

COLÉGIO PEDRO II

Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

João Jefferson Faria Marinho

Aspectos de Modelagem

Matemática em Escoamentos Potenciais: o aerofólio de Joukowski

Rio de Janeiro

2019



João Jefferson Faria Marinho

Aspectos de Modelagem Matemática em Escoamentos Potenciais: o aerofólio de Joukowski

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof(a) Dr^a Luciana Santos da Silva Martino

Rio de Janeiro

2019

COLÉGIO PEDRO II
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO, PESQUISA, EXTENSÃO E CULTURA
BIBLIOTECA PROFESSORA SILVIA BECHER
CATALOGAÇÃO NA FONTE

M338 Marinho, João Jefferson Faria

Aspectos de Modelagem Matemática em Escoamentos Potenciais: o aerofólio de Joukowski / João Jefferson Faria Marinho. – Rio de Janeiro, 2019.

147 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Colégio Pedro II. Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura.

Orientador: Luciana Santos da Silva Martino.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções analíticas. 3. Equação de Bernoulli. 4. Função de potencial complexo. I. Martino, Luciana Santos da Silva. II. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Simone Alves – CRB7 5692.

João Jefferson Faria Marinho

Aspectos de Modelagem Matemática em Escoamentos Potenciais: o aerofólio de Joukowski

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 19 / 12 / 2019.

Banca Examinadora:

Prof(a) Dr^a Luciana Santos da Silva Martino
Colégio Pedro II

Prof(a) Dr^a Patrícia Erthal de Moraes
Colégio Pedro II

Prof(a) Dr. Nide Geraldo do Couto R. Fico
Júnior
Escola Naval

Prof(a) Dr. Eduardo Dias Corrêa
UERJ

Rio de Janeiro
2019

Esta pesquisa é dedicada a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão da mesma: Deus, família, amigos, professores e alunos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus por me permitir chegar até aqui com saúde e paz no coração. Aos amigos que fiz no ProfMat por me apoiarem e incentivaram em cada fase do curso, em especial Felipe, Diego, Flávio, Maria, Gisele, Evandro e Rafael. Suas palavras de encorajamento e demonstração de companheirismo foram fundamentais, em especial neste momento, além das críticas ao trabalho que me ajudaram a atingir um patamar diferenciado. Aos amigos do trabalho professores engenheiros Gabriel Torreão e Gabriel Coutinho por me auxiliarem no manuseio de softwares que foram utilizados neste trabalho.

Agradecer aos meus pais Elisa e João, à minha esposa Aretha e aos meus amigos de infância. Agradeço por toda paciência que tiveram comigo ao longo desses anos de estudo, independente da tempestade que a vida apresentou sempre estiveram ao meu lado como pilares de sustentação e nunca permitiram que eu esmorecesse. Sem vocês esse momento poderia não existir.

Agradecer aos meus alunos que foram grandes incentivadores deste trabalho exigindo, em cada aula, o melhor de mim. A minha orientadora Luciana Martino pela paciência e compreensão nos momentos de desânimo e pelas palavras de incentivos, que somaram para meu crescimento profissional.

E por fim, um agradecimento póstumo ao meu querido irmão Clodoaldo. Você é minha maior fonte de inspiração, nunca vou esquecer as broncas e o cuidado que sempre teve comigo e se hoje conquistei algo você é parte disso. Peço a Deus que te leve um recado: obrigado por ser um pai, um irmão e um amigo. Sempre estará em meu coração.

"É a análise matemática . . . apenas um jogo da mente? Ao físico ela só pode dar uma linguagem conveniente; não é este um auxílio medíocre, e, estritamente falando, dispensável? E não é de se temer que essa linguagem artificial seja um véu interposto entre a realidade ea visão do físico? Longe disso; sem essa linguagem, a maior parte das analogias íntimas das coisas teria ficado para sempre desconhecida por nós; e teríamos eternamente a harmonia interna do mundo, que é . . . a única realidade objetiva verdadeira."

(Henri Poincaré)

RESUMO

MARINHO, João Jefferson Faria Marinho. **Título:** Aspectos de Modelagem Matemática em Escoamentos Potenciais: o aerofólio de Joukowski. 2019. 147 f.. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Sob as hipóteses de escoamento em regime permanente, incompressível, irrotacional e invíscido é possível modelar, sob uma vista bidimensional, o escoamento em torno de um aerofólio de Joukowski. Uma ferramenta adequada para essa modelagem é a Função Complexa Analítica. A partir das hipóteses do escoamento é possível construir uma função de corrente e uma função potencial que poderão ser representadas em uma única função. Essa função é chamada de Potencial Complexo, ela carrega informações sobre a velocidade das partículas e sobre as suas trajetórias no escoamento. O Potencial Complexo é uma função complexa analítica, dessa forma usando a Transformação Conforme de Joukowski será possível modelar o escoamento em torno do aerofólio quando, primeiramente, for modelado o escoamento em torno de um cilindro.

Palavras-chave: Funções Analíticas, Equações de Cauchy-Riemann, Potencial Complexo, Transformação Conforme, Aerofólio de Joukowski.

ABSTRACT

MARINHO, João Jefferson Faria Marinho. **Título:** Aspectos de Modelagem Matemática em Escoamentos Potenciais: o aerofólio de Joukowski. 2019. 147 f.. Dissertação (Mestrado) - Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Rio de Janeiro, 2019.

Under the assumptions of steady-state, incompressible, irrotational and inviscid flow, it is possible to model the flow around a Joukowski airfoil from a two-dimensional view. A suitable tool for this modeling is the Complex Analytic Function. From the flow assumptions it is possible to construct a current function and a potential function that can be represented in a single function. This function is called Complex Potential, it carries information about the velocity of particles and their flow paths. Complex Potential is a complex analytical function, so using Joukowski's Transform Conform will allow you to model the flow around the airfoil when you first model the flow around a cylinder.

Keywords: Analytic Function, Cauchy-Riemman Equations, Complex Potential, Transform Conform, Joukowski airfoil.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Linhas de Trajetória em torno de um carro de F1.	18
Figura 2 – Descrição lagrangiana para a dinâmica do fluido.	19
Figura 3 – Descrição euleriana para a dinâmica da partícula.	20
Figura 4 – Descrição euleriana para a dinâmica das partículas no volume de controle.	20
Figura 5 – Descrição lagrangiana para a dinâmica das partículas no volume de controle material.	21
Figura 6 – Transporte de um volume material Ω_t	24
Figura 7 – Volume material Ω_t em transporte.	28
Figura 8 – Escoamento de água através do esguicho de mangueira de jardim.	29
Figura 9 – Força peso que age sobre o elemento de fluido.	31
Figura 10 – Pressão em um elemento de fluido nas direções \vec{j} e $-\vec{j}$	32
Figura 11 – Análise do transporte da quantidade de movimento.	34
Figura 12 – Diagrama de corpo livre de um elemento de fluido.	37
Figura 13 – Movimento angular de uma partícula.	39
Figura 14 – Partículas de fluido rotacionam em uma região do escoamento onde $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$	41
Figura 15 – Circulação ao redor da curva C	44
Figura 16 – Transporte da curva C	44
Figura 17 – A coordenada do ponto $P(a, b)$ no plano xy é associado no plano complexo ao ponto $P'(a, b)$	48
Figura 18 – O número complexo z sendo representado como vetor posição.	48
Figura 19 – Representação polar de um número complexo z	49
Figura 20 – $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow I \subset \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$	50
Figura 21 – $z \in D \cap V_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\epsilon(L)$	51
Figura 22 – $\Delta z \rightarrow (0, 0)$ por um caminho horizontal $(\Delta x, 0)$ e por um caminho vertical $(0, \Delta y)$	55
Figura 23 – As retas tangentes l e o são perpendiculares em z_0	58
Figura 24 – Pela transformação $w(z) = e^z$, retas são levadas em círculos quando x constante e y variando e retas são levadas em raios quando y é constante e x variando.	61
Figura 25 – Um ramo do logaritmo $\ln z$	62
Figura 26 – Linha de corte com $-\pi < \arg(z) < \pi$	62
Figura 27 – A transformação conforme $w(z) = \ln z$ leva círculos e raios a retas.	64
Figura 28 – Curva C definida por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$	65
Figura 29 – Tipos de Curvas.	66
Figura 30 –	66

Figura 31 – Tipo de domínio multiplamente conexo.	69
Figura 32 –	70
Figura 33 – Escoamento através do elemento de superfície dS	75
Figura 34 – Independência do caminho entre as curvas C_1 e C_0	75
Figura 35 – ψ é constante ao longo de uma linha de corrente.	76
Figura 36 –	77
Figura 37 – Linhas de corrente de $f(z) = -z^2$, nos primeiro e quarto quadrantes. . .	81
Figura 38 – Perfil de um aerofólio.	82
Figura 39 – Cilindro de raio R posto diante do potencial complexo de um escoamento uniforme.	83
Figura 40 – Condições de contorno para um escoamento em torno do cilindro de raio R	83
Figura 41 –	85
Figura 42 –	86
Figura 43 – Escoamento do fluido entre duas linhas de corrente.	86
Figura 44 – Aerofólio de Joukowsk.	87
Figura 45 – Cilindro arbitrário para aplicação do Teorema de Blasius.	88
Figura 46 –	91
Figura 47 – Escoamento em torno de um cilindro com vórtice no seu interior. . . .	94
Figura 48 – Pontos de estagnação se movendo com as inserções de vórtices no interior do cilindro.	95
Figura 49 – Imagens de círculos pela transformação de Joukowski, em que z_0 e R são, respectivamente, o centro e o raio do círculo. Os valores de z_0 e R foram obtidos de Pontes e Mangiavacchi (2016, p. 179) e Olver (2018, p. 37), com exceção das Figuras 49e e 49h que foram dados obtidos pelo autor usando o GeoGebra 6.0.	97
Figura 50 –	99
Figura 51 –	101
Figura 52 – Escoamento em torno do aerofólio assimétrico de Joukowski feito no Mathematica 12.0 para o potencial (4.39) com o cilindro centrado em $z_0 = -0.209 + i0.2737$, raio $R = 1.2398$, $c = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{18}$, $U = 1$ e $\Gamma = 15$	103
Figura 53 –	104
Figura 54 –	106
Figura 55 –	107
Figura 56 – Escoamento em torno de um aerofólio com o número de Reynolds $R_e \ll 1$, foto 4.	107
Figura 57 – Imagens do simulador de túnel de vento com dados de velocidade. . . .	109
Figura 58 – Imagens do simulador de túnel de vento com dados de pressão.	110

Figura 59 – Comparação do resultado das curvas de nível com a imagem de um vídeo apresentado em Homsy et al. (2007).	112
Figura 60 – Imagem de um vídeo apresentado em Homsy et al. (2007).	113
Figura 61 – Curvas de Nível.	114
Figura 62 – Curvas de nível da parte imaginária da função $f(z) = z + \frac{1}{z}$	115
Figura 63 – Imagens dos Aplicativos usados pelos Aspirantes no FestMat.	118
Figura 64 – Relação entre as coordenadas cartesianas e polares.	124
Figura 65 – Relação entre a função de corrente e coordenadas polares através do estudo de escoamento através de um caminho AB	126
Figura 66 – Analiticidade na vizinhança de z_0	129
Figura 67 – Escoamento Uniforme.	131
Figura 68 – Formato das linhas de corrente de uma fonte e um sorvedouro.	132
Figura 69 – Superposição de uma fonte com um sorvedouro.	133
Figura 70 – Processo de formação do dipolo.	134
Figura 71 – Linha de vórtice.	135
Figura 72 – Linhas de corrente para um vórtice.	136
Figura 73 – Imagens dos vetores z_1z_2 e z_3z_4 sob w	137
Figura 74 – Ângulo entre duas Curvas C_1 e C_2	138
Figura 75 – Transformação Conforme w	139
Figura 76 – Transformação de Joukowski para uma circunferência de centro na origem e $R = c$	141
Figura 77 – Transformação de Joukowski para $R = 1.118$, $z_0 = +i0.5$ e $c = 1$	143
Figura 78 – Transformação de Joukowski para $R = 1.2398$, $z_0 = -0.209 + i0.2737$ e $c = 1$	144
Figura 79 – Transformação de Joukowski para $R = 1.2$, $z_0 = -0.2$ e $c = 1$	145

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	TEORIA BÁSICA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS	17
2.1	Hipóteses Iniciais	17
2.2	Descrição do Escoamento	18
2.3	Derivada Material da Aceleração \vec{a}	21
2.4	Teorema de Transporte de Reynolds	23
2.5	Equação de Conservação de Massa e Equação da Quantidade de Movimento	26
2.5.1	Conservação da Massa	26
2.5.2	Equação da Quantidade de Movimento	30
2.6	Equação de Bernoulli	36
2.7	Vorticidade e Circulação	38
2.7.1	Vetor de Vorticidade	38
2.7.2	Circulação	43
3	FUNÇÕES COMPLEXAS	47
3.1	Números Complexos e suas Propriedades	47
3.2	Plano Complexo	48
3.2.1	Forma Polar de um Número Complexo	49
3.3	Funções Complexas	50
3.3.1	Limite e Continuidade	50
3.4	Função Analítica	53
3.4.1	Equações de Cauchy-Riemann	55
3.4.2	Significado Geométrico das Equações de Cauchy-Riemann	57
3.5	Funções Exponencial e Logarítmica Complexas	59
3.5.1	Função Exponencial Complexa	59
3.5.2	Função Logarítmica Complexa	61
3.6	Integrais Complexas	64
3.7	Função Harmônica Conjugada	71
4	TEORIA CLÁSSICA DO AEROFÓLIO	74
4.1	Escoamento Potencial	74
4.1.1	Função de Corrente	74
4.1.2	Função Potencial	79
4.2	Potencial Complexo	80

4.3	Escoamento em torno de um Cilindro Circular	82
4.3.1	Análise do Escoamento do Fluido entre duas Linhas de Corrente	86
4.3.2	Força de sustentação no Cilindro	88
4.4	Perfil Adequado ao Aerofólio de Joukowski	96
4.4.1	Escoamento em torno um Cilindro Elíptico e de uma Placa .	98
4.4.2	Escoamento em torno do Aerofólio de Joukowski	102
5	ATIVIDADES NO GRUPO DE ESTUDO	108
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	119
	REFERÊNCIAS	120

APÊNDICES 123

APÊNDICE A – FORMA POLAR PARA AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMMAN E PARA AS FUNÇÕES DE CORRENTE E POTENCIAL .	124
---	-----

APÊNDICE B – TEOREMAS DE BASE	128
---	-----

APÊNDICE C – EXTENSÃO DA INTEGRAL DE CAUCHY	129
---	-----

APÊNDICE D – ESCOAMENTOS POTENCIAIS PLANOS	131
--	-----

APÊNDICE E – TRANSFORMAÇÃO CONFORME	137
---	-----

APÊNDICE F – TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKI .	140
---	-----

APÊNDICE G – RECURSOS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS NA PRODUÇÃO DO TRABALHO	147
---	-----

1 INTRODUÇÃO

Qual a aplicação das Funções Complexas na vida real ou como elas podem ser úteis nas aproximações de resultados reais? Essa foi uma das perguntas que fiz quando estudei Análise Complexa na graduação. Bom, fazia Licenciatura em Matemática e acaba ficando na expectativa de poder aplicar os resultados que aprendeu com os futuros alunos. Mas ao término da disciplina “nunca mais estudei Análise Complexa”, talvez o mais perto que cheguei foi de soluções complexas em sistemas de amortecimentos em EDOs.

Inicialmente, este trabalho seria sobre aplicações de Série de Fourier, estava tudo tendendo para esse lado. Foi quando minha orientadora me sugeriu escrever sobre Dinâmica dos Fluidos, na verdade, a matemática aplicada a esse assunto. Confesso que saí da orientação com muito medo, mas porque não tentar? Meu primeiro contato com o assunto foi nas aulas do Programa de Doutorado do IMPA do professor André Nachbin, na disciplina de Dinâmica dos Fluidos. Na primeira aula ele já diz que usará análise complexa como ferramenta de modelagem.

No decorrer dos estudos (assistir ao Programa e pesquisar sobre o tema) um leque se abriu e percebi como as disciplinas de Cálculo, EDO e Análise Complexa estão relacionadas com os assuntos de fluidos. Parece estranho o que foi dito anteriormente, mas no meu curso as disciplinas citadas eram na base do “prove ou demonstre”, e pouco comentário sobre as relações. Fiquei impressionado como os Teoremas de Stokes e Gauss, o Teorema Fundamental do Cálculo, o Teorema de Leibniz, o Teorema de Mudança de Variável, o Teorema Fundamental das Integrais de Linha, o Teorema de Cauchy se conversam de modo a apoiar resultados como o Teorema do Transporte de Reynolds, Equações de Conservação de Massa, Equação da Quantidade de Movimento, Equação de Bernoulli e o Teorema de Kelvin para circulação, por exemplo.

A Escola Naval oferta duas graduações: Ciências Navais e Administração. Ao final do curso os alunos serão nomeados oficiais da Marinha em uma das graduações citadas. São 4 anos de duração, os dois primeiros anos chamamos de ciclo básico (disciplinas de Cálculo, Física, Estatística, Mecânica e Eletricidade são algumas das disciplinas) e os dois últimos anos são o que chamamos de Habilitação: Administração, Máquinas, Eletrônica e Sistemas de Armas. Entre os alunos é muito comum o tipo de pergunta “*porque estudo cálculo vetorial se ao final vou ser oficial?*”. Através dos estudos de Análise Complexa e alguns conceitos da Mecânica dos Fluidos surgiu a oportunidade de iniciar um grupo de estudos na Escola Naval onde estudamos Modelagem Matemática, via Análise Complexa, em Dinâmica dos Fluidos. O que permitiu, também, modificar minhas aulas no intuito de relacionar os resultados dos teoremas do Cálculo Vetorial ao que os alunos estudarão na habilitação de Máquinas, em específico em Mecânica dos Fluidos.

Diante dessa breve contextualização, esta dissertação relacionar a Análise Complexa, em especial a teoria de funções analíticas, com a Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos (Escoamento em torno do aerofólio de Joukowski). Para isso foi dividida em três estruturas básicas: Teoria Básica de Mecânica dos Fluidos, Funções Complexas e Teoria Clássica do Aerofólio. Os Apêndices apresentam informações complementares que poderão ser úteis para um melhor entendimento do trabalho.

Na Teoria Básica de Mecânica dos Fluido foi estabelecido sob quais hipóteses seria estudado o escoamento do fluido, a saber: escoamento em regime permanente, incompressível, irrotacional e inviscido. Houve uma preocupação em como estudar o movimento da partícula e desta forma duas descrições são fundamentais a euleriana e a lagrangiana. O Teorema do Transporte de Reynolds é o resultado base para deduzirmos a Equação de Conservação de Massa e a Equação da Quantidade de Movimento, aqui é notável como a teoria de Cálculo Vetorial é importante na demonstração do teorema e nas deduções dessas equações.

A Equação de Bernoulli vai nos permitir verificar a existência de uma diferença de pressão entre duas linhas de correntes, em particular linhas de corrente próximas ao perfil que perturba o escoamento uniforme. Nessa análise conseguiremos informações de velocidade e pressão o que nos ajudará entender o porquê do avião voar. A Vorticidade e a Circulação têm um papel chave neste estudo, a primeira está relacionada ao campo vetorial que orienta o sentido de rotação de cada partícula no escoamento assim como a taxa de rotação delas, já a segunda relaciona a taxa de rotação de cada partícula no interior de uma curva fechada simples com a intensidade de como o fluido tende a fazer a curva girar circulando em torno de si mesma.

Em Funções Complexas relembramos as definições e propriedades preliminares de números complexos. Definimos funções de uma variável complexa e apresentamos resultados de Limite e Continuidade dessas funções. Função Complexa Analítica será a ferramenta utilizada para a modelagem de um escoamento bidimensional, ela carregará informações importantes sobre o escoamento e sobre o campo de velocidade. As integrais complexas nos serão uteis no estudo de contornos e o Teorema de Cauchy contribuirá para os Teorema de Blasius e de Kutta-Joukowski.

Na Teoria Clássica do Aerofólio combinamos as teorias evolvidas nos dois capítulos anteriores, essa combinação resultará em um Potencial Complexo. O Potencial Complexo é uma função complexa analítica cujas partes imaginária e real nos darão informações, respectivamente, sobre o caminho percorrido pelas partículas de fluido (linhas de corrente) e sobre o campo de velocidades. Com o uso do potencial complexo uniforme aplicado ao Teorema do Círculo teremos as informações sobre as linhas de corrente em torno de um cilindro circular de raio R e do campo de velocidades.

Os Teorema de Blasius e de Kutta-Joukowski equacionarão a força de sustentação

que é gerada no cilindro, entretanto ela será zero quando aplicada ao potencial complexo do Teorema do Círculo. Para que haja uma força de sustentação será necessário acrescentar um potencial de vórtice ao potencial dado pelo Teorema do Círculo, isso é possível porque as partes real e imaginária de uma função analítica satisfazem a equação de Laplace, o que nos permitirá superpor os potenciais complexos. A adição do potencial de vórtice fará com que surja singularidade no interior do cilindro acarretando a produção de circulação na curva que representa o cilindro. A circulação fará com que os pontos de estagnação (local onde a velocidade complexa é nula) sejam movidos na fronteira do cilindro, fazendo surgir uma força de sustentação.

A Transformação Conforme será conveniente, pois o cilindro será mapeado no aerofólio utilizando a Transformação de Joukowski. Essa transformação mapeará o cilindro em algumas geometrias. Para nossa modelagem as geometrias escolhidas serão o cilindro circular, o cilindro elíptico, a “placa” e o aerofólio. A transformação também mapeará as linhas de corrente em torno do cilindro para as linhas de corrente em torno dessas geometrias, preservando a circulação e a velocidade no infinito (para longe do perfil). Entretanto, devemos adicionar a Hipótese de Kutta para o escoamento em torno do aerofólio, porque o aerofólio apresenta um bordo de fuga afiado (cúspide), local onde a velocidade complexa diverge. Dessa forma, a Hipótese de Kutta afirma que o ponto de estagnação que surge a jusante deve coincidir com o bordo de fuga. Para isso, deverá acontecer uma seletividade para circulação Γ .

No capítulo 5 são relatados os encontros do Grupo de Estudo e como estão sendo conduzidos os estudos com os Aspirantes. Para isso, conto com a ajuda do Professor Nide Geraldo do Departamento de Mecânica, cuja participação acrescentou muito para o Grupo. Para a condução do Grupo estamos usando os procedimentos citados por Biembengut e Hein (2016, p. 13 e 14), que são: Interação, Matematização e Modelagem Matemática. Ali procuramos mostrar como a Matemática é essencial para a modelagem em Dinâmica do Fluidos, em particular escoamentos potenciais.

2 TEORIA BÁSICA DE MECÂNICA DOS FLUIDOS

Para compreender o escoamento de um fluido é fundamental considerar resultados que permitirão construir uma formulação matemática que descreva o comportamento das partículas desse fluido. Neste capítulo, os resultados referidos são: Equação de Conservação de Massa, Equação da Quantidade de Movimento, Equação de Bernoulli, Vorticidade e Circulação. Iremos estudar esses resultados sob as hipóteses do escoamento ser em regime permanente, incompressível, irrotacional e invíscido. Apesar dessas hipóteses simplificarem as equações que estudaremos, ainda assim é possível conseguir funções que modelem de forma satisfatória alguns experimentos de interesse apresentados no álbum de Dyke (1982).

A descrição do escoamento será vista sob dois pontos de vista: lagrangiana e euleriana. Isso significa que ora analisaremos uma partícula de fluido (ou um volume) em movimento, e ora em um ponto (ou um volume) fixo. O Teorema do Transporte de Reynolds será usado para deduzir as Equações de Conservações de Massa e a Equação da Quantidade de Movimento. Essa última equação permitirá deduzir a Equação de Bernoulli. Por fim, falaremos de Vorticidade e Circulação com o propósito de mostrar o comportamento dessas grandezas no escoamento sob as hipóteses adotadas.

2.1 Hipóteses Iniciais

Trataremos o fluido como um meio contínuo. Deste modo, cada propriedade do fluido pode ser considerada como um valor definido em cada ponto do espaço. Assim, grandezas como massa ($m = \rho dV$), massa específica (ρ), velocidade (\vec{V}), pressão (p) e aceleração (\vec{a}) podem ser tratadas como funções contínuas da posição e do tempo, (BATCHELOR, 2000, p. 4 e 5). Denotaremos por \vec{V} o campo de velocidades do fluido dado pela função vetorial

$$\vec{V}(x, y, z, t) = M(x, y, z, t)\vec{i} + N(x, y, z, t)\vec{j} + R(x, y, z, t)\vec{k},$$

que indica a velocidade do fluido no ponto (x, y, z) do espaço e no instante de tempo t , com derivadas parciais de primeira ordem de cada componente contínuas.

O tipo de escoamento que será adotado é o de regime permanente, incompressível, irrotacional e invíscido.

O *regime permanente* é caracterizado por ter as propriedades do fluido independentes do tempo, ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = \rho(x, y, z)$$

e

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{V} = \vec{V}(x, y, z).$$

A velocidade e a massa específica podem variar de um local para o outro no escoamento, mas em qualquer ponto fixo irão permanecer constantes. E mais, toda partícula de fluido escoando ao longo de sua trajetória terá seu vetor velocidade tangente a esse caminho, (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2014, p. 24), e todas as partículas que passam num dado ponto seguirão em uma mesma trajetória, (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 90).

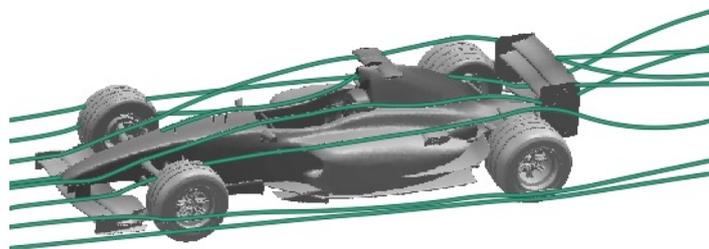
O *escoamento incompressível* é caracterizado pela massa específica de um elemento de fluido não ser uma função do tempo nem do espaço, isto é, $\rho = \text{constante}$. Isso implica que $\frac{D\rho}{Dt} = 0$.

O *escoamento irrotacional* é quando o fluxo do campo rotacional é zero e o *escoamento invíscido* é quando a viscosidade é desprezada conseqüentemente as tensões de cisalhamento não são consideradas.

As partículas de fluido percorrem trajetórias que chamamos de linhas de corrente, linhas de emissão ou linhas de trajetória, a Figura 1 ilustra as linhas de trajetória de um escoamento em torno de um carro de Fórmula 1. Como o regime de escoamento adotado será o permanente, as linhas de corrente vão coincidir com as linhas de emissão e as linhas de trajetória, mas se o regime fosse o transiente as partículas postas em um mesmo ponto, em instantes diferentes, não seguem, necessariamente, o mesmo caminho.

Segundo Munson, Young e Okiishi (2017, p. 150), as linhas de corrente são definidas como sendo linhas contínuas, sempre tangentes ao campo de velocidades e fixas no espaço. Este conceito é importante, pois como cada linha de corrente é tangente ao campo de velocidades não haverá escoamento de massa entre duas linhas de corrente, pois os vetores de velocidade para cada ponto das linhas de corrente são paralelos, isso significa que uma partícula de fluido que se encontra em uma determinada linha de corrente permanecerá nela por todo o escoamento.

Figura 1 – Linhas de Trajetória em torno de um carro de F1.



Fonte: Fox, Mcdonald e Pritchard (2014).

2.2 Descrição do Escoamento

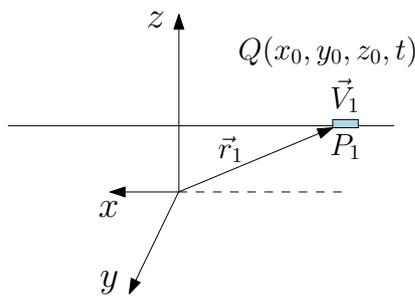
Em Física, a Cinemática é a responsável por estudar o movimento de um corpo. Em Dinâmica dos Fluidos a Cinemática está associada ao escoamento de fluidos e à

descrição desse movimento. Segundo Çengel e Cimbala (2015, p. 59), dois pontos de vista são fundamentais para descrever o comportamento das partículas em um escoamento, são elas: lagrangiana e euleriana.

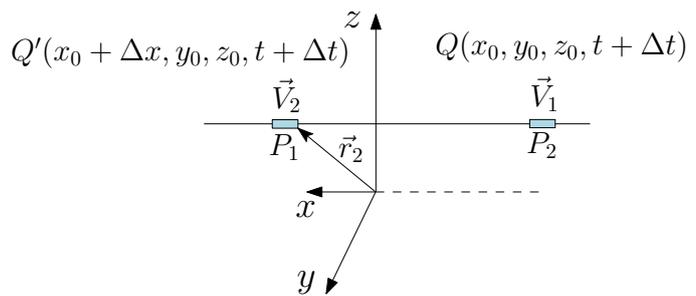
Na descrição lagrangiana a partícula de fluido é acompanhada em cada ponto do seu percurso pelos seus vetores posição e velocidade, é como se a partícula fosse etiquetada para ser acompanhada em todo escoamento. Por exemplo, tomando uma partícula P_1 que se desloque por um caminho dos pontos (x, y_0, z_0, t) , a partir de um ponto Q de coordenadas $Q(x_0, y_0, z_0, t)$. Em um intervalo de tempo Δt a partícula estará no ponto Q' de coordenada $Q'(x_0 + \Delta x, y_0, z_0, t + \Delta t)$. Nesse mesmo intervalo de tempo o ponto Q já estará sendo ocupado por outra partícula P_2 que receberá uma nova etiqueta para ser acompanhada, Figura 2.

Figura 2 – Descrição lagrangiana para a dinâmica do fluido.

(a) Partícula P_1 no instante t , com velocidade \vec{V}_1 e vetor posição \vec{r}_1 .



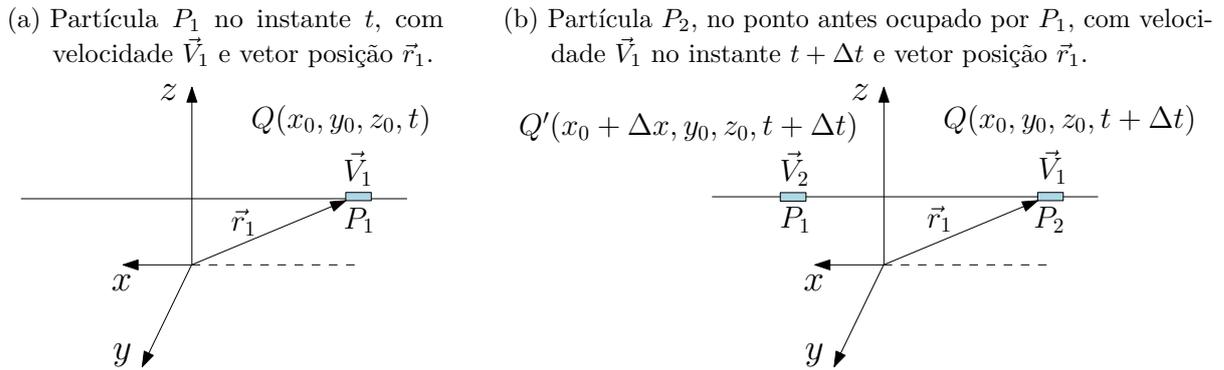
(b) Partícula P_1 no instante $t + \Delta t$ com velocidade \vec{V}_2 e vetor posição \vec{r}_2 .



Fonte: O autor, 2019.

Na descrição euleriana a partícula é analisada em um ponto fixo, ou seja, a etiqueta agora não é colocada em uma partícula e sim em um ponto fixo no escoamento, a Figura 3 descreve o exemplo acima na descrição euleriana. Desse modo, Çengel e Cimbala (2015, p. 134) afirmam que podemos definir as variáveis de campo (vetorial ou escalar), funções do espaço e do tempo, em cada ponto que fixarmos; velocidade, pressão e aceleração por exemplo.

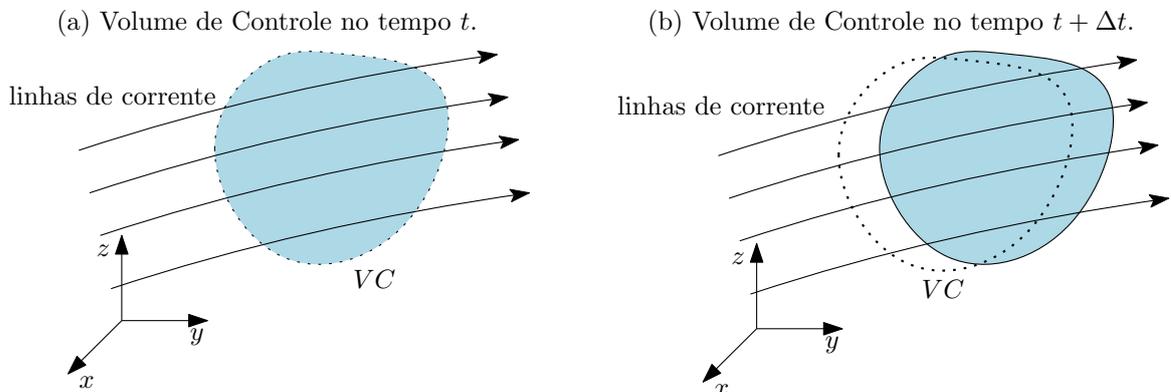
Figura 3 – Descrição euleriana para a dinâmica da partícula.



Fonte: O autor, 2019.

Nessas descrições podemos definir um volume de controle, cujo contorno será uma superfície regular por partes, orientada positivamente, através do qual o fluido escoa. O volume de controle pode ser fixo (VC) ou material (Ω_t). O volume de controle fixo está relacionado a descrição euleriana, nele valem as mesmas regras do ponto fixo, isto é, as variáveis de campo terão o mesmo valor para qualquer partícula de fluido quando aplicado em uma mesma posição e um mesmo instante de tempo, Figura 4.

Figura 4 – Descrição euleriana para a dinâmica das partículas no volume de controle.

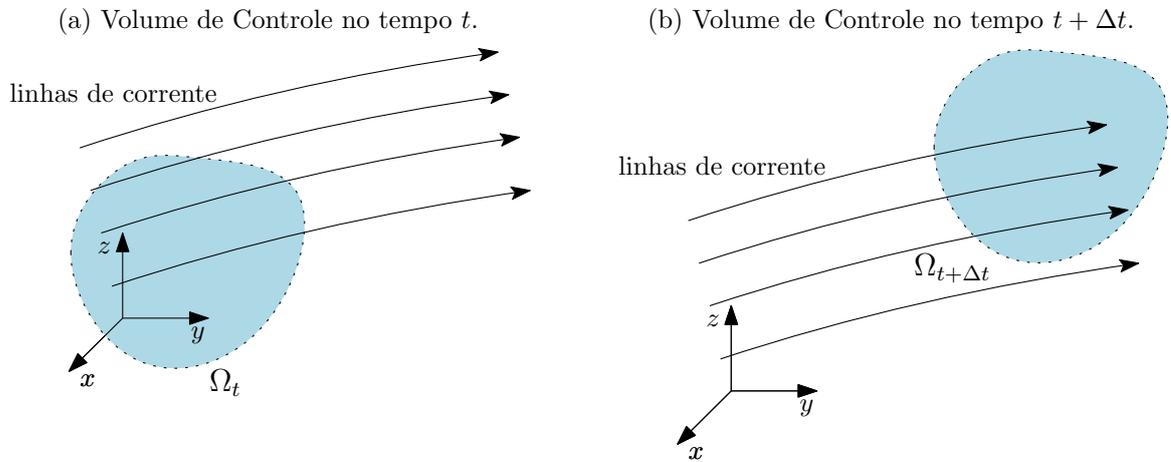


Fonte: O autor, 2019.

O volume de controle material (ou móvel) é uma característica da descrição lagrangiana, nele as partículas são levadas pelo escoamento de modo que não existirão partículas entrando ou saindo por ele, isto é, as partículas permanecem nesse volume de controle por todo o escoamento.

Os volumes de controle que serão adotados são os não deformáveis.

Figura 5 – Descrição lagrangiana para a dinâmica das partículas no volume de controle material.



Fonte: O autor, 2019.

Estabelecer uma relação entre essas descrições é importante para deduzir as equações deste capítulo, para isso é necessário relacionar as taxas de variações de massa específica e velocidade nessas descrições.

Essas grandezas serão analisadas ora em um volume de controle fixo e ora em um volume de controle material. Segundo Martino (2013, p. 14 e 15), a taxa de variação das grandezas que acompanha o movimento (descrição lagrangiana) é denotada por $\frac{D}{Dt}$ e a taxa de variação em um ponto fixo (descrição euleriana) é denotada por $\frac{\partial}{\partial t}$. Nesse contexto, ela mostra que a taxa de variação de massa específica se relaciona nessas descrições por

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\rho, \quad (2.1)$$

O quociente $\frac{D}{Dt}$ recebe o nome de derivada material ou substancial e é definida por Filho e Almeida (2014, p. 32) como sendo

$$\frac{D(H)}{Dt} = \frac{\partial(H)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(H), \quad (2.2)$$

em que H é a quantidade (velocidade, quantidade de movimento, massa específica, etc.) associada a partícula material (partícula que está sendo acompanhada no escoamento).

2.3 Derivada Material da Aceleração \vec{a}

A descrição que utilizaremos para deduzir as equações deste capítulo será a que for mais conveniente, mas independentemente da escolha os resultados das equações diferenciais parciais serão os mesmos.

Se quiséssemos calcular a aceleração de uma partícula específica de fluido pela descrição euleriana (em um ponto fixo) teríamos problema. Porque em um instante de tempo t essa partícula, P_1 , ocupará um ponto no escoamento, após um intervalo de tempo Δt esse ponto estará sendo ocupado por outra partícula P_2 . O que permite concluir que não será possível calcular a aceleração de P_1 em um ponto fixo.

Deste modo, faremos uso da descrição lagrangiana para escrevermos a aceleração em termos da derivada material da velocidade. A aceleração se relaciona com a velocidade pela equação

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{D\vec{V}(x, y, z, t)}{Dt}. \quad (2.3)$$

Suponha que as coordenadas (x_*, y_*, z_*) sejam coordenadas de uma partícula específica no escoamento. Usando a regra da cadeia do lado direito de (2.3) temos

$$\vec{a}(x_*, y_*, z_*, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_*} \frac{dx_*}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_*} \frac{dy_*}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_*} \frac{dz_*}{dt}, \quad (2.4)$$

como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_*} = \frac{\partial M}{\partial x_*} \vec{i} + \frac{\partial N}{\partial x_*} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial x_*} \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial y_*} = \frac{\partial M}{\partial y_*} \vec{i} + \frac{\partial N}{\partial y_*} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial y_*} \vec{k},$$

e

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial z_*} = \frac{\partial M}{\partial z_*} \vec{i} + \frac{\partial N}{\partial z_*} \vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z_*} \vec{k}$$

temos que

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_*} \frac{dx_*}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y_*} \frac{dy_*}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z_*} \frac{dz_*}{dt} = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}.$$

Daí

$$\vec{a}(x_*, y_*, z_*, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \quad (2.5)$$

A taxa de variação da posição (x_*, y_*, z_*) em relação ao tempo são $\frac{dx_*}{dt} = M$, $\frac{dy_*}{dt} = N$ e $\frac{dz_*}{dt} = R$. O vetor posição material (x_*, y_*, z_*) da partícula de fluido na descrição lagrangiana é o próprio vetor posição (x, y, z) na descrição euleriana assim as equações (2.4) e (2.5) ficam, respectivamente,

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} M + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} N + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} R$$

e

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \quad (2.6)$$

Na equação (2.6) o termo $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ representa a aceleração local, o que para um regime transiente ela é diferente de zero, e o termo $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$ representa a aceleração advectiva que

consiste na capacidade de uma partícula de deslocar para um novo local no escoamento, onde o campo velocidade \vec{V} é diferente.

Um exemplo simples, mas útil, é o de considerar um escoamento em regime permanente de água através do esguicho de uma mangueira de jardim. Em um regime permanente $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$, mas a velocidade de saída das partículas é maior que a da entrada (a explicação será dada na seção 2.5.1). Assim, existe uma aceleração das partículas na saída do esguicho mesmo em um regime permanente, essa aceleração que as partículas adquirem é por conta da aceleração advectiva $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$, (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 136 a 138).

2.4 Teorema de Transporte de Reynolds

O Teorema de Reynolds relaciona a taxa de variação no tempo da propriedade extensiva (propriedade que depende da quantidade de fluido) de um sistema B (B_{sis}) através da soma de duas integrais. As integrais que aparecem no teorema representam a taxa de variação da quantidade da propriedade B dentro do volume de controle e a taxa com que essa propriedade B sai através da superfície de controle (SC).

O sistema B é uma quantidade fixa de matéria identificável, composta sempre da mesma partícula de fluido qualquer que seja a transformação, cuja a fronteira é uma superfície fechada que pode variar com o tempo, (STREETER; WYLIE, 1982, p. 94). Sejam B uma propriedade extensiva qualquer (massa, energia ou quantidade de momento, por exemplo.) e b propriedade intensiva (propriedade que independe da quantidade de fluido) correspondente que é definida como sendo a quantidade da propriedade B por unidade de massa, $\rho dV b = B$.

Para este trabalho o sistema B será a massa ($m = \rho dV$) e a quantidade de movimento ($\vec{P} = \rho dV \vec{V}$). Quando B for massa $b = 1$ e quando for quantidade de movimento $b = \vec{V}$.

Teorema 2.1. *Sejam $G(x, y, z, t) = bp$ e \vec{V} funções de classe C^1 , para todo ponto no volume de controle VC no instante t . Então, vale:*

$$\underbrace{\frac{dB_{\text{sis}}}{dt}}_{\text{Taxa de variação no tempo de } B_{\text{sis}}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{VC} G dV}_{\text{Taxa de variação de } B \text{ no } VC} + \underbrace{\iint_{SC} G \vec{V} \cdot \vec{n} dS}_{\text{Vazão de } B \text{ através da } SC} \quad (2.7)$$

O Teorema 2.1 é o Teorema do Transporte de Reynolds na descrição euleriana, VC fixo. A demonstração do Teorema 2.1 será dada na descrição lagrangiana, mas sua demonstração na forma euleriana pode ser vista em Wilcox (2000, p. 119).

Demonstração. Considere B_{sis} uma quantidade da propriedade extensiva que o sistema apresenta, num dado instante de tempo t , de volume material Ω_t (sistema com identidade

fixa que se movimenta com o escoamento do fluido, (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 166)) definido pela integral

$$B_{sis} = \iiint_{\Omega_t} G(x, y, z, t) d\Omega_t, \quad (2.8)$$

em que G é definida por $G(x, y, z, t) = b\rho$.

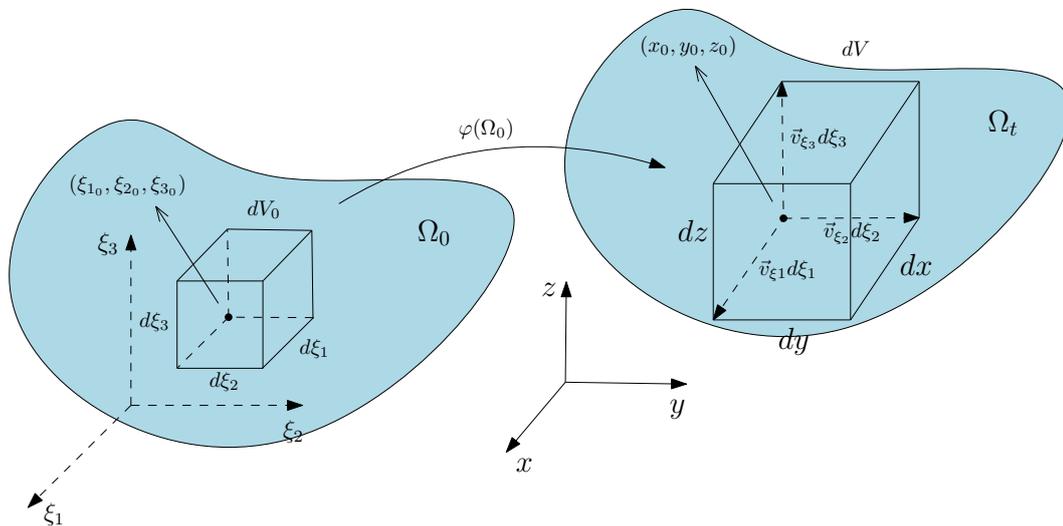
Considere uma função φ definida nos moldes do Teorema B.4 do Apêndice B, ou seja, $\varphi : K \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, em que K é um conjunto aberto e derivadas parciais contínuas de primeira ordem, sendo φ dada por $(x, y, z) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, com

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \text{ e } z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Seja $\Omega_0 \subset K$ um conjunto compacto e Ω_t a imagem de Ω_0 quando aplicado por φ , a saber, $\varphi(\Omega_0) = \Omega_t$. O que estamos fazendo é uma mudança de variável dependente do tempo t , de modo que o domínio fique fixo e ao derivar (2.8) em relação ao tempo podemos "passar" a derivada para dentro do sinal de integração e em seguida aplicarmos φ^{-1} para voltamos a integração inicial, (RAPHALDINI; RAUPP; DIAS, 2017, p. 27).

Considere $d\Omega_0 = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ o volume do elemento de fluido, contido em Ω_0 , no tempo t_0 e $d\Omega_t = dx dy dz$ um volume de elemento de fluido, contido em Ω_t , no tempo t , veja Figura 6.

Figura 6 – Transporte de um volume material Ω_t .



Fonte: O autor, 2019.

As imagens dos segmentos de comprimentos $d\xi_1$, $d\xi_2$, e $d\xi_3$ são curvas em xyz cujos vetores tangentes, a essas curvas, em (x_0, y_0, z_0) são, respectivamente,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \vec{k}$$

e

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_3} = \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \vec{k}.$$

Vale lembrar que se tomarmos $d\xi_i$, com i variando de 1 a 3, tão pequeno quanto se queira podemos considerar $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_i}$ constantes ao longo das curvas em xyz e, portanto, o comprimento dessas curvas serão, aproximadamente, $\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_i} \right\| d\xi_i$, (PINTO; MORGADO, 2000, p. 176). Deste modo, podemos aproximar o volume $d\Omega_t$ pelo volume do paralelepípedo

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_3} \right) \right| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

(APOSTOL, 1988, p. 458 e 459). Assim,

$$d\Omega_t \cong J d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (2.9)$$

em que

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} & \frac{\partial z}{\partial \xi_2} & \frac{\partial z}{\partial \xi_3} \end{vmatrix}$$

é o jacobiano da aplicação φ . Da relação (2.9) podemos dizer que

$$d\Omega_t \cong J d\Omega_0. \quad (2.10)$$

Depois da transformação usada, a derivada material de B_{sis} em (2.8) por ser escrita na forma

$$\frac{DB_{\text{sis}}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_t} G(x, y, z, t) d\Omega_t = \frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega_0} G(\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)) J d\Omega_0,$$

logo

$$\frac{DB_{\text{sis}}}{Dt} = \iiint_{\Omega_0} \frac{DG}{Dt} J + \frac{DJ}{Dt} G d\Omega_0. \quad (2.11)$$

Lema 1. *Seja J o determinante da matriz jacobiana pela transformação φ e \vec{V} um campo de velocidade de classe C^1 . Deste modo,*

$$\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div}(\vec{V}).$$

Demonstração. A demonstração deste lema pode ser visto em Yamaguchi (2008, p. 31 e 32), e uma generalização pode ser visto em Raphaldini, Raupp e Dias (2017, p. 26). ■

Pelo Lema 1 e tomando $G(x, y, z, t) = b\rho$ temos

$$\frac{DB_{sis}}{Dt} = \iiint_{\Omega_0} \left(\frac{Db\rho}{Dt} + b\rho \operatorname{div}(\vec{V}) \right) J d\Omega_0,$$

assim

$$\frac{DB_{sis}}{Dt} = \iiint_{\Omega_t} \frac{Db\rho}{Dt} + b\rho \operatorname{div}(\vec{V}) d\Omega_t. \quad (2.12)$$

A equação (2.12) é conhecida como Teorema de Transporte de Reynolds na descrição lagrangiana. Utilizando a definição de derivada material (2.2) e sabendo que ρ é constante em cada ponto de um volume de controle fixo a equação (2.12) pode ser reescrita como

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \iiint_{VC} \frac{\partial b\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(b\rho\vec{V}) dV,$$

segue então que

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho b dV + \iint_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} dS.$$

■

Para chegar ao resultado da integral de superfície foi utilizado o Teorema da Divergência B.2.

2.5 Equação de Conservação de Massa e Equação da Quantidade de Movimento

Antes de começarmos a deduzir a Equação de Conservação de Massa (Equação da Continuidade) e a Equação da Quantidade de Movimento, em um volume de controle, devemos levar em consideração três princípios básicos citados por Chorin e Marsden (2000, p. 2):

- a) Massa não é criada nem destruída;
- b) A taxa de variação da quantidade de movimento de uma porção do fluido é igual a força aplicada a ele (2ª Lei de Newton);
- c) Energia não é criada e nem destruída.

2.5.1 Conservação da Massa

Para que a massa de um sistema $\left(m_{\text{sis}} = \iiint_{\text{sis}} \rho dV \right)$ seja conservada é necessário que a sua taxa de variação no tempo seja igual a zero, isto é,

$$\frac{dm_{\text{sis}}}{dt} = 0.$$

Utilizando o Teorema do Transporte de Reynolds, para o caso onde a propriedade extensiva é a massa, obtemos

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \, d\mathbf{V}}_I + \underbrace{\iint_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS}_{II} = 0. \quad (2.13)$$

Analisando cada integral do lado esquerdo da equação (2.13), onde ρ é constante em cada ponto de VC .

Utilizando o Teorema de Leibniz, (PANTON, 2005, p. 47 e 48), na integral I obtemos

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \, d\mathbf{V} = \iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{V}.$$

Cabe ressaltar que a integral de superfície do Teorema de Leibniz,

$$\iint_S n_k w_k T_{ij\dots} \, dS,$$

para o caso do volume de controle não seja deformável e fixo, é nula. Segundo Panton (2005, p. 48), isso ocorre porque a superfície do volume de controle não se move no escoamento, isto é, a sua velocidade escalar w_k é nula.

Agora precisamos transformar a integral II em uma integral tripla. Como o campo \vec{V} é de classe C^1 , SC é uma superfície fechada, suave por partes e orientada positivamente, pelo Teorema da Divergência, veja B.2, temos que

$$\iint_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho) \, d\mathbf{V}.$$

Com os resultados obtidos reescrevemos a equação (2.13) como

$$\iiint_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\mathbf{V} + \iiint_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho) \, d\mathbf{V} = 0, \quad (2.14)$$

como VC é fixo no espaço e não tem seu volume alterado segue que

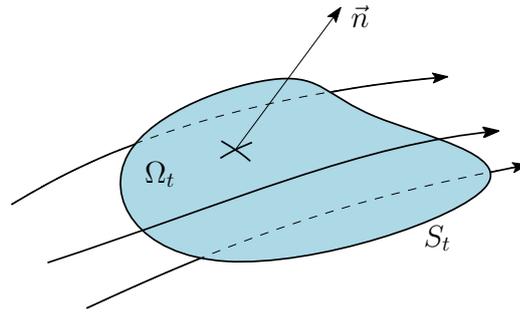
$$\iiint_{VC} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho) \right) \, d\mathbf{V} = 0,$$

portanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho) = 0. \quad (2.15)$$

A equação (2.15) é chamada de Equação de Conservação de Massa ou Equação da Continuidade e foi deduzida na descrição euleriana.

Para a descrição lagrangiana da equação da continuidade suponhamos que Ω_t seja um volume material e S_t seja a superfície material de Ω_t , com o vetor normal \vec{n} apontando para fora, Figura 7.

Figura 7 – Volume material Ω_t em transporte.

Fonte: O autor, 2019.

Segundo Panton (2005, p. 72), como Ω_t é um volume material a velocidade na superfície S_t , dita no Teorema de Leibniz, é igual a velocidade \vec{V} do fluido em toda a superfície material. Deste modo, o Teorema de Leibniz aplicado a um volume material é expresso por

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} \rho b \, d\Omega_t = \iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \rho b}{\partial t} \, d\Omega_t + \iint_{S_t} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS_t \quad (2.16)$$

A expressão do lado direito da equação (2.16) é a versão do Teorema do Transporte de Reynolds deduzida a partir do Teorema de Leibniz, (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 165 e 166). Como a taxa de variação de massa no volume material é nula temos que

$$\iiint_{\Omega_t} \frac{\partial \rho b}{\partial t} \, d\Omega_t + \iint_{S_t} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS_t = 0. \quad (2.17)$$

Deste modo, procedendo de forma análoga como feito anteriormente obtemos

$$\iiint_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho) \right) \, d\Omega_t = 0. \quad (2.18)$$

Para Panton (2005, p. 72) a equação (2.18) se aplica a cada instante de tempo e, portanto, a restrição a um volume material não é necessária. Deste modo, como o volume material não se altera para cada instante de tempo t a única forma da integral se anular é se o integrando for nulo.

Do termo $\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho)$ da integral (2.18) temos que

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \rho) &= \frac{\partial(\vec{V} \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{V} \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(\vec{V} \rho)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x} M + \frac{\partial \rho}{\partial y} N + \frac{\partial \rho}{\partial z} R + \rho \left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] \\ &= \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}. \end{aligned}$$

Em termos da derivada material, obtemos a equação de conservação de massa na descrição lagrangiana como sendo

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V}}_{\frac{D\rho}{Dt}} = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (2.19)$$

Em um escoamento incompressível a massa específica ρ é contante, fazendo com que

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

e as equações (2.14) e (2.17) passam ser reescritas do seguinte modo, respectivamente,

$$\iint_{S_C} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad (2.20)$$

e

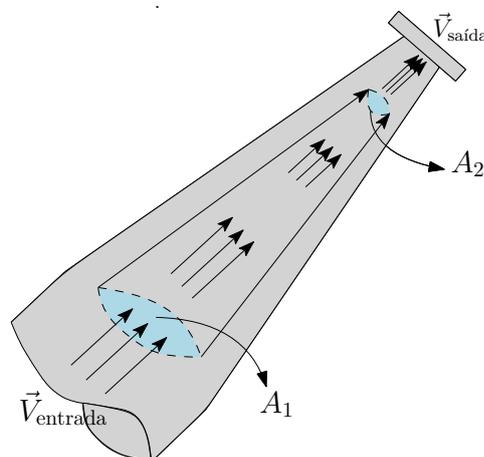
$$\iint_{S_t} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS_t = 0. \quad (2.21)$$

A integral (2.20) se refere a taxa de escoamento de massa, por unidade de tempo, através da superfície de controle e segundo Munson, Young e Okiishi (2017, p. 272) a integral (2.21) se refere a taxa de deformação volumétrica do volume material ao longo do escoamento.

Para ambos os casos $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Em um volume de controle fixo, devido a conservação de massa, a mesma quantidade de massa que entra através da superfície de controle deve ser a que sai. Já no caso do volume de material sua superfície pode contrair, dilatar ou rotacionar, mas para que haja a conservação de massa uma contração do volume material deve ser seguida, proporcionalmente, de uma dilatação, (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 153). Um exemplo prático é em uma bexiga de aniversário, ao comprimir uma parte haverá uma dilatação, proporcional, em outra parte e vice-versa.

Voltemos ao exemplo da seção 2.3, considere um escoamento de água através do esguicho de uma mangueira, Figura 8.

Figura 8 – Escoamento de água através do esguicho de mangueira de jardim.



Fonte: O autor, 2019.

Fazendo um análise entre duas linhas de corrente observamos que a distância entre elas diminuem. Assim, para haja a conservação de massa o escoamento de massa que atravessa A_1 deve ser o mesmo que atravessa A_2 , nas quais A_1 e A_2 representam as áreas das seções paralelas entre si. Como o regime de escoamento é o permanente as velocidades nas seções A_1 e A_2 são constantes, isso faz com que as integrais de superfície nessas seções sejam simplificadas a integrais de área. Portanto, conservação de massa é estabelecida quando

$$\rho V_{\text{entrada}} A_1 = \rho V_{\text{saída}} A_2. \quad (2.22)$$

Como o escoamento é considerado incompressível, ρ constante, temos que $V_{\text{saída}}$ pode ser dado por $V_{\text{saída}} = \frac{V_{\text{entrada}} A_1}{A_2}$. Daí, como $A_1 \neq A_2$, implica que quanto menor for a área A_2 maior será $V_{\text{saída}}$.

Em outras palavras, a medida que a distância entre duas linhas de corrente diminuem a partícula aumenta a sua velocidade. Esse aumento de velocidade é devido a aceleração $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$, comentado na seção 2.3.

2.5.2 Equação da Quantidade de Movimento

A quantidade de movimento \vec{P} de uma partícula é dada por $\rho d\mathcal{V}\vec{V}$, onde a massa de uma partícula de volume $d\mathcal{V}$ é $\rho d\mathcal{V}$. Para um sistema de partículas a quantidade de movimento é

$$\vec{P}_{\text{sis}} = \iiint_{\text{sis}} \rho \vec{V} d\mathcal{V}.$$

Assim, a taxa de variação de \vec{P}_{sis} é igual a

$$\frac{d\vec{P}_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\text{sis}} \rho \vec{V} d\mathcal{V}, \quad (2.23)$$

para ρ constante no tempo. Podemos reescrever a 2ª Lei de Newton do seguinte modo

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}_{\text{sis}}}{dt}.$$

Desse modo, a Equação da Quantidade de Movimento será estabelecida quando

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{externa}} + \sum \vec{F}_{\text{superfície}} = \frac{d\vec{P}_{\text{sis}}}{dt}. \quad (2.24)$$

Agora, precisamos verificar quem são as forças externas e de superfície que atuam no volume de controle. Segundo Chorin e Marsden (2000, p. 5), as forças que atuam em todo o volume de controle são as forças externas ou de campo e as forças de superfície ou de tensão. As forças externas são aquelas provocadas pelos campos gravitacional, elétrico ou magnético, por exemplo. Já as forças de superfície são relativas à pressão e às tensões de cisalhamento, entre outras. Para este trabalho adotaremos como força externa sendo a força peso e, pela hipótese inicial, a força de superfície será a de pressão. Deste modo,

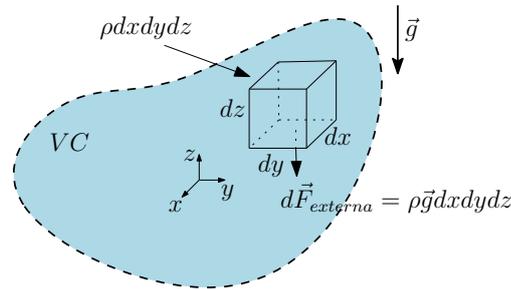
estamos interessados em verificar como é representada a soma de todas as forças que agem sobre o volume de controle, equação (2.24).

Analisaremos primeiro a força peso, tomando um elemento de fluido dentro do VC com dimensões $dx dy dz$. Sendo ρ a massa específica do fluido então a força peso sobre o elemento de fluido é

$$d\vec{F}_{externa} = \rho \vec{g} dx dy dz, \quad (2.25)$$

veja Figura 9.

Figura 9 – Força peso que age sobre o elemento de fluido.



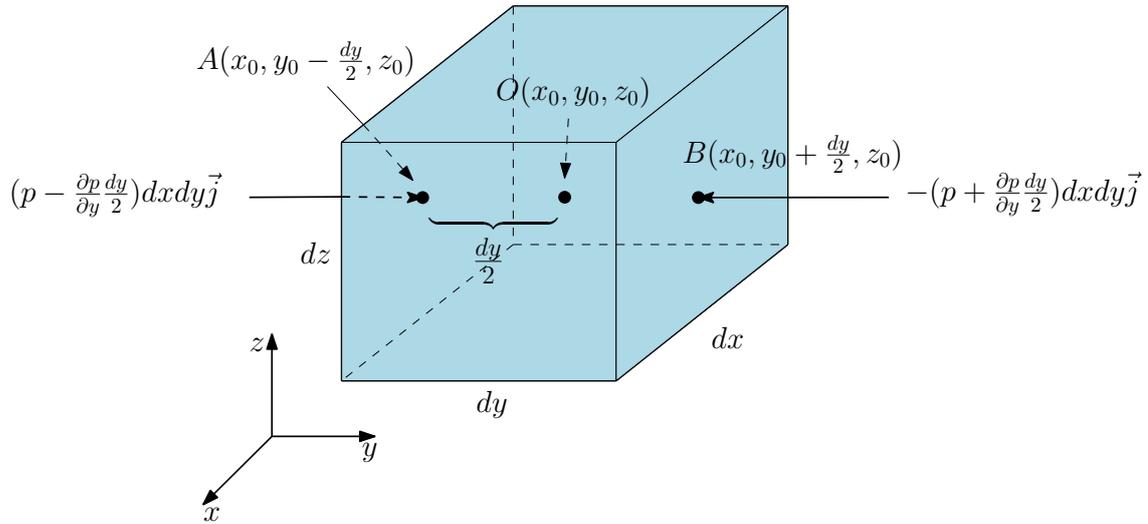
Fonte: O autor, 2019.

Fazendo a integração em (2.25) resulta que

$$\sum \vec{F}_{externa} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} dV. \quad (2.26)$$

Agora, como não estamos considerando que existem as tensões de cisalhamento a única força de superfície que atuará em um elemento de fluido é a pressão p . Considere um elemento de fluido com dimensões $dx dy dz$ e centro no ponto $O(x_0, y_0, z_0)$. Seja p a pressão no centro O do cubo, como representado na Figura 10. Não se pode calcular a pressão no ponto O diretamente, para isso devemos usar a expansão da Série de Taylor da pressão p em torno do ponto O . Primeiramente, faremos a expansão da Série de Taylor na direção de y , como representado na Figura 10, para as direções x e z a expansão é feita de modo análoga.

Figura 10 – Pressão em um elemento de fluido nas direções \vec{j} e $-\vec{j}$.



Fonte: O autor, 2019.

Supondo que a expansão da Série de Taylor de primeira ordem da pressão p , como proposto em Ribeiro e Karas (2013, p. 25), seja definida para todos os pontos do elemento de fluido, a pressão resultante na direção de y para o elemento de fluido escolhido é da forma:

i. expansão para a face na direção $-\vec{j}$

$$dF_{p_{-\vec{j}}} = p + \frac{\partial p}{\partial x}(x_0 - x_0) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(y_0 - \left(y_0 + \frac{dy}{2} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial z}(z_0 - z_0) + r_1, \quad (2.27)$$

em que r_1 é o resto com $\lim_{y_0 \rightarrow y_0 + \frac{dy}{2}} \frac{r_1}{y_0 - \left(y_0 + \frac{dy}{2} \right)} = 0$.

ii. expansão para a face na direção \vec{j}

$$dF_{p_{\vec{j}}} = p + \frac{\partial p}{\partial x}(x_0 - x_0) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(y_0 - \left(y_0 - \frac{dy}{2} \right) \right) + \frac{\partial p}{\partial z}(z_0 - z_0) + r_2, \quad (2.28)$$

em que r_2 é o resto com $\lim_{y_0 \rightarrow y_0 - \frac{dy}{2}} \frac{r_2}{y_0 - \left(y_0 - \frac{dy}{2} \right)} = 0$.

Os restos r_1 e r_2 podem ser desprezados porque são muito pequenos e vão para zero mais rápido que $\frac{dy}{2}$. Assim, podemos tomar força resultante na direção y , para o elemento de fluido, como sendo

$$\delta F_{p_y} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz$$

$$dF_{p_y} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz. \quad (2.29)$$

De modo análogo expandindo a Série de Taylor de primeira ordem em torno do ponto $O(x_0, y_0, z_0)$ para as direções \vec{i} e \vec{k} e obteremos

$$dF_{p_x} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.30)$$

e

$$dF_{p_z} = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz, \quad (2.31)$$

respectivamente. Assim, a força de superfície atuando no elemento de fluido é

$$d\vec{F}_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) dx dy dz = -\vec{\nabla} p dx dy dz. \quad (2.32)$$

Integrando a equação (2.32) teremos que a força de superfície por unidade de volume devido à pressão p é

$$\sum \vec{F}_{superfície} = -\iiint_{VC} \vec{\nabla} p dV. \quad (2.33)$$

Um outro caminho possível para a equação (2.33) seria fazendo uso do Teorema B.2 do Apêndice B. A pressão exercida em um pedaço da superfície de controle é

$$d\vec{F}_p = -p\vec{n} dS, \quad (2.34)$$

o sinal negativo vem do fato p agir no sentido contrário a orientação positiva do vetor \vec{n} . Integrando a equação (2.34) por toda a superfície de controle alcançaremos

$$\sum \vec{F}_{superfície} = -\iint_{SC} p\vec{n} dS. \quad (2.35)$$

Considere um vetor \vec{e} unitário em uma direção fixa arbitrária. Fazendo o produto escalar de \vec{e} em (2.35) teremos

$$\vec{e} \cdot \sum \vec{F}_{superfície} = -\vec{e} \cdot \iint_{SC} p\vec{n} dS = -\iint_{SC} p\vec{e} \cdot \vec{n} dS,$$

pelo Teorema da Divergência obtemos que

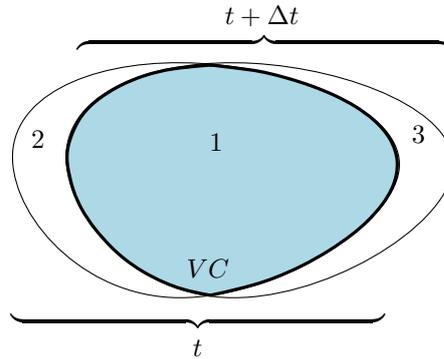
$$\vec{e} \cdot \sum \vec{F}_{superfície} = -\vec{e} \cdot \iiint_{VC} \vec{\nabla} p dV,$$

logo

$$\sum \vec{F}_{superfície} = -\iiint_{VC} \vec{\nabla} p dV.$$

Agora expandiremos o termo da taxa de variação no tempo da quantidade de movimento (QM) $\frac{d\vec{P}_{sis}}{dt}$ apropriado para um volume de controle VC .

Figura 11 – Análise do transporte da quantidade de movimento.



Fonte: O autor, 2019.

Com base na Figura 11, considere que as quantidades de movimento no tempo t e $t + \Delta t$ sejam, respectivamente,

$$[m_1 \vec{V}_1]_t + [m_2 \vec{V}_2]_t = [QM]_t$$

e

$$[m_1 \vec{V}_1]_{t+\Delta t} + [m_3 \vec{V}_3]_{t+\Delta t} = [QM]_{t+\Delta t}.$$

Assim, a taxa de variação da quantidade de movimento no tempo é dada por

$$\underbrace{\left[\frac{[QM]_{t+\Delta t} - [QM]_t}{\Delta t} \right]}_{\text{Taxa de Variação da QM no sistema}} = \underbrace{\left[\frac{[m_1 \vec{V}_1]_{t+\Delta t} - [m_1 \vec{V}_1]_t}{\Delta t} \right]}_{\text{Taxa de Variação da QM no VC}} + \underbrace{\left[\frac{[m_3 \vec{V}_3]_{t+\Delta t} - [m_2 \vec{V}_2]_t}{\Delta t} \right]}_{\text{Taxa de Variação da QM na superfície do VC}}. \quad (2.36)$$

O que nos permite concluir que

$$\underbrace{\frac{d\vec{P}_{\text{sis}}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{VC} \rho \vec{V} dV + \iint_{SC} \rho \vec{V} \underbrace{(\vec{V} \cdot d\vec{S})}_{\text{Velocidade responsável por transportar a QM}}}_{\text{Teorema do Transporte de Reynolds}}.$$

Vale observar que se o volume de controle não fosse fixo a velocidade transportadora seria a velocidade relativa (diferença entre a velocidade do fluido e a velocidade do volume de controle).

Para obter a Equação da Quantidade de Movimento, na forma diferencial, faremos uso da extensão do Teorema da Divergência descrito em Riley, Hobson e Bence (2006, p. 954),

$$\iint_S T_{ij\dots k\dots m} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \frac{\partial T_{ij\dots k\dots m}}{\partial x_k} dV,$$

em que $T_{ij\dots k\dots m}$ representa um tensor. Desse modo, como $(\rho\vec{V})\vec{V}$ representa um tensor de segunda ordem, (ÇENGEL; CIMBALA, 2015, p. 460), aplicamos o Teorema de Leibniz e a extensão do Teorema da Divergência para obtermos

$$\frac{d\vec{P}_{\text{sis}}}{dt} = \iiint_{VC} \left(\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) \right) d\mathbf{V}.$$

Assim, a Equação da Quantidade de Movimento será estabelecida quando

$$\iiint_{VC} \left(\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) \right) d\mathbf{V} = \sum \vec{F}_{\text{externa}} + \sum \vec{F}_{\text{superfície}}. \quad (2.37)$$

Finalmente, das equações (2.26), (2.33) e (2.37) temos que

$$\iiint_{VC} \left(\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) \right) dV = \iiint_{VC} \rho\vec{g} dV - \iiint_{VC} \vec{\nabla} p dV,$$

daí

$$\iiint_{VC} \left(\frac{\partial\rho\vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) \right) d\mathbf{V} = \iiint_{VC} (\rho\vec{g} - \vec{\nabla} p) d\mathbf{V},$$

como o VC é fixo e não tem seu volume alterado a igualdade só irá acontecer quando

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla} p. \quad (2.38)$$

A equação (2.38) é conhecida como a Equação da Quantidade de Movimento na forma diferencial ou Equação de Euler para a Quantidade de Movimento.

Agora, estamos interessados em obter a equação da quantidade de movimento pela descrição lagrangiana. Para isso, manipulamos os termos do lado esquerda da equação (2.38) usando o fato de que

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{V} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\rho, \quad (2.39)$$

e a identidade, dada em Çengel e Cimbala (2015, p. 463),

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}\vec{V}) = \vec{V}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}. \quad (2.40)$$

Substituindo as equações (2.39) e (2.40) na equação (2.38) obtemos

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{V}} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\rho + \underbrace{\vec{V}\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V})}_{\text{Equação da Continuidade}} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla} p$$

colocando em evidência \vec{V} , nos termos destacados acima, e usando o resultado da conservação de massa, equação (2.15), obtemos outra formulação para a Equação da Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\rho + \vec{V} \underbrace{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) \right]}_{\text{Equação da Continuidade}} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla} p,$$

no que resulta em

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p.$$

Como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{D\vec{V}}{Dt},$$

resultado obtido na seção 2.3, temos que a Equação da Quantidade de Movimento, pela descrição lagrangiana, é dado por

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p. \quad (2.41)$$

2.6 Equação de Bernoulli

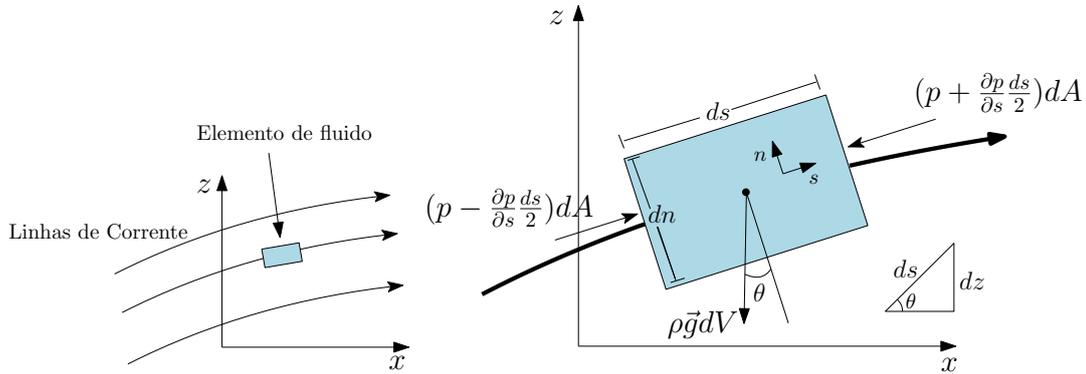
Antes de começarmos fazer a dedução, é necessário descrever sobre quais hipóteses a equação de Bernoulli se torna verdadeira. Precisamos que o escoamento seja em regime permanente, incompressível e invíscido. Lembrando que, para essas escolhas, a variação da velocidade ao longo tempo é nula, os vetores de velocidade são tangentes a cada ponto do escoamento, todas as partículas que passam num dado ponto seguirão em uma mesma trajetória e a massa específica permanece inalterada independente do estado de tensões e as forças que agem na superfície são a peso e a pressão.

Usando a notação de Vallentine (1967, p. 39), para uma dedução usando as coordenadas de linha de corrente, sejam s e n as coordenadas da distância percorrida por um elemento de fluido ao longo de uma linha de corrente e a coordenada da distância normal à linha de corrente, respectivamente. Aplicando a 2ª Lei de Newton na direção s e usando a expansão de Taylor, como feita na seção 2.5.2, onde p é a pressão no centro do elemento de fluido, temos

$$\rho ds dA a_s = \left(p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) dA - \rho g \sin(\theta) ds dA, \quad (2.42)$$

veja Figura 12,

Figura 12 – Diagrama de corpo livre de um elemento de fluido.



Fonte: O autor, 2019.

onde a massa $m = \rho dV = \rho ds dn dz$, $dA = dn dz$ e θ é o ângulo formado entre a normal a linha de corrente e o eixo z . Substituindo $\sin(\theta) = \frac{dz}{ds}$ e fazendo a simplificação do termo dV na equação (2.42) obtemos

$$\rho \vec{a}_s = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{dz}{ds}. \quad (2.43)$$

A velocidade da partícula é $\vec{V}(s, t) = \frac{ds}{dt}$, assim

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t},$$

e a aceleração \vec{a}_s na direção da linha de corrente é

$$\vec{a}_s = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}.$$

Substituindo na equação (2.43) temos

$$\rho \left[\vec{V} \frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{dz}{ds}. \quad (2.44)$$

Agora, temos algumas simplificações para fazer na equação (2.44). Antes, observe que p não depende de t , depende apenas de s , o que implica em $\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds}$ do mesmo modo que $\vec{V}(s, t) = \vec{V}(s)$, pois o regime de escoamento é permanente, portanto $\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} = \frac{d\vec{V}}{ds}$ e $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$. Após esses ajustes, a equação (2.44) pode ser reescrita do seguinte modo

$$\rho \vec{V} \frac{d\vec{V}}{ds} = -\frac{dp}{ds} - \rho g \frac{dz}{ds}.$$

Observe que $\vec{V} \frac{d\vec{V}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d(\|\vec{V}\|^2)}{ds}$ e como $\rho \neq 0$, a equação acima se torna

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{2} \frac{d(\|\vec{V}\|^2)}{ds} + g \frac{dz}{ds} = 0. \quad (2.45)$$

Ao integrarmos a equação (2.45) ao longo de s , usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{Energia de escoamento}} + \underbrace{\frac{1}{2} \|\vec{V}\|^2}_{\text{Energia cinética}} + \underbrace{gz}_{\text{Energia potencial}} = \text{constante}. \quad (2.46)$$

A equação (2.46) é chamada de Equação de Bernoulli. Segundo Çengel e Cimbala (2015, p. 201) a soma das energias cinética, potencial e de escoamento de uma partícula de fluido é constante ao longo das linhas de corrente durante um escoamento em regime permanente, incompressível e invíscido.

2.7 Vorticidade e Circulação

Nesta seção iremos associar a equação do movimento angular à função de velocidade, o que resultará no vetor de vorticidade. Em seguida, falaremos da característica da vorticidade nula no escoamento e do Teorema de de Helmholtz's. Por fim, falaremos da circulação (intensidade do vórtice em uma curva fechada) e da conservação de circulação através do Teorema da Circulação de Kelvin.

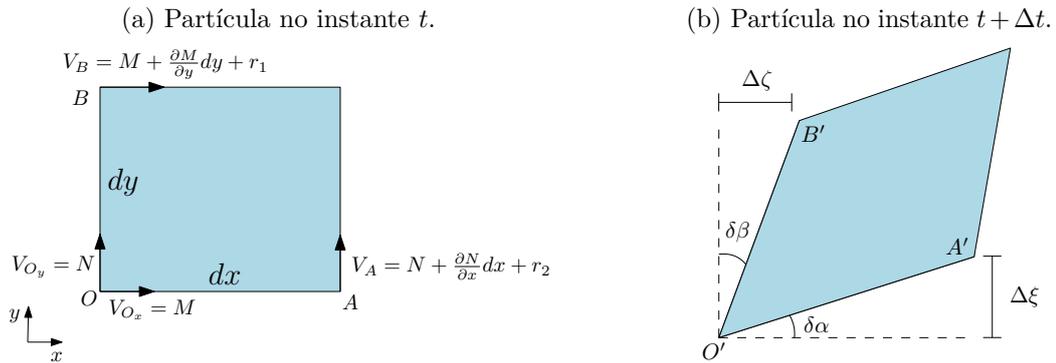
2.7.1 Vetor de Vorticidade

A rotação de uma partícula é uma função dada por

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}, \quad (2.47)$$

onde ω_x , ω_y e ω_z são as rotações em torno dos eixos x , y e z , respectivamente. Para análise do movimento iremos considerar a vista no plano xy , veja Figura 13.

Figura 13 – Movimento angular de uma partícula.



Fonte: O autor, 2019.

Considere uma partícula de fluido no instante t com dimensões dx e dy , Figura 13a. Em geral, uma partícula após um instante de tempo Δt será translada, rotacionada e deformada para uma nova posição no escoamento, (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2014, p. 189), Figura 13b. Sejam $\delta\alpha$ e $\delta\beta$ as rotações que os segmentos \overline{OA} e \overline{OB} sofreram, respectivamente. Considere, para um variação muito pequena de $\delta\alpha$ e $\delta\beta$,

$$\text{tg}(\delta\alpha) \approx \delta\alpha = \frac{\Delta\zeta}{dx} \quad (2.48)$$

e

$$\text{tg}(\delta\beta) \approx \delta\beta = \frac{\Delta\xi}{dy}. \quad (2.49)$$

A deformação $\Delta\zeta$ surge quando O sofre um deslocamento $M\Delta t$ e como consequência B sofre um deslocamento cuja distância é $M\Delta t + \frac{\partial M}{\partial y}dy\Delta t$, para isso foi feita uma expansão em Série de Taylor em torno do ponto B e desprezado os termos de grau maior que 1, Figura 13a, como feito na expansão (2.28). Desse modo, essa diferença de velocidade provocará a deformação na direção do eixo x

$$\Delta\zeta = M\Delta t + \frac{\partial M}{\partial y}dy\Delta t - M\Delta t = \frac{\partial M}{\partial y}dy\Delta t.$$

De modo análogo, a deformação $\Delta\xi$ surge quando o ponto O sofre um deslocamento $N\Delta t$ e por sua vez A sofre um deslocamento de $N\Delta t + \frac{\partial N}{\partial x}dx\Delta t$, a diferença de velocidade na direção do eixo y provocará a deformação, Figura 13b,

$$\Delta\xi = N\Delta t + \frac{\partial N}{\partial x}dx\Delta t - N\Delta t = \frac{\partial N}{\partial x}dx\Delta t.$$

Usando as equações (2.48) e (2.49), as velocidades angulares de \overline{OA} e \overline{OB} são, respectivamente, os limites

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial N}{\partial x}dx\Delta t}{dx\Delta t}$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\beta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial M}{\partial y} dy \Delta t}{dy \Delta t}.$$

Assim, dos limites acima obtemos as velocidades angulares \overline{OA} e \overline{OB} como sendo

$$\omega_{\overline{OA}} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

e

$$\omega_{\overline{OB}} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Portanto, pela regra da mão direita, a velocidade média angular entre $\omega_{\overline{OA}}$ e $\omega_{\overline{OB}}$ é a velocidade na direção z . Observe que a variação $\delta\beta$ esta no sentido horário, portanto

$$\omega_z = \frac{\omega_{\overline{OA}} - \omega_{\overline{OB}}}{2},$$

logo

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \quad (2.50)$$

A velocidade angular em torno dos outros dois eixos coordenados procede de igual modo sendo

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \quad (2.51)$$

e

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right). \quad (2.52)$$

Substituindo as equações (2.50), (2.51) e (2.52) na equação (2.47) temos que a rotação de uma partícula é dada por

$$2\vec{\omega} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Defini-se o campo rotacional de um campo de velocidade ou vetor de vorticidade como sendo

$$2\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}, \quad (2.53)$$

esse vetor indica, pela regra da mão direita, o sentido de rotação da partícula.

O comprimento do vetor de vorticidade, $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, é a medida da taxa de rotação de uma partícula de fluido em um ponto, (THOMAS; WEIR; HASS, 2012, p. 423).

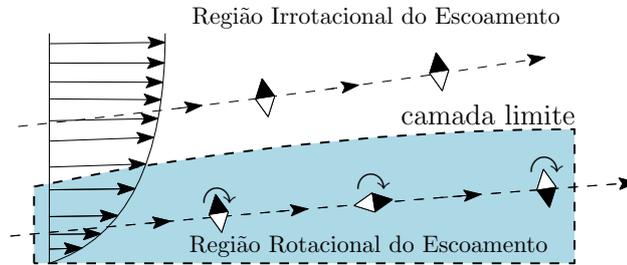
Se para todo ponto do escoamento

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0$$

dizemos que o escoamento é irrotacional.

Fisicamente a equação (2.53) diz que em um região em que o vetor de vorticidade é diferente de zero as partículas de fluido tendem a rotacionar nessa região como ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Partículas de fluido rotacionam em uma região do escoamento onde $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq 0$.



Fonte: O autor, 2019.

Se tivéssemos deduzido a equação (2.46) com um tratamento vetorial, como feito por Fox, Mcdonald e Pritchard (2014, p. 242 e 243), teríamos

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{V}\|^2 \cdot d\vec{s} + g\vec{k} \cdot d\vec{s} = [\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] \cdot d\vec{s}. \quad (2.54)$$

De fato, a equação acima é deduzida da equação (2.41) ao longo de uma linha de corrente. Como o regime de escoamento é o permanente $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$, a equação (2.41) pode ser reescrita como

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - g\vec{k}. \quad (2.55)$$

Tomando o produto escalar da equação (2.55) com vetor $d\vec{s}$, que é o vetor deslocamento de uma partícula numa fração de tempo, obteremos

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \cdot d\vec{s} - g\vec{k} \cdot d\vec{s}. \quad (2.56)$$

Usando a identidade vetorial

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \right) \cdot d\vec{s} \quad (2.57)$$

na equação (2.56) iremos obter a equação (2.54), em que $\frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{V} \cdot \vec{V}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \|\vec{V}\|^2$.

Como a dedução é ao longo de uma linha de corrente os vetores $d\vec{s}$ e \vec{V} são paralelos. Como \vec{V} é perpendicular a $[\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})]$ então o produto escalar

$$[\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] \cdot d\vec{s} = 0.$$

Daí, de modo análogo como feito na seção 2.6 chegaríamos a mesma equação (2.46).

Observe que se admitíssemos como hipótese um escoamento é irrotacional,

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0,$$

também chegaríamos a equação (2.46). Mas o que muda se acrescentarmos a hipótese do escoamento ser irrotacional? Segundo Munson, Young e Okiishi (2017, p. 285), a mudança está no fato de que as variações dp , $d(\|\vec{V}\|^2)$ e dz podem ser tomadas em qualquer direção, porque o produto escalar

$$[\vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})] \cdot d\vec{s} = 0$$

independente da direção $d\vec{s}$. Desse modo, entre dois pontos quaisquer do escoamento vale

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\|\vec{V}_1\|^2 + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\|\vec{V}_2\|^2 + gz_2, \quad (2.58)$$

onde p_1 , $\|\vec{V}_1\|$ e z_1 representam, respectivamente, pressão, velocidade e posição na direção do eixo z de uma partícula P_1 , de modo igual, p_2 , $\|\vec{V}_2\|$ e z_2 representam, respectivamente, pressão, velocidade e posição na direção do eixo z de uma partícula P_2 , não necessariamente em uma mesma linha de corrente.

Entretanto, se retirarmos a condição de irrotacionalidade para o escoamento a equação (2.58) só pode ser aplica em pontos de uma mesma linha de corrente.

Teorema 2.2 (Teorema de Helmholtz's. (WILCOX, 2000, p. 353)). *Suponha que uma partícula de fluido se move em um escoamento invíscido e incompressível, sob ação de forças de corpo conservativas. Se a vorticidade inicialmente é zero então ela permanecerá zero em todo o escoamento.*

Demonstração. A equação da quantidade de movimento é dada por

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p$$

o que pode ser colocada na forma

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho},$$

seção 2.5.2. Aplicando o operador $\vec{\nabla} \times$ na igualdade, lembrando que $\vec{g} = \vec{\nabla} G$ (campo conservativo), temos que

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times [(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}] = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} G}_{=0} - \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}}_{=0},$$

usando a identidade vetorial, dada em Fox, Mcdonald e Pritchard (2014, p. 242),

$$(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} - \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} - \vec{V} \times \text{rot}(\vec{V}),$$

obtemos

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{V})}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \frac{\|\vec{V}\|^2}{2}}_{=0} - \vec{\nabla} \times \vec{V} \times (\text{rot}(\vec{V})) = 0.$$

O duplo produto vetorial pode ser decomposto usando a identidade, dada em Spiegel (1972, p. 82), na expressão

$$\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \text{rot}(\vec{V})) = (\text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - \text{rot}(\vec{V})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\text{rot}(\vec{V}) + \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \text{rot}(\vec{V})).$$

Como o divergente do campo rotacional é nulo e o escoamento é incompressível os termos $\vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \text{rot}(\vec{V}))$ e $\text{rot}(\vec{V})(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ são ambos nulos. Portanto

$$\frac{\partial(\text{rot}(\vec{V}))}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\text{rot}(\vec{V}) = (\text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{\nabla})\vec{V}, \quad (2.59)$$

ou

$$\frac{D(\text{rot}(\vec{V}))}{Dt} = (\text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{\nabla})\vec{V}. \quad (2.60)$$

Se o escoamento é em duas dimensões então $(\text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = 0$, pois o campo rotacional só tem componente na direção \vec{k} . Se o escoamento é em três dimensões o resultado também será zero, mas com um pouco a mais de contas. Pois

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{\nabla}]\vec{V} &= \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] (M\vec{i} + N\vec{j} + R\vec{k}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{D(\text{rot}(\vec{V}))}{Dt} = 0. \quad (2.61)$$

■

A equação (2.61), nas hipóteses do Teorema 2.2, diz que a taxa de mudança de vorticidade permanece a mesma ao longo do escoamento. Assim, se inicialmente $\text{rot}(\vec{V}) = 0$ então ele permanecerá zero por todo escoamento.

2.7.2 Circulação

Considere \vec{V} um campo de velocidades de um fluido que escoar por um região do espaço. A integral

$$\oint_C \vec{V} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

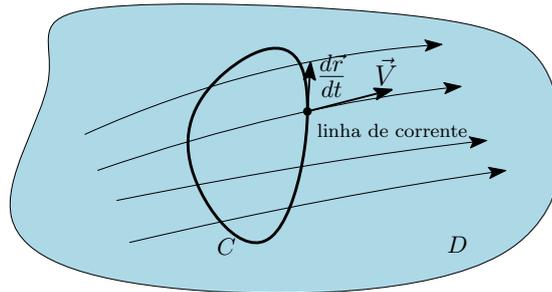
fornece a medida da intensidade de como o fluido tende a fazer a curva C girar, circulando em torno de si mesma, em que $\frac{d\vec{r}}{dt}$ é o vetor tangente a C e $r(t)$ é uma parametrização de C .

Definição 2.1. Se $\vec{r}(t)$ parametriza uma curva suave C no domínio de um campo de velocidade contínuo \vec{V} , o escoamento ao longo de uma curva fechada C é

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{V} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt.$$

O escoamento é denominado circulação ao redor de C , Figura 15.

Figura 15 – Circulação ao redor da curva C .



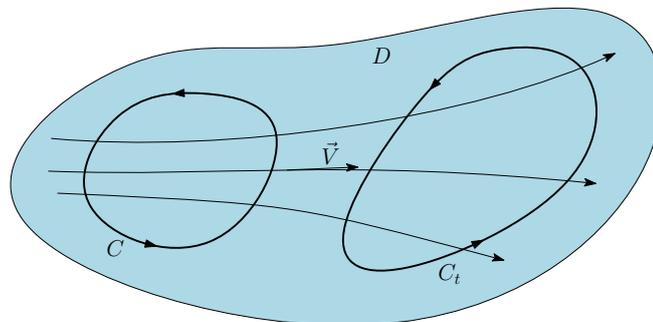
Fonte: O autor, 2019.

Teorema 2.3 (Teorema da Circulação de Kelvin. (VALLENTINE, 1967, p. 262)). A circulação Γ , portanto, a força de vórtice, não varia com o tempo sob as hipóteses de escoamento invíscido, massa específica constante ou apenas em função da pressão e forças do corpo que são deriváveis de um potencial de valor único (como força gravitacional). Isto quer dizer que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Demonstração. Utilizaremos na demonstração o lema citado por Chorin e Marsden (2000, p. 21).

Figura 16 – Transporte da curva C .



Fonte: O autor, 2019.

Lema 2. *Sejam \vec{V} o campo de velocidades de um fluido, C uma curva suave fechada e C_t a curva transportada pelo escoamento, veja Figura 16. Então*

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_t} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s}.$$

Demonstração. Sejam $\vec{r}(\theta)$ uma parametrização de C , com $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e $\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t)$ uma parametrização de C_t , com $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como C_t é uma curva material (curva que é transportada no escoamento com a característica de que as partículas que inicialmente pertencem a ela permanecerão nela por todo escoamento.) a sua parametrização assume o papel de fixar, para cada t , uma curva no escoamento, de modo a permitir, pelo Teorema de Leibniz, derivar o integrando sob o sinal de integração fixo. Assim, da definição de integral de linha visto em Guidorizzi (2013) e do Teorema de Leibniz visto em Panton (2005, p. 47 e 48) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{s} &= \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{D}{Dt} \left[\vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{D}{Dt} \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) + \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) d\theta. \end{aligned}$$

Mas como $\frac{\partial}{\partial t} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) = \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t)$ o integrando pode ser reduzido a

$$\vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) = \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t)$$

que por sua vez

$$\vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \|\vec{V}\|^2(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t).$$

Portanto a integral pode ser reformulada na forma

$$\int_0^{2\pi} \frac{D}{Dt} \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \|\vec{V}\|^2(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) d\theta$$

e como C_t é um curva fechada a circulação

$$\oint_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \|\vec{V}\|^2(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) d\theta = 0,$$

(BATCHELOR, 2000, p. 92). Deste modo, segue que

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{D}{Dt} \vec{V}(\vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\gamma}_t(\vec{r}(\theta), t) d\theta = \oint_{C_t} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s}. \quad (2.62)$$

■

Retomando à demonstração do Teorema 2.3, como

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

pelo Lema 2

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_t} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s}$$

e da equação (2.41)

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho},$$

segue que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C_t} \left[\vec{g} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \right] \cdot d\vec{s}.$$

Assim, como a expressão entre colchetes é constituída de campos conservativos, $\vec{g} = \vec{\nabla}G$, e a curva C_t é fechada segue que a integral

$$\oint_{C_t} \left[\vec{\nabla}G - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} \right] \cdot d\vec{s} = 0. \quad (2.63)$$

Portanto a circulação em torno de uma curva material C_t é constante (conservação da circulação) ao longo do tempo, ou seja,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

■

Um caso particular do Teorema 2.3 vem da hipótese da vorticidade ser inicialmente zero, pois do Teorema de Stokes, Apêndice B,

$$\oint_{C_t} \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_t} \text{rot}\left(\frac{D\vec{V}}{Dt}\right) \cdot d\vec{S},$$

onde S_t é uma superfície material com borda C_t , e como

$$\iint_{S_t} \text{rot}\left(\frac{D\vec{V}}{Dt}\right) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_t} \frac{D(\text{rot}(\vec{V}))}{Dt} \cdot d\vec{S},$$

pelo Teorema de Helmholtz's, Teorema 2.2, temos que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Dos resultados acima, podemos concluir que vorticidade não podem ser criados ou destruídos em um escoamento invíscido; e que se uma curva fechada envolver um vórtice sua intensidade de circulação Γ não varia com o tempo, (VALLENTINE, 1967, p. 263). Deste modo, um elemento de fluido mantém sua vorticidade por todo escoamento (Teorema de Kelvin) e um elemento de fluido que não tem vorticidade não a pode adquirir (Teorema de Helmholtz's).

3 FUNÇÕES COMPLEXAS

Este capítulo será dedicado a teoria das funções complexas, em especial as funções analíticas. Começamos com a teoria base de números complexos para o estudo de funções. Definiremos limite, continuidade e diferenciabilidade de uma função complexa e algumas de suas propriedades. Quando então, definiremos uma função analítica. O conceito de analiticidade exige da função a diferenciabilidade em todos os pontos de uma região aberta, à vista disso, definiremos um condição necessária para estabelecer a analiticidade de uma função complexa, que são as equações de Cauchy-Riemann. As integrais de funções complexas irão nos permitir estudar integrais de contorno, em especial contornos com singularidades. Assim, os teoremas de integrais terão aplicações fundamentais nos resultados relacionados a força de sustentação.

3.1 Números Complexos e suas Propriedades

Definição 3.1 (Número Complexo). *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Um número complexo é da forma $z = a + ib$, em que i é a unidade imaginária. O conjunto dos números complexos z será denotado por \mathbb{C} .*

Dado $z = a + ib$ chamamos a de parte real do número complexo ($Re(z)$) e b a parte imaginária ($Im(z)$). As operações de adição e multiplicação dos números complexos gozam das leis de comutatividade, distributividade e associatividade.

Quando queremos somar (subtrair) números complexos basta somar (subtrair) as partes $Re(z)$ e $Im(z)$ correspondentes. Para multiplicação de números complexos deve-se usar a distributiva, lembrando o fato de que $i^2 = -1$. Assim, dados $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ temos que

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) \pm i(b_1 \pm b_2)$$

e

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

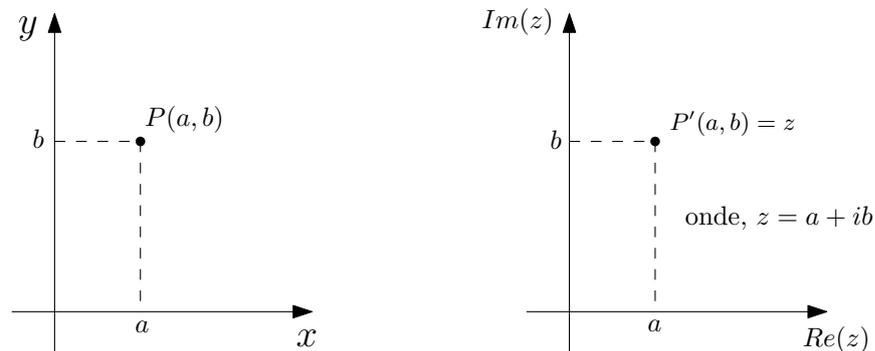
Para fazer a divisão entre dois números complexos devemos ter um certo cuidado. Seja $z = a + ib$ um número complexo, define-se $\bar{z} = a - ib$ o conjugado do número complexo z . Desta forma, para dividir $z_1 = a_1 + ib_1$ por $z_2 = a_2 + ib_2$ basta

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - b_2 a_1)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

3.2 Plano Complexo

Pela Definição 3.1 cada número complexo $z = a + ib$ está associado a um, e somente um, par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. O plano cartesiano no qual serão representados os números complexos é denominado Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss. Dessa forma, se $P'(a, b)$ pertence ao plano complexo então $a \in \text{Re}(z)$ e $b \in \text{Im}(z)$, onde $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$ representam, respectivamente, os eixos real e imaginário, Figura 17.

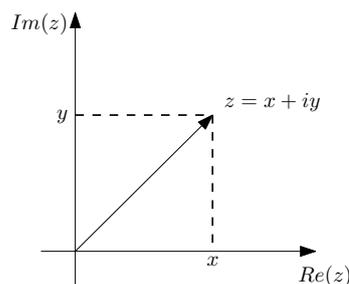
Figura 17 – A coordenada do ponto $P(a, b)$ no plano xy é associado no plano complexo ao ponto $P'(a, b)$.



Fonte: O autor, 2019.

O número complexo $z = x + iy$ pode ser visto como um vetor no plano complexo, (BROWN; CHURCHILL, 2015, p. 8 e 9), bastando tomar como ponto inicial a origem e a extremidade final o ponto (x, y) como representado na Figura 18.

Figura 18 – O número complexo z sendo representado como vetor posição.



Fonte: O autor, 2019.

Dessa forma, defini-se o módulo ou valor absoluto de z como sendo

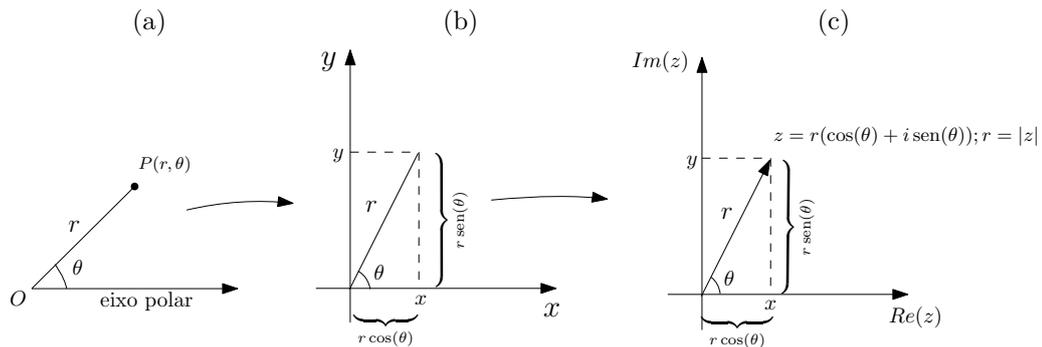
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.1)$$

Pela equação (3.1) podemos dizer que o lugar geométrico dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ é o círculo de centro na origem e raio 1. O módulo de um número complexo, $|z|$, goza das mesmas propriedades do módulo de um número real \mathbb{R} , (ZILL; SHANAHAN, 2011, p. 8 e 9).

3.2.1 Forma Polar de um Número Complexo

Antes de definir a forma polar de um número complexo, vamos definir o que são as coordenadas polares. Segundo Leithold (1994, p. 608 e 609), um sistema de coordenadas polares consiste em uma distância orientada, na medida de um ângulo, a um ponto fixo e a um semi-eixo fixo. Esse ponto fixo é chamado de origem ou polo e o semi-eixo é chamado de eixo polar, Figura 19.

Figura 19 – Representação polar de um número complexo z .



Fonte: O autor, 2019.

Considerando a representação geométrica de z , Figura 19c, θ é chamado de argumento de z , formado pelo eixo $Re(z)$ e o vetor z . O argumento de z só é definido quando $z \neq 0$, pois quando $\theta = 0$ z é um número real. Consideremos o sentido positivo o sentido anti-horário, o sentido horário será considerado o sentido negativo. O comprimento do vetor r por definição será $r = |z|$.

Tomando $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, teremos a representação polar ou trigonométrica do número complexo z dada por

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (3.2)$$

Somar e subtrair números complexos na forma polar não é muito conveniente porque somam-se funções trigonométricas de argumentos distintos. Mas o produto e o quociente são bastante úteis, porque podemos representá-los por uma única forma polar, vejamos. Sejam $z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ e $z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ dois números complexos arbitrários, o produto de $z_1 z_2$ é

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ &= |z_1| |z_2| [(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))], \end{aligned}$$

e portanto

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \quad (3.4)$$

Com raciocínio análogo ao produto temos que a divisão é dada por

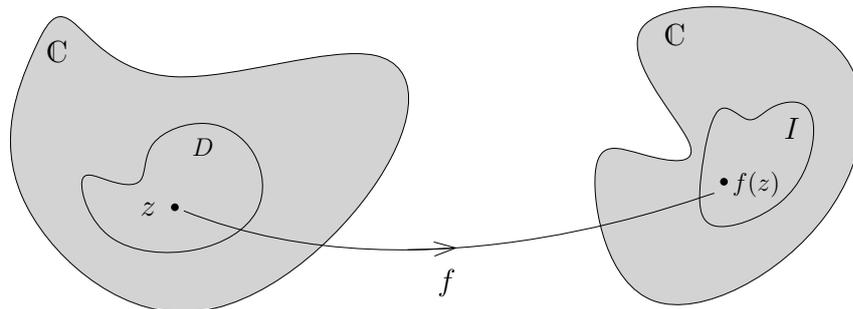
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)). \quad (3.5)$$

A generalização deste resultado, Fórmula de De Moivre, pode ser vista em Ávila (2013, p. 11) .

3.3 Funções Complexas

Para o estudo das funções complexas iremos considerar o domínio e a imagem de uma função f como subconjuntos dos números complexos \mathbb{C} . Seja f uma função definida em um conjunto $D \subset \mathbb{C}$, onde cada elemento $z \in D$ é levado por f a um único elemento $f(z)$. Ao conjunto dos elementos $f(z)$ chamamos de imagem de f , e D o domínio de f . Denotaremos o conjunto imagem de f por I . Cada função f na variável $z = x + iy$ está associada a duas funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$, em que $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$, onde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Figura 20 – $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow I \subset \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.



Fonte: O autor, 2019.

Exemplo 3.1. Se $f(z) = z^2$, então

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

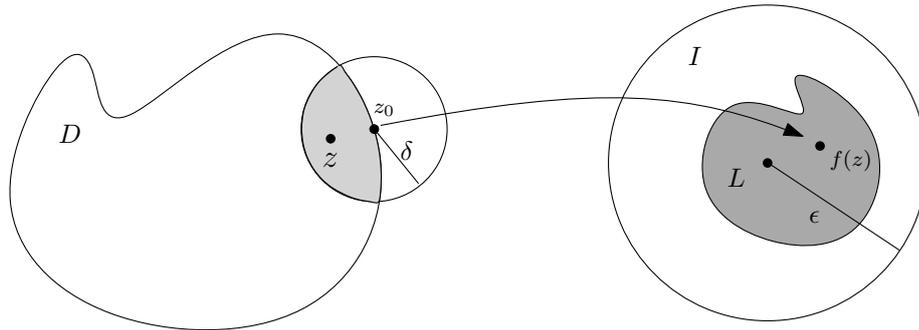
dessa forma

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad e \quad v(x, y) = 2xy.$$

3.3.1 Limite e Continuidade

O propósito de definir limite e continuidade nesta subseção está relacionado com o estudo de derivadas e integrais de funções complexas. A definição de limite de uma função complexa é semelhante ao de limite de uma função de variável real.

Figura 21 – $z \in D \cap V_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\epsilon(L)$.



Fonte: O autor, 2019.

Definição 3.2 (Limite de uma Função Complexa. (ÁVILA, 2013, p. 37)). *Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio $D \subset \mathbb{C}$ de uma função f . Diz-se que f tem limite L com z tendendo a z_0 se dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon;$$

ou ainda, de maneira equivalente:

$$z \in D \cap V_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in V_\epsilon(L),$$

sendo $V_\delta(z_0)$ uma vizinhança de z_0 , escreve-se:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

Teorema 3.1 (Unicidade do Limite). *Se um limite de uma função f existir em um ponto z_0 , ele é único.*

Demonstração. Suponha por absurdo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_1 \text{ e } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L_2, \text{ com } L_1 > L_2.$$

então dado um $\epsilon > 0$, vão existir $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$|z - z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - L_1| < \epsilon$$

e

$$|z - z_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(z) - L_2| < \epsilon.$$

Deste modo, temos que

$$L_1 - \epsilon < f(z) < L_1 + \epsilon \text{ e } L_2 - \epsilon < f(z) < L_2 + \epsilon.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\epsilon = \frac{L_1 - L_2}{2}$, temos que $|z - z_0| < \delta$ então $f(z) < L_2 + \frac{L_1 - L_2}{2}$ e $L_1 - \frac{L_1 - L_2}{2} < f(z)$. Assim, $|z - z_0| < \delta \Rightarrow \frac{L_1 + L_2}{2} < f(x) < \frac{L_1 + L_2}{2}$, o que é um absurdo. Logo, L_1 não pode ser maior que L_2 . De modo análogo verificamos que L_2 não pode ser maior que L_1 . Portanto, conclui-se que $L_1 = L_2$. ■

Definição 3.3 (Critério para Continuidade em um Ponto. (ZILL; SHANAHAN, 2011, p. 89)).
Uma função complexa f é contínua em um ponto z_0 se cada uma das três condições forem atendidas:

- a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe;
- b) f é definida em z_0 ; e
- c) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

As propriedades do limite são equivalentes as do limite de uma função de variável real e podem ser vistas em Brown e Churchill (2015, p. 48).

Teorema 3.2. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função com domínio D , e seja $L = U + iV$, com $L \in \mathbb{C}$ e $U, V \in \mathbb{R}$. Se $z_0 = x_0 + iy_0$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ se e somente se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = U \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = V.$$

Demonstração.

(\implies) Suponha que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$. Então dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ de modo que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon. \quad (3.6)$$

Fazendo $f - L = u - U + i(v - V)$ temos que

$$|u - U| \leq |f - L| \quad e \quad |v - V| \leq |f - L|.$$

Daí, segue por (3.6) que

$$|u - U| < \epsilon \quad e \quad |v - V| < \epsilon$$

o que mostra que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = U \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = V.$$

(\impliedby) Agora suponha que vale

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = U \quad e \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = V.$$

Então dados $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $|z - z_0| < \delta_1$ e $|z - z_0| < \delta_2$ implicam, respectivamente,

$$|u - U| < \epsilon_1 \quad \text{e} \quad |v - V| < \epsilon_2.$$

Mas $|f - L| = |(u - U) + i(v - V)|$. Assim, utilizando a desigualdade triangular, tomando $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que $|z - z_0| < \delta$ implica em

$$|f - L| = |(u - U) + i(v - V)| \leq |u - U| + |v - V| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon.$$

Portanto, segue da desigualdade acima que

$$|f - L| < \epsilon \quad \text{ou seja} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L.$$

■

Corolário 3.1. *Se $f(z) = u + iv$ e $z_0 = x_0 + iy_0$, a função complexa f é contínua no ponto z_0 se e somente se as duas funções reais u e v forem contínuas no ponto (x_0, y_0) .*

Demonstração.

(\implies) Suponha f seja contínua em z_0 então temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = f(x_0 + iy_0),$$

que escrevemos como $f(x_0 + iy_0) = u_0 + iv_0$. Do Teorema 3.2 segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v = v_0.$$

Portanto, u e v são contínuas em (x_0, y_0) .

(\impliedby) Suponha que u e v sejam contínuas em (x_0, y_0) , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u = u_0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v = v_0.$$

Do teorema 3.2 tem-se que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = f(z_0).$$

Portanto f é contínua em z_0 .

■

3.4 Função Analítica

Nesta seção será definida a derivada de uma função complexa e estabelecidas as relações entre as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$, bem como, seu significado geométrico. As relações entre as derivadas parciais recebe o nome de Equações de Cauchy-Riemann. As funções analíticas são protagonistas em modelagem matemática de escoamentos potenciais, pois as suas partes real e imaginária carregam informações sobre a velocidade do fluido e as trajetórias das partículas (linhas de corrente), respectivamente, como será visto no próximo capítulo.

Definição 3.4 (Derivada de uma Função em um Ponto z_0 . (ABLOWITZ; FOKAS, 2003, p. 23)).
 Seja f uma função definida numa região D contendo a vizinhança de um ponto z_0 . A derivada de f em $z = z_0$, é denotada por $f'(z_0)$ ou $\frac{df}{dz}(z_0)$, e é definida por

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

desde que o limite exista.

Uma forma alternativa da definição é tomarmos $\Delta z = z - z_0$, quando temos que

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Definição 3.5 ((ÁVILA, 2013, p. 50)). Diz-se que uma função f é analítica numa região R se ela é derivável em cada ponto de R ; f é analítica num ponto z_0 se f é analítica numa região contendo z_0 , por exemplo, numa vizinhança $V_\delta(z_0)$.

São sinônimos para função analítica os termos função holomorfa e função regular. Deve-se ter um certo cuidado para não confundir o termo analítica com diferenciabilidade. Dizer que uma função é analítica em um ponto não é o mesmo que dizer que é diferenciável em um ponto. Da definição acima, para que f seja ser analítica em z_0 é necessário que f seja derivável em todo ponto de uma vizinhança de z_0 , ou seja, analiticidade é algo que é definido em um conjunto aberto.

Exemplo 3.2. Usando a Definição 3.5 verifique se $f(z) = |z|^2$ é diferenciável em $z = 0$, em seguida conclua que $f(z) = |z|^2$ não é analítica em $z = 0$.

Da Definição 3.4 temos que

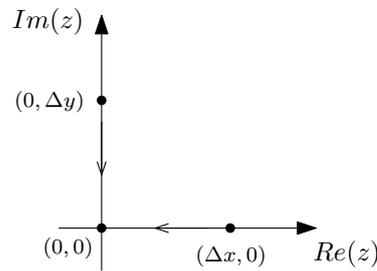
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)(\overline{z + \Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z}.$$

Como $\overline{z + \Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z}$, isso implica que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}. \quad (3.7)$$

Se o limite de (3.7) existir, Δz tenderar a origem $(0, 0)$ por qualquer caminho. Tomando $\Delta z \rightarrow (0, 0)$ pelo caminho dos pontos $(\Delta x, 0)$ e pelo caminho dos pontos $(0, \Delta y)$, onde $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$, veja Figura 22.

Figura 22 – $\Delta z \rightarrow (0, 0)$ por um caminho horizontal $(\Delta x, 0)$ e por um caminho vertical $(0, \Delta y)$.



Fonte: O autor, 2019.

Desta forma,

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + i0} = \Delta x - i0 = \Delta x + i0 = \Delta z$$

e

$$\overline{\Delta z} = \overline{0 + i\Delta y} = 0 - i\Delta y = -0 - i\Delta y = -\Delta z.$$

Agora substituindo esses resultados em (3.7) para os caminhos $(\Delta x, 0)$ e $(0, \Delta y)$. Teremos

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{z} + \Delta z + z \text{ se } \Delta z = (\Delta x, 0)$$

e

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{z} - \Delta z - z \text{ se } \Delta z = (0, \Delta y).$$

Se o limite existir ele deve ser único, Teorema 3.1, logo $\bar{z} + z = \bar{z} - z$, o que implica que $z = 0$. Assim $f'(z)$ não pode existir para $z \neq 0$, logo pela Definição 3.5 f não é analítica em $z = 0$.

Mas, em $z = 0$ a derivada (3.7) se reduz a $f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z}$. Portanto $f'(z)$ existe somente em $z = 0$ e seu valor é 0 nesse ponto.

O Exemplo 3.2 nos alerta para o cuidado de não confundir analiticidade com diferenciabilidade, pois $f(z) = |z|^2$ é diferenciável em $z = 0$ mais não é analítica nesse ponto, pois não existe uma vizinhança de $z = 0$ na qual f seja diferenciável.

3.4.1 Equações de Cauchy-Riemann

Vimos que para f ser analítica em um ponto z_0 de um domínio D ela deve ser diferenciável em uma vizinhança aberta de z_0 , o que não é simples de se verificar como mostrado no Exemplo 3.2. O teorema a seguir irá produzir um teste para identificarmos se uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um ponto $z \in D$.

Teorema 3.3 (Equações de Cauchy-Riemann). *Suponhamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja diferenciável em um ponto $z = x + iy$. Então, em z as derivadas parciais de primeira*

ordem de u e v devem satisfazer

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.8)$$

As equações (3.8) são chamadas de Equações de Cauchy-Riemann.

Demonstração. A derivada de f em z é dada por

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

com $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ e $z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$. Reescreve-se a derivada acima como

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - (u(x, y) + iv(x, y))}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (3.9)$$

Como f é diferenciável em z o limite (3.9) existe, então podemos usar a mesma estratégia usada no Exemplo 3.2, tomando dois caminhos como na Figura 22. Primeiro vamos fazer $\Delta z \rightarrow 0$ pelo caminho de pontos $(\Delta x, 0)$. Assim (3.9) fica

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x}.$$

Arrumando o numerador temos

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y) - v(x, y)]}{\Delta x}$$

por causa disso

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}. \quad (3.10)$$

Portanto

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Agora fazendo $\Delta z \rightarrow 0$ pelo caminho de pontos $(0, \Delta y)$ o limite (3.9) fica na forma

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y}.$$

Organizando o numerador temos

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[u(x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{i\Delta y},$$

donde

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}. \quad (3.12)$$

Portanto

$$f'(z) = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (3.13)$$

Pelo Teorema 3.1 as equações (3.11) e (3.13) devem ser iguais. Lembrando que dois números complexos são iguais quando suas partes real e imaginária são iguais, o que permite concluir que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

■

Com o Teorema 3.3 tem-se uma condição necessária para a existência de derivada em um ponto z . O Exemplo 3.2 é facilmente verificado usando as condições (3.8), pois usando as equação de Cauchy-Riemann na função $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ temos que $2x = 2y$ somente para o ponto $z = 0$. Portanto, pelo Teorema 3.3 $f(z) = |z|^2$ é diferenciável apenas em $z = 0$, mas não é analítica em $z = 0$.

Para obtermos uma condição de suficiência para a analiticidade de uma função complexa f precisamos de condições de continuidade sobre as derivadas parciais de f em uma vizinhança de um ponto z . O teorema a seguir amarra a condição necessária e suficiente para a analiticidade de uma função complexa.

Teorema 3.4. *Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais com derivadas parciais contínuas numa região $D \subset \mathbb{C}$. Então, uma condição necessária e suficiente para que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica em D é que as equações de Cauchy-Riemann estejam aí satisfeitas.*

Demonstração. A condição necessária esta estabelecida pelo Teorema 3.3. A demonstração da condição de suficiência é longa e foge do escopo deste trabalho, entretanto, ela pode ser vista em Fernandez e Jr. (2014, p. 58, 59 e 60). ■

3.4.2 Significado Geométrico das Equações de Cauchy-Riemann

Teorema 3.5. *Se $f(z) = u(x, y)i + v(x, y)$ é analítica numa região $D \subset \mathbb{C}$, então as curvas das famílias*

$$u(x, y) = c_1 \text{ e } v(x, y) = c_2 \tag{3.14}$$

se cruzam em um ângulo reto em todo ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ onde $f'(z_0) \neq 0$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Demonstração. Derivando (3.14) em relação a x obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

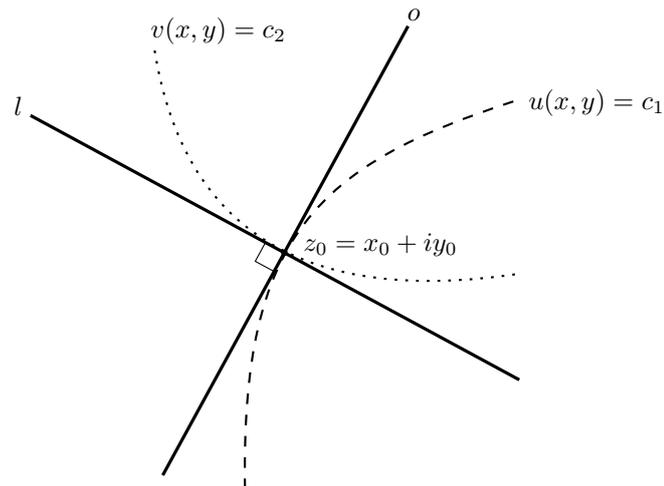
Resolvendo essas equações em $\frac{dy}{dx}$ segue que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y} \tag{3.15}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}. \quad (3.16)$$

As equações (3.15) e (3.16) são as inclinações das retas tangentes às curvas $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$ no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, respectivamente, Figura 23.

Figura 23 – As retas tangentes l e o são perpendiculares em z_0 .



Fonte: O autor, 2019.

Por hipótese f é analítica, logo valem as Equações de Cauchy-Riemann. Portanto

$$\left(-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right)\left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = -1.$$

■

As equações $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias reais, são denominadas curvas de nível de u e v , respectivamente.

Definição 3.6 (Funções Harmônicas. (BROWN; CHURCHILL, 2015, p. 77)). *Uma função real f de duas variáveis reais x e y é harmônica em um dado domínio do plano xy , se as derivadas parciais de segunda ordem de f existirem, forem contínuas em cada ponto do domínio e satisfizerem a equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (3.17)$$

conhecida como Equação de Laplace.

Teorema 3.6. *Se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um domínio D , então as funções componentes u e v são harmônicas em D .*

Demonstração. Como f é analítica em D então ela é analítica em todos os pontos $z \in D$, assim pelo Corolário C.1 do Apêndice C, u e v tem derivada de todas as ordens em D . Derivando os dois lados de (3.8) em relação a x e y , respectivamente, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \quad (3.18)$$

Como u e v são, pelo menos, duas vezes diferenciável segue que $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$. Somando as duas equações em (3.18) temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$\nabla^2 u = 0.$$

O que mostra que $u(x, y)$ é harmônica. Para mostrar que $v(x, y)$ é harmônica, basta derivar os dois lados de (3.8) em relação a y e x , respectivamente. Agora, seguindo de forma análoga aos passos anteriores chegaremos a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$\nabla^2 v = 0.$$

■

3.5 Funções Exponencial e Logarítmica Complexas

3.5.1 Função Exponencial Complexa

Antes de expressar z como uma exponencial, pensamos nas soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ em que a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e y é uma função de $t \in \mathbb{R}$. A equação característica associada a esta equação é $ar^2 + br + c = 0$, se $b^2 - 4ac < 0$ a família de soluções para a equação diferencial será $y(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t}$, como c_1 e c_2 números reais, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e z_2 é o conjugado de z_1 , (BOYCE; DIPRIMA, 2012, p. 123 e 124). Observe que a solução da equação apresentou termos com potência complexa, assim queremos encontrar um forma de representar e^{z_1} e e^{z_2} em função do argumento θ e do raio r . Consideremos três importantes séries de MacLaurin, (LEITHOLD, 1994, p. 775), com $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots; \quad (3.19)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots; \quad (3.20)$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (3.21)$$

Tomando o desenvolvimento de (3.19) para e^{iy} temos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + iy - \frac{(y)^2}{2!} - i \frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^4}{4!} + i \frac{(y)^5}{5!} - \dots \end{aligned}$$

A série de McLaurin de e^{iy} , com $y \in \mathbb{R}$ é absolutamente convergente, então a série que reinterpreta a reordenação dos seus termos também é absolutamente convergente e ambas são iguais, (GUIDORIZZI, 2012, p. 83). Assim, temos que

$$e^{iy} = \left[1 - \frac{(y)^2}{2!} + \frac{(y)^4}{4!} - \frac{(y)^6}{6!} + \dots \right] + i \left[y - \frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^5}{5!} - \frac{(y)^7}{7!} + \dots \right],$$

e de (3.20) e (3.21), concluímos que

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad (\text{Equação de Euler}). \quad (3.23)$$

Agora, podemos reescrever a forma trigonométrica de um número complexo utilizando a Equação de Euler. Isso nos permite escrever z como sendo

$$z = r e^{i\theta}. \quad (3.24)$$

Definição 3.7 (Função Exponencial Complexa). *A função e^z é definida por*

$$e^z = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y), \quad \text{com } z = x + iy \quad (3.25)$$

e é denominada função exponencial complexa.

A função e^z assim definida é analítica em seu domínio, pois $u(x, y) = e^x \cos(y)$ e $v(x, y) = e^x \sin(y)$ são contínuas e são de classe C^1 , ou seja, as derivadas de primeira ordem existem e são contínuas. E mais, satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Portanto e^z é analítica em todo os pontos do seu domínio, ou seja, é analítica em todo o plano. Assim, podemos chamar e^z de função inteira e

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^z.$$

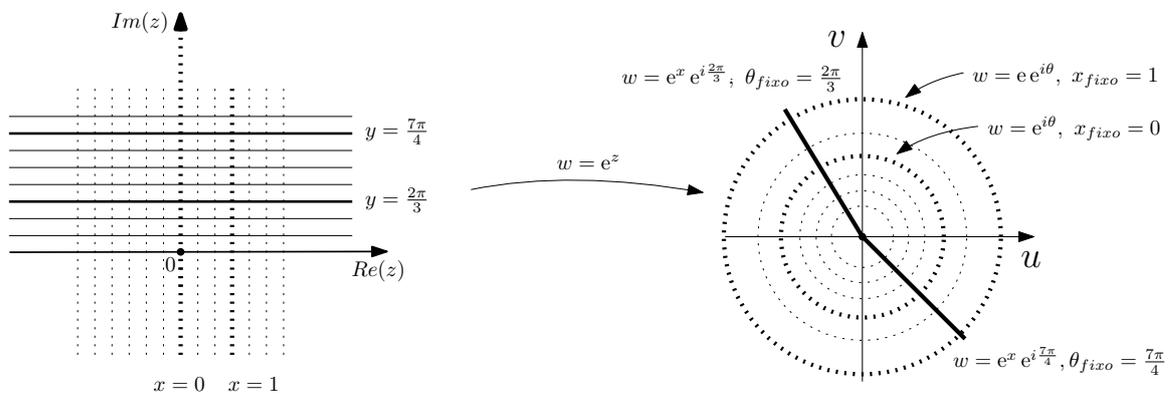
Uma característica importante de e^z é que ela leva, por uma transformação conforme, retas em círculos.

Para ilustrar esse fato considere $w(z) = e^z$ escrito na forma polar

$$w(z) = e^x e^{iy}.$$

Observando a Figura 24 temos que mantendo y constante e fazendo variar o valor de x as retas horizontais (linhas contínuas) são levadas em semirretas, isto é, a imagem da função exponencial, para esse caso, são semirretas e^x centrados na origem. Por outro lado, para x constante (linhas tracejadas) e $0 < y < 2\pi$ a função w descreverá um círculo de raio e^x centrado na origem, em particular se $x = 0$, o círculo será de raio unitário.

Figura 24 – Pela transformação $w(z) = e^z$, retas são levadas em círculos quando x constante e y variando e retas são levadas em raios quando y é constante e x variando.



Fonte: O autor, 2019.

Observa-se que entre as funções exponenciais reais e complexas existe uma diferença notável que se dá pelo fato da função exponencial complexa ser periódica de período $2\pi i$.

3.5.2 Função Logarítmica Complexa

Utilizando a equação (3.24) podemos definir o logaritmo de um número complexo como sendo

$$\ln(z) = \ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta, z \neq 0.$$

A parte real de $\ln(z)$ é denotada por $\ln(r)$, lembrando que $r = |z| > 0$.

Considere $e^w = z$ em que $w = u + iv$ e $z = x + iy$, tomando z na forma polar temos

$$e^u e^{iv} = r e^{i\theta}, \text{ com } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Para que dois números complexos sejam iguais suas respectivas partes real e imaginária devem ser iguais, logo

$$e^u = r \text{ e } e^{iv} = e^{i\theta}$$

o que equivale a

$$e^u = r \text{ e } v = \theta + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Como $e^u = r$ temos que $u = \ln r$, assim

$$w = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

logo

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

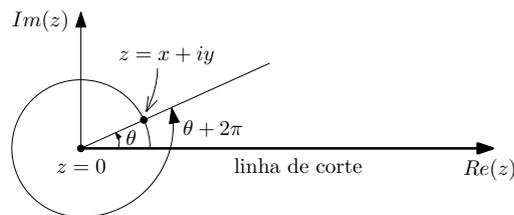
Definição 3.8 (Função Logarítmica Complexa). *A função multivalente $\ln z$, definida por*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z)$$

é denominada função logarítmica complexa.

O termo multivalente vem do fato de que podemos atribuir ao $\ln z$ vários valores distintos dependendo do $\arg(z)$ usado.

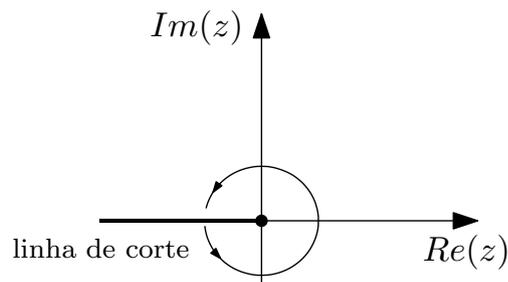
Figura 25 – Um ramo do logaritmo $\ln z$.



Fonte: O autor, 2019.

Quando $k = 0$ obtemos o que chamamos de *valor principal* ou *ramo principal* do logaritmo. O ponto $z = 0$ é chamado de *ponto de ramificação* do logaritmo, pois quando os pontos $z = x + iy$ descreve um círculo de centro na origem e, ao voltar ao ponto inicial, a função $\ln z$ volta aumentada de $2\pi i$. A *linha de corte* é uma semirreta partindo do ponto de ramificação, e indica a variação do argumento. Na Figura 25 a linha de corte é representada pelo eixo real positivo, com $0 < \theta < 2\pi$. Se tivéssemos escolhido a variação $-\pi < \theta < \pi$ a linha de corte seria a semirreta do eixo real negativo, Figura 26.

Figura 26 – Linha de corte com $-\pi < \arg(z) < \pi$.



Fonte: O autor, 2019.

Corolário 3.2. *Um ramo do logaritmo é analítico e sua derivada é dada por $\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}$.*

Demonstração. Tomando o ramo principal de $\ln z$ temos

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad \text{com } r > 0, 0 < \theta < 2\pi. \quad (3.26)$$

Temos que $u(r, \theta) = \ln r$ e $v(r, \theta) = \theta$. O $\ln z$ assim definido (no ramo principal) é contínuo em seu domínio, u e v são de classe C^1 e satisfazem a forma polar das equações de Cauchy-Riemann, veja as equações (A.7) do Apêndice A. Logo, pelo Teorema 3.4, para o ramo escolhido $\ln z$ é analítica.

Para o restante da demonstração vamos usar a analiticidade da função logarítmica para o ramo escolhido.

Primeiro, reescrevemos as equações em (A.7) utilizando as expressões de u_θ e v_θ dadas, respectivamente, em (A.3) e (A.6) obtendo

$$\begin{cases} u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \\ v_r = -u_y \cos(\theta) + u_x \sin(\theta). \end{cases}$$

Assim encontramos u_x e v_x em função de u_r e v_r , respectivamente.

Para resolver o sistema devemos multiplicar a segunda equação por i e somar as equações. Assim,

$$u_r + iv_r = u_x (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) + iu_y (\operatorname{sen}(\theta) - i \operatorname{cos}(\theta)).$$

Segue que

$$u_r + iv_r = (u_x + iv_x) e^{i\theta}. \quad (3.27)$$

Reescrevemos a equação (3.11) como o resultado obtido em (3.27) obtemos

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r).$$

Assim, para a função logarítmica temos que

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r).$$

Como $u(r, \theta) = \ln r$ e $v(r, \theta) = i\theta$ temos que $u_r = \frac{1}{r}$ e $v_r = 0$, assim

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = e^{-i\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{re^{i\theta}}.$$

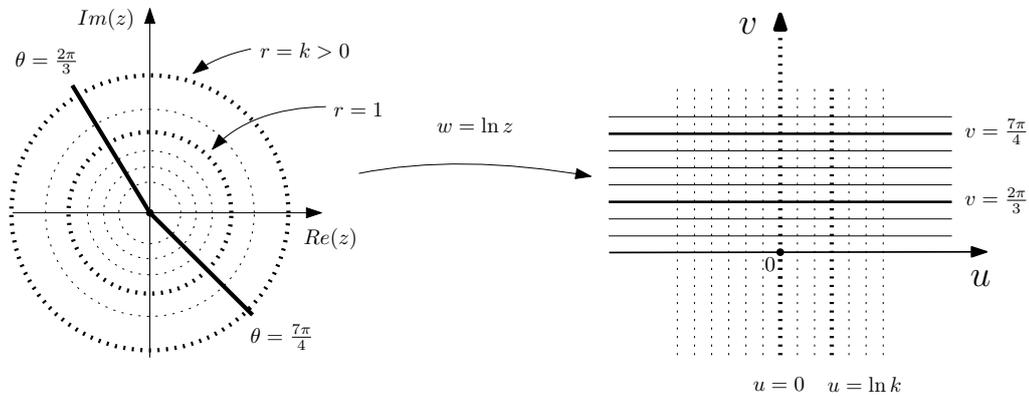
Portanto

$$\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}, \quad \text{com } r > 0 \text{ e } 0 < \theta < 2\pi. \quad (3.28)$$

■

A transformação conforme $w(z) = \ln z$ leva, com θ constante, semirretas a retas v constantes no plano w (linhas contínuas) e, tomando r constante, leva círculos em retas u constante (linhas tracejadas), Figura 27.

Figura 27 – A transformação conforme $w(z) = \ln z$ leva círculos e raios a retas.



Fonte: O autor, 2019.

3.6 Integrais Complexas

A teoria de Integração Complexa não é construída como usualmente é feito em integração de funções reais. Segundo Nachbin e Zárate (2007, p. 24), em análise complexa as integrais são em geral definidas sobre arcos diferenciáveis, ou diferenciáveis por partes. À vista disso, antes de definir uma integral complexa iremos definir a parametrização de uma curva C no plano complexo.

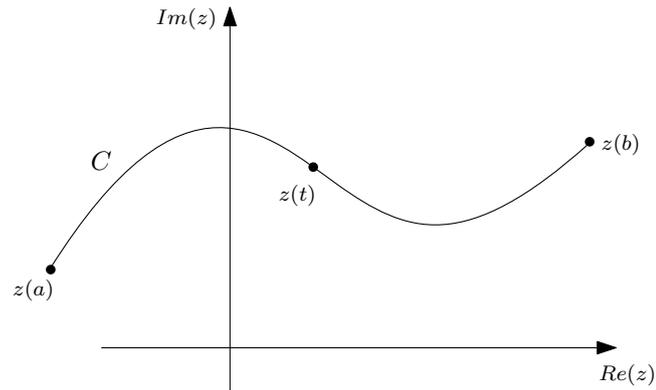
Definição 3.9. *Uma curva C definida pelos pontos $z = x + iy$ do plano complexo que é descrita pela função*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b \quad (3.29)$$

é denominada Parametrização de C .

Uma exemplo dessa parametrização pode ser vista na Figura 28.

Figura 28 – Curva C definida por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.



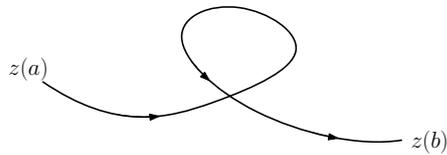
Fonte: O autor, 2019.

Sobre a curva C valem as seguintes observações:

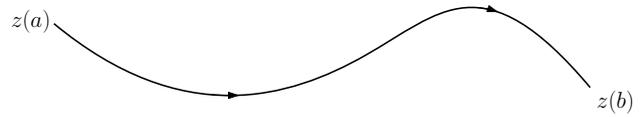
- a) C é uma curva suave se $z'(t)$ for contínua em um intervalo $[a, b]$, com $z'(t) \neq 0$ em (a, b) .
- b) C é uma curva suave por partes se C é formada por arcos de curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n unidas pelas extremidades, Figura 29d.
- c) C é uma curva suave aberta e simples se não tiver auto intersecção (Arco de Jordan), Figura 29b.
- d) C é uma curva suave fechada e simples se não tem auto intersecção (Curva de Jordan), Figura 29c.

Figura 29 – Tipos de Curvas.

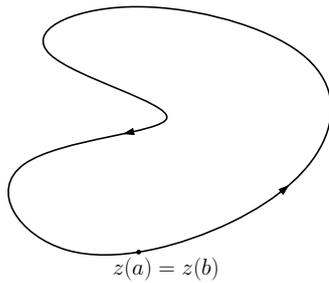
(a) Curva suave e não simples, pois $z(t_1) = z(t_2)$ com $t_1 \neq t_2$



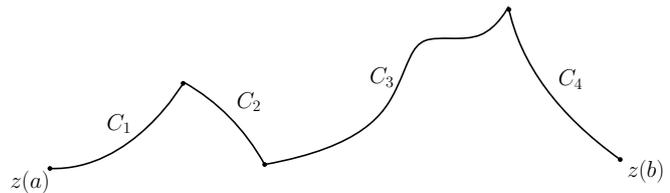
(b) Curva suave e simples (Arco de Jordan)



(c) Curva suave e fechada simples (Curva de Jordan)



(d) Curva suave por partes



Fonte: O autor, 2019.

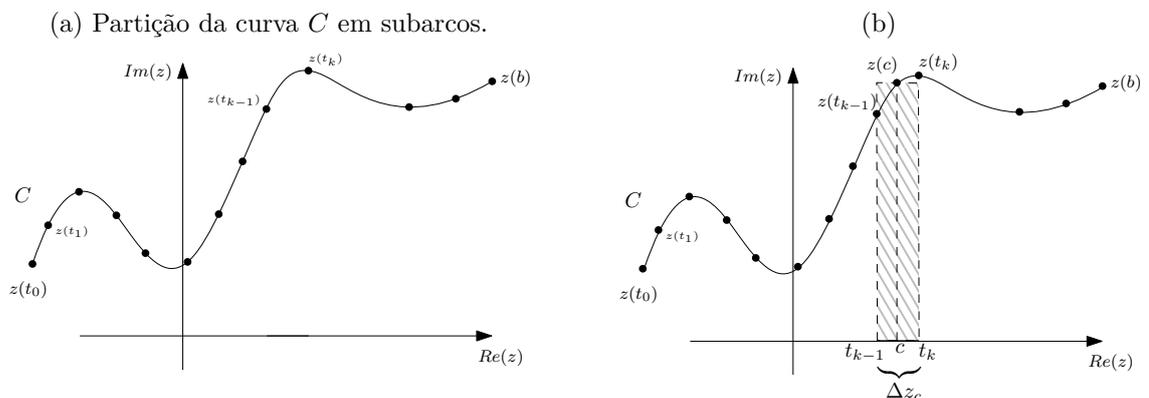
Daqui em diante, a curva C que será adotada é suave por partes. A orientação positiva para um caminho fechado é definida como aquela que se "você andar" sobre a curva seu braço esquerdo estará na região interior a C , veja Figura 29c. Um contorno é um caminho fechado formado por um número finito de curvas suaves.

Para construir a definição de integral ao longo de uma curva C , suave por partes, considere $z(t) = u(t) + iv(t)$ uma parametrização de C , com $t \in [a, b]$ e seja φ uma partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Tem-se que φ induz em C uma partição em n subarcos, Figura 30a.

Figura 30



Fonte: O autor, 2019.

Seja f uma função de variável complexa definida em todos os pontos de C . Para cada arco de C , determinado por t_{k-1} e t_k , podemos tomar um valor c , $t_{k-1} \leq c \leq t_k$, de maneira que podemos construir produtos da forma $f(z(c))\Delta z_c$, onde $\Delta z_c = t_k - t_{k-1}$, Figura 30b. Somando todos esses produtos,

$$\sum_{k=1}^n f(z(c))\Delta z_c,$$

e considerando $\|\varphi\| = \text{máx}\{\Delta z_k\}$ dizemos que f é integrável em C se o limite

$$\lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z(c))\Delta z_c$$

existir .

Definição 3.10 (Integral Complexa. (ZILL; SHANAHAN, 2011, p. 185)). *A integral complexa de uma função f , contínua por partes, ao longo de C é*

$$\int_C f(z) dz = \lim_{\|\varphi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(z(c))\Delta z_c. \quad (3.30)$$

Da Definição 3.10 temos que

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u + iv)(dx + idy),$$

e então

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (3.31)$$

Isso nos mostra que as partes real e imaginária da integral (3.30) são integrais de linha de funções reais. Tomando $z(t) = x(t) + iy(t)$, com $a \leq t \leq b$, uma equação paramétrica de C , com $dx = x'(t)dt$ e $dy = y'(t)dt$ e substituindo essa expressão em (3.31) temos

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b [ux'(t) - vy'(t)] dt + i \int_a^b [uy'(t) + vx'(t)] dt.$$

Definição 3.11 ((ABLOWITZ; FOKAS, 2003, p. 72)). *A integral de contorno de uma função contínua por partes em uma curva C , com $a \leq t \leq b$, é definida por*

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt. \quad (3.32)$$

As propriedades da integral (3.32) são as mesmas das integrais de linha de funções reais e podem ser vistas na seção 6.1 de Guidorizzi (2013). Desta forma, calcular (3.32) onde C é uma curva como a da Figura 29d é fazer

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(z) dz \\ &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz. \end{aligned}$$

Teorema 3.7 (Teorema de Cauchy). *Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D e seja f' contínua em D . Então, para todo contorno fechado simples C em D*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Usaremos o Teorema de Green B.1, na demonstração desse teorema. Como f é analítica em D e f' é contínua em D então as partes real e imaginária de f são contínuas em D e suas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em D . Assim, vale a forma (3.31),

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy.$$

Utilizando o Teorema de Green, temos

$$\oint_C f(z) dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy.$$

Como f é analítica em D valem as equações de Cauchy-Riemann, (3.8), em cada ponto de D . Portanto

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

■

Sem a condição da continuidade de f' em D ainda temos o resultado.

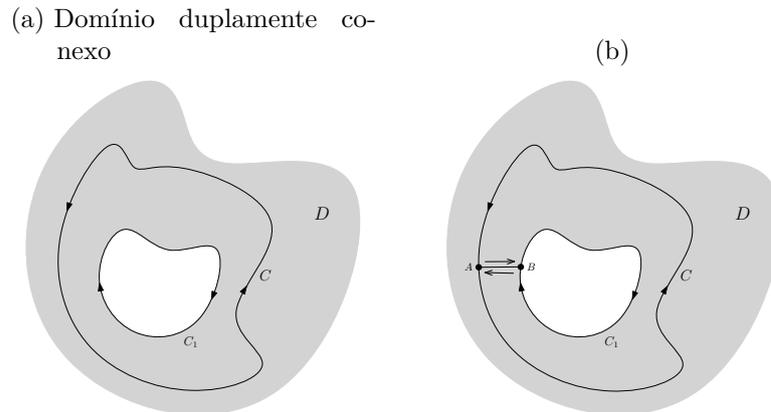
Teorema 3.8 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Seja f uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D . Então, para todo contorno fechado simples C em D*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema é um pouco mais elaborada e sua demonstração pode ser vista na seção 1 do capítulo 4 de Neto (2012). ■

Agora aplicaremos o Teorema 3.8 a uma região D limitada por uma curva C , mas que contenha pelo menos um "furo" no seu interior. A esse tipo de domínio chamamos de domínio multiplamente conexo, Figura 31a.

Figura 31 – Tipo de domínio multiplamente conexo.



Fonte: O autor, 2019.

Seja D uma região duplamente conexa onde C_1 é o contorno da região que representa o "furo" e C a curva que enlaça C_1 , com $C_1 \cap C = \emptyset$, Figura 31a. Agora, seja AB um corte transversal de modo que $C \cap AB$ seja A e $C_1 \cap AB$ seja B , como na Figura 31b. A região delimitada pelas curvas C e C_1 é simplesmente conexa. Supondo f nas condições do Teorema 3.8, podemos escrever a integral sobre o caminho $C \cup AB \cup -C_1 \cup -AB$ como sendo

$$\oint_{C \cup AB \cup -C_1 \cup -AB} f(z) dz = \oint_C f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{-AB} f(z) dz + \oint_{-C_1} f(z) dz = 0. \quad (3.34)$$

Portanto

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz.$$

Segundo Ablowitz e Fokas (2003, p. 76), o último resultado é denominado deformação de contorno, pois C foi deformado em C_1 , ou seja, C_1 é uma deformação contínua de C . O processo de fazer cortes transversais e deformações do contorno irá permitir lidar com domínios multiplamente conexos.

Corolário 3.3. *Sejam f uma função definida por $f(z) = \frac{\eta}{(z - z_0)^n}$, η constante real, e C uma curva suave fechada em um domínio $D - \{z_0\}$. Suponha que z_0 está no interior da região em D delimitada por C . Deste modo,*

$$\oint_C \frac{\eta}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\eta\pi i, & \text{se } n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. A função f assim definida é analítica em $D - \{z_0\}$. Seja C_1 um círculo de raio r centrado em z_0 de tal forma que $C_1 \cap C = \emptyset$. Procedendo como feito em (3.34),

Figura 31b, teremos

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz.$$

Fazendo a mudança de variável $z - z_0 = r e^{i\theta}$ temos $dz = i e^{i\theta} r d\theta$ e substituindo a expressão de $f(z)$ em $\oint_{C_1} f(z) dz$ temos

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{\eta}{(z - z_0)^n} dz &= \eta \int_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta} r}{r^n e^{i\theta n}} d\theta \\ &= i\eta \int_0^{2\pi} r^{-n+1} e^{i\theta(-n+1)} d\theta. \end{aligned}$$

Assim, para $n = 1$

$$i\eta \int_0^{2\pi} d\theta = 2\eta\pi i$$

e, para $n \neq 1$

$$\begin{aligned} i\eta \int_0^{2\pi} r^{-n+1} e^{i\theta(-n+1)} d\theta &= i\eta \int_0^{2\pi} r^{-n+1} (\cos(\theta(-n+1)) + i \operatorname{sen}(\theta(-n+1))) d\theta \\ &= i\eta r^{-n+1} \int_0^{2\pi} \cos(\theta(-n+1)) + i \operatorname{sen}(\theta(-n+1)) d\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\oint_C \frac{\eta}{(z - z_0)^n} dz = i\eta \int_0^{2\pi} r^{-n+1} e^{i\theta(-n+1)} d\theta = \begin{cases} 2\eta\pi i, & \text{se } n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}.$$

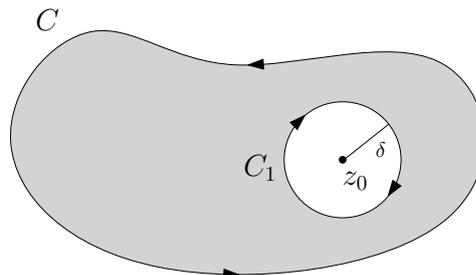
■

Teorema 3.9 (Integral de Cauchy). *Seja f uma função analítica nos pontos interiores e em cada ponto de uma caminho fechado simples C , orientado positivamente. Se z_0 for um ponto interior qualquer de C , então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.37)$$

Demonstração. Seja C_1 a circunferência de centro z_0 e raio δ , $|z - z_0| = \delta$, interior a C , tal que $C_1 \cap C = \emptyset$, Figura 32.

Figura 32



Fonte: O autor, 2019.

Como $\frac{f(z)}{z - z_0}$ é analítica entre os caminhos C e C_1 , segue do Teorema 3.8 que C pode ser deformada em C_1 , de maneira que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.38)$$

Tomando $f(z) = f(z_0) + f(z) - f(z_0)$ e substituindo em (3.38) teremos

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (3.39)$$

Pelo Corolário 3.3

$$\oint_{C_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i.$$

Portanto a integral (3.39) é dada por

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (3.40)$$

Por hipótese f é analítica em C , logo contínua em z_0 . Portanto dado um $\epsilon > 0$ podemos tomar $|z - z_0| = \delta$, tão pequeno quanto se queira, de modo que acarrete $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Nessas condições vale a desigualdade

$$\left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \oint_{C_1} \frac{\overbrace{|f(z) - f(z_0)|}^{< \epsilon}}{\underbrace{|z - z_0|}_{= \delta}} |dz| < \frac{\epsilon}{\delta} \underbrace{\oint_{C_1} |dz|}_{= 2\pi\delta} = 2\pi\epsilon,$$

(ZILL; SHANAHAN, 2011, p. 186).

Assim, a integral

$$\oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \rightarrow 0$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$. Onde, de (3.34), podemos concluir que

$$\oint_{C_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0)2\pi i.$$

Portanto, usando a equação (3.38) conclui-se que vale a equação (3.37). ■

3.7 Função Harmônica Conjugada

Vimos no Teorema 3.6, que se f for analítica em $D \subset \mathbb{C}$ então as funções u e v são harmônicas em D e satisfazem a equação de Lapalce.

Definição 3.12. *Suponha que as duas funções u e v sejam harmônicas em um domínio D e que as suas derivadas de primeira ordem cumpram as condições de equações de Cauchy-Riemann, (3.8), em D . Deste modo, dizemos que v é uma função harmônica conjugada de u .*

Teorema 3.10. *Uma função $f = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em um domínio D se, e somente se, v é uma harmônica conjugada de u .*

Demonstração.

(\implies) Se f for analítica em D então, de acordo com o Teorema 3.6, as funções u e v são harmônicas em D . Além disso, f cumpre as condições de Cauchy-Riemann em D , logo v é conjugada harmônica de u .

(\impliedby) Agora se v é conjugada harmônica de u em D então u e v são harmônicas em D e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, logo pelo Teorema 3.4 f é analítica em D . ■

Teorema 3.11. *Se uma função harmônica u estiver definida em um domínio simplesmente conexo D , então existe uma harmônica conjugada v em D .*

Demonstração. Para demonstrar este teorema precisamos recordar o assunto de integrais de linha que são independentes do caminho. Suponha que as componentes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ de um campo vetorial sejam de classe C^1 em um domínio simplesmente conexo D com $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ($M_y = N_x$), então existe uma função h tal que

$$h_x = M(x, y) \quad \text{e} \quad h_y = N(x, y), \quad (3.41)$$

(GUIDORIZZI, 2013, p. 185). Consequentemente, se $C \subset D$ é uma curva suave por partes, então a integral

$$\int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

é independente da curva C , (GUIDORIZZI, 2013, p. 173). Deste modo, podemos definir uma função

$$h(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(k, s)dk + N(k, s)ds, \quad (3.42)$$

em que as suas derivadas parciais são as de (3.41), (PINTO; MORGADO, 2000, p. 237).

A função u é harmônica, portanto satisfaz a equação de Laplace,

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

em cada ponto de D , e as derivadas de segunda ordem são contínuas em D , logo as de primeira ordem também são contínuas em D . Assim, tomando uma função $v(x, y)$, como em (3.42), e reescrevendo a equação de Laplace, usando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos

$$(-u_y)_y = (u_x)_x$$

onde em cada ponto em D

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_s(k, s)dk + u_k(k, s)ds. \quad (3.43)$$

Procedendo como em (3.41) obteremos

$$v_x = -u_y \quad \text{e} \quad v_y = u_x. \quad (3.44)$$

Mas essas são as equações de Cauchy-Riemann. Logo como u é harmônica segue que as derivadas parciais de primeira ordem de v são contínuas. Portanto a função definida por $f = u + iv$ é analítica em D e, pelo Teorema 3.10, temos que v é uma função harmônica conjugada de u . ■

Vale observar que v assim construída não é a única harmônica conjugada de u , pois numa forma geral a harmônica conjugada é da forma $v(x, y) + K$. Para este trabalho adotaremos $K = 0$.

4 TEORIA CLÁSSICA DO AEROFÓLIO

Nos capítulos anteriores falamos de duas teorias: a de Mecânica do Fluidos e a de Análise Complexa. A princípio, foram escritos de modo disjuncto e independentes. Entretanto, no presente capítulo, serão apresentadas as funções complexas analíticas como ferramenta de modelagem matemática em escoamentos potenciais, com o intuito de construir uma função complexa que modele o escoamento em torno do aerofólio de Joukowski.

Para entender essa modelagem construiremos as funções de corrente e potencial, respectivamente, com base nas hipóteses de incompressibilidade e irrotacionalidade do escoamento. A função complexa cuja parte real é a função potencial e a imaginária a função de corrente é chamada de função potencial complexa. A partir do Teorema do Círculo será construído um potencial complexo que irá possibilitar descrever o escoamento em torno do cilindro. Isso nos ajudará a extrair informações importantes sobre escoamento.

O escoamento entre linhas de corrente irá nos ajudar a entender a existência da força de sustentação, para isso será usado a equação de Bernoulli. A força de sustentação será descrita pelos Teoremas de Blasius e Kutta-Joukowski.

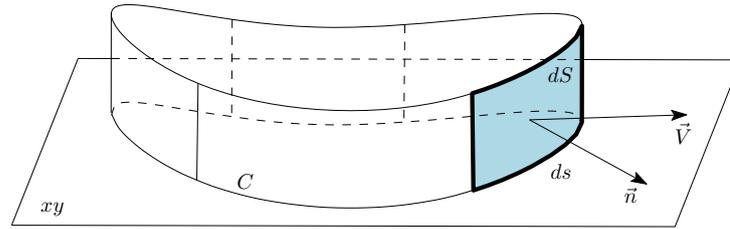
Inicialmente o foco estará no estudo do cilindro, porque nele estudaremos a circulação, o comportamento das linhas de corrente e a força de sustentação. Entretanto, a transformação conforme nos dará um suporte para garantir, com o uso de uma transformação adequada, que tudo que é feito no cilindro pode ser levado para o aerofólio. Essa transformação é chamada Transformação de Joukowski, em homenagem ao cientista russo Nikolai Joukowski (1847-1921).

4.1 Escoamento Potencial

4.1.1 Função de Corrente

Considere \vec{V} o campo de velocidades de um fluido, sob as hipóteses adotadas na seção 2.1, definido em um domínio D do \mathbb{R}^2 , com componentes $M(x, y)$ e $N(x, y)$, funções do \mathbb{R}^2 e de classe C^1 , de modo que $\vec{V}(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$. Seja C uma curva fechada simples, definida, junto com seus pontos interiores em D . Considere uma superfície cilíndrica fechada S , de altura 1, cuja interseção com o plano xy seja C , tal que cada seguimento erguido de C seja perpendicular ao plano xy . Com S assim construída, o elemento de superfície dS condiz com o elemento de arco da curva C ds , ou seja, $dS = ds$, Figura 33.

Figura 33 – Escoamento através do elemento de superfície dS .



Fonte: O autor, 2019.

Seja R a região interior a curva C . Com o uso do Teorema da Divergência no plano, o escoamento de massa, ψ , através de cada elemento dS é dado por

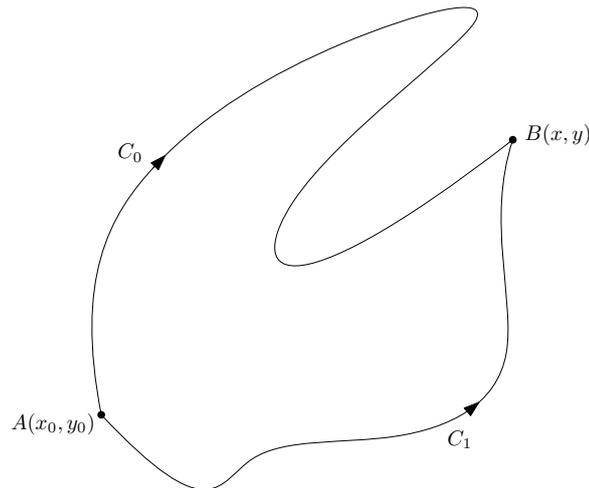
$$\psi = \oint_C \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R \rho \operatorname{div}(\vec{V}) \, dA.$$

Pela hipótese do escoamento incompressível segue que a Equação de Conservação de Massa é simplificada a $\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$, deste modo,

$$\psi = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = 0. \quad (4.1)$$

Esse resultado expressa que devido a conservação de massa, para o caso do escoamento incompressível, o escoamento de massa em um contorno fechado C é zero, isto é, não depende do contorno. Com efeito, considere duas curvas distintas C_0 e C_1 , exceto pelos pontos A e B , suaves por partes, como mostra a Figura 34.

Figura 34 – Independência do caminho entre as curvas C_1 e C_0 .



Fonte: O autor, 2019.

Seja C a curva formada por $C_1 \cup -C_0$ fechada e orientada positivamente. A curva C , assim construída, resultará no escoamento ψ através de C igual a

$$\oint_C \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \iint_R \rho \operatorname{div}(\vec{V}) \, dA = 0,$$

em que R é a região interior a C . Rescrevendo a integral do lado esquerdo obtemos

$$\oint_C \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{C_1} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \, ds + \int_{-C_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_2 \, ds,$$

e onde conclui-se que

$$\int_{C_1} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \, ds = \int_{C_0} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_2 \, ds.$$

Desta forma, o escoamento de massa não depende da curva, depende apenas dos pontos A e B .

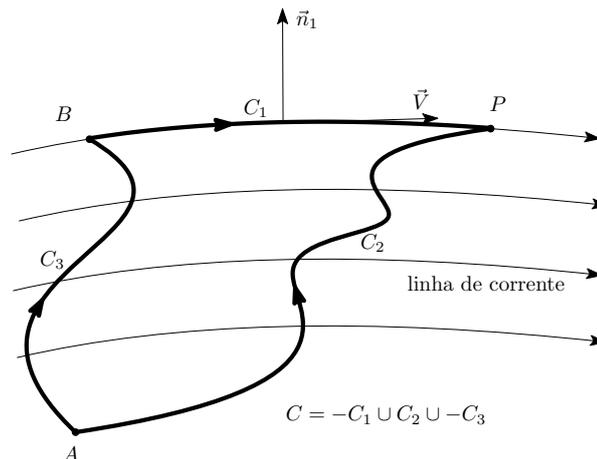
Assim, quando fixamos o ponto $A(x_0, y_0)$ e fizermos o ponto $B(x, y)$ variar no escoamento, com o cuidado de que a curva que une os dois pontos esteja contida no domínio de \vec{V} , ψ passa a ser uma função que pode ser dada por

$$\psi(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds + \psi_0 = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} M dy - N dx + \psi_0. \quad (4.2)$$

A função (4.2) é denominada por Ávila (2013, p. 211) como sendo uma Função de Corrente, cujas curvas de nível descrevem as trajetórias das partículas em um escoamento bidimensional. Por causa da hipótese de escoamento incompressível essas trajetórias são chamadas de linhas de corrente.

A função ψ assim construída preserva a conservação de massa e permanece constante ao longo de uma linha de corrente. De fato, seja A um ponto fixo no escoamento e P um ponto que pertence a linha de corrente que contém o ponto B . Considere C_1 o caminho que une os pontos B e P , C_2 o que une A até P e C_3 o que une A até B , Figura 35.

Figura 35 – ψ é constante ao longo de uma linha de corrente.



Fonte: O autor, 2019.

A curva C formada por $-C_1 \cup C_2 \cup -C_3$ é fechada e suave por partes, assim por (4.1) temos que

$$\psi = \oint_C \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{-C_1} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \, ds + \int_{C_2} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_2 \, ds + \int_{-C_3} \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_3 \, ds = 0,$$

o que é verificado pela Equação de Conservação de Massa sob a hipótese de escoamento incompressível. Agora, para verificarmos que ψ é constante ao longo de uma linha de corrente devemos olhar para o escoamento $\psi(P)$. Esse escoamento é dado por

$$\psi(P) - \psi(A) = \int_A^P \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, ds = \underbrace{\int_A^B \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_3 \, ds}_{\psi(B) - \psi(A)} + \int_B^P \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \, ds,$$

ou seja,

$$\psi(P) - \psi(A) = \psi(B) - \psi(A) + \int_B^P \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \, ds.$$

Entretanto,

$$\int_B^P \rho \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \, ds = 0,$$

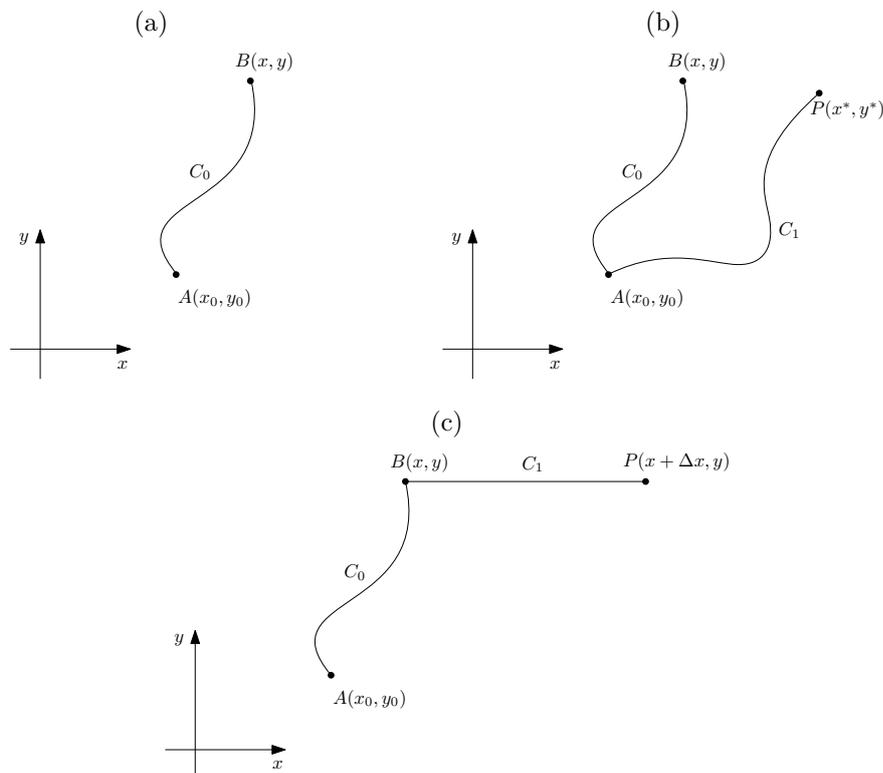
porque pela definição de linha de corrente a velocidade \vec{V} é tangente a curva C_1 , logo $\vec{V} \cdot \vec{n}_1 = 0$. Portanto,

$$\psi(P) = \psi(B),$$

isto é, a função ψ é constante ao longo de uma linha de corrente.

Com os resultados apresentados anteriormente podemos verificar como as componentes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ do campo de velocidades se relacionam com a função ψ . Para isso, considere uma curva C_0 que liga os pontos $A(x_0, y_0)$ e $B(x, y)$, Figura 36a.

Figura 36



Fonte: O autor, 2019.

Da função (4.2) temos que

$$\psi(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} (M, N) \cdot (dy, -dx) + \psi(x_0, y_0) = \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Mdy - Ndx + \psi(x_0, y_0). \quad (4.3)$$

Seja $P(x^*, y^*)$ um ponto genérico do escoamento e C_1 o caminho que une os pontos $A(x_0, y_0)$ e $P(x^*, y^*)$, Figura 36b, deste modo,

$$\psi(x^*, y^*) = \int_{A(x_0, y_0)}^{P(x^*, y^*)} (M, N) \cdot (dy^*, -dx^*) + \psi(x_0, y_0) = \int_{A(x_0, y_0)}^{P(x^*, y^*)} Mdy^* - Ndx^* + \psi(x_0, y_0). \quad (4.4)$$

Fazendo a diferença entre (4.4) e (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} \psi(x^*, y^*) - \psi(x, y) &= \int_{A(x_0, y_0)}^{P(x^*, y^*)} Mdy^* - Ndx^* - \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Mdy - Ndx \\ &= \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Mdy - Ndx + \int_{B(x, y)}^{P(x^*, y^*)} Mdy^* - Ndx^* - \int_{A(x_0, y_0)}^{B(x, y)} Mdy - Ndx \\ &= \int_{B(x, y)}^{P(x^*, y^*)} Mdy^* - Ndx^*. \end{aligned}$$

logo

$$\psi(x^*, y^*) - \psi(x, y) = \int_{B(x, y)}^{P(x^*, y^*)} Mdy^* - Ndx^*. \quad (4.5)$$

Como ψ é independente da curva tomada, vamos considerar C_1 o segmento que une $B(x, y)$ a $P(x + \Delta x, y)$, Figura 36c. Deste modo, equação (4.5) pode ser reescrita como

$$\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y) = \int_{B(x, y)}^{P(x + \Delta x, y)} Mdy - Ndx. \quad (4.6)$$

O segmento C_1 é constante na direção y , conseqüentemente $dy = 0$. Assim, o Teorema do Valor Médio para integrais, (LEITHOLD, 1994, p. 341), nos garante que existe um $c \in [x, x + \Delta x]$ de modo que

$$-N(c, y)\Delta x = \int_{B(x, y)}^{P(x + \Delta x, y)} -Ndx.$$

Mas isso é o mesmo que dizer que existe um $t \in [0, 1]$ tal que

$$-N(x + t\Delta x, y)\Delta x = \int_{B(x, y)}^{P(x + \Delta x, y)} -Ndx.$$

Assim, retornando a (4.6),

$$\frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{B(x, y)}^{P(x + \Delta x, y)} -Ndx = -N(x + t\Delta x, y). \quad (4.7)$$

Tomando o limite na igualdade (4.7) com Δx tendendo a zero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} -N(x + t\Delta x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{B(x, y)}^{P(x + \Delta x, y)} -Ndx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x, y)}{\Delta x}$$

obtemos que

$$-N = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.8)$$

De maneira análoga chegaríamos em

$$M = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (4.9)$$

Portanto, a função ψ se relaciona com as componentes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ do campo de velocidades através das equações (4.8) e (4.9).

As curvas onde $\psi(x, y) = \text{constante}$ são chamadas de curvas de nível e estas definem as linhas de correntes que serão úteis para a visualização do escoamento.

4.1.2 Função Potencial

Para encontrarmos a função de corrente utilizamos a hipótese do escoamento ser incompressível. Para a função potencial usaremos a hipótese do escoamento ser irrotacional, ou seja,

$$\text{rot}(\vec{V}) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \vec{k} = 0,$$

logo

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Com isso, de acordo com o exposto na seção 2.7, considerando as mesmas propriedades para uma curva C da seção anterior e usando o Teorema de Stokes no plano, temos que

$$\oint_C N dx + M dy = \iint_R \text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{n} dA = 0.$$

Como a curva C é arbitrária segue que $M dx + N dy = 0$. Dessa forma, a equação $M dx + N dy = 0$ é uma equação diferencial exata, (BOYCE; DIPRIMA, 2012, p. 73). Portanto, existe uma função ϕ que satisfaz

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N. \quad (4.10)$$

A função ϕ assim construída é chamada de função potencial ou potencial de velocidade, cujo gradiente é o campo de velocidades \vec{V} , isto é,

$$\vec{\nabla} \phi = \vec{V},$$

(ACHESON, 2005, p. 122 e 123).

4.2 Potencial Complexo

Suponha um escoamento bidimensional incompressível e irrotacional. O campo de velocidades \vec{V} é representado, depois de uma combinação das equações (4.8), (4.9) e (4.10), por

$$M = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad N = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (4.11)$$

Observe que as equações

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{e} \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (3.8) e as componentes $M(x, y)$ e $N(x, y)$ do campo de velocidades são de classe C^1 , logo ψ e ϕ são de classe C^2 . Deste modo, Acheson (2005, p. 125) define uma função analítica f representada por

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (4.12)$$

que é chamada de Potencial Complexo.

O potencial complexo (4.12) absorve, em uma única função, duas informações importantes sobre o escoamento que são o potencial de velocidade e as linhas de corrente. Essas através das curvas de nível da função ψ e aquela através do gradiente da função ϕ .

A função f é analítica no domínio do campo de velocidades $\vec{V} = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$. Assim, os teoremas usados para funções analítica são válidos para o potencial complexo, acarretando, dentre outros:

- a) As curvas de nível

$$\psi(x, y) = \text{constante} \quad \text{e} \quad \phi(x, y) = \text{constante}$$

são perpendiculares onde $f'(z)$ não se anula, Teorema 3.5.

- b) As funções ψ e ϕ são funções harmônicas, ou seja, satisfazem a equação de Laplace, Teorema 3.6. O que implica que as superposições (somas) de potenciais complexos ainda são um potencial complexo, (PONTES; MANGIAVACCHI, 2016, p. 168).
- c) ψ é um harmônico conjugado de ϕ , Teorema 3.10.
- d) As integrais sobre curvas fechadas de um potencial complexo, em um domínio simplesmente conexo, são nulas, Teorema 3.7.

Defini-se a Velocidade Complexa de um potencial complexo pela derivada

$$f'(z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = M - iN. \quad (4.13)$$

Essa derivada foi obtida do mesmo modo que em (3.11) e (3.12). Assim, existem dois modos de se obter o campo de velocidades \vec{V} de um potencial complexo, ou pela sua derivada ou pelo gradiente da sua parte real ($\vec{\nabla}\phi$). Deste modo, a velocidade de uma partícula de fluido em qualquer ponto (x, y) do escoamento é dada por

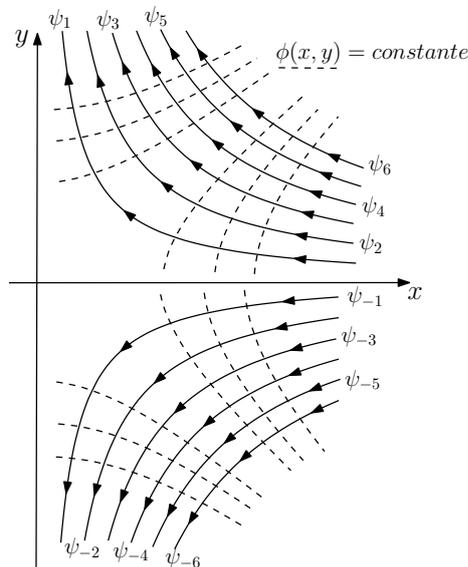
$$|f'(z)| = \|\vec{V}\| = \sqrt{M^2 + N^2}.$$

Exemplo 4.1. Considere o potencial complexo $f(z) = -z^2$. Determine o campo de velocidades \vec{V} e faça um esboço do escoamento nos primeiro e quarto quadrantes, representando as linhas de corrente.

Como $z = x + iy$ segue que $f(z) = -x^2 + y^2 - i2xy$. Assim $\phi(x, y) = -x^2 + y^2$ e $\psi(x, y) = -2xy$. Temos então que as curvas de nível de $\psi(x, y) = -2xy$ descrevem as linhas de corrente.

A velocidade complexa é dada por $f'(z) = -2x - i2y$ e, assim, pela equação (4.13), o campo de velocidades é representado por $\vec{V} = -2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, ou, de igual modo, usando a parte real do potencial complexo, isto é, $\vec{\nabla}\phi = \vec{V} = -2x\vec{i} + 2y\vec{j}$. O esboço do escoamento está representado na Figura 37.

Figura 37 – Linhas de corrente de $f(z) = -z^2$, nos primeiro e quarto quadrantes.



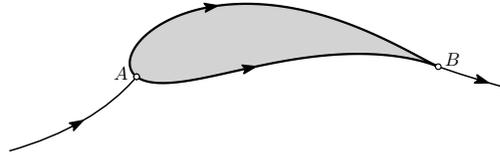
Fonte: O autor, 2019.

A função potencial do Exemplo 4.1 pode ser interpretada como um escoamento de um jato de água sendo lançado, na direção $-\vec{i}$, em uma placa plana, dentro do ramo $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, (VALLENTINE, 1967, p. 30).

Define-se ponto de estagnação como sendo os valores de z que tornam $f'(z) = 0$. Os pontos de estagnação em escoamentos em torno de perfis aerodinâmicos fazem a linha

de corrente se ramificar na face a montante e se unir novamente a jusante de um perfil, na Figura 38 a face montante é o ponto A e a face jusante é o ponto B.

Figura 38 – Perfil de um aerofólio.



Fonte: O autor, 2019.

Para o Exemplo 4.1 a origem é um ponto de estagnação, local onde a velocidade complexa é nula e pressão máxima, como veremos mais adiante.

A derivada de f pode nos dar outra informação sobre o comportamento do escoamento. Se integrarmos $f'(z)$, sobre uma curva fechada, iremos obter

$$\oint_C f'(z) dz = \oint_C (M - iN)(dx + idy) = \oint_C Mdx + Ndy + i \oint_C Mdy - Ndx.$$

As integrais do lado direito representam dois resultados estudados anteriormente, especificamente a circulação em C e o escoamento através de C . Esses resultados podem ser representadas em uma mesma equação dada por

$$\begin{aligned} \oint_C f'(z) dz &= \iint_R \text{rot}(\vec{V}) \cdot \vec{n} dA + i \iint_R \text{div}(\vec{V}) dA \\ &= \text{circulação} + i(\text{taxa de escoamento}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

em que C é a fronteira de R .

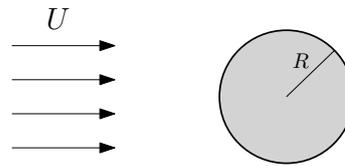
Essa integral pode ser utilizada, por exemplo, para verificar em uma transformação conforme, que mapeia curvas fechadas em curvas fechadas, se o escoamento e a circulação são preservados nessas curvas.

4.3 Escoamento em torno de um Cilindro Circular

Vimos na seção 4.2 que o potencial complexo f é formado por duas funções harmônicas ψ e ϕ , o que implica em f ser uma função harmônica. Desse modo, através da adição dos escoamentos uniforme, dipolo e vórtice, Apêndice D, poderemos construir potenciais complexos onde estaremos interessados em estudar as linhas de corrente, a circulação em torno do perfil formado e a força que o fluido exerce no perfil.

Considere o escoamento uniforme definido pelo potencial complexo $f(z) = Uz$ e um cilindro de raio R , como representado na Figura 39. Como será o comportamento das linhas de corrente quando "colocarmos" o cilindro no escoamento?

Figura 39 – Cilindro de raio R posto diante do potencial complexo de um escoamento uniforme.



Fonte: O autor, 2019.

Os autores Nachbin e Zárate (2007, p. 69) e Vallentine (1967, p. 96) usam essa situação fazendo a comparação de um escoamento em um rio, visto do alto ao redor de uma coluna de ponte. Como estamos lidando com escoamentos potenciais as condições de contorno devem satisfazer algumas regras. Conforme Shames (1962, p. 203 e 204), as velocidades na superfície de contorno do cilindro devem ter componentes normais iguais a zero (condição de contorno de Neumann, (WILCOX, 2000, p. 379)), em todo instante de tempo t , e a grandes distâncias a velocidade deve ser constante. Deste modo, as condições de contorno local devem satisfazer

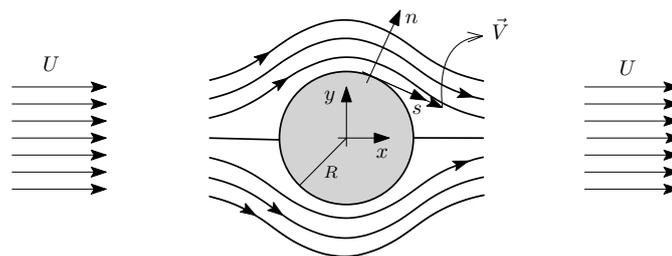
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (4.15)$$

e para grandes distâncias

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = U, \quad \text{quando} \quad (x, y) \rightarrow \infty, \quad (4.16)$$

Figura 40.

Figura 40 – Condições de contorno para um escoamento em torno do cilindro de raio R .



Fonte: O autor, 2019.

Neste momento estamos interessados em obter um potencial complexo que possa nos fornecer uma função de corrente que descreva o escoamento na presença do cilindro de raio R . Para isso, usaremos o Teorema do Círculo de Milne-Thompson (1996, p. 157).

Teorema 4.1 (Teorema do Círculo). *Considere um escoamento bidimensional, irrotacional, incompressível e invíscido no plano complexo. Seja f o potencial complexo para um escoamento onde as singularidades de f estejam a uma distância maior que R da origem,*

$|z| > R$. Se um cilindro circular $|z| = R$, tipificado por sua seção transversal, no plano complexo, for colocado nesse escoamento, o potencial complexo para o novo escoamento é dado por

$$w(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right). \quad (4.17)$$

Demonstração. Uma demonstração desse teorema pode ser visto em Milne-Thompson (1973, p. 84). ■

Seja C a curva de interseção do cilindro de raio R com o plano complexo. Vamos verificar qual a relação da curva C com a função ψ . Seja $z = Re^{i\theta}$ um ponto arbitrário de C , a equação (4.17) aplicada em $z = Re^{i\theta}$ torna a curva C parte da linha de corrente $\psi(x, y) = 0$, pois

$$\bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) = \overline{f\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}, \quad (\text{ACHESON, 2005, p. 129}).$$

Logo

$$w(z) = f(Re^{i\theta}) + \overline{f\left(\frac{R^2}{Re^{-i\theta}}\right)} = f(z) + \overline{f(z)} = 2\text{Re}f(z).$$

Desse modo, pontos do círculo aplicados em w tem parte imaginária nula, que implica que $\psi(x, y) = 0$. Assim, podemos concluir que C é uma parte da linha de corrente $\psi(x, y) = 0$.

Com o resultado do Teorema 4.1 podemos obter um potencial complexo que descreve o escoamento em torno de um cilindro de raio R quando este perturba o escoamento uniforme dado por $f(z) = Uz$. O potencial complexo $f(z) = Uz$ na presença de um cilindro de raio R , com a velocidade no infinito $|f'(z)| = U$, resulta no potencial complexo dado por

$$w(z) = Uz + U\frac{R^2}{z}. \quad (4.18)$$

Observe que o potencial w é a superposição dos escoamentos uniforme e dipolo. Mais uma vez, a ideia de falar em escoamento em torno do cilindro vem do fato da função de corrente do potencial complexo (4.18) ser dada por

$$\psi(x, y) = Uy \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Deste modo, $\psi(x, y) = 0$ descreve a linha de corrente $y = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$, quando $y \neq 0$. Como não há escoamento entre as linhas de corrente o fluido contorna a circunferência de centro na origem e raio R , essa linha de corrente está representada na Figura 41a indicada por $\psi(x, y) = 0$.

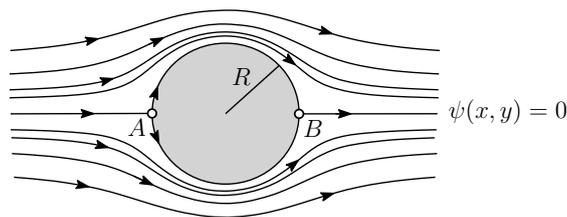
Aqui fica claro que o potencial complexo que descreve o escoamento em torno do cilindro cumpre o que é estabelecido na condição de contorno de Neumann, porque não há escoamento na direção normal no cilindro, já que o mesmo compõe a linha de corrente $\psi(x, y) = 0$. Portanto, as condições de contorno são satisfeitas para esse potencial, pois no contorno, $z = Re^{i\theta}$, temos que $\phi(R, \theta) = 2UR \cos(\theta)$ e $\psi(R, \theta) = 0$, implicando em $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$; e para $(x, y) \rightarrow \infty$ a velocidade complexa

$$w'(z) = 0 = U - U \frac{R^2}{z^2}$$

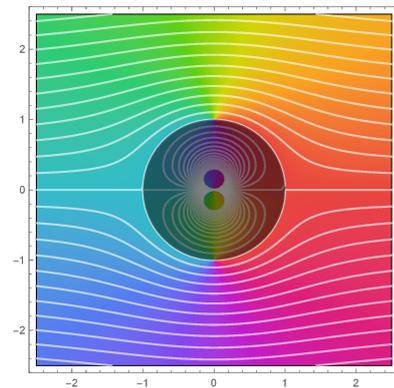
é U . Por esse fato Nachbin e Zárate (2007, p.71) concluem que o fluido desliza sobre a borda do cilindro acompanhando sua forma. A Figura 41 representa as linhas de corrente para esse escoamento.

Figura 41

(a) Esboço das linhas de corrente de um escoamento uniforme perturbado por um cilindro.



(b) Simulação feita no Mathematica 12.0 para o potencial (4.18) com o cilindro centrado na origem, raio $R = 1$, $U = 1$ e $\Gamma = 0$.



Fonte: O autor, 2019

Os pontos A e B da Figura 41a são pontos de estagnação, eles ocorrem quando a velocidade complexa é nula, isto é,

$$w'(z) = 0 = U - U \frac{R^2}{z^2},$$

ou seja, em $z = \pm R$. A Figura 42 mostra duas fotos do álbum de Dyke (1982, p. 11 e 20), no qual é possível verificar que a representação dada pela Figura 41 é uma boa aproximação para as fotos apresentadas. O número de Reynolds (R_e) apresentado nas legendas da Figura 42 é um número adimensional utilizado para caracterizar o tipo de escoamento, laminar ou turbulento. Essa caracterização é apresentada por uma faixa de valores que pode ser vista em White (2011, p. 356).

Figura 42

(a) Escoamento em torno de um cilindro circular com número de Reynolds $R_e = 1.54$, Foto 24.



(b) Escoamento em torno de um cilindro circular com número de Reynolds $R_e = 0.16$, Foto 6.



Fonte: Dyke (1982).

4.3.1 Análise do Escoamento do Fluido entre duas Linhas de Corrente

O potencial complexo

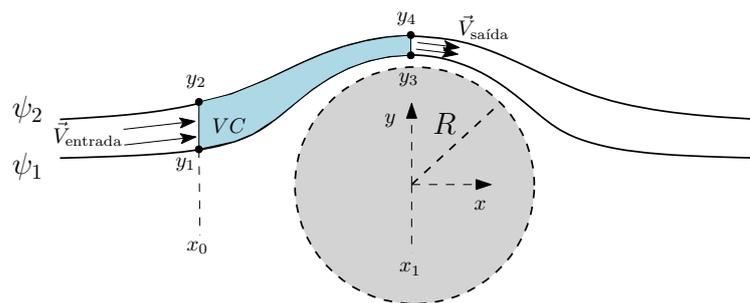
$$w(z) = Uz + U \frac{R^2}{z},$$

dado $z = x + iy$, gera a função de corrente

$$\psi(x, y) = Uy \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Considere duas linhas de corrente ψ_1 e ψ_2 , distintas, próximas ao cilindro.

Figura 43 – Escoamento do fluido entre duas linhas de corrente.



Fonte: O autor, 2019.

Com base na Figura 43, iremos analisar o comportamento do campo de velocidades do fluido no volume de controle (VC), usando a Equação de Bernoulli (2.46). Para isso devemos lembrar que entre duas linhas de corrente não existe escoamento, pois os vetores normal e velocidade são perpendiculares. Essa análise acontece de modo análogo ao caso do esguicho, seção 2.5.1. Utilizando o resultado (2.22), temos que o escoamento através do

caminho de y_2 para y_1 (área da seção transversal denotada por A_1) e o escoamento através do caminho de y_3 para y_4 (área da seção transversal denotada por A_2) são iguais, portanto

$$V_{\text{entrada}}A_1 = V_{\text{saída}}A_2.$$

Essa análise nos mostra que linhas de corrente quando próximas ocasionam um aumento de velocidade no escoamento, isto é, de x_0 até x_1 , dentro de VC , a intensidade do campo de velocidade é aumentada. Dessa forma, pela Equação de Bernoulli, desprezando a força externa (energia potencial igual a zero), existirá uma diminuição da pressão p na região de afunilamento das linhas de corrente. De fato, a Equação de Bernoulli é dada por

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\|\vec{V}\|^2 = \text{constante}$$

e a velocidade complexa dada por $w'(z) = U(1 - \frac{R^2}{z^2})$. Tomando $z = R e^{i\theta}$ temos que

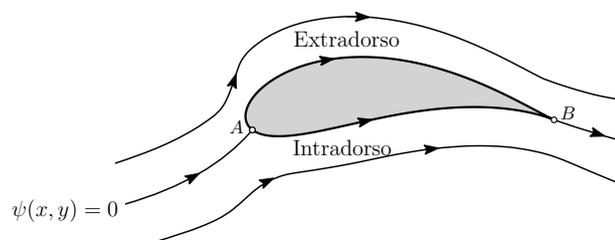
$$w'(z) = U \left(1 - \frac{R^2}{R^2 e^{2i\theta}} \right) = U (1 - \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)).$$

Assim, em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ a velocidade complexa é nula (pontos de estagnação) e em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ a velocidade é máxima. Consequentemente, a pressão é máxima em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$; e mínima em $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Segundo Nachbin (2011, p. 40 e 41), esse resultado ajuda a entender porque o avião voa. Se considerarmos o caminho AB_{superior} (Extradorso) e o caminho AB_{inferior} (Intradorso) de um aerofólio, Figura 44, ambos os caminhos pertencem a mesma linha de corrente $\psi(x, y) = 0$. Assim, como a equação de Bernoulli é constante em uma mesma linha de corrente devemos ter

$$\left[\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}\|\vec{V}_1\|^2 \right]_{AB_{\text{superior}}} = \left[\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}\|\vec{V}_2\|^2 \right]_{AB_{\text{inferior}}}.$$

Figura 44 – Aerofólio de Joukowsk.



Fonte: O autor, 2019.

O aerofólio deve ser projetado para ter uma maior velocidade das partículas no extradorso do que no intradorso. Desta maneira, pela Equação de Bernoulli, acontecerá uma diferença de pressão e como consequência surgirá uma força de sustentação.

4.3.2 Força de sustentação no Cilindro

Para compreender a força de sustentação que surge na fronteira do cilindro circular dois teoremas serão importantes: o Teorema de Blasius e o Teorema de Kutta-Joukowski. O primeiro nos dará essa força na forma de uma integral, o segundo relacionará a força de sustentação pelo produto da massa específica, circulação e velocidade complexa no infinito. No estudo dessa força a circulação assume um papel fundamental na teoria do aerofólio.

Antes das formulações dos Teorema de Blasius e de Kutta-Joukowski precisamos definir a forma complexa de uma força F e compreender o que as partes real e imaginária dessa força nos fornecem.

Define-se a força complexa F por

$$F = X - iY. \quad (4.19)$$

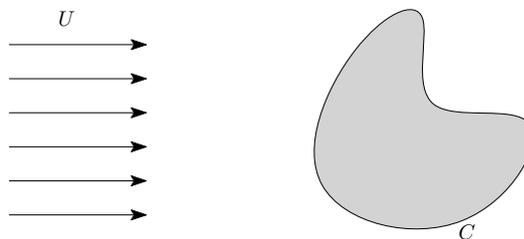
Segundo Nachbin e Zárate (2007), a definição da força complexa $F = X - iY$ é decorrente da velocidade complexa $\frac{dw}{dz}$ ser dada por $M - iN$. Na equação (4.19) Pontes e Mangiavacchi (2016, p. 173) dizem que X se refere a força de arrasto e Y a força de sustentação. Vale ressaltar que como estamos admitindo um escoamento invíscido a parte real da força complexa será nula, pois a força de arrasto é efeito da viscosidade, (FORTUNA, 2012, p. 31).

Teorema 4.2 (Teorema de Blasius). *Considere um escoamento potencial, w , em regime permanente perturbado pela presença de um cilindro arbitrário de seção transversal C . A força F na seção, na ausência de forças exteriores, é dada por*

$$F = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad (4.20)$$

Em que $\frac{dw}{dz}$ é a velocidade complexa, Figura 45.

Figura 45 – Cilindro arbitrário para aplicação do Teorema de Blasius.



Fonte: O autor, 2019.

Demonstração. Seja $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ a força resultante em C . Como estamos num domínio bidimensional a equação (2.35) pode ser dada por

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} = - \oint_C p\vec{n} ds,$$

em que $\vec{n} = (dy, -dx)$ é o vetor normal a seção e p a pressão. Como

$$d\vec{F} = -p(dy, -dx) = (dX, dY),$$

a forma complexa de F pode ser representada por

$$F = X - iY = - \oint_C p(dy + idx),$$

porque $dF = dX - idY = -pdy - ipdx$. Como $p(dy + idx) = ipd\bar{z}$, logo

$$F = -i \oint_C p d\bar{z}. \quad (4.21)$$

A expressão para p na integral (4.21) é obtida da Equação de Bernoulli, (2.46), e é dada por

$$p = \rho L - \frac{\rho}{2} \|\vec{V}\|^2,$$

onde L é a constante dessa equação e $\|\vec{V}\|^2 = \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}$.

Substituindo na integral (4.21) obtemos

$$F = X - iY = -i \oint_C \rho L d\bar{z} + \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z}.$$

Em consequência do Teorema 3.7 a primeira integral é zero. Para resolver a segunda integral devemos nos recordar que o potencial complexo w é definido por $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ e seu conjugado por $\bar{w}(z) = \phi(x, y) - i\psi(x, y)$. Desta forma, a diferencial de \bar{w} é dada por $d\bar{w} = d\phi - id\psi$. Como ψ é constante ao longo de uma linha de corrente segue que $d\psi = 0$. Portanto, de

$$\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z} = d\bar{w} = dw = \frac{dw}{dz} dz$$

temos que

$$\frac{dw}{dz} \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} d\bar{z} = \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz.$$

Assim, podemos concluir que

$$F = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz. \quad \blacksquare$$

O Teorema 4.2 nos diz que podemos obter a força de sustentação em um cilindro de geometria arbitrária, desde que saibamos a formulação da velocidade complexa do escoamento onde se encontra esse cilindro. Em alguns casos a obtenção dessa velocidade é bem complexa e em seguida haverá um integral a ser calculada.

O exemplo abaixo é o nosso primeiro caso em que buscamos informações sobre a força de sustentação que surge na fronteira do cilindro. Mas, apesar de ser um exemplo relativamente simples a sua solução nos dará uma noção de como pode ser difícil estudar a força F utilizando somente o Teorema 4.2.

Exemplo 4.2. *Com o uso do Teorema de Blasius estude o comportamento da força complexa para o potencial dado pela equação (4.18).*

A velocidade complexa para o referido potencial é

$$w'(z) = U - \frac{UR^2}{z^2},$$

e pelo Teorema 4.2 a força F que atua no cilindro é dada pela integral

$$\begin{aligned} F = X - iY &= \oint_C \left(U - \frac{UR^2}{z^2} \right)^2 dz \\ &= \oint_C U^2 - 2\frac{U^2R^2}{z^2} + \frac{U^2R^4}{z^4} dz. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 3.3 a força

$$F = \oint_C \left(U^2 - 2\frac{U^2R^2}{z^2} + \frac{U^2R^4}{z^4} \right) dz = 0.$$

Esse resultado mostra que um escoamento uniforme, Apêndice D, perturbado por um cilindro de raio R não tem força de sustentação e nem força de arrasto.

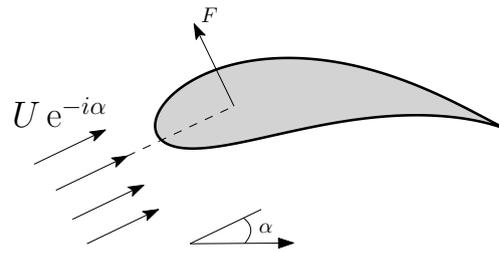
Uma forma mais simples de conseguir informação sobre a força F é com o uso do Teorema de Kutta-Joukowski. Esse Teorema nos diz de uma forma simples que a força F é resultado do produto entre a massa específica do fluido, a circulação Γ e a velocidade complexa no infinito.

Teorema 4.3 (Teorema de Kutta-Joukowski). *Considere um fluido ideal em um escoamento incompressível e irrotacional contornando um cilindro arbitrário C no plano complexo. Considere que o campo de velocidades $\vec{V} = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j}$ é tal que a velocidade complexa $f'(z) = M(x, y) - iN(x, y)$ seja uma função analítica no exterior do cilindro e que no infinito ela convirja a $U e^{-i\alpha}$, assim a força exercida no cilindro pelo fluido é*

$$F = -i\rho\Gamma U e^{-i\alpha}, \quad (4.23)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, Γ é a circulação em torno do cilindro arbitrário e F é perpendicular a $U e^{-i\alpha}$, Figura 46.

Figura 46



Fonte: O autor, 2019.

Demonstração. A demonstração deste teorema requer, dentro outros assuntos, o uso da Série de Laurent. Deste modo, uma demonstração pode ser vista em Milne-Thompson (1996, p. 200 e 201). ■

Pensando no Exemplo 4.2, o que deve ser adicionado no potencial (4.18) para que $F \neq 0$, ou seja, para que a força de sustentação seja diferente de zero? O Teorema de Kutta-Joukowski nos diz que é necessário ter circulação em torno do cilindro, mas para a produção de circulação seria necessário a viscosidade, o que não está previsto em nossas hipóteses. Assim, no exemplo citado, quando se calcula a última integral a velocidade complexa precisaria apresentar pelo menos um elemento do integrando que tenha a forma $\frac{\eta}{z - z_0}$, com η contante real, porque o Corolário 3.3 afirma que $\oint_C \frac{\eta}{z - z_0} \neq 0$. Dessa maneira, dentre potenciais apresentados no Apêndice D qual irá gerar uma velocidade complexa com a característica dita acima? A resposta é um potencial de vórtice.

Se adicionarmos o potencial dado em (D.12) ao potencial (4.18) teremos um potencial na forma

$$w(z) = Uz + U \frac{R^2}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{z}{R} \right). \quad (4.24)$$

Sobre a equação (4.24) duas observações são importantes:

- a) No potencial de vórtice z foi dividido por R para que a linha de corrente $\psi(x, y) = 0$ coincida com a correspondente linha de corrente no escoamento sem a presença do vórtice, (POPE, 1951, p. 54).
- b) A circulação Γ é a responsável pelo deslocamento dos pontos de estagnação no contorno do cilindro.

O item b) nos permite pensar que mover os pontos de estagnação sobre o contorno do cilindro é um fato importante quando se trata de sustentação (força exercida na vertical), pois o potencial (4.18) apresenta pontos de estagnação em $z = \pm R$, $F = 0$ e circulação

nula. A circulação nula, $\Gamma = 0$, é verificado pela integral (4.14) juntamente com a aplicação do Corolário 3.3.

Considere o potencial (4.24). Vamos estudar a influencia do potencial de vórtice no escoamento descrito por esse potencial, com circulação $\Gamma < 0$. Para isso é necessário entender o comportamento do pontos de estagnação sobre o cilindro.

A velocidade complexa relacionada ao potencial

$$w(z) = Uz + U\frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi}i \ln\left(\frac{z}{R}\right)$$

é

$$w'(z) = U - U\frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{i}{z}. \quad (4.25)$$

Estamos interessados em determinar os pontos de estagnação desse escoamento, isto é, os valores de z que tornam $w'(z) = 0$. Para isso igualemos a equação (4.25) a zero e a multipliquemos por $\frac{z^2}{U}$, com o propósito de resolver uma equação do segundo grau na forma

$$z^2 + \frac{i\Gamma}{2U\pi}z - R^2 = 0. \quad (4.26)$$

As raízes de (4.26) são

$$z = \frac{-\frac{i\Gamma}{2U\pi} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{2U\pi}\right)^2 + 4R^2}}{2},$$

ou ainda,

$$z = |R| \left[-\frac{i\Gamma}{4|R|U\pi} \pm \sqrt{-\left(\frac{\Gamma}{4UR\pi}\right)^2 + 1} \right]. \quad (4.27)$$

Observe que para a circulação $\Gamma = 0$ os pontos de estagnação são $z = \pm R$, resultado encontrado na seção 4.3. Agora precisamos analisar três casos:

a) $\left(\frac{\Gamma}{4UR\pi}\right)^2 = 1.$

Quando $\Gamma = 4UR\pi$ existe apenas um ponto de estagnação para a equação (4.25), que acontece em $z = -\frac{i\Gamma}{4U\pi}$. Para sabermos em qual ponto do cilindro está esse ponto de estagnação tomamos $\text{sen}(\beta) = \frac{\Gamma}{4RU\pi}$, com $0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, e substituímos em (4.27), donde obtemos $z = -Ri \text{sen}(\beta)$. Para se obter um único ponto de estagnação temos que ter $\beta = \frac{\pi}{2}$. Portanto, o ponto de estagnação acontece em $z = -Ri$, o que mostra que esse ponto está na borda do cilindro. O escoamento para esse comportamento é visto na Figura 47a.

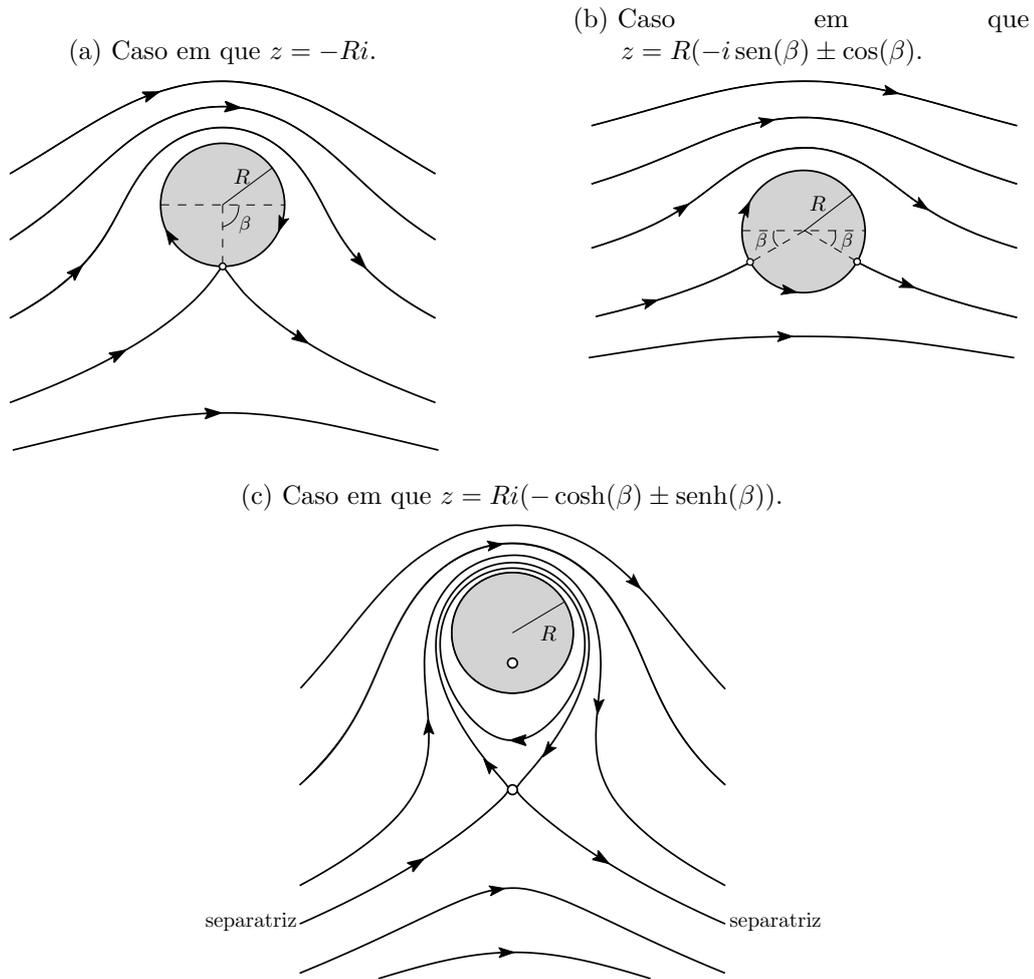
$$\text{b) } \left(\frac{\Gamma}{4UR\pi} \right)^2 < 1.$$

Para a desigualdade $\left(\frac{\Gamma}{4UR\pi} \right)^2 < 1$ existem dois pontos de estagnação distintos e simétricos em relação ao eixo $Im(z)$. Para sabermos o comportamento desses pontos basta tomar $\text{sen}(\beta) = \frac{\Gamma}{4RU\pi}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, e substituindo em (4.27) temos que $z = R(-i \text{sen}(\beta) \pm \text{cos}(\beta))$. Mais uma vez, os pontos de estagnação estão sobre o cilindro e na região $Im(z) < 0$. O escoamento para esse caso está representado na Figura 47b.

$$\text{c) } \left(\frac{\Gamma}{4UR\pi} \right)^2 > 1$$

Quando $\left(\frac{\Gamma}{4UR\pi} \right)^2 > 1$ as raízes de (4.27) serão imaginárias puras e distintas, porém os pontos de estagnação não estão sobre o cilindro. Utilizando a idéia de Milne-Thompson (1996, p. 189) tomando $\text{cosh}(\beta) = \frac{\Gamma}{4RU\pi}$ e substituindo em (4.27) obtemos que $z = Ri(-\text{cosh}(\beta) \pm \text{senh}(\beta))$. Como $\text{cosh}(\beta) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$ e $\text{senh}(\beta) = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$, segue que $z = -Rie^\beta$ ou $z = -Rie^{-\beta}$. Isso mostra que esse ponto de estagnação está dentro do cilindro enquanto aquele está fora do cilindro. Segundo Pope (1951, p. 54), o aumento excessivo de circulação move a linha de corrente $\psi = 0$ para fora do cilindro, como na Figura 47c.

Figura 47 – Escoamento em torno de um cilindro com vórtice no seu interior.



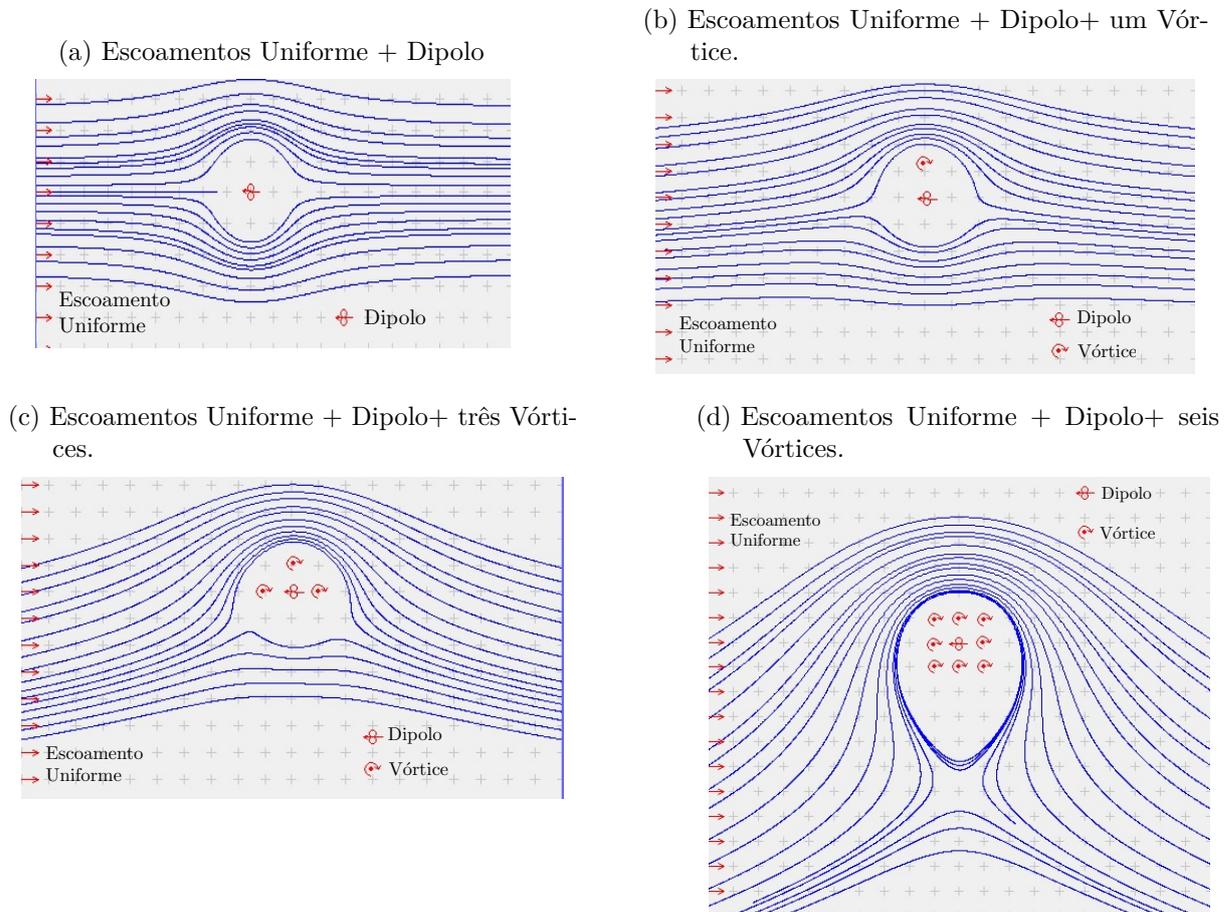
Fonte: O autor, 2019.

De acordo com Pope (1951, p. 54), para aumentar a circulação devemos "colocar" singularidades no interior do cilindro (vórtices livres), o potencial de vórtice que produzirá um aumento de circulação pode ser representado por

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_1) - \dots - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_n) \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln((z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n)), \end{aligned}$$

onde cada ponto z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, é um vórtice no interior do cilindro, veja seção D. Em casos reais não inserimos potenciais de vórtices no interior de uma coluna de uma ponte ou em um aerofólio, por exemplo, esse papel é feito pela viscosidade. No CD-ROM de Homsy et al. (2007) podemos simular essas inserções de potenciais de vórtices no interior do cilindro e verificar que aumento de circulação move os pontos de estagnações na borda do cilindro. A Figura 48 mostra alguns dessas inserções de vórtices.

Figura 48 – Pontos de estagnação se movendo com as inserções de vórtices no interior do cilindro.



Fonte: Homsy et al. (2007).

Quando observamos a linha de corrente $\psi(x, y) = 0$ os pontos de estagnação são nós que dividem o escoamento, veja novamente a Figura 47. Observando a subseção 4.3.1, haverá uma diferença de velocidade no escoamento do fluido entre os caminhos que são separados pelos pontos de estagnação, de forma que quanto mais longo a trajetória percorrida pela partícula de fluido maior será a velocidade e quanto menor a trajetória menor será a velocidade. Essa diferença de velocidade vai gerar uma diferença de pressão, verificado pelo Equação de Bernoulli, acarretando o surgimento da força de sustentação.

Usando o Teorema de Kutta-Joukowski para o potencial (4.24) temos que a força de sustentação que o fluido exerce sobre o cilindro é

$$F = X - iY = -i\rho\Gamma U. \quad (4.29)$$

Quando $\Gamma \neq 0$ então $F \neq 0$, o que significa que a existência de força de sustentação está diretamente relacionada com a circulação. Mas deve ser entendido que a circulação gerada pelo potencial de vórtice não é o que acontece em uma situação real. Segundo Bertin

e Cummings (2008, p. 106), pode-se concluir do Teorema de Kelvin 2.3 que todo escoamento permanece irrotacional na ausência de forças viscosas e de descontinuidade (observe a integral 2.63). À vista disso, como estamos considerando um escoamento invíscido, foi necessário adicionar um potencial de vórtice ao potencial (4.18) para que fosse produzido circulação em torno do cilindro e como consequência fosse gerada uma força de sustentação, isso porque o potencial de vórtice gera uma singularidade no interior do cilindro.

4.4 Perfil Adequado ao Aerofólio de Joukowski

A transformação

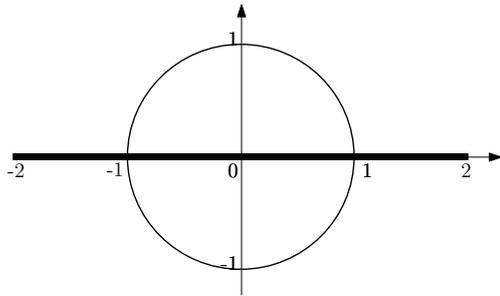
$$w(z) = z + \frac{c^2}{z}, \quad (4.30)$$

em que $c > 0$, é chamada Transformação de Joukowski, Apêndice F. Destacamos algumas informações importantes sobre essa transformação:

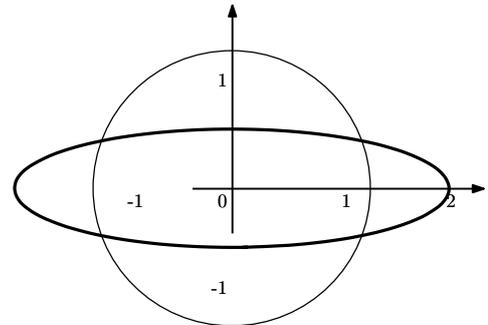
- a) A equação (4.30) mapeia uma circunferência no plano- z em algumas geometrias no plano- w , Figura 49.
- b) A função (4.30) é analítica em todo plano complexo com exceção da origem. Desse modo, a transformação é conforme pelo Teorema E.1, com exceção dos pontos de estagnação $z = \pm 2c$ e em $z = 0$ onde não é definida.
- c) A transformação preserva as condições de contorno (4.15), (ZILL; SHANAHAN, 2011, p. 326 e 327).
- d) A transformação mapeia as linhas de corrente em torno do cilindro nas linhas de corrente em torno do aerofólio e a circulação no contorno do cilindro é preservada no contorno do aerofólio, (SEARS, 2011, p. 141).

Figura 49 – Imagens de círculos pela transformação de Joukowski, em que z_0 e R são, respectivamente, o centro e o raio do círculo. Os valores de z_0 e R foram obtidos de Pontes e Mangiavacchi (2016, p. 179) e Olver (2018, p. 37), com $c = 1$, com exceção das Figuras 49e e 49h que foram dados obtidos pelo autor usando o GeoGebra 6.0.

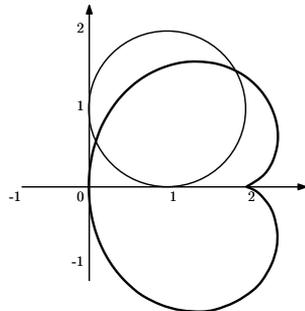
(a) $z_0 = 0$ e $R = 1$.



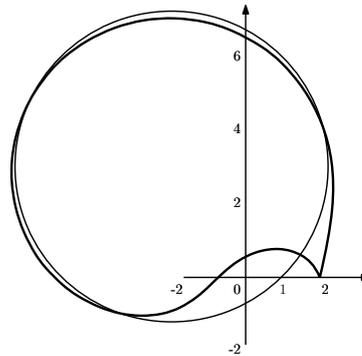
(b) $z_0 = 0$ e $R = 1.3250$.



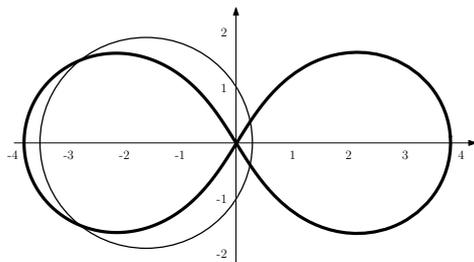
(c) $z_0 = 1 + i$ e $R = 1$.



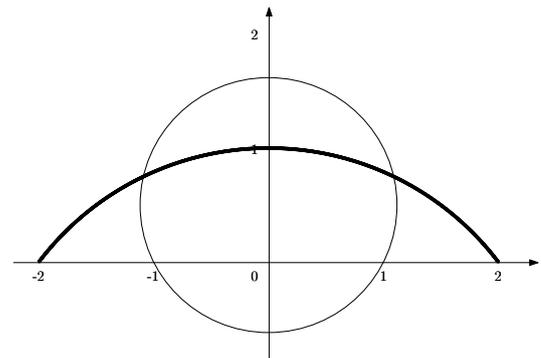
(d) $z_0 = -2 + i3$ e $R = 3\sqrt{2}$.



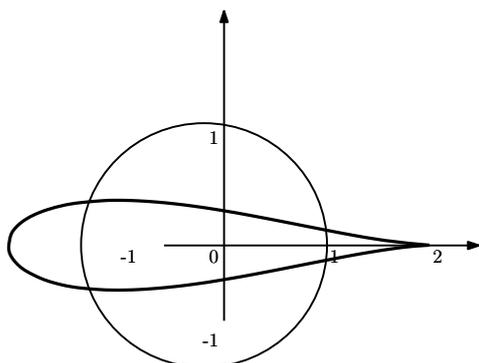
(e) $z_0 = -1.6112$ e $R = 1.8963$.



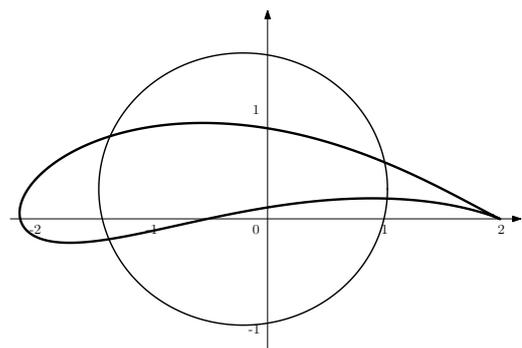
(f) $z_0 = i0.5$ e $R = 1.118$.



(g) $z_0 = -0.2$ e $R = 1.2$.



(h) $z_0 = -0.209 + i0.2737$ e $R = 1.2398$.



4.4.1 Escoamento em torno um Cilindro Elíptico e de uma Placa

Vimos na Figura 49 que é possível obter algumas geometrias quando mapeia-se círculos através da Transformação de Joukowski. Quando dizemos que a Transformação de Joukowski mapeia um círculo em alguma geometria, na verdade, estamos dizendo que essa transformação mapeia a linha de corrente que produz o círculo, $\psi(x, y) = 0$, na linha de corrente que produz a geometria. Nesta subseção vamos construir o potencial complexo que descreve o escoamento em torno de uma placa e cilindro elíptico assim como verificar que esse potencial preserva as condições de contorno e a circulação nesse novo escoamento.

Considere a aplicação da Transformação de Joukowski,

$$w(z) = z + \frac{c^2}{z},$$

em uma cilindro $z = R e^{i\theta}$, com $0 < c < R$. Assim,

$$\begin{aligned} w(z) = u + iv &= R e^{i\theta} + \frac{c^2}{R e^{i\theta}} \\ &= R e^{i\theta} + \frac{c^2 e^{-i\theta}}{R} \\ &= \cos(\theta) \left(R + \frac{c^2}{R} \right) + i \operatorname{sen}(\theta) \left(R - \frac{c^2}{R} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Esse resultado mostra que o cilindro $z = R e^{i\theta}$ no plano- z é levado pela transformação (4.30) em uma cilindro elíptico no plano- w , como feito na Figura 49b. Observe que w escrito dessa forma é uma parametrização de um elipse no plano- w , com o parâmetro θ variando em $[0, 2\pi]$. Isso nos permite escrever a equação

$$\frac{u^2}{\left(R + \frac{c^2}{R} \right)^2} + \frac{v^2}{\left(R - \frac{c^2}{R} \right)^2} = 1. \quad (4.32)$$

Se tomarmos $c = R$, em (4.31), o cilindro elíptico se degenera em uma placa, como na Figura 49a. O contorno do cilindro é mapeado no segmento $[-2R, 2R]$ e as imagens dos pontos fora e dentro do cilindro são levados a todo plano- w , Apêndice F.

Considere a inversa da Transformação de Joukowski (4.30)

$$z(w) = \frac{1}{2}(w \pm \sqrt{w^2 - 4c^2}). \quad (4.33)$$

A transformação (4.33) é conforme pelo Teorema E.2. Para o caso do cilindro elíptico, valores de w diferentes de $\pm 2c$, isto é, pontos que não sejam focos da elipse, z apresenta dois valores: um para $\sqrt{w^2 - 4c^2}$ e outro para $-\sqrt{w^2 - 4c^2}$. Se pegarmos o sinal positivo para a raiz quadrada, $z = \frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2})$, os pontos fora do cilindro elíptico

no plano- w serão mapeados nos pontos fora da cilindro no plano- z , (MILNE-THOMPSON, 1996, p. 166). Não é interessante tomar os pontos com o sinal negativo da raiz, pois estes serão levados no interior do cilindro, região na qual não estamos interessados.

Considere o escoamento uniforme, D.4, aplicado ao Teorema 4.1 com a adição de um potencial de vórtice dado em D.12, a circulação Γ considerada será a obtida no sentido horário, portanto $\Gamma < 0$. Esse potencial complexo traz informações sobre o escoamento em torno de um cilindro circular de raio R com centro na origem. O potencial assim construído é dado por

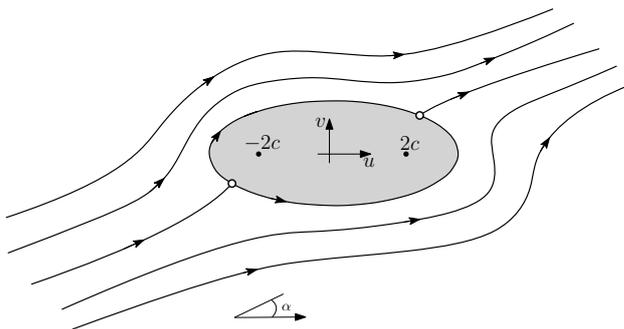
$$\begin{aligned} W(z) &= U e^{-i\alpha} z + U \frac{R^2}{e^{-i\alpha} z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{z}{R}\right) \\ &= U \left(e^{-i\alpha} z + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{z}{R}\right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Segundo Batchelor (2000, p. 429), a composição das funções (4.33) (para valores positivos da raiz quadrada) com (4.34) gera o potencial complexo (4.35), cujas funções $\psi = \text{constante}$ representam o escoamento em torno do cilindro elíptico, Figura 50,

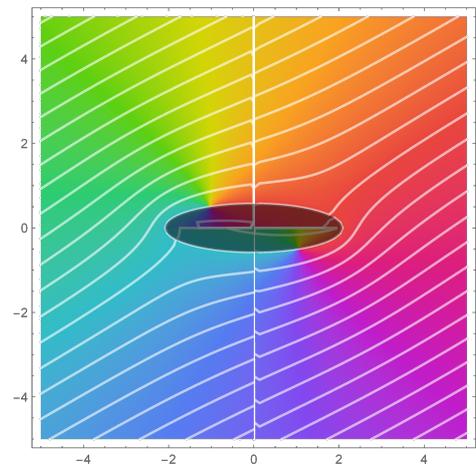
$$\begin{aligned} W(w) &= U \left(e^{-i\alpha} \frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2}) + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2})} \right) \\ &+ \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2})}{R}\right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Figura 50

(a) Esboço do escoamento em torno de um cilindro elíptico com $\Gamma = 0$.



(b) Simulação feita no Mathematica 12.0 para o potencial (4.35) com o cilindro centrado na origem, raio $R = 1.3250$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $U = 1$ e $\Gamma = 0$.



Fonte: O autor, 2019.

O potencial complexo (4.35) preserva a velocidade no infinito $U e^{-i\alpha}$ e a circulação Γ do potencial (4.34), pois, segundo Sears (2011, p. 141) tanto a circulação quando o

escoamento são preservados em uma aplicação conforme que leva uma curva fechada no plano- z a uma curva fechada no plano- w .

Para obtermos a velocidade complexa para o potencial (4.35) é necessário entender que a velocidade em um ponto Q exterior ao cilindro elíptico corresponde a velocidade no ponto P exterior ao cilindro circular, (MILNE-THOMPSON, 1996, p. 164). Dessa forma, Spurk e Aksel (2008, p. 373 e 374) afirmam que o potencial $W(z) = \phi + i\psi$ para o ponto P é igual ao potencial $W(w)$ para o ponto Q obtido pela inserção da função de mapeamento

$$W(z) = W(z(w)) = W(w).$$

Assim, a velocidade complexa para o potencial (4.35) pode ser dada por

$$\frac{dW}{dw} = \frac{dW}{dz} \frac{dz}{dw},$$

portanto

$$\frac{dW}{dw} = \frac{dW/dz}{dw/dz}.$$

Como

$$\frac{dW}{dz} = U e^{-i\alpha} - \frac{UR^2}{e^{-i\alpha}} \frac{1}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$

e

$$\frac{dw}{dz} = 1 - \frac{c^2}{z^2}$$

temos que

$$\frac{dW}{dw} = U e^{-i\alpha} \frac{z^2}{z^2 - c^2} - \frac{UR^2}{e^{-i\alpha}} \frac{1}{z^2 - c^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{z}{z^2 - c^2}.$$

Assim, quando $w \rightarrow \infty$ tem-se que $z \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{w \rightarrow \infty} W'(w) = U e^{-i\alpha} \quad \text{e} \quad \oint_C W'(w) dz = \Gamma.$$

O resultado da integral é obtido usando a técnica de frações parciais e o Corolário 3.3.

Para o escoamento em torno de uma placa devemos tomar $R - \frac{c^2}{R} = 0$ na equação (4.31), ou seja, $c = R$. Desse modo, o cilindro elíptico se degenera a uma placa finita de comprimento $4R$, Figura 49a. O potencial complexo que modela escoamento em torno dessa placa é calculado do mesmo modo como feito para o caso do cilindro elíptico, porém levando em conta que

$$\left(w + \sqrt{w^2 - 4R^2}\right)^{-1} = \frac{1}{4R^2} \left(w - \sqrt{w^2 - 4R^2}\right). \quad (4.36)$$

À vista disso, o potencial complexo para o escoamento em torno da placa é dado substituindo a equação (4.36) em (4.35). Depois de feita as simplificações, o potencial é dado por

$$W(w) = U \left(w \cos(\alpha) - i\sqrt{w^2 - 4R^2} \sin(\alpha)\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4R^2})}{R}\right). \quad (4.37)$$

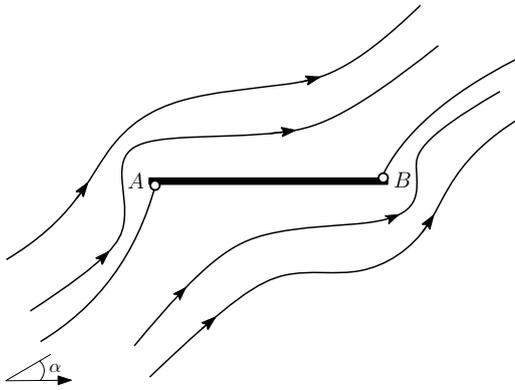
O escoamento para esse potencial é visto na Figura 51. A figura Figura 51c representa o escoamento em torno de uma placa visto no álbum de Dyke (1982, p. 9). Em particular, segundo Acheson (2005, p. 137), a velocidade do escoamento é em geral infinita nos pontos A e B (extremos da placa), Figura 51a, pois a velocidade complexa

$$W'(w) = U \left[\cos(\alpha) - i \frac{\sin(\alpha)}{2} \left(\frac{2w}{\sqrt{w^2 - 4R^2}} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1 + \frac{w}{\sqrt{w^2 - 4R^2}}}{w + \sqrt{w^2 - 4R^2}} \right) \right]$$

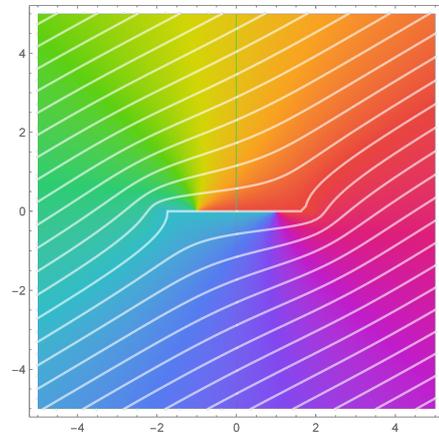
do potencial (4.37) diverge nos pontos $A(-2R, 0)$ e $B(2R, 0)$. Assim, deve-se ter cuidado com a velocidade em regiões que possuem vértices (pontos angulosos), porque a Equação de Bernoulli é constante ao longo de uma linha de corrente e conseqüentemente a velocidade não pode divergir em algum ponto dessa linha. Esse cuidado é estendido ao aerofólio de Joukowski, pois o mesmo apresenta um bordo de fuga afiado (cúspide). Para isso, será necessário uma hipótese adicional para corrigir o problema da divergência da velocidade nesse local.

Figura 51

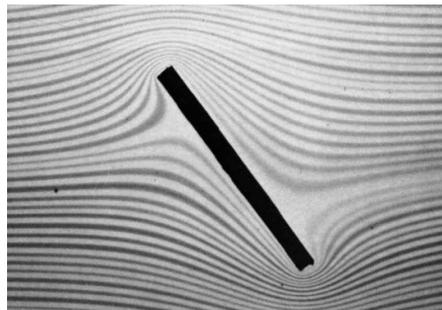
(a) Esboço do escoamento em torno de uma placa com $\Gamma = 0$.



(b) Simulação feita no Matrematica 12.0 para o potencial (4.37) com o cilindro centrado na origem, raio $R = 1$, $c = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $U = 1$ e $\Gamma = 0$.



(c) Escoamento em torno de uma placa com número de Reynolds $R_e \ll 1$, foto 3.



Fonte: O autor, 2019/Dyke (1982).

4.4.2 Escoamento em torno do Aerofólio de Joukowski

Modelar o escoamento em torno do cilindro elíptico e de uma placa nos ajudaram a construir o potencial complexo (4.35) e verificar a divergência da velocidade complexa nos pontos angulosos da placa. A utilidade desses resultados são importantes porque o potencial complexo apropriado para o escoamento em torno do aerofólio de Joukowski é resultado do potencial que descreve o escoamento em torno do cilindro elíptico, com o cilindro deslocado da origem, e pela preocupação com velocidade complexa na cúspide ou bordo de fuga do aerofólio de Joukowski.

O aerofólio de Joukowski, dado na Figura 49h, é gerado a partir de um cilindro com centro deslocado da origem quando mapeado pela função (4.30).

Para estudarmos o escoamento em torno desse perfil considere um cilindro de raio R centrado em $z_0 = a + ib$. O potencial complexo para um escoamento em torno desse cilindro, que apresenta um vórtice, é

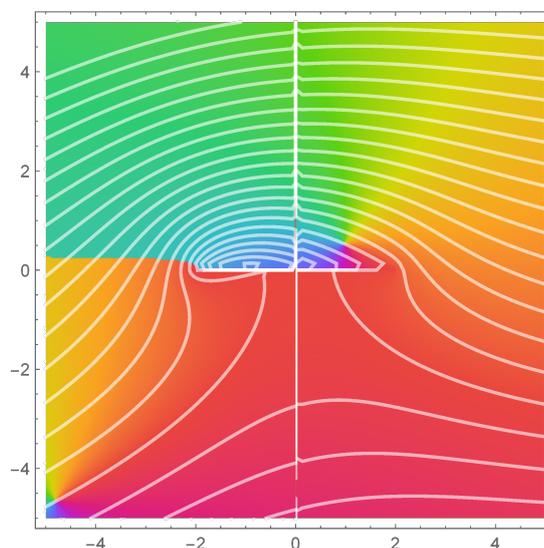
$$\begin{aligned} W(z) &= U e^{-i\alpha}(z - z_0) + U \frac{R^2}{e^{-i\alpha}(z - z_0)} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{z - z_0}{R} \right) \\ &= U \left(e^{-i\alpha}(z - z_0) + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{z - z_0} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{z - z_0}{R} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Quando compomos o potencial complexo (4.38) com (4.33) (com a parcela positiva da raiz) obtemos o potencial complexo adequado ao aerofólio de Joukowski, (ACHESON, 2005, p. 139). Esse potencial é dado por

$$\begin{aligned} W(w) &= U \left(e^{-i\alpha} \left(\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2}) - z_0 \right) + \frac{R^2 e^{i\alpha}}{\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2}) - z_0} \right) \\ &\quad + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{\frac{1}{2}(w + \sqrt{w^2 - 4c^2}) - z_0}{R} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

O potencial (4.39) mapeia o escoamento em torno do cilindro, de centro $z_0 = -0.209 + i0.2737$ e raio $R = 1.2398$, no escoamento em torno do aerofólio de Joukowski, Figura 52.

Figura 52 – Escoamento em torno do aerofólio assimétrico de Joukowski feito no Mathematica 12.0 para o potencial (4.39) com o cilindro centrado em $z_0 = -0.209 + i0.2737$, raio $R = 1.2398$, $c = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{18}$, $U = 1$ e $\Gamma = 15$.



Fonte: O autor, 2019.

Assim como no escoamento em torno do cilindro elíptico, o escoamento em torno do aerofólio preserva a velocidade no infinito $U e^{-i\alpha}$ e a circulação Γ . Para isso basta proceder de modo análogo a subseção 4.4.1.

Observando as Figuras 49a, 49c, 49d, 49f, 49g e 49h percebe-se que quando a circunferência passa pelo ponto $z = 1$ têm como imagens pontos que são vértices. Desse modo, segundo Pontes e Mangiavacchi (2016, p. 178 a 180)

[...] A tangente a uma curva C' no plano w , cujos pontos são pontos de um plano z sob ação da Transformação de Joukowski, são tais que:

$$\dot{w} = \dot{z} f'(z) = \dot{z} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right).$$

O ângulo entre as tangentes a duas curvas que passam pelo mesmo ponto z_0 preservam-se, exceto na singularidade $z = 0$ e nos pontos em que $f'(z) = 0$. Em tais pontos o ângulo com o qual as curvas são giradas, $\arg(z)$, é indefinido. [...] A tangente às curvas é descontínua na imagem desse ponto.

Para demonstrar essa última afirmação de Pontes e Mangiavacchi (2016) é necessário verificar o comportamento das retas tangentes a circunferência numa vizinhança de $z = 1$ quando aplicada à transformação (4.30).

Analisando o $\lim_{z \rightarrow 1} w'(z)$ numa vizinhança de $z = 1$ com a seguinte mudança de variável $z = e^{i\theta}$ quando $\theta \rightarrow 0$ temos

$$\lim_{z \rightarrow 1} w'(z) = \lim_{z \rightarrow 1} 1 - \frac{1}{z^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 - e^{-2i\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} 1 - \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).$$

Agora, para entender a variação angular da tangente a circunferência basta verificar a variação de $\text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{1-\cos(2\theta)}\right)$ quando $\theta \rightarrow 0$. Desta maneira, o

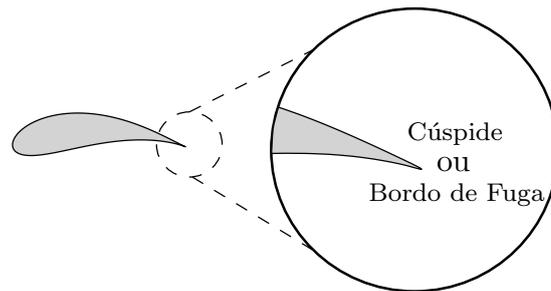
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \text{tg}^{-1}\left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{1-\cos(2\theta)}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\lim_{\theta \rightarrow 0}\left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{1-\cos(2\theta)}\right)\right)$$

e pela Regra de L'Hopital

$$\text{tg}^{-1}\left(\lim_{\theta \rightarrow 0}\left(\frac{\cos(2\theta)}{\text{sen}(2\theta)}\right)\right) \quad (4.40)$$

O limite (4.40) não existe, pois quando $\theta \rightarrow 0^-$ o limite é $-\frac{\pi}{2}$ e quando $\theta \rightarrow 0^+$ o limite é $\frac{\pi}{2}$. Como a velocidade complexa diverge em $z = 1$ temos que a transformação (4.30) mapeia o ponto $z = 1$ em um ponto anguloso no plano- w . Esse ponto é chamado de cúspide por Batchelor (2000, p. 441) ou bordo de fuga por Chanson (2014, p. 159), Figura 53.

Figura 53



Fonte: O autor, 2019.

O aerofólio de Joukowski tem o que Pontes e Mangiavacchi (2016, p. 182) chamam de diedro, que se assemelha a uma quina. Segundo Batchelor (2000, p.435 a437), escoamentos nessas quinas geram velocidades que divergem, por exemplo o escoamento em uma placa, Figura 51a. Velocidades com essas características não são convenientes pela Equação de Bernoulli (2.46), como dito na subseção 4.4.2. Vallentine (1967, p. 145) explica que pontos singulares são onde teoricamente a velocidade é infinita (divergente), esses pontos incluem os centros das fontes, sorvedouros, vórtices e cantos afiados.

Pensando em uma solução, Batchelor (2000, p.435 a437) diz que a circulação Γ tem um papel fundamental na correção da velocidade no infinito no bordo de fuga do aerofólio de Joukowski, porque ela faz com que os pontos de estagnação se movam no contorno do perfil. Vale lembrar que para os escoamentos em torno do cilindro e da elipse não haviam a necessidade dessa preocupação, já que as velocidades complexas para esses perfis não divergem no contorno e em nenhum ponto exterior a eles. Assim, Pontes e Mangiavacchi (2016, p. 182) dizem que geometrias que contêm um vértice externo necessitam de uma forma de seleção para a circulação Γ que se desenvolve em torno dos mesmos.

Para que a linha de corrente $\psi(x, y) = 0$ do potencial apropriado ao aerofólio de Joukowski satisfaça a equação de Bernoulli, devemos ter a velocidade complexa no bordo de fuga igual a zero, ou seja, o ponto de estagnação que surge na parte de jusante deve coincidir com o bordo de fuga. Essa é a **Hipótese de Kutta** que afirma que a circulação Γ em torno de um aerofólio sempre se ajusta para que a velocidade seja finita no bordo de fuga, (CHANSON, 2014, p. 159).

Conforme White (2011, p. 566), mesmo com o formato do aerofólio e ângulo de ataque (ângulo que a linhas de corrente a montante faz com o eixo real) específico a solução da teoria de escoamento potencial não é única, quando esse aerofólio perturba um escoamento uniforme. Porque podemos encontrar uma infinidade de soluções analíticas para diferentes valores da circulação, Figura 47. Assim, a Hipótese de Kutta é uma solução matemática para solucionar o problema da velocidade infinita no bordo de fuga do aerofólio.

Diante da Hipótese de Kutta devemos impor uma certa restrição a circulação de modo que seja possível solucionar a velocidade infinita que surge no bordo de fuga.

A velocidade complexa para o aerofólio de Joukowski é dada por

$$\frac{dW}{dw} = \frac{dW/dz}{dw/dz} = \frac{U \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{(z - z_0)^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z - z_0)}}{1 - \frac{1}{z^2}}. \quad (4.41)$$

Para que essa velocidade não seja infinita em $z = 1$ devemos impor que a equação do numerador seja zero. Em $z = -1$ temos um ponto interior ao aerofólio o que não representa um problema. Desse modo, a circulação Γ será escrita em função de outros parâmetros de maneira a termos um controle maior a respeito do posicionamento dos pontos de estagnação.

Para restringir o valor de Γ basta resolver a equação

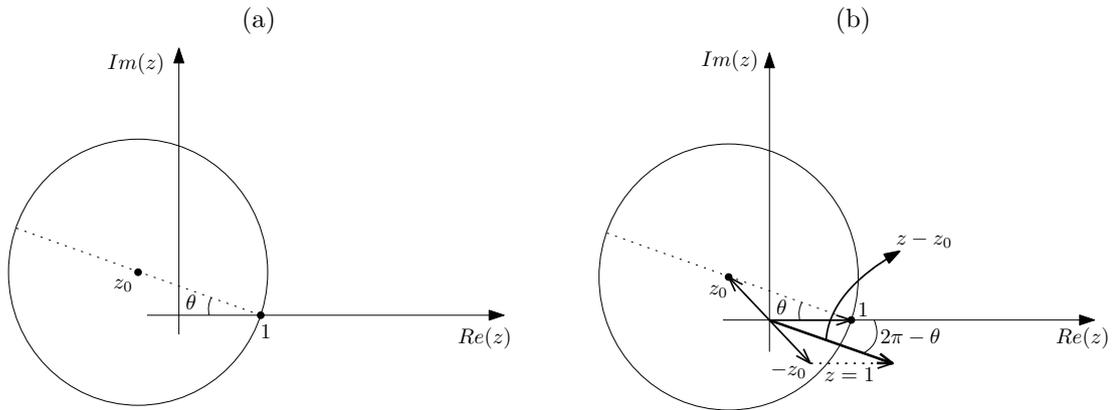
$$U \left(e^{-i\alpha} - \frac{R^2 e^{i\alpha}}{(z - z_0)^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z - z_0)} = 0, \quad (4.42)$$

de modo que permita acabar com a divergência da velocidade no bordo de fuga. Para isso é necessário substituir

$$z - z_0 = Re^{i(2\pi - \theta)} = Re^{-i\theta} \quad (4.43)$$

na equação (4.42), veja Figura 54. O ângulo θ de interesse é representado na Figura 54a.

Figura 54



Fonte: O autor, 2019.

Assim, podemos reescrever a equação como

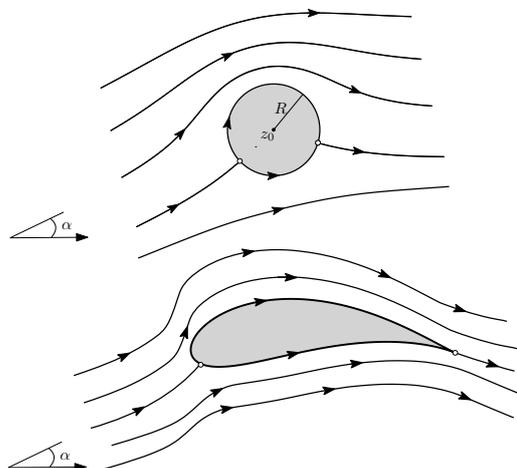
$$\begin{aligned}
 0 &= U(e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha+2\theta)}) + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i\theta} \\
 i\Gamma &= -2\pi RU(e^{-i(\alpha+\theta)} - e^{i(\alpha+\theta)}) \\
 i\Gamma &= 4\pi RU i \operatorname{sen}(\alpha + \theta) \\
 \Gamma &= 4\pi RU \operatorname{sen}(\alpha + \theta).
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

A equação (4.44) diz que o controle sobre a circulação Γ é feito da velocidade e do ângulo de ataque, pois $R = 1.2398$ e $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{0.2737}{1.209}\right)$ são fixos. Uma observação importante sobre essa equação é que ela foi obtida assumindo que a circulação no potencial complexo (4.39) é negativa, por esse motivo a equação (4.44) apresenta um valor positivo para Γ .

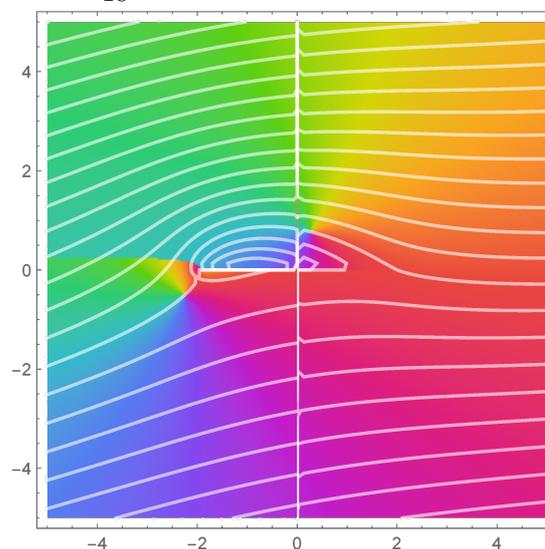
O escoamento em torno do aerofólio de Joukowski requer a Hipótese de Kutta para seja válido o potencial complexo que descrever esse escoamento, pois sem essa Hipótese haverá soluções (porque para cada valor de circulação existirá uma solução para o potencial complexo) cuja a velocidade complexa será divergente no bordo de fuga (cúspide) como visto anteriormente. Do contrário, a equação de Bernoulli não se aplicaria na linha de corrente que forma o aerofólio, pois a mesma deve ser constante ao longo de uma linha de corrente, implicando na invalidação da modelagem. Diante do que foi explicado a Figura 55 representa o escoamento em torno do aerofólio de Joukowski, sob a hipótese de Kutta, quando modelado pelo potencial complexo (4.39).

Figura 55

(a) Esboço do escoamento em torno do cilindro mapeado pela transformação de Joukowski satisfazendo a Hipótese de Kutta.



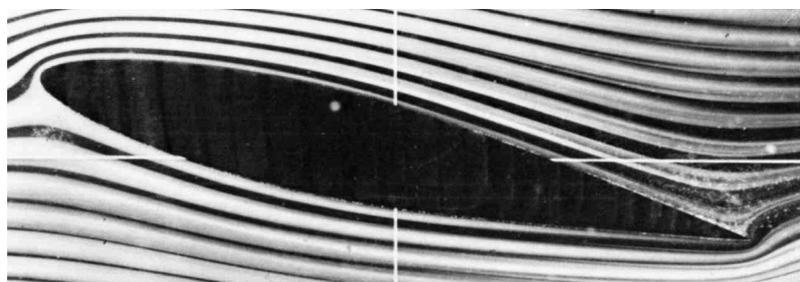
(b) Simulação feita no Mathematica 12.0 para o potencial (4.39) com o cilindro centrado em $z_0 = -0.209 + i0.2737$, raio $R = 1.2398$, $c = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{18}$, $U = 1$ e $\Gamma = 6.02636$.



Fonte: O autor, 2019.

Na foto 4 de Dyke (1982, p. 10), Figura 56, pode ser observado que o ponto de estagnação que surge na parte a jusante não coincide com o bordo de fuga. Mesmo em escoamentos reais isso é indesejado, porque pode ser gerada uma zona vorticidade na região entre o bordo de fuga e o ponto de estagnação causando um problema de desempenho aerodinâmico.

Figura 56 – Escoamento em torno de um aerofólio com o número de Reynolds $Re \ll 1$, foto 4.



Fonte: Dyke (1982).

5 ATIVIDADES NO GRUPO DE ESTUDO

A Escola Naval oferece dois cursos de Graduação: um em Administração e outro em Ciências Navais. Os cursos têm duração de 4 anos, e as disciplinas são anuais. Nos dois primeiros anos, os Aspirantes estudam disciplinas que são do ciclo básico: Física I e II, Cálculo I e II, Estatística e outras; nos dois últimos anos, eles estudam as disciplinas da Habilitação que escolheram: Administração, Máquinas, Eletrônica e Sistemas de Armas, as três últimas são para quem escolheu a Graduação em Ciências Navais.

Pensando no que disseram Biembengut e Hein (2016, p. 18)

[...] a matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dado ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico.

e Bassanezi (2015, p. 12)

O uso da modelagem no processo de ensino-aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade não somente em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas principalmente, na formulação de problemas originais uma etapa tão estimulante quanto a resolução.

iniciou-se o Grupo de Estudo na Escola Naval. Motivado pelos encontros com os alunos do GPMatEM (Grupo de Pesquisa em Matemática para o Ensino Médio) do Pedro II e pela professora Luciana Martino o Grupo tem como propósito estimular o desejo de estudar Matemática Aplicada dentro do contexto das disciplinas que eles possuem, incentivando-os a escreverem trabalhos de conclusão de curso voltados para suas áreas de Habilitação.

Como o tema desta dissertação está relacionado com a ementa da disciplina de Cálculo II, a qual aborda EDO de 2ª ordem, Transformada de Laplace, Séries Numéricas e Séries de Taylor e o Cálculo Vetorial envolvendo os principais teoremas: Green, Gauss e Stokes, a proposta para o grupo foi estudar a Matemática como ferramenta de modelagem em escoamentos potenciais.

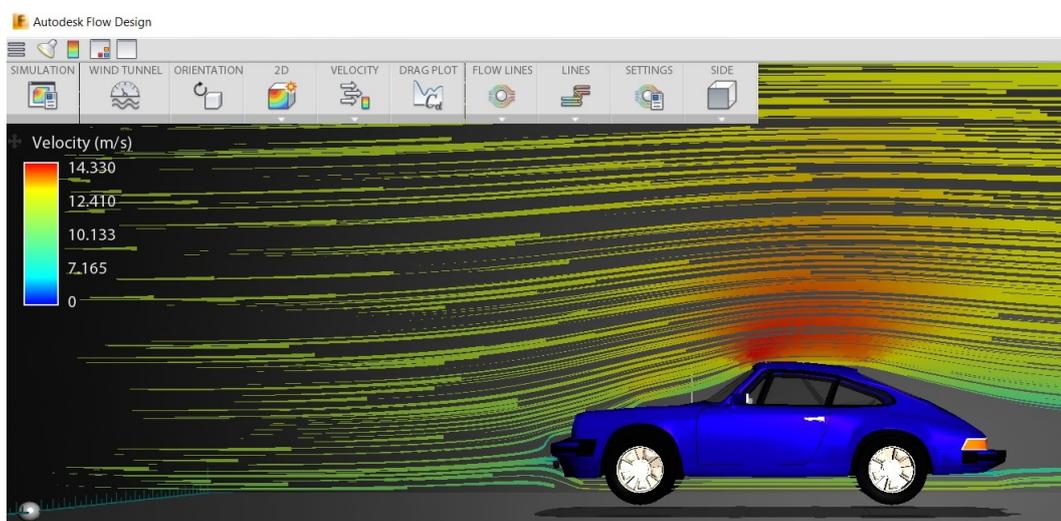
Segundo Biembengut e Hein (2016, p. 13 e 14) dentre um série de procedimentos para a modelagem matemática três se destacam: Interação, Matematização e Modelagem Matemática.

A Interação é o procedimento em que é exposta a situação-problema que se deseja trabalhar, familiarizando e contextualizando o assunto com os alunos e indicando os referenciais teóricos.

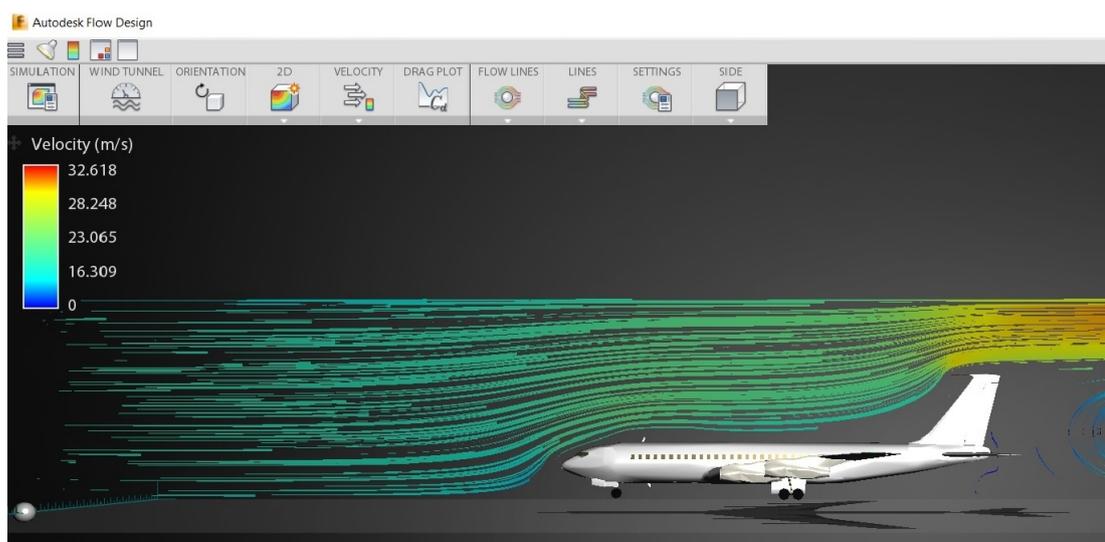
O Grupo de Estudo teve seu início no dia 11 de julho de 2019, com 12 Aspirantes. Com o intuito de despertar o interesse deles pelo assunto foi proposto que analisassem visualmente a relação entre a velocidade e a pressão através do simulador de túnel de vento Autodesk Flow Design, disponível de forma gratuita pela empresa Autodesk. No início da atividade foi pedido aos Aspirantes que estabelecessem uma relação entre a velocidade e a pressão apenas visualizando as cores apresentadas pelo simulador nos contornos do carro e do avião. As Figuras 57 e 58 representam o que eles visualizavam no momento da atividade.

Figura 57 – Imagens do simulador de túnel de vento com dados de velocidade.

(a)



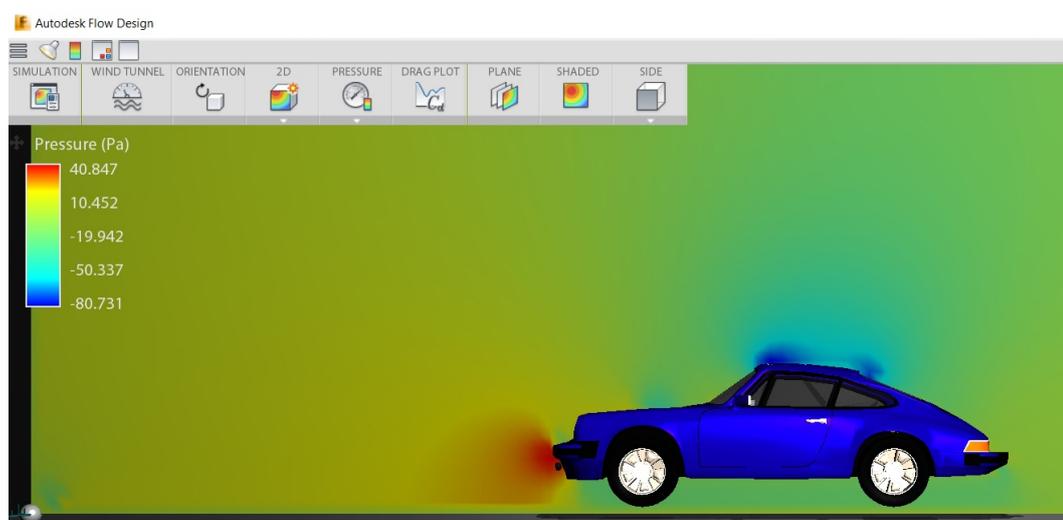
(b)



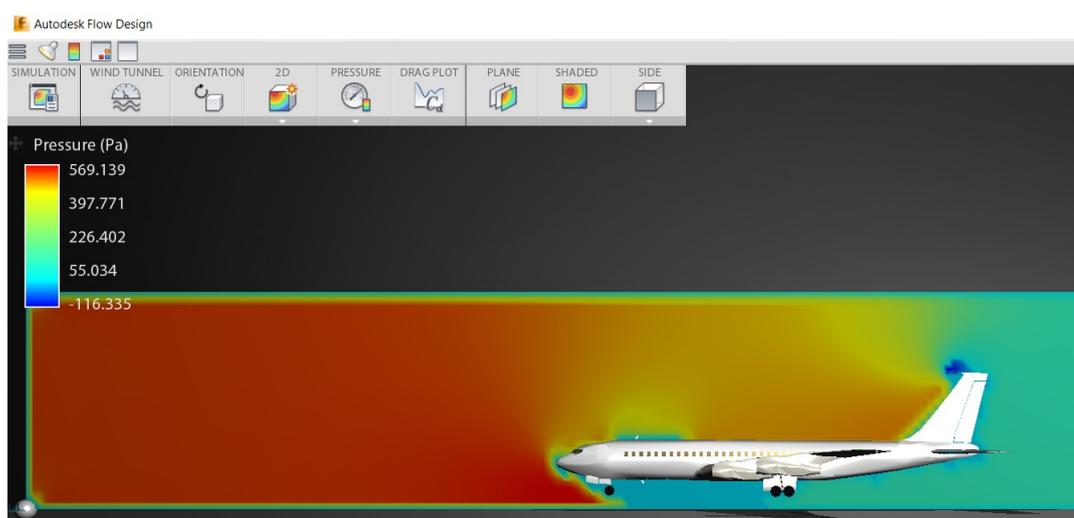
Fonte: Software Autodesk Flow Design.

Figura 58 – Imagens do simulador de túnel de vento com dados de pressão.

(a)



(b)



Fonte: Software Autodesk Flow Design.

Não houve surpresa nas respostas, porque a maioria dos alunos entenderam que a velocidade e a pressão eram grandezas inversamente proporcionais. Entretanto, entenderam que quando equacionadas a velocidade e a pressão estariam relacionadas por um produto. Dois alunos do terceiro ano responderam que estariam relacionadas pela equação de Bernoulli. Após alguns comentários sobre as respostas, foi feita a apresentação do tema a ser estudado pelo Grupo: "A Matemática como Ferramenta de Modelagem em Escoamentos Potenciais", com os seguintes objetivos:

- Destacar a proximidade da área da Dinâmica de Fluidos à Matemática.
- Enfatizar a importância da Matemática para a formação dos Aspirantes.

- c) Despertar o interesse pela Matemática usando a aplicabilidade dela em fluidos.
- d) Incentivar os Aspirantes a escreverem trabalhos de conclusão de curso voltados para sua área de Habilitação.

Definimos que a ferramenta matemática usada para a modelagem nos escoamentos seria a Análise Complexa e da mesma forma definimos cada hipótese que seria adotada sobre o escoamento (regime permanente, incompressível, irrotacional e invíscido).

Nos dias 18 de julho e 8 de agosto conversamos como seria a análise do movimento de uma partícula no escoamento. Para isso duas descrições seriam fundamentais a euleriana e a lagrangiana. Com o auxílio das Figuras 2 e 4, páginas 18 e 19, foi explicada a diferença dessas descrições usando o exemplo de duas pessoas que se observam, sendo uma esperando um ônibus e outra dentro do ônibus em movimento. A pessoa que está no ponto do ônibus observa a pessoa dentro do ônibus pela descrição lagrangiana, ou seja, ela acompanha a pessoa na sua trajetória. Já a pessoa que está dentro do ônibus observa quem está no ponto sob a descrição euleriana, em um ponto fixo.

Também foi definido o conceito de derivada material. Usamos a aceleração para entender a estrutura dessa derivada e o exemplo do esguicho para entender o termo advectivo que surge na equação, esse termo é o responsável por acelerar as partículas de fluido pelo bocal do esguicho. Nesse dia, decidimos que construiríamos um túnel de vento e contamos com a presença do professor Nide Geraldo, do departamento de Mecânica, que ficou entusiasmado com a construção e com o Grupo.

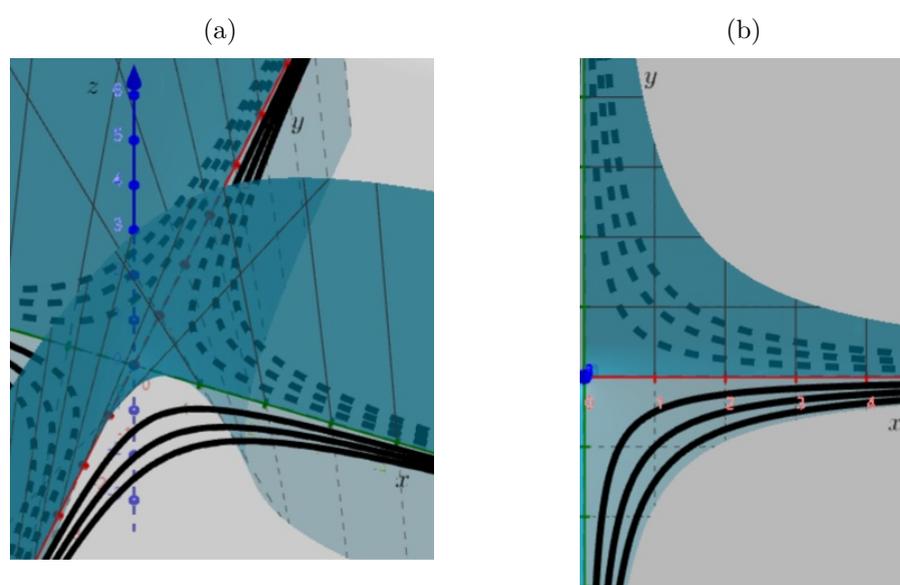
A partir do dia 8 de agosto entramos no procedimento de matematização da situação-problema. Segundo Biembengut e Hein (2016, p. 14), essa é a fase mais longa por ser o momento em que se classifica o que de fato importa para construirmos o modelo e na qual se escrevem as relações em termos matemáticos (por exemplo, a relação entre a velocidade e a pressão apresentada no primeiro dia).

No dia 15 de agosto foi feita uma pausa nos conceitos básicos da Mecânica dos Fluidos para estudarmos as funções complexas. Definimos uma função complexa, limite e derivada dessa função e em seguida uma função complexa analítica, sempre tentando buscar as semelhanças com as funções reais e dando a importância para as diferenças, principalmente para os termos diferenciabilidade e analiticidade. Uma pergunta partiu dos Aspirantes foi: “*o que a função analítica tem de especial?*”. A resposta veio por meio do Teorema 3.4, página 55, que estabelece como condição necessária e suficiente para que uma determinada função complexa seja analítica em uma região D , das condições de incompressibilidade e irrotacionalidade do escoamento e uma breve associação com as equações de Cauchy-Riemann.

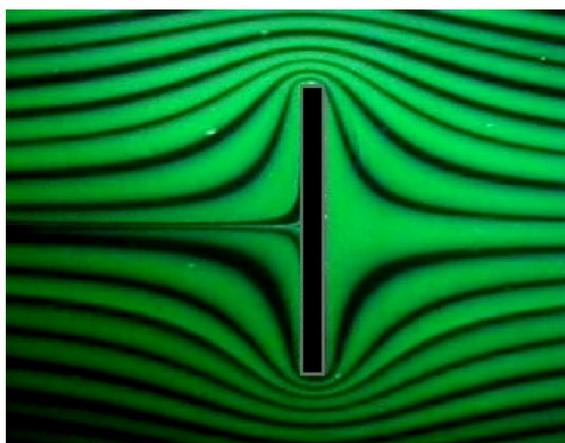
Como exemplo de aplicação utilizou-se o Exemplo 4.1, página 79. Primeiro inter-

pretamos as superfícies que compõem as partes real e imaginária da função complexa apresentada nesse exemplo. Depois interpretamos as curvas nível da parte imaginária no 1º e 4º quadrantes. Para isso usamos o GeoGebra 6.0. Já havia sido dito aos alunos que a parte imaginária é importante na visualização do escoamento. Foram comparadas as curvas de nível obtidas com o vídeo que representa um escoamento na direção de uma placa plana apresentada no CD-ROM de Homsy et al. (2007).

Figura 59 – Comparação do resultado das curvas de nível com a imagem de um vídeo apresentado em Homsy et al. (2007).



(c) Movimento do fluido acontece da direita para a esquerda.



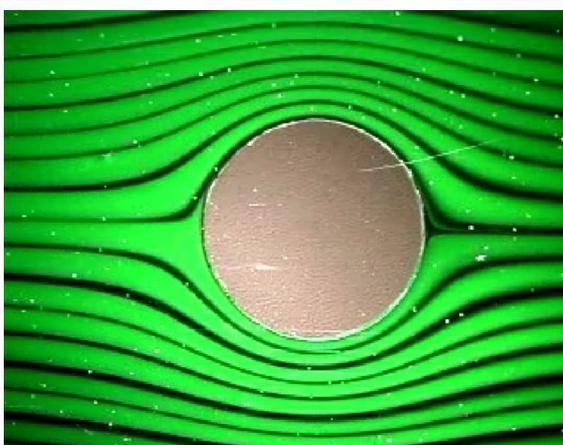
Fonte: O autor, 2019/Homsy et al. (2007).

Com base em Vallentine (1967, p. 30) e observando a Figura 59, concluímos que o Exemplo 4.1 pode ser interpretado como um escoamento na direção de uma placa plana. A aula terminou com a seguinte pergunta: *qual é a contribuição que a parte real e a parte imaginária de uma função complexa analítica oferecem em Dinâmica de Fluidos?*

Nos dia 5 e 12 de setembro falamos sobre funções harmônicas e a Equação de Laplace. Definiu-se a função harmônica, o Teorema 3.6 foi interpretado e foi explicada a importância das partes real e imaginária da função complexa satisfazerem a Equação de Laplace e a consequência disso no estudo de escoamento (a superposição de funções complexas analíticas ainda será um função complexa analítica).

Para tentar ser o mais claro possível, utilizou-se o vídeo de Homsy et al. (2007) que simula o escoamento em torno do cilindro circular. A Figura 60 representa a imagem desse escoamento.

Figura 60 – Imagem de um vídeo apresentado em Homsy et al. (2007).



Fonte: Homsy et al. (2007).

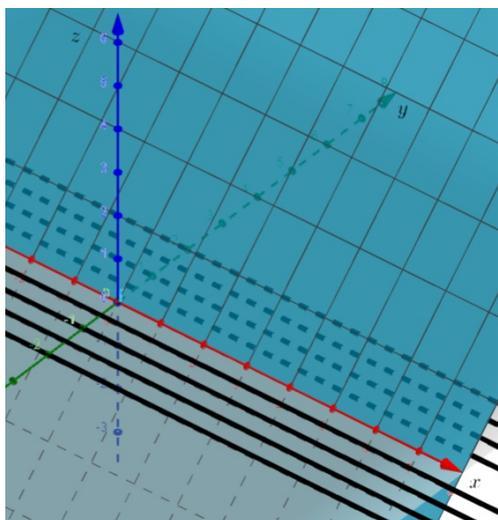
Em seguida interpretamos as curvas de nível da parte imaginária das seguintes funções

$$f(z) = z = x + iy \quad \text{e} \quad f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (5.1)$$

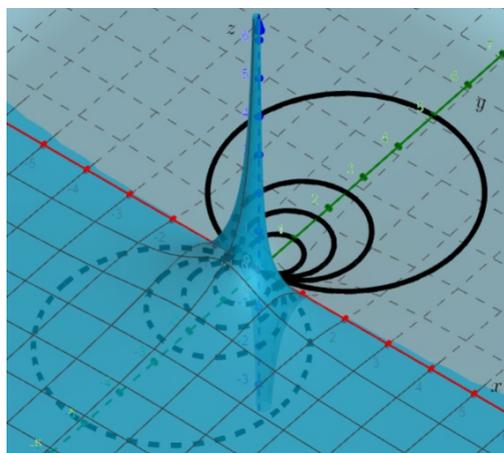
com o objetivo de visualizar o comportamento das curvas de nível. Nesse momento o foco estava na parte imaginária, pois ela é a responsável pela informação das linhas de corrente. As Figuras 61a e 61b representam as curvas de nível dessas funções, respectivamente.

Figura 61 – Curvas de Nível.

(a) Curvas de nível da parte imaginária da função $f(z) = z$.



(b) Curvas de nível da parte imaginária da função $f(z) = \frac{1}{z}$.



Fonte: O autor, 2019.

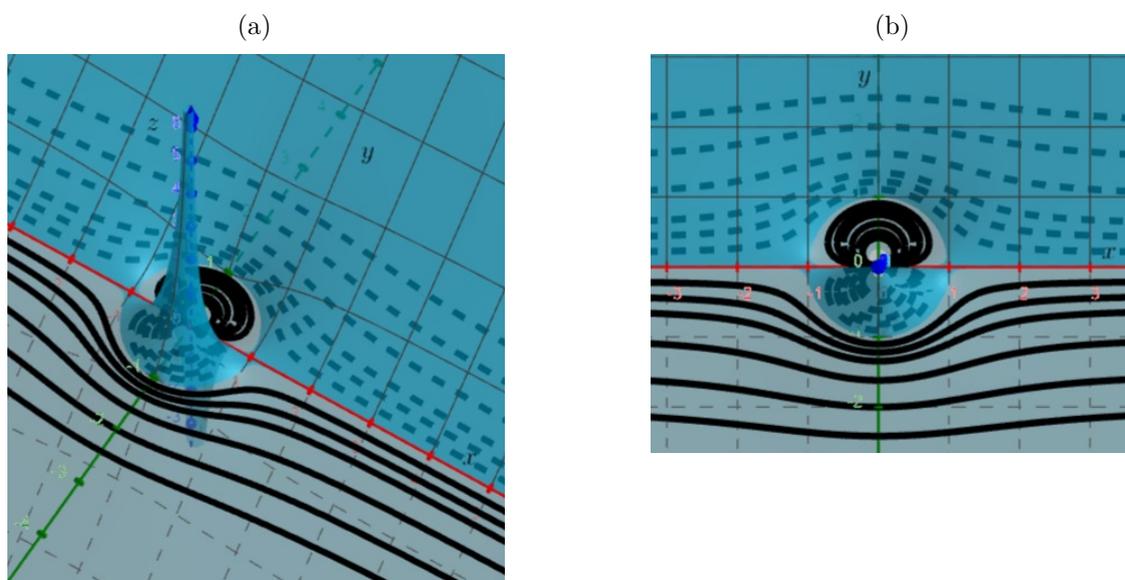
Com os conceitos apresentados verificou-se que a função

$$f(z) = z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (5.2)$$

satisfaz a equação de Laplace e, como consequência, suas componentes real e imaginária são harmônicas. Então foi questionado qual seria a representação das curvas de nível dessa função que é a superposição das funções dadas em (5.1)? Ninguém arriscou a resposta.

Com a ajuda do GeoGebra observamos o resultado apresentado nas Figuras 62a e 62b, e em seguida comparamos com a Figura 60.

Figura 62 – Curvas de nível da parte imaginária da função $f(z) = z + \frac{1}{z}$.



Fonte: O autor, 2019.

Assim, com base em Vallentine (1967, p. 120), concluímos que as curvas de nível da parte imaginária da função (5.2) são uma representação das linhas de corrente de uma escoamento em torno de um cilindro circular.

Nesse momento foi retomada a pergunta da aula do dia 15 de agosto. Dada uma função analítica de interesse a parte real está relacionada ao potencial de velocidade do fluido e a parte imaginária com as linhas de corrente.

No dia 19 de setembro estudamos a integral complexa, em particular o Teorema de Cauchy. Esse foi o primeiro teorema que demonstramos, não que os anteriores não merecessem uma atenção, e sim porque em sua demonstração faz-se uso do Teorema de Green. Sabendo disso, fomos conversando e escrevendo a demonstração até chegarmos nesta expressão

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C Mdx - Ndy + i \oint_C Mdx + Ndy. \quad (5.3)$$

Com base na equação (5.3) eles deveriam pensar em um teorema estudado na disciplina de Cálculo II, de modo que, pudéssemos usar as hipóteses desse teorema para terminar a demonstração. As repostas iniciais foram: integrais de linha e integral de linha do tipo trabalho. Conduzi-os a se indagarem: qual teorema em duas dimensões, no Cálculo Vetorial, que apresenta no integrando a diferença das derivadas parciais das componentes de um campo de velocidades? A grande parte lembrou-se do Teorema de Green e a partir daí eles próprios finalizaram a demonstração utilizando o resultado da equações de Cauchy-Riemann. O resultado foi positivo, pois conseguiram demonstrar um teorema, de

um assunto novo para todos, com ferramentas que eles se perguntavam para que estavam estudando.

Em seguida foram conduzidos a pensar na seguinte sequência de assuntos: campo rotacional ($\text{rot}(\vec{V})$), Teorema de Green (o integrando contém somente componente \vec{k} do $\text{rot}(\vec{V})$), Teorema de Cauchy (independência do caminho), equações de Cauchy-Riemann e a hipótese do escoamento ser irrotacional ($\text{rot}(\vec{V}) = 0$), com a finalidade de associarem essas ideias. Eles concluíram que campo rotacional nulo faz com que a integral do Teorema de Green seja nula e, como provamos o Teorema de Cauchy usando o Teorema de Green onde apareceram as equações de Cauchy-Riemann, então concluíram que a hipótese de o escoamento ser irrotacional pode estar ligada às equações de Cauchy-Riemann de algum modo. Para finalizar o encontro enunciámos o Corolário 3.3 e falamos sobre a semelhança desse Corolário com o uso do Teorema de Green em regiões com furos.

No dia 26 de setembro o grupo foi conduzido pelo professor Nide Geraldo, que falou sobre o Teorema do Transporte de Reynolds. Inicialmente ele falou sobre as formas de resolver um problema de engenharia, sendo elas: Análises Teórica, Experimental e Numérica. A Análise Teórica seria uma abordagem em que existe a necessidade de haver hipóteses de controle para obtenção de uma solução analítica, como feito neste trabalho. Na Análise Experimental não requer hipóteses simplificadoras, sendo feita a coleta reais dos dados do experimento com instrumentos ou observações. Finalmente, a Análise Numérica é usada para solucionar problemas mais difíceis que não seja possível encontrar uma solução analítica para um problema, por exemplo, a solução de equações que envolvam as equações de Navier-Stokes na forma completa. Nesse universo as três abordagens se completam. Por exemplo, caso houvesse a necessidade de se fazerem experimentos para aperfeiçoar um aerofólio de carro de F1 somente usando o laboratório elevaria em demasia o custo do projeto, pois seria descartado cada aerofólio que não atendesse ao esperado.

A demonstração do Teorema do Transporte de Reynolds feita pelo professor Nide Geraldo se deu por meio de um volume de controle fixo. Isso proporcionou aos Aspirantes aprender uma forma nova de olhar o teorema, pois neste trabalho o teorema é provado pela descrição lagrangiana. Na construção das integrais envolvidas no teorema, os Aspirantes perceberam a correlação com os resultados apresentados na disciplina de Cálculo II, em particular a interpretação do sinal do resultado de escoamento através de uma superfície. Desse modo, alguns Aspirantes perceberam essa correlação entre Cálculo II e a teoria de fluídos, através do Teorema do Transporte.

No dia 17 de outubro o grupo estudou a Equação de Conservação de Massa conduzido pelo professor Nide Geraldo. A equação foi deduzida a partir do Teorema do Transporte de Reynolds tomando um volume de controle fixo. Antes, os alunos foram levados a pensar no escoamento através das superfícies do volume de controle e conseguiram chegar ao resultado apresentado no final da seção 2.5.1.

Considerando o Teorema do Transporte, no qual a taxa de variação de massa do sistema é zero, usamos o Teorema de Gauss para deduzir a equação (2.15), pois verificou-se que as hipóteses do teorema eram satisfeitas. A dedução dessa equação nos permitiu pensar na construção da função de corrente, função essa que compõe a parte imaginária da função potencial complexa (4.12).

Como resultado desses encontros, no dia 19 de outubro tivemos nossa primeira participação em um evento externo com dois trabalhos apresentados no FestMat do Colégio Pedro II na Tijuca. Os temas abordados pelos Aspirantes foram "O quanto de matemática eu preciso para gerar uma força de sustentação em um aerofólio" e "A Esteira de Von Kármán".

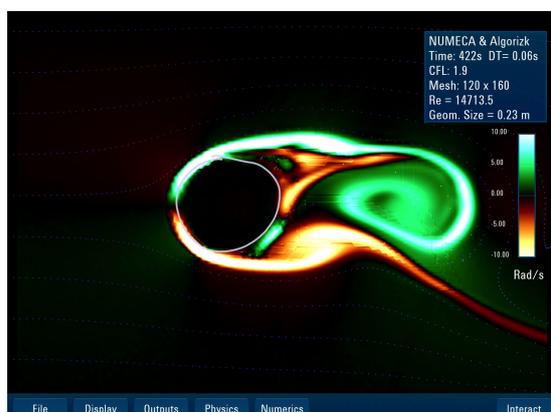
Ambos os grupos deram foco à importância da matemática para os temas propostos, em especial os números complexos e o logaritmo. Eles usaram dois aplicativos que permitem a interação com o usuário e que ajudaram em suas explicações sobre os temas, são eles: WindTunnel CFD e Sail Flow Analysis.

WindTunnel CFD, usado por ambos os grupos, permitiu visualizar o escoamento em torno de objetos quaisquer, pois ele viabiliza que o usuário desenhe o objeto na tela do celular ou tablet, isto é, ele permite que o usuário coloque objetos no escoamento para visualizar o comportamento do fluido em seu contorno. Com esse aplicativo foi possível visualizar o surgimento da esteira de Von Kármán e entender o papel da viscosidade na produção de vórtices, Figuras 63a, assim como, visualizar a distribuição de pressão em um aerofólio, 63b. A explicação sobre os vórtices permitiram que os ouvintes entendessem o porquê de quando uma carreta e um carro se encontram, em sentidos opostos, em uma pista de velocidade média alta, o carro sofre um certo balanço, fato esse causado pela interação dos vórtices produzido por ambos, sendo a intensidade do caminhão um pouco maior.

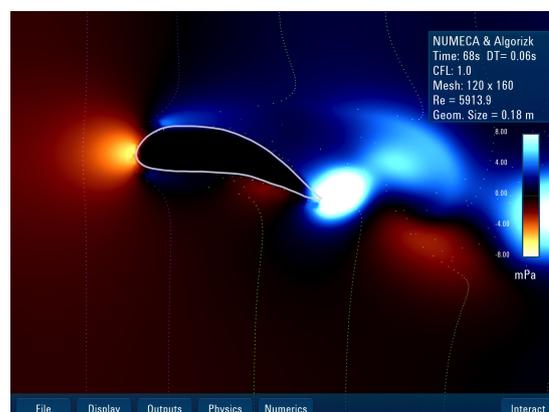
O Sail Flow Analysis é um aplicativo que permite que o usuário simule condições de vento para possibilitar manobras na vela do barco. A atividade de navegar em barco a vela é parte das atividades do Aspirantes na Escola Naval, isso viabilizou o uso do aplicativo para mostrar o escoamento em torno da vela de um barco, possibilitando entender o surgimento da força que proporciona o aumento ou a diminuição da velocidade do barco. A vela, nesse caso, foi interpretada como um aerofólio, Figura 63c.

Figura 63 – Imagens dos Aplicativos usados pelos Aspirantes no FestMat.

(a) WindTunnel CFD



(b) WindTunnel CFD



(c) Sail Flow Analysis



Fonte: Aplicativos WindTunnel CFD e Sail Flow Analysis.

A ideia das apresentações era de explicar conceitos que apresentam nomes incomuns no dia a dia, mas que são de simples compreensão e de grande importância em estudo de performance. Essas apresentações contaram com a participação de 12 Aspirantes.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos que sob as hipóteses adequadas é possível usar as funções complexas analíticas como uma ferramenta para modelar escoamentos potenciais.

Sob as hipótese de escoamento em regime permanente, incompressível, irrotacional e invíscido a Equação de Conservação de Massa e a Equação da Quantidade de Movimento foram simplificadas. Com essas simplificações foram possíveis as construções dos potenciais complexos capazes de modelar os escoamentos vistos neste trabalho e deduzir a Equação de Bernoulli.

Definiu-se vorticidade e circulação, ambos importantes na teoria de escoamento. O Teorema de Stokes relaciona vorticidade e circulação e os Teoremas de Kelvin e Helmholtz estabelecem regras sobre seus comportamentos no escoamento. O Teorema de Kelvin diz que a circulação não varia com o tempo e o Teorema de Helmholtz diz que a vorticidade inicialmente nula permanecerá nula ao longo do escoamento.

Estabelecer essas condições sobre o escoamento foram importantes para uma interação entre a Mecânica dos Fluidos e a Análise Complexa, pois as funções complexas analíticas carregam propriedades importantes que viabilizam essa interação. Descrever essas propriedades foram necessárias para entender o comportamento dessa classe de função em resultados como das equações de Cauchy-Riemann, do Teorema de Cauchy e da Transformação Conforme, resultados chaves na formulação da Teoria Clássica do Aerofólio.

Quando foram construídas a função de corrente e a função potencial, fazendo uso das hipóteses sobre o escoamento, observou-se que essas funções satisfaziam as equações de Cauchy-Riemann e possuíam derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Com isso, foi possível construir um potencial complexo que carregavam em suas partes real e imaginária informações sobre o comportamento do escoamento. Dessa forma, esse potencial complexo foi capaz de modelar escoamentos, com vista bidimensional, em torno do cilindro circular e do aerofólio de Joukowski, que mostraram ser boas aproximações de experimentos vistos no álbum de Dyke (1982).

O último capítulo foi motivado pelos encontros com os alunos do GPMatEM (Grupo de Pesquisa em Matemática para o Ensino Médio) do Pedro II. Nele é descrito as atividades que foram desenvolvidas com os Aspirantes com o intuito estudar a contribuição da Matemática em Dinâmica dos Fluidos, em particular escoamentos potenciais, e incentivá-los a produzirem trabalhos de conclusão de curso dentro das habilitações possuem.

Para trabalhos futuros pretendo continuar na linha de pesquisa de Fenômenos de Transporte, com o propósito de pesquisar sobre Modelagem Matemática em Fenômenos de Transporte.

REFERÊNCIAS

- ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. *Complex Variables Introduction and Applications*. 2. ed. New York: Cambridge, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 54, 67, 69 e 139.
- ACHESON, D. J. *Elementary Fluid Dynamics*. 1. ed. New York: Clarendon Press . Oxford, 2005. Citado 5 vezes nas páginas 79, 80, 84, 101 e 102.
- APOSTOL, T. M. *Cálculo II*. 1. ed. Barcelona: Reverté, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 128.
- BAK, J.; NEWMAN, D. J. *Complex Analysis*. 3. ed. New York: Springer, 2010. Citado na página 139.
- BASSANEZI, R. C. *Modelagem Matemática Teoria e Prática*. 1. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2015. Citado na página 108.
- BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1. ed. New York: Cambridge, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 17, 45, 99 e 104.
- BERTIN, J. J.; CUMMINGS, R. M. *Aerodynamics for Engineers*. 5. ed. New Jersey: Person, 2008. Citado na página 96.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. 5. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 16, 108 e 111.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 79.
- BROWN, J. W.; CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 9. ed. São Paulo: Mc Gran Hill, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 48, 52 e 58.
- CHANSON, H. *Applied Hydrodynamics: An Introduction*. 1. ed. Rio de Janeiro: CRC Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 104 e 105.
- CHORIN, A.; MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3. ed. New York: Springer, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 26, 30 e 44.
- DYKE, M. V. *Album of Fluid Motion*. 1. ed. Stanford, California: Parabolic Press, 1982. Citado 6 vezes nas páginas 17, 85, 86, 101, 107 e 119.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica do Fluidos Fundamentos e Aplicações*. 3. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015. Citado 9 vezes nas páginas 18, 19, 23, 24, 28, 29, 35, 38 e 135.
- FERNANDEZ, C. S.; JR., N. C. B. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Citado na página 57.
- FILHO, J. K.; ALMEIDA, R. C. *Introdução à Modelagem Matemática*. 1. ed. Rio de Janeiro: Laboratório Nacional de Computação Científica, 2014. Citado na página 21.

- FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2012. Citado na página 88.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 18, 39, 41 e 42.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 4. Citado na página 60.
- _____. *Um Curso de Cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 3. Citado 3 vezes nas páginas 45, 67 e 72.
- HOMSY, G. M. et al. *Multimedia Fluid Mechanics*. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. CD-ROM. Citado 5 vezes nas páginas 11, 94, 95, 112 e 113.
- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 49, 59 e 78.
- MARTINO, L. S. da S. *Simulação Numérica de Escoamentos em Águas Rasas pelo Método de Diferenças Finitas*. Tese (Doutorado) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 21.
- MILNE-THOMPSON, L. M. *Theoretical Aerodynamics*. 5. ed. New York: Dover, 1973. Citado na página 84.
- _____. *Theoretical Hydrodynamics*. 5. ed. New York: Dover, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 83, 91, 93, 99, 100 e 140.
- MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. São Paulo: Blucher, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 18, 29, 42, 135 e 136.
- NACHBIN, A. *Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Citado na página 87.
- NACHBIN, A.; ZÁRATE, A. R. de. *Tópicos Introductorios à Análise Complexa Aplicada*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 64, 83, 85 e 88.
- NETO, A. L. *Funções de uma Variável Complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. Citado na página 68.
- OLVER, P. J. *Complex Analysis*. 2018. Data de acesso: 11 jun. 2019. Disponível em: <http://www-users.math.umn.edu/~%20olver/ln_/cml.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 97.
- PANTON, R. L. *Incompressible Fluid*. 3. ed. New Jersey: Wiley, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 45.
- PINTO, D.; MORGADO, M. C. F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. 3. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 72.
- PONTES, J.; MANGIAVACCHI, N. *Fenômenos de Transferência com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 10, 80, 88, 97, 103 e 104.

POPE, A. *Basic Wing and Airfoil Theory*. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1951. Citado 3 vezes nas páginas 91, 93 e 94.

RAPHALDINI, B.; RAUPP, C. F. M.; DIAS, P. L. da S. *Introdução Matemática à Dinâmica de Fluidos Geofísicos*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. wergner. *Otimização Contínua - Aspectos Teóricos e Computacionais*. 1. ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2013. Citado na página 32.

RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. 3. ed. New York: Cambridge, 2006. Citado na página 34.

RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1976. Citado na página 128.

SEARS, W. R. *Introduction Theoretical Aerodynamics and Hydrodynamics*. 1. ed. Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 99.

SHAMES, I. H. *Mecânica dos Fluidos volume 2*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1962. Citado na página 83.

SPIEGEL, M. R. *Análise Vetorial*. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 128.

SPURK, J. H.; AKSEL, N. *Fluid Mechanics*. 2. ed. New York: Springer, 2008. Citado na página 100.

STREETER, V. L.; WYLIE, E. B. *Mecânicas dos Fluidos*. 7. ed. São Paulo: Mac Graw Hill, 1982. Citado na página 23.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. *Cálculo*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. v. 2. Citado na página 40.

VALLENTINE, H. R. *Applied Hydrodynamics*. 2. ed. New York: Springer, 1967. Citado 10 vezes nas páginas 36, 44, 46, 81, 83, 104, 112, 115, 127 e 146.

ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 50, 51, 54, 76, 129, 143 e 146.

WHITE, F. M. *Mecânicas dos Fluidos*. 6. ed. New York: Mac Graw Hill, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 105.

WILCOX, D. C. *Basic Fluid Mechanics*. 2. ed. California: DCW, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 23, 42 e 83.

YAMAGUCHI, H. *Engineering Fluid Mechanics*. 1. ed. Netherlands: Springer, 2008. Citado na página 25.

ZILL, D. G.; SHANAHAN, P. D. *Curso Introductorio à Análise Complexa com Aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 48, 52, 67, 71, 96 e 142.

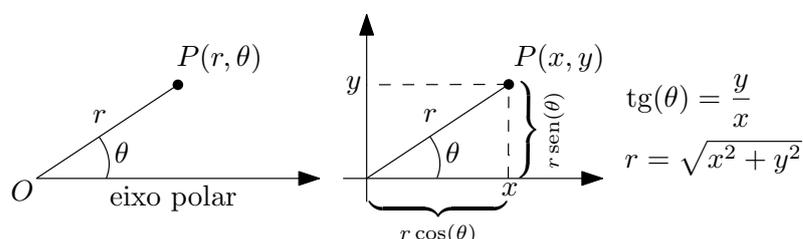
APÊNDICES

APÊNDICE A – FORMA POLAR PARA AS EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMMAN E PARA AS FUNÇÕES DE CORRENTE E POTENCIAL

As coordenadas cartesianas e polares estão relacionados pelas equações, Figura 64,

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta), r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right). \quad (\text{A.1})$$

Figura 64 – Relação entre as coordenadas cartesianas e polares.



Fonte: O autor, 2019.

Sejam \vec{e}_r e \vec{e}_θ versores no sistema de coordenadas polares, de modo que

$$\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}, \quad (\text{A.2})$$

sendo \vec{i} e \vec{j} vetores da base canônica do \mathbb{R}^2 .

A.1 Forma polar para as Equações de Cauchy-Riemann

Seja f uma função complexa definida por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com u e v função definidas nos reais, e para as quais valem as hipóteses do Teorema 3.4. Vamos supor que $z \neq 0$ e usar a transformação de coordenadas (A.1) para obtermos a forma polar das equações de Cauchy-Riemann. Utilizando a regra da cadeia para derivar u e v em relação a r e θ . Assim, em relação a u obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Agora, reescrevendo as expressões acima e substituindo $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta)$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)$, $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin(\theta)$ e $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos(\theta)$ obtêm-se

$$u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \quad \text{e} \quad u_\theta = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta). \quad (\text{A.3})$$

De forma análoga, encontramos para v

$$v_r = v_x \cos(\theta) + v_y \sin(\theta) \quad \text{e} \quad v_\theta = -v_x r \sin(\theta) + v_y r \cos(\theta). \quad (\text{A.4})$$

Como u e v cumprem as hipóteses do Teorema 3.4 em $z \neq 0$ valem

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x. \quad (\text{A.5})$$

Assim, podemos reescrever (A.4) como

$$v_r = -u_y \cos(\theta) + u_x \sin(\theta) \quad \text{e} \quad v_\theta = u_y r \sin(\theta) + u_x r \cos(\theta). \quad (\text{A.6})$$

Portanto, das equações (A.3) e (A.6) temos que

$$r u_r = v_\theta \quad \text{e} \quad -r v_r = u_\theta \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Forma polar para funções de corrente e potencial

Seja

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \quad (\text{A.8})$$

o vetor posição dos pontos que pertencem a curva que une os pontos A e B , Figura 65. Assim o vetor tangente a curva AB é dado por

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d(\vec{e}_r).$$

Como

$$d(\vec{e}_r) = -\sin(\theta) d\theta \vec{i} + \cos(\theta) d\theta \vec{j} = d\theta \vec{e}_\theta$$

temos que o vetor tangente é dado por

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta. \quad (\text{A.9})$$

Sejam v_r e v_θ as componentes radial e tangencial, respectivamente, do campo de velocidades

$$\vec{V} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta.$$

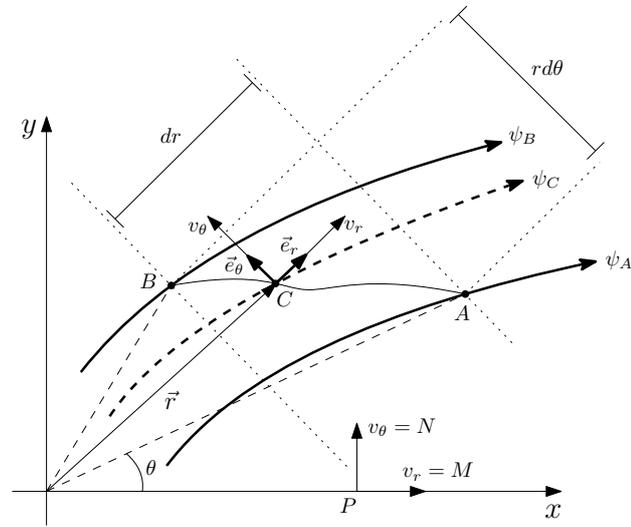
Com os vetores (A.9) e \vec{V} podemos escrever o escoamento através da curva AB , Figura 65, como sendo

$$d\psi = \underbrace{(v_r, v_\theta) \cdot (rd\theta, -dr)}_{\vec{V} \cdot \vec{n}},$$

ou seja,

$$d\psi = v_r r d\theta - v_\theta dr.$$

Figura 65 – Relação entre a função de corrente e coordenadas polares através do estudo de escoamento através de um caminho AB .



Fonte: O autor, 2019.

Agora, temos que verificar a relação entre

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial x}dx \quad \text{e} \quad d\psi = v_r r d\theta - v_\theta dr.$$

Fazendo as comparações entre

$$dy = r d\theta \quad \text{e} \quad dx = -dr,$$

obtemos que

$$y = r\theta \quad \text{e} \quad x = -r,$$

respectivamente.

Para qualquer ponto do escoamento ψ é função de r e θ , portantoo

$$\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial(r\theta)}d(r\theta) - \frac{\partial\psi}{\partial r}dr \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial(r\theta)}r d\theta - \frac{\partial\psi}{\partial r}dr. \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad \text{e} \quad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (\text{A.11})$$

Para a função potencial basta tomar

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy$$

e comparar com

$$d\phi = (v_r, v_\theta) \cdot (dr, rd\theta) = v_r dr + v_\theta r d\theta.$$

Aplicando os passos feitos anteriormente teremos

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \text{e} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}. \quad (\text{A.12})$$

Podemos concluir que as coordenadas polares correspondentes as equações (4.11) são

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \text{e} \quad v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}. \quad (\text{A.13})$$

A equivalência entre as coordenadas cartesianas e polares pode ser vista em qualquer ponto P do eixo x onde $dx = dr$, $dy = rd\theta$, $M = v_r$ e $N = v_\theta$, (VALLENTINE, 1967, p. 28 e 29).

APÊNDICE B – TEOREMAS DE BASE

Teorema B.1 (Teorema de Green). *Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções definidas numa região simplesmente conexa R , com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Então, para qualquer contorno fechado simples C em D ,*

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C M dx + N dy,$$

onde R é a região interior a C .

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser vista em Apostol (1988, p. 435 e 436). ■

Teorema B.2 (Teorema da Divergência ou de Gauss). *Seja E a região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente. Seja \vec{F} um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então*

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

Demonstração. A demonstração desse teorema, para o tipo de volume de controle que adotaremos (fixo e indeformável), pode ser visto em Spiegel (1972, p. 169). ■

Teorema B.3 (Teorema de Stokes). *Seja S um superfície orientada, regular por partes, cuja fronteira é formada por uma curva fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva. Seja \vec{F} um campo vetorial cujos componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta do \mathbb{R}^3 que contém S . Então*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Spiegel (1972, p. 176). ■

Teorema B.4 (Mudança de Variável). *Seja φ um aplicação biunívoca de classe C^1 , de um conjunto aberto $K \subset \mathbb{R}^3$ em \mathbb{R}^3 , sendo φ dada por $(x, y, z) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, com*

$$x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad e \quad z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

tal que o jacobiano da aplicação φ , J , seja diferente de zero em K . Se G é uma função contínua em \mathbb{R}^3 cujo domínio é compacto e está contido em $\varphi(K)$, então

$$\iiint_{\varphi(K)} G(x, y, z) dx dy dz = \iiint_K G(\varphi) |J| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser visto em Rudin (1976, p. 231 e 232). ■

APÊNDICE C – EXTENSÃO DA INTEGRAL DE CAUCHY

Teorema C.1. *Seja f uma função analítica nos pontos interiores e em cada ponto de um caminho fechado simples C orientado positivamente. Se z_0 for um ponto interior de C , então*

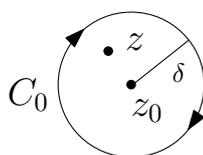
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{C.1})$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser visto em Ávila (2013, p. 103). ■

Teorema C.2. *Se uma função f for analítica em um ponto dado. Então suas derivadas parciais de todas as ordens também serão analíticas nesse ponto.*

Demonstração. Seja z_0 o ponto em que f é analítica, então existe um vizinhança de z_0 para o qual f seja analítica.

Figura 66 – Analiticidade na vizinhança de z_0 .



Fonte: O autor, 2019.

Deste modo, existe um círculo C_0 , orientado positivamente, com $|z - z_0| < \delta$ em que f é analítica no interior e em cada ponto de C_0 . Em particular, pelo Teorema C.1, temos que a derivada segunda de f existe e é dada por

$$f''(z_0) = \frac{1}{\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

em cada ponto interior de C_0 . Logo a existência de $f''(z)$ em $|z - z_0| < \delta$ garante que f' é analítica em z_0 . De modo análogo pensamos para a terceira derivada e concluímos que f'' é analítica em z_0 . Esse argumento é repetido $n + 1$ vezes e concluímos que $f^{(n)}$ é analítica em z_0 . ■

Corolário C.1. *Se uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for analítica em um ponto $z = x + iy$, então as funções componentes u e v têm derivadas parciais de todas as ordens nesse ponto.*

Demonstração. Seja f uma função analítica em z . Pelo Teorema C.2 f' é analítica em z que por sua vez garante a continuidade de f' , então pelo Teorema 3.3

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Logo as derivadas parciais de primeira ordem de u e v existem e são contínuas em z .

Novamente, pelo Teorema C.2 a f'' é analítica em z que por sua vez é contínua em z . Então, pelo Teorema 3.3

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx} = v_{xy} - iu_{xy}, \quad (\text{C.2})$$

seguindo esses passos n vezes teremos

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^n} = \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-1}y} - i \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}y}.$$

Portanto u e v tem derivadas de todas as ordem em z . Em particular o caso da segunda derivada garante que f é uma função harmônica. ■

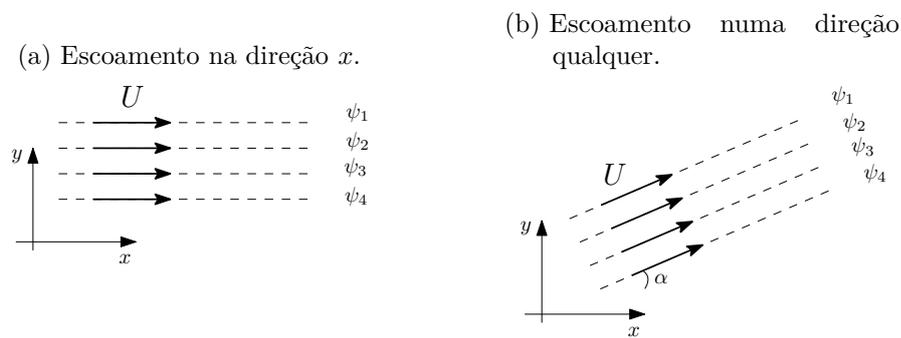
Para a obtenção de (C.2) volte aos limites (3.11) e (3.12). Caso quiséssemos usar para cada derivada de f as derivadas em y procederíamos do mesmo modo que usamos em $f'(z) = u_x + iv_x$, mas para cada n teríamos um comportamento diferente para $f^{(n)}$, daí a preferência tomada para a função $f'(z) = u_x + iv_x$.

APÊNDICE D – ESCOAMENTOS POTENCIAIS PLANOS

D.1 escoamento Uniforme

Considere o campo de velocidades paralelo ao eixo x de intensidade U definido por $\vec{V} = U\vec{i}$, com $U \in \mathbb{R}$. O valor de U representa velocidade das partículas de fluido. Os vetores desse campo de velocidades estão representados na Figura 67a.

Figura 67 – escoamento Uniforme.



Fonte: O autor, 2019.

A função de corrente ψ associada a \vec{V} satisfaz a equação

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

integrando a equação do lado esquerdo e tomando a constante igual a zero obtém-se

$$\psi = Uy. \tag{D.1}$$

O potencial de velocidade ϕ associado a \vec{V} é dado por

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

agindo de forma análoga ao primeiro caso é obtido

$$\phi = Ux. \tag{D.2}$$

Portanto, o potencial complexo para o escoamento uniforme paralelo ao eixo x é dado por

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = Uz. \tag{D.3}$$

Para um escoamento uniforme que apresenta uma variação angular α em relação ao eixo x , Figura 67b, as novas coordenadas de x e y serão expressas por

$$x' = x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad y' = y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha).$$

Desse modo, na direção de α , com $\phi = Ux$ e $\psi = Uy$, temos que

$$\phi = U(x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha))$$

e

$$\psi = U(y \cos(\alpha) - x \sin(\alpha)).$$

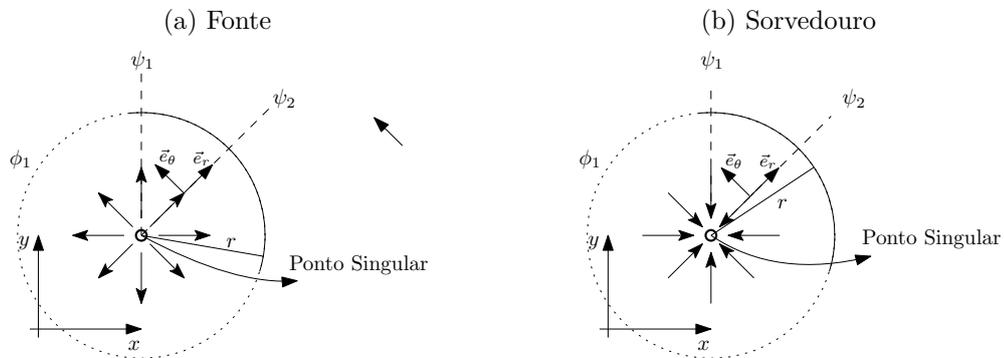
Assim, o potencial complexo de um escoamento uniforme numa direção qualquer é denotado por

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = U e^{-i\alpha} z. \quad (\text{D.4})$$

D.2 Fonte e Sorvedouro

Como o próprio nome diz, buscamos uma função de corrente que simule um fonte (partículas de fluido que se afastam de um ponto na direção do vetor radial) e/ou sorvedouro (partículas de fluido que se aproximam de um ponto na direção oposta ao vetor radial). Em escoamentos com a presença de fonte e/ou sorvedouro as partículas percorrem trajetórias na direção radial. Desse modo, é conveniente escrever as funções ψ e ϕ em coordenadas polares.

Figura 68 – Formato das linhas de corrente de uma fonte e um sorvedouro.



Fonte: O autor, 2019.

Antes precisamos definir o valor da intensidade κ da fonte/sorvedouro. Observando a Figura 68a podemos deduzir que o escoamento que emana da fonte pode ser calculado tomando uma circunferência de raio r , com o centro na fonte, e calculando

$$\kappa = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{n} r d\theta,$$

nos quais $\vec{V} = v_r \vec{e}_r$, $\vec{n} = \vec{e}_r$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como procedido na seção 4.1.1 temos que

$$\kappa = 2\pi r v_r.$$

A partir das expressões dadas em (A.11) e (A.12)

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

e

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

nos quais $v_r = \frac{\kappa}{2\pi r}$ e $v_\theta = 0$, obtemos, por um processo de integração em r e θ , que

$$\phi = \frac{\kappa}{2\pi} \ln(r) \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\kappa}{2\pi} \theta.$$

Assim,

$$\phi + i\psi = \frac{\kappa}{2\pi} \ln(r) + i \frac{\kappa}{2\pi} \theta = \frac{\kappa}{2\pi} \ln(z).$$

Portanto, os potenciais complexos que descrevem uma fonte e um sorvedouro são, respectivamente,

$$f(z) = \frac{\kappa}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (\text{D.5})$$

e

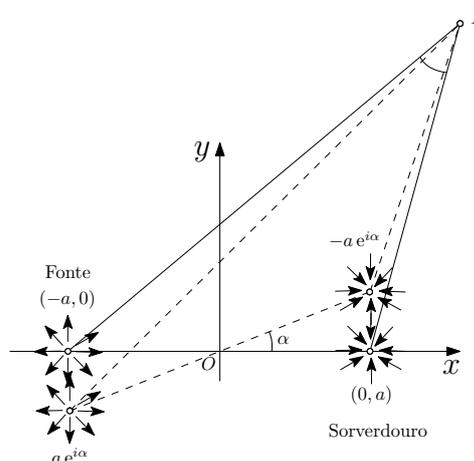
$$f(z) = -\frac{\kappa}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (\text{D.6})$$

O ponto z_0 é a origem da fonte/sorvedouro e é chamado de ponto singular. O sinal negativo do sorvedouro é resultado das partículas percorrerem o sentido contrário ao vetor \vec{e}_r . Quanto mais próximo uma partícula se encontra desse ponto a sua componente radial da velocidade tende ao infinito e quanto maior for o fastamento mais essa componente tende a diminuir.

D.3 Dipolo

Para produzir um dipolo é necessário somar o potencial de uma fonte (D.5) com um sorvedouro (D.6). Seja P um ponto do escoamento, veja Figura 69.

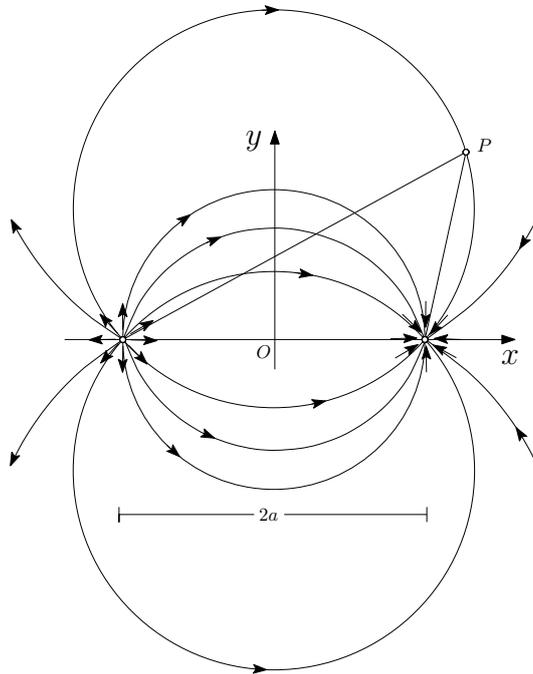
Figura 69 – Superposição de uma fonte com um sorvedouro.



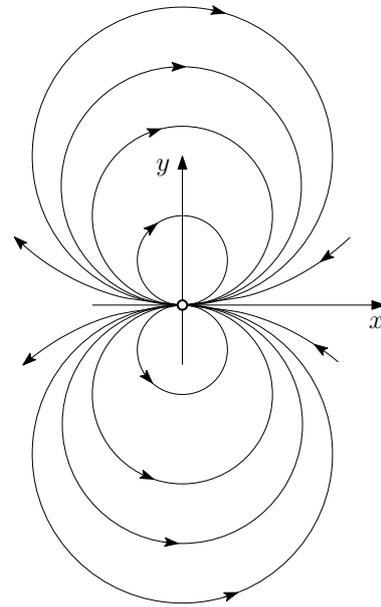
Fonte: O autor, 2019.

Figura 70 – Processo de formação do dipolo.

(a) Linhas de corrente de uma fonte com um sorvedouro, dispostos a uma distância $2a$.



(b) Linhas de corrente de um dipolo.



Fonte: O autor, 2019.

Superpondo os escoamentos (D.5) e (D.6) temos que a função potencial é dada por

$$f(z) = \frac{\kappa}{2\pi} \ln(z + a e^{i\alpha}) - \frac{\kappa}{2\pi} \ln(z - a e^{i\alpha}),$$

em que $z_0 = \pm a e^{i\alpha}$ e para $\alpha = 0$ a fonte e o sorvedouro estão no eixo $Re(z)$, Figura 70a. A função f pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\kappa}{2\pi} \ln \left[z \left(1 + \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right) \right] - \frac{\kappa}{2\pi} \ln \left[z \left(1 - \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right) \right] \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \ln(z) + \frac{\kappa}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{\kappa}{2\pi} \ln(z) - \frac{\kappa}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$f(z) = \frac{\kappa}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right) - \frac{\kappa}{2\pi} \ln \left(1 - \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right). \quad (\text{D.8})$$

Pelo Corolário 3.2 cada ramo do logaritmo é analítico, desse modo, a expansão de MacLaurin da função f , dada em (D.8), é da forma

$$f(z) = \frac{\kappa}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1} e^{i\alpha(n+1)}}{(n+1)z^{(n+1)}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} e^{i\alpha(n+1)}}{(n+1)z^{(n+1)}} \right)$$

e converge quando $\left| \frac{a e^{i\alpha}}{z} \right| < 1$.

Donde

$$f(z) = \frac{\kappa}{2\pi} \left(\frac{2a e^{i\alpha}}{z} + \frac{2a^3 e^{i3\alpha}}{3z^3} + \dots \right). \quad (\text{D.9})$$

Segundo Munson, Young e Okiishi (2017, p. 297), o dipolo é obtido fazendo a distância entre a fonte e o sorvedouro ir para zero ($a \rightarrow 0$) e a intensidade deles crescer infinitamente ($\kappa \rightarrow \infty$), de modo que $\frac{\kappa a}{\pi}$ permaneça constante, Figura 70b. Assim, na expansão de Maclaurin (D.9) os termos a^n com $n \geq 2$ são desprezados, porque vão mais rápido para zero a medida que a potência de a cresce. Portanto, o potencial complexo do dipolo é dado por

$$f(z) = \frac{\kappa a e^{i\alpha}}{\pi z},$$

ou ainda

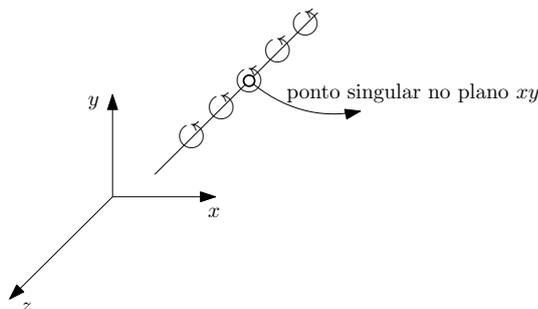
$$f(z) = \frac{\mu e^{i\alpha}}{z}, \quad (\text{D.10})$$

se fizermos $\mu = \frac{\kappa a}{\pi}$.

D.4 Vórtice

Vimos que a partir de um ponto singular podemos construir linhas de correntes na direção radial e linhas equipotenciais circulares e concêntricas. Nesta seção estamos interessados em linhas de corrente que sejam circulares e concêntricas e linhas equipotenciais na direção radial, para isso basta permutar os resultados obtido para ϕ e ψ utilizados na seção D. Tomando o cuidado para não confundir a intensidade κ da fonte/sorvedouro com a circulação Γ . Usando a ideia de Çengel e Cimbala (2015, p.540), considere uma linha de vórtice paralela ao eixo z de comprimento L , Figura 71, de modo que ao longo da linha de vórtice as partículas de fluido descrevam trajetórias circulares.

Figura 71 – Linha de vórtice.



Fonte: O autor, 2019.

O valor de Γ é a intensidade de circulação dado pela Definição 2.1. Deste modo,

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{T} \, r d\theta \quad (\text{D.11})$$

nos quais $\vec{V} = v_\theta \vec{e}_\theta$, $\vec{T} = \vec{e}_\theta$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Resulta da integral (D.11) que intensidade de circulação é dada por

$$\Gamma = v_\theta 2\pi r.$$

Logo podemos encontrar a função de corrente e a função potencial integrando as equações (A.13)

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

e

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta},$$

em que $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ e $v_r = 0$.

Assim, conclui-se que

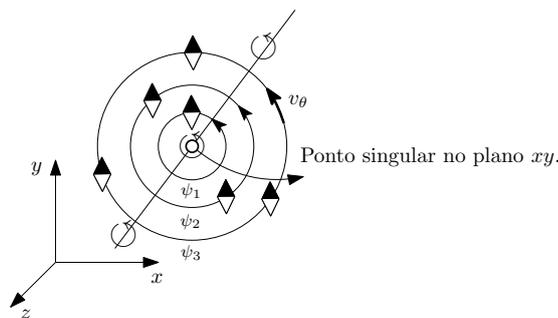
$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

e

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r).$$

Como visto na subseção 3.5.2 as curvas $\psi = \text{constante}$ são representadas por círculos concêntricos com centro no ponto singular, Figura 72.

Figura 72 – Linhas de corrente para um vórtice.



Fonte: O autor, 2019.

Portanto, o potencial complexo que descreve um vórtice na singularidade z_0 é

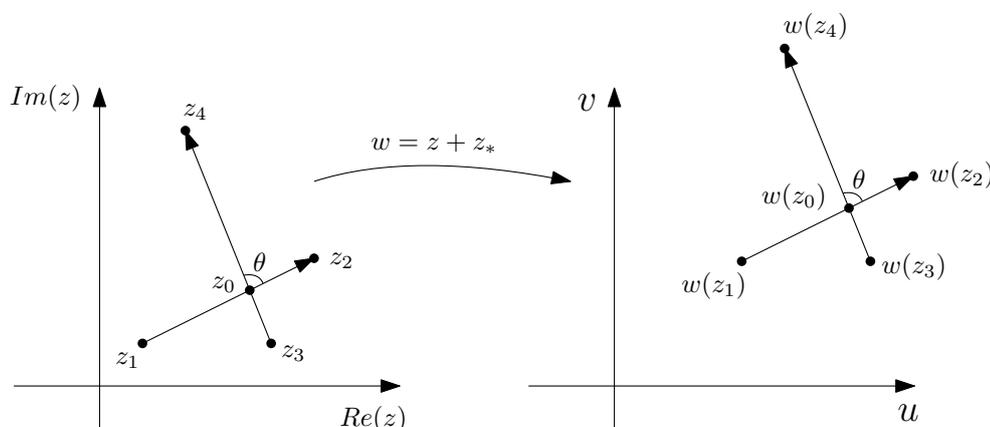
$$f(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0). \quad (\text{D.12})$$

Se Γ for positivo as partículas nas linhas de corrente vórtice percorrerão o sentido anti-horário e se Γ for negativo percorrerão o sentido horário. Uma observação importante, segundo Munson, Young e Okiishi (2017, p. 294), é que a rotacionalidade se refere a rotação da partícula do fluido e não a trajetória seguida pela partícula, portanto é possível ter um escoamento irrotacional e o mesmo ter um vórtice.

APÊNDICE E – TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Antes de definirmos uma Transformação Conforme vejamos um exemplo de uma transformação linear $w(z) = z + z_0$, com $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$. Temos que $w(z) = x + iy + x_0 + iy_0 = (x + x_0) + i(y + y_0)$. Tomando z_1, z_2, z_3 e z_4 pontos do plano complexo de modo que o ângulo entre os vetores z_1z_2 e z_3z_4 seja diferente de zero e de forma que z_0 pertença a ambos os vetores. Assim, as imagens dos vetores sob a transformação w são transladados e o ângulo entre os vetores em z_0 são preservados, Figura 73.

Figura 73 – Imagens dos vetores z_1z_2 e z_3z_4 sob w .



Fonte: O autor, 2019.

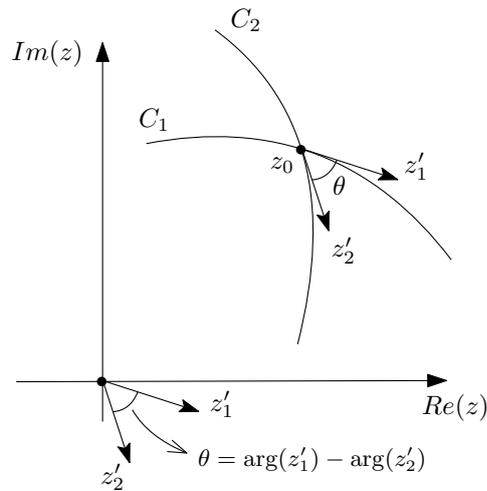
Seja $w = f(z)$ uma transformação definida em um domínio D . A transformação w será conforme em um ponto $z_0 \in D$ se o ângulo entre duas curvas quaisquer que se intersectam em z_0 for preservado.

Definição E.1. A função f definida em um domínio $D \subset \mathbb{C}$ de maneira que f' exista, para todo $z_0 \in D$, e que preserva ângulos é chamada de Transformação Conforme.

Considere duas curvas suaves C_1 e C_2 parametrizadas por $z_1(t)$ e $z_2(t)$, com $t \in [a, b]$, de modo que $z_1(t_0) = z_0 = z_2(t_0)$. Como C_1 e C_2 são curvas suaves, os vetores tangentes z'_1 e z'_2 são diferentes de zero, para todo $t \in [a, b]$. Seja $\arg(z'_1)$ e $\arg(z'_2)$ os ângulos entre os vetores z'_1 e z'_2 com o eixo $Re(z)$, respectivamente. Deste modo, o ângulo entre C_1 e C_2 em z_0 é

$$\theta = \arg(z'_1) - \arg(z'_2), \quad \text{em } [0, \pi], \quad (\text{E.1})$$

veja Figura 74.

Figura 74 – Ângulo entre duas Curvas C_1 e C_2 .

Fonte: O autor, 2019.

Teorema E.1. *Seja f uma função analítica em um domínio D . Então $w = f(z)$ preserva ângulos em cada ponto $z \in D$, onde $f'(z) \neq 0$, ou seja, w é uma transformação conforme em z .*

Demonstração. Sejam C_1 e C_2 duas curvas suaves parametrizadas por $z_1(t)$ e $z_2(t)$, contidas em D , com $t \in [a, b]$, de modo que $z_1(t_0) = z_0 = z_2(t_0)$, com $z_0 \in D$, $z'_1(t_0) \neq 0$ e $z'_2(t_0) \neq 0$, Figura 75. Sejam C'_1 e C'_2 as imagens de C_1 e C_2 , respectivamente, pela transformação $w_1(t) = f(z_1(t))$ e $w_2(t) = f(z_2(t))$. Como f é analítica em D , segue que

$$w'_1(t) = f'(z_1(t))z'_1(t) \quad \text{e} \quad w'_2(t) = f'(z_2(t))z'_2(t),$$

e por (3.4) temos que em z_0

$$\arg(w'_1(t_0)) = \arg(f'(z_1(t_0))) + \arg(z'_1(t_0)) \quad \text{e} \quad \arg(w'_2(t_0)) = \arg(f'(z_2(t_0))) + \arg(z'_2(t_0)).$$

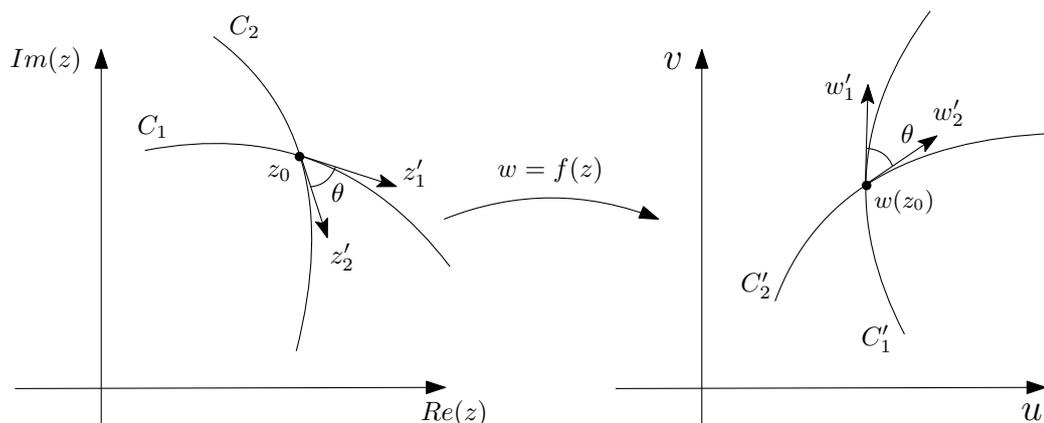
Reescrevendo essas equações temos

$$\arg(f'(z_1(t_0))) = \arg(w'_1(t_0)) - \arg(z'_1(t_0)) \quad \text{e} \quad \arg(f'(z_2(t_0))) = \arg(w'_2(t_0)) - \arg(z'_2(t_0)). \quad (\text{E.2})$$

Fazendo a diferença entre as equações (E.2) e como $z_1(t_0) = z_0 = z_2(t_0)$ obtemos

$$\arg(w'_1(t_0)) - \arg(w'_2(t_0)) = \arg(z'_1(t_0)) - \arg(z'_2(t_0)). \quad (\text{E.3})$$

Portanto w preserva ângulos em cada ponto $z_0 \in D$, onde $f'(z_0) \neq 0$. ■

Figura 75 – Transformação Conforme w .

Fonte: O autor, 2019.

A equação (E.3) diz que $\arg(w'_1(t_0)) - \arg(w'_2(t_0))$ é igual em magnitude e orientação a $\arg(z'_1(t_0)) - \arg(z'_2(t_0))$.

Teorema E.2. *Seja f uma função analítica em z_0 com $f'(z_0) \neq 0$. Então f é univalente na vizinhança de z_0 . Mas precisamente, f possui uma única inversa F analítica na vizinhança de $w_0 = f(z_0)$; isto é, se z é suficientemente próximo de z_0 , então $z = F(w)$, onde $w = f(z)$. De modo igual, para w suficientemente próximo de w_0 e $z = F(w)$, então $w = f(z)$. Além disso, $f'(z)F'(w) = 1$ o que implica que F é um mapeamento conforme.*

Demonstração. A demonstração deste teorema é visto em Ablowitz e Fokas (2003, p. 342 e 343). ■

Teorema E.3. *Seja C uma circunferência no plano- z e seja T uma transformação fracionária linear*

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty \\ \infty, z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, z = \infty; \end{cases}$$

então a imagem de C sob T é uma circunferência ou uma reta no plano- w . A imagem será uma reta se e somente se $c \neq 0$ e o polo $z = -\frac{d}{c}$ estiver na circunferência C .

Demonstração. A demonstração deste teorema é vista em Bak e Newman (2010, p.178 e 179). ■

APÊNDICE F – TRANSFORMAÇÃO DE JOUKOWSKI

F.1 Transformação de Joukowski para o caso $R = c$.

A transformação complexa

$$w(z) = z + \frac{c^2}{z}, \quad (\text{F.1})$$

com $c > 0$, é chamada Transformação de Joukowski.

A transformação (F.1) é analítica em um domínio $D \subset \mathbb{C}$, que não contém a origem. De fato,

$$w(z) = \left(x + \frac{c^2 x}{x^2 + y^2} \right) + i \left(y - \frac{c^2 y}{x^2 + y^2} \right)$$

tem derivadas parciais contínuas em D e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, pois

$$u_x = \left(1 + \frac{c^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right) = v_y \quad \text{e} \quad u_y = \left(-\frac{2c^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) = -v_x.$$

A partir da transformação (F.1) pode se escrever

$$w - 2c = -2c + z + \frac{c^2}{z} = \frac{(z - c)^2}{z}$$

e

$$w + 2c = 2c + z + \frac{c^2}{z} = \frac{(z + c)^2}{z}.$$

Dessa forma, obtém-se a equação

$$\frac{w - 2c}{w + 2c} = \left(\frac{z - c}{z + c} \right)^2. \quad (\text{F.2})$$

A equação (F.2) é o caso para $n = 2$ da Transformação de Karman-Trefftz

$$\frac{w + nc}{w - nc} = \left(\frac{z + c}{z - c} \right)^2,$$

(MILNE-THOMPSON, 1996, p. 198 e 196).

Considere as seguintes transformações

$$z = T(w) = \frac{w - 2c}{w + 2c}, \quad z_1 = T_1(z) = \frac{z - c}{z + c} \quad \text{e} \quad z_2 = T_2(z_1) = z_1^2. \quad (\text{F.3})$$

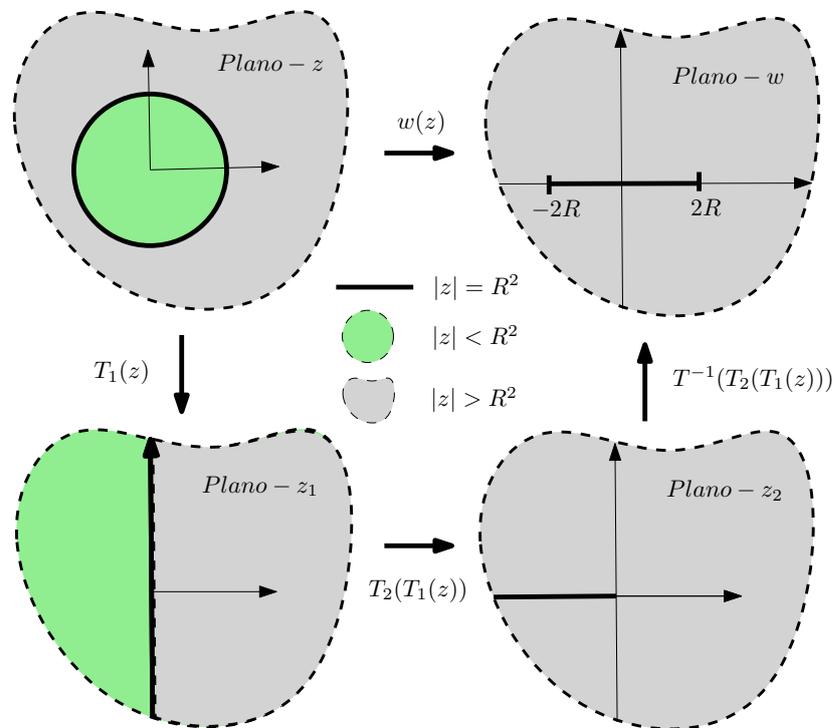
Observe que temos 4 planos complexos envolvidos: plano- z , plano- z_1 , plano- z_2 e plano- w . Essas transformações nos darão a oportunidade de estudar como as imagens $|z| > c^2$, $|z| < c^2$ e $|z| = c^2$, de uma circunferência de centro na origem e raio $R = c$, quando

mapeadas pela transformação (F.1). Isso porque, fazendo a composição $T^{-1}(T_2(T_1(z)))$, onde $T^{-1}(z) = -2c \frac{(z+1)}{(z-1)}$, tem-se que

$$w(z) = z + \frac{c^2}{z}.$$

Desta forma, estamos interessados em saber como as regiões $|z| > R^2$, $|z| < R^2$ e $|z| = R^2$ são mapeadas do plano- z para o plano- w usando as transformações (F.3). A Figura 76 representa o processo de mapeamento por essas transformações.

Figura 76 – Transformação de Joukowski para uma circunferência de centro na origem e $R = c$.



Fonte: O autor, 2019

Na primeira transformação, $T_1(z_1) = \frac{z-R}{z+R}$, temos uma singularidade em $z = -R$ e esse ponto pertence a circunferência $|z| = R^2$. Portanto pelo Teorema E.3 a imagem da circunferência $|z| = R^2$ é uma reta. Para encontrar essa reta basta tomar dois pontos quaisquer da circunferência, $T_1(R) = 0$ e $T_1(iR) = 0 + i$, por exemplo. Dessa forma a imagem é a reta $u_{z_1} = 0$. Por inspeção, as imagens de $|z| > R^2$ e $|z| < R^2$ são mapeadas nos semiplanos $u_{z_1} > 0$ e $u_{z_1} < 0$, respectivamente.

A segunda transformação, $T_2(T_1(z)) = (u_{z_1} + iv_{z_1})^2$, leva a reta $u_{z_1} = 0$ no eixo real negativo do plano- z_2 e como $T_2(z_1) = x_{z_1}^2 - y_{z_1}^2 + i2x_{z_1}y_{z_1}$ os semiplanos $u_{z_1} > 0$ e $u_{z_1} < 0$ são mapeados em todo plano- z_2 .

E por fim, a transformação $T^{-1}(T_2(T_1(z)))$ possui um polo na reta $v_{z_2} = 0$. Deste modo, segundo Zill e Shanahan (2011, p. 303), a imagem de $v_{z_2} = 0$ pela transformação T^{-1} é uma reta. Tomando os pontos $z_2 = 0$ e $z_2 = 2$ teremos $T^{-1}(0) = -2R$ e $T^{-1}(2) = -6R$, portanto a imagem será a reta $v = 0$, ou seja, o eixo real. Por inspeção, as imagens dos planos $v_{z_2} > 0$ e $v_{z_2} < 0$ serão, respectivamente, $v > 0$ e $v < 0$. O eixo real negativo do plano- z_2 é levado no seguimento $[-2R, 2R]$, pois

$$z_2 \rightarrow -\infty \Rightarrow w(z) = T^{-1}(T_2(T_1(z))) \rightarrow -2R$$

e quando

$$z_2 \rightarrow 0 \Rightarrow w(z) = T^{-1}(T_2(T_1(z))) \rightarrow 2R.$$

Portanto, como $v_{z_2} = 0$ é mapeado em $v = 0$ segue que o eixo real negativo do plano- z_2 é mapeado no seguimento $[-2R, 2R]$

Assim conclui-se que o contorno da circunferência $|z| = R^2$, com $R = c$, é levado pela transformação (F.1) em um seguimento $[-2R, 2R]$ e as regiões $|z| < R^2$ e $|z| > R^2$ são levadas nos demais pontos do plano- w .

F.2 Construção do Aerofólio de Joukowski através da Transformação de Karman- Tefftz, para $n = 2$, utilizando o GeoGebra 5.0

Como visto na seção F descrever o mapeamento é uma tarefa árdua. Devido a essa complexidade foi utilizado o software GeoGebra 5.0, com um truncamento de 4 casas decimais, para ajudar nas visualizações das transformações, bem como na obtenção de equações e relação entre ângulos.

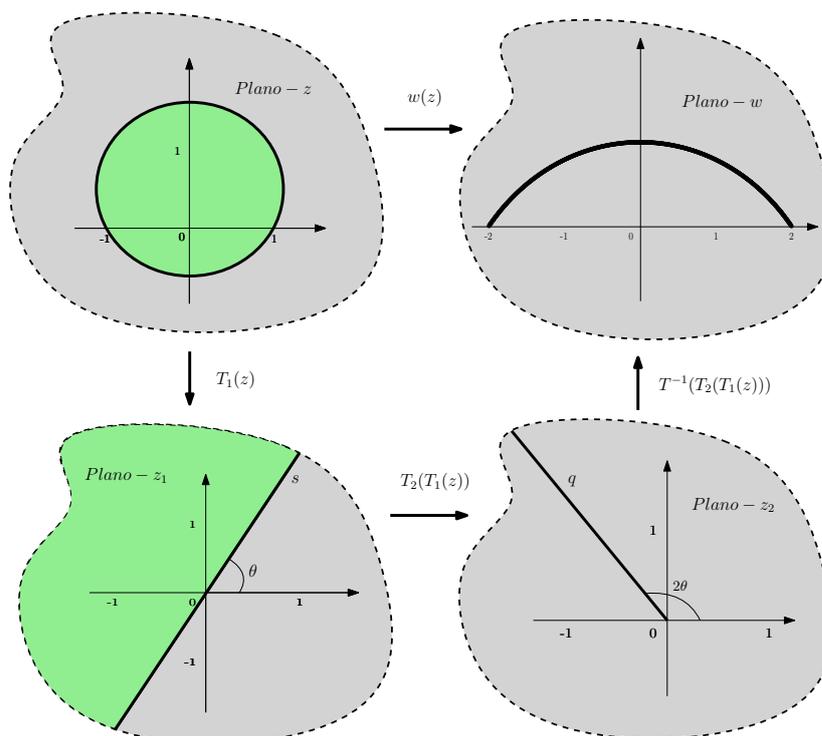
Utilizando desse recurso, considere uma circunferência C passando pelos pontos $z = \pm 1$, de centro $z = i0.5$ e raio $R = \sqrt{1 + (0.5)^2}$, no semiplano- z $y > 0$. Será usada as transformações (F.3), tomando $c = 1$,

$$z = T(w) = \frac{w - 2}{w + 2}, \quad z_1 = T_1(z) = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{e} \quad z_2 = T_2(z_1) = z_1^2 \quad (\text{F.4})$$

para mapear essa circunferência no plano- z para o plano- w .

A Figura 77 representa as etapas do mapeamento pelas transformações (F.4).

Figura 77 – Transformação de Joukowski para $R = 1.118$, $z_0 = +i0.5$ e $c = 1$.



Fonte: O autor, 2019

A transformação $T_1(z_1)$ leva a circunferência em uma reta s porque $z = -1$ é um polo, Teorema E.3. Observe que essa reta passa pela origem do plano- z_1 , pois $z = 1$ faz com que $T_1(1) = 0$. Seja θ o ângulo formado pela reta tangente a C em $z = 1$. Como T_1 é uma transformação conforme, exceto em $z = -1$, a reta s faz o mesmo ângulo θ com o eixo real no plano- z_1 , Teorema (3.7); e o exterior da circunferência é levado para o semiplano- z_1 do eixo real positivo.

A transformação $T_2(T_1(z))$ leva a reta s em uma semirreta q que faz um ângulo 2θ com o eixo real, partindo da origem. Assim, como no caso acima, o semiplano- z_1 do eixo real positivo é mapeado em todo o plano- z_2 . Observe que z_1^2 faz com que os pontos de s que estão no "3º quadrante" sejam positivos. Conseqüentemente a reta s é levada em uma semirreta; e quando z_1 é elevado ao quadrado o ângulo θ é dobrado.

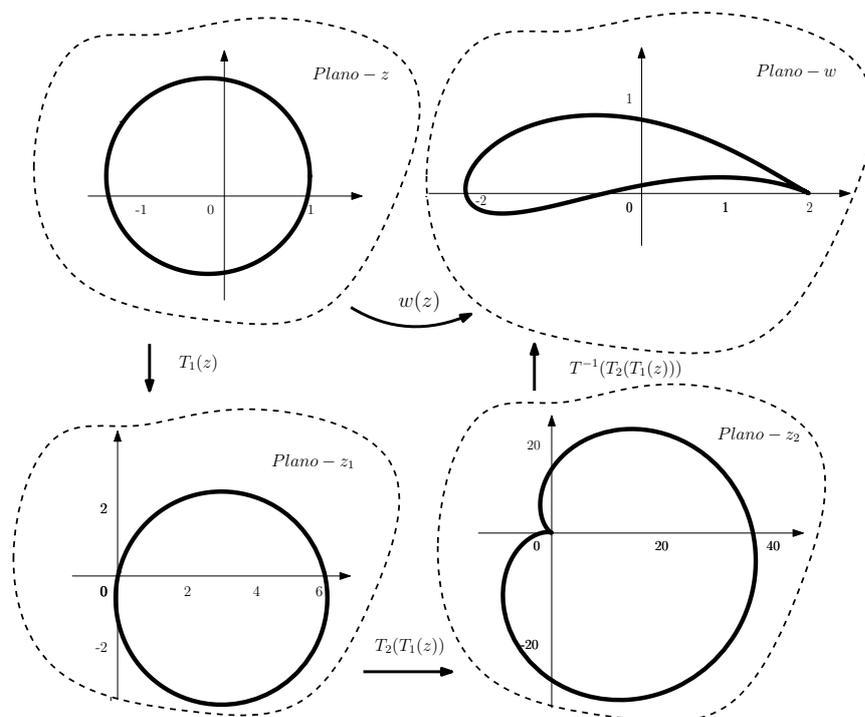
Finalmente, a transformação $T^{-1}(T_2(T_1(z)))$ leva a semirreta q em um arco de extremos -2 e 2 , no semiplano- w do eixo imaginário positivo, Figura 49f, e os demais pontos são mapeados por todo plano- w , (ÁVILA, 2013, p. 236).

Os procedimentos para a obtenção dos aerofólios de Joukowski simétrico e assimétrico são os mesmos em ambos os casos, entretanto as figuras geométricas formada pelos mapeamentos possuem equações diferentes.

Considere as circunferências C_1 de equação $|z - (-0.209 + i0.2737)| = (1.2398)^2$

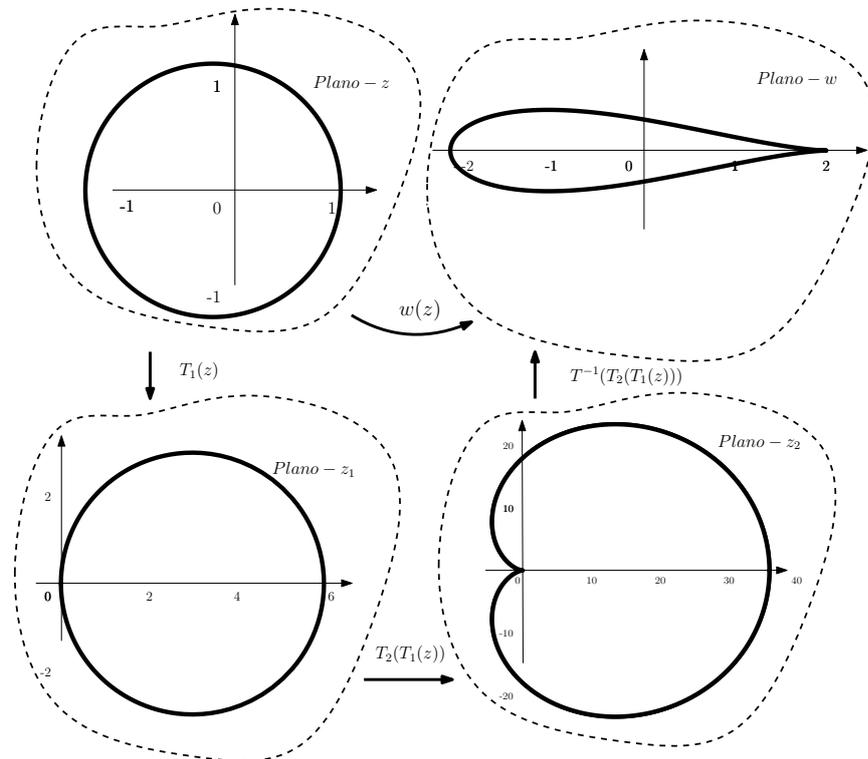
e C_2 de equação $|z - (-0.2)| = (1.2)^2$, ambas passando por $z = 1$. As imagens dessas circunferências quando mapeadas pelas transformações (F.4), são os aerofólios de Joukowski assimétrico e simétrico, respectivamente. As Figuras 78 e 79 representam as construções dos aerofólios assimétrico e simétrico, respectivamente.

Figura 78 – Transformação de Joukowski para $R = 1.2398$, $z_0 = -0.209 + i0.2737$ e $c = 1$.



Fonte: O autor, 2019

Figura 79 – Transformação de Joukowski para $R = 1.2$, $z_0 = -0.2$ e $c = 1$.



Fonte: O autor, 2019

Com o uso do GeoGebra 5.0 os resultados obtidos foram:

I) Obtenção do Aerofólio de Joukowski Assimétrico

- A transformação $T_1(z_1)$ mapeia a circunferência C_1 em uma circunferência $|z_1 - (2.8911 - i0.6543)| = 8.7865$, Teorema E.3, pois $z = -1$ não está em C_1 , ou seja, $z = -1$ não é um polo.
- A transformação $T_2(T_1(z))$ mapeia a circunferência $|z_1 - (2.8911 - i0.6543)| = 8.7865$ em uma cardioide, cuja equação pode ser dada por

$$r = 17.5976 (1 + \cos(\theta - 5.8434)),$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, no plano- z_2 .

- A transformação $T^{-1}(T_2(T_1(z)))$ mapeia a cardioide no aerofólio de Joukowski assimétrico.

II) Obtenção do Aerofólio de Joukowski Simétrico

- A transformação $T_1(z_1)$ mapeia a circunferência C_2 em uma circunferência $|z_1 - 3| = 3^2$, Teorema E.3, pois $z = -1$ não está em C_2 , ou seja, $z = -1$ não é um polo.

- b) A transformação $T_2(T_1(z))$ mapeia a circunferência $|z_1 - 3| = 3^2$, em uma cardioide, cuja equação pode ser dada por

$$r = 18(1 + \cos(\theta)),$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$, no plano- z_2 .

- c) A transformação $T^{-1}(T_2(T_1(z)))$ mapeia a cardioide no aerofólio de Joukowski simétrico.

Vale ressaltar que essas transformações estão sendo feitas apenas para uma linha de corrente, que é a $\psi = 0$. As demais linhas de corrente, $\psi = \text{constante}$, também serão mapeadas pela Transformação de Joukowski, (VALLENTINE, 1967, p. 177). Dessa forma, podemos dizer que a transformação (F.1) leva o contorno e o exterior das circunferências $|z - (-0.209 + i0.2737)| = (1.2398)^2$ e $|z - (-0.2)| = (1.2)^2$ nos contornos e exteriores dos aerofólio de Joukowski assimétrico e simétrico, respectivamente, (ÁVILA, 2013, p 238).

APÊNDICE G – RECURSOS COMPUTACIONAIS UTILIZADOS NA PRODUÇÃO DO TRABALHO

Os recursos computacionais utilizados neste trabalho foram o GeoGebra 6.0 e 5.0, Ipe e o Mathematica 12.0.

O GeoGebra 6.0 foi utilizado para produzir a Figura 49 e o GeoGebra 5.0 para obter os resultados do Apêndice F.

O Ipe é um software livre encontrado em <http://ipe.otfried.org/>. Ele é um editor de desenhos que possui ótimos recursos, a maioria das figuras deste trabalho foram produzidas nesse programa.

O Mathematica 12.0 é um programa privado da empresa Wolfram. Ele foi utilizado para produzir as simulações dos escoamentos em torno do cilindro circular, cilindro elíptico, placa e aerofólio de Joukowski, entretanto ele apresentou algumas limitações principalmente no bordo de fuga do aerofólio (cúspide). Segue abaixo o código utilizado para simular o escoamento em torno do aerofólio de Joukowski. Para as demais simulações devem ser alterados apenas os parâmetros. Os símbolos α e Γ devem ser substituídos no código por `\[Alpha]` e `\[CapitalGamma]`, respectivamente.

```

{R, U,  $\alpha$ , c} = {1.2398, 1, Pi/18, 1};
z0 = -0.209 + I * 0.2737;
 $\Gamma$  = 4.Pi * R * U * Sin[ $\alpha$  + ArcTan[0.2737/1.209]];
Funcao1 = U * z * Exp[-I *  $\alpha$ ] + (U * R2 * Exp[I *  $\alpha$ ])/z + (I *  $\Gamma$ /(2Pi)) *
Log[(z)/R]/.z -> 1/2((z) + Sqrt[z2 - 4 * c2]) - z0;
Funcao2 = U * z * Exp[-I *  $\alpha$ ] + (U * R2 * Exp[I *  $\alpha$ ])/z + (I *  $\Gamma$ /(2Pi)) *
Log[(z)/R]/.z -> 1/2((z) - Sqrt[z2 - 4 * c2]) - z0;
Show[ComplexPlot[Funcao1, {z, -5 - 5 * I, 5 + 5 * I}, PlotPoints -> 75, Mesh ->
{Range[-8, 8, .5]}, MeshFunctions -> {Im[#2]&}, MeshStyle -> Directive[Thick, White],
Exclusions -> None, BoundaryStyle -> None, ColorFunction -> None],
ComplexPlot[Funcao2, {z, -5 - 5 * I, 0 + 5 * I}, PlotPoints -> 75, Mesh -> {Range[-5, 8, .5]},
MeshFunctions -> {Im[#2]&}, MeshStyle -> Directive[Thick, White], Exclusions ->
None, BoundaryStyle -> None, ColorFunction -> None], PlotRange -> 5]

```