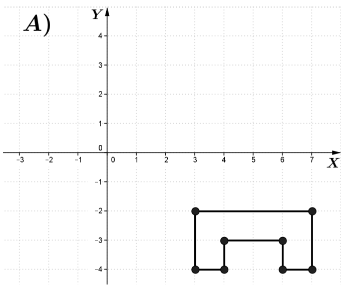


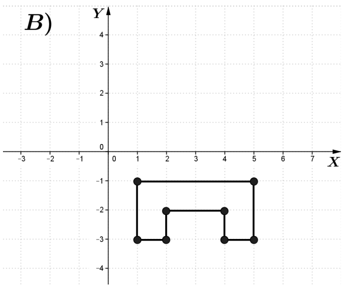
5) Abaixo temos uma matriz que representa a composição de algumas transformações em coordenadas homogêneas e temos também uma estrutura formada por 8 pontos.

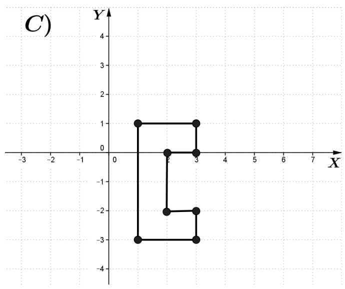
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

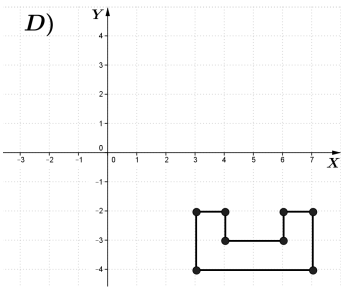


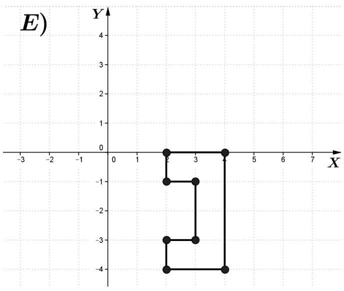
Se a estrutura sofrer as transformações representadas na matriz, qual dos itens a seguir representa o esboço da estrutura após essas transformações?







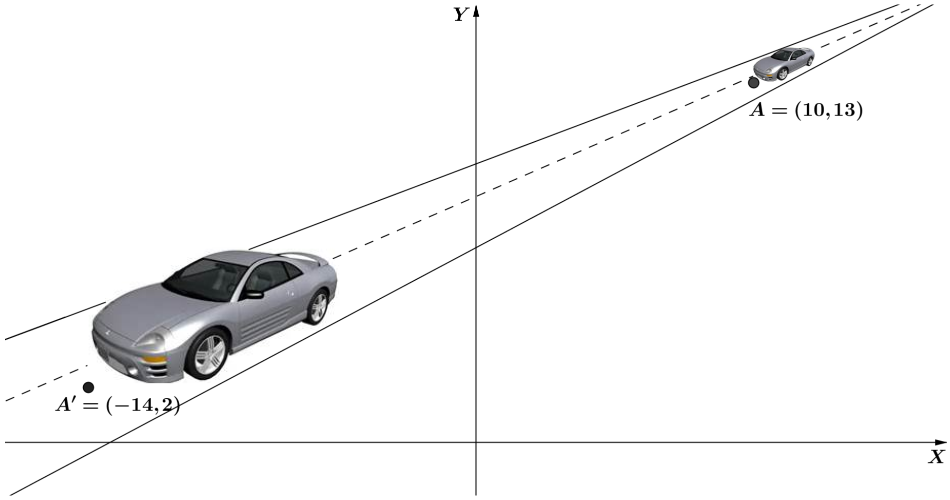




6) A área da computação gráfica se ocupa da exibição, transformação e animação de representações de objetos bidimensionais e tridimensionais na tela do monitor de um computador, (ANTON; BUSBY, 2003). Para a formação da cena abaixo, o carro menor foi transformado no carro maior pela sequência de transformações descritas a seguir:

- Uma translação dos pontos que formam o carro menor de modo que o ponto $A = (10, 13)$ fosse transladado para a origem.
- Uma transformação de escala em relação a origem em que o carro menor teve as suas dimensões aumentadas em 300%.
- Uma translação de modo que a origem fosse transladado para o ponto $A' = (-14, 2)$.

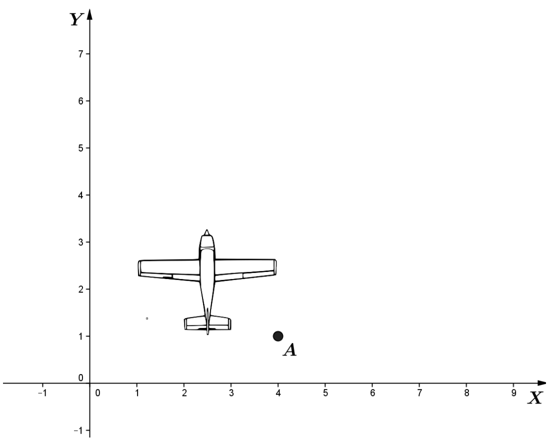
Qual das matrizes representa a composição das transformações sofridas pelo carro menor a fim de que ele fosse transformado no carro maior?



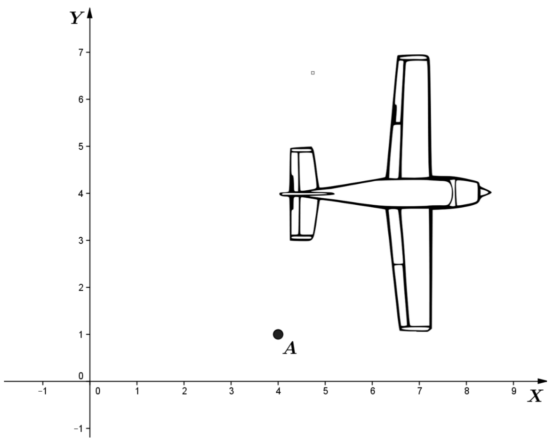
a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -24 \\ 0 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -54 \\ 0 & 4 & -50 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -24 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -44 \\ 0 & 3 & -37 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -14 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) As figuras abaixo mostram uma imagem que sofreu uma rotação de 90° no sentido horário e uma transformação de escala uniforme tendo suas dimensões aumentadas em 100%. Sabendo-se que as duas transformações ocorreram em torno do ponto $A = (4,1)$, use coordenadas homogêneas para encontrar a matriz que representa a composição das transformações sofridas por essa imagem.



(f) Imagem antes das transformações



(g) Imagem após as transformações

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma das motivações para a realização do presente estudo foi a escassez de materiais que abordassem o tema de aplicações de matrizes de forma abrangente no ensino médio. Isso gerou muitas incertezas ao longo do percurso de criação, sendo necessárias muitas tentativas até encontrar uma abordagem adequada, clara e de fácil entendimento para o aluno.

A elaboração desse texto exigiu cautela, pois falar sobre um assunto de álgebra linear com enfoque para o ensino médio requer certos cuidados, como a utilização de uma linguagem apropriada a esse nível de ensino e ainda respeitando um certo rigor matemático inerente à álgebra linear. Uma das diretrizes iniciais foi trabalhar com o tema principal estabelecendo conexões com outros conteúdos de matemática já conhecidos pelo aluno como trigonometria, geometria plana e espacial.

Decidimos nos concentrar nessas transformações geométricas apenas no plano, pois entendemos que já seria o suficiente para mostrar ao aluno uma aplicação de matrizes no ensino médio. Como uma continuidade desse trabalho, sugerimos fazer essas transformações no espaço, pois seriam ideias generalizadas das transformações no plano, exigindo do aluno outros pré-requisito como conhecimentos de geometria analítica e uma visão geométrica mais ampla.

Esperamos que esse texto auxilie no estudo de matrizes, contribuindo para o enriquecimento do trabalho dos professores em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra Linear Contemporânea.** São Paulo: Bookmam, 2003.

BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harbra, 1980.

DANTE, L. R. **Matemática, contexto e aplicações. Ensino Médio, vol. 2.** São Paulo: Ática, 2003.

FILGUEIRAS, L. V. L. **Fundamentos da computação gráfica.** São Paulo: LTC, 1987.

GOMES, J.; VELHO, L. **Fundamentos da computação gráfica.** Rio de Janeiro: Impa, 2008.

HUANG, C. **A escala do universo.** 2012. Disponível em: <http://htwins.net/scale2/lang.html>. Acesso em: 19 de maio de 2013.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LIMA, E. L. **Isometrias.** Rio de Janeiro: SBM, 1996.

LIMA, E. L. **Coordenadas no Plano.** Rio de Janeiro: SBM, 2011.

SHU, F. H. **The Physical Universe: An Introduction to Astronomy.** Mill Valley: Science Books, 1982.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. **Parâmetros curriculares nacionais +(ensino médio):ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 10 de junho de 2013.

ANEXO A – RESPOSTAS, SUGESTÕES E SOLUÇÕES

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DE ESTRUTURAS

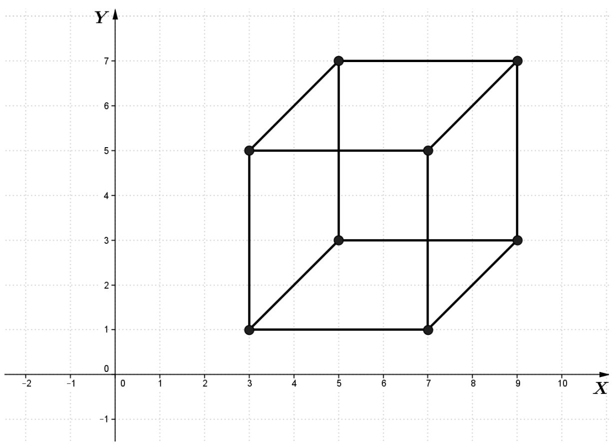
1) D

2) C

3) Uma matriz que armazena a posição dos vértices e a matriz de conexões associada a essa matriz dos vértices podem ser dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad C_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) O esboço pedido pode ser dado por:



TRANSLAÇÃO

1) As novas coordenadas dos vértices do triângulo após a translação são: $A' = (5,9)$, $B' = (2,1)$ e $C' = (10,5)$.

2) O número de translações possíveis e uma justificativa para cada item são:

•a) 6 translações, pois cada vértice do hexágono $ABCDEF$ pode coincidir com o vértice K.

•b) 2 translações, com os vértices E e F do hexágono $ABCDEF$ coincidindo com os vértices K e L ou os vértices C e B do hexágono $ABCDEF$ coincidindo com os vértices K e L.

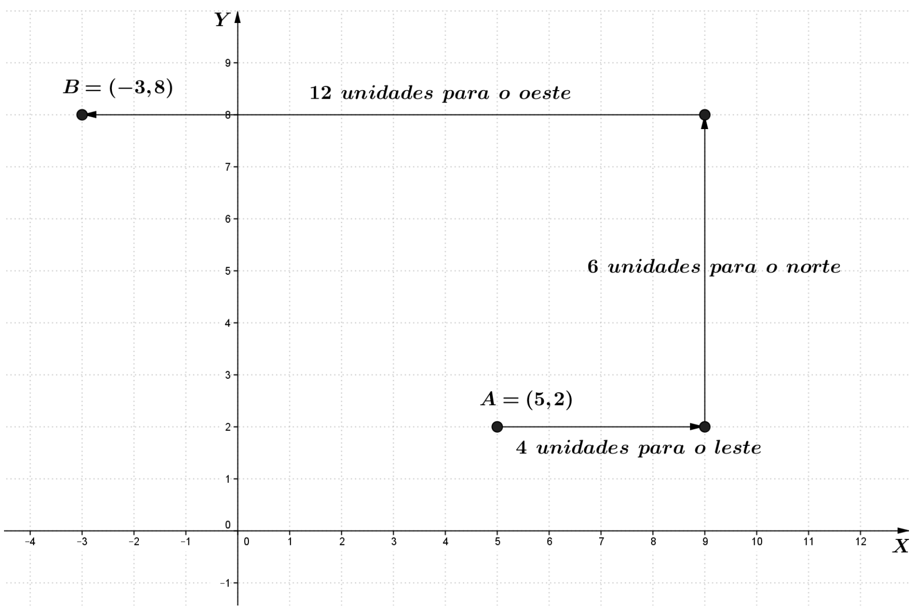
•c) 2 translações, com os vértices E e C do hexágono $ABCDEF$ coincidindo com os vértices K e I ou os vértices F e B do hexágono $ABCDEF$ coincidindo com os vértices K e I.

•d) Apenas 1 translação, com os vértices E e B do hexágono $ABCDEF$ coincidindo com os vértices K e H.

3) Analisando o esboço das translações sofridas pelo ponto A podemos ver que:

•a) Após as translações, o ponto $A = (5,2)$ foi transladado ao ponto $B = (-3,8)$ e a matriz $\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ é a matriz que representa a translação do ponto A direto ao ponto B.

•Utilizando a fórmula $d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ que dá a distância entre dois pontos, vemos que $d_{AB} = 10\ u.m.$.



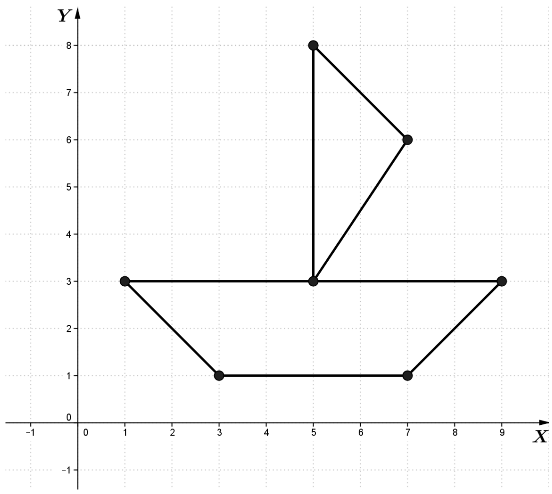
4) Use o fato de que a altura de um triângulo equilátero é dado por $h = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ em que l é a medida do lado do triângulo. Calcule a altura do triângulo ABC chegando em $h = 2\sqrt{3}$, conclua que as coordenadas do vértice B são dadas por $B = \left(9, 1+2\sqrt{3}\right)$. Como o vértice B foi transformado no vértice B', a matriz que representa a translação do triângulo ABC é a matriz $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5) D

6) Após a estrutura sofrer uma translação de 12 unidades para a direita e de 4 unidades para cima, a matriz V' que armazena a posição dos vértices da estrutura pode ser determinada por (3). Assim:

$$\begin{aligned} V' &= T+V \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & -9 & -5 & -3 & -7 & -7 & -5 \\ -1 & -3 & -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Usando V' e a matriz de conexões C, a mesma relacionada a matriz V, o esboço da estrutura após a translação é o apresentado abaixo.



ROTAÇÃO

1) A

2) B

3) Vamos determinar a matriz V' que armazena as coordenadas dos vértices do triângulo após a rotação, como a rotação se deu no sentido horário, vamos usar $\theta = -\dfrac{5\pi}{4}$. Por (10), temos:

$$\begin{aligned}
V' &= [R_\theta]\, V \\
&= \begin{pmatrix} \cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) & -\operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) \\ \operatorname{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) & \cos\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & -7\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, as novas coordenadas dos vértices do triângulo após a rotação são $(0, 2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ e $(-7\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

4) a) Uma matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura e a matriz de conexões associada a essa matriz dos vértices podem ser dadas por:

$$V = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -5 & -6 & -7 & -9 & -7 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } C_{7\times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

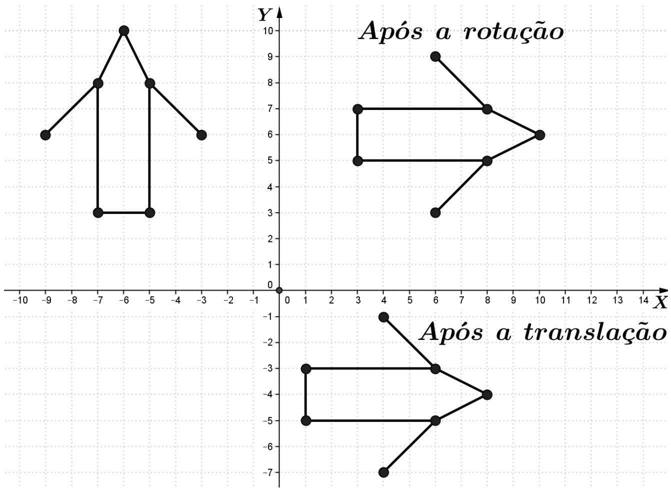
b) Uma matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura após ela sofrer uma rotação de 90° em torno da origem e no sentido horário pode ser dada por:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

c) Uma matriz que armazena a posição dos vértices dessa estrutura após a translação pode ser dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 1 \\ -5 & -7 & -5 & -4 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

d) O esboço da estrutura após a rotação e a translação é:



5) Sugestão: Aplique ao vértice A uma rotação de 60° no sentido horário em torno do vértice B. As coordenadas do vértice C do triângulo equilátero são $C = \left(\dfrac{-8-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+6\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) E

7) a) Sugestão: Para determinar as coordenadas dos outros cinco vértices do hexágono, basta aplique ao vértice A cinco rotações sucessivas no sentido horário ou anti-horário de 60° em torno da origem. As coordenadas dos outros vértices do hexágono são:

$$\left(\frac{2-5\sqrt{3}}{2}, \frac{5+2\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{-4-10\sqrt{3}}{4}, \frac{-10+4\sqrt{3}}{4}\right), \quad (-2,-5)$$
$$\left(\frac{-2+5\sqrt{3}}{2}, \frac{-5-2\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{4+10\sqrt{3}}{4}, \frac{10-4\sqrt{3}}{4}\right).$$

b) A medida do lado desse hexágono é igual a distância do vértice A à origem, ou seja, $\sqrt{29}$.

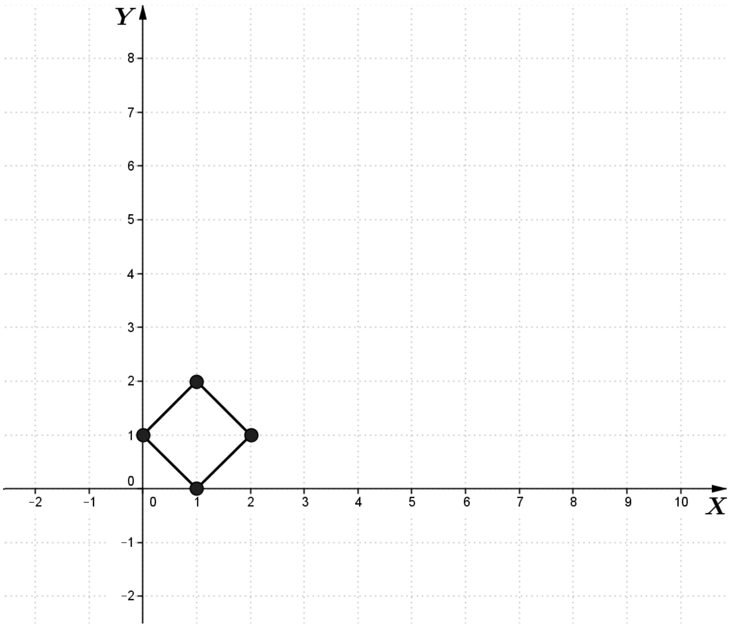
c) Sugestão: Lembre-se que o hexágono regular pode ser visto como um polígono formado por seis triângulos equiláteros e que a área do triângulo equilátero de lado l é dado por $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Calcule a área de um triângulo equilátero de lado $\sqrt{29}$, multiplique o resultado por seis e conclua que a área desse hexágono é $\dfrac{87\sqrt{3}}{2}$.

TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA

1) D

2) a) $V' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) O esboço do quadrilátero gerado pela transformação de escala no losango é:



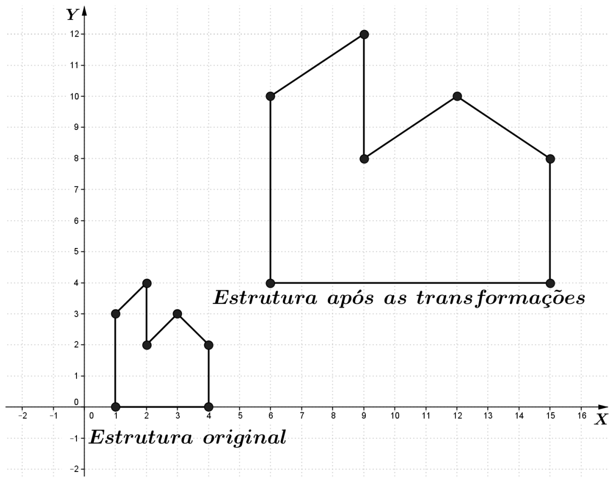
Analise o esboço e veja que a transformação gerou um losango de diagonais medindo 2 $u.m.$. Como a área do losango é dado pela metade do produto das diagonais, a área pedida é 2 $u.a.$.

3) a) Sugestão: Crie uma matriz que armazena as coordenadas dos vértices da estrutura mostrada no exercício. Determine a matriz que armazena a posição dos vértices da estrutura após a transformação de escala utilizando a equação (14). Agora, basta utilizar a equação (3) para aplicar a translação e assim determinar a matriz que armazena as coordenadas dos vértices da estrutura após as duas transformações.

Uma matriz que armazena as coordenadas dos vértices dessa estrutura após as duas transformações pode ser dado por:

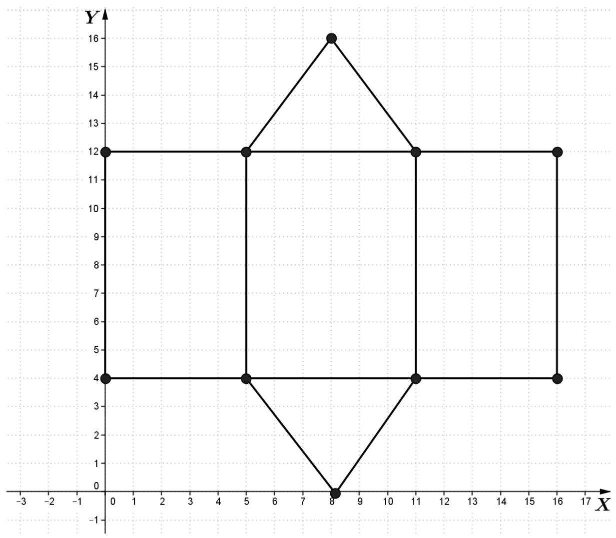
$$V = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 15 & 12 & 9 & 9 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 8 & 10 & 8 & 12 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Abaixo temos o esboço da estrutura antes e após as transformações.



4) Sugestão: Use a equação (14) com fator de escala uniforme $k = 4$ para que as dimensões dessa planificação sejam aumentadas em 300%. A matriz V' procurada é: $V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 5 & 8 & 8 & 11 & 11 & 16 & 16 \\ 4 & 12 & 4 & 12 & 0 & 16 & 4 & 12 & 4 & 12 \end{pmatrix}$.

5) O esboço da planificação é:



6) C

7) E

COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

1) Sugestão: Utilize coordenadas homogêneas para encontrar a matriz que representa a composição das translações T_1 e T_2 e conclua que essa matriz representa a translação T_3 .

$$
\begin{aligned}
[T_2 o T_1] = [T_2][T_1] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+c \\ 0 & 1 & b+d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= [T_3]
\end{aligned}
$$

2) Sugestão: Utilize coordenadas homogêneas para encontrar a matriz que representa a composição das rotações R_α e R_β e conclua que essa matriz representa a rotação $R_{\alpha+\beta}$.

$$
\begin{aligned}
[R_\beta o R_\alpha] = [R_\beta][R_\alpha] &= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha & -\cos\beta\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= [R_{\alpha+\beta}]
\end{aligned}
$$

Usamos as identidades trigonométricas: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$ e $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

3) Sugestão: Utilize coordenadas homogêneas para encontrar a matriz que representa a composição das transformações de escala E_1 e E_2 e conclua que essa matriz representa a transformação de escala E_3 .

$$
\begin{aligned}
[E_2 o E_1] = [E_2][E_1] &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac & 0 & 0 \\ 0 & bd & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= [E_3]
\end{aligned}
$$

4) a) As transformações necessárias para efetuar essa rotação são:

•Translação com deslocamento horizontal de 1 unidade para a esquerda e 2 unidades para baixo, transformação $[T_1]$.

•Rotação em torno da origem. Como a rotação é no sentido horário, o ângulo deve ser de $-\frac{2\pi}{3}$, transformação $[R]$.

•Translação com deslocamento horizontal de 1 unidade para a direita e 2 unidades para cima, transformação $[T_2]$.

A matriz em coordenadas homogêneas que representa a composição dessas transformações é: $[T_2 o R o T_1] = [T_2][R][T_1] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{6+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sugestão: Aplique a matriz que representa a composição das transformações à matriz que representa as coordenadas do ponto P em coordenadas homogêneas. As novas coordenadas do ponto P são: $\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+3\sqrt{3}}{2}\right)$.

5) A

6) B

7) Sugestão: Observe o exemplo 6.8. A matriz em coordenadas homogêneas que representa a composição das transformações sofridas pela imagem é: $[T_2 o E o R o T_1] = [T_2][E][R][T_1] =$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$