Solange Ferreira dos Santos

O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações

Jataí-Go

2019

Solange Ferreira dos Santos

O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, Polo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal de Goiás - UFG

Regional Jataí

Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas

Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional

em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof^{a}. Dr^{a}. Adriana Aparecida Molina Gomes

Jataí-Go

2019

Solange Ferreira dos Santos

O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações/ Solange Ferreira dos Santos. – Jataí-Go, 2019-

115p. : il., figs

Orientador: Profª. Drª. Adriana Aparecida Molina Gomes

Dissertação – Universidade Federal de Goiás - UFG
Regional Jataí
Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT , 2019.

1. Frações. 2. Tangram. 3. Sequência Didática. I. Profª. Drª. Adriana Aparecida Molina Gomes II. Universidade Federal de Goiás-UFG. III. Regional Jataí. IV. O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações.

Solange Ferreira dos Santos

O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações

Trabalho de Conclusão de Curso defendido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, Polo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Jataí-Go,:

Profª. Drª. Adriana Aparecida Molina Gomes
Orientador

Professor
Prof. Dr. Flávio Gomes de Moraes

Professor
Profª. Drª. Viviane Barros Maciel

Jataí-Go
2019

Dedico este trabalho à minha família, em especial à meu esposo Ademir Amaro, minha filha amada Samanta, minha super mãe Luzia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me dar força e persistência para cursar este mestrado.

Agradeço a meu esposo Ademir Amaro por me apoiar, por estar sempre ao meu lado, não me deixando desistir. Obrigada meu amor, te amo hoje e sempre.

Agradeço a minha filha Samanta pelo lindo sorriso todas as manhãs.

Agradeço a minha família em especial a minha querida mãe Luzia e a minha irmã Angela que cuidaram da minha filha, ainda bebê, para que eu pudesse concluir este mestrado.

Agradeço a todos os professores incríveis que tive a oportunidade de conhecer nestes anos de PROFMAT. Em especial aos professores doutores Gecirlei Francisco da Silva e Flávio Gomes de Moraes que muito contribuíram para essa dissertação.

Agradeço a minha Orientadora Profª. Adriana, por ter prontamente aceitado me orientar, pela paciência, dedicação e apoio.

Agradeço ao PROFMAT pela oportunidade de cursar este mestrado.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro durante o período de estudo.

Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

O presente trabalho surgiu a partir de questionamentos pessoais sobre a dificuldade no ensino e aprendizagem de Matemática, em especial, sobre frações e como o uso do material manipulativo, Tangram, poderia contribuir para a superação de tais obstáculos. Neste sentido o objetivo principal deste é apresentar uma sequência didática voltada para o ensino e a aprendizagem de frações tendo como foco o Tangram como material manipulativo. Nesta sequência procurou estabelecer relações entre as peças do quebra-cabeça e o conceito de fração, equivalência, comparação e as operações. Procurou-se conhecer um pouco da história das frações no antigo Egito e as necessidades da sociedade da época que levaram a construção desse conceito. Realizou-se também um estudo teórico sobre a construção do Conjunto dos números racionais sobre duas perspectivas, a geométrica e a algébrica, no intuito de fornecer ao professor um embasamento teórico para consolidar o conhecimento sobre frações e suas operações. Pesquisou-se ainda sobre as dificuldades de ensino aprendizagem em Matemática e em fração e sobre a importância do uso do material manipulativo para uma aprendizagem significativa, visto que o uso do material manipulável torna as aulas mais dinâmica e motivadora, pois o aluno vivencia as situações Matemáticas de maneira ativa e palpável. Sendo assim, espera-se que este trabalho possa contribuir de forma positiva tanto para professores quanto para discentes, que tenham como foco principal diminuir as lacunas que dificultam a aprendizagem sobre frações e suas operações.

Palavras-chave: Sequência Didática. Tangram. Frações. Material Manipulativo. Ensino-aprendizagem.

Abstract

The present work came up from personal questions about the difficulty in teaching and learning mathematics, especially about fractions and how the use of manipulative material, Tangram, could contribute to the overcoming of such obstacles. In this sense of duy the main objective of this is to show a didactic sequence focused on the teaching and learning of fractions focusing on Tangram as manipulative material. In this sequence, wanted to establish relationships between the puzzle pieces and the concept of fraction, equivalence, comparison, and operations. We wanted to know a little about the history of fractions in ancient Egypt and the needs of the society of the time that led to the construction of this concept. A theoretical study was also carried out on the construction of the set of rational numbers from two perspectives, the geometric and the algebra, in order to provide the teacher with a theoretical foundation to consolidate the knowledge about fractions and their operations. It was also researched about the difficulties of teaching learning in mathematics and in fraction and about the importance of using manipulative material for meaningful learning, since the use of manipulative material makes the lessons more dynamic and motivating, because the student experiences the situations. Mathematics actively and tangibly. So, it is expected that this work can contribute positively to both teachers and students, whose main focus is to reduce the gaps that make learning about fractions and their operations difficult.

Keywords: Didatic sequence. Tangram. Fractions. Manipulative Material. Teaching-learning.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DAEB	Diretoria de Avaliação da Educação Básica
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica

Lista de símbolos

α	Letra grega alfa
β	Letra grega beta
γ	Letra grega gama
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais

Sumário

1 Introdução

A escolha do tema, “O uso do Tangram como proposta no ensino de frações”, possui como intenção despertar o interesse do aluno pelas atividades que terão como ponto de partida as figuras planas formadas com este quebra-cabeça.

Este trabalho visa apresentar a utilização do material manipulável, Tangram, como uma opção no processo ensino-aprendizagem de frações. Portanto, a questão principal que norteia o trabalho é: Quais as contribuições do material manipulável, em especial o Tangram, para o ensino de frações?

De acordo com as descrições dos seis níveis de proficiência da escala de Matemática do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)[1] 2015, alunos que estão no nível 3 de proficiência em Matemática, demonstram ter “capacidade de lidar com porcentagens, frações e números decimais e de trabalhar com relações de proporção.” (OCDE, 2016, p. 151). No entanto, segundo os resultados do PISA 2015, divulgado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), $87,43\%$ dos alunos do Brasil se encontram abaixo do nível 3 de proficiência. Os resultados divulgados apontam também que, no “Brasil $70,3\%$ dos estudantes estão abaixo do nível 2 em Matemática, patamar que a OCDE estabelece como necessário para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania.” (OCDE, 2016, p. 171)

Desta forma, considerando as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos, em especial no conteúdo sobre fração, buscou-se utilizar adaptar e/ou criar uma sequência didática com atividades que pudessem facilitar a compreensão de seus conceitos através da manipulação do Tangram.

O intuito principal é realizar um estudo teórico acerca dos conceitos de frações, bem como verificar as potencialidades do uso do Tangram para o ensino deste conceito.

Diante o exposto, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Realizar um estudo teórico sobre frações, em especial a construção do Conjunto dos números racionais;

[1] A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) lançou o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) em 1997. O PISA avalia o que alunos de 15 anos, no final da educação obrigatória, adquiriram em relação a conhecimentos e habilidades essenciais para a completa participação na sociedade moderna. A avaliação, trienal, foca três áreas cognitivas – ciências, leitura e Matemática –, além da contextualização dos resultados por meio de questionários aplicados aos estudantes, diretores de escolas, professores e pais. [...] O PISA faz parte de um conjunto de avaliações e exames nacionais e internacionais coordenados pela Diretoria de Avaliação da Educação Básica (DAEB), do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). (OCDE, 2016, p. 18)

- Analisar como o uso do Tangram pode contribuir para a aprendizagem do conceito de fração;
- Elaborar uma sequência didática com atividades usando o Tangram para ensinar frações.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para a pesquisa e construção de solução do problema ensino-aprendizagem de frações e, ao mesmo tempo ser útil para os professores, enquanto consulta para o trabalho em sala de aula. E que as atividades propostas possam fornecer subsídios ao professor em seu trabalho pedagógico diante de seus alunos, para: conhecer algumas das histórias sobre a origem do Tangram e as regras do quebra-cabeça; identificar cada peça do Tangram e saber nomeá-las; construir, a partir do quadrado, o Tangram por meio de dobraduras; entender o conceito de fração relacionando ao significado parte de um todo; compreender a noção de equivalência entre frações; comparar frações; resolver situações problemas que envolvam as operações com números fracionários.

O trabalho foi dividido em duas etapas: a pesquisa bibliográfica e a elaboração de uma sequência didática. Por ser uma pesquisa qualitativa, de caráter bibliográfico buscamos evidenciar através do levantamento de dados em livros, dissertações, teses e artigos científicos que possuem como foco o material manipulativo no ensino de frações e quais as contribuições deste, em especial o Tangram, como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem de frações, ou seja, primeiramente foi feita uma revisão bibliográfica acerca de frações. Em seguida foi proposta uma sequência didática cujas atividades têm como ponto de partida o Tangram. Portanto, com base nas pesquisas bibliográficas as atividades foram elaboradas e recriadas pela pesquisadora.

Esse trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentaremos um breve relato da história sobre os números e as frações no antigo Egito e a necessidade que levou os egípcios para a construção desse conceito.

No terceiro capítulo trataremos da construção geométrica e algébrica do conjunto dos números racionais, que objetiva dar aos professores um maior embasamento teórico da construção do números racionais.

No capítulo 4 apresentaremos a fundamentação teórica das principais dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem em Matemática e em frações, assim como, alguns dos significados das frações. Afinal a aprendizagem do conceito de número fracionário só acontecerá, de forma efetiva, mediante o desenvolvimento dos mesmos.

No capítulo 5 trataremos da importância dos materiais manipulativos na aprendizagem, em especial será apontado alguns aspectos do Tangram, como possíveis lendas sobre a sua criação e a importância deste quebra-cabeça como material didático. Por fim, apresentaremos a proposta da sequência didática, isto é, as atividades sugeridas

No capítulo 6 teceremos as considerações finais.

2 Frações: um breve relato da história sobre os números e as frações no antigo Egito

As primeiras evidências de registro da escrita e da Matemática são do período sumério, por volta do quarto milênio antes da Era Comum (a.E.C.)[1] na região da Baixa Mesopotâmia, onde atualmente se localiza o Iraque. Segundo Roque e Pitombeira (2012, p. 2) as primeiras formas de escrita estão associadas à necessidade de se registrar quantidades e não foi somente o controle de rebanhos a maior motivação para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência, sobretudo à organização da sociedade.

Para Druck, S. (2004, p. 63): "Independentemente da finalidade com que a Matemática surgiu, Heródoto, Platão e Aristóteles localizam sua origem no Egito, embora todos concordem com a afirmação de que a prática Matemática se deu antes da civilização egípcia."

Os primeiros relatos da Matemática egípcia são dos tempos dos Faraós e das pirâmides, eram textos matemáticos escritos em papiros. De acordo com D'Ambrosio, U.:

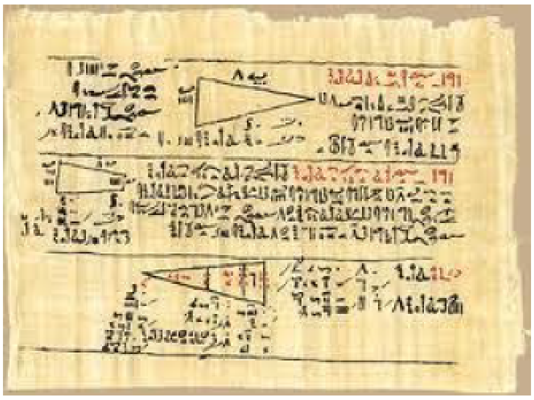
> A Matemática, assim como todo o conhecimento egípcio, chegou a nós por meio dos escritos em papirus, mediante hieróglifos. Desses documentos com interesse matemático os mais conhecidos são de *ca* (abreviação de *circa*, usada quando não temos datas precisas) 2.000 a.C., o Papiro Rhind, no Museu Britânico, e o Papiro de Moscou. Também são importantes os relatos de viajantes, dentre os quais se destaca o grego Heródoto (*ca* 480-425 a.C), considerado o "pai da história". (D'AMBROSIO, U., 2005, p. 34-35).

O mais extenso dos papiros de natureza Matemática é o Papiro de Rhind. Esse rolo de papiro possui cerca de 30 cm de altura por 5 m de comprimento e está distribuído em 14 folhas.

O Papiro de Rhind, figura 1, nome dado em homenagem ao escocês Alexander Henry Rhind que o adquiriu, por volta de 1.858 a.E.C, na cidade egípcia de Luxor, situada às margens do rio Nilo, foi encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em Tebas.

[1] De acordo com Roque (2012, p. 24), "atualmente, tem-se usado "antes da Era Comum" no lugar de "antes de Cristo" com o fim de neutralizar conotações religiosas."

Figura 1 – *Papiro de Rhind*



Fonte: Tópicos de História da Matemática (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 6)

O Papiro de Rhind foi escrito por volta de 1.650 a.E.C., por solicitação do rei Hyksos que reinou no Egito em algum período entre 1.788 e 1.580 a.E.C.. O Papiro de Rhind foi escrito pelo escriba egípcio Ahmes, ou Ah-mose (sendo por isso também conhecido como Papiro de Ahmes) que relata que o copiou de outro manuscrito ainda mais antigo do Reino do Meio produzido em alguma época entre 2.000 a 1.800 a.E.C.. Portanto, o documento mais antigo da Matemática tem cerca de 4.000 anos, sendo Ahmes a primeira figura da Matemática registrada na História.

De acordo com Druck, S. (2004, p. 63), o Papiro de Rhind contém uma coleção de problemas, onde Ahmes detalha as soluções, sem formalismo ou demonstrações, de problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica.

A história mostra ainda, através de descobertas arqueológicas, que desde a antiguidade que a ideia de fração e sua utilização faz parte do cotidiano do homem. Segundo Boyer (1996, p. 9) na Idade da Pedra os homens "não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações."

A civilização egípcia nasceu cerca de 5.000 anos atrás, cuja base de sustentação era a agricultura nas margens do rio Nilo, que se fertilizavam periodicamente. Devido às enchentes periódicas do rio que levavam as marcações das terras à sua margem, os proprietários das terras tinham que remarcá-las, uma vez que o tributo pago para o Estado era proporcional à área cultivada. Os egípcios utilizavam uma espécie de "corda fracionária". Desta forma, usavam-se as cordas e registravam-se quantas vezes essa unidade de medida estava contida nos lados do terreno, mas na maioria das vezes quando tentavam pegar uma unidade padrão para medir, detectavam que por diversas vezes que o resultado obtido não cabia um número inteiro de vezes no lado do terreno, assim sentiram a necessidade de fracionar a unidade de medida. O que fez surgir um novo conceito de número, em especial, o número fracionário.

Segundo Domingues (1991, p. 179): "Sempre que a divisão de um inteiro por outro não era exata, os egípcios antigos, já por volta do ano de 2.000 a.C., usavam frações para exprimir o resultado. E usavam também frações para operar com seu sistema de pesos e medidas."

Portanto, os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de repartir a unidade de medida de forma mais precisa. Ou seja, a prática da Matemática no Egito estava associada sobre tudo a necessidades administrativas, em decorrência de problemas do dia a dia que envolviam medidas, em particular área e volume.

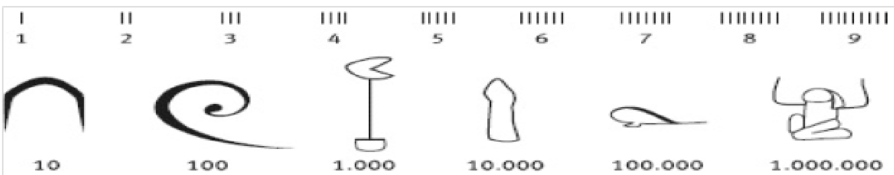
2.1 Representação dos números e frações no antigo Egito

Por volta do ano 3.000 a.E.C., o sistema decimal egípcio já estava desenvolvido. De acordo com Roque e Pitombeira:

> O número 1 era representado por uma barra vertical e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, os números são múltiplos de dez e, por essa razão, dizemos que o sistema é decimal. O número *dez* é uma alça; *cem*, uma espiral; *mil*, a flor de lótus; *dez mil*, um dedo; *cem mil*, um sapo e *um milhão*, um deus com as mãos levantadas. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 25).

Neste sentido, os autores apresentam a figura 2.

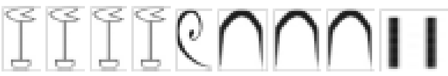
Figura 2 – *Números Egípcios*



Fonte: Tópicos de História da Matemática (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 25)

O sistema de numeração dos egípcios era aditivo, ou seja, os números eram obtidos pela soma de todos os números representados pelos símbolos. Assim, por exemplo, para escrever 4132 teríamos a situação como mostra a figura 3:

Figura 3 – *Representação egípcia do número 4132*



Fonte: Exemplo adaptado do livro Tópicos de História da Matemática (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 26)

Ou seja: $1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = 4132$

Quanto a representação dos números fracionários os egípcios utilizavam um conceito equivalente as frações unitárias da forma $\frac{1}{n}$, sendo $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ as únicas frações a serem consideradas nos cálculos, cujos numeradores eram diferentes de 1.

Para Domingues:

> Por razões difíceis de explicar, com exceção das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, às vezes, os egípcios usavam apenas *frações unitárias*, ou seja, frações cujo numerador é 1. Por exemplo, no problema 24 do papiro Rhind (cerca de 1.700 a.C) no qual o escriba pede que se efetue a divisão de 19 por 8, a resposta é dada, usando a nossa notação, por: $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. (DOMINGUES, 1991, p. 179).

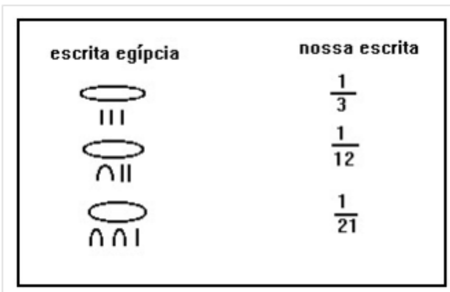
Além disso, os símbolos utilizados para representar frações eram diferentes dos usados para os números inteiros. Segundo Ifrah:

> Certas frações, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, eram representadas por sinais especiais. Para $\frac{1}{2}$ empregava-se simplesmente o hieróglifo seguinte (que era lido GeS e que exprimia a ideia de "metade"): ou . Para $\frac{2}{3}$ escrevia-se: ou ou (literalmente: "as duas partes") e para $\frac{3}{4}$: (isto é, "as três partes"). (IFRAH, 1997, p. 349).

Ainda de acordo com Ifrah (1997, p. 348), os egípcios para representar as frações usavam, de modo geral, o hieróglifo da boca (sinal que era lido *éR* que tinha o sentido de "parte"), colocando-o em cima do número que servia de denominador.

Portanto, as demais frações eram representadas escrevendo-se os números inteiros com uma elipse em cima, como mostra a figura 4 a seguir:

Figura 4 – *Números Fracionários 1*

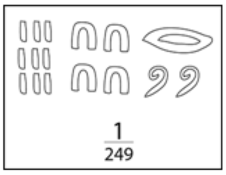


Fonte: Blog do Prof. Ines Reynaud, cuja a matéria é intitulada "Os egípcios e as frações".[2]

Quando o denominador era extenso, não sendo possível escrevê-los sobre o sinal da "boca", colocavam o excedente na sequência. Por exemplo, como a figura 5 a seguir:

[2] Endereço eletrônico do Blog do Prof. Ines Reynaud: http://profinesreynaud.blogspot.com/2010/08/os-egipcios-e-as-fracoes.html. Acesso em 12 de fev. 2019

Figura 5 – *Números Fracionários 2*



Fonte: História Universal dos Algarismos (IFRAH, 1997, p. 349)

De acordo com Roque e Pitombeira:

> O símbolo oval colocado acima do número não possui, o mesmo sentido daquilo que chamamos hoje de "numerador". Nosso numerador indica quantas partes estamos tomando de uma subdivisão em um dado número de partes. Na designação egípcia, o símbolo oval, que exprime a palavra "partes"não possui um sentido cardinal, mas ordinal. Ou seja, ele indica que, em uma distribuição em n partes iguais, tomamos a n-ésima parte, aquela que conclui a subdivisão em n partes. É como se estivéssemos distribuindo algo por n pessoas e $\frac{1}{n}$ é quanto a última pessoa irá ganhar. Logo, é um certo abuso de linguagem dizer que, na representação egípcia, as frações possuem numerador 1. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 26-27).

Atualmente as frações que possuem o numerador 1 são chamadas de **frações egípcias** ou **frações unitárias**. O uso das frações unitárias se estenderam por muitos séculos e não ficou restrito apenas ao antigo Egito. De acordo com Domingues (1991, p. 179), Fibonacci, em sua obra mais famosa Liber abaci (Livro do ábaco), escrito no século XIII d.C. (cap. II, item 11), ele não só as usava como também fornecia tabelas para converter frações comuns em frações unitárias.

Segundo Druck, S. (2004, p. 63-64), o Papiro de Rhind, entre outros problemas, contém o registro de uma tabela com as decomposições de frações do tipo $\frac{2}{p}$ (p, ímpar) em frações unitárias para todos os números ímpares de 5 a 101, ou seja, para as frações $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, ..., \frac{2}{101}$. Por exemplo: $\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$ e $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

No Papiro de Rhind aparece ainda uma tabela que fornece a decomposição das frações do tipo $\frac{n}{10}$, com n de 1 a 9. Por exemplo: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ e $\frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

As frações da forma $\frac{m}{n}$, com $m > 1$ e $m < n$, podem ser decompostas em soma de frações unitárias distintas, ou seja $\frac{m}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ...\frac{1}{n_k}$, com $n_1, n_2, ..., n_k$ naturais distintos. Para expressar, por exemplo, $\frac{7}{11}$ em uma soma de frações egípcias, ou seja, em uma soma de frações unitárias, basta seguir os seguintes passos: Adaptado de (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 28-29).

> 1. Inverta $\frac{7}{11}$, então $\frac{11}{7}$.
>
> 2. Tome o maior inteiro mais próximo da fração obtida como ($1 < \frac{11}{7} < 2$, o maior inteiro é 2). Logo, $\frac{1}{2} < \frac{7}{11}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{7}{11}$.

3. Subtraia essa fração unitária da fração dada, ou seja, $\frac{7}{11} - \frac{1}{2} = \frac{3}{22}$. Logo, $\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{3}{22}$

Repita o algoritmo para $\frac{3}{22}$.

1'. Inverta $\frac{3}{22}$, então $\frac{22}{3}$.

2'. Tome o maior inteiro mais próximo da fração obtida como ($7 < \frac{22}{3} < 8$, o maior inteiro é 8). Logo, $\frac{1}{8} < \frac{3}{22}$ é a maior fração com numerador 1 menor que $\frac{3}{22}$.

3'. Subtraia essa fração unitária da fração dada, ou seja, $\frac{3}{22} - \frac{1}{8} = \frac{2}{176} = \frac{1}{88}$. Logo, $\frac{3}{22} = \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$.

Portanto, $\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$.

Roque (2012, p. 59), aponta que uma vantagem do sistema egípcio em relação ao nosso é a facilidade para se comparar frações. Uma vez que cada uma das frações é dada por uma soma de frações com numerador 1, na representação egípcia, uma inspeção direta permite dizer qual a maior das duas frações. Enquanto, se quisermos saber, em nossa representação, qual a maior de duas frações teremos de igualar os denominadores.

A autora destaca ainda, que em trabalhos renomados, como os de O. Neugebauer, nos anos 1930 e 1940, e de B.L. Van der Waerden, nas décadas de 1950 a 1980 que de acordo com esses historiadores que, "a aritmética baseada em frações unitárias (com numerador 1) teria tido uma influência negativa no desenvolvimento da Matemática dos egípcios, impedindo-os de evoluir em direção a resultados mais avançados [...]". (ROQUE, 2012, p. 24).

Lopes (2008, p. 13-15), no entanto, destaca que o trabalho com frações egípcias são inspiradoras, singulares e ricas de significados, além de contribuírem para que os alunos desenvolvam habilidades de cálculo mental, explorem conceitos e ideias chaves como:

> frações equivalentes, comparação, adição e subtração simples. Contribui para que sejam introduzidas ideias importantes como aproximação, arredondamento, limites e ainda que se possam explorar distintas representações, é uma boa oportunidade para se explorar a calculadora como ferramenta de investigação. (LOPES, 2008, p. 15).

O fato é que apesar do uso prático dessas frações tenha ficado no passado, as frações egípcias continuam sendo objeto de estudo em Teoria dos Números e em Matemática recreativa[3]. Existindo ainda, problemas em aberto sobre frações egípcias. Como o famoso problema dos matemáticos P. Erdös e E. Straus que conjecturaram, em 1948, que toda

[3] O professor norte americano Singmaster (1992 apud RIBEIRO, 2018, 10-15) definiu Matemática Recreativa como sendo a , "[...] Matemática que é divertida, popular e com uso pedagógico". Portanto, pode-se entender como o conjunto de jogos, problemas, métodos, desafios, competições e ideias matemáticas cotidianas. A Matemática Recreativa é muito ampla no campo da Matemática, servindo de ponte para a descoberta de conceitos muito importantes como, por exemplo, nos problemas populares que deram origem à Teoria das Probabilidades e à Teoria dos Grafos. Os principais Autores e Divulgadores da Matemática Recreativa são: Martin Gardner, Lewis Carrol, Èdouard Lucas, Sam Lloyd, Henry E. Dudeney. No Brasil os trabalhos de Ian Stewart e Malba Tahan são os mais divulgados.

fração do tipo $\frac{4}{n}$, com $n \geq 5$, pode ser escrita como a soma de três frações egípcias. Ou seja, eles conjecturaram que a equação 2.1

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \tag{2.1}$$

sempre tem soluções naturais positivas x, y, z, para todo natural $n \geq 5$. Com o auxílio de computadores, foi demonstrado que a conjectura de Erdös-Straus é verdadeira para todo natural n tal que $5 \leq n \leq 10^{14}$. Porém, até hoje ninguém foi capaz de demonstrar o caso geral ou refutar a conjectura, apresentando um valor natural $n \geq 5$ para o qual a equação $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ não tenha soluções naturais positivas x, y, z.

Outro problema relacionado a frações unitárias formulado em 1956 e ainda não resolvido é: Seja $\frac{m}{n}$ com $m < n$, um racional tal que n é ímpar. Escreva então $\frac{m}{n}$ como soma de frações unitárias distintas cujos denominadores sejam todos ímpares.

Desta forma, percebemos que a partir de problemas, a Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver. E apesar do cálculo com frações ter dado à Matemática egípcia um caráter inconveniente e pesado, a maneira de operar com as frações unitárias em seu aspecto mais básico e principalmente usual, por meio de tabelas apropriadas e métodos engenhosos, foi praticada durante muitos anos, sobrevivendo até a Idade Média.

Portanto, perpassou séculos desde as frações unitárias dos egípcios até o nosso sistema de numeração decimal posicional atual e, através da contribuição de vários povos para sua evolução, o conceito de fração e a evolução de sua representação numérica, levou-se o que seria a expansão do Conjunto dos Números Naturais ao Conjunto dos Números Racionais.

Sendo assim, é fundamental ressaltarmos a importância que os egípcios tiveram para o desenvolvimento da humanidade em diversas áreas, tais como medicina, agricultura, arquitetura e em especial para a Matemática. Portanto, a Matemática é uma ciência antiga que surgiu das necessidades básicas diárias de resolver problemas, em particular problemas relacionados à quantificação de objetos e medidas e os egípcios contribuíram muito para as diversas áreas da Matemática, tais como: na Álgebra (sistema de numeração; frações unitárias; equação linear simples; progressões aritméticas e geométricas), na Geometria (área de um círculo; área de triângulos e retângulos; volume do cilindro reto e do tronco de pirâmide de bases quadradas e área de um triângulo qualquer) e na Matemática Aplicada (calendário solar). Além disso, no Papiro de Rhind, um dos documentos matemáticos da antiguidade mais conhecidos, são encontrados problemas criativos e lúdicos, envolvendo cálculo de áreas e volume, que são utilizados por alguns pesquisadores da área da Matemática Recreativa.

3 O Conjunto dos números racionais

Com o objetivo de darmos um maior embasamento teórico para os professores, bem como consolidar o conhecimento sobre frações e suas propriedades, neste capítulo será formalizado a construção do Conjunto dos números racionais (representados por $\mathbb{Q}$).

A construção dos números racionais será feita sobre duas perspectivas: geométrica a partir do conceito de medida de segmentos comensuráveis com a unidade e sobre a perspectiva algébrica usando como pré-requisito o conhecimento do Conjunto dos números inteiros (representado por $\mathbb{Z}$) suas definições e propriedades algébricas.

Para as definições, resultados e demonstrações, será utilizado como referência: Caraça (1951), Domingues (1991), Santos (2013), Sales (2016) e Custódio (2017).

3.1 Construção geométrica dos números racionais

Podemos perceber que no decorrer do tempo, houve à necessidade de novos números, devido ao aparecimento de problemas associados a medições não exatas. Logo, a medida é um procedimento que permite reduzir grandezas a números, isto é:

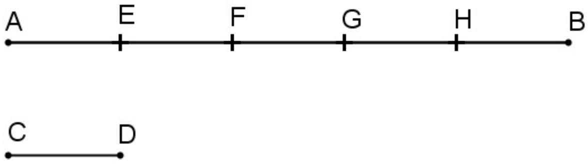
> Para medir o primeiro passo é escolher uma unidade de medida. Duas medidas da mesma natureza devem possuir uma unidade de medida comum. Cada grandeza é identificada, assim, ao número inteiro de unidades de medida que a compõem. A medida torna possível, portanto, a correspondência entre qualquer grandeza e um número natural, ou uma relação entre números naturais. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 59).

Portanto, o processo de medida consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie, por exemplo, dois comprimentos, dois volumes, entre outros. E para medir é preciso, na maioria das vezes, subdividir uma das grandezas em um número finito de partes (unidade de medida), de modo que essa unidade de medida caiba um número inteiro de vezes em ambas as grandezas a serem comparadas. Assim, o problema geral da comparação entre segmentos seria, por exemplo, o seguinte: Sejam dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tais que $\overline{AB}$ é maior do que $\overline{CD}$. É possível medir $\overline{AB}$, utilizando $\overline{CD}$ como unidade de medida?

Suponha que o comprimento do segmento $\overline{CD}$ é a unidade u (chamado **segmento unitário**, cuja medida por definição é igual a 1) e que se quer medir o segmento $\overline{AB}$ adotando u como unidade. "A medida do segmento unitário u pode diferir de pessoa para pessoa, dependendo de qual segmento escolheu como medida unitária, mas uma vez escolhido o segmento unitário, sua medida deve ser mantida."(SANTOS, A. C. G., 2013, p. 7).

Ás vezes, é possível que $\overline{CD}$ caiba um número inteiro de vezes no $\overline{AB}$. Neste caso, a medida $\overline{AB} = n\overline{CD}$, sendo n um número inteiro e positivo. Logo, o processo de medida conduziria a números inteiros. Por exemplo: Dado um segmento qualquer $\overline{AB}$. Utilizando o segmento unitário u, o qual será chamado de $\overline{CD}$, pode-se verificar que o segmento unitário $u = \overline{CD}$ cabe 5 vezes no segmento $\overline{AB}$. Exemplo adaptado da dissertação: Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio. (SANTOS, A. C. G., 2013, p. 8).

Figura 6 – *Medida dos segmentos AB e CD*

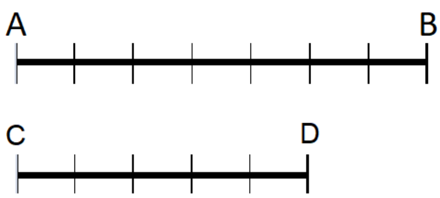


Fonte: Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio. (SANTOS, A. C. G., 2013, p. 8).

Observe na figura 6, a representação geométrica dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD} = u$. Note que os 4 pontos interiores E, F, G e H dividiram o segmento $\overline{AB}$ em 5 segmentos sobrepostos e congruentes. Logo pode-se concluir que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem um segmento de medida comum aos dois segmentos, que é o segmento de medida unitária u. Portanto, como $\overline{AB} = 5u$ e $u = \overline{CD}$, então, $\overline{AB} = 5\overline{CD}$.

Mas, frequentemente, o segmento $\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes no segmento $\overline{AB}$. Desta forma, deve-se procurar uma unidade de medida menor, ou seja, é preciso subdividir o segmento $\overline{CD}$ num número finito de partes iguais e menores. O processo de subdivisão termina ao encontrar um segmento menor cuja medida é v e que cabe um número inteiro de vezes nos segmentos $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$. Por exemplo: Seja os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Como $\overline{CD}$ não cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$. Escolhendo v como unidade de medida, temos as seguintes igualdades: $\overline{AB} = 7v$ e $\overline{CD} = u = 5v$. Logo, a comparação de $\overline{AB}$ com $\overline{CD}$ nos fornece a razão $7 \div 5$, isto é, $\overline{AB} = \frac{7}{5}\overline{CD}$, conforme a figura 7.

Figura 7 – *Segmentos AB e CD*

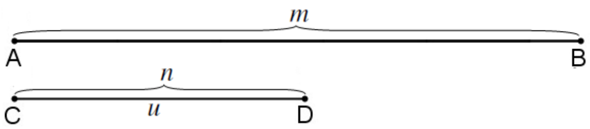


Fonte: Exemplo adaptado do livro Tópicos de História da Matemática (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 60)

Roque e Pitombeira (2012, p. 60), entende que "é desse tipo de comparação que surgem as medidas expressas por relações entre números inteiros, que chamamos hoje de "racionais"(justamente por serem associados a uma razão)."

Definição 3.1.0.1. *Sejam, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, figura 8, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u - $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ contém n vezes o segmento u.*

Figura 8 – *Segmentos AB e CD*



Fonte: Exemplo adaptado do livro Conceitos fundamentais da Matemática. (CARAÇA, 1951, p. 35)

*Diz-se, por **definição**, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o **número** $\frac{m}{n}$, e escreve-se*

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{CD}$$

quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo); se m for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com o número inteiro que é o quociente da divisão; se m não for divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ diz-se fracionário. *(CARAÇA, 1951, p.35-36).*

O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, racional *– ao número m chama-se* numerador *e ao número n* denominador.

Assim, um segmento $\overline{AB}$ é dito *comensurável* com a unidade dada pelo segmento $\overline{CD}$, quando existe uma subunidade de medida que cabe um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e em $\overline{CD}$. Caso contrário, se a razão entre as grandezas não puder ser expressa por um número racional, dizemos que tais grandezas são *incomensuráveis*.

3.2 Representação geométrica das operações com números racionais

3.2.1 Adição e Subtração

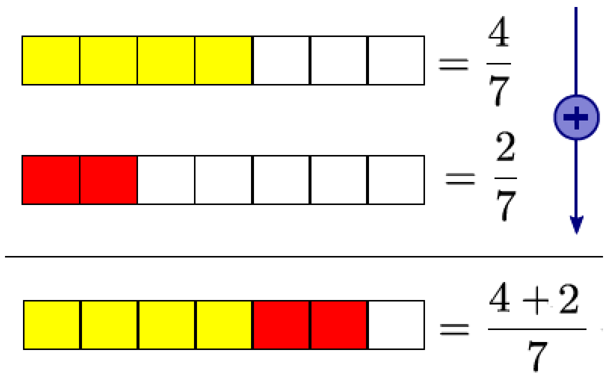
A adição está associada a dois tipos básicos de ideia: juntar (ou reunir) ou então acrescentar, enquanto a subtração corresponde à ideia de: retirar, comparar ou completar. É muito importante que os alunos vivenciem experiências envolvendo todas estas ideias.

Segundo Druck:

> Essas operações, por terem uso em situações similares, seja envolvendo números naturais ou fracionários, não costumam apresentar uma grande dificuldade no tocante à atribuição de significados aos seus conceitos pelos alunos. Mesmo sobre pedaços (de tecidos, pizzas ou o que for) é fácil conceber que eles sejam juntados ou acrescentados uns ao outros. Também é plausível retirar-se um pedaço de outro ou querer saber "que pedaço faltaria para completar outro", ou ainda, perguntar sobre o tamanho do pedacinho que corresponde à diferença entre dois outros (e, portanto comparar). Ou seja, todas as ações correspondentes às ideias da adição ou subtração fazem sentido também no universo das frações. (DRUCK, I. F., 2006, p. 8).

A autora destaca ainda que um "aluno que tenha incorporado o significado do denominador, não terá dúvidas sobre o resultado da adição ou subtração de frações com um mesmo denominador." (DRUCK, I. F., 2006, p. 8). Por exemplo: Se a quatro sétimos junto mais dois sétimos, dados que os pedaços são todos do mesmo tamanho, então temos seis sétimos. O caso da subtração de frações com o mesmo denominador é análogo. Esta situação pode ser assim graficamente representada pela figura 9.

Figura 9 – *Adição de frações com o mesmo denominador*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP[1]

Observe que cada retângulo, da figura 9, está dividida em sete partes iguais, logo cada uma dessas partes representa um sétimo do total, isto é, $\frac{1}{7}$. No primeiro retângulo, em amarelo, estão sendo consideradas quatro das sete partes (representado assim, pelo número fracionário $\frac{4}{7}$); no segundo retângulo, em vermelho, estão sendo consideradas duas das sete partes (representado desta forma, pelo número fracionário $\frac{2}{7}$). Temos assim, que a adição de 4 partes e 2 partes dá nos um total de 6 partes, cada uma representando $\frac{1}{7}$ do total. Portanto, $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4+2}{7} = \frac{6}{7}$

De maneira geral, temos que a adição de frações de mesmo denominador é dada por: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

A subtração de frações de mesmo denominador segue o mesmo princípio: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

[1] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

A dificuldade com as operações de adição e subtração de frações não é conceitual, mas sim técnica. Assim, para o caso em que os denominadores das frações são diferentes é um tanto mais complexa, isto é, os pedaços que as frações representam não são de mesma medida. Portanto, para que o aluno seja capaz de desenvolver estratégias adequadas para resolver problemas que envolvam tais operações é importante que tenha domínio de equivalência entre frações. Exemplo adaptado de Druck, I. F. (2006, p. 9).

O bolo de João e Mário. Mamãe fez um bolo. João comeu $\frac{3}{7}$ e Mário comeu $\frac{2}{5}$ do mesmo bolo. Quem comeu mais bolo?

A partir desses dados pode-se formular as seguintes perguntas, entre outras:

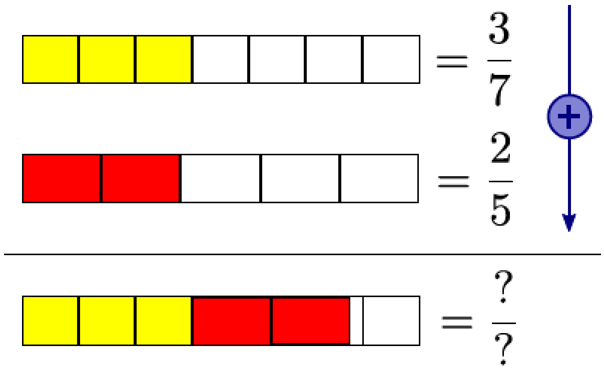
a) Quanto do bolo Mário e João comeram juntos?

b) Quanto Mário comeu a mais do que João?

Como fazer para saber que fração de bolo os dois comeram juntos?

Examinando, graficamente, em retângulos, as possíveis fatias que cada um comeu, tem-se:

Figura 10 – *Adição de frações com denominadores diferentes*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP[2]

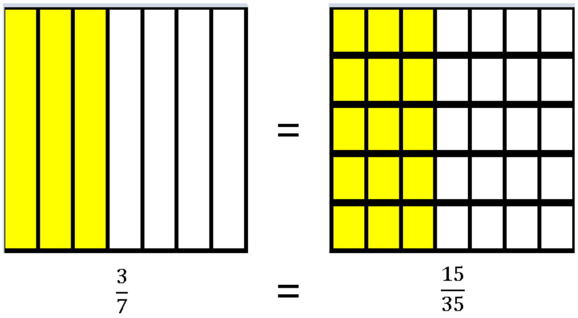
Observando a figura 10 acima, é possível notar que o primeiro retângulo, está dividido em sete partes iguais. Destas sete partes, tem-se que a parte pintada em amarelo representa $\frac{3}{7}$ do total. O segundo retângulo (que é idêntico ao primeiro) está dividido em cinco partes iguais, sendo que a parte pintada em vermelho representa $\frac{2}{5}$ do total. Perceba que, nesse caso, não é possível “encaixar"perfeitamente uma parte de tamanho igual a $\frac{1}{5}$ do retângulo em uma parte de tamanho igual a $\frac{1}{7}$. Diferente do exemplo dado inicialmente (adição de frações com o mesmo denominador), no qual todas as partes menores do retângulo (no caso, $\frac{1}{7}$), representavam uma mesma fração dos retângulos lá considerados. Como proceder, então, no caso de adição (ou subtração) com denominadores diferentes? Diante disso, deve-se recorrer à equivalência entre frações.

[2] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

Uma vez que a soma de frações com denominadores iguais já é conhecida, basta então usar essa ideia para calcular $\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$. Para isso, é necessário representar as frações $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{5}$ usando um denominador comum. Geometricamente, pode-se ter a seguinte interpretação:

1. Redivida as fatias de Mário em sete pedaços, isto é, considere um quadrado dividido em sete partes iguais, por exemplo, por seis retas verticais, a parte em amarelo representa a fração $\frac{3}{7}$. Com o auxílio de quatro retas horizontais, por exemplo, se subdivide o quadrado em 35 partes iguais, ou seja, $\frac{3}{7}=\frac{3\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{15}{35}$. Assim, das 35 partes em que o quadrado ficou dividido, 15 serão amarelas, conforme mostra a figura 11.

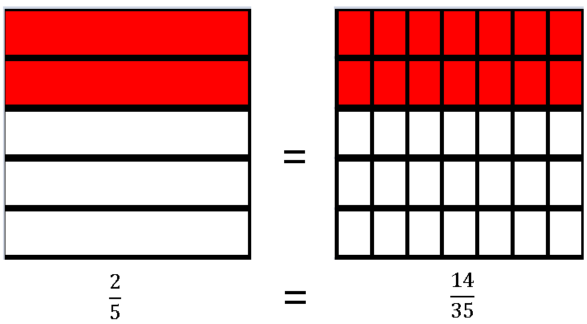
Figura 11 – *Fatias comidas por Mário*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP[3]

2. Do mesmo modo, dividindo as fatias de João em cinco pedaços iguais, isto é, dividindo um quadrado idêntico ao anterior em cinco partes iguais, por exemplo, com o auxílio de quatro retas horizontais, a parte vermelha representa a fração $\frac{2}{5}$. Utilizando, por exemplo, seis retas verticais se subdivide o quadrado em 35 partes iguais, isto é, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{14}{35}$. Desta forma, das 35 partes em que o quadrado ficou dividido, 14 serão vermelhas. Como pode ser observado na figura 12.

Figura 12 – *Fatias comidas por João*



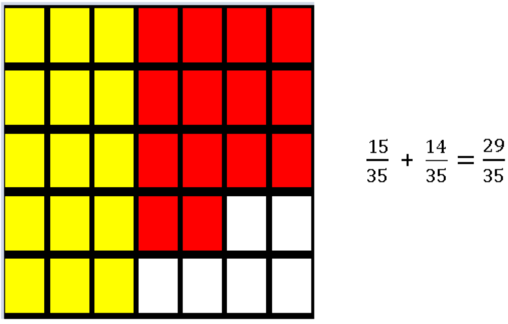
Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [4]

[3] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

[4] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

3. As áreas pintadas dos dois quadrados agora são múltiplas de uma mesma área comum (a área de um dos 35 retângulos nos quais os quadrados ficaram divididos), e desta forma, é possível determinar que Mário comeu $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ e João comeu $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ de bolo. Portanto, como mostra a figura 13, podemos concluir que:

Figura 13 – *Adição de frações com mesmo denominador*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP[5]

a) Juntos os meninos comeram $\frac{29}{35}$ do bolo. Isto é:

$\frac{3}{7} + \frac{2}{5} = \frac{15}{35} + \frac{14}{35} = \frac{15+14}{35} = \frac{29}{35}$

E consequentemente a resposta para

b) O que o Mário comeu a mais é a diferença entre as duas fatias, ou seja:

$\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{1}{35}$ de bolo.

De maneira geral, se usa o seguinte algoritmo para a adição de frações com denominadores diferentes: $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{c \cdot d}$

A subtração de frações com denominadores diferentes segue o mesmo princípio: $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} - \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c \cdot d}$

Portanto, a ideia por trás da adição e da subtração de frações se resume no fato de somar ou subtrair frações com o mesmo denominador. Quando não forem iguais, deve-se tratar de substituí-los por outros equivalentes a cada um deles, cujos denominadores sejam iguais entre si, para então somá-los ou subtraí-los. Desta forma, reforça-se as ideias que estão sendo utilizadas para resolver as operações: a equivalência de frações e o significado da soma ou da subtração.

3.2.2 Multiplicação

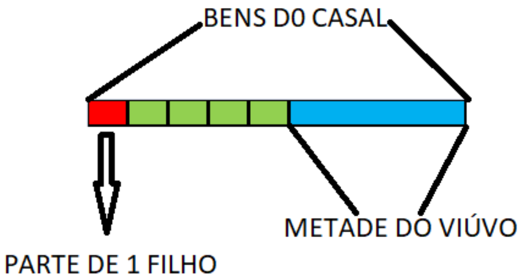
Segundo Druck, I. F. (2006, p. 10), a multiplicação de fração "é procurar uma fração de fração (uma parte de um pedaço), como nos problemas típicos de herança." E isto deve ficar claro para o aluno através de discussões e situações problemas o mais

[5] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

próximo possível do seu dia a dia, como no exemplo: Se um casal tem cinco filhos, ao falecer um dos cônjuges, a metade dos bens será do viúvo e a cada filho do casal caberá como herança à quinta parte da metade restante, isto é, cada filho terá direito a $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ dos bens. Adaptado de (DRUCK, I. F., 2006, p. 10).

Graficamente, pode-se representar a parte que cabe a cada filho conforme a figura 14:

Figura 14 – *Fração de fração*



Fonte: Exemplo adaptado do artigo: Frações: uma análise de dificuldades conceituais (DRUCK, I. F., 2006, p. 10)

Portanto, a parte que corresponderá a cada filho será equivalente a $\frac{1}{10}$ do total de bens. Convencionou-se chamar este número de produto de $\frac{1}{5}$ por $\frac{1}{2}$, isto é: $\frac{1}{10} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$.

A preposição "de" e a palavra "vezes" são comumente usada em situações problemas que envolvem adição de parcelas iguais, embora a presença da preposição "de" não seja tão enfatizada quanto a palavra "vezes". Por exemplo:

1. Comprei cinco pacotes de $\frac{1}{2}$ kg de macarrão no supermercado. Quanto de macarrão comprei? Exemplo adaptado de (DRUCK, I. F., 2006, p. 11).

Pode-se assim resolver, 5 vezes $\frac{1}{2}$ kg, isto, é a ideia aqui é a adição de parcelas iguais, assim, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Também poderia ser colocado da seguinte maneira: fiquei com 5 (pacotes) de $\frac{1}{2}$ kg, que ao todo nos dá claramente $\frac{5}{2} = 5$ x $\frac{1}{2}$. Para Druck, I. F. (2006, p. 11), pequenas observações como essas cria "uma familiaridade maior com o tipo de interpretação prática que é possível no campo das frações, evitando a criação de obstáculos à aprendizagem futura dos alunos." A autora destaca ainda que:

> O algoritmo usual do "multiplica em cima e em baixo"me parece excessivamente 'mágico' e de mecanização automática, sem sentido e demasiadamente rápida. É fato amplamente reconhecido que esse último algoritmo não é compreendido pela grande maioria dos alunos. (DRUCK, I. F., 2006, p. 12).

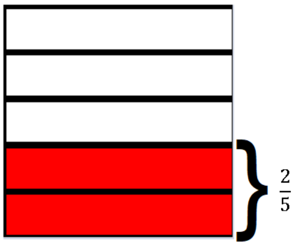
Usando a representação geométrica é possível atribuir significado a multiplicação de fração, sem o conhecimento prévio da mágica regra acima. Por exemplo:

Quanto vale $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{5}$? Exemplo adaptado de (DRUCK, I. F., 2006, p. 13).

Sabe-se que $\frac{3}{7}$ de algo equivale a 3 partes consideradas dentre as 7 partes correspondentes em que o todo foi dividido. Desta forma, para resolver a questão proposta, é necessário saber quanto vale uma dessas tais partes e a seguir tomá-la 3 vezes. Logo, o objeto de estudo é descobrir os $\frac{2}{5}$ de um todo hipotético. Portanto, ao conhecer quanto vale $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$ deve-se posteriormente triplicar este valor.

1) Tome um quadrado dividido em cinco partes iguais e destas considere 2, ou seja, $\frac{2}{5}$ do todo. Como, por exemplo, mostra a figura 15.

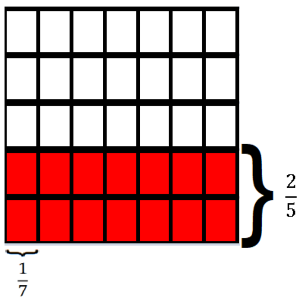
Figura 15 – *Representação de $\frac{2}{5}$ de um todo*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [6]

2) Dado o quadrado anterior dividindo-o por seis retas verticais e, tomando um sétimo tem-se que $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$ cobrem 2 retângulos quando a unidade original é repartida em 35 retângulos de mesma área. Logo, se pode responder que $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$ é $\frac{2}{35}$. Conforme a figura 16.

Figura 16 – *Representação de $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$*



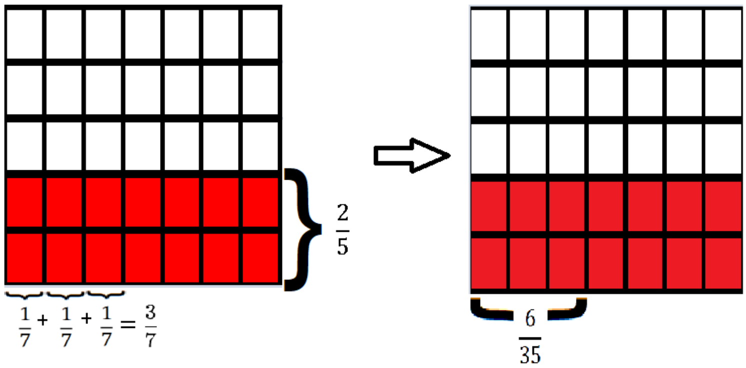
Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [7]

3) Tomando três vezes $\frac{1}{7}$, obtêm-se, $3 \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$. Assim, tem-se que $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{5}$ cobrem 6 retângulos quando a unidade original é dividida em 35 retângulos de área igual. Como pode ser observado na figura 17.

[6] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

[7] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

Figura 17 – *Multiplicação de frações*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [8]

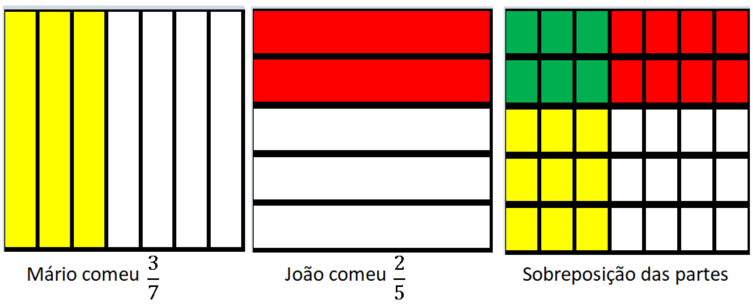
Portanto, pode-se concluir que: $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$:

Baseado na representação geométrica acima, o desenvolvimento do raciocínio citado anteriormente corresponde ao seguinte algoritmo: $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = (3 \times \frac{1}{7}) \times \frac{2}{5} = 3 \times (\frac{1}{7} \times \frac{2}{5}) = 3 \times \frac{2}{35} = \frac{6}{35}$

Para o produto $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5}$, pode-se ainda tomar, como exemplo, os mesmos dois quadrados utilizados anteriormente representando as fatias de bolo que Mário e João comeram. Observando ambas as representações, dá para perceber que a resposta, na verdade, é a interseção entre as áreas que representam cada uma das frações após uma sobreposição, ou seja, sobrepondo os dois quadrados, será encontrado uma área verde que representará o valor $\frac{6}{35}$.

Desta forma temos, de acordo com a figura 18, que:

Figura 18 – *Multiplicação de frações*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [9]

Portanto, $\frac{3}{7}$ de $\frac{2}{5}$ é $\frac{6}{35}$, isto é, $\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{35}$.

De maneira geral, temos que a multiplicação de frações é dada por: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$.

[8] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

[9] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

Portanto, é essencial que o aluno passe por várias experiências concretas envolvendo o conceito desta operação para que esta seja interiorizada e transferida para a aprendizagem do algoritmo, que vem a ser um mecanismo de cálculo. Assim, quando o aluno, por exemplo, escrever $\frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$, esta ação deva refletir uma experiência e não uma simples transmissão de informação.

3.2.3 Divisão

De acordo com Druck, I. F. (2006, p. 14), se "a repartição equitativa perde tipicamente o sentido entre frações próprias, a ideia de medida da operação de divisão continua válida no campo das frações." Para isso, é necessário propor situações problemas adequadas. A autora destaca ainda que:

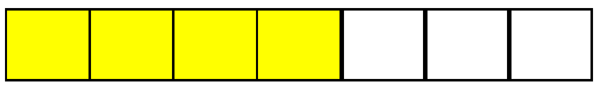
> Ficaria estranho perguntar: "quantas vezes $\frac{1}{3}$ de uma banana cabe numa metade dela?". Mas o problema pode ser melhor colocado da seguinte maneira: "Quero comer uma metade de banana, mas elas estão na bandeja cortadas em terços. Quantos ou que frações dos pedaços de banana na bandeja devo comer para satisfazer a minha vontade? (DRUCK, I. F., 2006, p. 14)

Situações problemas como esta, quando bem orientada pelo professor, podem estimular os alunos a desenvolverem técnicas que os levará a solução de uma forma significativa. Evitando a memorização de regras, com o auxílio de materiais concretos (papel quadriculado, desenhos, lápis de cor, tesouras, ...) o exemplo abaixo pode ser facilmente resolvido.

I. Quanto vale $\frac{3}{7} \div \frac{4}{7}$, ou seja, quantas vezes $\frac{4}{7}$ cabem em $\frac{3}{7}$ (de algo)? Adaptado de Druck, I. F. (2006, p. 14-15).

1) Imagine um retângulo dividido em sete partes iguais e delas tome 4, isto é, $\frac{4}{7}$. Conforme a figura 19 abaixo:

Figura 19 – *Representação de $\frac{4}{7}$ de um todo*

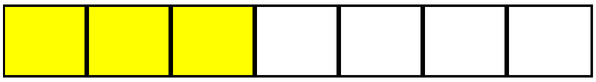


Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [10]

2) Utilizando agora $\frac{3}{7}$ (do mesmo todo), isto é, das sete partes em que o todo foi dividido tome 3, conforme a figura 20.

[10] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

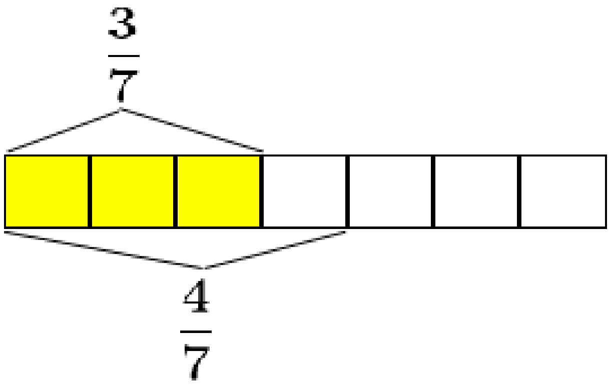
Figura 20 – *Representação de* $\frac{3}{7}$ *do mesmo todo*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [11]

3) Desta forma, será utilizado $\frac{4}{7}$, como unidade de medida, para medir $\frac{3}{7}$ (de um todo inicial). No entanto, essa nova unidade de medida $\frac{4}{7}$, já se encontra dividida em partes iguais (os sétimos) e destas somente 3 partes serão cobertas pela fração $\frac{3}{7}$. Portanto, serão 3 pedaços (que medem $\frac{1}{7}$ do todo inicial) entre os 4 iguais, que representará a parte $\frac{4}{7}$ que cabe em $\frac{3}{7}$. Conforme mostra a figura 21:

Figura 21 – *Divisão de frações*



Fonte: Portal da Matemática - OBMEP [12]

Sendo assim, temos que a resposta será: $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{7}$ cabe em $\frac{3}{7}$.

Simbolicamente obtêm-se: $\frac{3}{7} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{4}$

Druck, I. F. (2006, p. 15-16), salienta que o uso dessa técnica de divisão pode facilitar a compreensão ou apropriação significativa dos procedimentos, uma vez que ela parte dos significados das noções de fração e da operação de divisão nesse campo numérico. Destaca ainda que se duas frações possuem o mesmo denominador, então, isto significa que o todo inicial foi dividido em partes de mesma medida. Assim, as partes são equivalentes e consequentemente: o divisor representará a nova unidade de medida do problema, isto é, o número de partes em que ele está dividido será o denominador da fração e o dividendo representará o total a ser recoberto pela nova unidade, ou seja, o número de partes que devo tomar da mesma unidade e, portanto, o numerador da resposta. Podendo ser resumido em símbolos matemáticos, como: $\frac{n}{m} \div \frac{p}{m} = \frac{n}{p}$, com $(n, m, p \in \mathbb{N}, m, p \neq 0)$

[11] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

[12] Endereço eletrônico do site Portal da Matemática-OBMEP: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/index?a=1. Acesso em 19 fev. 2019

Portanto, dadas duas frações de mesmo denominador o quociente entre elas é dado pela generalização acima. Logo, o caso da divisão entre duas frações se resume em reduzi-las a frações equivalentes com o mesmo denominador, recaindo no caso de adição e subtração de frações, não sendo necessária a regrinha de "conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda".

O uso do algoritmo "conservar a primeira fração e multiplicar pelo inverso da segunda" pode ser feito num segundo momento, onde o aluno tenha um domínio maior de abstração e um conhecimento algébricos mais profundos, compreendendo elementos inversos e o elemento neutro da multiplicação.

Druck, I. F. (2006, p. 9), destaca que nos "casos da *Multiplicação* e *Divisão* dificuldades conceituais importantes se apresentam de início, pois os significados que os alunos já trazem, associados a tais operações, não mais fazem sentido no contexto das frações."

A ideia da multiplicação de formar quantidades correspondentes à adição de parcelas iguais ou ao número de combinações entre objetos de conjuntos finitos distintos, não faz muito sentido quando se trata de frações. Para Druck, I. F. (2006, p. 9), seria "absurdo perguntar, por exemplo, qual é o valor da soma de $\frac{7}{9}$ consigo próprio $\frac{2}{3}$ de vezes. Não existe coleção com quantidade fracionária (fração própria) de elementos entre os quais seja viável estabelecer combinações." Do mesmo modo, a ideia da divisão de repartir de forma equitativa ou medir o dividendo usando o divisor como padrão de medida perde o sentido em relação às frações. Por exemplo, que sentido teria repartir $\frac{1}{2}$ maçã para $\frac{1}{3}$ de crianças?

É necessário atribuirmos sentido para as operações de multiplicação e divisão com frações, propor situações problemas que tenha significado para o aluno cujas soluções exijam deste estratégias pessoais, que possam ser entendidas e que de fato contribua para uma melhor compreensão dessas operações.

Sendo assim, os conceitos envolvendo as operações com frações, são fundamentais para o desenvolvimento de muitos outros conceitos aritméticos e em futuras aprendizagens. Caso não domine o conceito dessas operações, o aluno conseguirá, no máximo, memorizar os fatos básicos e realizar posteriormente de forma mecânica o algoritmo. A dificuldade nesta memorização será muito grande e a insegurança ficará clara diante de um problema: quando ele não for capaz de se decidir sobre qual operação realizar ou como realizá-la.

Por fim, é importante lembrarmos que as propriedades das operações de adição e a multiplicação que serão apresentadas, no capítulo seguinte, são pouco exploradas durante as aulas de Matemática. Estas propriedades quando bem conceituadas podem vir a contribuir de maneira significativa para que o aluno desenvolva a habilidade com cálculo mental e torne mais rápida e, até mesmo mais fácil a resolução de diversas atividades.

A seguir apresentaremos a construção do Conjunto dos números racionais na perspectiva algébrica, usando como pré-requisito o conhecimento do conjunto dos números inteiros (representado por $\mathbb{Z}$) suas definições e propriedades algébricas, onde as frações foram definidas como quocientes de inteiros, que não são necessariamente inteiros.

3.3 Construção algébrica dos números racionais

Definição 3.3.0.1. *Seja* $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z} | m \neq 0\}$ *e consideremos sobre* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m,n) | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ *a relação definida para quaisquer* $(m,n), (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. *Dizemos que* (m,n) *está relacionada a* (p,q) *se, e somente se* $mq = np$. *Denotaremos por* $\sim$ *tal relação. (DOMINGUES, 1991, p. 181).*

Exemplo:

a) $(3,5) \sim (6,10)$, pois $3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$

b) $(7,-4) \sim (21,-12)$, pois $7 \cdot (-12) = -4 \cdot 21$

Assim, dizer que $mq = np$ é equivalente a $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$. Logo, dois pares ordenados são equivalentes se a razão entre suas coordenadas, na mesma ordem, coincidem.

A relação $\sim$ definida acima é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, pois são válidas as seguintes propriedades:

1. Reflexiva: $(m,n) \sim (m,n)$.

Demostração:

Seja $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Assim temos que: $(m,n) \sim (m,n)$ se, e somente se $mn = nm$. Como a propriedade comutativa da multiplicação vale em $\mathbb{Z}$, temos que $(m,n) \sim (m,n)$ é reflexiva.

Portanto, $(m,n) \sim (m,n)$.

2. Simétrica: $(m,n) \sim (p,q) \Rightarrow (p,q) \sim (m,n)$.

Demonstração:

Sejam $(m,n), (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Se $(m,n) \sim (p,q)$ então, por hipótese, $mq = np$.

Usando a propriedade simétrica dos números inteiros, podemos escrever $np = mq$ e pela propriedade comutativa, temos que $pn = qm$.

Portanto, $(p,q) \sim (m,n)$.

3. Transitiva: $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (m, n) \sim (r, s)$.

Demonstração:

Sejam $(m, n), (p, q)$ e $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, tais que $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s)$. Temos assim, por hipótese, que:

$$mq = np, e \tag{3.1}$$

$$ps = qr \tag{3.2}$$

Multiplicando 3.1 por s e 3.2 por n, obtemos:

$$mqs = nps, e \tag{3.3}$$

$$nps = nqr \tag{3.4}$$

Logo, comparando 3.3 e 3.4 temos que: $mqs = nqr$.

Como $q \in \mathbb{Z}^*$, pela lei do cancelamento da multiplicação válida em $\mathbb{Z}$, temos que $ms = nr$. Assim, $(m, n) \sim (r, s)$.

Portanto, $(m, n) \sim (p, q)$ e $(p, q) \sim (r, s) \Rightarrow (m, n) \sim (r, s)$.

Definição 3.3.0.2. *Para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotaremos por $\frac{m}{n}$ a classe de equivalência à qual esse elemento pertence. (DOMINGUES, 1991, p. 181). Assim:*

$\frac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid nx = my\}.$

Por exemplo:

$\frac{1}{5} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 5x = y\} = \{(1, 5); (-1, -5); (2, 10); (-2, -10); ...\}$

Teorema 3.3.0.1. *(Propriedade fundamental das frações). Se (m, n) e (p, q) são elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, então $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np$. (SALES, 2016, p. 43).*

Demonstração.

Usando a definição da relação $\sim$ podemos escrever:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow (m, n) \sim (p, q) \Longleftrightarrow mq = np.$$

Definição 3.3.0.3. *O conjunto dos números racionais é denotado por $\mathbb{Q}$ e representa o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, da seguinte maneira: (SALES, 2016, p. 43)*

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$$

Portanto, cada número racional a pertencente a $\mathbb{Q}$ possui infinitas formas de representação $\frac{m}{n}(m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}^*)$. Onde, em cada uma delas m é o numerador e indica o número de partes consideradas na fração enquanto e n o denominador e indica o número de partes que a unidade (o todo) foi dividida. Temos ainda que dois elementos quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$ sempre admitem representações cujo os denominadores sejam iguais.

De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$, então $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$ e $\frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$, pois $m(nq) = n(mq)$ e $p(ns) = q(np)$.

3.4 Operações e propriedades algébricas dos números racionais

3.4.1 Adição de números racionais

Definição 3.4.1.1. *Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ números racionais, isto é $x, y \in \mathbb{Q}$. Tem-se que a soma de x com y e indica-se por $x + y$ o elemento de $\mathbb{Q}$, assim definido: (DOMINGUES, 1991, p. 182):*

$$x + y = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

A soma $x + y$ não depende dos pares ordenados escolhidos para definir x e y.

Teorema 3.4.1.1. *Se $x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ e $y = \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$. Ou seja, $x + y = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$. (SALES, 2016, p. 44).*

Demonstração:

Pela propriedade fundamental das frações, temos que: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, então $a \cdot b' = b \cdot a'$ e $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, então $c \cdot d' = d \cdot c'$.

Temos por hipótese que:

$$ab' = ba' \tag{3.5}$$

$$cd' = dc' \tag{3.6}$$

Multiplicando 3.5 por dd' e a 3.6 por bb' e em seguida, somando as relações obtidas membro a membro, temos:

$$adb'd' + cbd'b' = bda'd' + bdc'b'$$

Colocando $b'd'$ em evidência no primeiro membro e bd no segundo obtemos:

$$(ad + cb)b'd' = bd(a'd' + c'b')$$

Segue que:

$$\frac{ad+cb}{bd} = \frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$$

Logo, a correspondência $(x, y) \to x + y$, é uma aplicação conforme a definição da adição de números racionais e, portanto, trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos adição em $\mathbb{Q}$.

Propriedades da adição em $\mathbb{Q}$:

1. Associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) \\ &= \frac{a}{b} + (\frac{cf + ed}{df}) \\ &= \frac{adf + cfb + edb}{bdf} \\ &= \frac{(ad + bc)f + e(db)}{bdf} \\ &= \frac{(ad + bc)f}{bdf} + \frac{edb}{bdf} \\ &= \frac{(ad + bc)}{bd} + \frac{e}{f} \\ &= (\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}) + \frac{e}{f} \\ &= (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} \\ &= (x + y) + z \end{aligned}$$

Portanto, $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

2. Comutativa: $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, temos que:

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\ &= \frac{ad + cb}{bd} \\ &= \frac{cb + ad}{db} \\ &= \frac{cb}{db} + \frac{ad}{db} \\ &= \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \\ &= y + x \end{aligned}$$

Portanto, $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

3. Elemento Neutro: é a classe de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = ...$, que indicamos por 0.

Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{0}{1}$ é o elemento neutro da adição, ou seja, que: $x = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Demonstração:

De fato:

i) $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + 0 \cdot b}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$.

ii) $\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 \cdot b + a \cdot 1}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$.

Portanto, $\frac{0}{1}$ é o elemento neutro da adição, que será indicado por 0 apenas.

4. Simétrico Aditivo: Qualquer que seja o número racional $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ existe apenas um x' tal que $x + x' = \frac{0}{1}$.

Demonstração:

Seja $x' = \frac{-a}{b}$, então $x + x' = \frac{a}{b} + (\frac{-a}{b}) = \frac{ab + (-ab)}{bb} = \frac{0}{bb} = \frac{0}{1}$.

Vamos supor que exista um $x" = \frac{c}{d} \neq \frac{-a}{b}$, tal que $x + x" = \frac{0}{1}$, então, $x + x" = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} = \frac{0}{1}$.

Utilizando a propriedade fundamental das frações temos que: $(ad + cb) \cdot 1 = bd \cdot 0$, ou seja $ad + cb = 0$

Assim, pela propriedade do elemento oposto dos números inteiros, para ocorrer $ad+cb = 0$, temos que ad e cb são números opostos. Vamos supor, sem perda de generalidade que: $cb = -ad$, logo, $\frac{c}{d} = \frac{-a}{b}$.

Mas, temos como suposição inicial, que $\frac{c}{d} \neq \frac{-a}{b}$, o que é um absurdo.

Portanto, o elemento oposto de $\frac{a}{b}$ é único e igual a $\frac{-a}{b}$ e escrevemos $-\frac{a}{b}$. O elemento oposto de x será denotado por $-x$.

3.4.2 Subtração de números racionais

Definição 3.4.2.1. *Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ números racionais. A diferença entre x e y, a qual indicamos por $x - y$ é dada por $x + (-y)$. (DOMINGUES, 1991, p. 184).*

Portanto, temos que a subtração entre x e y é definida como a soma entre x e o simétrico de y. Ou seja:

$$x - y = x + (-y) = \frac{a}{b} + (-\frac{c}{d}) = \frac{ad+(-cd)}{bd} = \frac{ad-cd}{bd}$$

Como $(-y) \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{Q}$, então:

$$(x, y) \to x - y$$

é uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamaremos subtração em $\mathbb{Q}$.

Proposição 3.4.2.1. *Para x, y e $z \in \mathbb{Q}$ são válidas as seguintes propriedades:*

1. $-(-x) = x$.

   Demonstração.

   Seja $x = \frac{a}{b}$ e x' o elemento oposto de x, ou seja, $x' = -x = \frac{-a}{b}$.

   Assim, $-(-x)$ é o elemento oposto de x', $-(-x) = -x' = \frac{-(-a)}{b} = \frac{a}{b} = x$.

   Portanto, $-(-x) = x$.

2. $-x + y = y + (-x)$.

   Demonstração.

Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Assim:

$$\begin{aligned}
-x + y &= \frac{-a}{b} + \frac{c}{d} \\
&= \frac{-ad + cb}{bd} \\
&= \frac{cb + (-ad)}{db} \\
&= \frac{cb}{db} + (\frac{-ad}{db}) \\
&= \frac{c}{d} + \frac{-a}{b} \\
&= y + (-x)
\end{aligned}$$

Portanto, $-x + y = y + (-x)$.

3. $x - (-y) = x + y$.

Demonstração.

Pela definição da subtração de dois números inteiros x e a, que: $x - a = x + (-a)$. Ou seja, que a subtração entre x e a, equivale a soma de x com o elemento oposto de a.

Seja $a = -y$, então $-a = y$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned}
x - (-y) &= x - a \\
&= x + (-a) \\
&= x + y
\end{aligned}$$

Portanto, $x - (-y) = x + y$.

4. $-x - y = -(x + y)$.

Demonstração.

Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Assim:

$$
\begin{aligned}
-x - y &= -x + (-y) \\
&= \frac{-a}{b} + (\frac{-c}{d}) \\
&= \frac{-ad + (-cb)}{bd} \\
&= \frac{-ad - cb}{bd} \\
&= -(\frac{ad + cb}{bd}) \\
&= -(\frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd}) \\
&= -(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \\
&= -(x + y)
\end{aligned}
$$

Portanto,$-x - y = -(x + y)$.

5. $x - (y + z) = x - y - z$.

Demonstração.

Seja $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$. Logo:

$$
\begin{aligned}
x - (y + z) &= \frac{a}{b} - (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) \\
&= \frac{a}{b} - (\frac{cf + ed}{df}) \\
&= \frac{adf - cfb - edb}{bdf} \\
&= \frac{(ad - cb)f}{bdf} - \frac{edb}{bdf} \\
&= \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} - \frac{e}{f} \\
&= \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} \\
&= x - y - z
\end{aligned}
$$

Portanto, $x - (y + z) = x - y - z$.

3.4.3 Multiplicação de números racionais

Definição 3.4.3.1. *Dados $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, sendo $x, y \in \mathbb{Q}$, definimos o produto como sendo o número racional $x \cdot y$, (DOMINGUES, 1991, p. 184), ou seja:*

$$x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ac}{bd}$$

A multiplicação de frações está bem definida, ou seja, não depende das particulares representações tomadas para x e y.

Teorema 3.4.3.1. *Sejam* $x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ *e* $y = \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ *, então* $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$*. (SALES, 2016, p. 48).*

Demonstração:

Tomando como base as seguintes implicações:

i) $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$ e

ii) $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow c \cdot d' = c' \cdot d.$

Da primeira equação temos que: $a \cdot b' = a' \cdot b$ e da segunda temos $c \cdot d' = c' \cdot d$:

Multiplicando ambas as equações, obtemos:

$$(ab') \cdot (cd') = (a'b) \cdot (c'd)$$

que segue imediatamente da hipótese.

Portanto, a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é a operação definida por:

$$(x, y) \longrightarrow xy$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$.

Propriedades da multiplicação em $\mathbb{Q}$:

1. Propriedade associativa: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Sejam os números $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$.

$$\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}) \\
&= \frac{a}{b} \cdot (\frac{ce}{df}) \\
&= \frac{ace}{bdf} \\
&= \frac{ac \cdot e}{bd \cdot f} \\
&= (\frac{ac}{bd}) \cdot \frac{e}{f} \\
&= (\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} \\
&= (x \cdot y) \cdot z
\end{aligned}$$

Portanto, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

2. Comutativa: $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$.

Demonstração:

Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \\
&= \frac{ac}{bd} \\
&= \frac{ca}{db} \\
&= \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \\
&= y \cdot x
\end{aligned}$$

Portanto, $x \cdot y = y \cdot x$.

3. Elemento Neutro: é a classe $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}...$, ou seja, o elemento neutro da multiplicação é $\frac{1}{1}$, que será indicado simplesmente por 1. Logo, $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Demonstração:

Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{1}{1}$, então $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}$.

Pela propriedade comutativa, temos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b}$ que é igual a $\frac{a}{b}$.

Portanto, $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro da multiplicação.

4. Distributiva: A multiplicação é distributiva em relação à adição no conjunto dos números racionais, ou seja, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \forall x, y, z \in \mathbb{Q}$.

   Demonstração:

   Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$. Logo:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y+z) &= \frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) \\
&= \frac{a}{b} \cdot (\frac{cf+ed}{df}) \\
&= \frac{a \cdot (cf+ed)}{b \cdot df} \\
&= \frac{acf+aed}{bdf} \\
&= \frac{b \cdot (acf+aed)}{b \cdot (bdf)} \\
&= \frac{bacf+baed}{bbdf} \\
&= \frac{ac(bf)+ae(bd)}{(bd)(bf)} \\
&= \frac{ac(bf)}{(bd)(bf)} + \frac{ae(bd)}{(bd)(bf)} \\
&= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} \\
&= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \\
&= x \cdot y + x \cdot z
\end{aligned}
$$

   Portanto, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

5. Cancelamento multiplicativo: Sejam $x, y, k \in \mathbb{Q}$ com $k \neq \frac{0}{1}$. Se $x \cdot k = y \cdot k$, então $x = y$.

   Demonstração:

   Sejam $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ e $k = \frac{m}{n}$, números racionais, assim se $x \cdot k = y \cdot k$ então $\frac{am}{bn} = \frac{cm}{dn}$ e portanto, $a \cdot m \cdot d \cdot n = c \cdot m \cdot b \cdot n$.

   Pela lei do cancelamento multiplicativo dos números inteiros a equação $a \cdot m \cdot d \cdot n = c \cdot m \cdot b \cdot n$ é equivalente a $a \cdot d = c \cdot b$ que pela propriedade fundamental das frações corresponde a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Portanto, $x = y$.

6. Elemento inverso multiplicativo: Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, existe o seu inverso $x^{-1} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

Demonstração:

Seja $x = \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$, tomemos ainda $x^{-1} = \frac{b}{a}$, logo:

$$\begin{aligned} x \cdot x^{-1} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \\ &= \frac{ab}{ba} \\ &= \frac{ab}{ab} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Note que $ab \neq 0$ e $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, pois $a \neq 0$.

Teorema 3.4.3.2. *"Todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ possui um único inverso multiplicativo". (SALES, 2016, p. 50).*

Demonstração:

Vamos supor que exista um outro elemento simétrico multiplicativo x', tal que $x' = \frac{c}{d} \neq x^{-1}$, ou seja $\frac{c}{d} \neq \frac{b}{a}$, assim, $x \cdot x' = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$, logo, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{1}{1} \Rightarrow ac = bd \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{a}$

O que é uma contradição, pois supomos $\frac{c}{d} \neq \frac{b}{a}$.

Portanto, $x' = x^{-1} = \frac{b}{a}$, ou seja x^{-1} é único.

Convém destacar para a multiplicação de números racionais as seguintes proposições: Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$, então:

1. Se $x, y \in \mathbb{Q}$, então $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -x \cdot y$.

Demonstração.

Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$.

Desenvolvendo o primeiro e o segundo membro da igualdade chegaremos a um mesmo resultado, o terceiro membro, isto é:

- $(-x) \cdot y = \frac{-a}{b} \cdot \frac{c}{d} = -(\frac{ac}{bd}) = -x \cdot y$.
- $x \cdot (-y) = \frac{a}{b} \cdot \frac{-c}{d} = -(\frac{ac}{bd}) = -x \cdot y$.

2. Se $x, y \in \mathbb{Q}$, então $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Demonstração.

Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, assim: $(-x) \cdot (-y) = (\frac{-a}{b}) \cdot (\frac{-c}{d}) = \frac{ac}{bd} = x \cdot y$.

3. Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração: Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$, então $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

Demonstração.

Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$.

$$\begin{aligned} x \cdot (y - z) &= \frac{a}{b} \cdot [\frac{c}{d} - (\frac{e}{f})] \\ &= \frac{a}{b} \cdot [\frac{c}{d} + (\frac{-e}{f})] \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{-e}{f} \\ &= \frac{ac}{bd} + (\frac{-ae}{bf}) \\ &= \frac{ac}{bd} - \frac{ae}{bf} \\ &= x \cdot y - x \cdot z \end{aligned}$$

3.4.4 Divisão de números racionais

Definição 3.4.4.1. *Sejam $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q}^*$ com $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, dizemos que x dividido por y é dado pelo produto entre x e o inverso de y, ou seja, $x \div y = x \cdot y^{-1}$. (SALES, 2016, p. 57).*

Proposição 3.4.4.1. *Se $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $y \neq \frac{0}{1}$, então $x \div y = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.*

Demonstração:

Usando a definição de divisão, temos que: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Notação:

A divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ também pode ser representada por $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ou $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Exemplo:

a) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{8}$

b) $\frac{-1}{3} \div \frac{4}{9} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{-9}{12} = \frac{-3}{4}$

c) $\frac{5}{3} \div 2 = \frac{5}{3} \div \frac{2}{1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

Como a divisão entre x e y é, na verdade, a multiplicação entre x e o inverso de y constatamos que a divisão proverá de todas as propriedades da multiplicação entre x e o inverso de y.

Além disso, para a divisão em $\mathbb{Q}$ vale a seguinte propriedade:

Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$ e $z \neq 0$, então: $(x + y) \div z = x \div z + y \div z$.

Demonstração:

De fato, se $z = \frac{e}{f}$ $(e, f \in \mathbb{Z}^*)$, então:

$$\begin{aligned}(x + y) \div z &= (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \div \frac{e}{f} \\ &= (\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) \cdot \frac{f}{e} \\ &= \frac{af}{be} + \frac{fc}{ed} \\ &= \frac{a}{b} \div \frac{e}{f} + \frac{c}{d} \div \frac{e}{f} \\ &= x \div z + y \div z\end{aligned}$$

Portanto, $(x + y) \div z = x \div z + y \div z$.

3.5 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Para que possamos comparar elementos dentro do Conjunto dos Números Racionais, será definido uma relação de ordem dentro do conjunto $\mathbb{Q}$. Também será abordada suas propriedades e os principais resultados.

Definição 3.5.0.1. *Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais. Escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, quando $a \cdot d \leq b \cdot c$ e lê-se $\frac{a}{b}$ é menor que ou igual a $\frac{c}{d}$. (CUSTÓDIO, 2017, p. 39).*

Teorema 3.5.0.1. *A relação $\leq$, dada pela definição 3.3.0.1, está bem definida em $\mathbb{Q}$, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ e $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ então $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$. (SALES, 2016, p. 51).*

Demonstração.

Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{c'}{d'}$ elementos de $\mathbb{Q}$ e $b, b', d, d' > 0$. Considere $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ e $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, temos que:

- $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ então $a \cdot b' = a' \cdot b$
- $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ então $c \cdot d' = c' \cdot d$ e,
- $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ então $a \cdot d \leq b \cdot c$

Partindo de $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ temos que $ad \leq bc$. Como $b' > 0$ multiplicando ambos os termos desta desigualdade por b' ficamos com $ab'd \leq bcb'$. Usando que $ab' = a'b$ e substituindo no primeiro termo desta desigualdade constatamos que $a'bd \leq bcb'$ e pela lei do cancelamento multiplicativo temos que $a'd \leq cb'$.

De modo análogo, como $d' > 0$ vamos multiplicar a desigualdade $a'd \leq cb'$ por d' o que gera $a'd'd \leq cd'b'$. Sabendo que $cd' = c'd$ e substituindo no segundo membro da desigualdade $a'd'd \leq cd'b'$ encontramos $a'd'd \leq c'db'$ que pela lei do cancelamento multiplicativo corresponde a $a'd' \leq c'b'$, logo $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

Propriedades da relação de ordem

1. Reflexiva: $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$.

   Demonstração:

   Seja $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Se $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$, então $a \cdot b \leq a \cdot b$. Em particular é igual.

2. Antissimétrica: Seja $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

   Demonstração.

   Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, temos pela definiçãoo que $a \cdot d \leq c \cdot b$.

   Por outro lado, se $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ então $c \cdot b \leq a \cdot d$.

   Como $c \cdot b$ e $a \cdot d$ são números inteiros, podemos considerar a sua relação de ordem e concluir que $a \cdot d = c \cdot b$.

   Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3. Transitiva: Seja $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$. Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d \leq c \cdot b$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow c \cdot f \leq e \cdot d$, então $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

   Demonstração.

   Seja,

$$a \cdot d \leq c \cdot b \tag{3.7}$$

$$c \cdot f \leq e \cdot d \tag{3.8}$$

Multiplicando a desigualdade 3.7 por $f > 0$ e a desigualdade 3.8 por $b > 0$ obtemos: $a \cdot d \cdot f \leq c \cdot b \cdot f$ e $b \cdot c \cdot f \leq e \cdot d \cdot f$, pela transitividade dos inteiros temos que $a \cdot d \cdot f \leq e \cdot d \cdot f$. E, uma vez que $f > 0$, podemos concluir pela lei do cancelamento multiplicativo, que $a \cdot f \leq e \cdot b$. Portanto, $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

Ocorre em $\mathbb{Q}$ a compatibilidade da relação de Ordem com as operações de adição e multiplicação, logo a relação $\leq$ é uma relação de ordem, o que torna o conjunto $\mathbb{Q}$ ordenado.

O princípio aditivo e o multiplicativo se conservam na relação de Ordem em $\mathbb{Q}$. Além disso, vamos estabelecer que dois elementos racionais quaisquer ao serem comparados ou são equivalentes, ou um é maior do que o outro, ou seja a lei da tricotomia rege os números racionais.

Proposição 3.5.0.1. *A relação de ordem $\leq$ em $\mathbb{Q}$ é compatível com as operações de adição e multiplicação, isto é, para quaisquer $x, y, k \in \mathbb{Q}$ vale:*

1. Se $x \leq y \Leftrightarrow x + k \leq y + k$.

   Demonstração.

   Sejam $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
x + k \leq y + k &\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{m}{n} \leq \frac{c}{d} + \frac{m}{n} \\
&\Leftrightarrow \frac{an + bm}{nb} \leq \frac{cn + dm}{dn} \\
&\Leftrightarrow (an + bm) \cdot d \cdot n \leq (cn + dm) \cdot b \cdot n \\
&\Leftrightarrow (an + bm) \cdot d \leq (cn + dm) \cdot b \\
&\Leftrightarrow and + bmd \leq cnb + bmd \\
&\Leftrightarrow and \leq cnb \\
&\Leftrightarrow ad \leq cb \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \\
&\Leftrightarrow x \leq y
\end{aligned}$$

2. Se $x \leq y$ e $k \geq 0 \Leftrightarrow x \cdot k \leq y \cdot k$.

   Demonstração.

   Sejam $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Sabendo que $k \geq 0$, e como $k = \frac{m}{n}$, logo $\frac{m}{n} \geq 0$, ou seja $m \in \mathbb{Z}_+$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\Rightarrow ad \leq bc \\
&\Rightarrow ad \cdot (mn) \leq bc \cdot (mn) \\
&\Rightarrow a \cdot m \cdot (d \cdot n) \leq c \cdot m \cdot (b \cdot n) \\
&\Rightarrow \frac{a \cdot m}{b \cdot n} \leq \frac{c \cdot m}{d \cdot n} \\
&\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \leq \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \\
&\Rightarrow x \cdot k \leq y \cdot k
\end{aligned}$$

3. Se $x \leq y$ e $k \leq 0 \Leftrightarrow x \cdot k \geq y \cdot k$.

Demonstração.

Sejam $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Sendo $k \leq 0$ e, $k = \frac{m}{n}$, logo $\frac{m}{n} \leq 0$. Tomemos, sem perda de generalidade, $m \in \mathbb{Z}_-$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\Rightarrow ad \leq bc \\
&\Rightarrow ad \cdot (n) \leq bc \cdot (n) \\
&\Rightarrow adn \leq bcn
\end{aligned}$$

Sabendo que $m \leq 0$, temos:

$$\begin{aligned}
adn \leq bcn &\Rightarrow adn \cdot (m) \geq bcn \cdot (m) \\
&\Rightarrow a \cdot m \cdot (d \cdot n) \geq c \cdot m \cdot (b \cdot n) \\
&\Rightarrow \frac{a \cdot m}{b \cdot n} \geq \frac{c \cdot m}{d \cdot n} \\
&\Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \geq \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} \\
&\Rightarrow x \cdot k \geq y \cdot k
\end{aligned}$$

Teorema 3.5.0.2. *(Lei da tricotomia dos racionais) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, apenas uma das situações, a seguir, ocorre: $x = y$ ou $x > y$ ou $x < y$. (SALES, 2016, p. 55).*

Demonstração.

Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, com $x, y > 0$. Tomemos $a \cdot d$ e $c \cdot b$ que são números inteiros, pela tricotomia em $\mathbb{Z}$, temos três possibilidades exclusivas:

- $a \cdot d = c \cdot b$ e então teremos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, logo $x = y$.
- $a \cdot d < c \cdot b$ e então teremos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, logo $x < y$.
- $a \cdot d > c \cdot b$ e então teremos $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, logo $x > y$.

Portanto, ao compararmos um número racional r qualquer com 0, só uma dessas situações pode ocorrer, $r = 0$ ou $r > 0$ ou $r < 0$.

A partir da lei de tricotomia de racionais podemos concluir que o produto de números racionais resulta em um número racional e, que este produto ou é positivo ou é negativo ou é nulo. Logo, a de "regra de sinais"sistematizada na multiplicação de números inteiros vale para a multiplicação de números racionais.

Proposição 3.5.0.2. *Para os números racionais genéricos $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, são válidas as propriedades:*

1. Se $x \cdot y = 0$, então, $x = 0$ ou $y = 0$.

   Demonstração.

   Seja $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{a}{b} \neq 0$, ou seja, $a \neq 0$, então, se $x \cdot y = 0$, temos: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 0$, o que implica em $\frac{ac}{bd} = 0$, ou seja, $ac = 0$.

   Como $a \neq 0$ concluimos que $c = 0$.

   Portanto, $y = \frac{c}{d} = \frac{0}{d} = \frac{0}{1} = 0$.

2. Se $x > 0$ e $y > 0$, então, $x \cdot y > 0$.

   Demonstração.

   Seja $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{a}{b} > 0$, então, $a > 0$. Analogamente se $y = \frac{c}{d} > 0$, então, $c > 0$, logo $ac > 0$. Assim, $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, ou seja, $x \cdot y = \frac{ac}{bd}$.

   Como $ac > 0$, temos que $\frac{ac}{bd} > 0$, portanto $x \cdot y > 0$.

3. Se $x > 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y < 0$.

   Demonstração.

   Seja $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e $x = \frac{a}{b} > 0$, então, $a > 0$. Analogamente se $y = \frac{c}{d} < 0$, então, $c < 0$, logo $ac < 0$. Assim, $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$, ou seja, $x \cdot y = \frac{ac}{bd}$.

   Como $ac < 0$, temos que $\frac{ac}{bd} < 0$, portanto, $x \cdot y < 0$.

4. Se $x < 0$ e $y < 0$, então $x \cdot y > 0$.

Demonstração.

Seja $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ e sabendo que $x = \frac{a}{b} < 0$ então $a < 0$ e tomando $y = \frac{c}{d} < 0$ então $c < 0$, logo temos que $ac > 0$. Observemos que $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ então $\frac{ac}{bd}$.

Como $ac > 0$ temos que $\frac{ac}{bd} > 0$, o que significa que $x \cdot y > 0$.

Notação: A seguir, estabeleceremos as notações usuais para alguns subconjuntos importantes de $\mathbb{Q}$.

1. Chamaremos $\mathbb{Q}^* = \{\frac{a}{b} | (a, b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*\}$ de conjunto dos números racionais não nulos.

2. Chamaremos $\mathbb{Q}^*_- = \{\frac{a}{b} | (a, b) \in \mathbb{Z}^*_- \times \mathbb{Z}^*_+\}$ de conjunto dos números racionais negativos.

3. Chamaremos $\mathbb{Q}_- = \{\frac{a}{b} | (a, b) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}^*_+\}$ de conjunto dos números racionais não positivos.

4. Chamaremos $\mathbb{Q}^*_+ = \{\frac{a}{b} | (a, b) \in \mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+\}$ de conjunto dos racionais positivos.

5. Chamaremos $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{a}{b} | (a, b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^*_+\}$ de conjunto dos números racionais não negativos.

4 As dificuldades no ensino-aprendizagem em Matemática e em Frações

4.1 As dificuldades no ensino-aprendizagem em Matemática

Enquanto educadora, estou sempre me perguntando sobre os reais motivos que levam o aluno a apresentar dificuldades na aprendizagem dos conceitos matemáticos e o que fazer para reverter essa situação.

Em consulta aos dados sobre o desempenho dos alunos no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB)(BRASIL-INEP, 2017), verificamos que a Matemática se apresenta como a disciplina de maior dificuldade de aprendizagem na Educação Básica. Nessa consulta, é possível observarmos que, somente $4,52\%$ dos estudantes do Ensino Médio avaliados pelo SAEB 2017, sendo que somente cerca de 60 mil, superaram o nível 7 da Escala de Proficiência da maior avaliação já realizada na educação básica brasileira.

Encontrarmos meios para que os alunos possam entender, gostar e, na medida do possível, utilizar a Matemática no seu dia-a-dia nem sempre tem sido uma tarefa fácil. As dificuldades são muitas, indo desde as condições precárias da escola, fatores socioeconômicos, políticas educacionais que priorizam índices de aprovação, não considerando muita das vezes a qualidade do ensino-aprendizagem, a falta de interesse dos alunos pela disciplina de Matemática.

> No processo de ensino-aprendizagem tem-se constatado dificuldades de aprendizado em conteúdos onde não é possível presenciar o processo da forma que o mesmo acontece. Nesses casos cabe ao professor usar recursos que permitam ao aluno conhecer algo abstrato aperceber sua ligação com o real. Os métodos de ensino tradicionais baseado em quadro negro e aulas dialogadas podem tornar esse processo cansativo e desmotivar os alunos causando falhas no processo de ensino-aprendizagem. (SANTANA; ALVES, 2009, p. 4).

Outro fator que tem contribuído para tais dificuldades é a forma tradicional como a maioria dos conceitos são abordados em sala de aula. Para D'Ambrosio, B.S. e Lopes a tradição escolar

> tem gerado ideias equivocadas sobre o fazer matemático, o qual tem estado atrelado às regras determinadas pelo professor e centrado na reprodução de algoritmos e feitura de exercícios repetidos e descontextualizados. Tal perspectiva conduz a um saber matemático limitado à memorização e à aplicação de conteúdos matemáticos que, na maioria das vezes, não tem qualquer significado para o aluno. (D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, 2015, p. 270)

Portanto, o ensino de Matemática proporcionado pela escola está sendo na maioria das vezes baseado na simples explanação de conteúdo, longas listas de exercícios, sem que haja relação da teoria com a prática. Uma aprendizagem mecânica, que pouco tem possibilitado aos alunos se tornarem capazes de avaliar e redimensionar o seu próprio conhecimento para uma aprendizagem significativa.

D'Ambrosio, U. (2005, p. 59), ainda destaca que o conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares são "obsoletas e inúteis, além de desinteressante para muitos". Ou seja, o ensino dos conteúdos e a forma metodológica mecânica como eles são transmitidos em sala de aula precisam ser repensados, é urgente a necessidade de se fazer uma reflexão sobre o papel do professor e o da escola enquanto "transmissora"de conhecimentos e como está sendo desempenhando esse papel.

Para D'Ambrosio, B. S. e Lopes (2015, p. 270), é necessário uma nova visão sobre conhecimento, Matemática, o fazer matemático e, consequentemente, o sucesso em Matemática. De acordo com as autoras é preciso

> romper definitivamente com o ensino por meio de regras e buscar propostas que permitam o confronto com problemas oriundos de contextos diversos e a ousadia na busca de novos procedimentos matemáticos. Essa dimensão de trabalho pedagógico viabilizará um fazer matemático que contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo. (D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, 2015, p. 270).

Particularmente, corroboramos com (D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, 2015, p. 270), que o fazer matemático pautado na ênfase de regras ensinadas de forma mecânica, memorização de conceitos e definições, longas listas de exercícios e a forma tradicional expositiva dos conteúdos no quadro negro, não tem contribuído para um ensino-aprendizado significativo em Matemática.

Desta forma, entendemos que o papel do professor é fundamental para a criação de um ambiente de aprendizagem que de fato, venha a favorecer a ação e reflexão sobre os conceitos matemáticos desenvolvidos em sala de aula. Neste sentido, cabe ao professor tornar suas aulas mais dinâmicas e atrativas aos olhos do aluno, formular perguntas que o intrigue, valorizar o diálogo, provocá-lo ao questionamento e a colocar-se a disposição para tentar esclarecer e responder suas dúvidas, aguçar a sua curiosidade e o seu encantamento com cada nova descoberta, para que desta forma haja o envolvimento e o interesse destes para a construção do conhecimento matemático e um pensamento crítico.

4.2 As dificuldades no ensino-aprendizagem de frações

Para Bertoni (2009, p. 12), as frações "tem sido um assunto temido, mal compreendido, mal aprendido. [...] há muita coisa poluindo e escondendo o cristal puro que fração é:

um número. Uma ideia Matemática associada à quantificação."

É essencial mostrar para o aluno situações significativas do cotidiano que necessitam da inclusão do novo número. Número esse que deve ir além do usual exemplo de figuras divididas, mas sim um número que funciona e faz sentido em diversas situações da vida. O conhecimento sobre frações e o conceito de número fracionário, não pode ficar limitado apenas como a divisão de figuras geométricas em partes iguais e a nomeação de partes consideradas, bem como na memorização de regras operatórias. Smole e Diniz (2016, p. 24), afirma que "o ensino tem sido responsabilizado por esse fracasso, especialmente por se ater a representações de frações na forma de retângulos e círculos em textos didáticos que associam aos desenhos a escrita da fração, sem qualquer contexto de significados para a criança."

Smole e Diniz (2016, p. 24), também ressalta como razões dificultadoras para a compreensão das frações por parte dos alunos a forma tradicional como o assunto ainda é abordado em sala aula pelos professores como, por exemplo, a rápida "ênfase excessiva na nomenclatura - introduzindo-se termos como numerador, denominador, frações equivalentes, frações próprias e impróprias – antes da compreensão do significado e dos usos do número fracionário" e a "inadequação do tempo de ensino e aprendizagem dedicado aos racionais na escola".

De acordo com Santos, M. J. C. (2010, p. 164), pesquisas realizadas no âmbito escolar, apontam que o ensino de frações tem apresentado dificuldades, que a grande maioria dos professores parte diretamente para a aplicação de regras e/ou operações com frações, sem levar em consideração a construção do conhecimento lógico-matemático do aluno. E que a maioria dos livros didáticos abordam as frações com bastante rigidez, ou seja, apresentam inicialmente o conceito de fração e a sua representação simbólica e logo em seguida as operações são mecanicamente trabalhadas.

Portanto, é necessário encontrarmos meios, sem regras ou excesso de formalismo, que levem o aluno a identificar essas quantidades fracionárias em seu dia a dia e que sejam capazes de estabelecer relações, de fazer hipóteses e testá-las, apropriar-se da ideia do número fracionário correspondente, e que possam usá-los de modo significativo.

Bertoni, destaca ainda que as frações

> têm sido um dos temas mais difíceis no ensino fundamental. Avaliações e pesquisas atestam o baixo rendimento dos alunos no assunto. Nos últimos anos, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem desse tema têm detectado inúmeros problemas e levantado hipóteses, que, entretanto, não abrangem a totalidade da problemática, nem são conclusivas. (BERTONI, 2009, p. 16).

Tão grande é a complexidade do conceito de números racionais para os alunos que as primeiras noções sobre frações ganham espaço no currículo de Matemática a partir do

4º ano e é desenvolvido gradativamente até os anos finais do Ensino Fundamental. Tal fato é apontado nos PCN que destaca: "a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada."(BRASIL - MEC, 1997, p. 67).

No que se refere a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), (BRASIL - MEC, 2018, p. 280), esta prevê introduzir conceitos elementares de fração já a partir do 2º ano do Ensino Fundamental, sendo aprofundada gradativamente até o 8º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, a BNCC propôs uma organização na qual o ensino de frações deverá ser aprofundado gradualmente a cada ano. Neste documento consta que "as noções matemáticas são retomadas ano a ano, com ampliação e aprofundamento crescentes."(BRASIL - MEC, 2018, p. 297).

Neste sentido, como é possível os alunos estarem terminando o Ensino Médio sem compreender o conceito de frações e suas operações? O porquê de eles não conseguirem interpretar problemas que exigem raciocínio e criatividade? Quais dificuldades na aprendizagem conceitual? Quais os sentidos das frações para os alunos? E ainda, como o uso de materiais manipulativos poderiam estimular o interesse e a curiosidade dos alunos? Como tornar as aulas mais dinâmicas, a fim de fazer com que os alunos compreendam conceitos e objetos matemáticos, em especial, frações?

De acordo com Bertoni a

> abordagem para o ensino/aprendizagem das frações não se coaduna com uma educação que visa à formação do cidadão autônomo e crítico, e à sua inserção ativa na sociedade. Autonomia e criticismo não serão atingidos por esquemas de dependência ao professor, desvinculados de um pensar consciente. (BERTONI, 2009, p. 29).

Portanto, para uma ação ativa do aluno no mercado de trabalho é necessário que este tenha capacidade de avaliar e resolver situações problemas, propor soluções e ter versatilidade para novas funções, o que não é possível de ser alcançada apenas com fazer mecânico de exercícios, sem um pensamento próprio e sem questionamentos.

Um outro fator que contribui para a problemática é a formação do professor. A educação enfrenta grandes problemas e um deles, é a maneira deficiente como se forma o professor, em especial o de Matemática. Para D'Ambrosio, U.:

> Há inúmeros pontos críticos na atuação do professor, que se prendem a deficiências na sua formação. Esses pontos são essencialmente concentrados em dois setores: falta de capacitação para conhecer o aluno e obsolescência dos conteúdos adquiridos nas licenciaturas. (D'AMBROSIO, U., 2005, p. 83).

Santos ainda destaca que, segundo Moreira e David (2005),

> a formação do futuro professor de Matemática para o trabalho pedagógico dos números racionais, é questionável o enfoque que se dá na licenciatura, o conjunto dos racionais é abordado como um objeto muito simples. Por outro lado as pesquisas como Santos, Lima e Borges Neto (2005) corrobam com a afirmativa acima e ainda mostram que os futuros professores também não detêm domínio conceitual de frações e que, portanto, faz-se necessário investir na formação inicial desses futuros professores. (MOREIRA; DAVID, 2005 apud SANTOS, M. J. C., 2010, p. 164)

Lorenzato (2010, p. 5) reitera: "[...] ninguém ensina o que não conhece", por essa razão é necessário investir na formação inicial dos futuros professores, pois a possível falha na formação destes interfere diretamente na aprendizagem do alunado, estabelecendo assim um círculo vicioso, o que pode refletir num ensino deficitário.

Portanto, é necessário que os novos docentes, durante sua capacitação seja na Graduação ou na formação continuada, compreendam os conceitos matemáticos que irão ensinar e adquira habilidades relativas à como os conteúdos devem ser ensinados aos seus futuros alunos da Educação Básica. Se eles não tiverem essa formação, dificilmente terão a oportunidade de favorecer seus alunos com práticas de ensino que promovam a sua aprendizagem.

De acordo com os autores e da experiência que tenho como professora de ensino fundamental percebemos que o ensino de frações se dá por meio da memorização de procedimentos sem significado para o aluno e, em alguns casos, até mesmo para o professor em geral, sempre que o professor quer, de maneira contextualizada, relacionar a Matemática com o cotidiano do aluno, sem o conhecimento adequado do conteúdo que ensina. Desta forma, a fragilidade na formação Matemática dos professores implica em lacunas graves na formação dos estudantes que, possivelmente, poderá comprometer seu desempenho na disciplina, não apenas nos anos iniciais, mas também nos anos de escolaridade posteriores.

Em consonância com as ideias de Lorenzato (2010, p. 12) salientamos sobre a importância de o professor investir em sua formação, pois os obstáculos não exime-o da "responsabilidade de ser competente e, considerando que o processo de formação é individual e intransferível, cabe a cada um preencher as lacunas herdadas de sua formação inicial (no curso superior), bem como providenciar a continuada". Assim, é necessário que o professor se mantenha atualizado, devendo estar em contínua formação através de cursos, leituras de livros ou internet.

Alinhada a essas convicções, podemos caucionar que o professor é determinante para o sucesso ou o fracasso da aprendizagem dos alunos, ou seja, desempenha um papel fundamental no ensino dos conteúdos, em especial o de fração e, desta forma as questões relacionadas à formação dos professores estão intimamente ligadas às experiências de aprendizagem destes e, portanto devem estar em constante processo de aquisição e construção, seja na formação inicial ou continuada. Afinal professores bem preparados têm condições privilegiadas para promover estratégias de ensino e propor atividades que promovam uma aprendizagem significativa, e que promova mudanças de atitudes, além, de criar novos valores nas maneiras de pensar e refletir sobre sua prática.

Smole e Diniz destaca, ainda, que para que haja a construção conceitual de fração pelo aluno é preciso que estes

> vivenciem muitas situações que envolvam modelos diferentes que representem o inteiro e que desde cedo analisem os significados que a fração pode ter, bem como seus usos. Receitas, artigos de jornais e revistas, situações cotidianas de divisão de materiais e de medições são contextos naturais nos quais os alunos podem pensar sobre a natureza do todo; no processo de resolução dos problemas, eles têm mais chance de compreender frações como novos números que respondem a questões que não têm solução apenas usando-se os números naturais. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 29).

Sendo assim, é importante que o professor produza diferentes significados com relação às frações para que os alunos possam perceber todos os possíveis significados que a fração pode assumir, pois as dificuldades de aprendizagem desta decorrer não só da maneira como as frações estão sendo ensinadas mas, também devido a complexidade desse número. Para Ponte, J. P. (2014, p. 85), essa complexidade associada ao conceito de fração decorre principalmente dos seus diferentes significados (relação parte-todo, medida, quociente, operador, razão) e que tais significados necessitam ser compreendidos de uma forma individual. Portanto, a não compreensão dos diferentes significados nos quais as frações estão inseridas também pode estar contribuindo para a origem da dificuldade que os alunos apresentam na aprendizagem sobre o conceito de número fracionário.

4.2.1 Frações e seus significados

É notório que os números naturais juntamente com os números decimais resolvem a maioria das situações problemas do cotidiano, no entanto, as frações são fundamentais para uma compreensão mais significativa de número racional, proporcionalidade, probabilidade e cálculo algébrico. Além disso, ajudam a entender melhor escalas, porcentagens, razões, possibilidades - e ainda são frequentemente usadas nas receitas culinárias.

Segundo Bertoni (2009, p. 22-23), a necessidade de novos números (quantificadores) para novas situações, aparecem em meio as situações, misturados aos números naturais. Por exemplo, quando é proposta a divisão de 3 maçãs para duas crianças. A resposta é imediata, ou seja, que dá uma maçã e meia para cada uma. Portanto, uma divisão entre números naturais criou o aparecimento de um quantificador para o resultado, em uma forma que mistura um número natural - 1 - a um quantificador que não é um número natural - meio. Sendo o resultado de uma divisão, e expressando uma quantidade, a noção de número fica subentendido, embora ainda não explicado.

Mas o que é uma fração? Para Dienes, existem,

> essencialmente, duas maneiras de considerar uma fração, assim como existem duas maneiras de considerar qualquer número. Uma fração pode ser considerada como a descrição de um estado de coisas ou, então, como uma ordem, isto é, o resultado de uma ordem para executar uma operação. "Dois terços"pode significar que descrevemos os dois terços de qualquer coisa. Isto é o estado de coisas. Ou poderíamos dizer: "Tome dois terços do objeto em questão, seja o que for". Isto é uma ordem. Mas, o que significa "tomar dois terços"? Admite-se, normalmente, que dividimos aquilo que temos (seja o que for) em três conjuntos equivalentes e que tomamos dois desses conjuntos. A propriedade número, isto é, o cardinal do conjunto-reunião dos dois conjuntos, será dois terços. (DIENES, 1975, p. 2).

Segundo Druck, em Matemática

> a notação p/q indica diferentes noções, dependendo do contexto no qual é empregada: uma fração, a indicação de uma divisão de p por q, uma razão ou um número racional. Além disso, em linguagem corrente, a palavra "fração"significa "pedaço", "porção"(de alguma coisa), o verbo "fracionar"refere-se a "partir", "quebrar"ou "dividir"(algo). (DRUCK, I. F., 2006, p. 1).

Para Lima et al. (2006, p. 59-60), dado um segmento de reta AB. Para medi-lo, é necessário fixar um segmento-padrão u (*segmento unitário*), cuja, a medida desse segmento u, por definição é igual a 1. Consideremos ainda que segmentos congruentes tenham a mesma medida e que $n-1$ pontos interiores decomponha AB em n segmentos justapostos, logo a medida de AB será igual a soma desses n segmentos. Caso estes segmentos parciais forem todos congruentes a u, diremos que *u cabe n vezes* em AB e a medida de AB (representada por $\overline{AB}$) será igual a n. "Pode ocorrer que o segmento unitário não caiba um número exato de vezes em AB. Então a medida de AB não será um número natural. Essa situação conduz a ideia de *fração*."(LIMA et al., 2006, p. 60).

Souza, J. e Parato (2015, p. 129), define fração como "um número que pode representar parte de um inteiro ou parte de uma quantidade".

Para Bertoni (2009, p. 23), fração "representa tanto certas partes da unidade quanto o registro numérico associado a essas partes."Bertoni (2009, p. 20), destaca ainda que o termo fração tem sido frequentemente usado tanto para denominar certas partes de um todo, ou de uma unidade, quanto para denominar uma representação numérica dessa parte.

Desta forma, no processo ensino-aprendizagem dessas partes, não fica claro a intenção de, além de denominar e representar essas partes, à construção de número fracionário, número esse com os quais se pode operar e se pode comparar com os números naturais e entre si, e que podem ser colocados na reta numérica. Portanto, não ficando claras essas intenções, as operações com os números fracionários surgem de repente em forma de regras. Consequentemente, os alunos não constroem o conceito de número fracionário, pois não compreendem os significados iniciais desses números e as relações entre eles, da mesma forma que ocorre quando começam a perceber o sentido dos números naturais.

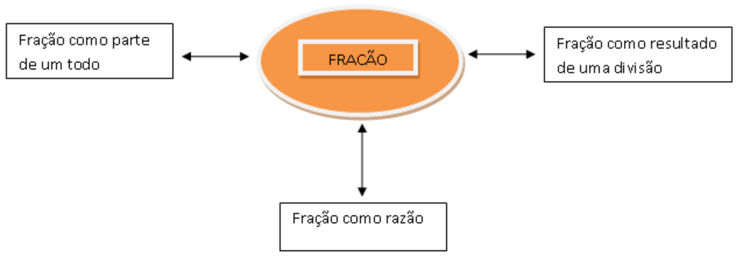
O conceito claramente formado do que os números fracionários quantificam, bem como suas relações com os números naturais, conduz à várias percepções, as quais Bertoni destaca:

> - o de que há uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado. Isto é, sem os fracionários, só se podia quantificar coleções constituídas apenas de objetos inteiros. Com os fracionários, é possível quantificar coleções formadas por unidades e partes delas, oriundas de divisões em partes iguais.
> - de que é possível comparar, em termos das quantidades que representam, esses números entre si e com os números naturais;
> - do reconhecimento de que os novos números entremeiam-se entre os números naturais;
> - do posicionamento dos mesmos na reta numérica;
> - do significado das operações entre eles. (BERTONI, 2009, p. 21).

Ainda que o conceito de fração seja único, ele assume diferentes significados dependendo da situação em que é utilizado. A BNCC (BRASIL - MEC, 2018, p. 304), destaca dentre os significados das frações como sendo: "parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador."

Para Smole e Diniz (2016, p. 25), os principais significados que a fração representa estão destacados na figura 22 abaixo:

Figura 22 – *Significados que a fração representa*



Fonte: Esquema adaptado do livro: Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 25)

Smole e Diniz (2016, p. 27-29), destacam ainda que para alguns pesquisadores, outra ideia do conceito de fração distinta do conceito de fração como parte de um todo é o caso da fração como um operador. E que as medidas devem ser estudadas juntamente com as frações para servir de contexto para as questões que podem dar um maior sentido às frações, visto que historicamente, foram as medidas que deram origem as mesmas.

Portanto, levando em conta os conceitos de frações e à complexidade dos mesmos (Dienes, 1975; Druck, 2006; Lima *et al.*, 2006; Lopes, 2008; Bertoni, 2009; Ponte, 2014; Souza e Parato, 2015; Smole e Diniz, 2016), a construção conceitual de número fracionário deve englobar os seus diferentes significados ou interpretações, os quais dependem do contexto no qual estão inseridos.

Desta forma, considerando os diferentes significados estabelecidos nas obras pesquisadas, apresentaremos neste trabalho cinco significados: "parte de um todo", "medida", "operador", "quociente" e "razão". Uma vez que a aprendizagem do conceito de fração só poderá acontecer, de forma integrada, mediante o desenvolvimento de todos estes significados ao longo da vida escolar do aluno.

4.2.1.1 Fração como parte de um todo

A definição que boa parte dos livros didáticos de Matemática apresenta para introduzir o conceito de uma fração p/q, é a seguinte: "A notação p/q representa a fração ou pedaço correspondente a p partes de uma unidade ou todo que foi dividido em q partes iguais."(DRUCK, I. F., 2006, p. 1). A autora destaca ainda que:

> É necessário esclarecer que aquilo que se chama de *todo* ou *unidade* é uma noção bastante flexível, que varia conforme o contexto ou problema. É preciso ficar claro que, uma vez fixado, o todo funciona como *padrão* único de referência para o problema - neste sentido, *unidade* . (DRUCK, I. F., 2006, p. 4).

Desta forma, as frações como parte de um todo destaca partes de uma determinada quantidade, a qual será considerada como um todo ou inteiro que servirá como referência para a situação problema. O número $\frac{p}{q}$ descreverá uma divisão, cujo o inteiro ou todo será dividido em q partes da quais se considerará p destas partes. Consequentemente, deste ponto de vista, o número p não poderá exceder o número total de partes de q.

A natureza do inteiro, como ele pode ser dividido e o que será considerado uma parte são pontos que merecem atenção, pois, destes pontos dependerá às diferenças de tratamento necessárias para a resolução de cada uma dessas situações.

Quando o todo são grandezas discretas (por exemplo: coleção de objetos, pessoas, animais, bonecas, bolas, etc.), o conceito de fração pode ser associado a subconjuntos de um conjunto, ou seja, é dividir os elementos do conjunto em grupos com igual quantidade de elementos, formando desta forma subconjuntos. Neste caso, não faz sentido que haja quebra dos elementos do conjunto assim, as partes iguais não são necessariamente iguais em forma ou tamanho, mais sim iguais em número de elementos, portanto, a repartição se dá por contagem de unidades. Para Silva, M. J. F. (2017, p. 245), "a situação parte/todo é tratada por números naturais que representam as quantidades de objetos que podem ser contados, agrupado ou distribuídos."

Por exemplo, um conjunto com dezoito cachorros (figura 23), independente da raça, peso, idade, etc. três cachorros quaisquer representam um sexto do conjunto, ou $\frac{1}{6}$ do conjunto. Ou ainda, se quisermos tomar $\frac{1}{2}$ desse conjunto, basta dividir os dezoito cachorros em dois grupos, e tomar um desse grupo, ou seja, $18 \div 2 = 9$, logo cada um dos subconjuntos possuirá 9 cachorros.

Desta forma, as possibilidades de frações em grandezas discretas são sempre finitas, pois, um conjunto com 18 cachorros, não é possível considerar, por exemplo, frações como $\frac{1}{5}$ e $\frac{2}{7}$, pois não podemos dividir os 18 cachorros em 5 ou 7 grupos sem que sobrem cachorros.

Figura 23 – *Fração como parte de um todo: grandeza discreta*

Fonte: Site da Info Escola, cuja matéria é intitulada "Cão". [1]

Para o caso do todo ser grandezas contínuas (por exemplos: chocolate, bolo, pizza, leite, corda, etc.) o conceito de fração é trabalhada como sendo a partição de um todo, que foi subdividida em "n" partes iguais, ou seja, com a mesma medida, desta forma cada parte representa $\frac{1}{n}$ do todo. No caso de grandezas contínuas, o fracionamento se dá pela medição de área, comprimento, massa, volume etc., dependendo do inteiro que se quer fracionar.

Por exemplo, se desejássemos tomar $\frac{1}{2}$ de um copo de leite ou chocolate, o leite e o chocolate deverão ser divididos em partes iguais de capacidade e massa respectivamente.

Figura 24 – *Fração como parte de um todo: grandeza contínua*

Fonte: Site da Pixabay e o site: Beba mais leite, cuja matéria é intulada "1/2 copo de leite por dia é tudo o que um intolerante à lactose precisa". [2]

[1] Endereço eletrônico do site Info Escola: https://www.infoescola.com/mamiferos/cao/. Acesso em 20 abr. 2019

[2] Endereço eletrônico dos site: https://pixabay.com/pt/photos/barra-de-chocolate-chocolate-leite-524263/ e http://www.bebamaisleite.com.br/noticia/12-copo-de-leite-por-dia-e-tudo-o-que-um-intolerante-a-lactose-precisa. Acesso em 20 abr. 2019

Para Smole e Diniz (2016, p. 28), em ambos os casos, a ideia de fração está intimamente relacionada ao ato de dividir o todo em partes exatamente iguais, de maneira que não haja sobra, e assim, considerar uma ou mais partes como frações desse todo.

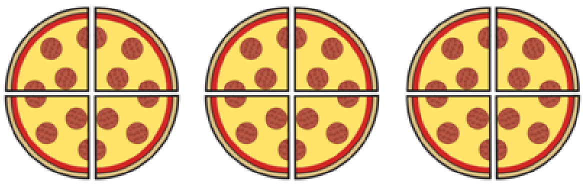
Portanto, a fração como parte de um todo surge da ação de dividir uma grandeza contínua em partes proporcionais ou uma grandeza discreta em partes com quantidades iguais de objetos.

4.2.1.2 Fração como quociente de uma divisão

Aqui a fração é vista como o resultado da divisão de dois números inteiros ($p : q = \frac{p}{q}$; com $q \neq 0$), ou seja, o numerador será dividido pelo denominador. Normalmente, é usada quando se deseja obter o número decimal correspondente. Portanto, a fração é o quociente (resultado) da divisão.

Por exemplo: Quero dividir igualmente três pizzas para quatro pessoas. Qual a fração que cada um receberá? Uma forma de resolver o problema é dividir cada uma das pizzas, em 4 pedaços (como mostra a figura 25 abaixo), assim, cada pedaço representa $\frac{1}{4}$ de uma pizza.

Figura 25 – *Fração como quociente de uma divisão*



Fonte: Storyboardthat [3]

O que nos leva a um total de 12 pedaços para dividir entre 4 pessoas. Logo, cada uma vai ganhar três pedaços, ou seja, $\frac{3}{4}$ de uma pizza.

Para Bertoni (2009, p. 60), esse é "um aspecto pouco explorado na escola. Poucos alunos conseguem perceber que as frações (como partes de uma unidade) podem ser vistas como resultados de divisões de um certo número de unidades em partes iguais."

Portanto, o significado de fração como quociente de uma divisão está associado à ideia de repartição, subdivisão ou distribuição de grandezas, na qual o numerador da fração é dividido pelo número de partes determinado pelo denominador, isto é, a fração representa a quantidade de vezes que p pode ser dividida igualmente em q partes. Podendo desta forma levar a entender a fração como um número decimal.

[3] Endereço eletrônico do site Storyboardthat: https://www.storyboardthat.com/pt/storyboards/pt-examples/denominador-maior–peca-menor. Acesso em 20 abr. 2019

4.2.1.3 Fração como razão

A fração como razão entre duas grandezas é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, tal comparação é uma comparação relativa. Neste caso a fração é o resultado da comparação entre o numerador e o denominador e, portanto a fração não transmite necessariamente a ideia de número.

Por exemplo: Na figura 26, a fração $\frac{2}{3}$ poderia ser o resultado da comparação de duas grandezas que estão na razão de 2 para 3, ou seja, de cada 5 crianças 2 são meninas e 3 são meninos. Logo, a representação fracionária $\frac{2}{3}$, está associada ao significado de razão, não caberia neste caso a leitura "dois terços"e, sim, "dois para 3".

Figura 26 – *Fração como razão*

Fonte: Blog Garotada Missionária, cuja a matéria é intitulada "Como vivem as crianças no mundo?"[4]

Aqui não se está comparando uma parte com o todo, mas sim considerando cada grupo de criança (menina e menino) como uma grandeza diferente e determinando a razão entre as duas.

Segundo Silva, a fração com sentido de razão poderá

> comparar grandezas de mesma natureza ou não, em contextos contínuos e ou discretos, podendo ainda estar associadas a situações do tipo: todo-todo – quando compara as quantidades de dois inteiros; parte-parte – quando compara as quantidades de duas partes de um inteiro ou partes de dois inteiros, ou ainda, parte-todo. (SILVA, M. J. F., 2017, p. 113).

Além disso, a ideia de razão está presente em várias situações do cotidiano como: na porcentagem estabelecendo uma comparação entre um número dado e um conjunto de 100 partes; na probabilidade quando se compara a quantidade de casos favoráveis com a quantidade de casos possíveis; na densidade demográfica, comparando a quantidade de habitantes por Km^2 de uma região; nas receitas culinárias e misturas de líquidos; nas escalas nos mapas planos e miniaturas, e muitos outros.

Portanto, a fração com significado de razão está associada a ideia de comparação entre duas grandezas (do mesmo objeto ou de objetos diferentes), ou seja, as razões são

[4] Endereço eletrônico do Blog Garotada Missionária: http://garotadamissionaria.blogspot.com/2016/04/como-vivem-as-criancas-no-mundo.html. Acesso em 20 abr. 2019

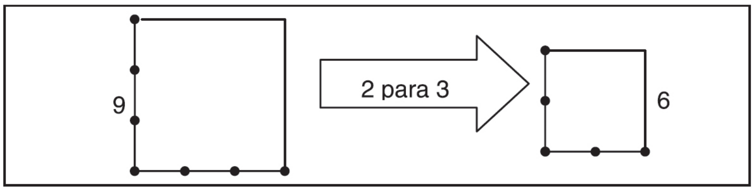
usadas como índice comparativo entre essas duas grandezas. Possui como característica a ideia de par ordenado de números naturais, cuja a representação é dada por $\frac{p}{q}$ ou por $p : q$. Atividades com razões poderá propiciar ao aluno: um melhor entendimento sobre equivalência de frações; ampliar o conhecimento para a proporcionalidade, uma vez que qualquer alteração feita em p acarretará mudanças previsível em q e o desenvolvimento de uma excelente ferramenta para a resolução de problemas.

4.2.1.4 Fração como operador

A fração como operador "age sobre o número para gerar um valor resultado dessa ação."(SMOLE; DINIZ, 2016, p. 27). Diz-se que ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. A fração funciona em quantidades contínuas para reduzir ou ampliar a quantidade no processo, ou seja, o operador $\frac{p}{q}$ reduz as medidas de uma figura (comprimento ou área) quando $p < q$ ou amplia essa medida, quando $p > q$.

Por exemplo: Construa um novo quadrado cujo lado tenha $\frac{2}{3}$ da medida do lado do quadrado de lado 9. Adaptado de (SILVA, M. J. F., 2017, p. 122).

Figura 27 – *Fração como operador*



Fonte: Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. (SILVA, M. J. F., 2017, p. 122).

Assim, o quadrado de lado medindo 9 deve ser transformado, pelo operador $\frac{2}{3}$, em um novo quadrado de lado medindo $\frac{2}{3}$ de 9. Portanto, deve-se dividir o lado do quadrado em três partes de mesma medida e considerar duas dessas partes obtendo deste modo a medida 6 do lado do novo quadrado, conforme a figura 27.

Para o caso discreto Silva, M. J. F. (2017, p. 258-259), "a fração $\frac{p}{q}$ produz sobre a quantidade de elementos de um conjunto um efeito que resulta em $\frac{p}{q}$ vezes a quantidade de elementos do conjunto inicial, $\frac{3}{4}$ de 16 bolinhas é um conjunto com $\frac{3}{4} \times 16$ bolinhas, que resulta em 12 bolinhas."

Portanto, para o caso da fração com significado de operador tem-se que $\frac{p}{q}$ são manipulados de fato como números simplificando a compreensão da multiplicação entre frações. Neste caso, a fração é considerada como um número e não como um par de números, apresentando um contexto natural para a ideia função. Pode surgir também a ideia de inverso, a partir do operador que reconstrói o estado inicial, e também a ideia de identidade, a partir do operador que não modifica o estado inicial.

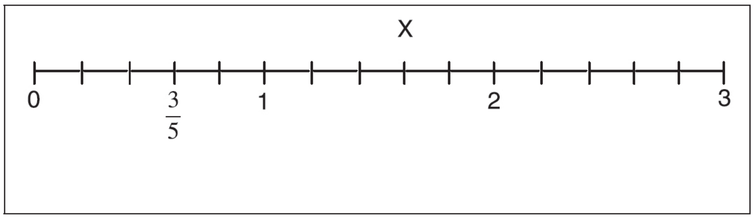
4.2.1.5 Fração como medida

Segundo Silva, M. J. F. (2017, p. 106), as "tarefas envolvendo medições de comprimentos são apropriadas para a percepção da limitação dos números naturais, como resultados de medições, e da necessidade de "novos números" para a quantificação adequada de comprimentos."

Relacionar a ideia de fração com medida ajuda o aluno a perceber, assim como acontece com os números naturais, as frações como número e não apenas como símbolo que associa dois números. Para isso, é interessante a utilização das frações unitárias, pois elas funcionam, neste caso, como um sistema de unidade de medida.

A fração como medida, geralmente, está associada à figura de uma reta numérica ou segmento que possa expressá-la, onde para permitir a medição a unidade escolhida será dividida em q partes, assim $\frac{1}{q}$ é a unidade de medida e o número fracionário $\frac{p}{q}$ indica que $\frac{1}{q}$ foi utilizado p vezes na medição realizada. Por exemplo: Qual a distância entre o zero e o X? Adaptado de (SILVA, M. J. F., 2017, p. 108).

Figura 28 – *Fração como medida*



Fonte: Adaptado do livro: Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. (SILVA, M. J. F., 2017, p. 108)

Observando a figura 28, pode-se perceber que cada unidade foi dividida em cinco partes de mesma medida e que do ponto de origem até o ponto 1, temos uma unidade inteira, a qual foi dividida em cinco partes iguais, isto é, $\frac{5}{5}$. Do ponto 1 até o X temos três partes das cinco que o inteiro foi divido, ou seja, $\frac{3}{5}$. Concluindo, assim, que a medida solicitada é $1 + \frac{3}{5}$ da unidade, que é equivalente a $\frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$. Portanto, da origem até o X temos $1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

De acordo com Silva, M. J. F. (2017, p. 107-110), para a concepção de fração como medida pode-se considerar alguns tipos de tarefas, como:

- Determinar medidas de comprimento de um objeto;
- Determinar medidas em segmentos divididos em partes iguais;
- Determinar medidas em segmentos não divididos em partes de mesma medida e
- Reconstituição da unidade.

Segundo a autora tarefas como estas que associam o significado de fração com medida são fundamentais para trabalhar com frações maiores que a unidade, assim como introduzir a notação de número misto, adição com denominador comum, introdução de equivalência entre números fracionários, fundamentada no reconhecimento de que a mesma parte pode receber nomes diferentes, em função de novas divisões da unidade e a ordenação dos fracionários que auxiliará, mais tarde, na conceituação do conjunto dos números racionais.

Portanto, a ideia de fração como medida é fundamental para que o aluno perceba a necessidade dos números fracionários, dando-lhes significado. Segundo a BNCC (BRASIL - MEC, 2018):

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária.(BRASIL - MEC, 2018, p. 267).

Para isso, a BNCC (BRASIL - MEC, 2018, p. 271), sugere que "esse processo seja iniciado utilizando, preferencialmente, unidades não convencionais para fazer as comparações e medições, o que dá sentido à ação de medir [...]”. Desta forma, o uso de material manipulativo (por exemplo, tira de papel para facilitar a divisão da unidade) escolhido como uma unidade de medida, não padronizada, para fazer a medição de um determinado comprimento, poderá fazer o aluno constatar a necessidade de se subdividi-la para que seja assim possível associar um número à grandeza que está sendo medida. É importante ainda que se utilizem unidades de medidas diferentes para que o aluno perceba que a quantificação do comprimento depende da unidade escolhida, ou seja, o número que representa a medida varia, de acordo com a unidade escolhida.

Observamos desta forma, que o emprego de variadas metodologias pode vir a favorecer a construção dos diferentes significados de fração, de forma dinâmica e flexível e os materiais didáticos manipulativos são recurso para a aprendizagem e sendo assim, eles servem de apoio para a atividade que tem como objetivo principal levar o aluno a construir uma ideia ou um procedimento pela reflexão.

Neste sentido, para que haja uma efetiva construção do conhecimento, faz-se necessário uma constante atualização por parte do professor para reformulação de suas práticas pedagógicas em relação aos conteúdos que irá ensinar e de materiais que o auxilie em seu trabalho docente, para que de fato o professor possa realizar um trabalho de qualidade com seus futuros alunos.

5 A importância dos materiais manipuláveis na aprendizagem

Nos últimos séculos na tentativa de desenvolver uma melhor e maior aprendizagem diversas foram as propostas de utilização de recursos como modelos e materiais didáticos nas aulas de Matemática.

Segundo Lorenzato (2012, p. 3-4), foram muitos os educadores famosos que destacaram a importância do apoio visual ou do visual-tátil como facilitador para a aprendizagem. Assim, por exemplo,

> por volta de 1650, Comenius escreveu que o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificando que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo. [...] Cerca de cem anos depois, Rousseau recomendou a experiência direta sobre os objetos, visando à aprendizagem. Pestalozzi e Froebel, por volta de 1800, também reconheceram que o ensino deveria começar pelo concreto; [...] Enfim, cada educador, a seu modo, reconheceu que a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem. Em termos de sala de aula, durante a ação pedagógica, esse reconhecimento evidencia o papel fundamental que o material didático pode desempenhar na aprendizagem. (LORENZATO, 2012, p. 3-4).

Mas foi na metade do século XX, a partir do movimento da Escola Nova e dos estudos e escritos de John Dewey (1859-1952) que ganhou força toda a discussão em torno de um método ativo de como se aprende, contendo à ideia de canais de comunicação e interferência entre os conhecimentos formalizados da escola e as experiências práticas e cotidianas de vida.

Segundo Smole e Diniz, educadores como

> Maria Montessori (1870-1952) e Decroly (1871-1932), inspirados nos trabalhos de Dewey, Pestalozzi e Froëbel, criaram inúmeros jogos e materiais que tinham como objetivo melhorar o ensino de matemática.[...]. Ganham força nesse movimento a experiência, a vivência e, consequentemente, os materiais manipulativos em matemática, por permitirem que os alunos aprendessem em processo de simulação das relações que precisavam compreender nessa disciplina. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 10).

Os materiais manipulativos estão entre as formas mais comuns de representação materializadas de ideias, propriedades e conceitos matemáticos que se deseja ensinar aos alunos e muitas têm sido as justificativas para sua utilização em sala de aula. Uma delas atualmente usada é de que este é um recurso que torna o processo de aprendizagem para o aluno significativo. De acordo com Smole e Diniz, os pressupostos da aprendizagem significativa são:

- o aluno é o verdadeiro agente e responsável último por seu próprio processo de aprendizagem;
- a aprendizagem dá-se por descobrimento ou reinvenção;
- a atividade exploratória é um poderoso instrumento para a aquisição de novos conhecimentos porque a motivação para explorar, descobrir e aprender está presente em todas as pessoas de modo natural. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 11).

Deste modo, para que a aprendizagem efetivamente aconteça, faz-se necessário a atividade mental, por parte do aluno, e o material manipulativo pode estimulá-lo nesse processo de construção do seu saber matemático. Afinal, o gosto pelo manusear e manipular é inerente ao ser humano e pode trazer/apresentar resultados interessantes, pois pode possibilitar ao aluno estabelecer relações necessárias na construção dos conceitos matemáticos, além de estimulá-los a participarem e interagirem, com o professor e entre si mesmos. Nessa perspectiva, é necessário que o professor entenda que para a aprendizagem acontecer é preciso despertar o interesse do aluno; este pode se dar através de situações que estimulem o conhecimento e possibilite o desenvolvimento de ações que construam um saber consistente e significativo.

Sendo assim, as atividades com materiais manipulativos propicia de maneira refletida que o aluno explore, represente ideias Matemática de múltiplas maneiras e faça conexões entre as diferentes representações dessa ideia, formule hipóteses, observe regularidades, participe e atue no processo de investigação que o auxiliará significativamente na construção de noções Matemáticas.

Outro fato importante a destacar é o desenvolvimento da linguagem Matemática. Segundo Lorenzato (2010, p. 44), a linguagem Matemática atualmente se caracteriza por ser resumida e precisa, possuindo expressões, regras, vocábulos e símbolos próprios. Mas foi exatamente o simbolismo que possibilitou que a Matemática pudesse ser compreendida sem nenhum equivoco pelos matemáticos de qualquer país se tornando assim, uma ferramenta indispensável para outras ciências.

Ainda de acordo com Lorenzato, a Matemática

> também possui uma linguagem própria que se apresenta com seus termos, símbolos, tabelas, gráficos, entre outros. E um dos objetivos do ensino da matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), é a aprendizagem dessa linguagem para se comunicar matematicamente. (LORENZATO, 2010, p. 43).

Desta forma, devido às suas características atuais, a linguagem Matemática, é muito útil. No entanto, Lorenzato (2010, p. 48), salienta que ela requer do professor uma especial atenção, pois a linguagem Matemática pode tornar-se um forte complicador para a aprendizagem da Matemática. Assim, o autor sugere "a organização de um glossário de termos e símbolos, conforme estes forem aparecendo nos estudos", para auxiliar alunos e professores.

Ainda segundo Lorenzato, durante as atividades desenvolvidas em sala de aula,

> tanto a apresentação como o uso da linguagem matemática devem ser gradativos e respeitar o estágio de evolução dos alunos. Isso significa aceitar que os alunos inicialmente se expressem através de sua linguagem para depois, apresentar os termos já consagrados pela linguagem matemática e, finalmente, os símbolos matemáticos. (LORENZATO, 2010, p. 47).

Deste modo, quando são utilizados os materiais manipulativos os alunos inicialmente se expressam através de sua linguagem, ou seja, os alunos enquanto trabalham com o material, naturalmente verbalizam e discutem suas ideias, não fazendo na maioria das vezes o uso adequado da linguagem Matemática. Cabe ao professor trabalhar essa linguagem de forma gradual, pois conhecer os símbolos matemáticos, saber onde e para que ele é utilizado, e consequentemente se ele pode, e quando pode ser trocado por uma frase escrita constitui uma tarefa igualmente importante nesse processo. Para Lorenzato (2010, p. 47), por exemplo, quando o assunto é a soma dos ângulos internos de triângulo, o aluno poderia apresentar a seguinte graduação nas diferentes linguagens: ""as três pontas dão meia volta", [...], "a soma dos três ângulos dá 180°", "a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°", "$\forall\Delta, \alpha + \beta + \gamma = 180°$"". Assim, ao refletir sobre as situações formalizadas e discutir com seus colegas, o aluno estabelece uma negociação entre diferentes significados de uma mesma noção. Para Smole e Diniz:

> O processo de negociação solicita a linguagem e os termos matemáticos apresentados pelo material. É pela linguagem que o aluno faz a transposição entre as representações implícitas no material e as ideias matemáticas, permitindo que ele possa elaborar raciocínios mais complexos do que aqueles presentes na ação com os objetos do material manipulativo. Pela comunicação falada e escrita se estabelece a mediação entre as representações dos objetos concretos e as das ideias. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 13).

Sendo assim, a maneira como as atividades envolvendo materiais manipulativos são trabalhadas em sala de aula é decisiva para que eles sejam eficazes e de fato auxiliem os alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos. Smole e Diniz (2016, p. 15-16) destaca duas perspectivas metodológicas importantes que formam a base do projeto dos materiais manipulativos para se aprender Matemática: "a utilização dos recursos de **comunicação** e a proposição de **situações-problema**". E ainda dois recursos complementares: "a **produção de texto** pelo aluno e o **painel de soluções**".

A aprendizagem exige sistematização, momentos de autoavaliação por parte do aluno assim, a oralidade e a escrita servirão de aliados no sentido de consolidar para si o que está sendo aprendido, ou seja, para que de fato os alunos concretizem a reflexão nas atividades propostas é importante estimular o aluno a representar, falar, escutar, escrever e ler, habilidades estas da comunicação que devem fazer parte da aprendizagem Matemática. "Isso se justifica porque, ao tentar se comunicar, o aluno precisa organizar o pensamento, perceber o que não entendeu, confrontar-se com opiniões diferentes da sua, posicionar-se, ou seja, refletir para aprender." (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 15).

Portanto, a comunicação e a interação entre os alunos durante as atividades com materiais manipulativos tem um papel fundamental na aprendizagem Matemática, pois propicia a construção do elo entre os conhecimentos informais e a linguagem simbólica natural da Matemática. Mediante a comunicação o aluno será capaz de perceber as relações entre representações gráficas, simbólicas, verbais e as ideias matemáticas. Compreenderá que as representações servem para descrever distintas situações e que algumas formas de representações são mais úteis do que outras, consequentemente começará a entender a importância da Matemática, sua flexibilidade e utilidade.

Associar o uso dos materiais manipulativos à perspectiva metodológica da resolução de problemas é outro aliado importante, pois segundo Smole e Diniz:

> é pela problematização ou por meio de boas perguntas que o aluno compreende relações, estabelece sentidos e conhecimentos a partir da ação com algum material que representa de forma concreta uma noção, um conceito, uma propriedade ou um procedimento matemático. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 15).

A resolução de problemas propõe a aprendizagem do conhecimento com significado, salienta a perspectiva do aluno apropriar-se de conhecimentos matemáticos constituídos por informações, técnicas, conceitos, habilidades e atitudes, concomitantemente a descobrir diferentes estratégias de solução, a desenvolver meios para verificar os resultados confrontando-os com os métodos utilizados, exercitando a criatividade e o processo de tomada de decisão.

Resolver um problema significa despertar no aluno uma atitude de investigação diante do que está sendo explorado. Assim, com o objetivo de mobilizar o interesse e orientar as ações dos alunos, dando-lhes ideia de onde devem chegar é indispensável que o professor proponha atividades que apresentam desafios, obstáculos a serem ultrapassados e, para ultrapassá-lo é preciso experimentar, comparar, opor, construir hipóteses, prever consequências, comprovar.

Portanto, durante a atividade com materiais manipulativos, além de aprender a dar uma resposta que tenha sentido e que garanta a apropriação do conhecimento envolvido no problema, é preciso testar seus efeitos e comparar diferenças de solução. Desta forma é importante que o professor proponha perguntas que leve o aluno a expor seu ponto de vista, a descrever e explicar o processo utilizado. A final, o surgimento de diferentes estratégias de solução, o confronto entre elas é que são os aspectos relevantes, porque é através deles que o aluno vai desenvolvendo uma postura que gera o senso crítico e a criatividade - condições fundamentais para a aprendizagem.

A produção de texto como recurso para complementar as atividades com materiais manipulativos é uma alternativa para verificar a aprendizagem, desenvolver a linguagem Matemática, estimular o raciocínio matemático e despertar a visão crítica em relação aos conteúdos abordados.

A produção de textos pelos alunos deve ser motivadora, pois, a partir do momento em que o aluno escreve, ele possivelmente comece a desmistificar a Matemática e nesse momento, ele é levado a ir além dos cálculos, a pensar o assunto em questão. Esta produção pode ser individual, coletiva ou em grupo, o que será determinado pelo grau de dificuldade da atividade proposta, do que os alunos conhecem ou precisam conhecer e dos objetivos da produção. "Para o aluno, a produção de texto tem sempre a função de: organizar a aprendizagem; fazer refletir sobre o que aprendeu; construir a memória da aprendizagem; propiciar uma autoavaliação; desenvolver habilidades de escrita e de leitura." (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 17).

A produção de texto tendo como auxílio o material manipulativo se fundamenta, pois este "pode ser utilizado tanto porque a partir dele pode-se desenvolver novos tópicos ou ideias matemáticas, quanto para dar oportunidade ao aluno de aplicar conhecimentos que ele já possui num outro contexto, mais complexo ou desafiador. [...]." (SMOLE et al., 1996 apud SMOLE; DINIZ, 2016, p. 14).

Sendo assim, para o professor a produção de texto poderá ser utilizada no início de um novo tema quando o objetivo for o de investigar o conhecimento prévio do aluno sobre o assunto, isto é, funcionará como uma sondagem ou um diagnóstico dos alunos. Por exemplo, o professor, a fim de verificar determinado conhecimento prévio sobre frações, pode propor uma atividade tendo como base um determinado material manipulativo para pedir aos alunos que escrevam o que sabem a respeito desse assunto e desta forma, o professor poderá criar as ações necessárias para resgatar incompreensões ou ideias distorcidas referentes a um determinado assunto e, ao mesmo tempo, avaliar os avanços que podem ser feitos.

A produção de texto pode ainda ser usada para o fechamento de um dado conteúdo em que o aluno deva explicar o que aprendeu. Por exemplo, o professor com o auxílio do material manipulativo poderá propor que os alunos expliquem o que entenderam sobre frações, opinar sobre a parte da matéria que merece mais dedicação por ser mais difícil, que parte é mais interessante, explicar alguns exemplos, ou seja, o professor saberá quais aspectos da atividade os alunos apresentaram mais incompreensões, em que pontos avançaram, se o que era essencial foi compreendido e que intervenções será preciso fazer.

Smole e Diniz ressalta inda a importância dessas produções serem conservadas de forma que os alunos possam utilizá-las sempre que preciso.

> Isso garante autoria, faz com que os alunos ganhem memória sobre sua aprendizagem, valorizem as produções pessoais e percebam que o conhecimento em matemática é um processo vivo, dinâmico, do qual eles também participam. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 18).

Portanto, a produção de texto nas aulas de Matemática através do uso de materiais manipulativos tem como objetivo provocar a busca de alternativas para o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois ao produzir estes textos o aluno será estimulando a pensar logicamente, relacionar ideias, argumentar sobre os conceitos que está sendo estudado, assim como poderá compreender melhor suas dificuldades e a de seus colegas, e o professor poderá ver a forma com que seu aluno compreendeu aquilo que lhe é ensinado. Logo, a produção de texto pode ser explorada como recurso metodológico capaz de enriquecer o processo ensino aprendizagem, pois, prioriza a autonomia e criticidade, estimulando o aluno a acreditar que ele pode ser o grande responsável pela sua aprendizagem e desenvolvendo suas habilidades na construção do seu próprio conhecimento.

E por fim o painel de soluções é uma maneira de expor as produções dos alunos em varal, mural ou nas parede da sala. Smole e Diniz pontua que:

> Na produção individual ou em duplas de desenhos, textos e, muito especialmente, no registro das atividades e na resolução de problemas, os alunos podem aprender com maior significado e avançar em sua forma de escrever ou desenhar se suas produções são expostas e analisadas no coletivo do grupo classe. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 18).

Desse modo, a organização de painéis e as exposições com produções dos alunos permitem ao professor obter informações importantes sobre os conhecimentos prévios de cada aluno. Esse diagnóstico orienta o trabalho e permite que o professor planeje atividades apropriadas para superar as dificuldades encontradas e atender às necessidades individuais.

Portanto, o uso de materiais manipulativos como recursos colaborativos no ensino de Matemática no qual os alunos podem aprender pela construção de significados, deve ter como base atividades que permitam a reflexão por meio de boas perguntas e pelo registro oral ou escrito das aprendizagens. No entanto, Smole e Diniz destaca que:

> Embora sejam possibilidades mais concretas e estruturadas de representação de conceitos ou procedimentos, os materiais não devem ser confundidos com os conceitos e as técnicas; estes são aquisições do aluno, pertencem ao seu domínio de conhecimento, à sua cognição. Daí a importância de que as ideias ganhem sentido para o aluno além do manuseio com o material; a problematização e a sistematização pela oralidade ou pela escrita são essenciais para que isso aconteça. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 20-21).

Behr *et al.* (1983, p. 91-126), afirma ainda que os materiais manipulativos quando adequadamente concebidos, sequenciados e utilizados podem levar a reconstrução contínua das condições do problema durante a sua solução. Além disso, para ele, as ideias matemáticas incorporadas aos materiais manipulativos, podem ser abstraídas em estruturas lógico-matemáticas que resumidamente provoca a diminuição na dependência destes materiais, tornando-os independentes dos estímulos visual-perceptual. A compreensão das ideias matemáticas torna-se significativas quando o aluno consegue transitar entre as representações do material manipulativo e o simbólico. (BEHR et al., 1983 apud SILVA, F. A. F.; BALDOW, 2012, p.5)

Para Lorenzato (2012, p. 61), o material manipulativo exerce um papel importante na aprendizagem, pois "facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar ao aluno na construção de seus conhecimentos."

Sarmento também aponta algumas vantagens na aprendizagem dos estudantes quando estes participam de alguma atividade utilizando materiais manipuláveis:

> 1. Propicia um ambiente favorável à aprendizagem, pois desperta a curiosidade das crianças e aproveita seu potencial lúdico;
>
> 2. Possibilita o desenvolvimento da percepção dos alunos por meio das interações realizadas com os colegas e com o professor;
>
> 3. Contribui com a descoberta (redescoberta) das relações matemáticas subjacente em cada material;
>
> 4. É motivador, pois dar um sentido para o ensino da matemática. O conteúdo passa a ter um significado especial;
>
> 5. Facilita a internalização das relações percebidas. (SARMENTO, 2010, p. 4).

É importante perceber o entrelaçamento entre a teoria e a prática educativa, que lecionar não é só transmitir conceitos e informações, mas, é acima de tudo, a oportunidade de propiciar ao aluno um lugar adequado para a interação entre sujeitos que, em todo momento, aprendem, ensinam, vivem e avaliam o saber, o contexto e a si mesmos.

D'Ambrosio, B.S. e Lopes tomando como pressuposto que a Matemática faz parte do cotidiano de todas as pessoas, desde as experiências mais simples até as mais complexas. Defendem que

> os conteúdos matemáticos precisam ser explorados na escola de forma mais ampla possível, para que possam gerar nos alunos a construção e a apropriação de conhecimentos que servirão para que compreendam a realidade e possam transformá-la. Além disso, o ambiente de sala de aula deveria favorecer a criação de estratégias, a argumentação, a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia e, também, a confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. Sabemos que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor

> para o ensino; no entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para o professor que ensina Matemática construa sua prática. (D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, 2015, p. 173-174).

Ademais, a Matemática faz parte do cotidiano de qualquer aluno, é utilizada nas mais variadas situações do dia a dia, ou seja, perspectiva-se que ela pode ser fascinante para o aluno. Porém, este fascínio, gosto, pela Matemática é inicialmente pessoal, mas pode variar também pela forma como o professor a trabalha em sala de aula.

Desta forma, o uso do material manipulativo pode ser um caminho para propiciar ao aluno um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica. Além disso, o seu uso tornam as aulas mais atraentes e dinâmicas, despertando o interesse do aluno e, quando há um objetivo bem definido a ser desenvolvido, embasando e dando suporte, o material manipulativo possibilita ao aluno a realização de observações, constatação de hipóteses e a elaboração e sondagem de estratégias.

Lorenzato (2012, p. 21), ressalta que é sempre bom termos em mente que a realização em si de atividades com material manipulativo ou visuais não garante por si só a aprendizagem. E que a utilização de todo e qualquer material manipulativo exige alguns cuidados especiais por parte do professor. Entre os quais Lorenzato destaca:

> i) dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
>
> ii) incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
>
> iii) mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
>
> iv) realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
>
> v) planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
>
> vi) sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material. (LORENZATO, 2012, p. 54).

Portanto, a atuação do professor é determinante para o sucesso ou fracasso escolar. Lorenzato salienta ainda que, ao planejar a aula, é preciso que o professor de Matemática, pergunte-se:

> será conveniente, ou até mesmo necessário, facilitar a aprendizagem com algum material didático? Com qual? Em outras palavras, o professor está respondendo as questões: "Por que material didático?"e "Quando utilizá-lo?". Em seguida, é preciso perguntar-se: "Como esse material deverá ser utilizado?". Essa última questão é fundamental, embora não suficiente,

> para que possa ocorrer uma aprendizagem significativa. (LORENZATO, 2012, p. 24).

O uso destes materiais deve ser pensado, refletido e devem estar vinculados a objetivos bem definidos, de tal forma que possa provocar a reflexão por parte do aluno de modo que elas possam criar significados para ações que realizam com eles, caso contrário o seu uso ficará restrito somente à manipulação ou ao simples manuseio que o aluno quiser fazer dele.

Portanto, para que haja uma aprendizagem significativa por parte do aluno é necessário o emprego correto do material, isto é, é preciso conhecer o porquê, o como e quando colocá-lo em prática. Também é importante que o professor coloque situações problemas a serem explorados oralmente com os alunos, ou para que eles em grupo façam uma "análise" sobre eles. Ainda é interessante que, refletindo sobre a atividade, os alunos troquem impressões e façam registros individuais e coletivos sobre os conceitos aprendidos.

Com o pensamento de que os materiais manipuláveis podem contribuir na aprendizagem de conceitos matemáticos, este trabalho visa propor uma sequência didática com intenção de diminuir as dificuldades dos alunos, mais especificamente o aprendizado de frações, pois segundo Smole e Diniz (2016, p. 23) são muitas as pesquisas que mostram a dificuldade dos alunos em aprender sobre os números racionais, especialmente em sua forma fracionária. As avaliações nacionais, como as do SAEB - Sistema de Avaliação da Educação Básica, desenvolvido pelo INEP/MEC (2001, 2003), também apontam tais dificuldades.

Para Dienes (1975, p. 1), é necessário que "a escola apresente experiências em que a ideia de fração e de relações entre frações se elabore na própria mente da criança. Para tais exercícios, torna-se necessário material didático concreto, [...]"

Entende-se aqui como material manipulativo ou concreto, objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Estes objetos podem ser reais e terem aplicação no cotidiano ou podem ser objetos usados para representar uma ideia. (NACARATO, 2005, p. 3).

Assim, estes objetos ou coisas podem auxiliar na apropriação de conceitos matemáticos, pois por meio deles os alunos podem manusear e perceber as relações matemáticas presentes e, talvez, despertar o gosto pela mesma.

> Nessa concepção de aprendizagem, o material concreto tem fundamental importância pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos. (LORENZATO, 2012, p. 43).

Neste sentido, temos como hipótese de que o ensino e aprendizagem de frações pode ser melhorado, aprofundado e compreendido quando se utilizam materiais manipulativos em sala de aula, tais como o tangram, os mosaico, os origami, os blocos lógicos, as escalas de Cuisenare, os jogos, dentre outros. Entendemos que estes materiais, quando bem utilizados pelo professor podem contribuir muito para a apropriação e formalização dos conceitos fracionários.

Manter o aluno atento e interessado é sem dúvida, hoje, um dos maiores desafios do professor. Assim, o uso de materiais manipuláveis pode, por exemplo, vir ao encontro dessas necessidades, contribuindo de forma significativa não só para o aprendizado do aluno, mas também para a formação docente.

Assim, esperamos que tarefas realizadas com o auxílio de materiais manipulativos, especificamente o Tangram, possam instigar a curiosidade e contribuir para com o desenvolvimento do pensamento fracionário, a abstração, a criatividade, a percepção espacial e a concentração do aluno.

A seguir daremos a conhecer um pouco sobre o Tangram.

5.1 O Tangram

O Tangram é um quebra-cabeça chinês, constituído por sete peças, o qual não se sabe exatamente quando surgiu. No entanto, é notório que se trata de um jogo de origem milenar. Para Souza *et al.*, com as peças do Tangram é

> possível criar e montar cerca de 1700 figuras diferentes entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas entre outros. As regras desse jogo consistem em usar as sete peças em qualquer montagem colocando-as lado a lado sem sobreposição. Este jogo foi trazido da China para o Ocidente por volta da metade do século XIX e em 1818 já era conhecido na América, Alemanha, França, Itália e Áustria. (SOUZA, E. R. et al., 2008, p. 1-2).

Sobre a criação do Tangram existem várias histórias distintas, sendo que (MARTINS; MARQUES; RAMOS, 2015) destaca várias histórias, como a do "mensageiro e o Imperador":

> Há cerca de 4000 atrás, um mensageiro partiu o espelho quadrado do imperador Tan, quando o deixou cair ao chão. O espelho partiu-se em sete pedaços. Preocupado, o mensageiro foi juntando as sete peças, a fim de remontar o quadrado. Enquanto tentava resolver o problema, o mensageiro criou centenas de formas de pessoas, animais, plantas, até conseguir refazer o quadrado. (MARTINS; MARQUES; RAMOS, 2015, p. 11).

Ou a história do "discípulo e o mestre", a qual dizia:

> Um jovem chinês despedia-se do seu mestre para fazer uma grande viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma

> quadrada e disse: Com esse espelho, registarás tudo o que vires durante a viagem para me mostrares na volta. O discípulo, surpreso, indagou: Mas mestre, como poderei mostrar-lhe, com um simples espelho, tudo o que encontrar durante a viagem? No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu-lhe das mãos e quebrou-se em sete peças. Então o mestre disse: Agora poderás, com essas sete peças, construir figuras para ilustrar o que viste durante a viagem. (MARTINS; MARQUES; RAMOS, 2015, p. 11-12).

Independente de qual seja a lenda sobre a criação do Tangram, este quebra-cabeça tem sido utilizado como material didático nas aulas de Artes e cada vez mais nas aulas de Matemática, pois apresenta um forte apelo lúdico e proporciona aos alunos o desenvolvimento de habilidades de pensamento. (SOUZA, E. R. et al., 2008, p. 2-3).

Para Santos, C. H. e Imenes (1987, p. 43), o Tangram é um quebra-cabeça composto por sete peças que possuem formas geométricas bem conhecidas. São cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo, originados da decomposição de um quadrado. A idade e o inventor do Tangram são desconhecidos. Os chineses o conhecem por "Tch'i Tch'iao pan", que significa "As sete tábuas da argúcia (habilidade, destreza)", tal como pode ser observado na figura 29 abaixo:

Figura 29 – Imagem do Tangram

Fonte: Site Geniol [1]

As peças do quebra-cabeça são chamadas *tans*. Para montá-lo o aluno deve utilizar todas as peças sem sobrepô-las, mas unindo-as pelos lados, isto permite que seja formada vários desenhos/formas. De acordo com Santos e Imenes para formar uma determinada figura,

[1] Endereço eletrônico: https://www.geniol.com.br/raciocinio/tangram/. Acesso em 05 out. 2018

> *é necessário concentração, habilidade e sensibilidade. É preciso conhecer bem as sete formas geométricas que compõe o jogo e perceber certas relações entre estas formas e a figura que se deseja formar. Muitas vezes a solução para uma determinada figura aparece quando se está tentando montar uma outra.* (SANTOS, C. H.; IMENES, 1987, p. 43-44).

Gangi considera que o Tangram é util,

> desde que o docente utilize em suas aulas [...] como um material lúdico pedagógico, enriquecendo o conhecimento do discente, encorajando a curiosidade, a reflexão, a paciência e a criatividade, ou seja, a eficácia do Tangram em sala de aula está nas mãos dos professores. Escolher o conteúdo a ser trabalhado, como: formas geométricas, simetria, frações, divisão, área, perímetro, medidas, congruência, semelhança, ângulos da figura, conforme a série em estudo, porém, é um jogo que pode ser elaborado, preparado, organizado, formado, comprado e construído pelo próprio discente. (GANGI, 2009, p. 3).

Portanto, o Tangram pode ser utilizado nas aulas de Matemática para se atingir diferentes objetivos, como por exemplo: introduzir conceitos de operações com frações, porcentagens ou estudar polinômios, identificar formas geométricas, compor e decompor polígonos, relacionar elementos de um polígono, explorar o conceito de área, resolver problemas envolvendo o teorema de Pitágoras, relacionar área e perímetro, relacionar área e fração, construir e representar polígonos, verificar se os triângulos do Tangram são semelhantes. Além disso, o Tangram é um interessante material de apoio para o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Piccinin e Martins (2014, p. 17), no entanto, destaca que o uso do Tangram não precisa ficar restrito apenas ao uso costumeiro, inerente a Geometria Plana, pois este material manipulativo "pode estimular o interesse dos alunos pelo estudo da Matemática, auxiliando no desenvolvimento do raciocínio lógico, exercitando a paciência e a concentração, melhorando a socialização e o trabalho em grupo, assim como o espírito investigativo e crítico." Ademais, o Tangram como auxílio didático em sala de aula, propícia um aumento de interesse, motivação e aprendizado por parte dos alunos, tornando as aulas mais dinâmica e produtiva, contando com maior participação dos educandos na explicação e discussão do conteúdo, facilitando a compreensão da ideia de fração e de sua simbologia, além de favorecer a interação entre eles, tornando-os sujeitos ativos no processo de aprendizagem.

Smole e Diniz (2016, p. 106), ressalta que a "partir do 4º ano, o Tangram pode ser utilizado para trabalhar a conceituação de frações e operações entre frações, e auxiliar no desenvolvimento do conceito de área."

Rodrigues (2016, p. 28-29), enfatiza que o Tangram, enquanto recurso de ensino colabora sim, qualitativamente e quantitativamente, de forma significativa, prazerosa e interessante para a compreensão, construção e fixação do conceito de fração, aumentando também, o nível de concentração, esforço, participação e motivação dos alunos. A autora destaca ainda que o Tangram é

> de fácil acesso, uma vez que pode ser construído pelo próprio aluno, e também por contribuir para assimilação do conhecimento teórico mais significativo,[...] desenvolve no estudante o raciocínio, a criatividade e várias outras habilidades. (RODRIGUES, 2016, p. 3).

Fornari salienta ainda que o Tangram,

> vem de encontro às necessidades dos alunos em desenvolver a transição do conhecimento construído de forma concreta até chegar à abstração, desenvolvendo ao mesmo tempo requisitos para a construção de conhecimentos posteriores que oferece inúmeras possibilidades em despertar condições de elaborar, compreender e construir os conceitos fracionários e geométricos já vistos em anos anteriores, mediante a sua utilização e exploração. (FORNARI, 2014, p. 2).

A autora ainda destaca o Tangram como um excelente recurso para auxiliar no ensino aprendizagem de frações e que é possível, desenvolver de maneira contextualizada o conhecimento e ainda abordá-lo de forma crítica e reflexiva, a partir da compreensão e manipulação das figuras planas presentes no jogo, realizando atividades que podem ser à base do conhecimento efetivo no que se refere ao conteúdo de frações, como conceito, comparação e equivalência, alcançando assim, um bom ensino aprendizagem neste conteúdo. E que o Tangram pode ser utilizado como

> um jogo de construção e fixação de conceitos matemáticos, principalmente no conteúdo de frações, através de situações que estimulam a curiosidade, tornando o aluno mais consciente da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas na vida real. Entendendo que a matemática pode ser fascinante para o aluno e que isso depende, principalmente, do modo como é trabalhada. (FORNARI, 2014, p. 3).

Portanto, para o uso do Tangram como ferramenta no ensino aprendizagem de fração é importante que o professor tenha em mente os objetivos da atividade, para que fique clara a orientação e a escolha das mesmas e de sua exploração. Para Fornari (2014, p. 5), o professor deve: possibilitar de maneira contextualizada o conhecimento; atuar como facilitador ao conduzir as atividades, questionando, complementando e assegurando o processo da descoberta; estar atentos ao que cada aluno assimila no que se referem ao desenvolvimento da aprendizagem; analisar as suas reações diante de cada atividades proposta em sala de aula, pois somente assim será possível alcançar uma aprendizagem de fato significativa.

Nesse sentido, as tarefas com o Tangram devem possibilitar que o aluno construa sua compreensão sobre os conceitos, ou seja, as tarefas precisam auxiliar o aluno a transpor o conhecimento construído de forma concreta para sistematização, formalização e abstração. Elas devem desafiar, surpreender e propiciar a observação, análise e discussão acerca das estratégias e possíveis resultados. Isto é, cabe ao professor à tarefa de utilizar metodologias diferentes as quais contribua para com a aquisição dos conhecimentos matemáticos e ele só terá sucesso nessa tarefa se estiver atento às demandas pessoais e sociais, bem como permanecer em constante pesquisa no seu trabalho.

Segundo D'Ambrosio, U. (2005, p. 120), é importante a "adoção de uma nova postura educacional, a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino aprendizagem baseado numa relação obsoleta de causa-efeito."

É imprescindível que na luta por uma escola de qualidade, busquem-se alternativas de pesquisas e meios para que a Matemática seja ensinada como uma linguagem para a interpretação do mundo em seus diversos contextos. Além disso é importante que o professor entenda que a Matemática ensinada em sala de aula deve, de alguma forma, ser útil aos alunos, e que as atividades desenvolvidas possam levar o aluno a compreender, explicar ou organizar sua realidade. E que ao final de cada aula o professor possa ter ensinado de forma clara e propiciado ao aluno um aprendizado efetivo e prazeroso.

Sendo assim, esperamos contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e intuitivo dos alunos, propiciando uma aprendizagem prazerosa e significativa sobre fração. E, que este trabalho possa ser útil para os professores, enquanto consulta para o trabalho em sala de aula e que as atividades que serão propostas possam fornecer subsídios em seu trabalho pedagógico diante de seus alunos, para: conhecer algumas das histórias sobre a origem do Tangram e as regras do quebra-cabeça; identificar cada peça do Tangram e saber nomeá-las; construir, a partir do quadrado, o Tangram por meio de dobraduras; entender o conceito de fração relacionando ao significado parte de um todo; compreender a noção de equivalência entre frações; comparar frações; resolver situações problemas que envolvam as operações com números fracionários.

A sequência didática explorará tarefas que enfatizam a investigação e a descoberta, tal como as apresentadas a seguir:

Atividade 1

Tempo estimado para esta atividade: 2 à 3 aulas.

Apresentar o Tangram e sua história, sendo o objetivo principal analisar os conhecimentos da turma sobre o Tangram. Dessa maneira, deve-se questionar os alunos se conhecem o jogo e sua origem. Em seguida, fazer uma breve explanação, por meio de slides, das possíveis origens do Tangram. Como por exemplo, as relatadas por (MARTINS; MARQUES; RAMOS, 2015, p. 11-12)

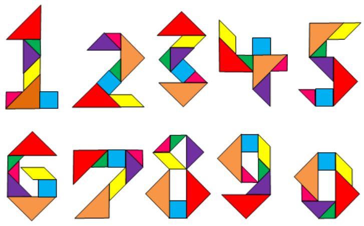
Ou ainda a história segundo Moreira (2016, p. 42):

> Era uma vez um ser humano que era muito quadrado.
>
> De tão inconformado com sua "quadradice", entrou em crise e começou a olhar-se sob outros ângulos. Na tentativa de compreender-se melhor, fez um movimento de voltar-se para si mesmo. E descobriu que poderia transformar-se em dois triângulos. Ficou muito feliz com essa transformação.
>
> Percebeu que, ao dividir-se em dois triângulos, separou seu corpo de sua cabeça. Então, resolveu que, para compreender o mundo e a si mesmo, ele deveria dividir sua cabeça entre a razão e a emoção e criou mais dois triângulos.
>
> Ao dobrar seu o corpo pela cintura, descobriu que poderia criar um novo triângulo, mas o que chamou sua atenção foi o que restou dessa transformação: agora ele tinha um barquinho, que poderia levá-lo para longe, muito longe, aonde ele nunca havia ido antes, em toda a sua vida de "quadradice".
>
> E navegou, navegou, até que bateu em um rochedo e partiu-se ao meio, mas não desanimou: ao ver-se quebrado, percebeu que havia encontrado um par de sapatos. E decidiu: um dos pés do sapato iria pensar pela emoção, e o outro, pela razão. Aquele que era seguido pela emoção acabou sendo um pouco precipitado e quebrou a ponta do sapato: e ele descobriu que seu pé se dividiu em um triângulo e um quadrado.
>
> O outro pé, que era regido pela razão, ficou muito preocupado e retraído. E, por ficar sem reação por tanta precaução, acabou quebrando seu calcanhar.
>
> Depois de toda essa viagem em busca pelo conhecimento de si mesmo, o homem quadrado descobriu que nunca havia deixado de ser quadrado, mas que poderia transformar-se a partir do conhecimento que ele havia construído durante sua vida: sua essência era a mesma, mas agora os novos conhecimentos enriqueceram sua compreensão do mundo e dos outros seres humanos ao seu redor.
>
> E, ao voltar a ser quadrado, teve dificuldade para encontrar sua forma original, porque nunca mais voltaria a ser a simples soma das partes: sua capacidade de dividir-se em vários formatos o havia tornado em um ser múltiplo e cheio de novos sentidos.

Após a apresentação e discussão do possível surgimento do Tangram e do conhecimento dos alunos sobre o quebra-cabeça, entregar lhes as histórias com as lendas impressa para que estes colem no caderno ou montem um portfólio e um Tangram para recorte. É interessante também se possível, propor aos alunos que pesquisem em livros, internet etc. outras histórias sobre o surgimento do Tangram.

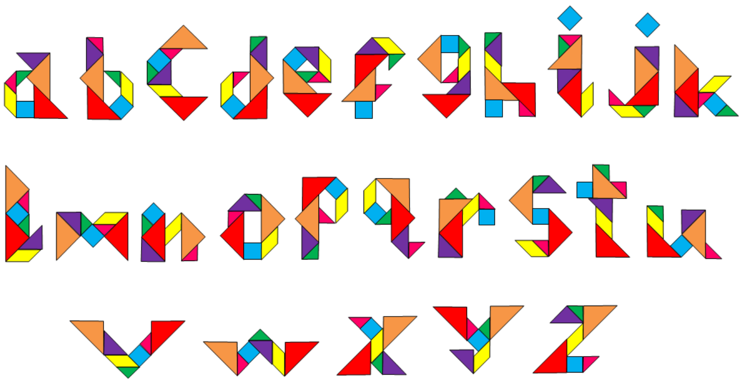
Ademais, é importante propiciar ao aluno um momento de jogo, desta forma deixar um tempo livre para que eles possam explorar as peças, descobrir as figuras que podem ser formadas. Como por exemplo: números (figura 30), letras do alfabeto (figura 31) ou outras construções conforme a figura 32.

Figura 30 – Construção dos algarismos a partir das peças do Tangram



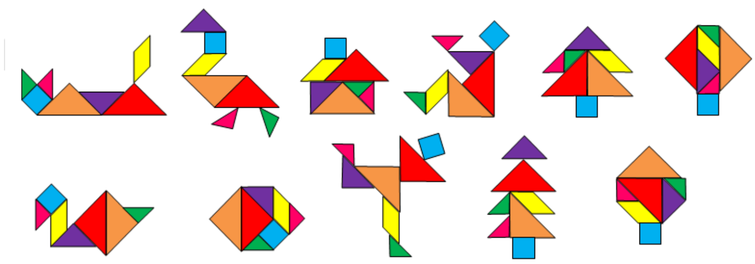
Fonte: Criado pela autora com base no livro: A Matemática das sete peças do Tangram (SOUZA, E. R. et al., 2008)

Figura 31 – Construção das letras do alfabeto a partir das peças do Tangram



Fonte: Criado pela autora com base no livro: A Matemática das sete peças do Tangram (SOUZA, E. R. et al., 2008)

Figura 32 – Outras construções formadas a partir das peças do Tangram



Fonte: Criado pela autora com base no livro: A Matemática das sete peças do Tangram (SOUZA, E. R. et al., 2008)

Para Souza *et al*, o

> Tangram é antes de mais nada um jogo, um quebra-cabeça e, por isso, as atividades iniciais devem objetivar prioritariamente o aspecto lúdico. Assim, antes do professor apresentar modelos, construções ou representações já prontos os alunos devem descobrir diferentes possibilidades de combinar e agrupar as peças. (SOUZA, E. R. et al., 2008, p. 11).

Em seguida, os alunos poderão ser desafiados a montarem, usando as sete peças do Tangram e sem que haja sobreposição das peças: triângulo, quadriláteros, pentágonos, hexágonos. A construírem o quadrado e o triângulo utilizando: duas peças, três peças, quatro peças, cinco peças e sete peças.

Atividade 2

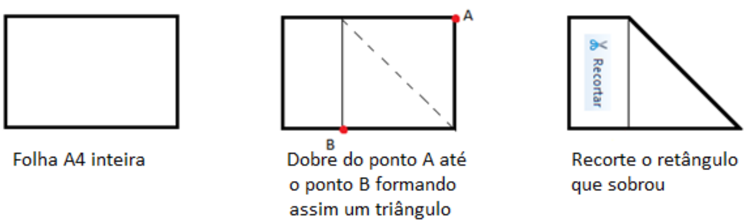
Tempo estimado para esta atividade: 1 à 2 aulas.

Construir o Tangram através de dobraduras [2]. De acordo com Souza, E. R. et al. (2008, p. 55-56), a construção do Tangram pelo aluno, por meio de dobradura, se fundamenta pelas inúmeras vantagens associadas ao desenvolvimento de diversas habilidades. A dobradura utilizada como estratégia para o estudo e exploração de noções matemáticas permite o aluno a "desenvolver alguns conceitos, elementos e propriedades geométricas de forma experimental. [...] permite o desenvolvimento da comunicação oral e escrita em matemática."(SOUZA, E. R. et al., 2008, p. 56). A autora salienta ainda que

> Ao se defrontar com ordens orais ou escritas através de simbologias e esquemas, o aluno está diante de uma atividade de leitura e decodificação desses símbolos. De outra forma, ao descrever as etapas de uma dobradura, o aluno desenvolve e interioriza noções do espaço, utiliza e cria convenções para as representações gráficas e, principalmente, faz relações com conceitos já estudados anteriormente. (SOUZA, E. R. et al., 2008, p. 56).

Para a construção do Tangram por dobradura será necessário que os alunos tenham em mãos um quadrado. Isso pode ser facilmente conseguido, por exemplo, com a folha de papel A4. Para tal, basta seguir as etapas da figura 33 abaixo:

Figura 33 – Quadrado a partir de uma folha A4



Fonte: Blog do Marcos Ventura, cuja matéria é intitulada "Diagramas de Origami". [3]

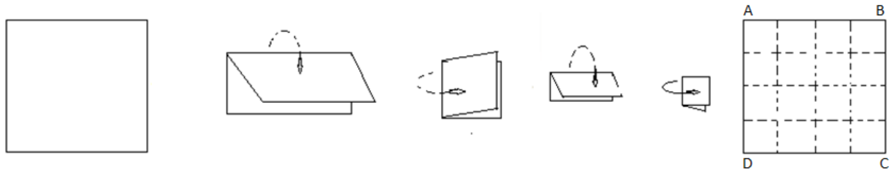
Construção do Tangram

1º Passo: Formar com o quadrado uma malha quadriculada seguindo os passos da figura 34 abaixo. Em seguida nomeie os vértices do quadrado.

[2] Sugira-se que o professor construa a dobradura com os alunos utilizando folha em tamanho maior, isto é, use a folha A4.

[3] Endereço eletrônico do site: https://marcosventura.wordpress.com/2012/03/23/transformando-papel-a4-para-fazer-o-seu-origami/. Acesso em 27 mio. 2019

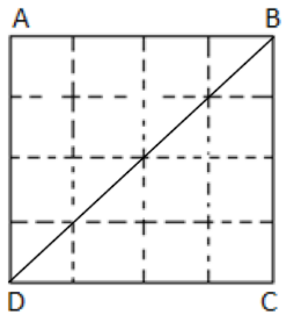
Figura 34 – Construção da malha quadriculada



Fonte: Adaptado: Tangram um recurso proposto para o ensino dos conceitos de área e fração no 7º ano do ensino fundamental

2º Passo: Dobre o quadrado pela diagonal BD. Abra e trace a diagonal BD do quadrado com uma caneta ou lápis, conforme a figura 35. Neste passo é possível relembrar, dependendo da turma, conceitos como: diagonal, ângulo, bissetriz de um ângulo e eixo de simetria do quadrado.

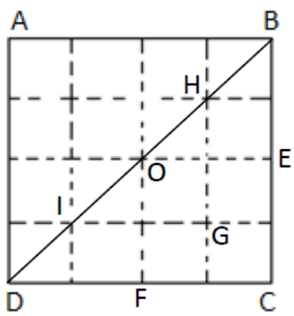
Figura 35 – Construção do Tangram 2º passo



Fonte: Criado pela autora

3º Passo: Nomear os seguintes pontos do quadrado: E, F, G, H, I e O, conforme mostra a figura 36. Através destes pontos pode-se verificar que os segmentos BE e EC são congruentes assim, como CF e FD. Logo, E e F são pontos médios de BC e CD respectivamente. Assim, como BH e HO são congruentes, bem como OI e ID, portanto H e I são pontos médios de OB e OD, respectivamente.

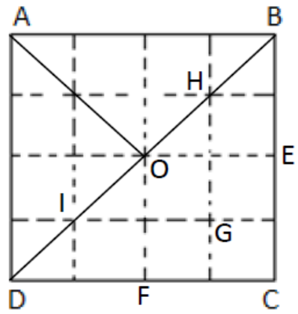
Figura 36 – Construção do Tangram 3º passo



Fonte: Criado pela autora

4º Passo: Dobre o quadrado pela diagonal AC. Fazer um vinco apenas do vértice A até a diagonal BD. Abra e trace com a caneta ou lápis o segmento AO, como mostra a figura 37. Nesta etapa é possível verificar que: se traçar a diagonal AC, que as diagonais do quadrado são congruentes; as diagonais são perpendiculares entre si logo, os ângulos formados pela intersecção das diagonais são congruentes e retos; os triângulos AOB, BOC, COD e DOA são congruentes, isósceles e retângulos.

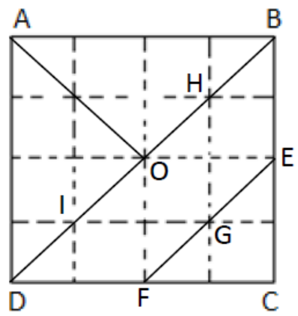
Figura 37 – Construção do Tangram 4º passo



Fonte: Criado pela autora

5º Passo: Dobre de maneira que o vértice C toque o ponto O. Vinque, abra e trace o segmento EF, conforme mostra a figura 38 a seguir. Pode se verificar com os alunos que triângulo ECF é retângulo em C, os catetos CE e CF são congruentes logo, o triângulo ECF é também isósceles. A figura restante é um quadrilátero (trapézio BDFE), como BE e DF são congruentes o trapézio é isósceles.

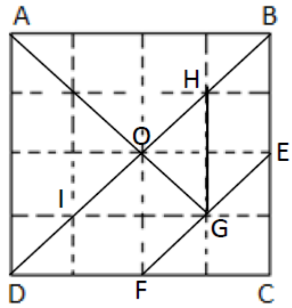
Figura 38 – Construção do Tangram 5º passo



Fonte: Criado pela autora

6º Passo: Dobre de maneira que o ponto E toque o ponto O. Vinque a dobra do ponto G até o ponto H. Abra e trace o segmento GH. Dobre novamente a diagonal AC, tal que o vinco vá do ponto A até o segmento EF. Abra e trace o segmento OG. Conforme a figura 39. Nesta etapa da dobradura pode-se, por exemplo, relembrar as propriedades dos lados, ângulos e diagonais do paralelogramo.

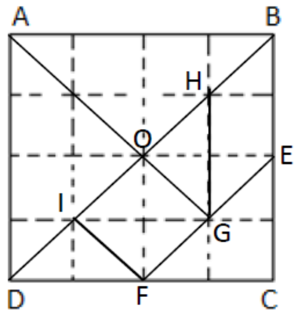
Figura 39 – Construção do Tangram 6º passo



Fonte: Criado pela autora

7º Passo: Dobre de maneira que o vértice D toque o ponto O. Vinque essa dobra do ponto F até o ponto I, de acordo com a figura 40. Pode-se explorar nesta etapa a classificação do triângulo obtido e verificar que o quadrilátero obtido é um quadrado, comparando as medidas de seus lados e ângulos.

Figura 40 – Construção do Tangram 7º passo



Fonte: Criado pela autora

8º Passo: Pintar e recortar cada peça obtida do Tangram, isto é, 2 triângulos grandes (Tg), 2 triângulos pequenos (Tp), 1 triângulo médio (Tm), 1 quadrado (Q) e 1 paralelogramo (P).

Para desenvolver a comunicação oral e escrita em Matemática é importante propor aos alunos que façam um relatório em grupo sobre a construção do quebra-cabeça.

Para Lorenzato, aqui,

> é importante que seja realizada entre os alunos a verbalização dos pensamentos, isto é, a comunicação das ideias, raciocínios, ações e conclusões deles. Será nesse momento que o professor poderá avaliar como e o que os alunos aprenderam; além disso, a socialização das estratégias, processos, erros e conclusões, entre os alunos, não é menos importante para a formação deles.(LORENZATO, 2012, p. 26-27).

Fiorentini e Miorim (1990, p. 06), destaca ainda que muitas "vezes, durante a construção de um material, o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de uma forma mais efetiva".

Atividade 3

Tempo estimado para esta atividade: 2 à 4 aulas.

O objetivo dessa atividade é compreender o conceito de frações, considerando o significado de fração como parte de um todo, isto é, o Tangram é o inteiro ou todo.

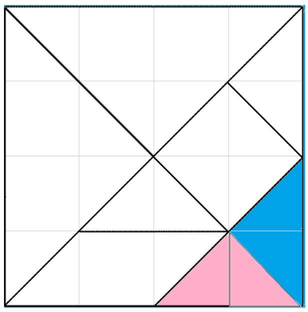
Orientar e estimular os alunos através de perguntas e observações, ao realizar as comparações com as figuras que compõem o Tangram. Propor-lhes que façam o registro das conclusões para que sejam discutidas após o término da atividade com os demais colegas. Distribuir os alunos em duplas.

1. Tomando a menor peça do Tangram como unidade, isto é, o triângulo pequeno, compare-a com as demais peças e determine quantas unidades cabem em cada uma delas. Quantas unidades cabem no Tangram?

O professor deve neste momento estimular os alunos a observarem as peças do Tangram e em seguida começar a questionar (é importante que faça uma pergunta por vez e que seja dado ao aluno o tempo necessário para fazerem as observações e anotações):

a) Quantos triângulos pequenos são necessários para "cobrir"o triângulo médio?

Figura 41 – Comparando as peças do Tangram

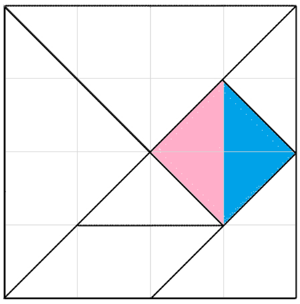


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Dois triângulos pequenos, conforme podemos observar na figura 41.

b) Quantos triângulos pequenos são necessários para "cobrir"o quadrado?

Figura 42 – Comparando as peças do Tangram

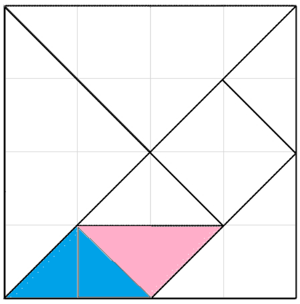


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Conforme a figura 42, são necessários 2 triângulos pequenos para "cobrir"o quadrado.

c) Quantos triângulos pequenos são necessários para "cobrir"o paralelogramo?

Figura 43 – Comparando as peças do Tangram

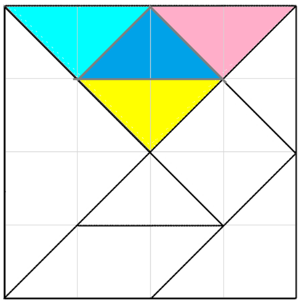


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Dois triângulos pequenos, conforme podemos observar na figura 43.

d) Quantos triângulos pequenos são necessários para "cobrir"o triângulo grande?

Figura 44 – Comparando as peças do Tangram

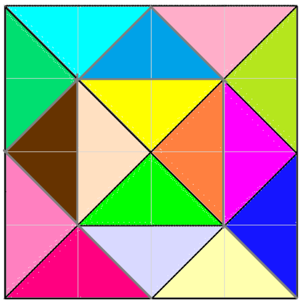


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Conforme mostra a figura 44, são necessários quatro triângulos pequenos para "cobrir"o triângulo grande.

e) Quantos triângulos pequenos são necessários para "cobrir"o Tangram?

Figura 45 – Comparando as peças do Tangram



Fonte: Criado pela autora

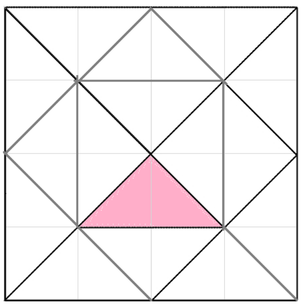
Resposta: São necessários 16 triângulos pequenos para "cobrir"o Tangram, conforme podemos observar na figura 45.

2. Usando o número de unidades que cabem em cada umas das peças do Tangram, responda que fração cada uma das peças do quebra-cabeça representa em relação ao todo, isto é, do Tangram?

Neste momento é importante que o professor estimule os alunos a observar e manusear as peças do Tangram quantas vezes for preciso para que possam fazer as relações essenciais para resolver o problema. Tomando como base a atividade anterior, pode ser questionado, por exemplo:

a) Quantos triângulos pequenos foram necessários para "cobrir"o Tangram? Portanto, ao tomar um triângulo pequeno do quebra-cabeça, que fração ele representa em relação ao Tangram?

Figura 46 – Comparando as peças do Tangram

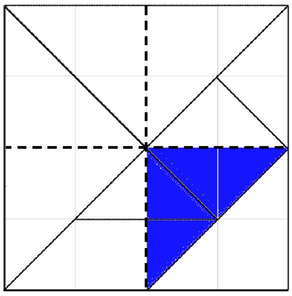


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Um triângulo pequemo representa a fração $\frac{1}{16}$ do Tangram, como pode ser observado na figura 46.

b) Vimos que são necessários 2 triângulos pequenos para "cobrir"o triângulo médio (é análogo para o quadrado e o paralelogramo, uma vez que estes também são compostos por dois triângulos pequenos). Sabemos também que para "cobrir"o quebra-cabeça é preciso 16 triângulos pequenos, logo para cobrir o quebra-cabeça usando apenas triângulos médios seriam necessários 8 peças. Portanto, se tomarmos o triângulo médio como unidade de medida, ele representa que fração do Tangram?

Figura 47 – Comparando as peças do Tangram

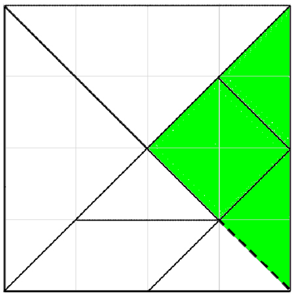


Fonte: Criado pela autora

Resposta: O triângulo médio representa $\frac{1}{8}$ do Tangram, como mostra a figura 47

c) Sendo necessários 4 triângulos pequenos para "cobrir"o triângulo grande e, para "cobrir"o quebra-cabeça é preciso de 16 triângulos pequenos, temos que seria necessário 4 triângulos grandes para "cobrir"todo o quebra-cabeça. Portanto, usando o triângulo grande como unidade de medida que fração ele representa do Tangram?

Figura 48 – Comparando as peças do Tangram

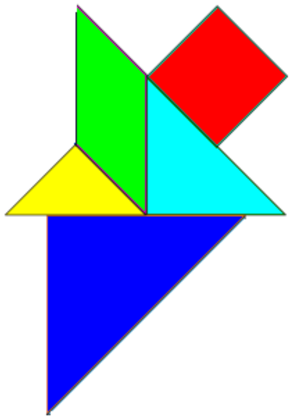


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Como pode ser observado na figura 48, o triângulo grande corresponde à $\frac{1}{4}$ do Tangram.

3. Dada a figura 49 abaixo:

Figura 49 – Usando uma das peças do Tangram como unidade de medida



Fonte: Criado pela autora

Quantos triângulos médios são necessários para recobri-la? E se utilizarmos o triângulo grande como unidade de medida, quantos triângulos grandes serão necessários?

Resposta:

Usando o triângulo médio como unidade de medida, temos:

- 1 quadrado = 1 paralelogramo = 1 triângulo médio, ou seja temos 3 triângulos médios.
- 1 triângulo grande é composto por 2 triângulos médios, isto é, 1 triângulo grande = 2 triângulo médios.
- 1 triângulo médio é composto por 2 triângulos pequenos, assim, 1 triângulo pequeno = $\frac{1}{2}$ do triângulo médio.

Portanto, para cobrir a figura usando como unidade de medida o triângulo médio serão necessários: $3 + 2 + \frac{1}{2} = 5$ triângulos médio e $\frac{1}{2}$, ou seja, $5\ \frac{1}{2}$.

Para o triângulo grande temos:

- 1 triângulo grande
- O quadrado corresponde a metade do triângulo grande, logo o paralelogramo e o triângulo médio, também. Assim, temos que 1 quadrado + 1 paralelogramo + 1 triângulo médio = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ triângulo grande, ou seja será possível cobrir um triângulo grande e a metade de outro.
- 1 triângulos pequeno só cobre $\frac{1}{4}$ do triângulo grande.

Portanto, temos que: $1 + (1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Mas, pela observações já realizadas sabemos que são necessários 4 triângulos pequenos para recobrir um triângulo grande, desta forma temos $\frac{1}{2}$ triângulo grande é composto 2 triângulos pequenos assim, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Logo, será preciso 2 triângulos grandes e $\frac{3}{4}$, isto é, 2 $\frac{3}{4}$ de triângulos grandes para recobrir a figura.

Atividade 4

Tempo estimado para esta atividade: 1 à 2 aulas

O objetivo é compreender o conceito de equivalência de frações. Uma vez apropriado do conceito de fração das atividades anteriores, é necessário que o aluno possa perceber que uma mesma quantidade pode ser representada por diferentes frações ou vice versa e, que essas diferentes representações da mesma quantidade são conhecidas como frações equivalentes.

Pedir para os alunos, em dupla, que façam uma analise das peças do Tangram e discutam as relações existentes entre elas como, por exemplo: são necessários 2 triângulos pequenos para "cobrir"o quadrado, assim como o triângulo médio e o paralelogramo. O triângulo médio cobre a metade do triângulo grande, logo triângulo médio, o paralelogramo e o quadrado correspondem à metade do triângulo grande. Para cobrir o triângulo grande são necessários 4 triângulos pequenos, então o triângulo pequeno corresponde a quarta parte do triângulo grande.

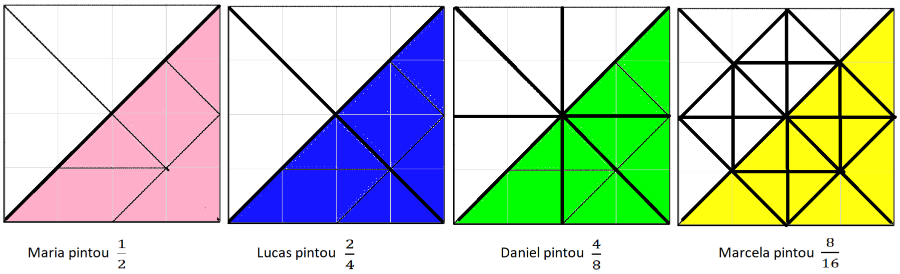
1. Maria, Lucas, Daniel e Marcela receberam um Tangram cada, para pintar e recortar. Maria já pintou $\frac{1}{2}$ do Tangram, Lucas $\frac{2}{4}$, Daniel $\frac{4}{8}$ e Marcela $\frac{8}{16}$. Questionados pela professora se já estavam perto de terminar o Daniel respondeu que ele está mais próxima de acabar. Marcela, no entanto, não concordou, pois segundo ela havia pintado mais partes do Tangram e portanto, ela estava mais próxima de terminar. Para acabar com a dúvida a professora propôs que eles observassem as peças do quebra-cabeça e, que através delas verificassem qual deles haviam pintado mais partes do Tangram.

Concluídas as observações sobre as peças do Tangram, os alunos não terão dificuldade em responder que:

A fração $\frac{1}{2}$ representa a metade do quebra-cabeça, que poderia ser por exemplo, representada por 2 triângulos grandes. Como foi observado anteriormente para "cobrir"um triângulo grande são necessários 4 triângulos pequenos, logo para "cobrir"dois triângulos grandes, isto é, metade do quebra-cabeça é preciso 8 triângulos pequenos dos 16 utilizados para "cobrir"todo o Tangram. Portanto, $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$. A fração $\frac{2}{4}$ significa que o Tangram foi divido em quatro partes iguais e desta foram tomadas duas, isto é, a metade. Logo, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, analogamente temos que: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16}$. Os demais casos são análogos.

Portanto: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$, ou seja, os alunos pintaram a mesma área do Tangram. Como pode ser observado na figura 50 abaixo:

Figura 50 – Equivalência de fração



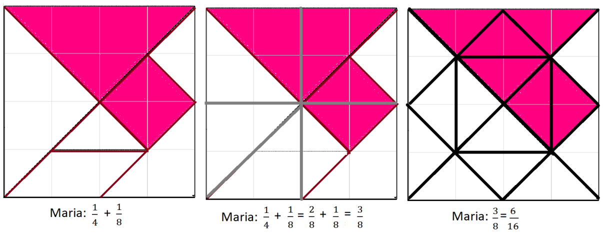
Fonte: Criado pela autora

2. Maria e Marcela encontraram em suas mesas peças do Tangram. Maria encontrou um triângulo grande e um quadrado e Marcela dois triângulos pequenos, o paralelogramo e o triângulo médio. Escreva a fração que cada uma encontrou. Após comparar as frações o que se pode concluir.

Resposta:

Maria: um triângulo grande + um quadrado $= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Conforme pode ser observado na figura 51.

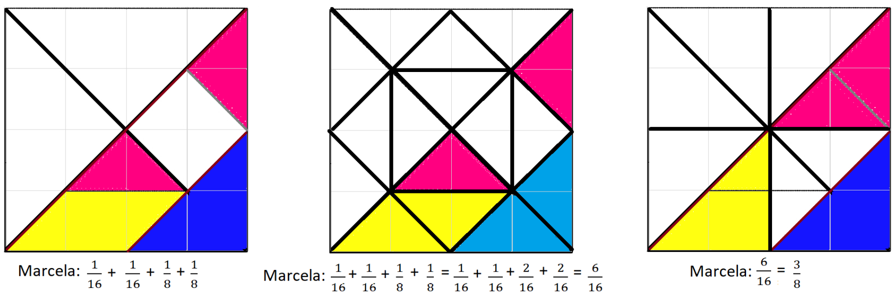
Figura 51 – Equivalência de fração



Fonte: Criado pela autora

Marcela dois triângulos pequenos + 1 paralelogramo + 1 triângulo médio $= \frac{2}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. Conforme pode ser observado na figura 52.

Figura 52 – Equivalência de fração



Fonte: Criado pela autora

Portanto, Maria e Marcela encontraram a mesma fração do Tangram, ou seja, $\frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ são frações equivalentes

3. Peça para os alunos, em duplas, encontrarem outras frações equivalentes usando como base o Tangram.

Atividade 5

Tempo estimado para esta atividade: 2 aula

O objetivo é comparar números fracionários. Nesta atividade, para comparar frações os alunos serão levados a utilizar seus conhecimentos sobre o conceito de fração e de equivalência.

1. Pedir aos alunos que observem o triângulo grande, o triângulo médio e o triângulo pequeno. E através das observações respondam: Qual é a maior peça? Que fração do Tangram ela representa? Qual é a menor peça? Que fração do Tangram ela representa? Que conclusões se pode tirar?

Figura 53 – Comparação de frações com o mesmo numerador

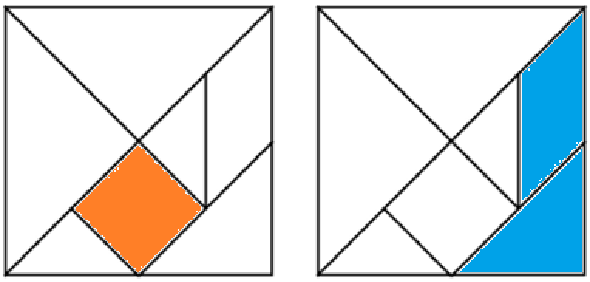
Fonte: Criado pela autora

Resposta: A maior peça é o triângulo grande ele representa $\frac{1}{4}$. A menor peça é o triângulo pequeno ele representa $\frac{1}{16}$. Como pode ser observado na figura 53 acima.

Pode se concluir que: Dada duas frações com numeradores iguais, quanto maior o denominador da fração, menor é a fração.

2. Destaque $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{8}$ do Tangram.

Figura 54 – Comparação de frações com o mesmo denominador



Fonte: Criado pela autora

Qual é a maior fração? O que se pode concluir?

Resposta: A maior fração é $\frac{2}{8}$, omo mostra a figura 54. Logo, dada duas frações com o mesmo denominador, quanto maior o numerador, maior é a fração.

3. Maria pintou $\frac{1}{2}$ do Tangram e Marcela $\frac{3}{8}$. Quem pintou a maior parte do Tangram?

Resposta: Nesta etapa é interessante que o aluno seja levado a perceber que nenhum dos casos acima se aplicou, logo é necessário usar algum artifício no intuito de se aplicar um deles. Neste caso, dado o que já foi estudado até aqui, é esperado que o aluno possa concluir que é preciso escrever cada fração com o mesmo denominador, ou seja, usar equivalência de frações. Portanto, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$, os denominadores estão iguais, logo se aplica a definição da situação anterior, isto é, temos que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} > \frac{3}{8}$.

4. Peça para os alunos que, em duplas, comparem outras peças do Tangram, registrem suas observações e em seguida exponha-as para os colegas.

Atividade 6

Tempo estimado para esta atividade: 1 à 2 aulas

Efetuar a adição e a subtração de frações com mesmo denominador. Através de um ambiente de reflexão e discussão, será dado uma tarefa que tem como objetivo estabelecer relações entre as peças do Tangram e promover a construção do conceito de adição e subtração de frações com mesmo denominador.

Para tanto, será entregue aos alunos a figura do Tangram, a qual deverão subdividir o quadrado, o paralelogramo e o triângulo médio em figuras semelhantes ao triângulo pequeno.

Em seguida, pode-se fazer os seguintes questionamentos, por exemplo:

a) Que fração do inteiro representa as partes das figuras dos dois triângulos pequenos, o paralelogramo, o quadrado e triângulo médio do Tangram depois que foram subdivididas?

Resposta: Cada triângulo pequeno representa $\frac{1}{16}$ do Tangram, logo os dois triângulos pequenos representam $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16}$; na subdivisão do quadrado, do paralelogramo e do triângulo médio em figuras semelhantes ao triângulo pequeno, será possível reforçar que o paralelogramo representa $\frac{2}{16}$; o quadrado $\frac{2}{16}$ e triângulo médio $\frac{2}{16}$.

b) Que fração do Tangram representam as figuras dos dois triângulos pequenos, do paralelogramo e do quadrado. Escreva uma adição para representar essa situação.

Resposta: Sabemos que dois triângulos pequenos + 1 paralelogramo + 1 quadrado $= \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

c) Se da unidade formada pelas sete peças retirarmos duas peças de $\frac{1}{16}$, ou seja, $\frac{2}{16}$. Que fração restará?

Resposta: Aqui é importante que o aluno perceba que o todo, isto é, o Tangram é composto por 16 triângulos pequenos, logo a fração do Tangram é $\frac{16}{16}$. Portanto: $\frac{16}{16} - \frac{2}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$

d) Determine a fração que representa o quadrado e um dos triângulos menores. Escreva uma adição para representar essa situação.

Resposta: Temos que um quadrado e um triângulos pequeno = $\frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

e) Que fração iremos obter ao retirar o paralelogramo e o triângulo pequeno do Tangram? Escreva uma subtração para representar essa situação. O que aconteceu com os numeradores? E com os denominadores?

Resposta: Como o Tangram representa $\frac{16}{16}$, o paralelogramo $\frac{2}{16}$ e o triângulo pequeno $\frac{1}{16}$. Logo, o paralelogramo e o triângulo pequeno representam $\frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Portanto, ao tirar do Tangram o paralelogramo e o triângulo pequeno temos, $\frac{16}{16} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$. Pode-se concluir que na subtração de frações com o mesmo denominador, deve-se conservar o denominador e subtrair os numeradores. O mesmo ocorre com a adição.

Atividade 7

Tempo estimado para esta atividade: 1 à 2 aulas

Efetuar a adição e a subtração de frações com denominador diferentes.

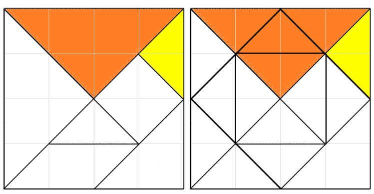
O intuito desta atividade é estimular os alunos por meio do uso do Tangram a compreensão de equivalência de frações bem como sua utilização na resolução das operações da adição e subtração de frações com denominadores diferentes associando as partes com o inteiro.

1. Como já foi visto na Atividade 3 (exercício 2) o triângulo pequeno representa $\frac{1}{16}$; o paralelogramo, o quadrado e o triângulo médio representam cada um $\frac{1}{8}$ e o triângulo grande $\frac{1}{4}$ do Tangram. Assim, determine que fração do Tangram correspondente a:

Uma vez apropriados do conceito de equivalência de fração, espera-se que os alunos possam resolver a atividade sem dificuldades, caso tenham alguma é importante retomar as atividade.

a) soma de um triângulo grande e um triângulo pequeno.

Figura 55 – Adição de frações

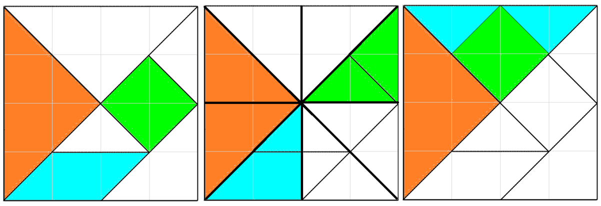


Fonte: Criado pela autora

Resposta: De acordo com a figura 55 acima, temos: $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$

b) soma de um triângulo grande, um paralelogramo e um quadrado.

Figura 56 – Adição de frações

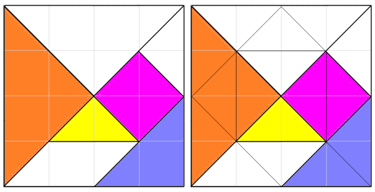


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Observando a figura 56, podemo concluir que: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

c) soma de um triângulo médio, um triângulo pequeno, um triângulo grande e um quadrado.

Figura 57 – Adição de frações

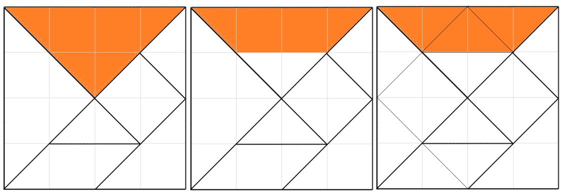


Fonte: Criado pela autora

Resposta: Tomando a figura 57 como referência, temos que: $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{16}+\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}=\frac{9}{16}$

2. Se do triângulo grande retirarmos um triângulo pequeno. Que fração restará.

Figura 58 – Subtração de frações



Fonte: Criado pela autora

Resposta: De acordo com a figura 58, temos: $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{4}{16}-\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

Atividade 8

Tempo estimado para esta atividade: 1 à 2 aulas

O objetivo desta atividade é que os alunos possam entender o processo da multiplicação de forma significativa através do uso do Tangram e que possam chegar a generalização do algoritmo da multiplicação de frações, isto é, multiplica-se os numeradores entre si e em seguida multiplica-se os denominadores entre si.

Para esta atividade é interessante que os alunos tenham tempo para observar as peças e usar sobreposições das mesmas em um Tangram para conseguirem fazer uma generalização.

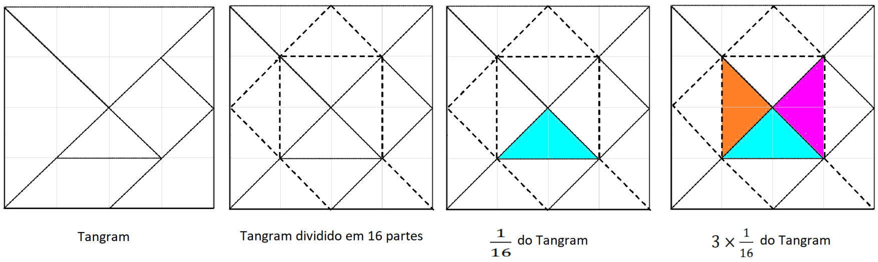
1. Se tomarmos o triângulo pequeno três vezes, isto é, $3 \times \frac{1}{16}$. E considerarmos o dobro da área de três triângulos médios, ou seja, $2 \times \frac{3}{8}$. Que frações do Tangram teremos?

Resposta:

Para $3 \times \frac{1}{16}$, temos:

Divida o Tangram em 16 partes iguais, isto é, em 16 triângulos pequenos. Tome três destas partes, ou seja, $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$. Note que se tem uma adição de três parcelas iguais, assim podemos representá-la por meio da multiplicação, ou seja: $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = 3 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, como mostra a figura 59 abaixo:

Figura 59 – Multiplicação de um número natural por uma fração

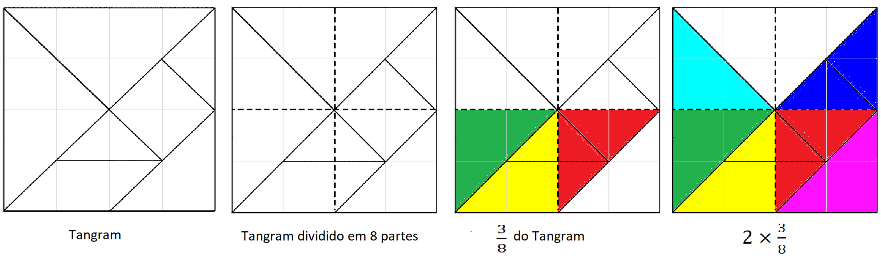


Fonte: Criado pela autora

Para o caso $2 \times \frac{3}{8}$ temos:

Divida o tangram em 8 partes iguais, ou seja, em 8 triângulos médios e tome três destas partes, ou seja, $\frac{3}{8}$ e, em seguida dobrando a quantidade considerada tem-se que: $2 \times \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$, como mostra a figura 60 abaixo:

Figura 60 – Multiplicação de um número natural por uma fração



Fonte: Criado pela autora

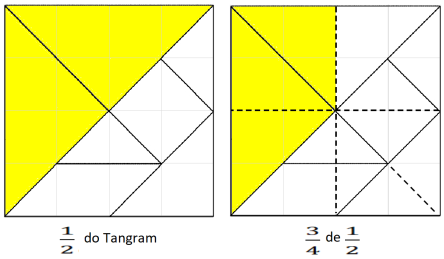
2. Que fração do Tangram representa $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$? E $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{8}$.

Resposta:

Para $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$.

Considere a metade de um Tangram, isto é, $\frac{1}{2}$ e, em seguida tome $\frac{3}{4}$, ou seja, divida cada uma das parte do Tangram em 4 partes iguais. Obtemos, desta forma, 8 partes e tome 3, pois, queremos calcular $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{2}$, conforme mostra a figura 61 seguinte:

Figura 61 – Multiplicação de frações



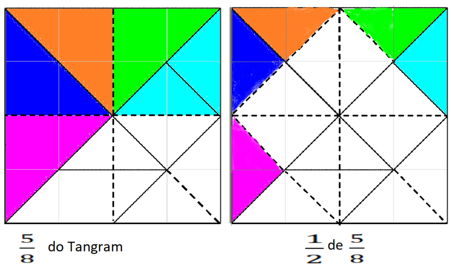
Fonte: Criado pela autora

Assim, temos que $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Para $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{8}$.

Considere $\frac{5}{8}$ de um Tangram, isto é, divida o Tangram em 8 partes e tome 5 delas. Em seguida considere $\frac{1}{2}$, ou seja, divida cada uma das 8 partes do Tangram em duas partes e tome 1 delas, pois, queremos $\frac{1}{2}$ de $\frac{5}{8}$. De acordo com a figura 62 abaixo.

Figura 62 – Multiplicação de frações



Fonte: Criado pela autora

Portanto, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$

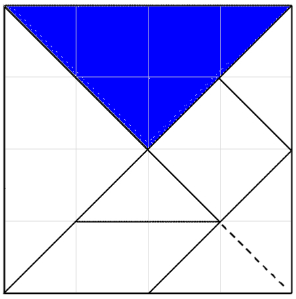
Atividade 9

Tempo estimado para esta atividade: 1 aula

A atividade visa a construção de uma generalização para se resolver divisão com frações.

1. Mariana pintou $\frac{1}{4}$ do Tangram, por exemplo, conforme mostra a figura 63 abaixo:

Figura 63 – Divisão de frações



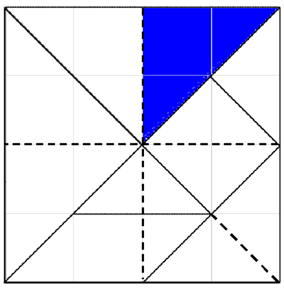
Fonte: Criado pela autora

Ela pretende dar a metade da parte colorida do Tangram para Danilo. Que fração do Tangram ela pretende dar e que peça poderia ser?

Resposta:

Lembrando que metade de uma dada quantidade é dividi-la por 2 e toma-se uma das partes. Então, para obter a metade de $\frac{1}{4}$, isto é $\frac{1}{4} \div 2$. Basta dividir a uma parte considerada em duas e tomar uma delas, ou seja, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$. Como mostra a figura 64.

Figura 64 – Divisão de frações por um número natural



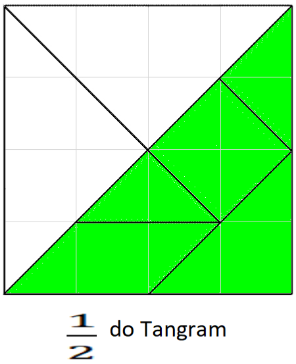
Fonte: Criado pela autora

Portanto, a fração da parte do Tangram é $\frac{1}{8}$, isto é, $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$. E a peça que Mariana poderá dar para Danilo é, por exemplo, um triângulo médio (lembrando que poderia ser também, o quadrado ou o paralelogramo, pois eles possuem a mesma área do triângulo médio).

2. Quanto vale $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$, isto é, quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{1}{2}$.

Resposta: Considere $\frac{1}{2}$ do Tangram, por exemplo, de acordo com a figura 65 abaixo:

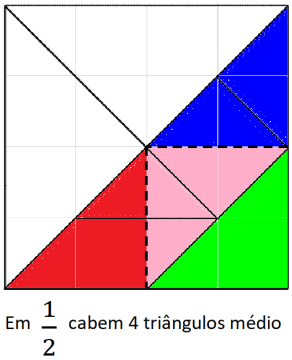
Figura 65 – Divisão de frações



Fonte: Criado pela autora

Para responder "Quanto vale $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$", basta verificar quantas peças de $\frac{1}{8}$ cabem em $\frac{1}{2}$.

Figura 66 – Tangram dividido em dezesseis triângulos pequenos



Fonte: Criado pela autora

Conforme mostra a figura 66 acima cabem 4 triângulos médios, por exemplo, em $\frac{1}{2}$ do Tangram.

Portanto, $\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = 4$.

6 Considerações finais

O propósito principal deste trabalho foi apresentar, como sugestão aos professores, uma sequência didática voltada para o ensino e a aprendizagem de frações tendo como foco o Tangram como material manipulativo. Nesta sequência procurou estabelecer relações entre as peças do quebra-cabeça e o conceito de fração, equivalência, comparação e as operações.

O Tangram é um material manipulativo cada vez mais adotado, pelos professores, e se encontra em grande expansão na Matemática. Muitos problemas podem ser modelados e escritos na forma Matemática, facilitando o entendimento e a análise de seus dados. Portanto, o Tangram pode ser inserido no processo de ensino e aprendizagem, pois apresenta aplicabilidade para se trabalhar um grande número de conceitos matemáticos como, por exemplo: formas geométricas, área, fração, perímetro, semelhança, simetria, entre outros.

Nos levantamentos realizados sobre o Tangram confirmamos sua utilização, principalmente em construções geométricas. No entanto, quando há um crescimento satisfatório no uso de um material manipulativo para melhorar a aprendizagem, é natural buscar uma forma de aplicá-lo em outros campos onde se encontra dificuldades enfrentadas por alunos e professores, seja para o ensino de geometria ou para o estudo de frações. Neste sentido, no anexo A se encontra alguns dos trabalhos, selecionados através da revisão bibliográfica, já realizados com o Tangram no ensino e aprendizagem de frações, com o objetivo de minimizar as dificuldades apresentadas pelos alunos neste conteúdo.

O Tangram foi o procedimento escolhido, para juntamente com as frações, apontar soluções para o problema proposto. A aplicação deste quebra-cabeça no ensino de frações permitiu-nos levantar possibilidades para ensinar e aprender frações e verificar que existem várias possibilidades de inserção deste material no ensino-aprendizagem dos educandos. Na prática, a execução de vários testes demandaria muito tempo para serem analisados.

A união de problemas de aprendizagens de frações com o Tangram constitui-se em uma maneira de avaliar parâmetros e predizer resultados, e isso pode ser abordado por professores nas escolas, inclusive como forma de chamar a atenção dos alunos para as questões operacionais com frações e despertar atitudes.

Vale ressaltar que, para se obter resultados que possam efetivamente auxiliar os professores, com maior garantia no uso do Tangram para o ensino de frações, deve-se pesquisar o tema com maior rigor e realizar outras atividades e aplicá-las em sala de aula.

Quero ainda destacar que a presente dissertação contribuiu significativamente para a construção do meu saber, para a minha formação acadêmica e na aquisição de novos conhecimentos específicos sobre frações. Após essa pesquisa passei a ter uma visão diferente dessa prática, compreendo a necessidade das riquezas de detalhe sobre qualquer assunto trabalhado em sala de aula, assim como, o quanto à pesquisa é necessária na formação profissional.

Em trabalhos futuros, pretende-se analisar o problema fazendo a aplicação das atividades elaboradas, para confirmar os resultados previstos neste estudo.

Referências

BERTONI, N. E. *Módulo IV: Educação e Linguagem Matemática IV*. 1. ed. Brasilia-DF: Universidade de Brasília, 2009. 95 p. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/fracoes.pdf>. Citado 7 vezes nas páginas 58, 59, 60, 62, 63, 64 e 67.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo-SP: Editora Edgard Blücher Ltda, 1996. 496 p. Citado na página 19.

BRASIL - MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais-PCNs: Matemática*. Brasília-DF: Secretaria de Educação Fundamental, 1997. 142 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Citado na página 60.

BRASIL - MEC. *Base Nacional Comum Curricular-BNCC*. 2018. 280–297 p. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 60, 64 e 71.

BRASIL-INEP. *Sistema de Avaliação da Educação Básica-SAEB*. 2017. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/saeb-2017-revela-que-apenas-1-6-dos-estudantes-brasileiros-do-ensino-medio-demonstraram-niveis-de-21206>. Citado na página 57.

CARAÇA, B. d. J. *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática Ltda, 1951. 319 p. Citado na página 27.

CUSTÓDIO, C. F. B. Conjuntos Numéricos. Campo Grande-MS, p. 69, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150350656>. Citado na página 51.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (org). *Ousadia Criativa nas Práticas de Educadores Matemáticos*. 1. ed. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2015. 288 p. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 79.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática*. 12. ed. Campinas-SP: Papirus, 2005. 120 p. Citado 4 vezes nas páginas 18, 58, 60 e 85.

DIENES, Z. P. *Frações*. 1. ed. São Paulo-SP: EPU, 1975. 55 p. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 80.

DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de Aritmética*. 1. ed. São Paulo-SP: Atual, 1991. 297 p. Citado 8 vezes nas páginas 20, 21, 22, 38, 39, 40, 43 e 45.

DRUCK, I. F. *Frações: Uma análise de dificuldades conceituais*. São Paulo-SP: IME/USP, 2006. 16 p. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4642963/mod_resource/content/1/Druck%20-%20Fra%C3%A7%C3%B5es%20-%20uma%20an%C3%A1lise%20de%20dificuldades%20conceituais.pdf>. Citado 10 vezes nas páginas 28, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 63 e 65.

DRUCK, S. (org.). *Explorando o Ensino da Matemática: Artigos*. 1. ed. Brasilia-DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. 288 p. Citado 3 vezes nas páginas 18, 19 e 22.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. *Boletim SBEM-SP*, São Paulo-SP, v. 4, n. 7, p. 7, 1990. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/jogos/Fiorentini_Miorin.pdf>. Citado na página 91.

FORNARI, E. L. d. S. O uso do Tangram no ensino de frações em turmas de 6ºano. *OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE.*, UNICENTRO, Honótio Serpa- PR, v. 1, p. 20, 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_artigo_elaine_lima_da_silva_fornari.pdf>. Citado na página 84.

GANGI, S. R. d. S. Geometria Plana: A Importância do Jogo Tangram no Ensino da Matemática como Material Lúdico. *SINPROSP*, Itararé-SP, v. 20, p. 14, 2009. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/371310904/GEOMETRIA-PLANA-A-IMPORTANCIA-DO-JOGO-TANGRAM-NO-ENSINO-DA-pdf>. Citado na página 83.

IFRAH, G. *História Universal dos Algarismos*. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: Nova Fronteira SA, 1997. 744 p. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

LIMA, E. L. et al. *A Matemática do ensino médio*. 9. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006. 280 p. Citado na página 63.

LOPES, A. J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações. *Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro-SP, v. 21, n. 31, p. 1–22, 2008. Disponível em: <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291221883002.pdf>. Citado na página 23.

LORENZATO, S. *Para Aprender Matemática*. 3. ed. Campinas-SP: Autores Associados, 2010. 140 p. Citado 3 vezes nas páginas 61, 73 e 74.

LORENZATO, S. (org). *O laboratório do ensino de Matemática na formação de professores*. 3. ed. Campinas-SP: Autores Associados, 2012. 178 p. Citado 5 vezes nas páginas 72, 78, 79, 80 e 91.

MARTINS, A.; MARQUES, G.; RAMOS, J. O ensino da geometria por meio do Tangram no 9º ano do ensino fundamental. Santana-AP, n. 9, p. 45, 2015. Disponível em: <http://www2.unifap.br/matematicaead/files/2016/03/Binder1.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 81, 82 e 85.

MOREIRA, P. B. Proposta para o ensino da Matemática através da construção e aplicação do Tangram – da educação infantil ao ensino fundamental II. p. 70, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=95524>. Citado na página 85.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática.*, SBEM-SP, São Paulo, v. 9, n. 9 e 10, p. 3, 2005. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4489101/mod_resource/content/3/Revista%20de%20Educa%C3%A7%C3%A3o%20Matem%C3%A1tica%20-%20SBEM%20-%20%20v.%209-10%2C%20n.%209%2C%202005.pdf>. Citado na página 80.

OCDE. *Brasil no PISA 2015 : análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros*. São Paulo-SP: Fundação Santillana, 2016. 274 p. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf>. Citado na página 15.

PICCININ, I.; MARTINS, M. A. O Uso do Tangram no Ensino de Frações. *OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR PDE*, v. 1, p. 20, 2014. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_artigo_iara_piccinin.pdf>. Citado na página 83.

PONTE, J. P. (org). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. 1. ed. Lisboa-PT: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. 541 p. Disponível em: <www.ie.ulisboa.pt>. Citado na página 62.

RIBEIRO, B. d. S. Matemática recreativa: uma experiência baseada em clubes. Rio de Janeiro-RJ, p. 58, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160970339>. Citado na página 23.

RODRIGUES, L. C. Tangram: um recurso proposto para o ensino dos conceitos de área e fração no 7º ano do ensino fundamental. p. 34, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94955>. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 84.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mistos e lendas*. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: ZAHAR, 2012. 512 p. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. *Tópicos de História da Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2012. 269 p. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 20, 22, 25, 26 e 27.

SALES, M. Operações com Números Inteiros e Racionais de forma lúdica. Salvador-BA, p. 87, 2016. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=86876>. Citado 7 vezes nas páginas 39, 40, 46, 49, 50, 51 e 54.

SANTANA, E. P. de; ALVES, E. *A dificuldade de ensinar geometria*. Lagarto-SE, 2009. 4 p. Disponível em: <http://www.administradores.com.br/artigos/cotidiano/a-dificuldade-de-ensinar-geometria/55118/>. Citado na página 57.

SANTOS, A. C. G. dos. Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio. Campina Grande - PB, p. 147, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=32935>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

SANTOS, C. H. dos; IMENES, L. M. P. Tangram: Um antigo jogo chinês nas aulas de matemática. *Revista de Ensino de Ciências*, LEMAT/IME/UFO, São Paulo-SP, v. 18, p. 42–49, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 82 e 83.

SANTOS, M. J. C. dos. *Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: Desafio para a formação inicial*. 1. ed. Fortaleza-CE: Edição do Autor, 2010. 209 p. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 61.

SARMENTO, A. K. C. A Utilização dos Materiais Manipulativos nas Aulas de Matemática. In: *VI Encontro de Pesquisa em Educação da UFPI*. Teresina-PI: UFPI - Universidade Federal do Piauí, 2010. p. 1–12. Disponível em: <http://docplayer.com.br/10323217-A-utilizacao-dos-materiais-manipulativos-nas-aulas-de-matematica.html>. Citado na página 78.

SILVA, F. A. F.; BALDOW, R. O uso de material manipulativo no ensino de frações. *VI Colóquio International*, São Cristovão-SE, p. 5, 2012. Disponível em: <http://docplayer.com.br/33682275-O-uso-de-material-manipulativo-no-ensino-de-fracoes.html>. Citado na página 78.

SILVA, M. J. F. da. *Investigando Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a quinta série*. 2. ed. São Paulo-SP: Editora Edgard Blücher ltda, 2017. 282 p. Disponível em: <https://www.blucher.com.br/livro/detalhes/investigando-saberes-de-professores-de-ensino-fundamental-com-enfoque-em-numeros-fracionarios-par
matematica-e-computacao-109>. Citado 4 vezes nas páginas 65, 68, 69 e 70.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org). *Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais*. 1. ed. Porto Alegre-RS: Penso, 2016. 23 p. Citado 13 vezes nas páginas 59, 62, 64, 67, 69, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 80 e 83.

SOUZA, E. R. de et al. *A Matemática das sete peças do Tangram*. 1. ed. São Paulo-SP: CAEM/IME USP, 2008. 1–11 p. Citado 4 vezes nas páginas 81, 82, 87 e 88.

SOUZA, J.; PARATO, P. M. *Vontade de Saber*. 3. ed. São Paulo: FTD, 2015. 480 p. Citado na página 63.

Anexos

ANEXO A – Alguns Trabalhos que utiliza o Tangram como proposta para o ensino de frações

Líntia Karla Alves Souza: Materiais manipuláveis: a matemática ao alcance das mãos. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC. Ilhéus - BA, 2013.

<https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=44315>

Geyson Suzano: Múltiplos aprendizados no ensino de frações e números decimais na educação básica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Espírito Santo - UFES. Vitória– ES 2018.

<https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160370471>

Luzia Coelho Rodrigues: Tangram: Um recurso proposto para o ensino dos conceitos de área e fração no 7º ano do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco - UFVSF. Campus Juazeiro - BA, 2016.

<https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94955>

Onésimo Rodrigues Pereira: Uma sequência didática para o ensino de adição de frações. Dissertação Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Tocantins – Campus Universitário de Arraias. Arraias, TO, 2017.

<https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150912395>

Elaine Lima da Silva Fornari: O uso do tangram no ensino de frações em turmas de 6º ano.

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_pdp_elaine_lima_da_silva_fornari.pdf>

Iara Piccinin: Tangram: Material Didático para o Ensino da Equivalência de Frações.

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_unicentro_mat_pdp_iara_piccinin.pdf>

Lucia Larangeiro Paizana: Frações também se aprende brincando.

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_

pde/2009_uem_matematica_md_lucia_larangeiro_paizana.pdf>

Rosane Pollon: Tangram: Material Didático Para Resolução de Problemas no 6º ano.

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_unicentro_mat_pdp_rosane_pollon.pdf>

Marta Burda Schastai: Pró-letramento em matemática: problematizando a construção do conceito de frações – uma contribuição para a formação de professores

<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1234/1/PG_PPGECT_M_Schastai%2C%20Marta%20Burda_2012.pdf>

Moreira, Paula Burkardt: Proposta para o ensino de matemática através da construção e aplicação do Tangram: da educação infantil ao ensino fundamental II

<https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/>