

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO - UFERSA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

TÉLICO JOSÉ DE OLIVEIRA SILVA FILHO

A MATEMÁTICA APLICADA AOS QUADRICÓPTEROS: UMA PROPOSTA DE
ENSINO E PESQUISA

MOSSORÓ

2020

TÉLICO JOSÉ DE OLIVEIRA SILVA FILHO

**A MATEMÁTICA APLICADA AOS QUADRICÓPTEROS: UMA PROPOSTA DE
ENSINO E PESQUISA**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional da Universidade Fe-
deral Rural do Semiárido em Mossoró - PROFMAT-
UFERSA como requisito parcial para obtenção do
grau de Mestre.

Orientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia

MOSSORÓ

2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

SS586 Silva Filho , Téliço José de Oliveira.
m A matemática aplicada ao quadricóptero - Uma proposta de ensino e pesquisa / Téliço José de Oliveira Silva Filho . - 2019.
51 f. : il.

Orientador: Antonio Ronaldo Gomes Garcia.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

1. Modelagem. 2. Ensino de STEM. 3. Transposição didática. 4. Quadricóptero. I. Garcia, Antonio Ronaldo Gomes, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

TÉLICO JOSÉ DE OLIVEIRA SILVA FILHO

“A matemática através dos quadricópteros: uma proposta de ensino e pesquisa”

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFRSA, Centro de Ciências Exatas e Naturais para a obtenção do título de Mestre em Matemática do programa PROFMAT.

APROVADO EM: 28 / 10 / 2019

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFRSA
Presidente

Prof. Dr. Paulo César Linhares da Silva - UFRSA
Segundo Membro

Prof. Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFRSA
Primeiro Membro

Dedico esse trabalho a minha mãe, Socorro, companheira e grande exemplo que desde minha infância esteve ao meu lado, mostrando a importância de estudar e aprender sempre mais. Seu incentivo contínuo e esforço notável me permitiu chegar até aqui.

AGRADECIMENTOS

A Deus que permitiu o início dessa caminhada e esteve presente ao longo do caminho agindo com misericórdia.

À minha família, em especial a minha mãe, e a minha esposa pelas orações e apoio irrestrito.

Ao Prof. Antônio Ronaldo Gomes Garcia pela generosidade e paciência durante todo período de produção desse trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro, através de bolsa de estudos, à minha pesquisa.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo discutir a matemática utilizada nos quadricópteros como ferramenta de ensino e pesquisa no Ensino Médio e como os saberes produzidos na pesquisa acadêmica nessa área podem ser um elemento motivador para estudantes e professores. Com isso, o trabalho pretende despertar o interesse em conhecer aplicações da matemática na tecnologia. Busca-se fundamentar nas propostas de ensino de STEM, sigla em inglês para ciência, tecnologia, engenharia e matemática, fazendo uso de ferramentas como a Transposição Didática dos Saberes e a Pesquisa Translacional. Após esses pressupostos metodológicos, foi feito um estudo das ferramentas matemáticas e físicas empregadas na construção de um modelo para o quadricóptero utilizando basicamente matrizes, equações diferenciais e leis de Newton. Em seguida, fez-se a modelagem do veículo chegando-se a um sistema de equações diferenciais e por fim, discute-se o controle do quadricóptero. Verifica-se que, com base nas regras da Transposição Didática de Saberes, no ensino de STEM e em práticas já desenvolvidas é plenamente possível transpor esse conhecimento para o Ensino Médio.

Palavras-chave: Modelagem. Transposição didática. Ensino de STEM. Quadricóptero.

ABSTRACT

This paper aims to discuss the mathematics used in the quadcopter as a teaching and research tool in high school and how the knowledge produced in academic research in this area can be a motivating element for students and teachers. With this, the work aims to arouse interest in knowing applications of mathematics in technology. It seeks to base on the teaching proposals of STEM, for science, technology, engineering and mathematics, making use of tools such as Didactic Transposition of Knowledge and Translational Research. Following these methodological assumptions, a study was made of the mathematical and physical tools employed in constructing a quadcopter model using basically matrices, differential equations and Newton's laws. Then, the vehicle was modeled, arriving at a system of differential equations and finally, the quadcopter control is discussed. Based on the rules of Didactic Transposition of Knowledge, STEM teaching and already developed practices, it is fully possible to transpose this knowledge to High School.

Keywords: Modeling. Didactic Transposition. STEM teaching. Quadcopter.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Mudança de base.	19
Figura 2 – Vetores e_1 e e_2 escritos como uma combinação linear de f_1 e f_2	20
Figura 3 – Representação do sistema móvel de eixos utilizando ângulos de Euler.	21
Figura 4 – Oscilador harmônico simples formado por um sistema massa-mola.	22
Figura 5 – Família de soluções da equação 3.4	23
Figura 6 – Vetor posição no movimento de translação	26
Figura 7 – $scale = 1.0$	27
Figura 8 – Descrição vetorial de um corpo rígido. Fonte: < http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/corpo_rigido/intro/ >	29
Figura 9 – Momento angular e linear de um corpo rígido. Fonte: autoria própria	30
Figura 10 – Visão superior do quadricóptero com os quatro motores numerados e com o sentido de rotação. Fonte: autoria própria	34
Figura 11 –	35
Figura 12 – Esquema de funcionamento do movimento de um quadricóptero. Fonte: autoria própria	36
Figura 13 – Visão geral da dinâmica do quadricóptero. Fonte: autoria própria	36
Figura 14 – Diagrama de um sistema de controle automático.	47
Figura 15 – Diagrama de um sistema de controle automático. Fonte:[1] adaptado	47
Figura 16 – Resposta natural do ângulo de rolagem e de elevação a uma velocidade angular inicial. Fonte:[2]	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO PEDAGÓGICA	13
2.1	Transposição Didática dos Saberes	13
2.1.1	Como o saber sobrevive	14
2.2	A STEM como ferramenta de ensino-aprendizagem	15
2.3	Exemplos da prática de STEM	16
2.3.1	A robótica educacional	16
2.3.2	O ensino de engenharia para estudantes do Ensino Médio	17
3	FUNDAMENTOS DE FÍSICA E MATEMÁTICA	18
3.1	Matrizes	18
3.2	Mudança de base e rotação de sistemas de eixos	18
3.3	Equações diferenciais ordinárias	21
3.4	Fundamentos de mecânica clássica	25
3.4.1	Cinemática	25
3.4.2	Dinâmica de corpos rígidos	28
3.4.3	Momento linear e momento angular de um corpo rígido	30
3.4.4	Ângulos de Euler	31
3.5	Matrizes ortogonais e rotações do sistema de eixos	32
4	MODELAGEM DO QUADRICÓPTERO	34
4.1	Aceleração linear	37
4.2	Comportamento em malha aberta	42
4.3	Aceleração angular	43
4.3.1	Expandindo as equações de movimento	44
4.3.1.1	Momentos giroscópicos das hélices	44
5	CONTROLE DO QUADRICÓPTERO	46
5.1	Definições	46
5.2	Controle em malha aberta	47
6	CONCLUSÃO	49
	REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

Os VANTS, veículos autônomos não tripulados, vêm representando uma grande inovação em diversas áreas. Através deles, pode-se realizar uma série de atividades que anteriormente eram financeiramente inviáveis ou apresentavam um alto risco quando se empregava mão de obra humana. Por exemplo, é já possível ver a utilização de drones no trabalho de pulverização de colheitas; serviço esse que era realizado utilizando aviões pulverizadores. Na contramão desse desenvolvimento, ainda percebe-se o ensino de matemática, ciências e engenharia fazendo de metodologias pouco atrativas onde o que é ensinado dialoga pouco com as novas tecnologias. De acordo com Moreira (2018) No geral, o que vemos é um ensino muito compartimentalizado e centrado na pessoa do professor. Essa forma de se ensinar e aprender não favorece a autonomia, a visão sistêmica e a capacidade de resolver problemas mais complexos por parte do aluno[3]. O problema das dificuldades de aprendizagem em ciências exatas e o desestímulo em seguir carreira nessas áreas podem ser vistos tanto no dia a dia do professor da educação básica quanto nas avaliações oficiais.

A pesquisa e desenvolvimento dos quais os drones se utilizam são fruto de um trabalho interdisciplinar de diversas áreas como a matemática, física, engenharia e computação. Daí então a necessidade de apresentar os resultados das pesquisas nessas diversas áreas do conhecimento para que se realizem atividades práticas de ensino e pesquisa desde o ensino médio.

Neste trabalho, Será apresentado o ensino de STEM, sigla em inglês para ciência, tecnologia, engenharia e matemática. Além disso será mostrada a modelagem matemática de veículos autônomos e esta será usada como metodologia de ensino e pesquisa para estudantes do Ensino Médio. Se discutirá de que forma a modelagem e a montagem de um quadricóptero podem ser usadas como ferramenta de ensino e aprendizagem privilegiando os conteúdos matemáticos do Ensino Médio. Vários trabalhos acadêmicos [4] reconhecem a importância da modelagem e simulação no processo de ensino e aprendizagem de ciência, tecnologia, engenharia e matemática. Se discute inicialmente toda fundamentação teórica e metodológica necessária para a obtenção de um modelo matemático que utiliza sistema de equações diferenciais útil para modelar a dinâmica do quadricóptero e como isso pode ser aplicado a um público-alvo de estudantes e professores do ensino médio.

No primeiro capítulo se discute como é possível trabalhar esse saber na educação básica. A ferramenta que foi utilizada neste trabalho foi a Transposição Didática dos Saberes. É mostrado ainda como as metodologias ativas se mostram mais eficientes quando comparadas com a forma tradicional de se ensinar e aprender matemática e, por fim, são apresentados exemplos do ensino de STEM na educação básica.

No segundo capítulo são abordados conceitos de disciplinas básicas e complementares como a álgebra linear e mecânica clássica. Os conceitos relacionados às matrizes de transformação linear, cinemática e dinâmica de corpos rígidos e equações diferenciais constituem uma base

importante para a modelagem de qualquer sistema físico.

No terceiro capítulo é abordada a modelagem matemática do quadricóptero. O objetivo é obter um sistema de equações diferenciais que descreva a dinâmica do veículo bem como outro conjunto de equações que permitam explicar o funcionamento dos seus quatro motores. Para isso são utilizadas as leis de Newton. O sistema que descreve o movimento do quadricóptero possui seis graus de liberdade; entende-se por número de graus de liberdade a quantidade de parâmetros necessária para descrever um determinado movimento. Por exemplo, um movimento unidimensional possui apenas um grau de liberdade. No caso do quadricóptero, como o seu movimento apresenta translação em três dimensões e rotações em torno dos três eixos, tem-se seis graus de liberdade. Os parâmetros utilizados serão x, y e z , para a translação e θ, ϕ e ψ para as rotações.

O quarto capítulo trata dos fundamentos da teoria de controle de forma que estudantes e professores do ensino médio possam fazer uso dos conceitos mais básicos em aplicações tecnológicas em suas salas de aula. Além disso, é mostrado um resultado de simulação do quadricóptero em malha aberta.

2 FUNDAMENTAÇÃO PEDAGÓGICA

Neste capítulo falaremos sobre as teorias e práticas pedagógicas que embasam nosso trabalho. Nossos objetivos são motivar os agentes da educação, professores, estudantes e gestores a conhecerem os benefícios das práticas inovadoras de ensino, discutir os desafios dessa prática e mostrar o que já vem sendo feito no sentido de superar tais desafios e mostrar que um saber desenvolvido no universo acadêmico, que é o caso dos projetos envolvendo quadricópteros pode ser utilizado como ferramenta de ensino e aprendizagem. Para isso, refletiremos sobre as metodologias ativas como alternativas ao ensino tradicional voltado para a testagem, será discutido ainda o ensino de STEM (*Science, Technology, Engineering and Mathematics*) como ferramenta motivadora desse processo e falaremos sobre a Transposição didática dos Saberes, teoria responsável por adaptar o saber produzido na pesquisa para o seu uso entre professores e estudantes da educação básica.

2.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DOS SABERES

Para atender aos objetivos do trabalho, buscamos conhecer a teoria da Transposição Didática dos Saberes, para compreender se a nossa proposta seria viável de ser aplicada a estudantes e professores do Ensino Médio.

A Transposição didática teve origem em 1975, na França com o sociólogo Michel Verret e, em 1982, Yves Chevallard e Marie-Alberte Joshua utilizaram este conceito para analisar como a noção matemática de distância sofria modificações desde sua introdução por Frechet, em 1906 até a sua inserção nos currículos escolares de geometria na sétima série, em 1971 [5].

Assim sendo, a Transposição didática vem sendo usada como uma ferramenta útil para analisar e entender as transformações sofridas pelo saber, desde a formulação da teoria no meio acadêmico, até a sala de aula. A Transposição Didática pressupõe a existência de um processo no qual o saber de referência (Saber Sábio) passa por transformações até se tornar o conteúdo estudado em sala de aula (Saber Ensinado).

Ao contrário do que pode se pensar, não se trata de uma mera simplificação do saber, mas, de fato na adequação do saber "em sua sequência, em sua linguagem, em exercícios, problemas e atividades objetivando sempre a otimização do aprendizado"[5].

Essa ferramenta pressupõe a existência de três níveis de saber, o **Saber Sábio**, onde a teo-

ria é produzida, o **Saber a Ensinar**, que se materializa na produção de livros didáticos, manuais de ensino e programas escolares cujo público alvo são estudantes universitários e professores das redes básicas de ensino e o **Saber Ensinado**, que consiste em fazer uma transposição do saber afim de se obter o sequenciamento das aulas. Cada um desses níveis possuem sua comunidade atuando de forma autônoma nesse processo. "Ligando esses níveis tem-se a Noosfera, que constitui uma esfera de ação, onde os protagonistas atuam na transformação do saber"[5].

2.1.1 COMO O SABER SOBREVIVE

Chevellard aponta alguns indícios de características relevantes para que uma teoria no nível do Saber Sábido sobreviva até se tornar Saber a Ensinar. As características são:

- O saber tem que ser consensual. Ou seja, aceito como verdade dentro da comunidade científica. Mesmo que esse status de "verdade" seja momentâneo.
- O saber deve buscar uma atualização. Essa atualização se dá de duas maneiras: a Atualidade moral, que mostra que o saber tem importância reconhecida pela sociedade, ou seja, pelos pais e pela comunidade científica. O saber não pode ter status de obsoleto, ou seja, que pode ser facilmente ensinado pelos pais. O saber a ser transposto deve ser equidistante do saber dos cientistas e dos pais. E temos ainda a Atualidade biológica, isso é, o saber a ser transposto deve estar de acordo com a ciência vigente.
- O saber tem que ser operacional. Ou seja, o saber deve ser capaz de gerar atividades, avaliações ou exercícios.
- O saber deve permitir que haja uma criatividade didática. Isso é, permitir que se produzam objetos exclusivos da escola, sem nenhum paralelo no Saber Sábido.
- O saber deve ser terapêutico. Isso é, ele precisa ser testado "in loco" e aprovado, adquirindo assim um "selo de qualidade".

Astolfi (Apud [5]) fornece ainda um conjunto de regras que, alinhadas às características relevantes de Chevellard conduzem uma teoria do Saber Sábido ao Saber Ensinado.

1. **Regra 1 - Modernizar o saber escolar** - A modernização do saber escolar consiste em uma necessidade pois vemos que o saber sábio se desenvolve de forma cada vez mais rápida. Ainda de acordo com Brockington (Apud [5]), a modernização legitima o programa da disciplina, garantindo seu lugar no currículo.
2. **Regra 2 - Atualizar o saber escolar** - O saber escolar precisa ser atualizado em relação à sociedade. Um saber considerado obsoleto é aquele que pode ser transmitido pelos pais. É necessário que o saber transmitido na escola esteja equidistante do saber diluído na cultura, aquele ensinado pelos pais e o saber sábio, produzido na academia.

3. **Regra 3 - Articular o saber novo com o antigo** - O saber novo deve estar articulado com o conjunto de saberes antigos. Não de forma abrupta, com o objetivo de refutar o saber anterior, mas de modo a fundamentar o novo saber.
4. **Regra 4 - Transformar um saber em exercícios e problemas** - Exercícios e problemas fazem parte do processo avaliativo escolar. Por isso, saberes que podem facilmente dar origem a exercícios e avaliações têm um maior potencial de serem incorporados como saber a ser ensinado.
5. **Regra 5 - Tornar um conceito mais compreensível** - Isso se traduz em uma mudança da sua linguagem original. O saber passa a ser redigido em uma linguagem mais próxima do seu público-alvo, fazendo com que a sua compreensão e aprendizagem seja facilitada.

Diante do desafio de adaptar os saberes envolvidos em projetos de quadricópteros para estudantes e professores do ensino médio, percebemos que a Transposição Didática nesse caso se mostra possível de acordo com as suas regras. Pesquisas dessa natureza envolvem Tecnologias da Informação que modernizam e atualizam os saberes escolares bem como os métodos de ensino dos saberes antigos. O ensino de conteúdos como matrizes, plano cartesiano e mecânica utilizando ferramentas computacionais e construção de veículos mostra-se mais próximo do núcleo de pesquisa do que a forma tradicional de repassar conteúdos. Além disso, os conteúdos estudados na ciência estão fortemente articulados com as práticas que podem ser desenvolvidas na nossa proposta. O que mostra que não existe uma ruptura entre o saber ensinado e o novo saber. O novo saber pode ainda ser transformado em exercícios e problemas, os quais podem ser desenvolvidos a partir de ferramentas computacionais. A quinta regra ainda se mostra um desafio para a pesquisa. Há uma necessidade de adaptar uma grande quantidade de conceitos e nomes da teoria de controle e das equações diferenciais para o público-alvo; o que sugere várias possibilidades de continuidade desse trabalho.

2.2 A STEM COMO FERRAMENTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM

A STEM foi a metodologia que mais chamou a atenção no sentido de resolver o problema de motivar o estudante enquanto aproxima a tecnologia e a engenharia ao conteúdo estudado. STEM é uma sigla para *Science, Technology, Engineering and Mathematics* (ciência, tecnologia, engenharia e matemática). De acordo com Marco Antônio Moreira, [3], a base do ensino de STEM envolve a integração desses conteúdos quebrando os "silos" do ensino de disciplinas totalmente independentes que o estudante tem que enfrentar, e fazendo conexões com o contexto do mundo real.

Em seu artigo, Moreira apresenta vários desafios para o ensino de ciência e tecnologia e mais especificamente para o ensino de STEM na educação contemporânea. O trabalho, por

sua vez, está baseado em um dossiê publicado na revista Science, em 2013, sobre os desafios do ensino de ciências no século XXI. A revista Science cita ainda a fala do físico Carl Wieman, nobel da física, onde ele defende os benefícios das metodologias ativas em relação ao modo tradicional de se ensinar e aprender:

"O que funciona melhor do que aulas expositivas e temas (problemas) de casa, é ter os alunos trabalhando em pequenos grupos com a mediação de professores que podem ajudá-los a aplicar os conceitos básicos a situações da vida real"(apud [3]).

Dentre os diversos desafios para que tenhamos de fato uma educação científica e tecnológica que atenda às demandas do século XXI, Moreira elenca as seguintes:

- Aprendizagem ativa e ensino centrado no aluno.
- Prática deliberada.
- Desenvolvimento de competências científicas.
- O uso de laboratórios presenciais e virtuais.
- A compreensão de desordens cognitivas individuais e como elas contribuem para o ensino formal.
- Professores empreendedores que possam divulgar suas práticas inovadoras a colegas, gestores, políticos, etc.

2.3 EXEMPLOS DA PRÁTICA DE STEM

Ao se fazer uma busca na literatura é possível ver vários casos de prática de ensino de disciplinas STEM. Estes casos relatados podem servir como exemplo ou motivação para que o professor passe a aplicar tais práticas no seu dia a dia dentro da escola.

2.3.1 A ROBÓTICA EDUCACIONAL

A literatura mostra uma grande variedade de exemplos do uso da robótica como ferramenta de ensino e aprendizagem. Através dela, é possível trabalhar conceitos da matemática e da física de maneira lúdica a partir da resolução de problemas concretos. De acordo com Lima e Casillo, [6], "a robótica educacional também pode ser usada como uma forma de incentivo ao estudo da computação".

O trabalho de Lima e Casillo [6] propõe o uso do arduino na construção de um robô didático utilizado em problemas das Olimpíada Brasileira de Robótica (OBR). O resultado

alcançado pelos autores é um robô com um custo de aquisição inferior ao modelo mais usado na competição, no caso, o *LEGO mindStorms*®.

2.3.2 O ENSINO DE ENGENHARIA PARA ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Algumas práticas de ensino de engenharia durante o Ensino Médio podem ser um elemento motivador para que mais estudantes se sintam atraídos ou vocacionados para essas áreas. Por exemplo, na Escola Politécnica de Engenharia da Universidade de São Paulo (POLI-USP) acontece o programa de pré-iniciação científica (Pré-IC), onde os estudantes de escolas do Ensino Médio têm a oportunidade de participar de atividades nos laboratórios de engenharia da faculdade. "Os alunos participantes foram divididos em quatro grupos e apresentaram os resultados de sua vivência nos laboratórios de Tecnologia de Materiais e Componentes de Construção, Geoprocessamento, Automação e Modelagem Matemática neste ciclo, que teve a duração de seis semanas."[7]

Segundo relatos dos professores e estudantes participantes do Pré-IC, o programa apresenta resultados positivos como o engajamento dos estudantes para alcançar os objetivos em um curto espaço de tempo e uma visão mais ampla da ciência, da engenharia e do papel da universidade.

"Os alunos comentaram que o programa ofereceu uma visão real do que é engenharia, permitiu o contato com a ciência, ajudou a mudar os conceitos que tinham da universidade e a ver a vida de modo mais avançado. Outra avaliação positiva que fazem do programa é o envolvimento dos demais alunos das escolas onde estudam que chegam até a competir para ver quem irá participar dos próximos grupos."[7]

Em sua tese de doutorado, Rodrigo Barbosa Silva estuda as diferentes vertentes do movimento *maker* como as propostas baseadas em FabLabs, na Maker Media em contraste com a proposta da FabLearn e vê essa última vertente como uma contribuição ao pensamento filosófico de Álvaro Vieira Pinto e ao trabalho do educador Paulo Freire.

"conclui-se que proposta FabLearn é condicente com ideias freirianas para Educação e que parte da falta de embasamento teórico do movimento maker em geral pode ser preenchida pelo pensamento filosófico de Álvaro Vieira Pinto e educacional de Paulo Freire, em uma perspectiva emancipatória e inclusiva da sociedade."[8]

3 FUNDAMENTOS DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Neste capítulo se fará uma breve revisão das ideias matemáticas necessárias à compreensão do processo de modelagem e controle de quadricópteros. Nosso ponto de partida são as matrizes, sua aplicação nas transformações lineares e as equações diferenciais.

Após a exposição das ideias matemáticas, serão discutidos os principais conceitos da mecânica clássica envolvidos nos estudos dos quadricópteros.

3.1 MATRIZES

Uma matriz é uma ferramenta matemática que consiste em uma tabela de elementos dispostos em linha e coluna. [9]. É no ensino médio que os estudantes têm o primeiro contato com matrizes e o objetivo desse estudo é motivá-los a ver conteúdos matemáticos como ferramentas de pesquisa úteis ao desenvolvimento científico e tecnológico. Usamos a notação A_{ij} para denotar uma matriz em que i e j são números naturais e a_{ij} indica o elemento da matriz na linha i e coluna j . Por exemplo, se A é uma matriz quadrada do tipo 3×3 , temos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

3.2 MUDANÇA DE BASE E ROTAÇÃO DE SISTEMAS DE EIXOS

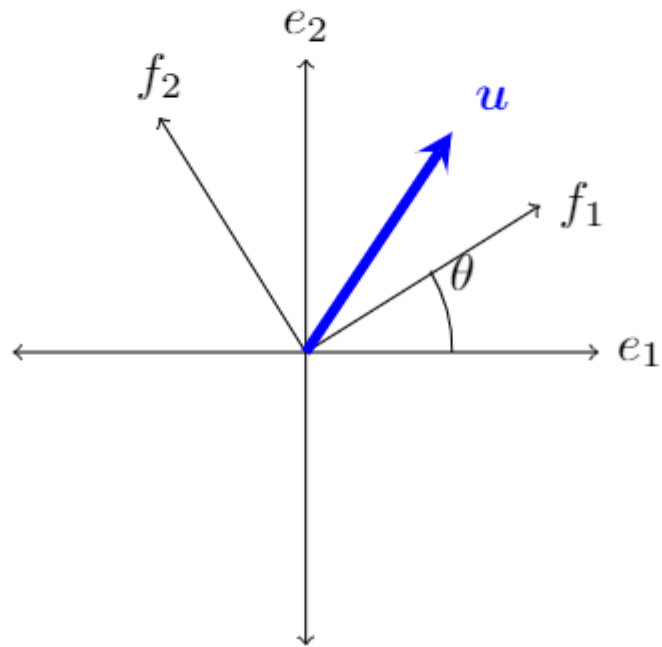
Uma aplicação importante das matrizes diz respeito ao seu uso no cálculo de rotações de objetos ou na transformação de um sistema de eixos coordenados Σ_1 em um sistema de eixos Σ_2 , obtido exclusivamente através de uma rotação em torno de um dos eixos coordenados. Os sistemas são ortogonais e, portanto, suas respectivas bases E e F são ortonormais. A mudança de base será mostrada inicialmente no plano e, em seguida, a ideia será estendida para as coordenadas no espaço.

Boldrini [10] e Coelho [11] mostram como obter uma matriz de mudança da base $\beta = \{e_1, e_2\}$ para a base $\beta' = \{f_1, f_2\}$ obtida a partir da base canônica β pela rotação de um ângulo θ . Consideremos inicialmente a mudança de base no \mathbb{R}^2 . O resultado em seguida pode ser estendido para sistemas tridimensionais.

Dado um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ de coordenadas

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Figura 1 – Mudança de base.

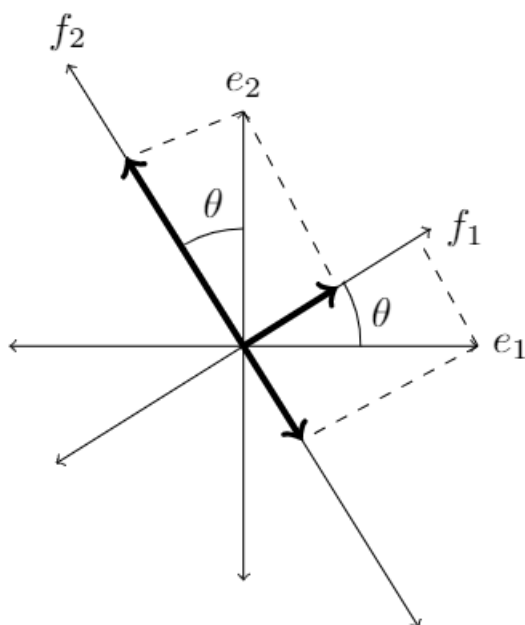


Fonte: Autoria própria

Escrevendo \vec{v} nas bases β e β' , vem

$$\begin{aligned}v &= x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ &= y_1 f_1 + y_2 f_2.\end{aligned}$$

Figura 2 – Vetores e_1 e e_2 escritos como uma combinação linear de f_1 e f_2 .



Fonte: Autoria própria.

Temos que escrever e_1 e e_2 em função de f_1 e f_2 . Para isso, se considerarmos a figura 2 e aplicarmos as relações métricas no triângulo retângulo, é possível concluir que

$$e_1 = f_1 \cos \theta - f_2 \operatorname{sen} \theta$$

$$e_2 = f_1 \operatorname{sen} \theta + f_2 \cos \theta$$

Escrevendo na forma matricial, a equação 3.2 torna-se

$$[v]_{\beta} = [I] [v]_{\beta}'$$

Ou seja,

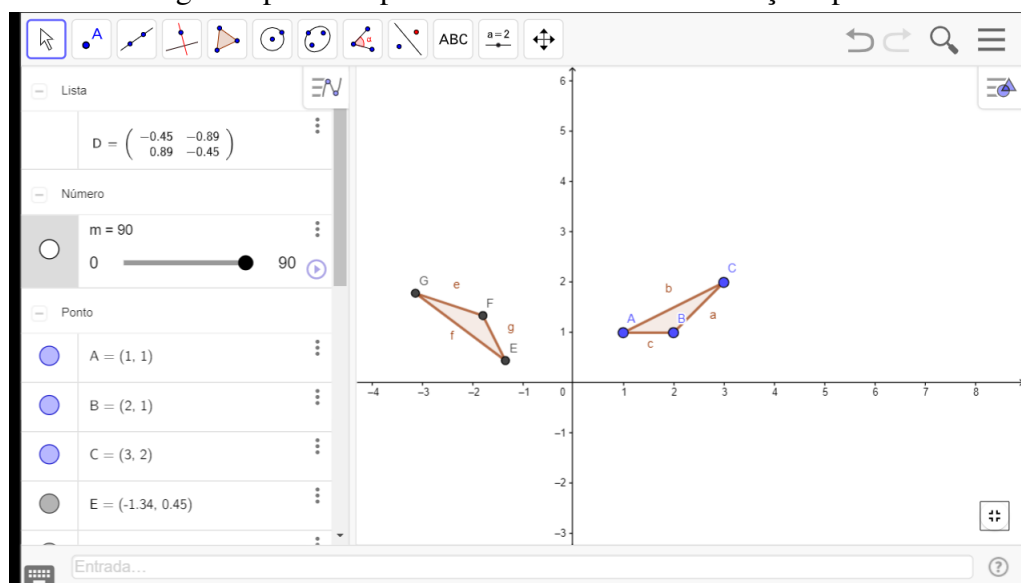
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

A título de motivação para novas aplicações, as matrizes de rotação podem ser abordadas no ensino médio com a utilização do software Geogebra. Pereira [12] apresenta sequências de atividades voltadas para o ensino médio utilizando matrizes de rotação com o geogebra.

Exemplo 3.1. *É possível mostrar através do Geogebra como aplicar uma rotação de 90° a um triângulo de vértices $(1,1)$, $(3,2)$ e $(2,1)$ no plano.*

$$R_{90^\circ}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotação de um triângulo a partir do produto de uma matriz de rotação aplicada a seus vértices.



Fonte: Autoria própria

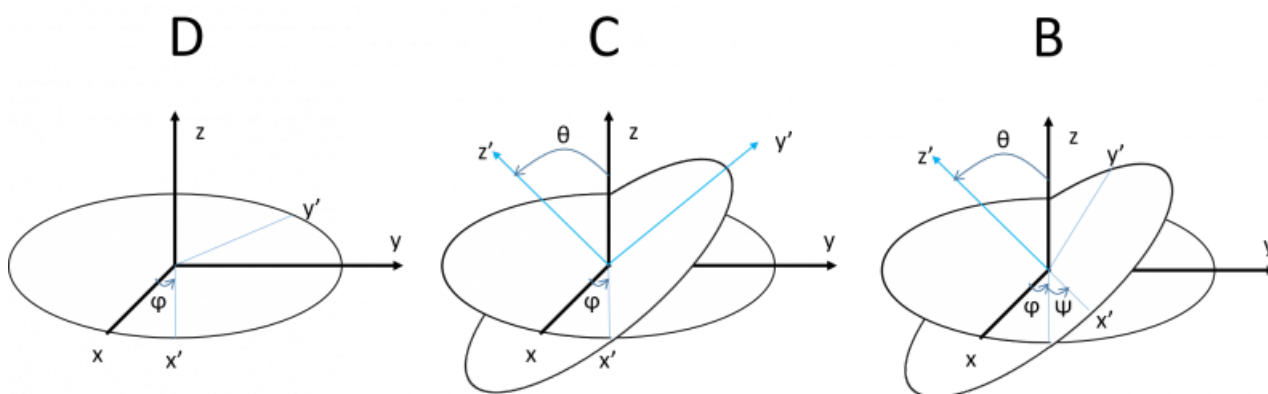


Figura 3 – Representação do sistema móvel de eixos utilizando ângulos de Euler.

3.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

As equações diferenciais desempenham um importante papel quando se trata de fornecer um modelo matemático de um sistema físico. Embora este não seja um assunto desenvolvido no ensino médio, a formação dos professores de matemática e física contempla este curso em seus currículos. Isso faz com que o professor do ensino médio tenha uma compreensão do uso de equações diferenciais em fenômenos do dia a dia.

Quando estuda a mecânica, por exemplo, o estudante tem contato com uma série de ideias advindas do estudo das equações diferenciais. Por exemplo, quando estuda a definição de velocidade, que é a razão entre o espaço percorrido e o intervalo de tempo necessário para

percorrê-lo e é dado pela equação

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

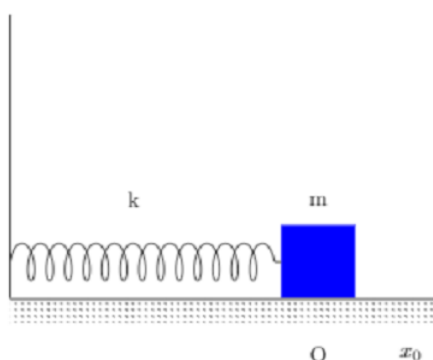
está lidando com diferenciais, apesar de não ter contato com esse termo durante o ensino médio. No ensino médio, estuda-se ainda a diferença entre velocidade média e velocidade instantânea. E a velocidade instantânea se dá quando $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. E esse limite pode ainda ser expresso através da notação de derivada como

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (3.3)$$

em que ds e dt representam valores infinitesimais de Δs e Δt , respectivamente.

Exemplo 3.2. Outros fenômenos podem ser descritos matematicamente utilizando equações diferenciais, como por exemplo, a dinâmica de um oscilador harmônico simples formado por um sistema massa-mola composto por um corpo de massa m que se move sem atrito cinético sobre uma superfície representada pelo eixo x pode ser representada pela equação diferencial ordinária 3.4.

Figura 4 – Oscilador harmônico simples formado por um sistema massa-mola.



Fonte: autoria própria

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0. \quad (3.4)$$

seja $x = e^{\alpha t}$ a solução da equação 3.4. Logo,

$$x' = \alpha e^{\alpha t} \quad (3.5)$$

e

$$x'' = \alpha^2 e^{\alpha t} \quad (3.6)$$

Substituindo 3.5 e 3.6 na equação 3.4, temos

$$m\alpha^2 e^{\alpha t} + k e^{\alpha t} = 0.$$

Colocando $e^{\alpha t}$ em evidência, vem

$$e^{\alpha t} (m\alpha^2 + k) = 0.$$

Como $e^{\alpha t} \neq 0$, segue que $m\alpha^2 + k = 0$. Como $m > 0$ e $k > 0$, a equação característica

$$m\alpha^2 + k = 0 \quad (3.7)$$

possui duas raízes complexas do tipo $x' = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ e $x'' = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$. Assim, a solução da equação 3.4 será da forma

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t + \phi} + C_2 e^{-i\omega t + \phi}, \quad (3.8)$$

em que $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, ϕ é uma constante real denominada fase do Movimento Harmônico Simples e os coeficientes C_1 e C_2 são números reais. Considerando ainda a fórmula de Moivre,

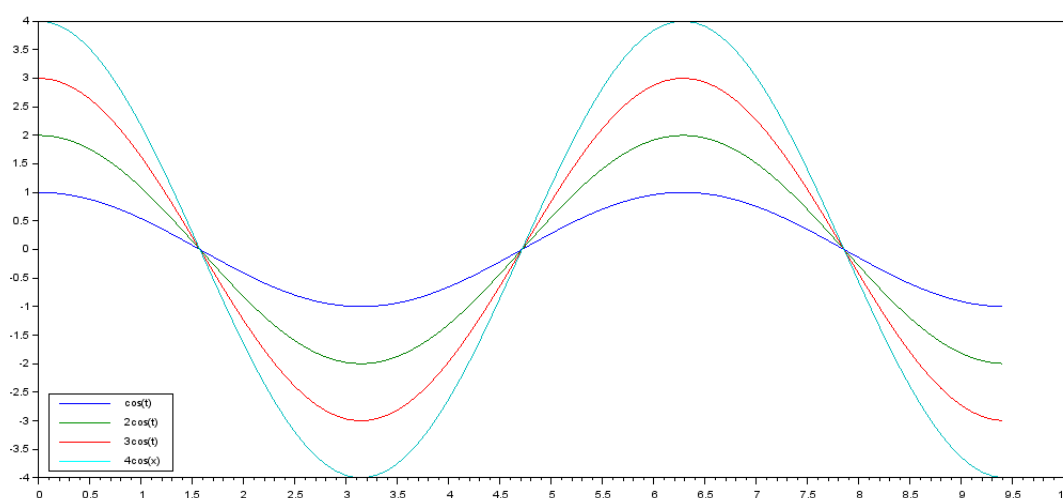
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (3.9)$$

concluimos que

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi), \quad (3.10)$$

Em que C_1 é uma constante real. A EDO 3.4 estabelece uma família de curvas que são soluções e cada solução depende da constante C_1 .

Figura 5 – Família de soluções da equação 3.4



Fonte: Autoria própria

A figura 5 foi obtida a partir do software Scilab. Pode-se sugerir como parte das atividades investigativas sobre a matemática presente no quadricóptero a prática de construção de gráficos de funções utilizando Scilab. O software permite ainda a resolução numérica de equações diferenciais, o que é de grande importância nesse estudo.

Definição 3.3. *Uma equação que contem as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes com relação a uma ou mais variáveis independentes é uma equação diferencial. [13]*

Se uma equação diferencial possui apenas derivadas ordinárias, ela é chamada de equação diferencial ordinária - EDO.

As equações diferenciais podem ainda ser classificadas quanto à ordem de suas derivadas. A ordem de uma EDO é a derivada de maior ordem em uma equação. Por exemplo, se a derivada de maior ordem for de segunda ordem, teremos uma EDO de segunda ordem.

Pode-se ainda classificar ainda uma EDO quanto à sua linearidade ou não linearidade. Dizemos que uma equação diferencial da forma $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ é linear quando f é uma função linear de $y, y'', \dots, y^{(n-1)}$, isso significa que a EDO pode ser escrita como:[13]

Definição 3.4. *um problema de valor inicial (PVI) de uma equação diferencial de ordem n é*

$$y^{(n)} = f(x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \quad (3.12)$$

em que $x_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{(n-1)}$ são valores dados. A solução geral de 3.11 é uma família de n parâmetros. As condições iniciais 3.12 são usadas para determinar os valores das constantes da solução geral e assim, achamos uma solução particular. [14]

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (3.13)$$

Nessa equação, vemos duas propriedades referentes às equações diferenciais lineares.

- A variável dependente e todas as suas derivadas são de primeiro grau, isso é, a potência de todos os termos em que aparece o y é 1.
- Os coeficientes a_i são dependentes apenas de x , que é a variável independente.

Por exemplo, a equação

$$(y - x)dx - 4xdy = 0$$

é uma equação diferencial linear, já no caso abaixo tem-se uma equação não linear, que apresenta um dos coeficientes depende de y e uma função não linear de x .

$$(1 - y)dy + 2y = e^x.$$

Definição 3.5. *Quando uma função ϕ , definida em algum intervalo I , é substituída em uma equação diferencial e transforma uma equação diferencial em uma identidade, dizemos que é uma solução da equação diferencial no intervalo.*

3.4 FUNDAMENTOS DE MECÂNICA CLÁSSICA

A modelagem dinâmica do quadricóptero depende de conceitos básicos da mecânica clássica tais como sistema de referência, movimento plano, velocidade, aceleração, força e momento. Aguiar 2010 [15] e Nussenzveig [16] definem matematicamente tais conceitos e mostra teoremas que serão utilizados na modelagem do quadricóptero.

Como o movimento é relativo, a física faz uso de coordenadas cartesianas para medir e registrar a posição de um móvel relativa a uma origem ao sistema de coordenadas utilizado dá se o nome de referencial ou sistema de referência. De acordo com Meirovitch, 2010, [17], a imagem mental de um SR é de três réguas gigantes colocadas a 90 graus umas das outras formando os três eixos cartesianos x , y e z e de um único relógio visível de todos os lugares para medir a passagem do tempo. Com isso, podemos anotar a cada instante t , como visto no relógio, a posição $\vec{r} = (x, y, z)$ de uma partícula.

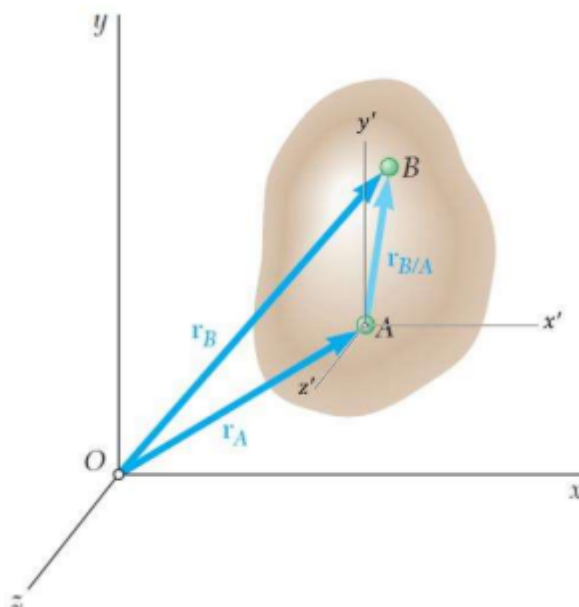
Ainda de acordo com Meirovitch [17], "as leis de Newton são usadas preferencialmente em sistemas referencias inerciais mas em muitos casos, é mais conveniente o uso de referenciais não inerciais. Um referencial é chamado de inercial quando a primeira lei de Newton é válida para ele. No nosso caso, trabalharemos com um sistema de eixos rotacionado em relação a um outro sistema que é fixo."

3.4.1 CINEMÁTICA

A cinemática é a área da mecânica que estuda os movimentos sem levar em conta as causas dos mesmos. Existem três tipos de movimentos planos. São eles: a rotação em torno de um eixo fixo, a translação e o movimento plano geral. (Hibbeler 2011 apud [9]).

Sejam A e B pontos quaisquer do corpo, os vetores do corpo. Os vetores r_A e r_B são definidos utilizando o referencial fixo x, y, z . Dado um outro sistema referencial x', y', z' cuja origem é o ponto A, podemos escrever um vetor $r_{B/A}$ que rotaciona os pontos A e B.

Figura 6 – Vetor posição no movimento de translação



Fonte: Beer, Johnston Junior e Cornwell (2012) apud [9] adaptado

Assim, de acordo com a figura 6, o vetor posição do ponto B em relação à origem do sistema x, y, z é dado por

$$r_B = r_A + r_{B/A} \quad (3.14)$$

A velocidade é definida como a taxa de variação da posição da partícula em relação ao tempo [16]

$$v = \frac{dr}{dt} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt) = (v_x, v_y, v_z). \quad (3.15)$$

Derivando a equação 3.14 em relação ao tempo e considerando o vetor $r_{B/A}$ constante, obteremos

$$v_A = v_B \quad (3.16)$$

Ou seja, no caso da translação, a velocidade de um corpo rígido é a mesma em todos os seus pontos [9]. A aceleração da partícula é definida como a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo. Ou seja, a derivada segunda da posição em relação ao tempo.

$$a = \frac{dv}{dt} = (dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt) = (a_x, a_y, a_z). \quad (3.17)$$

ou

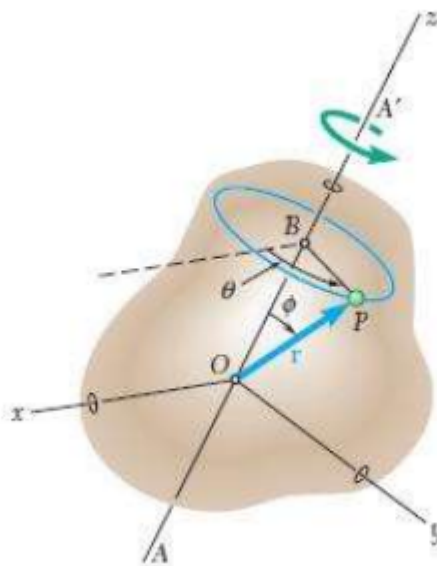
$$a = \frac{d^2r}{dt^2} \quad (3.18)$$

Força é uma ação impressa a um objeto que visa mudar seu estado de movimento. Além disso, se considerarmos apenas a translação, a aceleração no ponto A é igual à aceleração no ponto B.

$$a_A = a_B \quad (3.19)$$

Vamos considerar agora o caso em que o corpo sobre uma rotação em torno de um eixo fixo conforme a figura 7

Figura 7 – Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo



Fonte: Fonte: Beer, Johnston Junior e Cornwell (2012) apud [9] adaptado

Nesse caso, o ponto P possui trajetória circular e a sua velocidade pode ser descrita por meio da derivada do vetor r em relação ao tempo. Geometricamente, a velocidade de P é um vetor tangente à sua trajetória.

$$v = \frac{dr}{dt} = \omega \times r, \quad (3.20)$$

em que ω corresponde à velocidade angular da partícula. Derivando a equação 3.4.1, vem

$$a = \frac{dv}{dt} = a_A \alpha \times r + \frac{d}{dt}(\omega \times r), \quad (3.21)$$

em que a_A representa a aceleração no ponto A Aplicando a regra do produto à equação 3.21,

$$a = a_A + \alpha \times r + \omega \times (\omega \times r), \quad (3.22)$$

de forma que tenhamos a aceleração angular do corpo decomposta em duas componentes, uma aceleração tangencial e uma aceleração normal.

$$a = a_A + a_t + a_n, \quad (3.23)$$

que pode ser escrita como [9]

$$a = a_A + \alpha \times r - \omega^2 r \quad (3.24)$$

3.4.2 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

O momento linear de uma partícula é definido como o produto da sua massa por sua velocidade.

$$p = mv. \quad (3.25)$$

Derivando ambos os membros da equação 3.25 em relação ao tempo,

$$\frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt} = ma. \quad (3.26)$$

Assim, tem-se

$$\frac{dp}{dt} = F \quad (3.27)$$

E isso corresponde ao enunciado da segunda lei de Newton: "A variação do momento é proporcional à força impressa e tem a direção da força". Na dinâmica de rotação de uma partícula P em torno de um ponto O, o torque é definido como o produto vetorial entre o vetor posição OP e a força F.

$$\tau = r \times F = r \times \frac{dp}{dt}. \quad (3.28)$$

Aplicando, conseqüentemente a regra do produto ao produto vetorial, conclui-se que

$$r \times \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) - \frac{dr}{dt} \times p = \frac{d}{dt}(r \times p) \quad (3.29)$$

Definindo

$$l = r \times p, \quad (3.30)$$

em que l é o momento angular da partícula em relação ao ponto O, podemos escrever

$$\tau = \frac{dl}{dt} \quad (3.31)$$

isso é, o torque é a derivada do momento angular em relação ao tempo. A direção de l é perpendicular ao plano definido pelas direções de r e p e o sentido obedece a regra da mão direita. É interessante ainda expressar o momento angular em função da velocidade angular ω da partícula. Como $V = \omega r$, segue que

$$I = mvr = mr^2\omega = I\omega, \quad (3.32)$$

em que

$$I = mr^2 \quad (3.33)$$

Considere um sistema de partículas formado por N partículas e m_i a massa de cada partícula ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) de vetor posição $r_i(t)$ e velocidade $v_i(t)$ em relação a uma dada origem O. O momento angular total do sistema em relação ao O é dado por

$$L = \sum_{i=1}^N r_i \times p_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i \times v_i \quad (3.34)$$

Vamos obter o momento total do sistema de partículas em relação ao seu centro de massa CM. Considere ainda o vetor R dado por

$$R = \sum_{i=1}^N \frac{m_i r_i}{M},$$

em que

$$M = \sum_{i=1}^N m_i$$

Se r'_i e v'_i são o vetor de posição e a velocidade da partícula i em relação ao CM, temos

$$r_i = r'_i + R \implies \sum_{i=1}^N m_i r'_i = 0 \quad (3.35)$$

$$v_i = v'_i + V \implies \sum_{i=1}^N m_i v'_i = \sum_{i=1}^N p'_i = 0 \quad (3.36)$$

$$P = V \sum_{i=1}^N m_i = MV, \quad (3.37)$$

em que V é a velocidade do centro de massas (CM).

Um corpo rígido pode ser entendido como um sistema de n partículas em que as distâncias entre essas partículas são fixas. Ou seja, um corpo rígido ideal não sofre deformações. Na prática, corpos rígidos ideais são abstrações matemáticas, uma vez que todo corpo sofre deformações. Por outro lado, para simplificar nosso modelo, podemos desprezar as deformações. A ideia de corpo rígido é extremamente útil para descrever sistemas mecânicos que sofrem rotação e translação, já que permite descrever os movimentos de um corpo usando seis coordenadas. Três coordenadas para a translação e três para a rotação.

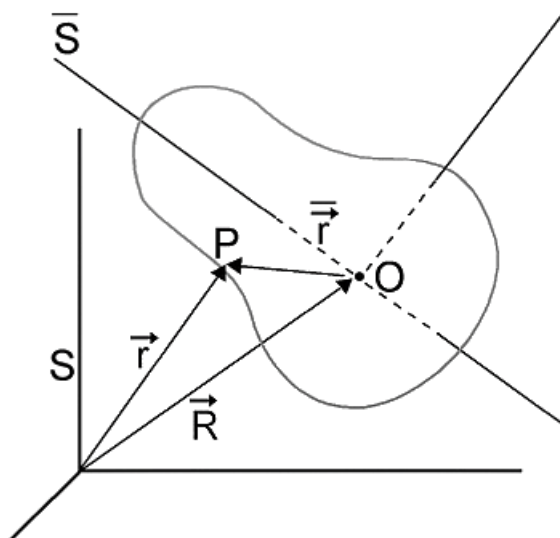


Figura 8 – Descrição vetorial de um corpo rígido. Fonte: <http://efisica.if.usp.br/mecanica/universitario/corpo_rigido/intro/>

De maneira geral, a velocidade e a aceleração de um corpo rígido podem ser expressas respectivamente por:

$$v = v_0 + \omega \times r \quad (3.38)$$

$$a = a_0 + \dot{\omega} \times r + \omega \times (\omega \times r) \quad (3.39)$$

3.4.3 MOMENTO LINEAR E MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

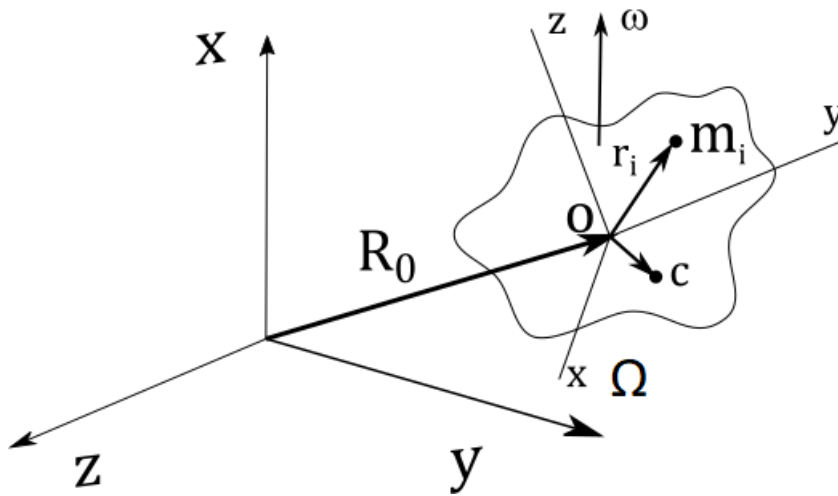


Figura 9 – Momento angular e linear de um corpo rígido. Fonte: autoria própria

$$r_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i r_i = \frac{1}{m} \int_{\Omega} r dm \quad (3.40)$$

O momento linear de um corpo rígido pode ser calculado a partir da seguinte expressão

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i v_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i (v_0 + \omega \times r_i) = -v_0 \int dm + \omega \times \int r dm = m(v_0 + \omega \times r_c), \quad (3.41)$$

em que a integração é realizada sobre toda a extensão do corpo rígido e $v_0 + \omega \times r_i$ é reconhecido como a velocidade do centro de massa C, de forma que a equação 3.41 pode ser escrita como

$$p = mV_C \quad (3.42)$$

$$L_0 = \int r \times (\omega \times r) dm \quad (3.43)$$

$$r \times (\omega \times r) = \omega(r \cdot r) - r(\omega \cdot r), \quad (3.44)$$

de forma que a equação 3.41 se reduz a

$$L_0 = \int (\omega(r \cdot r) - r(\omega \cdot r)) dm, \quad (3.45)$$

$$L_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \quad (3.46)$$

$$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \quad (3.47)$$

$$L_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \quad (3.48)$$

em que

$$I_{xx} = \int (r^2 - x^2)dm, \quad I_{yy} = \int (r^2 - y^2)dm, \quad I_{zz} = \int (r^2 - z^2)dm \quad (3.49)$$

são chamadas momentos de inércia e

$$I_{xy} = I_{yx} = \int xydm, \quad I_{xz} = I_{zx} = \int xzdm, \quad I_{yz} = I_{zy} = \int yzdm \quad (3.50)$$

são chamados produtos de inércia. Note que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Escrevendo o conjunto de equações 3.46 na forma matricial, vem

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

em que

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

define o tensor de inércia, também conhecido como matriz de inércia [9].

$$[I] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ([r_i^2] - \{r_i\} \{r_i\}^T) m_i = \int ([r^2] - \{r\} \{r\}^T) dm \quad (3.53)$$

$$\{L\} = [I] \{\omega\} \quad (3.54)$$

$$I = \int ((r \cdot r)1 - rr) dm \quad (3.55)$$

$$L = I \cdot \omega = \int ((r \cdot r)1 - rr \cdot \omega) dm = \int ((r \cdot r)\omega - r(r \cdot \omega)) dm, \quad (3.56)$$

3.4.4 ÂNGULOS DE EULER

Os ângulos de Euler se mostram importantes quando queremos representar posições angulares de um sistema móvel de coordenadas $x'y'z'$ em relação a um sistema físico XYZ. Segundo Landau [18], Qualquer vetor pode ser descrito em um ou mais sistemas de coordenadas. Nosso objetivo aqui é fazer uma descrição do vetor posição, vetor velocidade e vetor aceleração em um sistema de coordenadas rotacionado.

O plano móvel de x' e y' corta o plano fixo que contem X e Y. Esse plano é perpendicular ao eixo Z. O ângulo ϕ é o ângulo formado entre os eixos x e x' . ψ é o ângulo formado entre y e y'

e θ é o ângulo ente z e z' . Para deduzir tais equações, vamos escrever o vetor \vec{r} em termos dos componentes dos dois sistemas de eixos x_i e ξ_i . Os vetores unitários ao longo desses eixos são denotados, respectivamente por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ tal que

$$\vec{r} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} = \xi_1\vec{i}' + \xi_2\vec{j}' + \xi_3\vec{k}' \quad (3.57)$$

Se existem duas formas diferentes de representar o mesmo vetor, então existe uma relação entre as componentes x_i e ξ_i . A relação entre ξ_1 e os componentes x_i pode ser obtida a partir do produto escalar de \vec{r} e \vec{i}' .

$$\xi_1 = (\vec{i}' \cdot \vec{i})x_1 + (\vec{i}' \cdot \vec{j})x_2 + (\vec{i}' \cdot \vec{k})x_3 \quad (3.58)$$

$$= x_1\cos(\xi_1, x_1) + x_2\cos(\xi_1, x_2) + x_3\cos(\xi_1, x_3) \quad (3.59)$$

$$= l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3 \quad (3.60)$$

Usando o mesmo raciocínio, podemos expressar ξ_2 e ξ_3 em termos de componentes de x_j de forma que podemos generalizar a equação anterior para

$$\xi_i = l_{i1}x_1 + l_{i2}x_2 + l_{i3}x_3 = \sum_{j=1}^3 l_{ij}x_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.61)$$

Podemos então escrever a equação acima na forma matricial.

$$\{\xi\} = [l] \{x\}, \quad (3.62)$$

em que a matriz $[l]$ pode ser compreendida como um operador que transforma o vetor $\{x\}$ no vetor $\{\xi\}$. Esta equação representa uma transformação linear em que $[l]$ é uma matriz quadrada de coeficientes l_{ij} . Podemos obter o vetor $\{x\}$ multiplicando à esquerda ambos os lados da equação pela matriz inversa $[l]^{-1}$ de forma que

$$\{x\} = [l]^{-1} \{\xi\} \quad (3.63)$$

Ainda de acordo com [17], é possível provar que a matriz inversa $[l]^{-1}$ é igual à transposta de $[l]$, ou seja, $[l]^T$. Quando uma transformação obedece a essa relação, é chamada de transformação ortogonal.

3.5 MATRIZES ORTOGONAIS E ROTAÇÕES DO SISTEMA DE EIXOS

No processo de modelagem do quadricóptero, é conveniente escrever as relações entre um sistema de referência fixo - às vezes chamado de frame de mundo - e um sistema de eixos rotacionados - o frame móvel fixo no quadricóptero.

$$y_1 = x_1 \quad (3.64)$$

$$y_2 = x_2\cos\theta_1 + x_3\sen\theta_1 \quad (3.65)$$

$$y_3 = -x_2\sen\theta_1 + x_3\cos\theta_1, \quad (3.66)$$

que pode ser escrita na forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \text{sen}\theta_1 \\ 0 & -\text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.67)$$

que pode ainda ser escrita de maneira mais compacta como

$$\{y\} = [R_1(\theta_1)] \{x\} \quad (3.68)$$

Devido à existência de dois sistemas de coordenadas diferentes, precisamos fazer uso de matrizes de transformação. A rotação de um vetor em torno do eixo x pode ser descrito pela matriz

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & \text{sen}\theta_1 \\ 0 & -\text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

A matriz de rotação em torno do eixo y é dada por

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & 0 & -\text{sen}\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

E a matriz de rotação em torno de z é dada por

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \text{sen}\theta_3 & 0 \\ -\text{sen}\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Combinando as equações 3.69, 3.70 e 3.71, pode-se escrever

em que

$$R(\Theta) = R_x \cdot R_y \cdot R_z \begin{bmatrix} c\theta_2 c\theta_3 & c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 s\theta_2 c\theta_3 & s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ -c\theta_2 s\theta_3 & c\theta_1 c\theta_3 - s\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 & s\theta_1 c\theta_3 + c\theta_1 s\theta_2 s\theta_3 \\ s\theta_2 & -s\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

em que c e s representam, respectivamente, abreviações para cosseno e seno.

4 MODELAGEM DO QUADRICÓPTERO

O quadricóptero é um veículo aéreo que possui quatro rotores localizados no mesmo plano em uma configuração cruzada. Os dois pares opostos de hélices (1,3) e (2,4) giram em direções opostas variando a velocidade do rotor. Quando as velocidades das quatro hélices são aumentadas ao mesmo tempo, teremos movimento vertical. No caso de um aumento das velocidades, os rotores produzem uma força vertical para cima contrária à força peso e com isso o quadrotor ganha altitude. Quando os quatro motores giram com a mesma velocidade, temos que o momento resultante é zero e o quadricóptero está mantendo sua posição (também chamada de atitude).

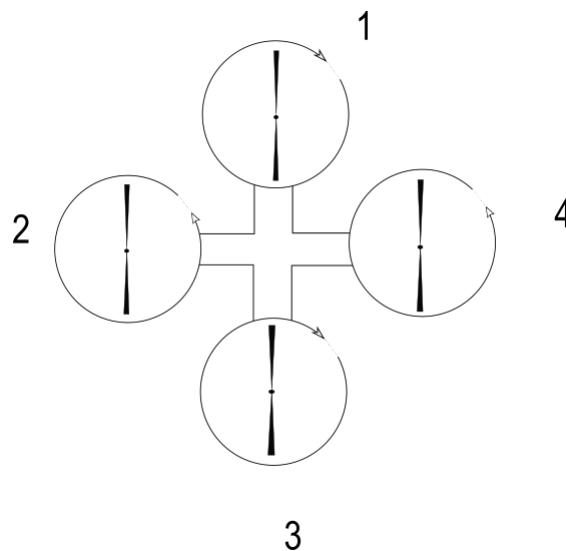


Figura 10 – Visão superior do quadricóptero com os quatro motores numerados e com o sentido de rotação. Fonte: autoria própria

Em trabalhos como [1], a orientação dos eixos do corpo está ao longo dos braços do veículo e é mostrado na figura 13. Além disso, assume-se que o centro dos eixos do corpo têm a mesma posição que o centro de gravidade.

Dois métodos diferentes têm sido usados para conseguir essa tarefa. Podemos usar as equações de Lagrange ou as leis de Newton como em outros artigos. Vamos aplicar o segundo método que parece ser mais compreensível.

O quadricóptero é controlado pela variação independente das velocidades de quatro hélices. Portanto, com a notação da figura 13, temos as seguintes entradas:

- O impulso total: $u_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$
- O momento de rolagem: $u_2 = l(\tau_1 - \tau_4)$
- O momento de arfagem: $u_3 = l(\tau_1 - \tau_2)$

- O momento de guinada: $u_4 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4$

O quadricóptero é um sistema com seis graus de liberdade. Então ele é descrito usando doze estados. Os seus seis primeiros estados representam a atitude e suas variações. Para fazer a descrição da atitude, que é a posição angular que o quadricóptero se encontra em relação a um referencial fixo, são utilizadas as variáveis ϕ , θ e ψ , que descrevem, respectivamente os ângulos de *roll* (rolagem), *pitch* (arfagem) e *yaw* (guinada) conforme a figura 11.

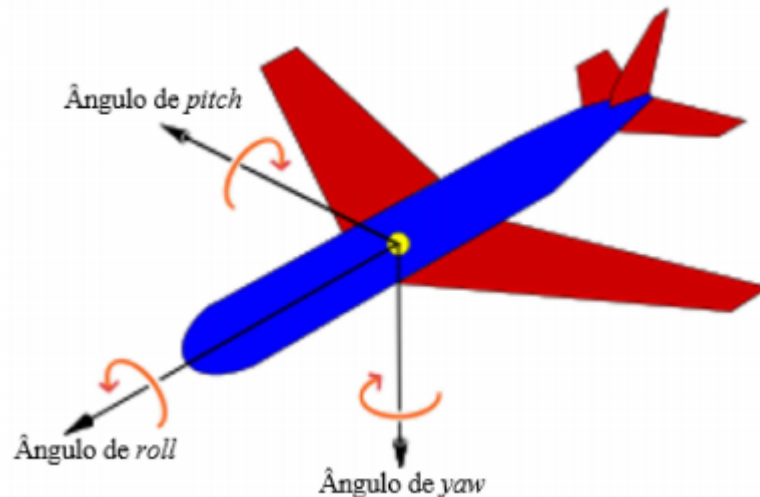


Figura 11

Fonte: [9]

Quando mudamos as velocidades das hélices 2 e 4, produzimos a rotação *roll* - de rolagem, acoplada ao movimento lateral. A rotação de *pitch* e o movimento lateral correspondente pode ser obtida a partir da mudança de velocidade das hélices 1 e 3. A rotação de guinada - *yaw* resulta da diferença de torque contrário entre cada par de hélices.

Os outros seis estados dizem respeito à posição em relação ao referencial fixo na Terra. x , y e z são descritos no sistema de coordenadas NED e a velocidade é descrita pelas variáveis u , v e w .

Qualquer movimento do quadrotor é alcançado através de mudanças na variação angular dos seus motores.

Para isso, partiremos do conceito de sistema de referencial móvel para três dimensões. Consideremos as seguintes bases de R^3 :

$E_T = \{e_{1T}, e_{2T}, e_{3T}\}$ é a base do referencial fixo na Terra.

$E_B = \{e_{1C}, e_{2C}, e_{3C}\}$ é a base do referencial fixo no corpo.

$x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ indica a posição absoluta do corpo.

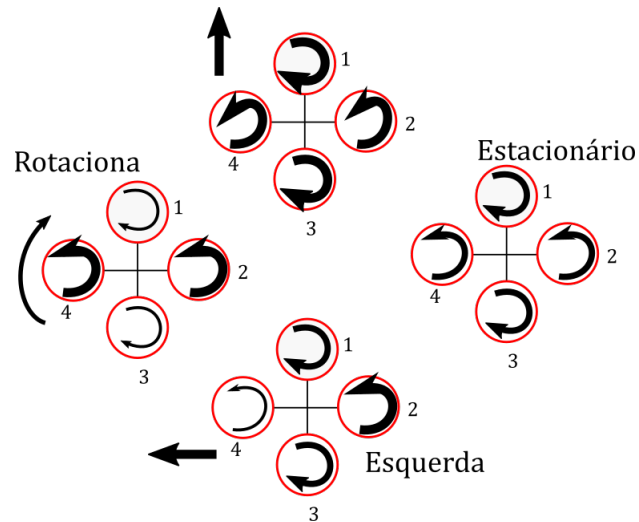


Figura 12 – Esquema de funcionamento do movimento de um quadricóptero. Fonte: autoria própria

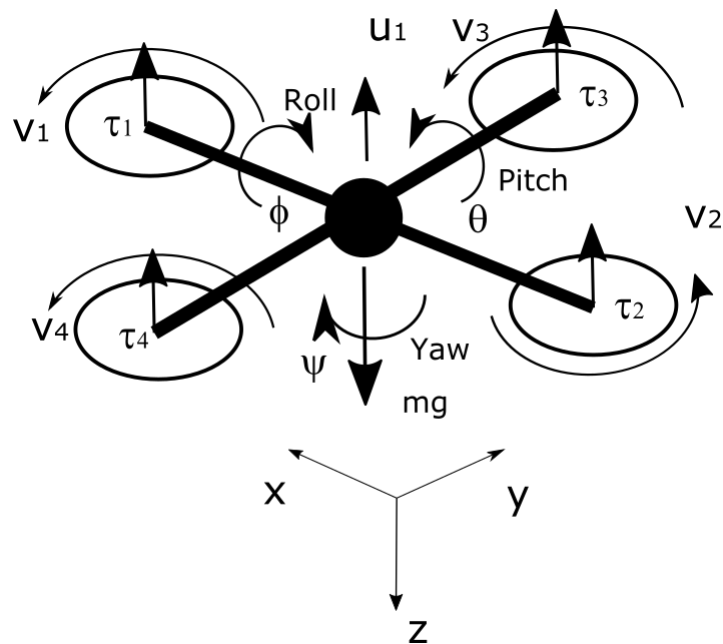


Figura 13 – Visão geral da dinâmica do quadricóptero. Fonte: autoria própria

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \text{ indica a atitude pelos ângulos de Euler.}$$

$$v = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \text{ é o vetor velocidade linear na base } E_B \text{ (no corpo).}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \text{ é o vetor velocidade angular na base } E_B.$$

Assim, usando a matriz de rotação descrita no capítulo anterior, podemos modelar a

cinemática do quadricóptero.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R(\Theta) \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

A transformação angular que ocorre entre o sistema fixado no corpo do quadrotor e o sistema fixado na Terra é dado pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = M(\Theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

O que implica em

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = M^{-1}(\Theta) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Multiplicando as matrizes de rotação $R_x \cdot R_y \cdot R_z$, obtemos a matriz $R(\Theta)$ dada por

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi & s\phi\theta - c\theta s\psi & s\theta c\phi \\ c\phi s\psi & c\phi c\psi & -s\phi \\ c\theta s\psi s\phi - c\psi s\theta & c\theta s\phi c\psi + s\theta s\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} c\psi & c\phi s\psi & 0 \\ -s\psi & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & -s\phi & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

O segundo conjunto de equações que descreve a mudança de atitude de acordo com as rotações no sistema fixo no corpo é dado por

$$M^{-1}(\Theta) = \begin{bmatrix} c\psi & -s\phi s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\theta} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

4.1 ACELERAÇÃO LINEAR

A aceleração do quadricóptero pode ser obtida a partir das leis de Newton através da equação

$$\ddot{X} = g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - R(\theta) \frac{b}{m} \sum_{i=1}^4 \omega_i^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

isto é,

$$\ddot{X} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - R(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_1}{m} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\theta s\phi & s\theta c\phi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi & -s\phi \\ c\theta s\psi s\phi - c\psi s\theta & -s\phi + s\psi s\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u_1}{m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -s\theta c\phi \frac{u_1}{m} \\ s\phi \frac{u_1}{m} \\ g - c\phi c\theta \frac{u_1}{m} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{cases} \ddot{x} = -s\theta c\phi \frac{u_1}{m} \\ \ddot{y} = s\phi \frac{u_1}{m} \\ \ddot{z} = -c\phi c\theta \frac{u_1}{m} + g. \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} c\phi & c\phi s\psi & 0 \\ -s\psi & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & -s\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} c\phi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi & c\phi s\psi & 0 \\ -s\psi & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & -s\phi & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Derivando e multiplicando as matrizes, é possível provar que

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}c\phi & 0 \\ \frac{\dot{\psi}}{c\phi} & \dot{\theta}t\theta & 0 \\ \dot{\psi}t\phi & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

O vetor velocidade angular é dado por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\frac{dI\Omega}{dt} = l \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$= I \cdot \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + (\Omega \times I\Omega). \quad (4.14)$$

Então

$$I^{-1} \cdot l \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = I^{-1} \cdot \left(I \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + (\Omega \times I\Omega) \right) \quad (4.15)$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + I^{-1} \cdot (\Omega \times I\omega) \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = I^{-1} \begin{bmatrix} lu_2 \\ lu_3 \\ lu_4 \end{bmatrix} - I^{-1} \cdot (\Omega \times I\Omega) \quad (4.17)$$

$$= I^{-1} \begin{bmatrix} lu_2 \\ lu_3 \\ lu_4 \end{bmatrix} + I^{-1} \cdot (I\omega \times \Omega), \text{ onde} \quad (4.18)$$

$$I \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow I^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Assumindo que $I_{xx} = I_{yy}$, temos

$$I \begin{bmatrix} I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow I^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} lu_2 \\ lu_3 \\ lu_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix} \cdot (I\Omega \times \Omega) \quad (4.21)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{lu_2}{I_{yy}} \\ \frac{lu_3}{I_{yy}} \\ \frac{lu_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr \frac{(I_{yy}-I_{zz})}{I_{yy}} \\ pr \frac{(I_{zz}-I_{yy})}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$(I\Omega \times \Omega) = \begin{bmatrix} I_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$= \begin{bmatrix} pI_{yy} \\ qI_{yy} \\ rI_{zz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ pI_{yy} & qI_{yy} & rI_{zz} \\ p & q & r \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$= qrI_{yy}i + pqI_{yy}k + prI_{zz}j - pqI_{yy}k - qrI_{zz}j - prI_{yy}j \quad (4.25)$$

$$= qr(I_{yy} - I_{zz})i + pr(I_{zz} - I_{yy})j + 0k \quad (4.26)$$

$$= (qr(I_{yy} - I_{zz}), pr(I_{zz} - I_{yy}), 0) \quad (4.27)$$

Substituindo 4.22 em 4.10, temos

$$\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}c\theta & 0 \\ \frac{\dot{\psi}}{c\phi} & \dot{\phi}t\theta & 0 \\ \dot{\psi}t\phi & \frac{\dot{\phi}}{c\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \frac{lu_2}{I_{yy}} \\ \frac{lu_3}{I_{yy}} \\ \frac{lu_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qr \frac{(I_{yy}-I_{zz})}{I_{yy}} \\ pr \frac{(I_{zz}-I_{yy})}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.28)$$

$$= \begin{bmatrix} -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi \\ \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\theta} + \dot{\phi}\dot{\theta}t\phi \\ \dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{lu_2}{I_{yy}} \\ \frac{lu_3}{I_{yy}} \\ \frac{lu_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ \frac{s\psi}{c\phi} & \frac{c\psi}{c\phi} & 0 \\ s\psi t\phi & c\psi t\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qr \frac{(I_{yy}-I_{zz})}{I_{yy}} \\ pr \frac{(I_{zz}-I_{yy})}{I_{yy}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi \\ \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\theta} + \dot{\phi}\dot{\theta}t\phi \\ 1\dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{lu_2c\psi}{I_{yy}} - \frac{lu_3s\psi}{I_{yy}} \\ \frac{lu_2s\psi}{c\phi I_{yy}} + \frac{lu_3c\psi}{c\phi I_{yy}} \\ \frac{lu_2s\psi t\phi}{I_{yy}} + \frac{lu_3c\psi t\phi}{I_{yy}} \frac{lu_4}{I_{zz}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\phi qr \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} + s\psi pr \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} \\ \frac{s\psi}{c\phi} qr \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} - \frac{c\psi}{c\phi} pr \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} \\ s\psi t\phi qr \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} - c\psi t\phi pr \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi + \frac{lc\psi}{I_{yy}}u_2 - \frac{ls\psi}{I_{yy}}u_3 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(qrc\phi + prs\phi) \\ \ddot{\theta} = \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\theta} + \frac{ls\phi}{I_{yy}c\phi}u_2 + \frac{lc\psi}{I_{yy}c\phi}u_3 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(qr\frac{s\psi}{c\phi} - pr\frac{c\psi}{c\phi}) \\ \ddot{\psi} = \dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} + \frac{ls\psi t\phi}{I_{yy}}u_2 + \frac{lc\psi t\phi}{I_{yy}}u_3 + \frac{l}{I_{zz}}u_4 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(qrs\psi t\phi - prc\psi t\phi) \end{cases} \quad (4.31)$$

Precisamos escrever p q e r em função de ϕ , θ e ψ . Para isso, lembremos que

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = M^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \implies M(\theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \quad (4.32)$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} c\psi & c\phi s\psi & 0 \\ -s\psi & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & -s\phi & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

e portanto,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi & c\phi s\psi & 0 \\ -s\psi & c\phi c\psi & 0 \\ 0 & -s\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}c\psi + \dot{\theta}c\phi s\psi \\ -\dot{\phi}s\psi + \dot{\theta}c\phi c\psi \\ -\dot{\theta}s\phi + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{cases} p = \dot{\phi}c\psi + \dot{\theta}c\phi s\psi \\ q = -\dot{\phi}s\psi + \dot{\theta}c\phi c\psi \\ r = -\dot{\theta}s\phi + \dot{\psi} \end{cases} \quad (4.35)$$

Agora, vamos escrever pr e qr em termos de ϕ , θ e ψ .

$$pr = \dot{\phi}\dot{\psi}c\psi + \dot{\theta}\dot{\psi}c\phi s\psi - \dot{\phi}\dot{\theta}c\psi s\phi - \dot{\theta}^2 c\phi s\psi s\phi. \quad (4.36)$$

$$qr = \dot{\phi}\dot{\theta}s\psi - \dot{\theta}^2 c\phi c\psi s\phi - \dot{\theta}\dot{\psi}c\phi c\psi. \quad (4.37)$$

isso nos permite escrever a expressão $(qrc\psi + prs\psi)$ como

$$(qrc\psi + prs\psi) = \dot{\theta}c\phi(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi) \quad (4.38)$$

$$\left(qr\frac{s\psi}{c\phi} - pr\frac{c\psi}{c\phi}\right) = \frac{\dot{\phi}}{c\phi} \quad (4.39)$$

e

$$(qrst\phi - prc\psi t\phi) = \dot{\phi}t\phi(\dot{\theta}s\phi - \dot{\psi}). \quad (4.40)$$

Assim, temos o conjunto de equações:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi + \frac{lc\psi}{I_{yy}}u_2 - \frac{ls\phi}{I_{yy}}u_3 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\theta}c\phi \\ \ddot{\theta} = \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\phi} + \frac{ls\phi}{I_{yy}c\phi}u_2 + \frac{lc\psi}{I_{yy}c\phi}u_3 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\frac{\dot{\phi}}{c\phi} \\ \ddot{\psi} = \dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} + \frac{ls\psi t\phi}{I_{yy}}u_2 + \frac{lc\psi t\phi}{I_{yy}}u_3 + \frac{l}{I_{zz}}u_4 - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\phi}t\phi \end{cases} \quad (4.41)$$

De 4.6 e 4.41, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -s\theta c\phi \frac{u_1}{m} \\ \ddot{y} = s\phi \frac{u_1}{m} \\ \ddot{z} = -c\phi c\theta \frac{u_1}{m} + g \\ \ddot{\phi} = -\dot{\psi}\dot{\theta}c\phi + \frac{lc\psi}{I_{yy}}u_2 - \frac{ls\phi}{I_{yy}}u_3 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\theta}c\phi \\ \ddot{\theta} = \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{c\phi} + \frac{ls\phi}{I_{yy}c\phi}u_2 + \frac{lc\psi}{I_{yy}c\phi}u_3 + \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\frac{\dot{\phi}}{c\phi} \\ \ddot{\psi} = \dot{\psi}\dot{\phi}t\phi + \frac{\dot{\phi}\dot{\theta}}{c\phi} + \frac{ls\psi t\phi}{I_{yy}}u_2 + \frac{lc\psi t\phi}{I_{yy}}u_3 + \frac{l}{I_{zz}}u_4 - \frac{I_{yy}-I_{zz}}{I_{yy}}(\dot{\psi} - \dot{\theta}s\phi)\dot{\phi}t\phi. \end{cases} \quad (4.42)$$

4.2 COMPORTAMENTO EM MALHA ABERTA

A aceleração linear no referencial fixo na Terra é descrito através da segunda lei de Newton

$$F = m\dot{V} \quad (4.43)$$

Onde m é a massa do quadrotor. A massa é constante e V é o vetor velocidade no referencial fixo no corpo.

As velocidades u , v e w são medidas n sistema de coordenadas fixo no corpo e a velocidade do sistema no corpo pode rotacionar e mudar sua magnitude ao mesmo tempo. Isso nos conduz ao conceito de derivação total do vetor V .

$$F = m\dot{V} + \omega \times mV \quad (4.44)$$

Então temos

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Calculando o produto vetorial, temos

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} qw - rv \\ ru - pw \\ pv - qu \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

E portanto,

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pv - qu \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Desconsiderando a aerodinâmica, temos que as forças que atuam no quadrotor são a força peso W e as forças verticais das hélices.

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z - T \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pv - qu \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

A força peso W está sempre agindo na direção do eixo z no sistema fixo na Terra. A conversão para o sistema fixo no corpo é feita usando a matriz (18). Realizando a multiplicação de matrizes, ficamos com

$$\begin{bmatrix} -mg\sin\theta \\ mg\cos\theta\sin\phi \\ mg\cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pv - qu \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Isolando \dot{u} , \dot{v} e \dot{w} , temos

$$\dot{u} = rv - qw - g\text{sen}\theta \quad (4.50)$$

$$\dot{v} = pq - ru + g\cos\theta\text{sen}\phi \quad (4.51)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g\cos\phi\cos\theta - \frac{T}{m} \quad (4.52)$$

Onde

$$T = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \quad (4.53)$$

b é o coeficiente de empuxo e cada Ω_i corresponde à velocidade de cada um dos motores.

Isso nos leva ao seguinte conjunto de equações de estado:

$$\dot{u} = rv - qw - g\text{sen}\theta \quad (4.54)$$

$$\dot{v} = pq - ru + g\cos\theta\text{sen}\phi \quad (4.55)$$

$$\dot{w} = qu - pv + g\cos\phi\cos\theta - b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)m \quad (4.56)$$

[19] descreve as equações do momento angular a partir da modelagem da aceleração angular do quadricóptero.

4.3 ACELERAÇÃO ANGULAR

$$M = \dot{H} \quad (4.57)$$

$$M = \dot{H} + \omega \times H \quad (4.58)$$

$$H = I\omega \quad (4.59)$$

$$I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$M = I\dot{\omega} + \omega \times I\omega \quad (4.61)$$

Após expandir em componentes, ficamos com

$$M_x = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) \quad (4.62)$$

$$M_y = \dot{p}I_y + pr(I_x - I_z) \quad (4.63)$$

$$M_z = \dot{p}I_z + pq(I_y - I_x) \quad (4.64)$$

E, por conta da simetria de xz e yz ,

$$I_x \approx I_y$$

Assim, as equações podem ser simplificadas para

$$M_x = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) \quad (4.65)$$

$$M_y = \dot{p}I_y + pr(I_x - I_z) \quad (4.66)$$

$$M_z = \dot{p}I_z \quad (4.67)$$

Ignorando a inércia das hélices e os torques aerodinâmicos, as equações dos torques externos podem ser escritas como

$$M_x = lb(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \quad (4.68)$$

$$M_y = lb(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \quad (4.69)$$

$$M_z = d(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 + \Omega_3^2) \quad (4.70)$$

, onde d é o **fator de arrasto** dos rotores e l é a distância das hélices ao Centro de Gravidade. Assim, o conjunto de equações de movimento é dado por

$$\dot{p} = \frac{lb}{I_x}(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{I_z - I_y}{I_x} \quad (4.71)$$

$$\dot{q} = \frac{lb}{I_y}(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) - pr \frac{I_z - I_y}{I_x} \quad (4.72)$$

$$\dot{r} = \frac{d}{I_z}(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 + \Omega_3^2) \quad (4.73)$$

$$(4.74)$$

4.3.1 EXPANDINDO AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

4.3.1.1 MOMENTOS GIROSCÓPICOS DAS HÉLICES

As equações que vimos anteriormente são uma simplificação. Elas não levam em conta a aerodinâmica, as forças e momentos giroscópicos nem a dinâmica dos motores.

Acrescentando os momentos giroscópicos às equações dos momentos, teremos

$$M_x = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) + \dot{H}_x + H_zq - H_yr \quad (4.75)$$

$$M_y = \dot{q}I_y + pr(I_x - I_z) + \dot{H}_y + H_xr - H_zp \quad (4.76)$$

$$M_z = \dot{r}I_z + \dot{H}_z + H_y p - H_x q \quad (4.77)$$

Onde H_x , H_y e H_z são os momentos angulares totais das massas giratórias com taxas angulares em x,y e direção z no frame do corpo.

$$H_x = \sum_{i=1}^4 I_{xi} \omega_{xi} \quad (4.78)$$

$$H_y = \sum_{i=1}^4 I_{yi} \omega_{yi} \quad (4.79)$$

$$H_z = \sum_{i=1}^4 I_{zi} \omega_{zi} \quad (4.80)$$

As taxas angulares dos rotores estão presentes apenas no eixo z (na estrutura do corpo) e não há mais massas rotativas do que elas, as equações podem ser simplificadas para

$$M_x = \dot{p}I_x + qr(I_z - I_y) + \dot{H}_x + H_z q \quad (4.81)$$

$$M_y = \dot{q}I_y + pr(I_x - I_z) + \dot{H}_y + H_x r \quad (4.82)$$

$$M_z = \dot{r}I_z + \dot{H}_z \quad (4.83)$$

As equações para as variações angulares com os momentos giroscópicos das hélices inclusos se tornam

$$\dot{p} = \frac{lb}{I_x}(\Omega_2^2 - \Omega_4^2) - qr \frac{I_z - I_y}{I_x} - \frac{H_z}{I_x} q \quad (4.84)$$

$$\dot{q} = \frac{lb}{I_y}(\Omega_1^2 - \Omega_3^2) - pr \frac{I_z - I_y}{I_x} - \frac{H_z}{I_y} p \quad (4.85)$$

$$\dot{r} = \frac{d}{I_z}(\Omega_2^2 + \Omega_4^2 - \Omega_1^2 + \Omega_3^2) \quad (4.86)$$

$$(4.87)$$

A maneira de modelar o quadrotor difere da usada para o veículo de asas fixas no fato de que não estamos fazendo a rotação na mesma ordem para ir dos eixos da terra para o corpo. De fato, a maneira mais prática é realizar a rotação final da Terra para a transformação do corpo ao longo da direção de impulso. Assim, tomamos para o corpo à terra a transformação, a seguinte matriz de cosseno de direção.

$$R(\Theta) = \begin{bmatrix} s\phi s\theta s\psi + c\theta c\psi & s\phi\theta - c\theta s\psi & s\theta c\phi \\ c\phi s\psi & c\phi c\psi & -s\phi \\ c\theta s\psi s\phi - c\psi s\theta & c\theta s\phi c\psi + s\theta s\psi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

onde:

- ϕ, θ, ψ são os ângulos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente;
- $c\phi = \cos\phi, s\phi = \sin\phi, t\phi = \tan\phi$, etc.

5 CONTROLE DO QUADRICÓPTERO

A teoria de controle tem sido aplicada em diversas áreas onde se necessita de um controle preciso de uma determinada grandeza física. Podemos citar, por exemplo, aplicações como o controle do nível de líquido em um reservatório, controle da trajetória de robôs autônomos assim como o controle dos estados dos VANTS, o que é objeto do nosso trabalho.

Técnicas de controle podem ser utilizadas para controlar, por exemplo, a velocidade de rotação de um motor para que ele forneça sempre a mesma velocidade independentemente da carga a ele acoplado. Após modelar as equações que descrevem a dinâmica do quadricóptero, o que se busca é uma forma de controlar os estados do veículo - posição e atitude a partir das quatro entradas, u_1 , u_2 , u_3 e u_4 , que são as rotações dos quatro motores.

5.1 DEFINIÇÕES

Araujo [20] fala que para se entender o que de fato é um problema de controle, são necessárias algumas definições iniciais. Dentre as quais, citaremos algumas aqui.

Processo: é definido como uma operação ou desenvolvimento natural que evolui progressivamente, caracterizado por uma série de mudanças graduais que se sucedem de modo relativamente fixo, conduzindo a um resultado ou finalidade particular.

Sistema: é uma disposição, conjunto ou coleção de partes, dentro de um universo, que estão conectadas ou relacionadas de tal maneira a formarem um todo.

Sistema Físico é uma parte do universo que foi delimitada para estudo.

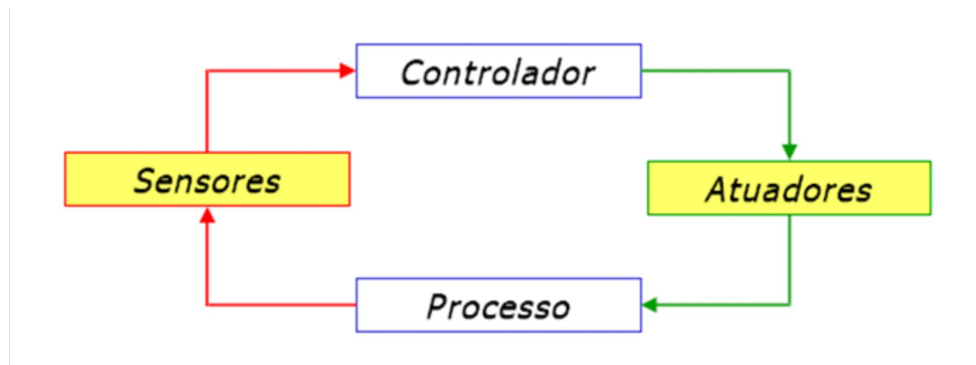
Modelo: Consiste na representação de certas características do sistema físico que são relevantes para seu estudo.

Controle: É a ação de fazer com que um sistema físico atenda as especificações de desempenho determinadas a priori.

Controlador: Dispositivo utilizado para a obtenção do controle de um sistema físico.

Sistema de Controle: Conjunto formado pelo sistema a ser controlado e o controlador.

Figura 14 – Diagrama de um sistema de controle automático.



Fonte:[21]

Conforme foi explicado no capítulo dedicado à modelagem, as entradas u_2 , u_3 e u_4 são responsáveis pelas variações na atitude do veículo, enquanto que a entrada u_1 é responsável pela sua altitude. Vale lembrar ainda que as mudanças de posição nas direções de x e y dependem de variações angulares. Por isso, se faz necessário dividir o sistema a ser controlado em dois subsistemas; um, responsável pela atitude e outro pela posição. Esta situação fica bem representada no trabalho de C Balas [1].

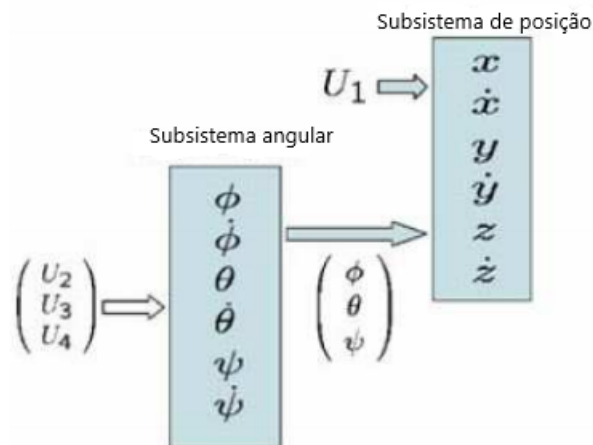


Figura 15 – Diagrama de um sistema de controle automático. Fonte:[1] adaptado

5.2 CONTROLE EM MALHA ABERTA

Um sistema de controle pode ser em malha aberta ou fechada. Araújo [20] define e mostra a diferença entre malha aberta e fechada.

Sistema de controle em malha aberta: É aquele em que a saída ou resposta não possui nenhuma influência sobre a entrada.

Sistema de controle em malha fechada: É aquele em que a saída ou resposta influencia a entrada do sistema.

De acordo com Bouabdallah [2], como os VTOLS são sistemas dinamicamente instáveis e difíceis de se controlar, simulações em malha aberta são particularmente úteis no reconhecimento da contribuição de cada efeito modelado para a dinâmica do sistema. Eles mostram ainda o resultado de uma resposta natural do sistema a uma variação de velocidade angular inicial de rolagem ou de elevação.

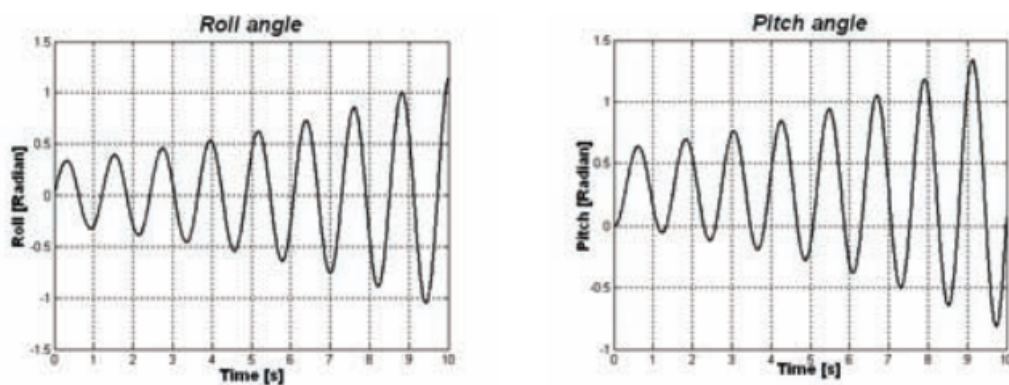


Figura 16 – Resposta natural do ângulo de rolagem e de elevação a uma velocidade angular inicial. Fonte:[2]

Como resultado, vemos que o sistema ganha energia mecânica, começa a oscilar e tende a aumentar essas oscilações com o tempo.

6 CONCLUSÃO

A partir da pesquisa bibliográfica sobre alternativas ao ensino tradicional de ciências e matemática, buscou-se conhecer como a ciência e a engenharia produzidas nas universidades poderiam ser uma alternativa a esse modelo de ensino. Foi produzido então um apanhado teórico-metodológico que investiga como o ensino de STEM, a pesquisa translacional e a transposição didática dos saberes poderiam ser utilizados por professores do ensino médio para desenvolverem projetos de tecnologias que chamem a atenção e motivem os alunos a se dedicarem a resolver problemas científicos.

Assim, partindo-se desses pressupostos, o exemplo da matemática envolvida nos drones foi utilizada como uma proposta de ensino e pesquisa de STEM para alunos e professores de Ensino Médio. A pesquisa no ensino médio já é uma realidade presente em diversas escolas. Os resultados de feiras de ciências locais, nacionais e internacionais são um exemplo dos esforços de professores e estudantes da educação básica em fazer ciência a partir da vivência nas suas escolas.

O trabalho possibilitou a modelagem matemática do quadricóptero a partir de ferramentas de álgebra linear e equações diferenciais. Foi possível ainda mostrar que diversos saberes desenvolvidos no ensino superior podem ser transpostos para o ensino médio por meio da transposição didática dos saberes.

Além disso, como aplicação das ciências, o contato com as tecnologias e engenharias respondem aos anseios dos estudantes sobre as possibilidades de aplicações de determinados conteúdos estudados durante o ensino médio. Práticas inovadoras que se servem de tecnologias podem ser uma resposta para o ensino voltado apenas para a testagem e que tem no professor a figura central detentora e única transmissora do saber. O principal objetivo percebido na literatura consultada é ver estudantes e professores motivados e engajados na resolução de problemas complexos e concretos e se apropriando da ciência para a construção de projetos úteis à sociedade.

Alguns resultados como simulações computacionais e não foram possíveis de ser realizados em virtude das minhas limitações pessoais na área de teoria de controle. Apesar das contribuições dos matemáticos na área de controle, a formação do professor de matemática não contempla o estudo dessa disciplina, o que pode se constituir um desafio para professores de matemática que desejam trabalhar nessa área com os seus alunos. Outra barreira a ser considerada está no domínio das tecnologias empregadas, como o da programação e do arduino. Tais dificuldades exigem que o professor dedique mais tempo estudando essa área ou procure a ajuda

de profissionais especializados.

Para trabalhos posteriores, fica a sugestão da realização de oficinas que levem alunos do Ensino Médio a terem contato com os equipamentos de montagem de drones, estratégias de controle, softwares de simulação e com o ensino da programação para que eles possam se apropriar desses saberes na prática. É possível ainda mostrar outras estratégias de controle não abordadas no texto dessa dissertação mas que se encontram na bibliografia consultada.

REFERÊNCIAS

- 1 BALAS, C. Modelling and linear control of a quadrotor. Cranfield University, 2007. 9, 34, 47
- 2 BOUABDALLAH, S.; SIEGWART, R. Backstepping and sliding-mode techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: IEEE. *Proceedings of the 2005 IEEE international conference on robotics and automation*. [S.l.], 2005. p. 2247–2252. 9, 48
- 3 MOREIRA, M. A. O ensino de stem (ciência, tecnologia, engenharia e matemática) no século xxi. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 2018. 11, 15, 16
- 4 BELHOT, R. V.; FIGUEIREDO, R. S.; MALAVÉ, C. O. O uso da simulação no ensino de engenharia. In: *Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, XXIX COBENGE*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 445–451. 11
- 5 SIQUEIRA, M.; PIETROCOLA, M. A transposição didática aplicada a teoria contemporânea: A física de partículas elementares no ensino médio. *X Encontro de Pesquisa em Ensino de Física, Londrina*, 2006. 13, 14
- 6 LIMA FERNANDO JACKSON LOPES, C. L. A. C. D. S. *Robótica Educacional como Meio de Inclusão Digital*. Disponível em: <<<https://periodicos.ufersa.edu.br/index.php/ecop/article/view/7078>>>. Acesso em: 20 de outubro de 2019. 16
- 7 ALUNOS do ensino médio têm aulas de engenharia na Poli-USP. 2014. Disponível em: <<<https://www.poli.usp.br/noticias/1880-alunos-do-ensino-medio-tem-aulas-de-engenharia-na-poli-usp.html>>>. Acesso em: 20 set. 2019. 17
- 8 SILVA, R. B. et al. Para além do movimento maker: um contraste de diferentes tendências em espaços de construção digital na educação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017. 17
- 9 FILHO, R. H. N. M. *Modelagem matemática: um exemplo didático no ensino da engenharia mecânica*. Dissertação (Mestrado) — UFERSA, 2019. 18, 25, 26, 27, 31, 35
- 10 BOLDRINI, L. J. et al. *Álgebra linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. 18
- 11 COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear*. São Paulo: Edusp, 2013. 18
- 12 PEREIRA, D. P. F. *Transformações geométricas com aplicações no GeoGebra para o Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2017. 20
- 13 ZILL, D. G.; POZO, V. G. et al. *Differential equations with modeling applications. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. [S.l.: s.n.], 2002. 23, 24
- 14 YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. Equações diferenciais. UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a . 24
- 15 AGUIAR, M. A. Tópicos de mecânica clássica. *Editora Livraria da Física*, 2010. 25

- 16 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de física básica, 1: mecânica*. [S.l.]: E. Blucher, 2013. 25, 26
- 17 MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2010. 25, 32
- 18 LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. *CURSO DE FISICA-MECANICA*. [S.l.]: Hemus, 2004. 31
- 19 JIŘINEC, T. *Stabilization and control of unmanned quadcopter*. 2011. 43
- 20 ARAÚJO, F. M. U. d. *Sistemas de controle*. 2007. Disponível em: <<<https://www.dca.ufrn.br/~meneghet/FTP/Controle/scv20071.pdf>>>. Acesso em: 18 ago. 2019. 46, 47
- 21 ? *Como funciona o CLP*. 2010. Disponível em: <<<https://clpredes.wordpress.com/2010/05/31/como-funciona-o-clp/>>>. Acesso em: 18 ago. 2019. 47
- 22 KALIL, F. et al. Promovendo a robótica educacional para estudantes do ensino médio público do brasil. *Nuevas Ideas en Informática Educativa, TISE*, p. 739–742, 2013.
- 23 SANTOS, A. A.; CARDOSO, V. C.; CARVALHO, L. P. da S. Automação de vôo e calibração de sensores e controladores para um drone de baixo custo. *S. l*, 2015.