

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional

Estudo da evolução de modelos de
crescimento populacional e métodos para
obtenção de parâmetros

Alex Alves Dentamaro





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Estudo da evolução de modelos de crescimento populacional e métodos para obtenção de parâmetros

Alex Alves Dentamaro

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Jamil Viana Pereira

Rio Claro/SP
2019

D414e

Dentamaro, Alex Alves

Estudo da evolução de modelos de crescimento populacional e métodos para obtenção de parâmetros / Alex Alves Dentamaro. -- Rio Claro, 2019

124 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Jamil Viana Pereira

1. Modelos de crescimento populacional. 2. Ajuste linear. 3. Capacidade suporte. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Alex Alves Dentamaro

ESTUDO DA EVOLUÇÃO DE MODELOS DE CRESCIMENTO
POPULACIONAL E MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DE PARÂMETROS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jamil Viana Pereira
Orientador

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Departamento de Matemática - IGCE -
UNESP - Rio Claro/SP

Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler
Faculdade de Matemática - UFU

Rio Claro, 13 de dezembro de 2019

Agradecimentos

A Deus, pela dádiva da vida.

À minha família, pela presença, carinho e cumplicidade. Em especial, aos meus pais, também pela inspiração, educação e pelas várias formas de apoio para a conclusão desta e de todas as outras etapas de formação pessoal e profissional.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jamil Viana Pereira, por todo apoio com: esclarecimento de dúvidas, sugestões, indicações de leitura, incentivo e disposição para colaboração no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os colegas de turma do programa de pós-graduação *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT* da Unesp de Rio Claro, pela troca de experiências; boa convivência; colaborações; idas e vindas, em grupo, pelas rotas que tinham como ponto de partida, parada e/ou chegada as cidades de Valinhos, Campinas, Sumaré e Rio Claro; por todos os almoços; cafês; conversas; e respeitoso carinho.

Aos professores do programa, pela dedicação na preparação e exposição das aulas, disposição para esclarecimento de dúvidas, bom senso e pelos momentos de descontração, também necessários em um ambiente de aprendizado.

Aos membros da banca examinadora, pela leitura do trabalho e importantes contribuições para seu aperfeiçoamento.

Aos funcionários da Unesp de Rio Claro, pela colaboração direta ou indireta e pelo bom tratamento e respeito (entendo que recíprocos).

*A menos que modifiquemos nossa maneira de pensar,
não seremos capazes de resolver os problemas causados
pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.*

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho, será abordada a teoria matemática utilizada no estudo de quatro modelos clássicos de crescimento populacional: Malthus, Verhulst, Gompertz e Mon-troll. Serão apresentadas e/ou discutidas algumas de suas características, propriedades, diferenças e diferentes métodos para obtenção de seus parâmetros. Posteriormente, estes modelos e métodos serão aplicados a um conjunto de dados relativos ao crescimento populacional do Brasil. Também foi elaborada uma atividade para ser aplicada no En-sino Médio, na qual se explora, por tabelas e gráficos, a forma como os alunos observam certos fenômenos de crescimento, bem como, construtivamente e com auxílio de dados, a forma como ocorrem esses crescimentos de fato.

Palavras-chave: Modelos de crescimento populacional, Ajuste linear, Capacidade suporte.

Abstract

In this work, the mathematical theory of four classic population growth models (Malthus, Verhulst, Gompertz and Montroll) will be addressed. Some of their characteristics, properties, differences and different methods for obtaining their parameters will be presented and/or discussed. Subsequently, these models and methods will be applied to a Brazilian population growth data set. An activity was also elaborated to be applied in high school. It explores, by tables and graphs, how students observe some growth phenomena, as well as, constructively and with the help of data, how these growths really occur.

Keywords: Population growth models, Linear fit, Carrying capacity.

Lista de Figuras

1.1	Solução do modelo malthusiano	23
1.2	Soluções do modelo logístico	26
1.3	$\frac{dP}{dt}$ em função de $P(t)$ - logístico	28
1.4	Soluções do modelo de Gompertz	34
1.5	$\frac{dP}{dt}$ em função de $P(t)$ - Gompertz	36
1.6	Soluções do modelo de Montroll	42
1.7	$\frac{dP}{dt}$ em função de $P(t)$ - Montroll	44
1.8	Soluções do modelo de Montroll, com $0 < P < K$, para diferentes valores de λ	48
1.9	Possíveis localizações do ponto de inflexão	50
3.1	Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2010	76
3.2	Conjunto de dados e gráfico da função (3.1)	78
3.3	Conjunto de dados e gráfico da função (3.6)	85
3.4	Conjunto de dados e gráfico da função (3.8)	89
3.5	Conjunto de dados e gráfico da função (3.14)	93
3.6	Comparativo de modelagem pelos quatro modelos	94
A.1	Estimativa de crescimento para a população brasileira (Parte 1) - N° do grupo ou nome(s): _____	113

A.2	Estimativa de crescimento para a altura de pinho-alemão (Parte 1) - N° do grupo ou nome(s): _____	114
A.3	Estimativa de crescimento para a população brasileira (Parte 2) - N° do grupo ou nome(s): _____	116
A.4	Estimativa de crescimento para a altura de pinho-alemão (Parte 2) - N° do grupo ou nome(s): _____	117
A.5	Crescimento da população brasileira - censos até 2010 e projeções até 2060 (Parte 4)	119
A.6	Crescimento em altura de pinho-alemão (Parte 4)	120
A.7	Ajuste de curva - Malthus	121
A.8	Ajuste de curva - Verhulst	122
A.9	Ajuste de curva - Gompertz	123
A.10	Ajuste de curva - Montroll	124

Lista de Tabelas

1.1	Resumo dos modelos de crescimento populacional	49
2.1	Crescimento em altura de pinho-alemão	64
2.2	Valores para ajuste linear - método de Ford-Walford (pinho-alemão)	64
3.1	Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2010	75
3.2	Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo malthusiano contínuo)	77
3.3	Conjunto de dados e valores modelados por (3.1) - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - ajuste linear)	78
3.4	Modelagem com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - ajuste linear)	79
3.5	Conjunto de dados e valores modelados por (3.3) - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - taxa malthusiana)	80
3.6	Modelagem com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - taxa malthusiana)	81
3.7	Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo logístico - taxa linear)	82
3.8	Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo logístico - taxa malthusiana)	83
3.9	Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo logístico contínuo)	83
3.10	Conjunto de dados e valores modelados por (3.6) - população brasileira (modelo logístico contínuo)	84

3.11	Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo de Gompertz - taxa linear)	86
3.12	Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo de Gompertz - taxa malthusiana)	87
3.13	Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo de Gompertz)	87
3.14	Conjunto de dados e valores modelados por (3.8) - população brasileira (modelo de Gompertz)	88
3.15	Dados e valores para ajuste linear com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo de Gompertz)	89
3.16	Modelagem com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo de Gompertz)	90
3.17	Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo de Montroll)	92
3.18	Conjunto de dados e valores modelados por (3.14) - população brasileira (modelo de Montroll)	93
4.1	Projeções de 2030 e 2050 ajustadas por (4.1)	101
A.1	Estimativas para a população brasileira (Parte 1)	112
A.2	Estimativas para a altura de pinho-alemão (Parte 1)	112
A.3	Estimativas para a população brasileira (Parte 2)	115
A.4	Estimativas para a altura de pinho-alemão (Parte 2)	115
A.5	População brasileira - censos até 2010 e projeções até 2060	118
A.6	Altura de pinho-alemão (0 a 103 anos)	118
A.7	Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Malthus	121
A.8	Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Verhulst	122
A.9	Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Gompertz	123
A.10	Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Montroll	124

Sumário

Introdução	19
1 Modelos de crescimento populacional	21
1.1 Modelo malthusiano contínuo	21
1.2 Modelo logístico contínuo (Verhulst)	24
1.3 Modelo de Gompertz	31
1.4 Modelo de Montroll	38
1.5 Considerações e resumo dos modelos apresentados	49
2 Ajuste de curvas e obtenção de parâmetros	51
2.1 Ajuste Linear	52
2.1.1 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo malthusiano contínuo	55
2.1.2 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo logístico contínuo	56
2.1.3 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo de Gompertz	57
2.1.4 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo de Montroll	58
2.2 Obtenção do valor assintótico	59
2.2.1 Considerações sobre capacidade suporte (representada pelo valor assintótico)	60

2.2.2	Obtenção do valor assintótico através do método de Ford-Walford	62
2.2.3	Obtenção do valor assintótico através de ajuste linear da taxa de crescimento/declínio média relativa em relação a uma determinada função da variável dependente	65
2.2.4	Obtenção do valor assintótico através de estimativa dada por outro modelo	71
2.3	Obtenção do parâmetro λ de inibição do crescimento no modelo de Montroll	71
3	Exemplo de aplicação: população brasileira	75
3.1	Conjunto de dados	75
3.2	Modelo malthusiano contínuo	76
3.2.1	Através de função para ajuste linear	76
3.2.2	Através de taxa malthusiana	79
3.3	Modelo logístico contínuo	81
3.3.1	Valor assintótico	81
3.3.2	Ajuste linear	83
3.4	Modelo de Gompertz	85
3.4.1	Valor assintótico	85
3.4.2	Ajuste linear	87
3.5	Modelo de Montroll	90
3.5.1	Valor assintótico	90
3.5.2	Taxa λ	91
3.5.3	Ajuste linear	92
3.6	Análises e discussões	94
4	Proposta de atividade na Educação Básica	97
4.1	Público-alvo	97

4.2	Objetivo	97
4.3	Estrutura	97
4.4	Fontes de dados	98
4.5	Preparação geral	98
4.6	Parte 1 - Estimativas sem informações de variação em diferentes fases .	98
4.6.1	Materiais	98
4.6.2	Tempo	99
4.6.3	Forma de realização	99
4.6.4	Preparação	99
4.6.5	Realização	99
4.7	Parte 2 - Estimativas com informações de variação em diferentes fases .	101
4.8	Parte 3 - Socialização das estimativas	101
4.8.1	Materiais	102
4.8.2	Tempo	102
4.8.3	Preparação	102
4.8.4	Realização	103
4.9	Parte 4 - Exibição integral dos dados reais disponíveis	103
4.9.1	Materiais	103
4.9.2	Tempo	104
4.9.3	Preparação	104
4.9.4	Realização	104
4.10	Parte 5 - Exemplos de modelos de crescimento	105
5	Considerações finais	107
	Referências	109

Introdução

Ao cursar a disciplina de *Modelagem matemática* do programa de pós-graduação *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT*, as estratégias de ensino da matemática através de modelagem chamaram atenção. Junto a estas estratégias, um tópico que tratava do tema *evolução de modelos* também chamou atenção, por se entender que um dos principais objetivos da modelagem (quando se fala em representatividade de um determinado fenômeno) é justamente o aperfeiçoamento de modelos já existentes. Para exemplificação de tal tema, foram escolhidos para se tratar neste trabalho, *modelos de crescimento populacional*.

No Capítulo 1, serão abordados quatro modelos de crescimento populacional. Ao final deste capítulo, encontrar-se-á um quadro-resumo com características de cada um deles, bem como alguns fatores que foram considerados como pontos de evolução de um modelo para outro.

Para que se efetive a aplicação destes modelos a um conjunto de dados, pode-se fazer uso de algumas ferramentas matemáticas, como: ajuste de curvas, método de Ford-Walford, etc. E um dos motivadores para o desenvolvimento deste trabalho foi também, dentro do possível, um detalhamento do uso de algumas destas ferramentas, o que, em alguns casos, não foi encontrado em referências que tratam do assunto.

Assim, no Capítulo 2, serão abordados o conceito de *ajuste de curvas* (com ênfase em *ajuste linear*) e alguns métodos para obtenção dos parâmetros de cada um dos modelos. Serão exibidos os passos para obtenção das funções que podem ser utilizadas para ajuste linear em cada um deles; diferentes métodos para obtenção de valor assintótico (o parâmetro tratado aqui como representante numérico para *capacidade suporte*); e um método para obtenção de uma taxa, exclusiva ao modelo aqui considerado como mais evoluído dentre os quatro (modelo de Montroll), relativa à posição do ponto de inflexão de curvas, elemento bastante presente neste trabalho.

Não que o tópico *capacidade suporte* citado acima tenha sido também um dos motivadores para a escolha do tema deste trabalho, mas com o desenvolvimento deste, notou-se a importância de uma maior clareza em relação ao seu conceito. Entende-se que essa maior clareza pode ser muito útil para sistematizar uma característica que, atualmente, vem sendo buscada por muitas cidades, empresas e pessoas em geral, que é a *sustentabilidade*. Como exemplo dessa (provavelmente forte) relação entre *capacidade suporte* e *sustentabilidade*, pode ser citada a disponibilidade de água potável no planeta. O baixo nível desta disponibilidade (natural ou por via tecnológica) é, com certeza, um

fator limitante para o crescimento populacional de, praticamente, todas as espécies conhecidas de seres vivos do nosso planeta.

No Capítulo 3, será feita a aplicação da parte teórica abordada nos capítulos anteriores. Com cada um dos quatro modelos, serão utilizados um ou mais dos métodos abordados no Capítulo 2 para modelagem de um conjunto de dados relativo ao crescimento populacional humano do Brasil entre os anos de 1940 e 2010. Serão exibidas tabelas contendo os valores que levam às funções finais de cada modelo, bem como tabelas e gráficos para comparação entre os dados e os valores obtidos pelos modelos.

No Capítulo 4, serão descritas orientações de uma proposta de atividade para ser aplicada a alunos do Ensino Médio. Esta atividade é dividida em cinco partes: a primeira, para ver como os alunos imaginam acontecer o crescimento em certos fenômenos; a segunda, com um pouco do intuito da primeira, mas fornecendo uma quantidade maior de dados a fim de que o aluno possa observar as diferentes variações da grandeza analisada nas diferentes fases deste crescimento; a terceira, para socialização dos resultados obtidos pelos alunos; a quarta, para exibição integral dos dados relativos aos fenômenos tratados; e a quinta, para exemplificar, ainda que de modo superficial, o uso dos modelos tratados neste trabalho e de ajuste de curvas. No Apêndice A, encontra-se o material proposto para a aplicação desta atividade.

Por fim, no Capítulo 5, serão feitas as últimas considerações acerca do tema estudado, através das expectativas do que se quis transmitir ao leitor, expectativas da aplicação da atividade proposta para o Ensino Médio, e de alguns tópicos que precisam ser melhor estudados e/ou exemplificados.

1 Modelos de crescimento populacional

Neste capítulo, que tem como base principal [2, 3, 5] e como base auxiliar [4, 7, 8, 12, 17, 21, 22, 24], serão abordados quatro modelos de crescimento populacional: modelo malthusiano contínuo, modelo logístico contínuo, modelo de Gompertz e modelo de Montroll.

Apesar de o número de indivíduos de uma população assumir apenas valores inteiros, quando este número for suficientemente grande, pode-se aproximá-lo por uma função contínua no tempo. E é desta forma (contínua), através de equações diferenciais, que estes modelos serão tratados aqui. Um outro tratamento possível seria pela forma discreta, através de equações de diferenças ao invés de equações diferenciais.

É importante ressaltar que, embora os primeiros modelos de crescimento populacional tenham sido elaborados para que fossem aplicados à dinâmica populacional de seres humanos, nota-se que estes modelos e os que foram propostos posteriormente, cada um com restrições que serão comentadas neste capítulo, são razoavelmente adequados para modelar o fenômeno de crescimento populacional de outras espécies, além de outros fenômenos. Estas outras aplicações serão citadas nas seções relativas à cada modelo.

1.1 Modelo malthusiano contínuo

Em 1798, Thomas Robert Malthus (1766 - 1834), economista e demógrafo britânico, propôs, em seu livro *An Essay on the Principle of Population* (referência [1]¹), um modelo em que se considera que uma população humana, quando não obstaculizada, aumenta a uma razão geométrica. A formulação deste modelo em termos de uma equação diferencial não foi feita por Malthus. Mas, pela equivalência entre o que ele propunha e esta formulação, convencionou-se usar seu nome para o modelo. A formulação é a seguinte:

Seja $P(t)$ a população de uma determinada espécie no instante t . A hipótese do

¹Em sua primeira edição, no ano de 1798, esta obra foi publicada anonimamente. Anos depois, em outras edições, foi reconhecida a autoria de Malthus.

modelo malthusiano em relação à variação da população é que a taxa de variação de P é diretamente proporcional ao valor atual de P , ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = rP,$$

em que r , chamada de taxa de crescimento (caso $r > 0$) ou de declínio (caso $r < 0$), é uma constante de proporcionalidade.

Denotando a população inicial por P_0 , o modelo malthusiano contínuo, portanto, é dado pelo seguinte PVI (problema de valor inicial):

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Observação 1.1. Note que $\tilde{P}(t) \equiv 0$ é uma solução da EDO (equação diferencial ordinária) $P' = rP$. Supondo que \hat{P} é outra solução desta EDO e que $\hat{P}(t_0) = 0$ para algum $t_0 > 0$, tem-se que \tilde{P} e \hat{P} são soluções do PVI cuja condição inicial é $P(t_0) = 0$. Assim, o Teorema de Existência e Unicidade (para equações diferenciais) garante que $\hat{P} \equiv \tilde{P}$. Logo, as soluções P não identicamente nulas da EDO $P' = rP$ satisfazem $P(t) \neq 0$, para todo $t > 0$. Uma vez que as soluções devem ser contínuas, deve acontecer $P(t) > 0$, para todo $t > 0$ ou $P(t) < 0$, para todo $t > 0$. Em particular, se $P_0 > 0$, então ocorrerá $P(t) > 0$, para todo $t > 0$.

A seguir, será encontrada a solução para o PVI (1.1).

Supondo $P(t) > 0$, para todo $t \geq 0$, segue que

$$\frac{dP}{dt} = rP \Rightarrow \frac{1}{P}dP = rdt \Rightarrow \int \frac{1}{P}dP = \int rdt \Rightarrow \ln |P| = rt + c,$$

sendo c uma constante de integração. Como $P > 0$, segue que

$$\ln P = rt + c \Rightarrow P = e^{rt+c} = e^{rt}e^c.$$

Como $P(0) = P_0$, então

$$P_0 = e^{r \cdot 0}e^c = e^c.$$

Portanto, a solução do PVI (1.1) é

$$P(t) = P_0 e^{rt}, \text{ para } t \geq 0. \quad (1.2)$$

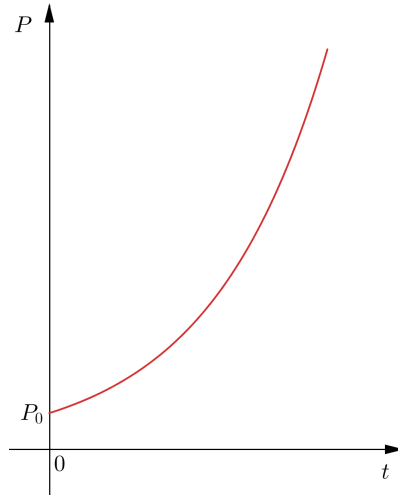


Figura 1.1: Solução do modelo malthusiano

A seguir, serão listados alguns fenômenos que podem ser descritos, com um bom grau de precisão, pelo modelo de Malthus, segundo [2]:

- Quantidade remanescente de uma substância durante certas reações químicas.
- Quantidade remanescente de certas substâncias que estejam em processo de de-sintegração.
- Crescimento populacional de algumas bactérias.
- Durante um curto período (na fase inicial), o crescimento populacional de alguns pequenos animais (roedores, por exemplo).

Observação 1.2. Tomando como exemplo o fenômeno de crescimento populacional humano do Brasil que será visto na Seção 3.2, entende-se que o modelo malthusiano contínuo pode descrever durante um certo intervalo de tempo (na fase inicial), com um grau de precisão razoável, o fenômeno de crescimento populacional humano em determinadas regiões (em alguns países ou cidades, por exemplo). Possivelmente, até o crescimento da população humana mundial.

Note que, pela solução (1.2), com $r > 0$, uma população crescerá exponencialmente para todo tempo $t \geq 0$ (ver Figura 1.1). Isso faz com que este seja um modelo razoável para crescimento populacional apenas até um determinado tempo t . Depois disso, alguns fatores limitantes (espaço, alimento e outros) ocasionam a diminuição da taxa de crescimento de P , fazendo com que este modelo não seja mais adequado para continuar descrevendo tal crescimento. Observação análoga pode ser feita para o caso em que $r < 0$.

1.2 Modelo logístico contínuo (Verhulst)

Em 1838, Pierre François Verhulst (1804 - 1849), matemático belga, considerando os fatores limitantes como os citados na seção anterior (e que não foram incorporados ao modelo de Malthus), propôs, em [23], um modelo no qual a população de uma determinada espécie cresce até um limite máximo sustentável, chamado de *capacidade suporte*², que neste trabalho será denotada por K . Neste modelo, a relação entre a taxa de variação da quantidade P e a própria quantidade P é mediada por uma taxa de crescimento/declínio variável.

O modelo de Verhulst, também conhecido como modelo logístico, em sua forma contínua, é dado pelo seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right), \text{ com } r > 0 \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

em que r é a taxa de crescimento intrínseca do meio (taxa na ausência de qualquer fator inibidor).

Note que, a taxa de variação da população, $\frac{dP}{dt}$, continua tendo uma relação com $P(t)$. Porém, não se trata mais de uma proporcionalidade direta, com a taxa de crescimento/declínio sendo uma constante que estabelece esta proporcionalidade, como no modelo malthusiano. Agora, a relação entre estes dois termos é estabelecida por uma taxa de crescimento/declínio variável, $r \left(1 - \frac{P}{K}\right)$, sendo ela, portanto, uma função de P .

Observação 1.3. Note que $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv K$ são soluções do PVI (1.3) com as respectivas condições iniciais $P_0 = 0$ e $P_0 = K$. Portanto, analogamente ao que foi comentado na Observação 1.1, para encontrar a solução do PVI (1.3), pode-se supor $0 < P(t) < K$ ou $P(t) > K$, para todo $t \geq 0$.

A seguir, será encontrada a solução para o PVI (1.3).

Supondo $P(t) > 0$ e $P(t) \neq K$, para todo $t \geq 0$, segue que

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP = r dt \Rightarrow \int \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP = \int r dt.$$

Para encontrar a integral do primeiro membro desta última equação, será utilizado o método das frações parciais. Tem-se que

²Ver Seção 2.2

$$P \left(1 - \frac{P}{K} \right) = P \left(\frac{K - P}{K} \right) \Rightarrow \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K} \right)} = \frac{K}{P(K - P)}.$$

Pelo método das frações parciais, segue que

$$\frac{K}{P(K - P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K - P} = \frac{A(K - P) + BP}{P(K - P)} = \frac{AK - AP + BP}{P(K - P)} = \frac{AK + (B - A)P}{P(K - P)}.$$

Logo, $A = 1$ e $B - A = 0$, o que implica $B = 1$ também. Portanto,

$$\frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K} \right)} = \frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}.$$

Logo,

$$\int \frac{1}{P \left(1 - \frac{P}{K} \right)} dP = \int r dt \Rightarrow \int \frac{1}{P} dP + \int \frac{1}{K - P} dP = \int r dt \Rightarrow$$

$$\ln |P| - \ln |K - P| = rt + c_1 \Rightarrow \ln \left| \frac{P}{K - P} \right| = rt + c_1 \Rightarrow \left| \frac{P}{K - P} \right| = e^{rt+c_1} = e^{rt} e^{c_1},$$

sendo c_1 uma constante de integração. Fazendo $c_2 = e^{c_1}$, segue que

$$\left| \frac{P}{K - P} \right| = c_2 e^{rt}.$$

Para obter uma função $P(t)$, serão considerados os casos $0 < P < K$ e $P > K$.

Caso 1 ($0 < P < K$):

$$0 < P < K \Rightarrow \left| \frac{P}{K - P} \right| = \frac{P}{K - P}.$$

Assim,

$$\frac{P}{K - P} = c_2 e^{rt} \Rightarrow P = (K - P) c_2 e^{rt} \Rightarrow P(1 + c_2 e^{rt}) = K c_2 e^{rt} \Rightarrow$$

$$P = \frac{K c_2 e^{rt}}{1 + c_2 e^{rt}} = \frac{K}{\frac{1}{c_2 e^{rt}} + 1} = \frac{K}{1 + \frac{1}{c_2} e^{-rt}} = \frac{K}{1 + c e^{-rt}},$$

se for considerado $c = \frac{1}{c_2}$.

Como $P(0) = P_0$, então

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{1 + ce^{-r0}} = \frac{K}{1 + c} \Rightarrow P_0 + P_0c = K \Rightarrow c = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

Portanto, a solução do PVI (1.3) quando $0 < P < K$ é

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}, \text{ com } c = \frac{K - P_0}{P_0}, t \geq 0. \quad (1.4)$$

Caso 2 ($P > K$):

$$P > K \Rightarrow \left| \frac{P}{K - P} \right| = \frac{P}{P - K}.$$

Fazendo um desenvolvimento análogo ao Caso 1, é obtida a seguinte solução:

$$P(t) = \frac{K}{1 - ce^{-rt}}, \text{ com } c = \frac{P_0 - K}{P_0}, t \geq 0. \quad (1.5)$$

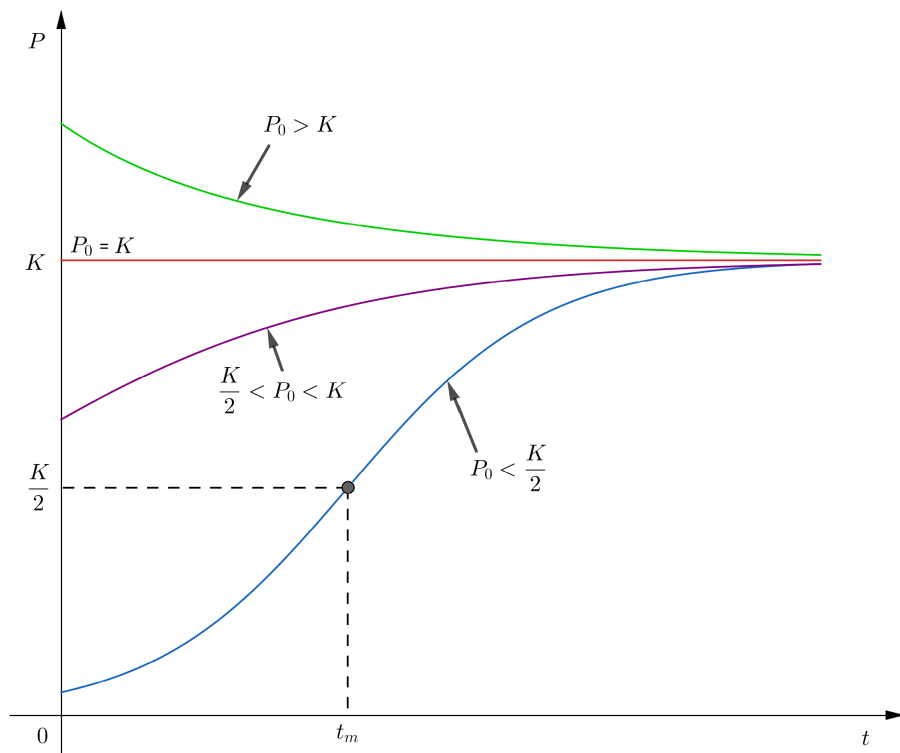


Figura 1.2: Soluções do modelo logístico

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades relativas ao PVI e às soluções do modelo logístico.

(P1-V) Nas soluções (1.4) e (1.5), tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K.$$

Ou seja, independentemente do valor que a população inicial P_0 de uma determinada espécie assumir (desde se tenha $P_0 > 0$), ela se estabilizará no valor $P = K$. Neste caso, diz-se que $P(t) = K$ é uma *solução de equilíbrio³ assintoticamente estável* do PVI (1.3).

Se $0 < P < K$, então, pelo PVI (1.3), $\frac{dP}{dt} > 0$. Neste caso, $P(t)$ tende a K de maneira crescente. Já se $P > K$, então $\frac{dP}{dt} < 0$. Neste caso, $P(t)$ tende a K de maneira decrescente.

(P2-V) Conforme (P1-V), mesmo para populações iniciais próximas de zero, tem-se $P(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, $P(t)$ se afasta de 0. Assim, diz-se que $P(t) \equiv 0$ é uma *solução de equilíbrio instável*. A única forma de garantir que o tamanho da população não se aproxime de K é tendo $P_0 = 0$.

(P3-V) Do PVI (1.3), segue que

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) = rP - \frac{rP^2}{K}.$$

Portanto, $\frac{dP}{dt}$ é uma função quadrática de P cujo gráfico é uma parábola de concavidade voltada para baixo (ver Figura 1.3) e cujas raízes são $P = 0$ e $P = K$. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = 0 &\Leftrightarrow rP \left(1 - \frac{P}{K} \right) = 0 \Leftrightarrow rP = 0 \text{ ou } 1 - \frac{P}{K} = 0 \Leftrightarrow \\ &P = 0 \text{ ou } 1 - \frac{P}{K} = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } P = K. \end{aligned}$$

Logo, a abscissa do vértice desta parábola é $\frac{K}{2}$. Por isto, e pelo fato de esta parábola ter concavidade voltada para baixo, segue que:

- Para $0 < P < \frac{K}{2}$, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é crescente em relação a P .
- Para $\frac{K}{2} < P < K$, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é decrescente em relação a P .
- Para $P > K$, $\frac{dP}{dt} < 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é decrescente em relação a P .

³Uma função constante $P(t) = A$ é uma *solução de equilíbrio* de uma equação diferencial $\frac{dP}{dt} = f(P)$ se e somente se $f(A) = 0$.

- O valor máximo de $\frac{dP}{dt}$, em relação a P , é atingido quando $P = \frac{K}{2}$.

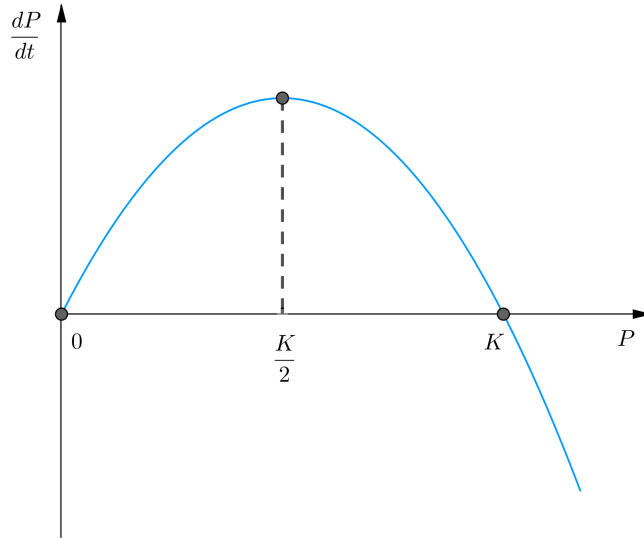


Figura 1.3: $\frac{dP}{dt}$ em função de $P(t)$ - logístico

(P4-V) Dada a equação (1.4), pode-se obter o instante t_m tal que $P(t_m) = \frac{K}{2}$, ou seja, o instante em que ocorre a máxima variação da população. Veja:

$$\frac{K}{2} = \frac{K}{1 + ce^{-rt_m}} \Rightarrow 1 + ce^{-rt_m} = 2 \Rightarrow e^{-rt_m} = \frac{1}{c} \Rightarrow -rt_m = \ln\left(\frac{1}{c}\right) \Rightarrow t_m = \frac{1}{r} \ln c \Rightarrow$$

$$t_m = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K - P_0}{P_0}\right). \quad (1.6)$$

(P4.1-V) Pela equação diferencial do PVI (1.3) e observando que $P(t_m) = \frac{K}{2}$, segue que

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{dP}{dt}\Big|_{t=t_m} = r\frac{K}{2}\left(1 - \frac{\frac{K}{2}}{K}\right) = r\frac{K}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = r\frac{K}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{rK}{4} > 0.$$

Portanto,

$$\frac{dP}{dt}\Big|_{t=t_m} \neq 0. \quad (1.7)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \\ \frac{d^2P}{dt^2} &= r \left(1 - \frac{P}{K}\right) + rP \left(-\frac{1}{K}\right) = r \left(1 - \frac{P}{K} - \frac{P}{K}\right) = r \left(1 - \frac{2P}{K}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\left. \frac{d^2P}{dt^2} \right|_{t=t_m} = r \left(1 - \frac{2 \cdot \frac{K}{2}}{K}\right) = r(1 - 1) = 0.$$

Ou seja,

$$\left. \frac{d^2P}{dt^2} \right|_{t=t_m} = 0. \quad (1.8)$$

Por (1.7) e (1.8), segue que $(t_m, \frac{K}{2})$ é um ponto de inflexão da função (1.4) (ver Figura 1.2).

(P4.2-V) Pela equação (1.6), se $P_0 = \frac{K}{2}$, então

$$t_m = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{K - \frac{K}{2}}{\frac{K}{2}} \right) = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{\frac{K}{2}}{\frac{K}{2}} \right) = \frac{1}{r} \ln 1 = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0.$$

(P4.3-V) Como

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow r \left(1 - \frac{2P}{K}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2P}{K} = 0 \Leftrightarrow P = \frac{K}{2},$$

então, se $\frac{K}{2} < P_0 < K$ ou se $P_0 > K$, a curva $P(t)$ não tem ponto de inflexão (ver Figura 1.2). Vale lembrar que, como visto em (P3-V), para $P(t)$ nestes intervalos, ocorre, respectivamente, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt} < 0$.

Observação 1.4. Na Seção 2.2.1 serão feitas considerações sobre o conceito de *capacidade suporte*.

Observação 1.5. Quando se fala em população humana mundial, não se deve achar estranho que diferentes valores de capacidade suporte possam ser considerados de acordo com a época a ser analisada. Isto porque, adventos, acontecimentos e ritmo de exploração de recursos naturais podem afetar diretamente a taxa de variação populacional. Alguns exemplos são: invenção e aprimoramento de ferramentas, Revolução Agrícola

e Revolução Industrial. O ideal, quando são tratados dados relativos a um intervalo de tempo relativamente extenso (no qual houve estas grandes interferências), é considerar um valor de capacidade suporte específico e coerente para as faixas de tempo correspondentes a estas interferências. Para se ter uma ideia melhor, consulte [4] (p. 53).

A seguir, serão listados alguns dos fenômenos que podem ser descritos (dependendo da situação, com um bom grau de precisão) pelo modelo logístico, segundo [2, 3]:

- Crescimento populacional humano em alguns países.
- Crescimento (em altura) de determinadas espécies de árvores.

Observação 1.6. Entende-se que o modelo logístico contínuo pode descrever, com um grau de precisão razoável, o fenômeno de crescimento populacional humano não apenas de determinados países, mas também de algumas cidades, estados e, possivelmente, do mundo. Analogamente, não apenas do crescimento (em altura) de determinadas espécies de árvores, mas também de determinadas espécies de vegetais em geral.

É importante ressaltar que, para $P_0 < \frac{K}{2}$, a qualidade da aproximação deste modelo à realidade depende da proximidade do trecho em que a máxima variação da variável analisada (p.ex: altura, no caso de árvores; quantidade de indivíduos, no caso de população humana de determinadas regiões) ocorre com o valor correspondente à metade da capacidade suporte. Quanto maior for esta proximidade, melhor é a aproximação aos dados reais.

Como visto, o modelo logístico traz uma evolução em relação ao modelo malthusiano ao considerar, quando $P < K$, fatores limitantes que ocasionam a diminuição da taxa de crescimento populacional conforme P aumenta. Porém, a qualidade da aproximação do modelo aos dados reais fica limitada devido à proximidade que a ordenada do ponto de inflexão da curva que o representa deve ter com um único valor ($P = \frac{K}{2}$). Esta limitação ainda ocorre no próximo modelo a ser apresentado (modelo de Gompertz), porém com um valor diferente ($P = \frac{K}{e}$).

Observação 1.7. Nas referências adotadas, as observações acerca das evoluções nos modelos de crescimento populacional, em geral, são mais voltadas para casos em que $P < K$. Mas, é possível notar que, em geral, elas se estendem aos casos em que $P > K$. Entende-se que o aspecto evolutivo considerado no parágrafo anterior, por exemplo, tem seu equivalente quando $P > K$. A diferença é que, ao invés de haver a diminuição da taxa de crescimento conforme P aumenta, é a taxa de declínio que diminui (em módulo), e não conforme P aumenta, mas conforme P diminui. Neste caso, ao invés de *fatores limitantes*, talvez pudesse se utilizar um termo que remeta à capacidade de determinado ambiente conseguir manter uma determinada quantidade mínima de indivíduos. Ou até mesmo, considerar que o termo *limitante* pode ser utilizado tanto no sentido de limitar a continuação de um crescimento populacional quanto no sentido de limitar a continuação de um declínio populacional.

1.3 Modelo de Gompertz

Em 1825, Benjamin Gompertz (1779 - 1865), matemático e atuário inglês, obteve um modelo com o qual a ideia inicial era descrever a mortalidade de pessoas (algo bastante útil para sua companhia de seguros). Posteriormente, notou-se que, com alguns ajustes, tratava-se de um modelo muito bem aplicável a certas situações de crescimento populacional e a outras que serão citadas mais à frente. Em todas elas, nota-se que a variável analisada tem um crescimento bastante rápido no início e uma aproximação lenta a um limite máximo sustentável. Assim como no modelo logístico, este limite também será chamado de *capacidade suporte* e denotado por K . A descrição feita à época para este modelo encontra-se em [11].

O modelo de Gompertz, tal qual como é conhecido hoje, é dado pelo seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP - \mu P \ln P = P(r - \mu \ln P), \text{ com } r > 0 \text{ e } \mu > 0 \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

em que r é a taxa de crescimento intrínseca do meio (taxa na ausência de qualquer fator inibidor) e μ será chamado de parâmetro de inibição do crescimento (nas referências utilizadas, não foi encontrado um nome específico para este termo).

No modelo logístico, a taxa de crescimento/declínio, $r(1 - \frac{P}{K})$ (e também a taxa de inibição, $\frac{rP}{K}$), é uma função afim de P . Já no modelo de Gompertz, a taxa de crescimento/declínio, $r - \mu \ln P$ (e também a taxa de inibição, $\mu \ln P$), é uma função do logaritmo de P . Neste modelo, esta taxa de crescimento (resp. declínio) decresce (resp. decresce em módulo) conforme P aumenta (resp. diminui).

É possível obter uma equação diferencial equivalente à do PVI (1.9) tendo K como um dos parâmetros. Veja:

O valor de K é obtido fazendo-se $\frac{dP}{dt} = 0$ em (1.9) e excluindo-se a “solução” $P(t) \equiv 0$ por ser inconsistente em relação à definição de função logarítmica. Assim,

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Leftrightarrow r - \mu \ln K = 0 \Leftrightarrow \ln K = \frac{r}{\mu} \Leftrightarrow$$

$$K = e^{\frac{r}{\mu}}. \quad (1.10)$$

Como $r - \mu \ln K = 0$ implica $r = \mu \ln K$, tem-se, em (1.9), que

$$\frac{dP}{dt} = rP - \mu P \ln P = (\mu \ln K)P - \mu P \ln P = \mu P \ln \left(\frac{K}{P} \right).$$

Assim,

$$\frac{dP}{dt} = P \ln \left(\frac{K}{P} \right)^\mu \quad (1.11)$$

é uma forma alternativa de representar o modelo de Gompertz.

Observação 1.8. Em (1.9), note que quanto menor for P , maior é a taxa $r - \mu \ln P$, ocorrendo, inclusive,

$$\lim_{P \rightarrow 0^+} (r - \mu \ln P) = +\infty.$$

Devido a estes valores de taxa de crescimento exageradamente altos (bem fora da realidade), este modelo acaba não sendo utilizado quando o número de indivíduos da população analisada ainda é muito pequeno.

Observação 1.9. Para este modelo, não há o que se (des)considerar em relação a possibilidade de se ter $P(t) = 0$, para algum $t \geq 0$, devido à sua inutilização por inconsistência em relação à definição de função logarítmica em (1.9). Note que $P(t) \equiv K$ é solução do PVI (1.9) com a condição inicial $P_0 = K$. Portanto, analogamente ao que foi comentado na Observação 1.1, para encontrar a solução do PVI (1.9), pode-se supor $0 < P(t) < K$ ou $P(t) > K$, para todo $t \geq 0$.

A seguir, será encontrada a solução para o PVI (1.9).

Considerando a mudança de variável $Q = \ln P$, segue que

$$\begin{aligned} Q = \ln P &\Rightarrow \frac{dQ}{dP} = \frac{d}{dP}[\ln P] = \frac{1}{P} \Rightarrow dQ = \frac{1}{P}dP \Rightarrow \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{P} P(r - \mu \ln P) = r - \mu \ln P = r - \mu Q. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = r - \mu Q &\Rightarrow \frac{1}{r - \mu Q} dQ = dt \Rightarrow \int \frac{1}{r - \mu Q} dQ = \int dt \Rightarrow \\ -\frac{1}{\mu} \ln |r - \mu Q| &= t + c. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Como $P(0) = P_0$ (ou seja, $Q(0) = \ln P_0$), então

$$-\frac{1}{\mu} \ln |r - \mu \ln P_0| = 0 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{\mu} \ln |r - \mu \ln P_0|$$

Substituindo esta expressão equivalente a c em (1.12), segue que

$$-\frac{1}{\mu} \ln |r - \mu Q| = t - \frac{1}{\mu} \ln |r - \mu \ln P_0| \Rightarrow$$

$$\ln |r - \mu Q| = -\mu t + \ln |r - \mu \ln P_0| \quad (1.13)$$

Para obter uma função $P(t)$, serão considerados os casos $0 < P < K$ e $P > K$.

Caso 1 ($0 < P < K$):

Por (1.10), segue que

$$P < K \Rightarrow P < e^{\frac{r}{\mu}}.$$

Como a função logarítmica natural é estritamente crescente, então

$$\ln P < \frac{r}{\mu} \Rightarrow r - \mu \ln P > 0 \Rightarrow r - \mu Q > 0.$$

Assim, da equação (1.13), segue que

$$r - \mu Q = (r - \mu \ln P_0) e^{-\mu t} \quad (1.14)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{r}{\mu} - \left(\frac{r}{\mu} - \ln P_0 \right) e^{-\mu t}.$$

Como foi utilizada a mudança de variável $Q = \ln P$, obtém-se

$$P(t) = e^Q = e^{\frac{r}{\mu}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{r}{\mu} - \ln P_0 \right) e^{-\mu t} \right]. \quad (1.15)$$

Há outra maneira de representar $P(t)$:

$$P(t) = e^{\frac{r}{\mu}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{r}{\mu} - \ln P_0 \right) e^{-\mu t} \right] = e^{\frac{r}{\mu}} \left(\frac{e^{\ln P_0}}{e^{\frac{r}{\mu}}} \right)^{e^{-\mu t}}.$$

Logo,

$$P(t) = K \left(\frac{P_0}{K} \right)^{e^{-\mu t}}, \text{ para } t \geq 0. \quad (1.16)$$

Caso 2 ($P > K$):

Por (1.10), segue que

$$P > K \Rightarrow P > e^{\frac{r}{\mu}}.$$

Como a função logarítmica natural é estritamente crescente, então

$$\ln P > \frac{r}{\mu} \Rightarrow r - \mu \ln P < 0 \Rightarrow r - \mu Q < 0.$$

Assim, da equação (1.13), segue que

$$-r + \mu Q = (-r + \mu \ln P_0)e^{-\mu t} \Rightarrow r - \mu Q = (r - \mu \ln P_0)e^{-\mu t},$$

ou seja, uma equação idêntica à (1.14). Logo a solução neste Caso 2 também é dada por (1.15) ou (1.16).

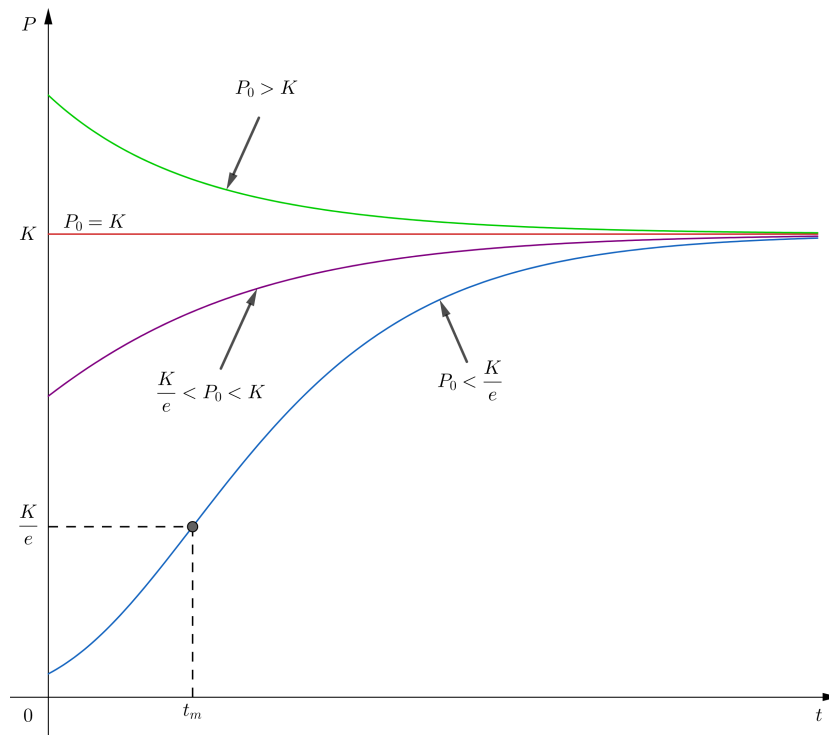


Figura 1.4: Soluções do modelo de Gompertz

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades relativas ao PVI e às soluções do modelo de Gompertz.

(P1-G) Nas soluções (1.15) e (1.16), tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K.$$

Ou seja, independentemente do valor que a população inicial P_0 de uma determinada espécie assumir (desde se tenha $P_0 > 0$), ela se estabilizará no valor $P = K$. Neste caso, assim como no modelo logístico, diz-se que $P(t) = K$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável do PVI (1.9).

Se $0 < P < K$, então, conforme visto no Caso 1, $r - \mu \ln P > 0$. Pelo PVI (1.9), isto implica $\frac{dP}{dt} > 0$. Neste caso, $P(t)$ tende a K de maneira crescente. Já se $P > K$, então, conforme visto no Caso 2, $r - \mu \ln P < 0$. Isto implica $\frac{dP}{dt} < 0$. Neste caso, $P(t)$ tende a K de maneira decrescente.

(P2-G) Do PVI (1.9), tem-se

$$\frac{dP}{dt} = rP - \mu P \ln P.$$

Pela Figura 1.5, nota-se que o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ como função de P (função esta cujas raízes são $P = 0$ e $P = e^{\frac{r}{\mu}} = K$) lembra ainda uma parábola com concavidade voltada para baixo (forma que acontece no modelo logístico). Não se trata exatamente de uma parábola porque, ao invés de uma parcela com P^2 , há uma parcela com $P \ln P$, fazendo com que a variação populacional (como função de P) atinja seu máximo antes que a população chegue a metade da capacidade suporte. Graficamente, isso acarreta em um deslocamento do vértice da curva para a esquerda, fazendo com que ela não seja mais simétrica em relação à reta vertical que passa por este vértice.

Para que seja encontrado o ponto de máximo, P_m , dessa curva (que não é mais o ponto médio entre suas raízes como no modelo logístico), pode-se derivar a equação diferencial de (1.9) em relação a P e igualar esta derivada a zero. Veja:

$$\frac{d}{dP} \left[\frac{dP}{dt} \right] = r - \mu \ln P + P(-\mu) \frac{1}{P} = r - \mu - \mu \ln P.$$

Assim,

$$\frac{d}{dP} \left[\frac{dP}{dt} \right] = 0 \Leftrightarrow r - \mu - \mu \ln P = 0 \Leftrightarrow \ln P = \frac{r}{\mu} - 1$$

e portanto,

$$P_m = \frac{e^{\frac{r}{\mu}}}{e} = \frac{K}{e}. \quad (1.17)$$

Por (1.17) e pelo fato de esta curva ter concavidade voltada para baixo, segue que:

- Para $0 < P < \frac{K}{e}$, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é crescente em relação a P .
- Para $\frac{K}{e} < P < K$, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é decrescente em relação a P .
- Para $P > K$, $\frac{dP}{dt} < 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é decrescente em relação a P .
- O valor máximo de $\frac{dP}{dt}$, em relação a P , é atingido quando $P = \frac{K}{e}$.

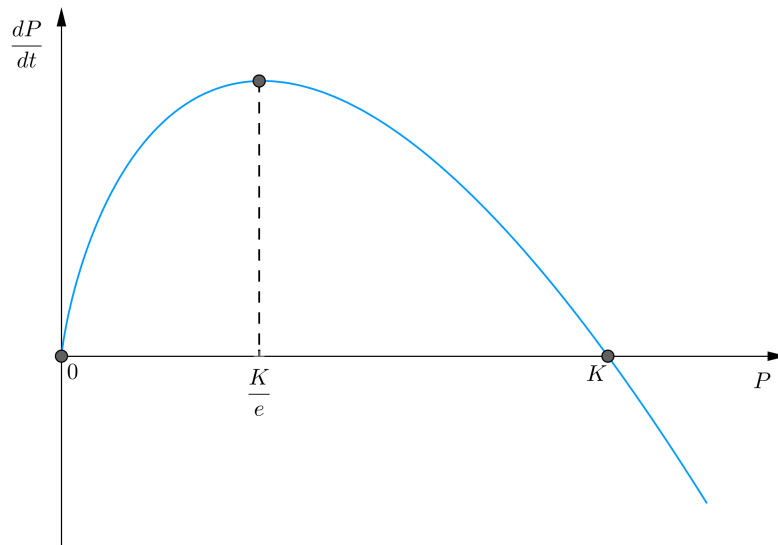


Figura 1.5: $\frac{dP}{dt}$ em função de $P(t)$ - Gompertz

(P3-G) Dada a equação (1.16), pode-se obter o instante t_m tal que $P(t_m) = \frac{K}{e}$, ou seja, o instante em que ocorre a máxima variação da população. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{K}{e} &= K \left(\frac{P_0}{K} \right)^{e^{-\mu t_m}} \Rightarrow \ln \left(\frac{1}{e} \right) = e^{-\mu t_m} \ln \left(\frac{P_0}{K} \right) \Rightarrow e^{-\mu t_m} = -\frac{1}{\ln \left(\frac{P_0}{K} \right)} \Rightarrow \\ e^{-\mu t_m} &= \frac{1}{\ln \left(\frac{K}{P_0} \right)} \Rightarrow -\mu t_m = \ln 1 - \ln \left[\ln \left(\frac{K}{P_0} \right) \right] \Rightarrow -\mu t_m = -\ln(\ln K - \ln P_0) \Rightarrow \\ t_m &= \frac{1}{\mu} \ln(\ln K - \ln P_0), \end{aligned}$$

ou, opcionalmente, conforme (1.10),

$$t_m = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{r}{\mu} - \ln P_0 \right). \quad (1.18)$$

(P3.1-G) Pela equação diferencial do PVI (1.9) e observando que $P(t_m) = \frac{K}{e}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = rP - \mu \ln P &\Rightarrow \frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_m} = r \frac{K}{e} - \mu \frac{K}{e} \ln \left(\frac{K}{e} \right) = \frac{K}{e} \left[r - \mu \ln \left(\frac{K}{e} \right) \right] = \\ &= \frac{K}{e} \left[r - \mu \ln \left(\frac{e^{\frac{r}{\mu}}}{e} \right) \right] = \frac{K}{e} \left[r - \mu \left(\frac{r}{\mu} - 1 \right) \right] = \frac{K}{e} (r - r + \mu) = \frac{K}{e} \mu > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_m} \neq 0. \quad (1.19)$$

Além disso,

$$\frac{dP}{dt} = rP - \mu P \ln P \Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} = r - \mu \left(\ln P + P \cdot \frac{1}{P} \right) = r - \mu \ln P - \mu.$$

Logo,

$$\frac{d^2P}{dt^2} \Big|_{t=t_m} = r - \mu \ln \left(\frac{K}{e} \right) - \mu = r - \mu \ln e^{\frac{r}{\mu}-1} - \mu = r - \mu \left(\frac{r}{\mu} - 1 \right) - \mu = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{d^2P}{dt^2} \Big|_{t=t_m} = 0. \quad (1.20)$$

Por (1.19) e (1.20), segue que $(t_m, \frac{K}{e})$ é um ponto de inflexão da função (1.16) (ver Figura 1.4).

(P3.2-G) Pelas equações (1.10) e (1.18), se $P_0 = \frac{K}{e}$, então

$$t_m = \frac{1}{\mu} \ln \left[\ln K - \ln \left(\frac{K}{e} \right) \right] = \frac{1}{\mu} \ln(\ln K - \ln K + 1) = \frac{1}{\mu} \ln 1 = \frac{1}{\mu} \cdot 0 = 0.$$

(P3.3-G) Como

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow r - \mu \ln P - \mu = 0 \Leftrightarrow \ln P = \frac{r - \mu}{\mu} \Leftrightarrow P = e^{\frac{r}{\mu} - 1} = \frac{e^{\frac{r}{\mu}}}{e} = \frac{K}{e},$$

então, se $\frac{K}{e} < P_0 < K$ ou se $P_0 > K$, a curva $P(t)$ não tem ponto de inflexão (ver Figura 1.4). Vale lembrar que, como visto em (P2-G), para $P(t)$ nestes intervalos, ocorre, respectivamente, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt} < 0$.

A seguir, serão listados alguns dos fenômenos que podem ser descritos (dependendo da situação, com um bom grau de precisão) pelo modelo de Gompertz, segundo [3]:

- Crescimento celular em plantas.
- Crescimento celular em bactérias.
- Crescimento celular em tumores sólidos.

É importante ressaltar que, para $P_0 < \frac{K}{e}$, a qualidade da aproximação deste modelo à realidade depende da proximidade do trecho em que a máxima variação populacional ocorre com o valor $\frac{K}{e}$. Quanto maior for esta proximidade, melhor é a aproximação aos dados reais.

Conforme visto, o modelo logístico e o modelo de Gompertz, apesar de considerarem fatores limitantes que ocasionam a diminuição (resp. diminuição em módulo) da taxa de crescimento (resp. declínio) populacional (um avanço em relação ao modelo malthusiano), ficam limitados para modelar, com bom grau de precisão, uma gama maior de fenômenos devido à proximidade que as ordenadas dos pontos de inflexão das curvas que os representam devem ter com um único valor ($\frac{K}{2}$ e $\frac{K}{e}$, respectivamente). Esta limitação já é, em partes, contornada no próximo modelo que será apresentado (modelo de Montroll).

1.4 Modelo de Montroll

Em 1971, Elliott Waters Montroll (1916-1983), cientista e matemático estadunidense, propôs, conforme [10], um modelo com características semelhantes aos modelos logístico e de Gompertz. Assim como nestes, a taxa de crescimento/declínio é variável e o crescimento ocorre até um limite máximo sustentável (capacidade suporte).

O modelo de Montroll é dado pelo seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right], \text{ com } r > 0 \text{ e } \lambda > 0 \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (1.21)$$

em que r é a taxa de crescimento intrínseca do meio (taxa na ausência de qualquer fator inibidor). O parâmetro λ , assim como μ no modelo de Gompertz, será chamado de *parâmetro de inibição do crescimento*.

Note que o PVI (1.21) é idêntico ao PVI (1.3) (modelo de Verhulst), a menos do parâmetro λ , cujo valor indica a posição do ponto de inflexão da curva que representa sua solução. É claro que, quando $\lambda = 1$, o PVI (1.21) é exatamente o PVI (1.3).

Observação 1.10. Não exatamente na forma como o modelo de Montroll foi apresentado mas, anteriormente à sua publicação, consta um modelo que engloba o modelo de Montroll (e, conseqüentemente os modelos de Verhulst e Gompertz). Ele é conhecido como modelo de Richards, e foi proposto no ano de 1959. Neste trabalho, optou-se por abordar o modelo de Montroll, e não o de Richards, por estar sendo usado [3] como base teórica, no qual o modelo apresentado é o de Montroll.

Considerando desde o primeiro modelo apresentado neste capítulo, tem-se: no modelo de Malthus, a taxa de crescimento/declínio r é constante; no modelo logístico, a taxa de crescimento/declínio $r \left(1 - \frac{P}{K} \right)$ é uma função afim de P ; no modelo de Gompertz, esta taxa, $r - \mu \ln P$, é uma função do logaritmo de P ; e, finalmente, no modelo de Montroll, esta taxa, $r \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right]$, é uma função potência de P . Note que, no modelo de Montroll, assim como no modelo logístico e no de Gompertz, quando $P < K$ (resp. $P > K$) ela decresce (resp. decresce em módulo) conforme P aumenta (resp. diminui).

Observação 1.11. Analogamente ao que foi comentado na Observação 1.3, para encontrar a solução do PVI (1.21), pode-se supor $0 < P(t) < K$ ou $P(t) > K$, para todo $t \geq 0$.

A seguir, será encontrada a solução para o PVI (1.21), supondo $P \neq 0$ e $P \neq K$.

Considerando a mudança de variável $Q = \frac{P}{K}$, segue que

$$Q = \frac{P}{K} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = K \frac{dQ}{dt}.$$

Com esta mudança de variável e por (1.21), segue que

$$\frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] \Rightarrow K \frac{dQ}{dt} = rKQ(1 - Q^\lambda) \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = rQ(1 - Q^\lambda) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{Q(1 - Q^\lambda)} dQ = r dt.$$

Para facilitar no processo de integração, pode-se multiplicar ambos os membros desta última igualdade por λ . Assim, tem-se

$$\frac{\lambda}{Q(1 - Q^\lambda)} dQ = \lambda r dt \Rightarrow \int \frac{\lambda}{Q(1 - Q^\lambda)} dQ = \int \lambda r dt \Rightarrow \ln \left| \frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda} \right| = \lambda r t + c_1 \Rightarrow$$

$$\left| \frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda} \right| = e^{\lambda r t + c_1} = e^{\lambda r t} e^{c_1},$$

sendo c_1 uma constante de integração.

Fazendo $c_2 = e^{c_1}$, segue que

$$\left| \frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda} \right| = c_2 e^{\lambda r t}.$$

Para obter uma função $P(t)$, serão considerados os casos $0 < P < K$ e $P > K$.

Caso 1 ($0 < P < K$):

$$0 < P < K \Rightarrow 0 < \frac{P}{K} < 1 \Rightarrow 0 < Q < 1 \Rightarrow \left| \frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda} \right| = \frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda}.$$

Assim,

$$\frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda} = c_2 e^{\lambda r t} \Rightarrow Q^\lambda = (1 - Q^\lambda) c_2 e^{\lambda r t} \Rightarrow Q^\lambda (1 + c_2 e^{\lambda r t}) = c_2 e^{\lambda r t} \Rightarrow$$

$$Q^\lambda = \frac{c_2 e^{\lambda r t}}{1 + c_2 e^{\lambda r t}} \Rightarrow Q^\lambda = \frac{1}{\frac{1}{c_2 e^{\lambda r t}} + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c_2} e^{-\lambda r t}} = \frac{1}{1 + c e^{-\lambda r t}},$$

se for considerado $c = \frac{1}{c_2}$.

Logo,

$$Q = \frac{1}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Como foi utilizada a mudança de variável $Q = \frac{P}{K}$, segue que

$$P = KQ = \frac{K}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Como $P(0) = P_0$, então

$$P_0 = P(0) = \frac{K}{(1 + ce^{-\lambda r0})^{\frac{1}{\lambda}}} = \frac{K}{(1 + c)^{\frac{1}{\lambda}}} \Rightarrow P_0^\lambda = \frac{K^\lambda}{1 + c} \Rightarrow c = \frac{K^\lambda - P_0^\lambda}{P_0^\lambda}.$$

Portanto, a solução do PVI (1.21) quando $0 < P < K$ é

$$\boxed{P(t) = \frac{K}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}, \text{ com } c = \frac{K^\lambda - P_0^\lambda}{P_0^\lambda}, t \geq 0} . \quad (1.22)$$

Caso 2 ($P > K$):

$$P > K \Rightarrow \frac{P}{K} > 1 \Rightarrow Q > 1 \Rightarrow \left| \frac{Q^\lambda}{1 - Q^\lambda} \right| = \frac{Q^\lambda}{Q^\lambda - 1}.$$

Fazendo desenvolvimento análogo ao Caso 1, é obtida a seguinte solução:

$$\boxed{P(t) = \frac{K}{(1 - ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}, \text{ com } c = \frac{P_0^\lambda - K^\lambda}{P_0^\lambda}, t \geq 0} . \quad (1.23)$$

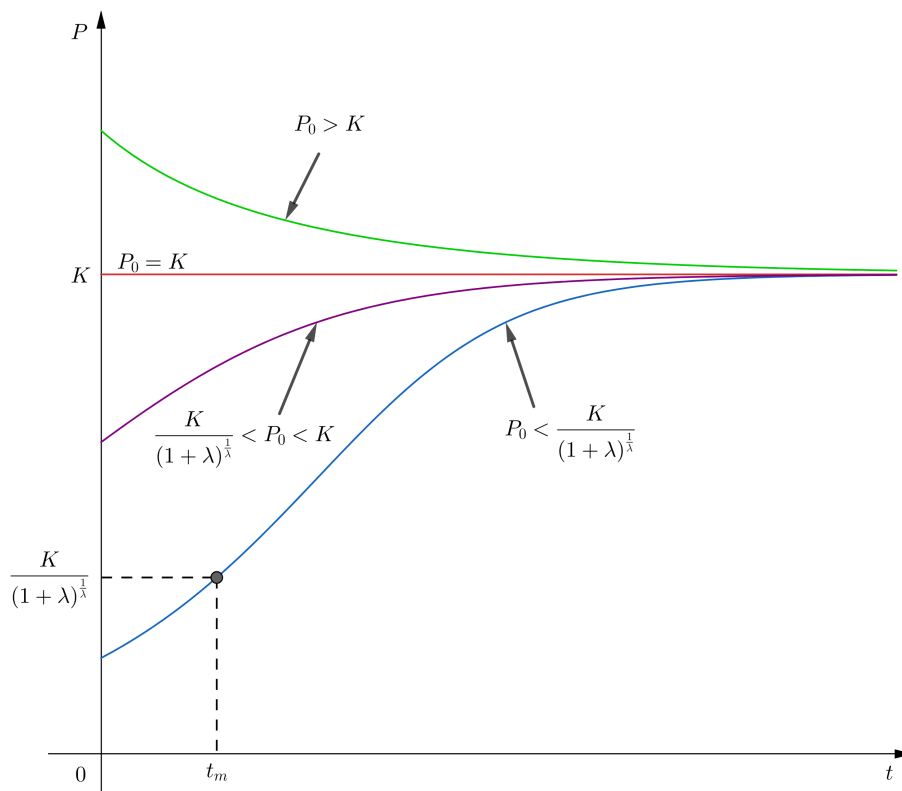


Figura 1.6: Soluções do modelo de Montroll

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades relativas ao PVI e às soluções do modelo de Montroll.

(P1-M) Nas soluções (1.22) e (1.23), tem-se

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K.$$

Ou seja, independentemente do valor que a população inicial P_0 de uma determinada espécie assumir (desde que se tenha $P_0 > 0$), ela se estabilizará no valor $P = K$. Assim, $P(t) = K$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável do PVI (1.21).

Se $0 < P < K$, então, pelo PVI (1.21), $\frac{dP}{dt} > 0$. Neste caso, $P(t)$ tende a K de maneira crescente. Já se $P > K$, então $\frac{dP}{dt} < 0$. Neste caso, $P(t)$ tende a K de maneira decrescente.

(P2-M) Conforme (P1-M), assim como no modelo logístico, mesmo para populações iniciais próximas de zero, tem-se $P(t) \rightarrow K$ quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, $P(t)$ se afasta de $P = 0$. Assim, $P(t) \equiv 0$ é uma solução de equilíbrio instável. A única forma de garantir que o tamanho da população não se aproxime de K é tendo $P_0 = 0$.

(P3-M) Do PVI (1.21), segue que

$$\frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] = rP - \frac{rP^{\lambda+1}}{K^\lambda}.$$

Assim, tem-se

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Leftrightarrow rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] = 0 \Leftrightarrow rP = 0 \text{ ou } 1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$P = 0 \text{ ou } 1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } P = K.$$

Para que seja encontrado o ponto de máximo, P_m , dessa curva, pode-se derivar a equação diferencial de (1.21) em relação a P e igualar esta derivada a zero. Veja:

$$\frac{d}{dP} \left[\frac{dP}{dt} \right] = r - \frac{r(\lambda + 1)P^\lambda}{K^\lambda}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dP} \left[\frac{dP}{dt} \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{r(\lambda + 1)P^\lambda}{K^\lambda} = r \Leftrightarrow P^\lambda = \frac{K^\lambda}{\lambda + 1},$$

e portanto,

$$P_m = \frac{K}{(1 + \lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad (1.24)$$

já que $P \geq 0$, $\lambda > 0$ e $K > 0$.

Por (1.24) e pelo fato de esta curva ter concavidade voltada para baixo, segue que:

- Para $0 < P < \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é crescente em relação a P .
- Para $\frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} < P < K$, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é decrescente em relação a P .
- Para $P > K$, $\frac{dP}{dt} < 0$ e $\frac{dP}{dt}$ é decrescente em relação a P .
- O valor máximo de $\frac{dP}{dt}$, em relação a P , é atingido quando $P = \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$.

Pela Figura 1.7, nota-se que, de acordo com o valor de λ , o gráfico de $\frac{dP}{dt}$ como função de P pode ser uma parábola (quando $\lambda = 1$) ou uma curva com concavidade para baixo e comportamento semelhante a uma parábola. Neste último caso, o vértice da curva pode estar deslocado para a esquerda (quando $\lambda < 1$) ou para a direita (quando $\lambda > 1$). Nesta figura, são utilizados, a título de exemplo, os seguintes valores de λ , juntos com os respectivos valores de P_m calculados por (1.24):

- $\lambda = 0,25 \Rightarrow P_m = 0,4096K$,
- $\lambda = 1 \Rightarrow P_m = 0,5000K$,
- $\lambda = 3 \Rightarrow P_m = 0,6300K$.

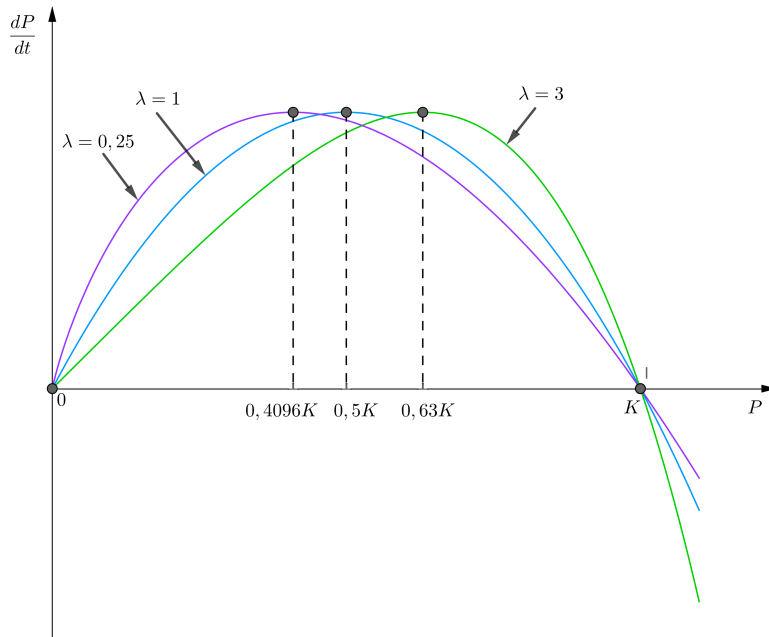


Figura 1.7: $\frac{dP}{dt}$ em função de $P(t)$ - Montroll

(P4-M) Dada a equação (1.22), pode-se obter o instante t_m tal que $P(t_m) = \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$, ou seja, o instante em que ocorre a máxima variação da população. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} &= \frac{K}{(1+ce^{-\lambda r t_m})^{\frac{1}{\lambda}}} \Rightarrow 1+ce^{-\lambda r t_m} = 1+\lambda \Rightarrow e^{-\lambda r t_m} = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \\ -\lambda r t_m &= \ln\left(\frac{\lambda}{c}\right) \Rightarrow t_m = \frac{1}{\lambda r} \ln\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda r} \ln\left[\frac{\frac{K^\lambda - P_0^\lambda}{P_0^\lambda}}{\lambda}\right] \Rightarrow \\ t_m &= \frac{1}{\lambda r} \ln\left(\frac{K^\lambda - P_0^\lambda}{\lambda P_0^\lambda}\right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

(P4.1-M) Pela equação diferencial do PVI (1.21) e observando que $P(t_m) = \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] &\Rightarrow \frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_m} = r \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} \left[1 - \left(\frac{\frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}}{K} \right)^\lambda \right] = \\ &= r \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} \left(1 - \frac{1}{1+\lambda} \right) > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_m} \neq 0. \quad (1.26)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] &\Rightarrow \frac{d^2P}{dt^2} = r \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] + rP \left(-\frac{\lambda P^{\lambda-1}}{K^\lambda} \right) = \\ &= r \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda - \lambda \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] = r \left[1 - (1+\lambda) \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d^2P}{dt^2} \Big|_{t=t_m} = r \left[1 - (1+\lambda) \left(\frac{\frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}}{K} \right)^\lambda \right] = r \left[1 - (1+\lambda) \frac{1}{(1+\lambda)} \right] = 0.$$

Ou seja,

$$\frac{d^2P}{dt^2} \Big|_{t=t_m} = 0. \quad (1.27)$$

Por (1.26) e (1.27), segue que $\left(t_m, \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} \right)$ é um ponto de inflexão da função (1.4) (ver Figura 1.6).

(P4.2-M) Pela equação (1.25), se $P_0 = \frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$, então

$$t_m = \frac{1}{\lambda r} \ln \left(\frac{K^\lambda - \frac{K^\lambda}{1+\lambda}}{\lambda \frac{K^\lambda}{1+\lambda}} \right) = \frac{1}{\lambda r} \ln \left(\frac{\frac{\lambda K^\lambda}{1+\lambda}}{\frac{\lambda K^\lambda}{1+\lambda}} \right) = \frac{1}{\lambda r} \ln 1 = \frac{1}{\lambda r} \cdot 0 = 0.$$

(P4.3-M) Como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dt^2} = 0 &\Leftrightarrow r \left[1 - (1 + \lambda) \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] = 0 \Leftrightarrow \left[1 - (1 + \lambda) \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right] = 0 \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{P}{K} \right)^\lambda = \frac{1}{1 + \lambda} \Leftrightarrow P = \frac{K}{(1 + \lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}, \end{aligned}$$

então, se $\frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} < P_0 < K$ ou se $P_0 > K$, a curva $P(t)$ não tem ponto de inflexão (ver Figura 1.6). Vale lembrar que, para $P(t)$ nestes intervalos, ocorre, respectivamente, $\frac{dP}{dt} > 0$ e $\frac{dP}{dt} < 0$.

(P5-M) De (1.24), é possível verificar que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} P_m = \frac{K}{e}$ e $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_m = K$ (ver (P5.1-M) e (P5.2-M) a seguir). Ou seja, o modelo de Montroll pode ser viável para representar conjuntos de dados em que a máxima variação da variável estudada ocorra quando o valor de tal variável seja qualquer número entre $\frac{K}{e}$ e K . Determinada uma capacidade suporte K e dada uma população inicial P_0 cujo valor é menor ou igual à ordenada do ponto de inflexão, a variabilidade da posição deste pode ser razoavelmente contemplada por um ou mais dos três últimos modelos apresentados (Verhulst, Gompertz e Montroll) por conta da possibilidade de se ter, dependendo do fenômeno que está sendo estudado e do conjunto de dados obtido, diferentes valores de r (taxa de crescimento intrínseca do meio), de μ (parâmetro de inibição do crescimento no modelo de Gompertz) e de λ (parâmetro de inibição do crescimento no modelo de Montroll).

(P5.1-M) De (1.24), segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} P_m = K \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Do cálculo diferencial, sabe-se que: dadas funções $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : f((a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$, se f é contínua em $c \in (a, b)$ e g é contínua em $f(c)$, então

$$g \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right) = \lim_{x \rightarrow c} g(f(x)).$$

Desta forma, segue que

$$\begin{aligned} \ln \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) \right] = \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Aplicando a conhecida regra de L'Hôpital, segue que

$$- \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} \right] = - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{d}{d\lambda} [\ln(1+\lambda)]}{\frac{d}{d\lambda} [\lambda]} \right) = - \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) = -1.$$

Como

$$\ln \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] = -1,$$

então

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} P_m = K \cdot \frac{1}{e} = \frac{K}{e} \cong 0,3679K.$$

Assim, em comparação com o que foi visto na Seção 1.3 (Expressão (1.17)), nesta situação limite, os pontos de inflexão nos modelos de Gompertz e de Montroll possuem a mesma ordenada $P_m = \frac{K}{e}$.

(P5.2-M) De maneira análoga ao que foi feito em (P5.1-M), verifica-se que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^{\frac{1}{\lambda}} = 1$$

e portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P_m = K \cdot 1 = K.$$

(P5.3-M) Na Figura 1.8, é possível se ter uma ideia do comportamento das soluções (1.22), conforme λ assume os seguintes valores tomados como exemplo (obs: juntos, seguem os respectivos valores de P_m calculados por (1.24)):

- $\lambda = 0,25 \Rightarrow P_m = 0,4096K$,
- $\lambda = 0,5 \Rightarrow P_m = 0,4444K$,
- $\lambda = 1 \Rightarrow P_m = 0,5000K$,
- $\lambda = 2 \Rightarrow P_m = 0,5774K$,
- $\lambda = 3 \Rightarrow P_m = 0,6300K$.

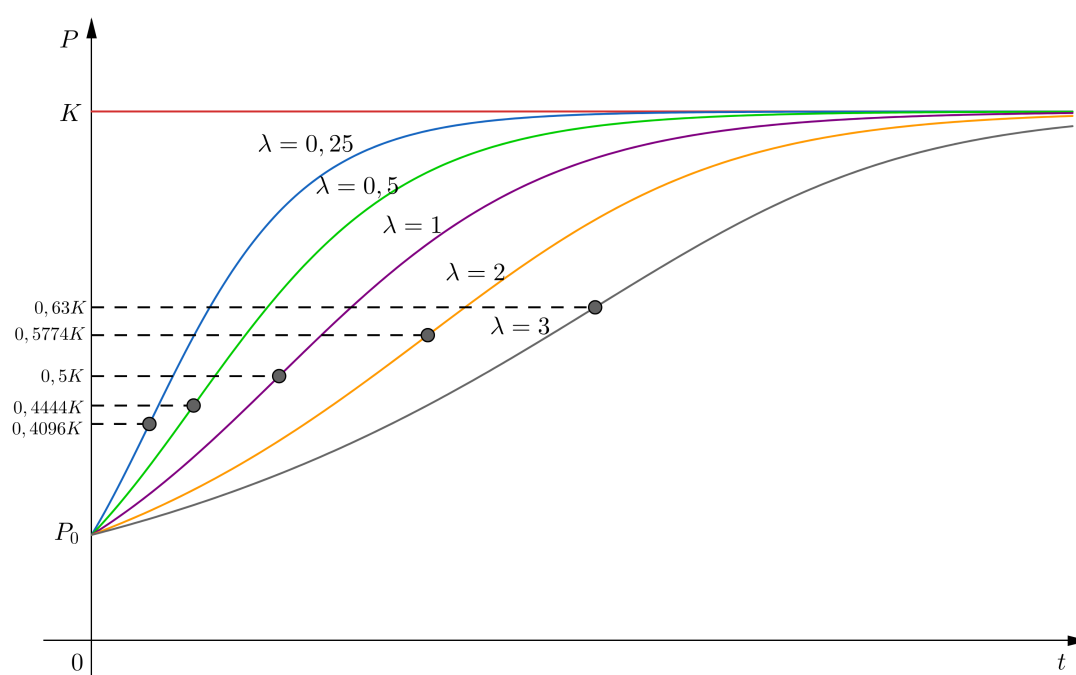


Figura 1.8: Soluções do modelo de Montroll, com $0 < P < K$, para diferentes valores de λ

Segundo [3], os fenômenos que podem ser descritos (com um bom grau de precisão) pelo modelo de Montroll são todos aqueles que podem ser descritos pelos modelos de Verhulst e de Gompertz, além de outros fenômenos cujo crescimento em relação ao tempo é sigmoidal, mas cuja máxima variação ocorre em ordenadas diferentes destes dois modelos, podendo variar de $\frac{K}{e}$ até K . Podem ocorrer pequenas diferenças na modelagem feita pelos modelos de Gompertz e Montroll, já que, apesar de serem representados por funções que têm propriedades semelhantes, não são funções exatamente iguais.

1.5 Considerações e resumo dos modelos apresentados

Os quatro modelos que estão sendo abordados neste trabalho e, conceitualmente, neste capítulo, são utilizados como se a população estudada estivesse isolada em relação a outras populações. Esta consideração, a rigor, só pode ser feita em situações específicas como, por exemplo, de acordo com [3], “em condições ideais de laboratório ou quando não é possível individualizar, no biossistema, outra população interagindo com a primeira”. Apesar de não se estar abordando modelos que englobem as interações entre espécies, entre a formulação do primeiro e do quarto modelo, características importantes passaram a ser consideradas, como a presença de fatores inibidores de crescimento e os diferentes tamanhos populacionais (ou valores de uma outra variável) nos quais pode ocorrer a máxima variação da população (ou da variável em questão). Isto já trouxe melhores aproximações aos dados de um fenômeno. Além disso, como geralmente acontece em modelagem, estes modelos mais simples, muitas vezes, acabam sendo norteadores na elaboração de modelos cada vez mais realistas.

A seguir, será apresentada uma tabela-resumo (Tabela 1.1) com características relativas a cada um dos modelos abordados neste capítulo.

Modelo (ano)	Equação	Solução		Taxa de crescimento	Taxa de inibição	Ordenada do ponto de inflexão
		$0 < P < K$	$P > K$			
Malthus (1798)	$\frac{dP}{dt} = rP$	$P(t) = P_0 e^{rt}$		r	não há	não há
Verhulst (1838)	$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$	$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}$	$P(t) = \frac{K}{1 - ce^{-rt}}$	$r \left(1 - \frac{P}{K}\right)$	$\frac{rP}{K}$	$\frac{K}{2}$
Gompertz (1825)	$\frac{dP}{dt} = P(r - \mu \ln P)$	$P(t) = K \left(\frac{P_0}{K}\right)^{e^{-\mu t}}$		$r - \mu \ln P$	$\mu \ln P$	$\frac{K}{e}$
Montroll (1971 ⁴)	$\frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K}\right)^\lambda\right]$	$P(t) = \frac{K}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}$	$P(t) = \frac{K}{(1 - ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}$	$r \left[1 - \left(\frac{P}{K}\right)^\lambda\right]$	$r \left(\frac{P}{K}\right)^\lambda$	$\frac{K}{(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}$

Tabela 1.1: Resumo dos modelos de crescimento populacional

O modelo de Verhulst é adequado para descrever fenômenos em que a ordenada do ponto de inflexão de uma curva que modele um determinado conjunto de dados esteja próxima de ou em qualquer ponto da semirreta $P(t) = \frac{K}{2}$, com $t \geq 0$ (Figura 1.9(a)); com o modelo de Gompertz, fenômenos em que esta ordenada esteja próxima de ou em qualquer ponto da semirreta $P(t) = \frac{K}{e}$, com $t \geq 0$ (Figura 1.9(b)); e com o modelo de Montroll, se esta ordenada estiver próxima de ou em qualquer ponto da região compreendida entre as semirretas $P(t) = \frac{K}{e}$ e $P(t) = K$, com $t \geq 0$ (Figura 1.9(c)).

⁴Modelo semelhante (de Richards) foi proposto em 1959, conforme comentado na Observação 1.10.

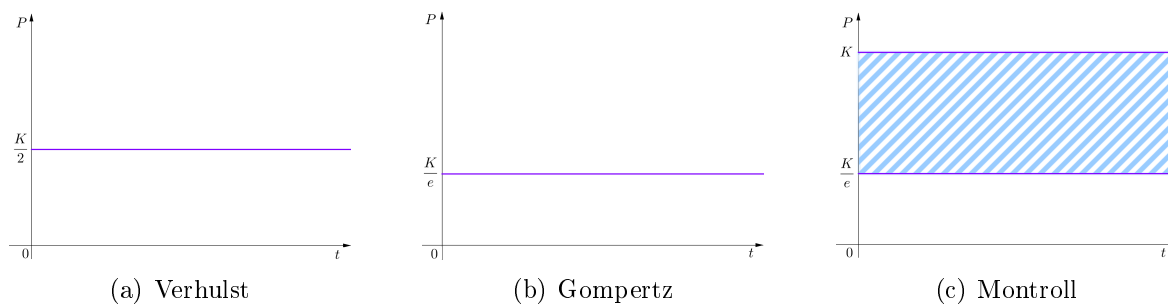


Figura 1.9: Possíveis localizações do ponto de inflexão

Portanto, dois aspectos principais que podem ser considerados como evoluções nos modelos de crescimento populacional apresentados são: a inclusão da influência de fatores limitantes, o que não constava no modelo malthusiano; e a maior gama de fenômenos que podem ser satisfatoriamente modelados conforme a posição em que ocorre a máxima variação da variável dependente em questão. Neste último aspecto, conforme mostra a Figura 1.9, o modelo de Montroll é o mais abrangente, pois pode ser aplicado a fenômenos satisfatoriamente descritos pelos modelos de Verhulst e Gompertz, além de outros fenômenos, já que com ele há uma maior liberdade em relação à posição em que ocorre esta máxima variação.

2 Ajuste de curvas e obtenção de parâmetros

O desenvolvimento deste capítulo está, em maior parte, baseado em [3]. Para a Seção 2.2.1, especificamente, utiliza-se [16, 18, 20] como referências.

Um ajuste de curvas (ou regressão) é um recurso utilizado para obtenção de uma função que represente (a princípio, no intervalo pesquisado) uma relação entre uma variável independente e uma (ou mais) variável dependente, com base em um conjunto de dados experimentais das mesmas.

É claro que, no intervalo de pesquisa, os ajustes a uma reta, a uma função quadrática ou a polinômios de maior grau podem ser excelentes aproximações para os dados experimentais. Entretanto, quando se fala em modelagem matemática, é preciso, muitas vezes, pensar também no comportamento esperado da relação entre as variáveis fora deste intervalo. Neste caso, faz-se necessária, em grande parte das vezes, a consideração de outras curvas como, por exemplo, exponenciais, hiperbólicas ou variações destas.

Esta gama maior de curvas também se torna interessante diante da possibilidade de encontrar uma relação clara entre os parâmetros da função que está sendo utilizada para ajustar um determinado conjunto de dados e determinadas características do fenômeno que está sendo estudado.

Para a validação de um modelo que depende de parâmetros, é necessária a estimação dos mesmos de forma que a curva ajustada represente, da melhor maneira possível, o fenômeno estudado. Um método muito utilizado para a estimação destes parâmetros no processo de ajuste de curvas é o *método dos mínimos quadrados* ou dos *quadrados mínimos*.

Definição 2.1. *Sejam $\{(x_i, y_i)\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, um conjunto de n dados observados e $y(x) = f(x; a_1, a_2, \dots, a_k)$ uma função que tenha a_1, a_2, \dots, a_k como parâmetros. O método dos mínimos quadrados consiste em determinar estes parâmetros de forma a minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores y_i observados e os valores $y(x_i) = f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_k)$ ajustados, ou seja, de forma a minimizar o valor de*

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - y(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i; a_1, a_2, \dots, a_k)]^2.$$

Observação 2.1. A estratégia de minimizar os quadrados dos desvios (e não apenas os desvios) é necessária para se evitar, por exemplo, a falsa ideia de se ter os valores observados próximos dos valores ajustados quando desvios positivos compensarem, em parte (ou no todo), desvios negativos ou vice-versa. Por exemplo: se um dos valores observados é M unidades maior que seu valor ajustado correspondente e outro valor observado é M unidades menor que seu valor ajustado, ao se fazer a soma dos desvios referentes a estes dois dados, obtém-se zero. Isto poderia levar a pensar que é um bom ajuste, o que não necessariamente é verdade (se M não for desprezível em relação aos valores observados), visto que estes dois dados estão distantes M unidades dos seus respectivos valores ajustados.

Neste capítulo, será feita uma preparação para os ajustes de curvas relativos aos modelos apresentados anteriormente, a fim de estimar alguns dos parâmetros que constam nos mesmos. Também serão apresentados métodos para estimar a capacidade suporte nos modelos dos quais esta é parte integrante.

2.1 Ajuste Linear

O desenvolvimento desta seção está baseado em [3, 15].

Diz-se que um ajuste é linear se a função utilizada para representar a relação entre a variável independente x e a variável dependente y for da forma

$$y(x) = f(x; a, b) = ax + b,$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ sendo os parâmetros desta função.

Os valores de a e b que minimizam o valor de

$$S = S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad (2.1)$$

devem satisfazer

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\quad (2.3)$$

Observação 2.2. As condições (2.2) e (2.3) são, não apenas necessárias, mas também suficientes para minimizar o valor de S , visto que $S(a, b)$ é uma função quadrática em a e b e sempre com valores maiores ou iguais a zero por ser soma de quadrados.

Para a condição (2.2), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial a} [y_i - (ax_i + b)]^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) \\ &= -2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

Isto implica

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Para a condição (2.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b} [y_i - (ax_i + b)]^2 \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \\ &= -2 \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0.$$

Isto implica

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Portanto, o seguinte sistema de equações (nas incógnitas a e b) deve ser satisfeito:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^n y_i. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Isolando b em (2.5), obtém-se

$$b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Substituindo b por esta expressão em (2.4), obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \Rightarrow \\ a \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] &= n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \Rightarrow \\ a &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \end{aligned}$$

Portanto, para minimizar (2.1), os valores de a e b podem ser obtidos pelas seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ b = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Em um modelo dado por uma função $y(x)$ que não seja uma função afim de x , também é possível utilizar o método de ajuste linear. Para isto, basta escrever tal função na forma

$$z = g(y) = \alpha w + \beta, \quad (2.7)$$

de acordo com uma mudança de variável $z = g(y)$ conveniente e com as devidas correspondências dos coeficientes α e β com o(s) parâmetro(s) do modelo e da variável w com x . Exemplos de como obter funções na forma (2.7) encontram-se nas Seções 2.1.1 a 2.1.4.

Observação 2.3. Pode ser conveniente também uma mudança de variável em x diferente da função afim (tipo de mudança que ocorre nos exemplos das Seções 2.1.1 a 2.1.4). Essa conveniência acontece, por exemplo, em modelos dados por *funções potência*, ou seja, funções da forma

$$y(x) = ax^b, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Ao se aplicar $z = g(y) = \ln y$ nesta função, obtém-se

$$z = \ln y = \ln(ax^b) = b \ln x + \ln a = \alpha w + \beta,$$

com $\alpha = b$, $\beta = \ln a$ e $w = \ln x$.

Nas Seções 2.1.1 a 2.1.4, a fim de tornar possível o ajuste linear nas funções relativas aos modelos que serão apresentados, buscar-se-á então, deixá-las na forma

$$z = g(y) = \alpha x + \beta. \quad (2.8)$$

Assim, equivalentemente às equações (2.6), obtém-se α e β por

$$\begin{cases} \alpha = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i z_i - (\sum_{i=1}^n x_i) (\sum_{i=1}^n z_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ \beta = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n z_i - \alpha \sum_{i=1}^n x_i \right). \end{cases} \quad (2.9)$$

A seguir (Seções 2.1.1 a 2.1.4), serão encontradas funções na forma (2.8) com as quais serão feitos os ajustes lineares para obtenção de parâmetros relativos a cada um dos modelos apresentados no Capítulo 1.

2.1.1 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo malthusiano contínuo

Conforme visto (função (1.2)), a solução para o PVI que representa o modelo malthusiano contínuo é:

$$P(t) = P_0 e^{rt}.$$

Ao se aplicar $g(P) = \ln P$ nesta função, obtém-se

$$\ln P = \ln(P_0 e^{rt}) = rt + \ln P_0. \quad (2.10)$$

Portanto, se for considerada a mudança de variável $z = g(P) = \ln P$ e as relações entre os coeficientes e parâmetros do modelo $\alpha = r$ e $\beta = \ln P_0$, tem-se

$$z = \ln P = \alpha t + \beta \quad (2.11)$$

como uma função $z(t)$ na forma (2.8).

Esta função será utilizada para ajuste linear na Seção 3.2.1.

2.1.2 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo logístico contínuo

Conforme visto (função (1.4)), a solução para o PVI que representa o modelo logístico contínuo no caso em que $0 < P < K$ é:

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}.$$

Portanto,

$$\frac{P}{K} = \frac{1}{1 + ce^{-rt}}.$$

Dividindo ambos os membros desta última igualdade por $\frac{1}{1 + ce^{-rt}}$, obtém-se

$$\frac{\frac{P}{K}}{\frac{1}{1 + ce^{-rt}}} = \frac{\frac{1}{1 + ce^{-rt}}}{\frac{1}{1 + ce^{-rt}}}.$$

E dividindo ambos os membros desta última igualdade por ce^{-rt} , obtém-se

$$\frac{\frac{P}{K}}{\frac{ce^{-rt}}{1 + ce^{-rt}}} = \frac{\frac{1}{1 + ce^{-rt}}}{\frac{ce^{-rt}}{1 + ce^{-rt}}}.$$

Escrevendo o denominador do primeiro membro como uma subtração conveniente (no caso, com a intenção de obter uma expressão equivalente a P/K) e simplificando o segundo membro, obtém-se

$$\frac{\frac{P}{K}}{1 - \frac{1}{1+ce^{-rt}}} = \frac{e^{rt}}{c} \Rightarrow \frac{\frac{P}{K}}{1 - \frac{P}{K}} = \frac{e^{rt}}{c}.$$

Ao se aplicar a função logarítmica (de base e) em ambos os membros desta última igualdade, obtém-se

$$\ln \left(\frac{\frac{P}{K}}{1 - \frac{P}{K}} \right) = rt - \ln c. \quad (2.12)$$

Portanto, se for considerada a mudança de variável $z = g(P) = \ln \left(\frac{\frac{P}{K}}{1 - \frac{P}{K}} \right)$ e as relações entre os coeficientes e parâmetros¹ do modelo $\alpha = r$ e $\beta = -\ln c$, obtém-se

$$z = \ln \left(\frac{\frac{P}{K}}{1 - \frac{P}{K}} \right) = \alpha t + \beta \quad (2.13)$$

como uma função $z(t)$ na forma (2.8).

Esta função será utilizada para ajuste linear na Seção 3.3.2.

Observação 2.4. A função na forma (2.8) para o caso em que $P > K$ pode ser determinada de maneira análoga. O desenvolvimento para tal não será feito aqui.

2.1.3 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo de Gompertz

Conforme visto (função (1.16)), a solução para o PVI que representa o modelo de Gompertz no caso em que $0 < P < K$ é:

$$P(t) = K \left(\frac{P_0}{K} \right)^{e^{-\mu t}}.$$

¹ c não é propriamente um parâmetro do modelo logístico. Mas, como foi visto (função (1.4)), ele depende do parâmetro K do mesmo.

Ao se aplicar a função logarítmica (de base e) nesta última função, obtém-se

$$\ln P = \ln K + e^{-\mu t} \ln \left(\frac{P_0}{K} \right) \Rightarrow \ln P - \ln K = e^{-\mu t} \ln \left(\frac{P_0}{K} \right) \Rightarrow \ln \left(\frac{P}{K} \right) = e^{-\mu t} \ln \left(\frac{P_0}{K} \right).$$

Neste caso em que $0 < P < K$, para evitar valores negativos ao se aplicar a função logarítmica, ambos os membros desta última igualdade serão multiplicados por -1 . O motivo para não querer valores negativos é que logo em seguida será aplicada novamente a função logarítmica nos resultados obtidos neste primeiro passo e, como se sabe, esta é uma função cujo domínio possui apenas números maiores que zero. Desta forma, obtém-se

$$\ln \left(\frac{K}{P} \right) = e^{-\mu t} \ln \left(\frac{K}{P_0} \right).$$

Aplicando novamente a função logarítmica (de base e) em ambos os membros, obtém-se

$$\ln \left[\ln \left(\frac{K}{P} \right) \right] = -\mu t + \ln \left[\ln \left(\frac{K}{P_0} \right) \right]. \quad (2.14)$$

Portanto, se for considerada a mudança de variável $z = g(P) = \ln \left[\ln \left(\frac{K}{P} \right) \right]$ e as relações entre os coeficientes e parâmetros do modelo $\alpha = -\mu$ e $\beta = \ln \left[\ln \left(\frac{K}{P_0} \right) \right]$, obtém-se

$$z = \ln \left[\ln \left(\frac{K}{P} \right) \right] = \alpha t + \beta \quad (2.15)$$

como uma função $z(t)$ na forma (2.8).

Esta função será utilizada para ajuste linear na Seção 3.4.2.

Observação 2.5. A função na forma (2.8) para o caso em que $P > K$ pode ser determinada de maneira análoga (sem necessidade da multiplicação por -1 que foi feita logo acima). O desenvolvimento para tal não será feito aqui.

2.1.4 Função para ajuste linear e obtenção de parâmetros no modelo de Montroll

Conforme visto (função (1.22)), a solução para o PVI que representa o modelo de Montroll no caso em que $0 < P < K$ é:

$$P(t) = \frac{K}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Portanto,

$$\frac{P}{K} = \frac{1}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}} \Rightarrow \left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda} = \frac{1}{1 + ce^{-\lambda rt}}.$$

Fazendo-se um desenvolvimento análogo ao que foi feito na Seção 2.1.2 para o modelo logístico, trabalhando, porém, com $\left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}$ ao invés de $\frac{P}{K}$, obtém-se

$$\ln \left[\frac{\left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}}{1 - \left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}} \right] = \lambda rt - \ln c. \quad (2.16)$$

Portanto, se for considerada a mudança de variável $z = g(P) = \ln \left[\frac{\left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}}{1 - \left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}} \right]$ e as relações entre os coeficientes e parâmetros do modelo $\alpha = \lambda r$ e $\beta = -\ln c$, obtém-se

$$z = \ln \left[\frac{\left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}}{1 - \left(\frac{P}{K}\right)^{\lambda}} \right] = \alpha t + \beta \quad (2.17)$$

como uma função $z(t)$ na forma (2.8).

Esta função será utilizada para ajuste linear na Seção 3.5.3.

Observação 2.6. A função na forma (2.8) para o caso em que $P > K$ pode ser determinada de maneira análoga. O desenvolvimento para tal não será feito aqui.

2.2 Obtenção do valor assintótico

Para que seja possível utilizar as funções (2.13), (2.15) e (2.17) nos ajustes lineares pretendidos, é preciso obter o valor assintótico K correspondente ao conjunto de dados (e, conforme o método, também ao modelo) que estiver sendo utilizado. Nas Seções 2.2.2 e 2.2.3 serão apresentados diferentes métodos para obtenção de K , bem como as situações e formas em que eles são ou não mais bem aplicados. Nos exemplos de aplicação (Capítulo 3), por vezes, serão utilizados diferentes métodos para o mesmo conjunto de dados. A ideia é mostrar diferentes maneiras de se obter o parâmetro K , bem como comparar os valores obtidos por um método e outro. Na Seção 2.2.4 será apresentado uma forma alternativa sobre qual valor de K se considerar, especificamente, no modelo

de Montroll, visto que, pelos métodos apresentados nas Seções 2.2.2 e 2.2.3, não foi possível obtê-lo (mais detalhes na Seção 2.2.4).

2.2.1 Considerações sobre capacidade suporte (representada pelo valor assintótico)

Os valores de r , μ , λ e K (cada um destes, parâmetro de um ou mais de um dos quatro modelos apresentados) que serão obtidos no exemplo de aplicação do Capítulo 3 são estimativas dos respectivos valores entendidos como reais relativos ao fenômeno analisado. Dentre os conceitos que envolvem estes parâmetros, o de *capacidade suporte* (relativo ao parâmetro K) tem recebido uma atenção especial de estudiosos do campo de dinâmica populacional. Ainda não há uma forma aceita consensualmente de tratá-la de maneira precisa em fenômenos em que uma das grandezas envolvidas, teoricamente, não ultrapassa um determinado limite. Mas, têm sido publicados trabalhos que apontam para um espectro muito mais amplo a ser considerado do que aquele que o foi na época em que o termo *capacidade suporte* passou a ser utilizado em trabalhos científicos. A seguir, serão listadas algumas das ideias encontradas em referências sobre o tema.

Na Referência [16]:

- Experiências ao longo de um período maior do que um século vêm mostrando que o modelo logístico, em sua forma original, que descreve o crescimento populacional de certas bactérias em uma placa de Petri² com uma quantidade fixa de nutrição não irá descrever satisfatoriamente o crescimento populacional humano. Pelo menos não em relação ao que se tem chamado de *capacidade suporte*.
- Os autores sugerem que, para a população humana de uma determinada região, um modelo logístico em que a capacidade suporte fixa K é substituída por uma capacidade suporte $K(t)$ que cresce logisticamente como função do tempo é mais adequado. São exibidos, inclusive, dois exemplos que atestam essa tese (pelo menos com os dados referentes aos períodos analisados): um é do crescimento populacional da Inglaterra (de 1541 a 1975) e outro é do crescimento populacional do Japão (de 1100 a 1992).

Na Referência [18]:

- Muitos fatores podem restringir o crescimento de uma população. Mas ainda não é fácil entender como se dá, de fato, essa relação.

²Uma placa de Petri é um recipiente, feito geralmente de vidro ou plástico, de formato cilíndrico e com baixa altura. Estas placas são usadas, principalmente, para desenvolver meios de cultura bacteriológicos e para realizar reações em escala reduzida. Podem ser tapadas com outra placa ligeiramente maior, constituindo uma caixa de Petri. As placas de Petri devem o seu nome a uma homenagem feita ao bacteriologista alemão Julius Richard Petri (1852 – 1921).

- Citação de um exemplo de projeção populacional dos Estados Unidos (por Pearl e Reed³, em 1920). Nesta projeção, estimou-se que a população dos Estados Unidos não ultrapassaria os 197 milhões de pessoas. Até 1999 (ano de publicação de [18]) já havia sido atingida a marca de 270 milhões.
- Conforme observações acumuladas (tanto no campo da Ecologia quanto da Paleontologia), muitas populações flutuam e, eventualmente, são extintas. Para o autor, ao invés de se tentar entender por que as populações são reguladas de acordo com uma capacidade suporte, deve-se tentar entender por que algumas populações oscilam mais do que outras.

Na Referência [20]:

- Conforme Cohen (1995a), o modelo logístico tem servido para descrever, satisfatoriamente, poucos fenômenos e para um curto período de tempo. E que a maior razão para esta ineficácia são as rígidas suposições de que os parâmetros r e K não variam com o tempo.
- As rígidas suposições do modelo logístico podem servir para descrever crescimento populacional de algumas espécies animais em experimentos laboratoriais, mas não em seus habitat naturais, onde precisam ser consideradas, por exemplo, interações entre espécies, interações com o meio ambiente, tamanhos populacionais em períodos anteriores, etc. (Obs: Neste trabalho, as interferências ocorridas pela não consideração destes fatores já eram esperadas; conforme comentado no início do Capítulo 1, eles não são considerados nos modelos estudados; mas, servem como base para o entendimento e desenvolvimento de modelos mais complexos).
- Em 1922, Hawden e Palmer introduziram a ideia de dependência da capacidade suporte em relação à interação entre espécies animais e o estado do meio ambiente. Entretanto, ainda é difícil avaliar objetivamente estas interações.
- Fala-se também em dois tipos de capacidade suporte: uma biofísica (K_B) e uma social (K_S). E, segundo Erlich e Holdren (1971), Hardin (1986) e Daily e Herlich (1992), têm-se $K_S \leq K_B$.
- Segundo Daily e Erlich (1992), há diferentes possíveis níveis de capacidade suporte. E a sociedade pode escolher entre estes diferentes níveis. Alguns deles podem estar dentro de um limite que evite uma degradação irreversível significativa do meio ambiente, mas outros podem ultrapassar este limite.
- Para Arrow (1995), a capacidade suporte não é fixa na natureza. Ela depende do desenvolvimento tecnológico, preferências e estruturas de produção e consumo.
- Outros termos que são inseridos nos estudos sobre capacidade suporte são *resiliência ecológica* e *sustentabilidade*. Parece que tem se tornado consenso entre estudiosos da área a não existência de um valor crítico limite particular para uma determinada população, mas eles indicam que se a resiliência ecológica de

³Pesquisadores estadunidenses que também desenvolveram o modelo logístico, aparentemente sem o conhecimento dos trabalhos de Verhulst.

um ecossistema foi perdida (mudança de um estado de equilíbrio para outro), então a capacidade suporte foi excedida.

Nota-se através das informações e ideias citadas acima, que o conceito de capacidade suporte não é muito preciso (pelo menos até a época de elaboração dos trabalhos utilizados como referência citados acima). Ainda há muitas questões não respondidas, e outras sendo elaboradas, em relação a este conceito que dá sentido a um parâmetro de grande relevância quando se fala em dinâmica populacional.

Feitas todas estas considerações, o parâmetro K , que até então, neste trabalho, estava sendo chamado de *capacidade suporte* (termo utilizado na referência [3], utilizada como base deste trabalho), passará a ser chamado de *valor assintótico*.

2.2.2 Obtenção do valor assintótico através do método de Ford-Walford

Seja $\{(x_j, y_j)\}$, com $j \in \mathbb{N}$, um conjunto de dados relativos a um determinado fenômeno. Não necessariamente tendo registrado sistematicamente alguns destes dados, mas, em algumas situações, por observação ou conhecimento de comportamento futuro do fenômeno, se é possível concluir que $(x_j, y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge quando $x_j \rightarrow +\infty$, então, pelo método de Ford-Walford, é possível determinar o valor assintótico $K = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} y_j$.

Considerando, em particular, um conjunto finito de dados $\{(x_i, y_i)\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, oriundo de um fenômeno do qual se espera a convergência de y_i para um valor fixo K (valor assintótico) quando x_i crescer indefinidamente, o método de Ford-Walford consiste na busca deste valor através dos seguintes passos:

(1) Determinar uma função contínua g que ajusta os pares (y_i, y_{i+1}) , com $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$. Isto é, uma função g tal que

$$y_{i+1} = g(y_i).$$

Utilizando, por exemplo, ajuste do tipo linear, g será uma função afim. Ou seja, o ajuste será da forma

$$y_{i+1} = g(y_i) = ay_i + b. \quad (2.18)$$

(2) Através dos coeficientes a e b de (2.18), determinar K pelo limite

$$K = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} y_j = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} y_{j+1}.$$

Utilizando (2.18) para o conjunto de dados $\{(x_j, y_j)\}$, com $j \in \mathbb{N}$, mais precisamente quando $x_j \rightarrow +\infty$, e levando em conta que g é uma função contínua (já que é uma função afim), tem-se que

$$K = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} y_{j+1} = \lim_{x_j \rightarrow +\infty} g(y_j) = g\left(\lim_{x_j \rightarrow +\infty} y_j\right) = aK + b.$$

Nesta situação, portanto, tem-se

$$K = \frac{b}{1-a}. \quad (2.19)$$

Observação 2.7. Note, através dos passos (1) e (2), que o valor assintótico K é um ponto fixo da função g , isto é, $K = g(K)$. Portanto, para aplicação do método de Ford-Walford, é importante que a função determinada no passo (1) tenha ponto fixo. Além disso, também é importante que este ponto fixo seja coerente com aquilo que se espera do fenômeno.

Observação 2.8. O método de Ford-Walford traz melhores estimativas para K quando há disponível e é utilizada uma quantidade razoável de dados posteriores à região onde estaria o ponto de inflexão do gráfico de uma função que modelaria satisfatoriamente os mesmos. Melhor ainda se parte destes dados já estiverem apresentando razoável tendência de aproximação a um determinado valor (candidato a K). Uma das formas de se encontrar tal região (a do ponto de inflexão) é dispor os dados em um gráfico de dispersão, imaginar o gráfico de uma função que modelaria o fenômeno correspondente aos mesmos (pode-se levar em consideração também o conhecimento do comportamento futuro aproximado do fenômeno estudado) e analisar onde estaria seu ponto de inflexão. Outra opção é fazer um ajuste polinomial dos dados relativos ao fenômeno estudado e encontrar o ponto de inflexão da função polinomial obtida (mais detalhes na Seção 2.3).

Observação 2.9. No Exemplo 2.1 a seguir e também em outras situações (que não constam neste trabalho) nas quais a condição abordada na Observação 2.8 é razoavelmente satisfeita, foram feitos testes de aplicação do método de Ford-Walford em diversos subconjuntos dos conjuntos de dados considerados. Estes subconjuntos foram escolhidos da seguinte forma: o primeiro subconjunto contendo todos os dados após o ponto de inflexão; o segundo subconjunto com todos os dados do primeiro, menos o dado imediatamente posterior ao ponto de inflexão; o terceiro com todos os dados do primeiro, menos os dois dados imediatamente posteriores ao ponto de inflexão; e assim, sucessivamente, até que se chegasse no subconjunto contendo apenas os dois dados finais. Após análise das estimativas de K e também da disposição dos dados em um gráfico de dispersão $y_{i+1} \times y_i$, chegou-se à conclusão de que o melhor é não utilizar nem todos os dados após o ponto de inflexão, nem, por exemplo, apenas os dois últimos dados; o mais razoável é pular os primeiros dados após o ponto de inflexão e, dentro do possível, tentar equilibrar a utilização de uma quantidade não tão pequena de dados

com a utilização de dados que, conforme já mencionado na Observação 2.8, apresentem razoável tendência de aproximação a um determinado valor (candidato a K).

Exemplo 2.1. Veja como estimar K relativo ao crescimento em altura (h) de uma árvore da espécie *Picea*, também conhecida como *pinho-alemão*, conforme avança sua idade. O conjunto de dados, extraído de [9], encontra-se na Tabela 2.1.

Idade	Altura (m)
0	0,0
10	2,0
20	6,3
30	10,9
40	15,6
50	20,3
60	23,6
70	26,3
80	29,3
90	30,5
100	32,1
103	32,4

Tabela 2.1: Crescimento em altura de pinho-alemão

Conforme a Observação 2.9, serão utilizados apenas dados a partir de 70 anos de idade da árvore. Além disso, entendendo que o método de Ford-Walford deve ser utilizado para dados relativos a iguais variações da variável independente (no caso, a idade), será descartado o último dado, relativo a idade de 103 anos. Assim, na Tabela 2.2, encontram-se os valores para ajuste linear.

i	h_i	h_{i+1}	h_i^2	$h_i \cdot h_{i+1}$
8	26,3	29,3	691,69	770,59
9	29,3	30,5	858,49	893,65
10	30,5	32,1	930,25	979,05
Σ	86,1	-	2480,43	2643,29

Tabela 2.2: Valores para ajuste linear - método de Ford-Walford (pinho-alemão)

Conforme as equações (2.6) (com h_i no lugar de x_i e h_{i+1} no lugar de y_i) e a Tabela 2.2, obtém-se

$$a \simeq 0,61538 \text{ e } b \simeq 12,97179.$$

Por (2.19), isto implica que

$$K \simeq 33,73 \text{ m,}$$

número razoavelmente aceitável para ser valor assintótico das alturas relativas ao conjunto de dados da Tabela 2.1.

2.2.3 Obtenção do valor assintótico através de ajuste linear da taxa de crescimento/declínio média relativa em relação a uma determinada função da variável dependente

Uma taxa de crescimento/declínio relativa fornece uma medida de variação relativamente ao valor inicial (de uma determinada variável) que a originou. Se y for a variável dependente e x a independente, analisando a taxa de variação de y , o termo “média” remete ao fornecimento desta taxa por unidade de x . Por exemplo: se estiverem disponíveis os dados da quantidade de indivíduos de uma população apenas de 10 em 10 anos, esta taxa de crescimento/declínio média relativa será uma taxa média anual e não decenal.

Conforme observações sobre como a taxa de crescimento/declínio e quantidade de indivíduos P estão relacionadas, feitas nas seções relativas a cada um dos 3 modelos nos quais a capacidade suporte é um dos parâmetros (panoramicamente na Seção 1.4), tem-se que:

- no modelo logístico, a taxa de crescimento/declínio é uma função afim da quantidade de indivíduos P ;
- no modelo de Gompertz, a taxa de crescimento/declínio é uma função afim composta com a função logarítmica natural da quantidade de indivíduos P , ou seja, com $\ln P$;
- no modelo de Montroll, a taxa de crescimento/declínio é uma função afim composta com uma função potência da quantidade de indivíduos P , no caso, P^λ .

Cada um destes três itens define a forma como devem ser usados os dados relativos à quantidade P de indivíduos para fazer o ajuste linear com a taxa de crescimento/declínio (valores brutos de P , valores de $\ln P$ ou valores de P^λ , seguindo a mesma ordem dos itens acima).

Para os dois tópicos a seguir (*taxa linear* e *taxa malthusiana*), considere $\{(x_i, y_i)\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, um conjunto de n dados observados.

Taxa linear

A taxa de crescimento/declínio média relativa linear correspondente à cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, que será denotada por γ_i , é dada por

$$\gamma_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i(x_{i+1} - x_i)}. \quad (2.20)$$

Observação 2.10. Quando as diferenças $x_{i+1} - x_i$ relativas aos dados utilizados forem constantes, ao invés de se fazer o ajuste linear por (2.20), pode-se fazer por

$$\gamma_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}. \quad (2.21)$$

Ao se fazer o ajuste com este tipo de taxa ((2.20) ou (2.21)), como, teoricamente, ainda não se tem a função para o cálculo do valor da variável dependente y em um determinado ponto x (por exemplo no ponto médio de x_i e x_{i+1} ; o ajuste está sendo feito justamente para encontrar os parâmetros que compõem esta função), pode-se considerar os valores P_i ou P_{i+1} (y_i ou y_{i+1} se ainda for considerada a notação mais geral) em uma das três funções enunciadas anteriormente nesta seção (afim, logarítmica ou potência).

Considerando então um conjunto de n dados observados, com a notação utilizada nos modelos apresentados neste trabalho, ou seja, um conjunto $\{(t_i, P_i)\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, e considerando γ_i como sendo a taxa de crescimento/declínio média relativa correspondente ao intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, as funções para ajuste linear que serão utilizadas para este tipo de taxa são:

$$\text{Modelo logístico contínuo} \rightarrow \gamma_i = aP_{i+1} + b; \quad (2.22)$$

$$\text{Modelo de Gompertz} \rightarrow \gamma_i = a \ln(P_{i+1}) + b; \quad (2.23)$$

$$\text{Modelo de Montroll} \rightarrow \gamma_i = aP_{i+1}^\lambda + b. \quad (2.24)$$

Supondo que, no fenômeno tratado, tem-se que $P_i \rightarrow K$ quando $t_i \rightarrow +\infty$ (o que implica que $\gamma_i \rightarrow 0$), as expressões que irão fornecer os valores assintóticos K , conforme cada uma destas 3 funções são, respectivamente

$$K = -\frac{b}{a}, \quad (2.25)$$

$$K = e^{-\frac{b}{a}}, \quad (2.26)$$

e

$$K = \sqrt[\lambda]{-\frac{b}{a}}. \quad (2.27)$$

Observação 2.11. Na utilização deste método para estimativa de K , nem sempre é necessário desconsiderar uma quantidade tão grande de dados como no método de Ford-Walford para obtenção de valores razoáveis para K . Mas, nota-se que as estimativas muitas vezes são mais coerentes ao se fazer um determinado descarte. Essa análise não será apresentada em detalhes neste trabalho, mas é possível perceber que, em geral, é melhor descartar o primeiro ou alguns dos primeiros dados. Através da disposição dos dados (γ_i e P_{i+1} , por exemplo) em um gráfico de dispersão, nota-se que o(s) ponto(s) (γ_i, P_{i+1}) relativo(s) a esta fase inicial pode(m) destoar bastante de uma reta que ajustaria os pontos subsequentes. Portanto, a consideração do(s) mesmo(s), acaba mudando bastante os valores dos coeficientes a e b da reta que ajusta o conjunto de dados, o que, em geral, altera bastante o valor de K . Apesar de o uso de taxa linear ser menos sensível que o método de Ford-Walford em relação ao uso de dados ainda distantes de K , ele demonstrou também trazer estimativas melhores quanto maior for a quantidade e exclusividade considerada de dados cada vez mais próximos de um determinado valor assintótico.

Observação 2.12. Apesar de as relações (2.24) e (2.27) serem conceitualmente consistentes, neste trabalho, com as ferramentas que foram estudadas, não foi possível utilizá-las. Esta limitação será melhor abordada na Seção 2.2.4.

Taxa malthusiana

A taxa de crescimento/declínio média relativa malthusiana, que será denotada por δ , satisfaz o modelo malthusiano discreto, que pode ser usado como auxiliar no exemplo de aplicação que será abordado neste trabalho, já que o que se tem à disposição é um conjunto discreto de dados cujo comportamento se aproxima, no todo ou em partes, de uma exponencial. Se for considerado um caso ideal, em que um conjunto de dados possua coordenadas que satisfazem uma função exponencial, este modelo (neste caso, com taxa δ constante) deve satisfazer

$$y_{i+1} - y_i = \delta y_i, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.28)$$

tem-se, portanto:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} - y_i &= \delta y_i \\
y_{i+2} - y_{i+1} &= \delta y_{i+1} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{i+\Delta x-1} - y_{i+\Delta x-2} &= \delta y_{i+\Delta x-2} \\
y_{i+\Delta x} - y_{i+\Delta x-1} &= \delta y_{i+\Delta x-1},
\end{aligned}$$

com $\Delta x = x_k - x_j$ para algum $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ e algum $j \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, com $k > j$ (e supondo $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente).

Somando ambos os membros das igualdades acima, obtém-se

$$y_{i+\Delta x} - y_i = \delta(y_i + y_{i+1} + \dots + y_{i+\Delta x-1}). \quad (2.29)$$

Destas mesmas igualdades, tem-se

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= (1 + \delta)y_i \\
y_{i+2} &= (1 + \delta)y_{i+1} = (1 + \delta)^2 y_i \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{i+\Delta x-1} &= (1 + \delta)y_{i+\Delta x-2} = (1 + \delta)^{\Delta x-1} y_i \\
y_{i+\Delta x} &= (1 + \delta)y_{i+\Delta x-1} = (1 + \delta)^{\Delta x} y_i.
\end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo estas equivalências (até a penúltima) em (2.29) e colocando y_i em evidência, obtém-se

$$y_{i+\Delta x} - y_i = \delta y_i [1 + (1 + \delta) + (1 + \delta)^2 + \dots + (1 + \delta)^{\Delta x-1}].$$

Como a expressão entre colchetes é a soma de Δx termos de uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão igual a $1 + \delta$, tem-se

$$\frac{y_{i+\Delta x} - y_i}{y_i} = \delta \left[\frac{(1 + \delta)^{\Delta x} - 1}{(1 + \delta) - 1} \right] = (1 + \delta)^{\Delta x} - 1.$$

Assim, tem-se

$$(1 + \delta)^{\Delta x} - 1 = \frac{y_{i+\Delta x} - y_i}{y_i} \Rightarrow (1 + \delta)^{\Delta x} - 1 = \frac{y_{i+\Delta x}}{y_i} - 1 \Rightarrow (1 + \delta)^{\Delta x} = \frac{y_{i+\Delta x}}{y_i} \Rightarrow$$

$$\delta = \sqrt[\Delta x]{\frac{y_{i+\Delta x}}{y_i}} - 1. \quad (2.31)$$

Esta taxa δ é relativa ao modelo malthusiano discreto, cuja solução é dada por (2.30), ou seja

$$y_{i+\Delta x} = (1 + \delta)^{\Delta x} y_i,$$

caso se considere y_i como termo inicial da Recorrência (2.28).

Pode-se, entretanto, escrever tal solução na forma exponencial,

$$y(i + \Delta x) = y_i e^{\Delta x \ln(1+\delta)}, \quad (2.32)$$

ou seja,

$$y(i + \Delta x) = y_i e^{r \Delta x}, \quad (2.33)$$

com

$$r = \ln(1 + \delta). \quad (2.34)$$

Observação 2.13. Como, em alguns fenômenos de crescimento (inclusive no que será utilizado como exemplo de aplicação neste trabalho), o comportamento da variável dependente em relação à independente não é perfeitamente exponencial (ou seja, a taxa de variação da variável dependente não é diretamente proporcional à ela mesma conforme um parâmetro de proporcionalidade fixo), não se pode considerar uma única taxa δ (nem r) para o acontecimento de todo o fenômeno. Entretanto, taxas δ_i (e r_i) correspondentes a intervalos em que há um comportamento próximo do exponencial podem desempenhar satisfatoriamente o papel de parâmetro de proporcionalidade. Sendo assim, os índices i em δ_i e r_i serão utilizados no exemplo de aplicação (Capítulo 3) para referência a um determinado intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ onde há um comportamento próximo do exponencial. Já os índices i em (2.31) e (2.34) são relativos a um conjunto de dados que apresenta comportamento exponencial (segundo um parâmetro de proporcionalidade fixo) em seu todo. Por serem parâmetros fixos (em um caso ideal), não está sendo utilizado o índice i em δ e r nestas duas relações.

Como este tipo de taxa só pode ser usado em um conjunto de dados no qual há um comportamento exponencial de y_i em relação a x_i , então o ajuste linear das taxas r_i correspondentes aos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$, ao invés de ser feito em relação a y_i ou y_{i+1} , pode ser feito em relação a um valor intermediário entre y_i e y_{i+1} . Por se tratar de um comportamento exponencial, este valor (que será denotado por y'_i) pode ser calculado exatamente segundo a função (2.33), aplicada no ponto médio de x_i e x_{i+1} .

Considerando então um conjunto de n dados observados, com a notação utilizada nos modelos apresentados neste trabalho, ou seja, um conjunto $\{(t_i, P_i)\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$, r_i a taxa correspondente à taxa de crescimento/declínio média relativa δ_i no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, e os valores

$$P'_i = P_i e^{r_i \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{2} \right)}, \quad (2.35)$$

as funções para ajuste linear que serão utilizadas para este tipo de taxa são:

$$\text{Modelo logístico contínuo} \rightarrow r_i = aP'_i + b; \quad (2.36)$$

$$\text{Modelo de Gompertz} \rightarrow r_i = a \ln(P'_i) + b; \quad (2.37)$$

$$\text{Modelo de Montroll} \rightarrow r_i = aP'_i^\lambda + b. \quad (2.38)$$

Supondo que, no fenômeno tratado, tem-se que $P'_i \rightarrow K$ quando $t_i \rightarrow +\infty$ (o que implica que $r_i \rightarrow 0$), as expressões que irão fornecer os valores assintóticos K , conforme cada uma destas 3 funções são, assim como com a utilização de *taxa linear*, respectivamente, (2.25), (2.26) e (2.27).

Observação 2.14. Para qualquer um destes 3 modelos, o ajuste com a taxa malthusiana, quando feito, o será apenas na região em que P_i tiver um comportamento próximo do exponencial em relação a t_i .

Observação 2.15. Na utilização deste método para estimativa de K , assim como no método anterior (*taxa linear*), nem sempre é necessário desconsiderar uma quantidade tão grande de dados como no método de Ford-Walford para obtenção de valores razoáveis para K . Mas, nota-se que as estimativas muitas vezes são mais coerentes ao se fazer um determinado descarte. Essa análise não será apresentada em detalhes neste trabalho, mas é possível perceber que, em geral, é melhor descartar o primeiro ou alguns dos primeiros dados. Através da disposição dos dados (r_i e P'_i , por exemplo) em um gráfico de dispersão, nota-se que o(s) ponto(s) (r_i, P'_i) relativo(s) a esta fase inicial pode(m) destoar bastante de uma reta que ajustaria os pontos subsequentes. Portanto, a consideração do(s) mesmo(s), acaba mudando bastante os valores dos coeficientes a e b da reta que ajusta o conjunto de dados, o que, em geral, altera bastante o valor de K . Apesar de o uso de taxa malthusiana ser menos sensível que o método de Ford-Walford em relação ao uso de dados ainda distantes de K , ele demonstrou também trazer estimativas melhores quanto maior for a quantidade e exclusividade de dados

cada vez mais próximos da capacidade suporte real relativa ao fenômeno estudado.

Exemplos de aplicação deste método (tanto por taxa linear quanto por taxa malthusiana) serão feitos nas Seções 3.3.1 e 3.4.1.

2.2.4 Obtenção do valor assintótico através de estimativa dada por outro modelo

Esta seção trata da obtenção do valor assintótico K especificamente no modelo de Montroll.

Dependendo do conjunto de dados que se tiver à disposição, conforme a Observação 2.8, é aconselhável utilizar o método de Ford-Walford ou não. Neste trabalho, se o conjunto de dados der boas condições, K será obtido por este método (Ford-Walford). Caso contrário, será utilizado um dos valores de K obtidos nos demais modelos, apenas a título de exemplificação do uso de ajuste linear no modelo de Montroll. Isso porque, para este modelo, não foi possível a obtenção de K através de ajuste por taxa linear (ver (2.24) e (2.27)) ou por taxa malthusiana (ver (2.38) e (2.27)) com as ferramentas estudadas até o momento, já que o valor do parâmetro λ de inibição do crescimento é desconhecido.

2.3 Obtenção do parâmetro λ de inibição do crescimento no modelo de Montroll

Para que λ possa ser estimado através de (1.24), é preciso ter, além do valor de K , o valor de P_m , que pode ser calculado tendo em mãos o valor estimado t_m (abscissa do ponto de inflexão oblíquo da curva). O valor estimado de t_m pode ser obtido através da abscissa do ponto de inflexão oblíquo de uma função obtida através de um ajuste polinomial com os dados disponíveis de determinado fenômeno; ou através de uma análise da disposição dos dados em um gráfico de dispersão e das variações de P em cada intervalo de tempo, levando-se em conta que no ponto onde ocorre a inflexão, a taxa de variação de P é máxima. Para os exemplos de aplicação deste trabalho, a primeira forma trouxe ajustes finais melhores dos dados. Portanto, é a forma que será utilizada.

Neste trabalho, não será abordado o tema *Ajuste polinomial*. Tampouco será feito todo o processo de ajuste. Os polinômios que ajustam os dados dos exemplos de aplicação foram obtidos com o auxílio do software *Microsoft Excel* (ver Observação 2.16). Da mesma forma que a ferramenta deste tipo de software que fornece uma função resultante de ajuste do tipo linear é elaborada com base nos conceitos matemáticos relativos ao tema *Ajuste linear* (o qual foi conceitualmente apresentado neste trabalho), a que fornece uma função resultante de ajuste do tipo polinomial é elaborada com

base nos conceitos matemáticos relativos ao tema *Ajuste polinomial*, o qual pode ser encontrado em diversas bibliografias que tratam de ajuste de dados.

Observação 2.16. Para obter uma função através de ajuste polinomial de dados utilizando o software *Microsoft Excel* (versão 2013, por exemplo), pode-se, por exemplo, seguir os seguintes passos:

1. Digitar os dados em duas colunas (uma coluna para cada grandeza do fenômeno a ser analisado);
2. selecionar as células que contêm os dados digitados;
3. clicar na aba *INSERIR* no cabeçalho da janela de trabalho do programa; depois na ferramenta *Inserir Gráfico de Dispersão (X,Y) ou de Bolha*, e então no tipo de gráfico *Dispersão*;
4. selecionar o gráfico de dispersão gerado no passo anterior;
5. clicar na aba *DESIGN* no cabeçalho da janela de trabalho do programa; depois na ferramenta *Adicionar Elemento Gráfico; Linha de Tendência; Mais opções de Linha de Tendência; Polinomial*;
6. preencher a caixa *ordem* correspondente ao grau desejado do polinômio;
7. selecionar a caixa *Exibir Equação no Gráfico*.

Obtido o polinômio $P(t)$ que ajusta determinado conjunto de dados, para que t_m seja abscissa de um ponto de inflexão oblíquo, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=t_m} \neq 0, \quad (2.39)$$

$$\left. \frac{d^2P}{dt^2} \right|_{t=t_m} = 0, \text{ e} \quad (2.40)$$

$$\left. \frac{d^3P}{dt^3} \right|_{t=t_m} \neq 0. \quad (2.41)$$

Os graus dos polinômios utilizados para ajustar os conjuntos de dados dos exemplos de aplicação deste trabalho serão 3 ou 4, situações em que é possível encontrar o valor de t_m em (2.40) através de métodos simples (resolução de equações de primeiro ou segundo grau). A escolha entre o grau 3 ou 4, se dará através da verificação de qual grau trouxe ajustes finais melhores dos dados.

Obtido o valor de t_m , o valor de P_m pode ser obtido através de

$$P_m = P(t_m), \quad (2.42)$$

sendo $P(t)$ o polinômio obtido, anteriormente, através do ajuste polinomial.

Obtido o valor de P_m e tendo também o valor de K , λ pode ser obtido através de (1.24).

Observação 2.17. A obtenção de λ se deu por aproximação, atribuindo-lhe valores de forma que, fixado K , o valor de P_m dado por (1.24) se tornasse igual ao valor de P_m (com precisão de 5 casas decimais) conforme o ajuste polinomial obtido anteriormente.

3 Exemplo de aplicação: população brasileira

Este capítulo será dedicado a aplicação da teoria abordada nos capítulos anteriores. Para este fim, serão utilizados dados relativos ao crescimento populacional humano do Brasil entre os anos de 1940 a 2010.

Um dos objetivos é mostrar o uso de diferentes métodos e estratégias para obtenção dos parâmetros abordados nos capítulos anteriores, bem como analisar em quais situações é mais indicado o uso de um(a) ou outro(a) método/estratégia. Outro objetivo é verificar, através de comparações numéricas e gráficas, quais modelos representam melhor o conjunto de dados.

3.1 Conjunto de dados

O conjunto de dados para este exemplo, extraído de [14], encontra-se na Tabela 3.1.

Ano	População
1940	41236315
1950	51944397
1960	70992343
1970	94508583
1980	121150573
1991	146917459
2000	169590693
2010	190755799

Tabela 3.1: Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2010

Para se ter uma ideia do comportamento destes dados, ver a Figura 3.1, com a disposição dos mesmos em um gráfico de dispersão.

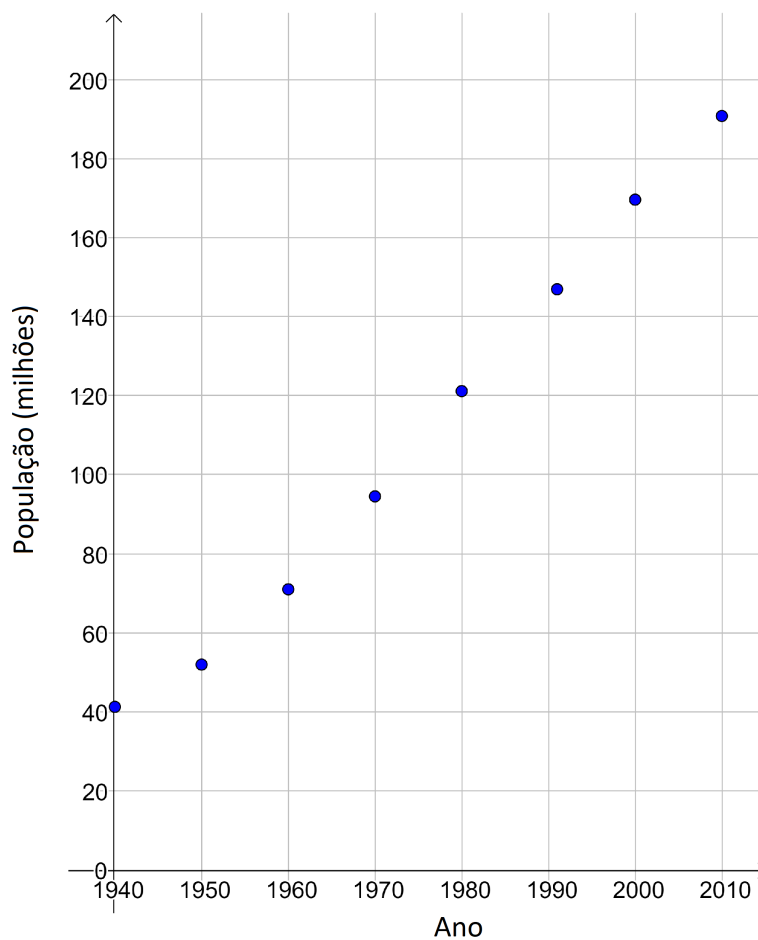


Figura 3.1: Censos demográficos do Brasil de 1940 a 2010

3.2 Modelo malthusiano contínuo

3.2.1 Através de função para ajuste linear

Na Tabela 3.2, encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.11).

i	Ano	t_i	P_i	z_i	t_i²	t_i·z_i
1	1940	0	41236315	17,53483	0	0,00000
2	1950	10	51944397	17,76568	100	177,65684
3	1960	20	70992343	18,07808	400	361,56165
4	1970	30	94508583	18,36420	900	550,92604
5	1980	40	121150573	18,61254	1600	744,50179
6	1991	51	146917459	18,80538	2601	959,07446
7	2000	60	169590693	18,94890	3600	1136,93390
8	2010	70	190755799	19,06650	4900	1334,65532
Σ		281	-	147,17613	14101	5265,31001

Tabela 3.2: Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo malthusiano contínuo)

Conforme as equações (2.9) (com t_i no lugar de x_i) e a Tabela 3.2, obtém-se

$$\alpha \simeq 0,02263 \text{ e } \beta \simeq 17,60211.$$

Por (2.10) e (2.11), isto implica que

$$r \simeq 0,02263 \text{ e } P_0 \simeq 44105954.$$

Portanto, para estes parâmetros, o modelo malthusiano contínuo é dado por

$$P(t) \simeq 44105954e^{0,02263t}. \quad (3.1)$$

Na Tabela 3.3, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1 e conforme os valores calculados por (3.1). E, na Figura 3.2, encontram-se os valores de P conforme o mesmo conjunto de dados, bem como o gráfico da função (3.1).

i	Ano	t_i	P_i	$P(t_i)$	$\text{Desvio} (\%)$
1	1940	0	41236315	44105954	6,96
2	1950	10	51944397	55307242	6,47
3	1960	20	70992343	69353243	2,31
4	1970	30	94508583	86966411	7,98
5	1980	40	121150573	109052675	9,99
6	1991	51	146917459	139878052	4,79
7	2000	60	169590693	171476998	1,11
8	2010	70	190755799	215025837	12,72

Tabela 3.3: Conjunto de dados e valores modelados por (3.1) - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - ajuste linear)

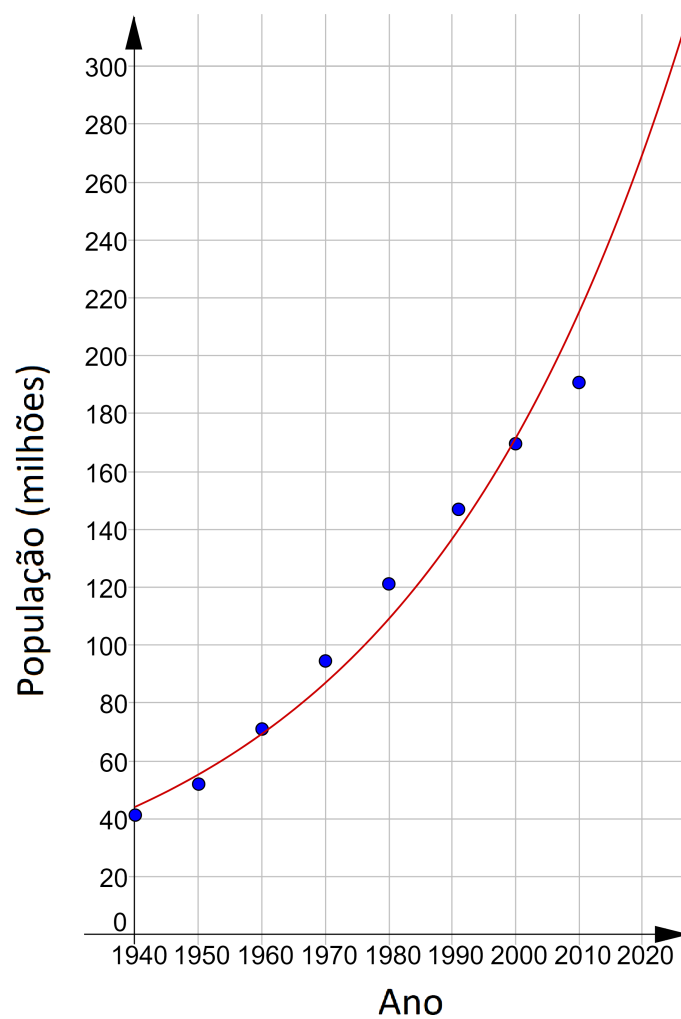


Figura 3.2: Conjunto de dados e gráfico da função (3.1)

Fazendo o ajuste com uma quantidade menor de dados (por exemplo, os iniciais), a tendência é que, no intervalo correspondente aos mesmos, os valores modelados fiquem mais próximos dos valores reais. Considerando-se, por exemplo, apenas os 5 primeiros dados, seguindo os mesmos passos realizados acima, obtém-se

$$P(t) \simeq 40640646e^{0,02754t}. \quad (3.2)$$

Na Tabela 3.4, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1, de $i = 1$ até $i = 5$, e conforme os valores calculados por (3.2).

i	Ano	t_i	P_i	$P(t_i)$	 Desvio (%)
1	1940	0	41236315	40640646	1,44
2	1950	10	51944397	53525777	3,04
3	1960	20	70992343	70496143	0,70
4	1970	30	94508583	92846970	1,76
5	1980	40	121150573	122284135	0,94

Tabela 3.4: Modelagem com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - ajuste linear)

Observação 3.1. Esta maior proximidade se deve ao fato de que as taxas de crescimento relativas a estes dados (por exemplo, os iniciais) têm valores mais próximos entre si, ficando em torno de um valor único r , que é a taxa de crescimento (constante) no modelo malthusiano contínuo, encontrado através do ajuste linear que levou à (3.2).

3.2.2 Através de taxa malthusiana

Apesar de a Expressão (2.31) ter sido introduzida em um tópico relativo a estimativa de valor assintótico para os modelos logístico, de Gompertz e de Montroll, pode-se utilizá-la para estimativa da taxa r no modelo malthusiano, já que o conjunto de dados em questão apresenta um comportamento próximo de uma função exponencial.

Considerando os censos de 1940 a 2010, por (2.31) (com P_i e t_i no lugar y_i e x_i , respectivamente), obtém-se

$$\delta = \sqrt[70]{\frac{190755799}{41236315}} - 1 \simeq 0,02212.$$

Por (2.32) (com $i = 0$; P_0 e t no lugar y_i e Δx , respectivamente), ou seja, por

$$P(t) = P_0 e^{\ln(1+\delta)t},$$

e com P_0 igual a população no ano de 1940 conforme a Tabela 3.1, obtém-se

$$P(t) \simeq 41236315e^{\ln(1,02212)t}.$$

Por (2.33), tem-se, portanto, o seguinte modelo malthusiano contínuo:

$$P(t) \simeq 41236315e^{0,02188t}. \quad (3.3)$$

Na Tabela 3.5, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1 e conforme os valores calculados por (3.3).

i	Ano	t_i	P_i	P(t_i)	 Desvio (%)
1	1940	0	41236315	41236315	0,00
2	1950	10	51944397	51322537	1,20
3	1960	20	70992343	63875806	10,02
4	1970	30	94508583	79499549	15,88
5	1980	40	121150573	98944791	18,33
6	1991	51	146917459	125870522	14,33
7	2000	60	169590693	153267290	9,63
8	2010	70	190755799	190755799	0,00

Tabela 3.5: Conjunto de dados e valores modelados por (3.3) - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - taxa malthusiana)

Assim como feito na Seção 3.2.1, ao se fazer o ajuste com uma quantidade menor de dados (por exemplo, os iniciais), a tendência é que, no intervalo correspondente aos mesmos, os valores modelados fiquem mais próximos dos valores reais. Considerando-se, por exemplo, apenas os 5 primeiros dados, seguindo os mesmos passos realizados acima, obtém-se

$$P(t) \simeq 41236315e^{\ln(1,02731)t},$$

ou seja,

$$P(t) \simeq 41236315e^{0,02694t}. \quad (3.4)$$

Na Tabela 3.6, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1, de $i = 1$ até $i = 5$, e conforme os valores calculados por (3.4).

i	Ano	t_i	P_i	P(t_i)	 Desvio (%)
1	1940	0	41236315	41236315	0,00
2	1950	10	51944397	53987256	3,93
3	1960	20	70992343	70680996	0,44
4	1970	30	94508583	92536713	2,09
5	1980	40	121150573	121150573	0,00

Tabela 3.6: Modelagem com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo malthusiano contínuo - taxa malthusiana)

3.3 Modelo logístico contínuo

3.3.1 Valor assintótico

Conforme Observação 2.8, como os dados relativos à P disponíveis ainda estão distantes de uma estabilização (ver Figura 3.1), não é aconselhável o uso do método de Ford-Walford. Portanto, serão exemplificados nesta seção os cálculos de valor assintótico apenas através de *taxa linear* e *taxa malthusiana*.

Por taxa linear

Conforme Observação 2.11, após testes com diferentes descartes de dados, optou-se pelo descarte do primeiro dado da Tabela 3.1.

Na Tabela 3.7, encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.22). Nesta tabela, o valor de γ_i é dado por (2.20).

Conforme as equações (2.6) (com P_{i+1} no lugar de x_i e γ_i no lugar de y_i) e a Tabela 3.7, obtém-se

$$a \simeq -2,09583 \cdot 10^{-10} \text{ e } b \simeq 0,05222.$$

Por (2.25), isto implica que

$$K \simeq 249175936.$$

i	Ano	t_i	t_{i+1}	P_i	P_{i+1}	γ_i	P_{i+1}^2	$P_{i+1} \cdot \gamma_i$
2	1950	10	20	51944397	70992343	0,03667	$5,04 \cdot 10^{15}$	2603280,42
3	1960	20	30	70992343	94508583	0,03313	$8,93 \cdot 10^{15}$	3130600,32
4	1970	30	40	94508583	121150573	0,02819	$1,47 \cdot 10^{16}$	3415237,27
5	1980	40	51	121150573	146917459	0,01933	$2,16 \cdot 10^{16}$	2840646,47
6	1991	51	60	146917459	169590693	0,01715	$2,88 \cdot 10^{16}$	2908034,58
7	2000	60	70	169590693	190755799	0,01248	$3,64 \cdot 10^{16}$	2380653,46
Σ	-	-	-	-	793915450	0,14695	$1,15 \cdot 10^{17}$	17278452,53

Tabela 3.7: Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo logístico - taxa linear)

Por taxa malthusiana

Conforme Observação 2.15, após testes com diferentes descartes de dados, optou-se pelo descarte do primeiro dado da Tabela 3.1.

Na Tabela 3.8, encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.36). Nesta tabela, respectivamente, conforme (2.31), (2.34) e (2.35), e considerando também a Observação 2.13, os valores de δ_i , r_i e P'_i são dados por

$$\delta_i = \sqrt[t_{i+1}-t_i]{\frac{P_{i+1}}{P_i}} - 1,$$

$$r_i = \ln(1 + \delta_i), \text{ e}$$

$$P'_i = P_i e^{r_i \left(\frac{t_{i+1}-t_i}{2} \right)}.$$

Conforme as equações (2.6) (com P'_i no lugar de x_i e r_i no lugar de y_i) e a Tabela 3.8, obtém-se

$$a \simeq -1,68278 \cdot 10^{-10} \text{ e } b \simeq 0,04186.$$

Por (2.25), isto implica que

$$K \simeq 248807079. \tag{3.5}$$

i	Ano	t_i	t_{i+1}	P_i	P_{i+1}	δ_i	r_i	P'_i	P'_i²	P'_i.r_i
2	1950	10	20	51944397	70992343	0,0317	0,0312	60726061	3,69.10 ¹⁵	1897071
3	1960	20	30	70992343	94508583	0,0290	0,0286	81910840	6,71.10 ¹⁵	2343622
4	1970	30	40	94508583	121150573	0,0251	0,0248	107003593	1,14.10 ¹⁶	2657365
5	1980	40	51	121150573	146917459	0,0177	0,0175	133413396	1,78.10 ¹⁶	2338819
6	1991	51	60	146917459	169590693	0,0161	0,0159	157847501	2,49.10 ¹⁶	2517087
7	2000	60	70	169590693	190755799	0,0118	0,0118	179862192	3,23.10 ¹⁶	2115291
Σ	-	-	-	-	-	-	0,1299	720763584	9,69.10 ¹⁶	13869255

Tabela 3.8: Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo logístico - taxa malthusiana)

3.3.2 Ajuste linear

Na Tabela 3.9, considerando K dado, por exemplo, por (3.5), encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.13).

i	Ano	t_i	P_i	z_i	t_i²	t_i.z_i
1	1940	0	41236315	-1,61615	0	0,00000
2	1950	10	51944397	-1,33233	100	-13,32333
3	1960	20	70992343	-0,91817	400	-18,36340
4	1970	30	94508583	-0,49020	900	-14,70595
5	1980	40	121150573	-0,05231	1600	-2,09236
6	1991	51	146917459	0,36598	2601	18,66502
7	2000	60	169590693	0,76120	3600	45,67228
8	2010	70	190755799	1,18967	4900	83,27671
Σ		281	-	-2,09231	14101	99,12898

Tabela 3.9: Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo logístico contínuo)

Conforme as equações (2.9) (com t_i no lugar de x_i) e a Tabela 3.9, obtém-se

$$\alpha \simeq 0,04080 \text{ e } \beta \simeq -1,69465.$$

Por (2.12) e (2.13), isto implica que

$$r \simeq 0,04080 \text{ e } c \simeq 5,44475.$$

Portanto, para estes parâmetros, o modelo logístico contínuo é dado por

$$P(t) \simeq \frac{248807079}{1 + 5,44475e^{-0,04080t}}. \quad (3.6)$$

Na Tabela 3.10, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1 e conforme os valores calculados por (3.6). E, na Figura 3.3, encontram-se os valores de P conforme o mesmo conjunto de dados, bem como o gráfico da função (3.6).

i	Ano	t_i	P_i	P(t_i)	 Desvio (%)
1	1940	0	41236315	38606137	6,38
2	1950	10	51944397	53846975	3,66
3	1960	20	70992343	73014601	2,85
4	1970	30	94508583	95657510	1,22
5	1980	40	121150573	120508690	0,53
6	1991	51	146917459	148129724	0,83
7	2000	60	169590693	169167116	0,25
8	2010	70	190755799	189487111	0,67

Tabela 3.10: Conjunto de dados e valores modelados por (3.6) - população brasileira (modelo logístico contínuo)

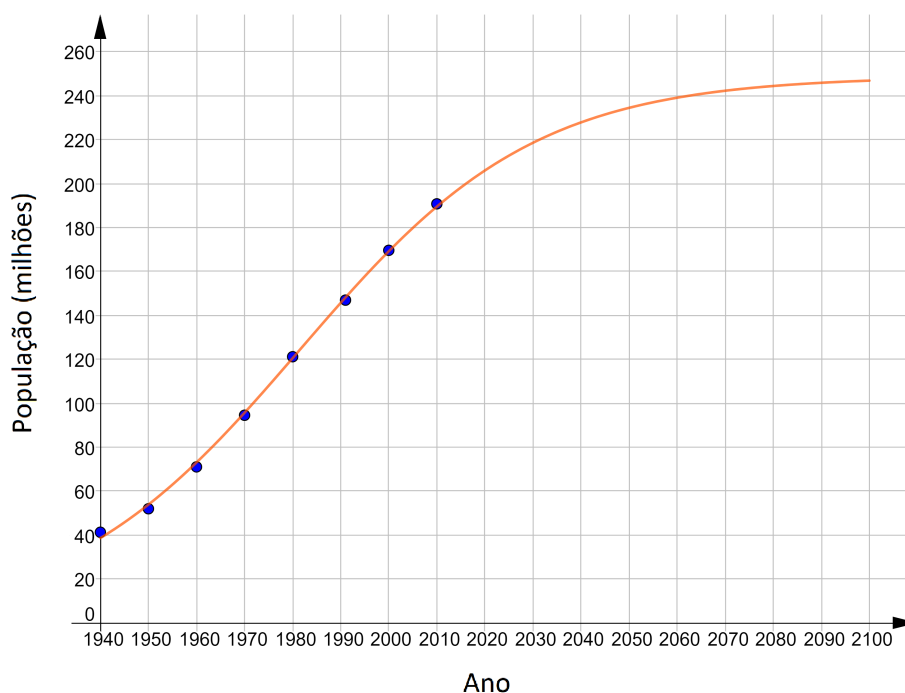


Figura 3.3: Conjunto de dados e gráfico da função (3.6)

3.4 Modelo de Gompertz

3.4.1 Valor assintótico

Vale a mesma observação feita na Seção 3.3.1. Aliás, o método de Ford-Walford independe do modelo que está sendo utilizado, pois se trata de um ajuste linear de y_{i+1} em relação à y_i (ou, na notação que está sendo utilizada, P_{i+1} em relação à P_i). Ou seja, depende, mesmo que com algumas restrições, apenas do conjunto de dados, e não da forma como um tipo de taxa de crescimento/declínio se relaciona com P , como acontece na estimativa de K por *taxa linear* ou por *taxa malthusiana*.

Por taxa linear

Conforme Observação 2.11, após testes com diferentes descartes de dados, optou-se pelo descarte dos três primeiros dados da Tabela 3.1.

Na Tabela 3.11, encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.23). Nesta tabela, o valor de γ_i é dado por (2.20).

Conforme as equações (2.6) (com $\ln P_{i+1}$ no lugar de x_i e γ_i no lugar de y_i) e a Tabela 3.11, obtêm-se

$$a \simeq -0,03313 \text{ e } b \simeq 0,64403.$$

Por (2.26), isto implica que

$$K \simeq 277285378.$$

i	Ano	t_i	t_{i+1}	P_i	P_{i+1}	$\ln P_{i+1}$	γ_i	$(\ln P_{i+1})^2$	$(\ln P_{i+1}) \cdot \gamma_i$
4	1970	30	40	94508583	121150573	18,61	0,02819	346,43	0,52469
5	1980	40	51	121150573	146917459	18,81	0,01933	353,64	0,36360
6	1991	51	60	146917459	169590693	18,95	0,01715	359,06	0,32492
7	2000	60	70	169590693	190755799	19,07	0,01248	363,53	0,23795
Σ	-	-	-	-	-	75,43	0,07715	1422,66	1,45117

Tabela 3.11: Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo de Gompertz - taxa linear)

Por taxa malthusiana

Conforme Observação 2.15, após testes com diferentes descartes de dados, optou-se pelo descarte dos três primeiros dados da Tabela 3.1.

Na Tabela 3.12, encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.37). Nesta tabela, respectivamente, conforme (2.31), (2.34) e (2.35), e considerando também a Observação 2.13, os valores de δ_i , r_i e P'_i são dados por

$$\delta_i = {}^{t_{i+1}-t_i}\sqrt{\frac{P_{i+1}}{P_i}} - 1,$$

$$r_i = \ln(1 + \delta_i), \text{ e}$$

$$P'_i = P_i e^{r_i \left(\frac{t_{i+1}-t_i}{2} \right)}.$$

Conforme as equações (2.6) (com $\ln P'_i$ no lugar de x_i e r_i no lugar de y_i) e a Tabela 3.12, obtém-se

$$a \simeq -0,02383 \text{ e } b \simeq 0,46474.$$

Por (2.26), isto implica que

$$K \simeq 295976615. \tag{3.7}$$

i	Ano	t_i	t_{i+1}	P_i	P_{i+1}	δ_i	r_i	P'_i	$\ln P'_i$	$(\ln P'_i)^2$	$(\ln P'_i) \cdot r_i$
4	1970	30	40	94508583	121150573	0,0251	0,0248	107003593	18,49	$3,42 \cdot 10^2$	0,4591
5	1980	40	51	121150573	146917459	0,0177	0,0175	133413396	18,71	$3,50 \cdot 10^2$	0,3280
6	1991	51	60	146917459	169590693	0,0161	0,0159	157847501	18,88	$3,56 \cdot 10^2$	0,3010
7	2000	60	70	169590693	190755799	0,0118	0,0118	179862192	19,01	$3,61 \cdot 10^2$	0,2235
Σ	-	-	-	-	-	-	0,0701	-	75,08	$1,41 \cdot 10^3$	1,3117

Tabela 3.12: Dados e valores para estimativa de K - população brasileira (modelo de Gompertz - taxa malthusiana)

3.4.2 Ajuste linear

Na Tabela 3.13, considerando K dado, por exemplo, por (3.7), encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.15).

i	Ano	t_i	P_i	z_i	t_i^2	$t_i \cdot z_i$
1	1940	0	41236315	0,67852	0	0,00000
2	1950	10	51944397	0,55395	100	5,53946
3	1960	20	70992343	0,35607	400	7,12141
4	1970	30	94508583	0,13242	900	3,97266
5	1980	40	121150573	-0,11289	1600	-4,51572
6	1991	51	146917459	-0,35609	2601	-18,16059
7	2000	60	169590693	-0,58538	3600	-35,12297
8	2010	70	190755799	-0,82260	4900	-57,58226
Σ		281	-	-0,15601	14101	-98,74801

Tabela 3.13: Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo de Gompertz)

Conforme as equações (2.9) (com t_i no lugar de x_i) e a Tabela 3.13, obtém-se

$$\alpha \simeq -0,02204 \text{ e } \beta \simeq 0,75482.$$

Por (2.14) e (2.15), isto implica que

$$\mu \simeq 0,02204 \text{ e } P_0 \simeq 35270874.$$

Portanto, para estes parâmetros, o modelo de Gompertz é dado por

$$P(t) \simeq 295976615 \left(\frac{35270874}{295976615} \right)^{e^{-0,02204t}} \quad (3.8)$$

Na Tabela 3.14, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1 e conforme os valores calculados por (3.8). E, na Figura 3.4, encontram-se os valores de P conforme o mesmo conjunto de dados, bem como o gráfico da função (3.8).

i	Ano	t_i	P_i	P(t_i)	 Desvio (%)
1	1940	0	41236315	35270874	14,47
2	1950	10	51944397	53726492	3,43
3	1960	20	70992343	75301076	6,07
4	1970	30	94508583	98720671	4,46
5	1980	40	121150573	122672643	1,26
6	1991	51	146917459	148290484	0,93
7	2000	60	169590693	167929562	0,98
8	2010	70	190755799	187854428	1,52

Tabela 3.14: Conjunto de dados e valores modelados por (3.8) - população brasileira (modelo de Gompertz)

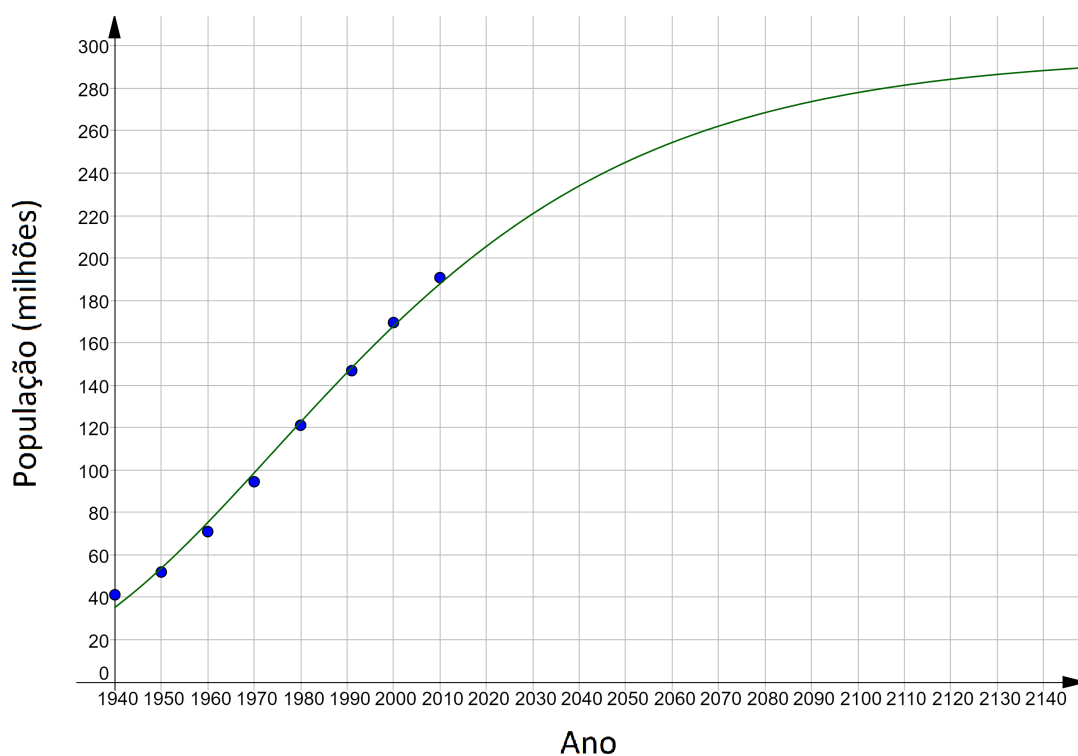


Figura 3.4: Conjunto de dados e gráfico da função (3.8)

Fazendo o ajuste com uma quantidade menor de dados (por exemplo, os seis últimos), a tendência é que, no intervalo correspondente aos mesmos, os valores modelados fiquem mais próximos dos valores reais. Na Tabela 3.15, de $i = 3$ a $i = 8$ e K dado também por (3.7), encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.15).

i	Ano	t_i	P_i	z_i	t_i^2	$t_i \cdot z_i$
3	1960	20	70992343	0,35607	400	7,12141
4	1970	30	94508583	0,13242	900	3,97266
5	1980	40	121150573	-0,11289	1600	-4,51572
6	1991	51	146917459	-0,35609	2601	-18,16059
7	2000	60	169590693	-0,58538	3600	-35,12297
8	2010	70	190755799	-0,82260	4900	-57,58226
Σ		281	-	-1,38848	14001	-104,28748

Tabela 3.15: Dados e valores para ajuste linear com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo de Gompertz)

Conforme as equações (2.9) (com t_i no lugar de x_i) e a Tabela 3.15, obtém-se

$$\alpha \simeq -0,02361 \text{ e } \beta \simeq 0,83501.$$

Por (2.14) e (2.15), isto implica que

$$\mu \simeq 0,02361 \text{ e } P_0 \simeq 29531357.$$

Portanto, para estes parâmetros, o modelo de Gompertz é dado por

$$P(t) \simeq 295976615 \left(\frac{29531357}{295976615} \right)^{e^{-0,02361t}}. \quad (3.9)$$

Na Tabela 3.16, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1 e conforme os valores calculados por (3.9). Note que, nesta condição, apesar de um melhor ajuste de $i = 3$ a $i = 8$, há um maior desvio para os dados referentes à $i = 1$ e $i = 2$. Mas, pode ser um tipo de ajuste interessante se a região de interesse for aquela em que o desvio é menor ($i = 3$ a $i = 8$).

i	Ano	t_i	P_i	P(t_i)	 Desvio (%)
1	1940	0	41236315	29531357	28,39
2	1950	10	51944397	47950424	7,69
3	1960	20	70992343	70312180	0,96
4	1970	30	94508583	95127941	0,66
5	1980	40	121150573	120775102	0,31
6	1991	51	146917459	148257907	0,91
7	2000	60	169590693	169236811	0,21
8	2010	70	190755799	190348222	0,21

Tabela 3.16: Modelagem com uma quantidade menor de dados - população brasileira (modelo de Gompertz)

3.5 Modelo de Montroll

3.5.1 Valor assintótico

Como os dados da Tabela 3.1 se enquadram na restrição comentada na Seção 2.2.4, será utilizado, a título de exemplificação de uso de ajuste linear para o modelo de Montroll, o valor assintótico dado por (3.5). Ou seja,

$$K \simeq 248807079. \quad (3.10)$$

3.5.2 Taxa λ

Conforme critérios de escolha comentados na Seção 2.3, o polinômio escolhido para localização do ponto de inflexão oblíquo de abscissa t_m através de ajuste polinomial dos dados da Tabela 3.1 é de terceiro grau e é dado por

$$P(t) \simeq -341,18t^3 + 43007,09t^2 + 798753,76t + 40787449,39. \quad (3.11)$$

Em relação a este polinômio, obtém-se

$$\frac{dP}{dt} \simeq -1023,54t^2 + 86014,19t + 798753,76,$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} \simeq -2047,09t + 86014,19, \text{ e} \quad (3.12)$$

$$\frac{d^3P}{dt^3} \simeq -2047,09.$$

Igualando (3.12) a zero, tem-se que $t \simeq 42,01787$ é candidato à abscissa do ponto de inflexão oblíquo de (3.11). Como

$$\left. \frac{dP}{dt} \right|_{t=42,01787} \simeq 2605820,19 \neq 0, \text{ e}$$

$$\left. \frac{d^3P}{dt^3} \right|_{t=42,01787} \simeq -2047,09 \neq 0,$$

então, conforme as condições (2.39), (2.40) e (2.41), $t_m \simeq 42,01787$ é, efetivamente, abscissa do ponto de inflexão oblíquo de (3.11).

Assim, por (2.42), obtém-se

$$P_m = P(42,01787) \simeq 124968768.$$

Com este valor de P_m , considerando (1.24) e a Observação 2.17, obtém-se

$$\lambda \simeq 1,02367. \quad (3.13)$$

3.5.3 Ajuste linear

Na Tabela 3.17, considerando K e λ dados, respectivamente, por (3.10) e (3.13), encontram-se os dados e valores necessários para que seja feito o ajuste linear através de (2.17).

i	Ano	t_i	P_i	z_i	t_i^2	$t_i \cdot z_i$
1	1940	0	41236315	-1,66694	0	0,00000
2	1950	10	51944397	-1,37897	100	-13,78970
3	1960	20	70992343	-0,95946	400	-19,18929
4	1970	30	94508583	-0,52689	900	-15,80669
5	1980	40	121150573	-0,08524	1600	-3,40979
6	1991	51	146917459	0,33580	2601	17,12583
7	2000	60	169590693	0,73298	3600	43,97890
8	2010	70	190755799	1,16299	4900	81,40916
Σ		281	-	-2,38574	14101	90,31842

Tabela 3.17: Dados e valores para ajuste linear - população brasileira (modelo de Montroll)

Conforme as equações (2.9) (com t_i no lugar de x_i) e a Tabela 3.17, obtém-se

$$\alpha \simeq 0,04115 \text{ e } \beta \simeq -1,74375.$$

Por (2.16) e (2.17), isto implica que

$$\lambda r \simeq 0,04115 \text{ e } c \simeq 5,71875.$$

Portanto, para estes parâmetros, o modelo de Montroll é dado por

$$P(t) \simeq \frac{248807079}{(1 + 5,71875e^{-0,04115t})^{\frac{1}{1,02367}}}. \quad (3.14)$$

Na Tabela 3.18, encontram-se os valores de P conforme o conjunto de dados da Tabela 3.1 e conforme os valores calculados por (3.14). E, na Figura 3.5, encontram-se os valores de P conforme o mesmo conjunto de dados, bem como o gráfico da função (3.14).

i	Ano	t_i	P_i	$P(t_i)$	$ \text{Desvio} (\%)$
1	1940	0	41236315	38699301	6,15
2	1950	10	51944397	53865466	3,70
3	1960	20	70992343	72953603	2,76
4	1970	30	94508583	95541639	1,09
5	1980	40	121150573	120389002	0,63
6	1991	51	146917459	148070183	0,78
7	2000	60	169590693	169187272	0,24
8	2010	70	190755799	189595985	0,61

Tabela 3.18: Conjunto de dados e valores modelados por (3.14) - população brasileira (modelo de Montroll)

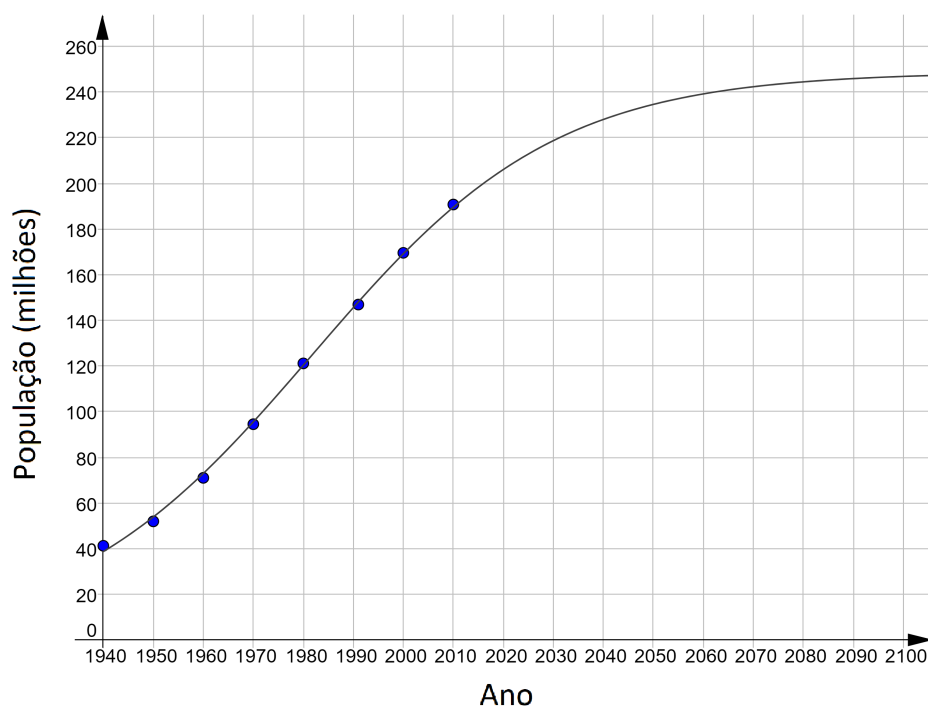


Figura 3.5: Conjunto de dados e gráfico da função (3.14)

3.6 Análises e discussões

Na Figura 3.6 a seguir, encontram-se miniaturas dos gráficos obtidos no decorrer deste capítulo. Gráficos estes aqui exibidos para serem consultados com maior praticidade durante a leitura das análises e discussões desta seção.

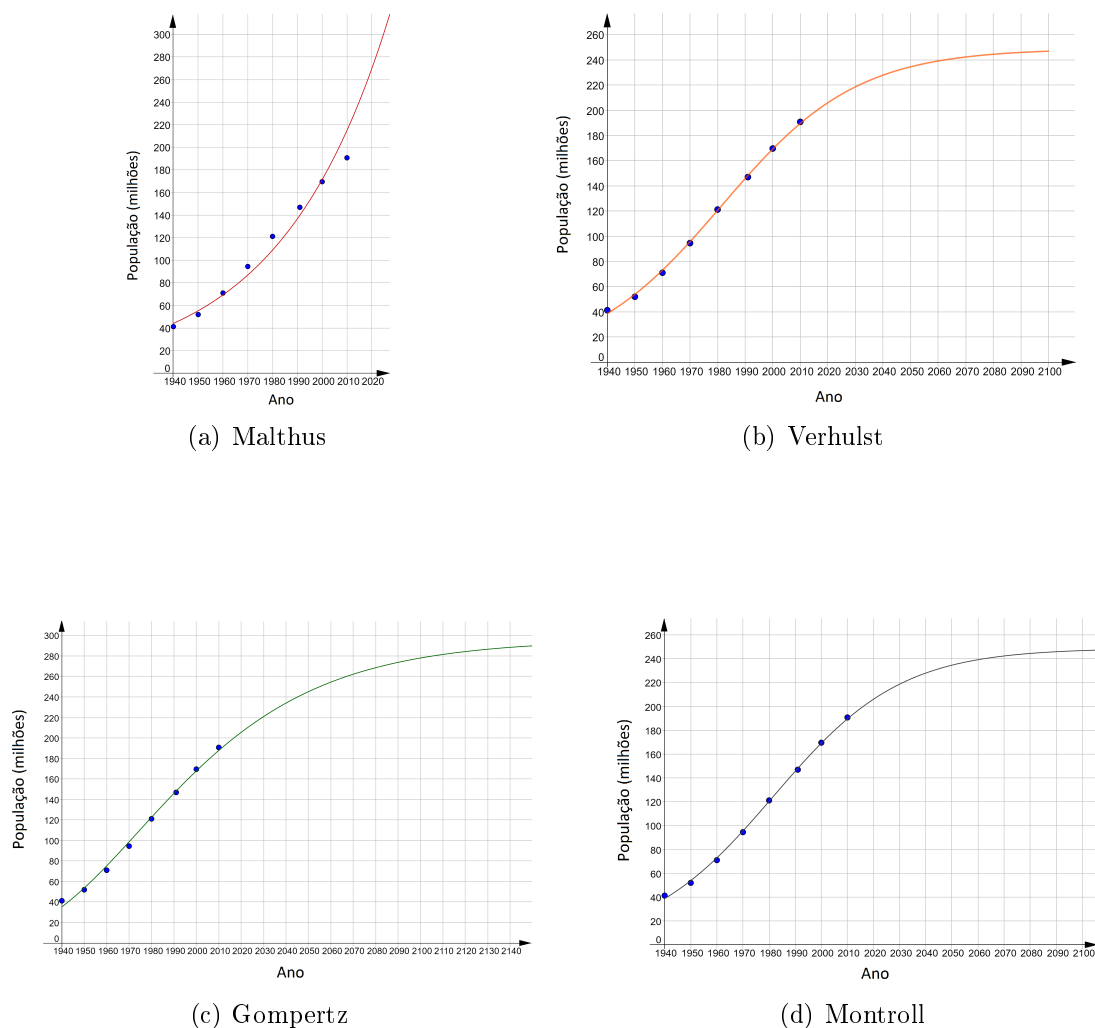


Figura 3.6: Comparativo de modelagem pelos quatro modelos

Conforme a Figura 3.6(a) (idem Figura 3.2), é possível notar que o modelo malthusiano não representa tão insatisfatoriamente o conjunto de dados disponível. Porém, através dos pontos que representam os dados nesta mesma figura, é possível notar uma diminuição na taxa de crescimento por volta do ano de 1980 (aproximadamente 1982, se considerado cálculo na Seção 3.5.2). Diminuição esta que, conforme conhecimento de comportamento de crescimento populacional humano de outros países e até mesmo de outras espécies, tende a se acentuar com o passar do tempo, fazendo com que o crescimento puramente exponencial (caso do modelo malthusiano) não seja um bom representante futuro (pelo menos de um futuro próximo) do fenômeno utilizado como exemplo. Conforme Tabela 3.4, uma modelagem com dados de 1940 a 1980 trás valores modelados mais próximos dos dados, visto que, nesta fase, o crescimento ainda é

bem próximo do exponencial. Com o método que utiliza *taxa malthusiana* (ao invés de *função para ajuste linear*), os valores modelados neste mesmo período estão ainda mais próximos dos dados, conforme mostra a Tabela 3.6.

Conforme as Figuras 3.6(b), 3.6(c) e 3.6(d), os outros três modelos representam de maneira mais satisfatória o conjunto de dados. Além disso, por este conhecimento de comportamento de crescimento populacional humano de outros países e até mesmo de outras espécies já citado, eles tendem a ser melhores representantes futuros do que o modelo malthusiano. Ainda que haja diferenças quantitativas entre estimativas destes 3 modelos, pelo menos todos eles levam em consideração a diminuição da taxa de crescimento a partir de um certo momento.

Para o intervalo relativo ao conjunto de dados utilizado, conforme as Figuras 3.6(b) e 3.6(c) (idem Figuras 3.3 e 3.4, respectivamente) e as Tabelas 3.10 e 3.14, já são notados melhores resultados do modelo logístico em relação ao modelo de Gompertz. Entende-se que a tendência para as próximas décadas é que a melhor representatividade daquele continue se comparado com este. Esta afirmação tem embasamento em projeções feitas pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) - veja [13]. Projeções estas que provavelmente foram feitas com a utilização de modelos mais avançados do que os que estão sendo tratados aqui. De certa forma, uma melhor representatividade do fenômeno utilizado como exemplo pelo modelo logístico em relação ao modelo de Gompertz era de se esperar. Considerando-se qualquer um dos dois valores assintóticos encontrados para o modelo de Gompertz (277285378 e 295976615), a ordenada do ponto de inflexão, que para este modelo é dada por K/e , está distante do valor obtido por ajuste polinomial (veja Seção 3.5.2). Elas são, respectivamente, 102007590 e 108883712, enquanto o valor dado por ajuste polinomial é de 124968768. Já a ordenada do ponto de inflexão para o modelo logístico, que é dada por $K/2$, é 124403540 se for considerado o valor assintótico de 248807079, que foi o valor utilizado para obtenção dos demais parâmetros do modelo. Ou seja, ordenada bem mais próxima do valor obtido por ajuste polinomial que, com os devidos cuidados, tende a ajustar melhor os dados localmente do que os modelos aqui tratados.

Como, para o modelo de Montroll, foi utilizado o mesmo valor assintótico obtido para o modelo logístico, e a taxa λ obtida na Seção 3.5.2 foi aproximadamente igual a 1 ($\lambda \simeq 1,02367$), era de se esperar que os valores modelados pelo primeiro modelo estivessem bem próximos dos modelados pelo segundo, conforme mostram as Figuras 3.6(b) e 3.6(d) (idem Figuras 3.3 e 3.5, respectivamente) e as Tabelas 3.10 e 3.18. Isto porque, conforme visto no 3º parágrafo da Seção 1.2, quando $\lambda = 1$, o modelo de Montroll é exatamente igual ao modelo logístico.

O bom resultado obtido com a utilização do modelo logístico se deve bastante ao fato de a ordenada do ponto de inflexão P_m do fenômeno estar bem próxima de $K/2$. Se fosse um fenômeno em que esta ordenada estivesse um pouco mais distante de $K/2$ (com $K/e \leq P_m \leq K$), a tendência é que o modelo de Montroll trouxesse melhores resultados do que o modelo logístico, por conta da possibilidade de flexibilização da ordenada do ponto de inflexão que é atendida pelo primeiro, mas não pelo segundo modelo.

4 Proposta de atividade na Educação Básica

Este capítulo traz uma proposta de atividade para ser aplicada a alunos da Educação Básica (mais precisamente, no Ensino Médio), a fim de que estes possam se familiarizar com alguns dos conceitos relacionados ao tema *crescimento populacional*. A seguir, são apresentadas características desta atividade, bem como as etapas de sua realização.

4.1 Público-alvo

Entende-se que esta atividade a ser proposta pode ser aplicada a alunos de qualquer série do Ensino Médio.

4.2 Objetivo

Explorar a forma como os alunos imaginam (ou viram em algum lugar) sobre como acontece e/ou aconteceu o crescimento populacional (ou em outra grandeza) em duas situações: população brasileira e altura de uma árvore da espécie *Picea*, também conhecida como *pinho-alemão*.

4.3 Estrutura

Esta atividade está dividida em 5 partes:

- Parte 1: estimativas de crescimento sem informações de variação em diferentes fases

- Parte 2: estimativas de crescimento com informações de variação em diferentes fases
- Parte 3: socialização das estimativas
- Parte 4: exibição integral dos dados reais disponíveis
- Parte 5: exemplos de modelos de crescimento

4.4 Fontes de dados

Os materiais utilizados como fonte de dados para o crescimento populacional brasileiro foram [13] e [14]. Já para o crescimento em altura de pinho-alemão, foi [9], que utilizou [19] como referência.

4.5 Preparação geral

Fica a critério do professor a quantidade de partes da atividade que será desenvolvida no mesmo dia. Sugere-se, entretanto, que sejam aplicadas, em conjunto, a Parte 1 com a Parte 2, bem como as Partes de 3 a 5. A seguir, algumas tarefas prévias à atividade para cumprimento do professor:

1. O professor deve definir se as Partes 1 e 2 da atividade serão realizadas individualmente, em dupla ou em grupo e providenciar a quantidade necessária de folhas impressas e/ou fotocopiadas para tal realização (páginas 112 a 117).
2. Caso opte pela realização em grupos, o professor deve organizar a turma para tal fim e atribuir um número a cada um deles.

4.6 Parte 1 - Estimativas sem informações de variação em diferentes fases

Nesta parte, dispondo apenas de dois dados, os alunos devem fazer as estimativas de crescimento para dois casos: população brasileira (de 1870 à 2050) e altura de uma árvore da espécie conhecida como *pinho-alemão* (dos 0 aos 100 anos de idade). Para isto, eles utilizarão um material já preparado (páginas 112 a 114).

4.6.1 Materiais

Professor:

- Giz e lousa (opcional)
- Projetor multimídia (opcional)
- Computador (opcional)
- Câmera ou aparelho com câmera fotográfica (opcional)

Alunos:

- Páginas 112 a 114 impressas ou fotocopiadas
- Lápis, caneta e borracha
- Régua (opcional)
- Câmera ou aparelho com câmera fotográfica (opcional e apenas ao término desta etapa da atividade, para registro de resultados)

4.6.2 Tempo

Juntamente com a Parte 2, total de 1 aula de 50 minutos.

4.6.3 Forma de realização

Individual, em dupla ou em grupo.

4.6.4 Preparação

1. O professor deve distribuir as páginas 112 a 114 impressas ou fotocopiadas para cada aluno, dupla ou grupo.
2. Os alunos devem preencher o cabeçalho da atividade, bem como as duas lacunas que constam nas Figuras A.1 e A.2 com o número do grupo ou nomes dos componentes da dupla ou nome, caso seja feito individualmente. Esta identificação é importante para a fase de socialização dos resultados.

4.6.5 Realização

Os alunos devem cumprir as seguintes etapas:

1. Completar as Tabelas A.1 e A.2 com estimativas que eles julgarem condizentes com a realidade.
2. Demarcar e nomear os pontos relativos a estas estimativas nos planos contidos nas Figuras A.1 e A.2.
3. Traçar, nestas mesmas figuras, curvas relativas a estes crescimentos. Nesta etapa, a ideia é que os alunos façam uma linha que represente o crescimento nestas duas situações, considerando-se os pontos das tabelas e os intervalos entre cada par de pontos consecutivos dentre estes. Sugere-se que o professor diga aos alunos que eles têm livre arbítrio para escolher a forma que julgarem que melhor representa os fenômenos em questão. Pode ser uma reta ou uma curva que ajuste visualmente estes dados - para facilitar, o professor pode fazer (resp. mostrar) um exemplo simples de regressão linear na lousa (resp. no projetor multimídia) -; pode ser uma curva com oscilações ocorrendo com pouca ou muita frequência; etc.
4. Se a forma de socialização escolhida pelo professor for através de compartilhamento de imagens dos resultados obtidos pelos alunos, então estes devem registrar, ao término desta etapa da atividade, imagens do que foi confeccionado por eles.

Observação 4.1. Caso algum aluno, dupla ou grupo, queira fazer diretamente curvas de crescimento que sejam julgadas condizentes com a realidade, mesmo sem demarcar todos os pontos nos planos ou até mesmo sem preencher as duas tabelas por completo, sugere-se que seja permitido. Isto porque, pode ser interessante que os alunos mostrem, de forma bem natural, a maneira como eles acham que acontece o crescimento nestas duas situações.

Observação 4.2. Foi sugerida como opção a utilização de curvas com oscilações porque o aluno pode querer fazer uma linha de variação da população/altura em intervalos de tempo pequenos o suficiente para que não seja notado apenas crescimento, mas também declínio. Mesmo que a escala utilizada nos eixos dos gráficos confeccionados não seja adequada para isto, pode ser interessante o uso deste tipo de linha para abordar as variações pontuais da população/altura.

Observação 4.3. Em dados da tabela A.1 (e da A.3, referente à Parte 2 da atividade), foram feitos dois tipos de ajuste nos dados:

1º tipo: padronização para estimativas em início de década.

Este tipo de ajuste foi utilizado para que todo o conjunto de dados e estimativas fosse relativo a inícios de décadas. Para isso, foi necessário ajuste em apenas um dos dados. O dado que se tinha à disposição em [14] era de 1872 (aproximadamente 9,9 milhões). Foi feita então uma estimativa (direcionada apenas pela observação de dados subsequentes de [14]) para o ano de 1870. Entende-se que esta estimativa não traz prejuízos para análise do comportamento de crescimento populacional da atividade proposta. Pelo menos não para o grau de precisão que se espera na realização desta.

2º tipo: ajuste devido a recontagens.

Os dados dos anos de 1870 à 2010 foram extraídos da referência [14] (publicada em 2010). Já os dados de 2030 e 2050 (este fornecido apenas na Parte 2) foram extraídos de [13] (publicada em 2018). Nesta última referência, consta também o tamanho populacional do Brasil do ano 2010, porém com um valor diferente do encontrado em [14]. Esta defasagem é comum, pois com o passar dos anos, são feitas recontagens do tamanho populacional de anos anteriores. Para que fosse mantido o dado de 2010 de [14], foram ajustados os tamanhos populacionais previstos para os anos de 2030 e 2050 em [13] através de um fator obtido pela razão entre os tamanhos populacionais de 2010 dados por [14] e [13], respectivamente. Ou seja, um fator f dado por:

$$f = \frac{190755799}{194890682} \simeq 0,97878. \tag{4.1}$$

As projeções ajustadas pelo fator encontrado em (4.1) para os anos de 2030 e 2050 encontram-se na Tabela 4.1.

Ano	Projeção oficial	Projeção ajustada (milhões)
2030	224868462	220,1
2050	232933276	228,0

Tabela 4.1: Projeções de 2030 e 2050 ajustadas por (4.1)

4.7 Parte 2 - Estimativas com informações de variação em diferentes fases

A Parte 2 da atividade deve ser feita depois de já realizada e recolhida a Parte 1. Deve-se seguir as mesmas orientações e etapas referentes à Parte 1 (Seção 4.6). Porém, o material a ser utilizado agora é o que se encontra nas páginas 115 a 117. Portanto, para a Parte 2, devem ser utilizadas as Tabelas A.3 e A.4 e as Figuras A.3 e A.4.

4.8 Parte 3 - Socialização das estimativas

Sugere-se que o professor obtenha fotos das quatro tabelas e quatro gráficos de cada aluno, dupla ou grupo para que sejam transferidos a um computador e apresentados a toda turma através de um projetor multimídia. Na ausência de um ou mais destes aparelhos, a socialização pode ser feita pela simples transferência mútua das folhas da atividade entre os alunos, duplas ou grupos; pela fixação das folhas em uma parede ou quadro onde possam ser visualizadas de perto; pelo compartilhamento das fotos das folhas da atividade pelos próprios alunos via aparelho celular; ou por outra forma que o professor achar interessante e possível.

4.8.1 Materiais

Professor:

- Tabelas e gráficos relativos às estimativas feitas pelos alunos
- Projetor multimídia (opcional)
- Computador (opcional)
- Câmera ou aparelho com câmera fotográfica (opcional)
- Fita adesiva (opcional)

Alunos:

- Aparelho com o qual se possa fazer compartilhamento de imagens (celular, por exemplo)

4.8.2 Tempo

Juntamente com as Partes 4 e 5, total de 1 aula de 50 minutos.

4.8.3 Preparação

1. Se o professor optar pela socialização via projetor multimídia, é preciso obter fotos das quatro tabelas e quatro gráficos de cada aluno, dupla ou grupo para que sejam transferidos a um computador. A forma como se dará a obtenção das fotos e a transferência das mesmas, fica a critério do professor. Uma sugestão: utilizar um aparelho celular para obtenção das fotos e um cabo de transferência de arquivos deste para um computador.
2. Se o professor optar pela simples transferência mútua das folhas da atividade entre os alunos, duplas ou grupos, não há muito com o que se preocupar em relação à preparação para tal fim.
3. Se o professor optar pela fixação das folhas em uma parede ou quadro, deve providenciar, por exemplo, fita adesiva para tal fim.
4. Se o professor optar pelo compartilhamento das fotos das folhas da atividade pelos próprios alunos via aparelho celular (já tendo orientado os alunos a obterem as imagens na realização das Partes 1 e 2 da atividade), sugere-se que pense em uma forma organizada para que isto seja feito.

4.8.4 Realização

A própria escolha da forma como se dará a socialização das estimativas acaba levando à forma como se dará sua realização.

Nesta etapa da atividade, sugere-se que o professor chame a atenção para os diferentes graus de variação em cada fase dos fenômenos que estão sendo tratados. É possível que alguns dos alunos já tenham notado essas diferenças desde o início da atividade ou, mais provavelmente, a partir da Parte 2. Vale a pena explorar também o possível aparecimento de curvas que remetem a funções afins e funções exponenciais, linhas poligonais, curvas com oscilações e curvas com características que remetem aos modelos de Verhulst, Gompertz e Montroll. Cabe talvez, neste momento, diferenciar as seguintes representações que os alunos já podem ter visto ou ainda verão ao longo de sua formação escolar e acadêmica:

- Gráfico de dispersão.
- Gráfico de variação da população se fossem considerados dados em pequenos intervalos de tempo (por exemplo, minuto a minuto, hora a hora, diário, semanal, etc.).
- Gráfico de variação da população se fossem considerados dados em intervalos de tempo não tão pequenos (por exemplo, mensal, anual, decenal, etc.).
- Ajuste de curvas.

4.9 Parte 4 - Exibição integral dos dados reais disponíveis

Nesta etapa, devem ser exibidos todos os dados disponíveis (segundo as fontes utilizadas) relativos aos dois fenômenos analisados nesta atividade. Para tal fim, foram disponibilizados, assim como para as Partes 1 e 2, tabelas e gráficos, os quais se encontram nas páginas 118 a 120.

4.9.1 Materiais

Professor:

- Projetor multimídia (opcional)
- Computador (opcional)
- Páginas 118 a 120 em arquivo para exibição em projetor multimídia ou compartilhamento via internet (opcional)

- Folhas com os dados reais impressos (páginas 118 a 120) (opcional)

Alunos:

- Aparelho (celular, por exemplo) com acesso à internet (opcional)
- Computadores com acesso à internet (opcional)
- Computadores sem acesso à internet (opcional)

4.9.2 Tempo

Juntamente com a Parte 3, total de 1 aula de 50 minutos.

4.9.3 Preparação

A depender da escolha feita pelo professor sobre a forma como será feita esta exibição (projeto multimídia, acesso dos alunos ao computador ou celular, folhas impressas, etc.), analogamente à Parte 3, ele deve providenciar o que for necessário para tal fim. Uma estratégia que, a princípio, não teria sido utilizada nas partes anteriores e que pode ser utilizada nesta parte é a disponibilização de material (tabelas e gráficos) para consulta via internet pelos alunos. Isto pode ser feito em uma página da *Web* criada pelo professor ou com auxílio do *Google Drive*.

4.9.4 Realização

A própria escolha da forma como se dará a exibição integral dos dados reais disponíveis acaba levando à forma como se dará sua realização.

Nesta etapa da atividade, assim como na etapa de socialização (Seção 4.8), sugere-se que o professor chame a atenção para os diferentes graus de variação em cada fase dos fenômenos que estão sendo tratados. Sugere-se também que as páginas que contêm as Figuras A.5 e A.6 sejam rotacionadas em um ângulo de 90° no sentido horário para melhor visualização.

Conforme se observa na Figura A.5, há diminuição do tamanho populacional se comparados os dados dos anos de 2050 e 2060 (pelas projeções em [13], essa diminuição ocorrerá entre os anos de 2047 e 2048). Essa diminuição, segundo [6], está prevista principalmente devido à diminuição da taxa de fecundidade, a qual vem tendo um impacto mais significativo do que as taxas de mortalidade e de migração. Ainda segundo [6], são recomendadas novas projeções de tempos em tempos, levando-se em conta a atualização de dados do tamanho populacional e de fatores que o impactam.

4.10 Parte 5 - Exemplos de modelos de crescimento

Deve-se seguir praticamente as mesmas orientações e etapas referentes à Parte 4 (Seção 4.9). Porém, o material referente à Parte 5 encontra-se nas páginas 121 a 124. Nestas, encontram-se as curvas obtidas por ajuste linear no capítulo de aplicação deste trabalho (Capítulo 3), com dados referentes ao crescimento populacional brasileiro de 1940 a 2010, segundo cada um dos quatro modelos tratados: Malthus, Verhulst, Gompertz e Montroll.

Entre os tópicos que o professor pode abordar durante a exibição do material referente à Parte 5 estão:

- Uma ideia do que é ajuste de curvas (em particular, ajuste linear).
- Características de cada modelo, bem como comparações entre eles, comentando (se concordar que houve) as evoluções que ocorreram de um modelo para outro.
- Formas como ocorre a variação populacional em cada modelo e em diferentes fases de cada modelo.
- Se achar propício para a turma à qual está aplicando a atividade, mostrar como aparecem estas diferentes formas de variação nas equações diferenciais relativas à cada modelo (preferencialmente, utilizando um linguajar acessível em relação à notação e conceitos mais formais referentes a estas equações).

5 Considerações finais

Com a leitura deste trabalho, espera-se que, de um modelo para outro, o leitor tenha notado diferenças que possam ser consideradas como evoluções. Primeiramente, em relação a consideração, por parte de alguns dos modelos, da diminuição da taxa de variação do crescimento conforme a população aumenta. Depois, em relação à ordenada do ponto de inflexão do fenômeno. Espera-se que, neste último quesito, tenha-se notado que os modelos de Verhulst e Gompertz são indicados para casos em que esta ordenada seja igual ou próxima dos valores $K/2$ e K/e , respectivamente; e que o modelo de Montroll, além de englobar estes dois casos específicos, é indicado também para casos em que esta ordenada assuma qualquer valor próximo ou dentro do intervalo $[K/e, K]$.

O modelo malthusiano também tem sua importância. Primeiramente, por ter sido precursor dos demais modelos de crescimento. Além disso, por ser satisfatoriamente aplicável a determinados intervalos de acontecimento dos fenômenos citados ao longo do texto.

Nota-se, no decorrer deste trabalho, a razoável gama de métodos para obtenção de parâmetros dos modelos tratados. Além destes métodos, é muito provável que existam outros métodos propostos e outros para ainda o ser. Espera-se que as diversas observações acerca do uso de cada um destes métodos, se não trouxeram uma efetiva precisão em tratamento de dados, que ajudem a servir de base para um maior aprofundamento nestes e/ou pela busca de métodos alternativos mais precisos.

No capítulo de aplicação (Capítulo 3), buscou-se mostrar, com uma grande quantidade de detalhes, o processo de obtenção de parâmetros através dos métodos abordados no Capítulo 2. Constam, neste capítulo (3), na maior parte dos casos, as tabelas com valores utilizados no decorrer do processo de ajuste linear. Acredita-se que, para quem esteja elaborando planilhas com as fórmulas para este tipo de ajuste, ter um exemplo disponível para servir como parâmetro é algo de grande valia.

Com as cinco partes da atividade proposta para aplicação no Ensino Médio (Capítulo 4), espera-se que os alunos, realizando tarefas que investiguem seu conhecimento prévio do tema e que promovam análise de dados, troca ideias e debates, consigam ter uma visão tanto panorâmica quanto local dos fenômenos de crescimento que podem ser satisfatoriamente modelados por um ou mais dos quatro modelos tratados neste trabalho.

Um item que pode ser considerado em dívida neste trabalho é um exemplo de aplicação em que a ordenada P_m do ponto de inflexão de um certo fenômeno esteja um pouco distante de $K/2$ e K/e , com $K/2 < P_m < K/e$, para que ficasse clara uma melhor modelagem pelo modelo de Montroll em relação aos modelos logístico e de Gompertz nesta situação.

Notou-se, através da observação de exemplos nas referências utilizadas, e mesmo confrontando os resultados do exemplo de aplicação deste trabalho (Capítulo 3) com projeções feitas pelo IBGE (veja [13]), que é preciso uma pesquisa mais ampla e profunda acerca de métodos para obtenção do valor assintótico dos fenômenos de crescimento, visto que os métodos já existentes tem trazido valores que muitas vezes estão um pouco distantes daqueles que com o passar do tempo vêm efetivamente a se concretizar. Entende-se que estes métodos devem passar por um aprimoramento em que se busque confluir cada vez mais fatores que se entendam como influenciadores do que se conhece como *capacidade suporte*. Mas, isso ainda passa por questões como: qual é o grau de interferência destes na capacidade suporte de um meio? Como dimensionar as interferências que cada um dos fatores tem sobre os outros? Supondo que a capacidade suporte não seja fixa (como indicam um ou mais dos textos citados na Seção 2.2.1) em determinados fenômenos, é possível modelá-la? Será que para certos fenômenos de crescimento (como o crescimento populacional humano de um país), é impossível obter um modelo que possa ser satisfatoriamente confiável para projeções quantitativas futuras? Além de outras questões, como as citadas e as não citadas neste trabalho, que constam em [16], [18] e [20].

Referências

- [1] AN Essay on the Principle of Population As It Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr. Goodwin, M. Condorcet and Other Writers. London. J. Johnson in St Paul's Church-yard, 1798.
- [2] BARROZO, S.; BIZELLI, M. H. S. S. *Um curso de cálculo (licenciatura)*. Araraquara, 2015. 2 v. Apostila utilizada como material complementar na disciplina de *Modelagem Matemática* do programa de pós-graduação *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT* da Unesp de Rio Claro/SP, 2017.
- [3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- [4] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA JR, W. C. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988.
- [5] BOYCE, W. E.; DIPRIMA R.C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [6] CAMARANO, A. A.; KANSO, S. *Perspectivas de crescimento para a população brasileira: velhos e novos resultados*. Rio de Janeiro: Ipea, 2009 (Texto para discussão, n. 1426).
- [7] DOMINGUES, J. S. Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento. *Biomatemática*, Campinas, v. 21, p. 103-112, 2011.
- [8] EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biology. Classics In Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 2005, v. 46.
- [9] ENCINAS, J. M. I.; SILVA, G. F.; PINTO, J. R. R. Idade e crescimento das árvores. *Comunicações técnicas florestais*, Brasília: Universidade de Brasília. Departamento de Engenharia Florestal, v. 7, nº 1, 2005.
- [10] GOEL, N. S.; MAITRA, S. C.; MONTROLL, E. W. On the Volterra and Other Nonlinear Models of Interacting Populations. *Reviews of Modern Physics*, v. 43, p. 231-276, 1971.
- [11] GOMPERTZ, B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 115, p. 513-583, 1825.

- [12] GOMPERTZ FUNCTION. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Gompertz_function&oldid=871806748>. Acesso em: 19 out. 2018.
- [13] IBGE. *Projeções da população - Tabelas 2018*. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?=&t=resultados>>. Acesso em: 19 set. 2019.
- [14] IBGE. *Sinopse do Censo Demográfico 2010*. Disponível em: <<https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=4&uf=00>>. Acesso em: 07 mar. 2019.
- [15] LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 2 v.
- [16] MEYER, P. S.; AUSUBEL, J.H. Carrying Capacity: A Model with Logistically Varying Limits. *Technological Forecasting and Social Change*, v. 61, n° 3, p. 209-214, fev. 1999.
- [17] PIERRE FRANÇOIS VERHULST. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Pierre_Fran%C3%A7ois_Verhulst&oldid=53297928>. Acesso em: 27 set. 2018.
- [18] PRICE, D. Carrying Capacity Reconsidered. *Population and Environment: A Journal of Interdisciplinary Studies*, v. 21, n° 1, p. 5-26, set. 1999.
- [19] PRODAN, M. *Holzmesslehre*. Frankfurt: Sauerlaender's Verlag, 1965.
- [20] SEIDL, I.; TISDELL, C.A. Carrying capacity reconsidered: from Malthus' population theory to cultural carrying capacity. *Ecological Economics*, v. 31, p. 395-408, mai. 1999.
- [21] THE ACADEMIC FAMILY TREE. *Elliot Waters Montroll - Publications*. Disponível em: <<https://academictree.org/physics/publications.php?pid=65268&searchstring=&showfilter=all>>. Acesso em: 10 nov. 2018.
- [22] THOMAS MALTHUS. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Thomas_Malthus&oldid=53651286>. Acesso em: 20 set. 2018.
- [23] VERHULST, P. F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, Ghent, v. 10, p. 113-121, 1838.
- [24] WEISS, G. H. Elliot Waters Montroll. *Biographical Memoir*. Washington D.C.: National Academy of Sciences, 1994.

A Material para aplicação da atividade proposta

Nas próximas páginas, encontra-se o material didático preparado para aplicação da atividade proposta no Capítulo 4. A correspondência destas com cada parte da atividade é a seguinte:

- Parte 1 (Seção 4.6): páginas 112 a 114.
- Parte 2 (Seção 4.7): páginas 115 a 117.
- Parte 3 (Seção 4.8): material já utilizado.
- Parte 4 (Seção 4.9): páginas 118 a 120.
- Parte 5 (Seção 4.10): páginas 121 a 124.



ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Data: _____

Turma: _____

Grupo: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Parte 1

Ponto	Ano	População (milhões)
P_1	1870	9,5*
P_2	1890	
P_3	1910	
P_4	1930	
P_5	1950	
P_6	1970	
P_7	1990	
P_8	2010	
P_9	2030	220,1**
P_{10}	2050	

Tabela A.1: Estimativas para a população brasileira (Parte 1)

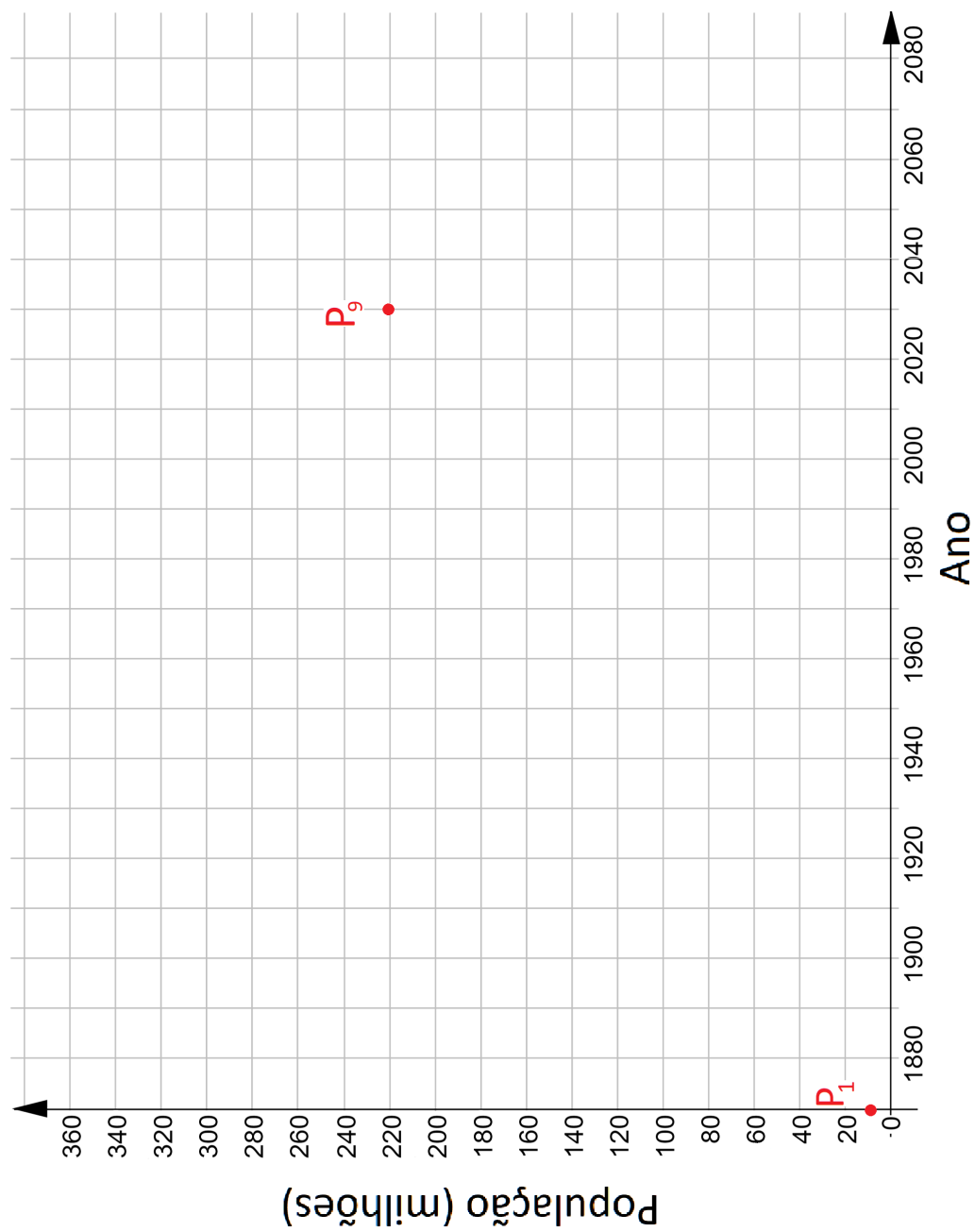
Ponto	Idade (anos)	Altura (metros)
A_1	0	0,0
A_2	10	
A_3	20	
A_4	30	
A_5	40	
A_6	50	
A_7	60	
A_8	70	
A_9	80	
A_{10}	90	
A_{11}	100	32,1

Tabela A.2: Estimativas para a altura de pinho-alemão (Parte 1)

*Dado ajustado para que os anos utilizados na tabela fossem todos de início de década. Dado oficial mais próximo conforme histórico do IBGE: 9,9 milhões (em 1872).

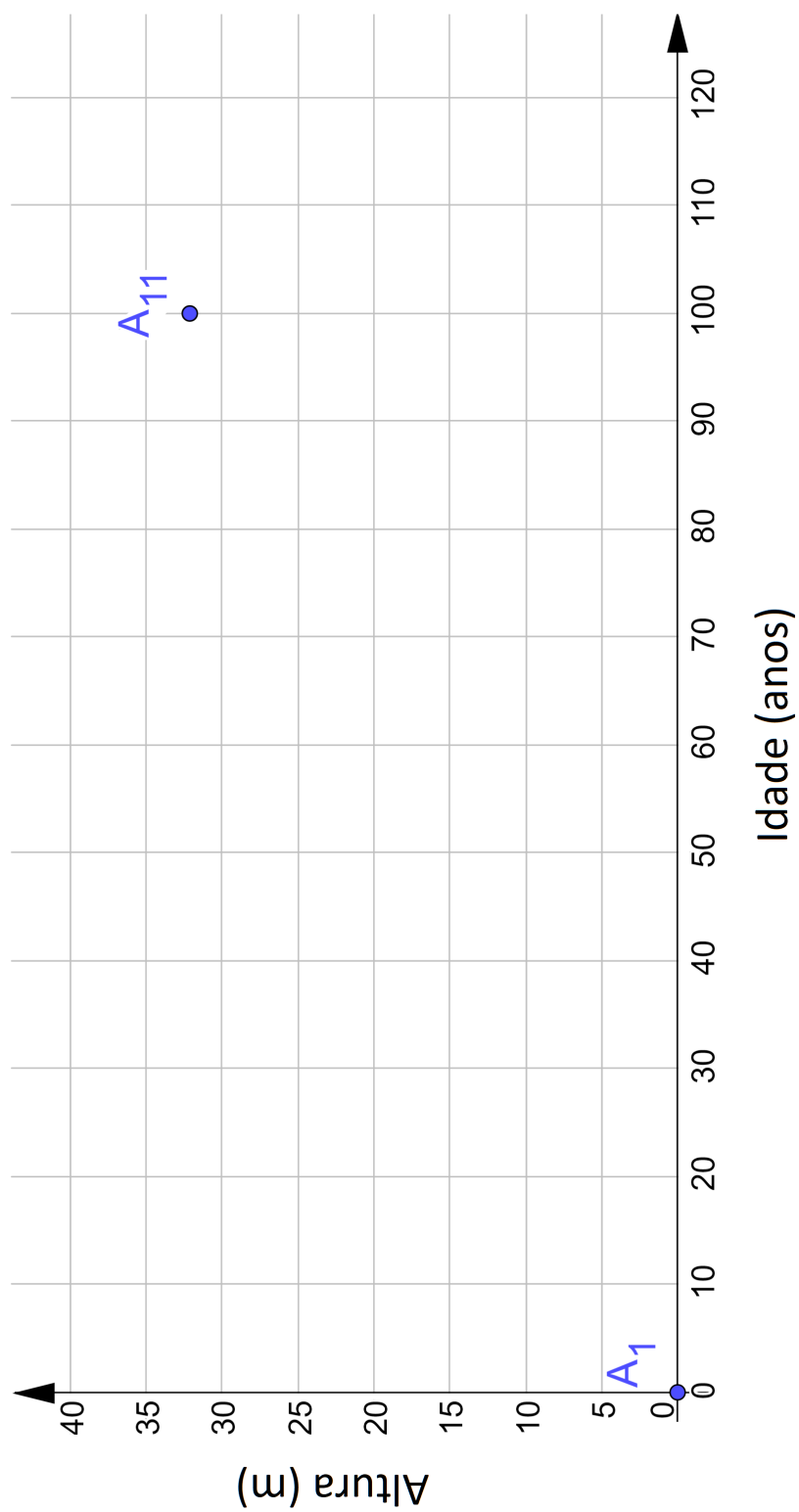
**Dado ajustado devido à diferença (normal, conforme procedimentos de recontagem) no tamanho populacional publicado no ano do censo de 2010 e nas projeções publicadas no ano de 2018 (na qual, além das projeções, constam também dados anuais a partir do ano de 2010), ambos pelo IBGE.

Figura A.1: Estimativa de crescimento para a população brasileira (Parte 1) - N° do grupo ou nome(s): _____



a

Figura A.2: Estimativa de crescimento para a altura de pinho-alemão (Parte 1) - N° do grupo ou nome(s): _____





ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Data: _____

Turma: _____

Grupo: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Nome: _____ N°: _____

Parte 2

Ponto	Ano	População (milhões)
P_1	1870	9,5*
P_2	1890	14,3
P_3	1910	
P_4	1930	
P_5	1950	51,9
P_6	1970	94,5
P_7	1990	
P_8	2010	
P_9	2030	220,1**
P_{10}	2050	228,0**

Tabela A.3: Estimativas para a população brasileira (Parte 2)

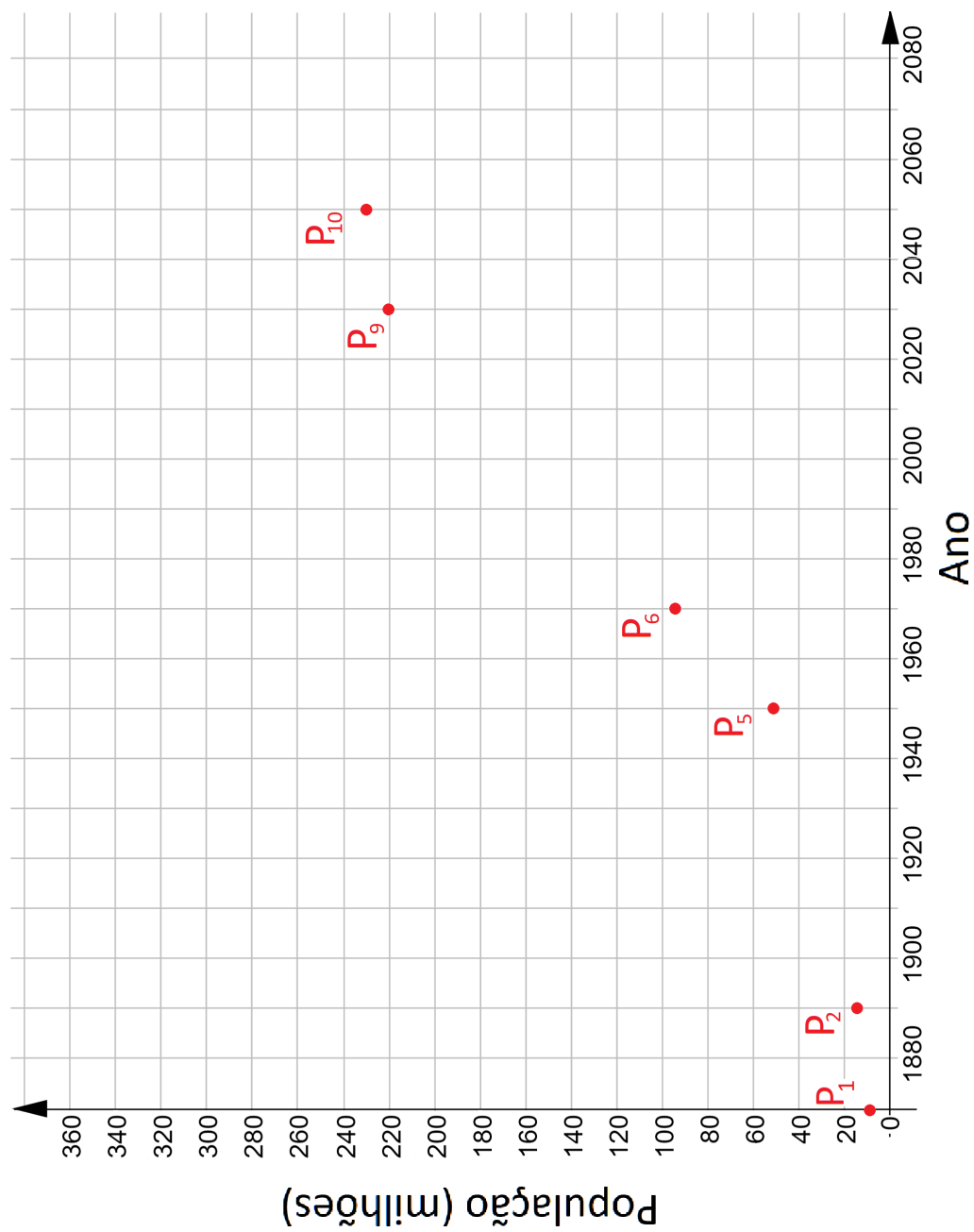
Ponto	Idade (anos)	Altura (metros)
A_1	0	0,0
A_2	10	2,0
A_3	20	
A_4	30	
A_5	40	15,6
A_6	50	20,3
A_7	60	
A_8	70	
A_9	80	
A_{10}	90	30,5
A_{11}	100	32,1

Tabela A.4: Estimativas para a altura de pinho-alemão (Parte 2)

*Dado ajustado para que os anos utilizados na tabela fossem todos de início de década. Dado oficial mais próximo conforme histórico do IBGE: 9,9 milhões (em 1872).

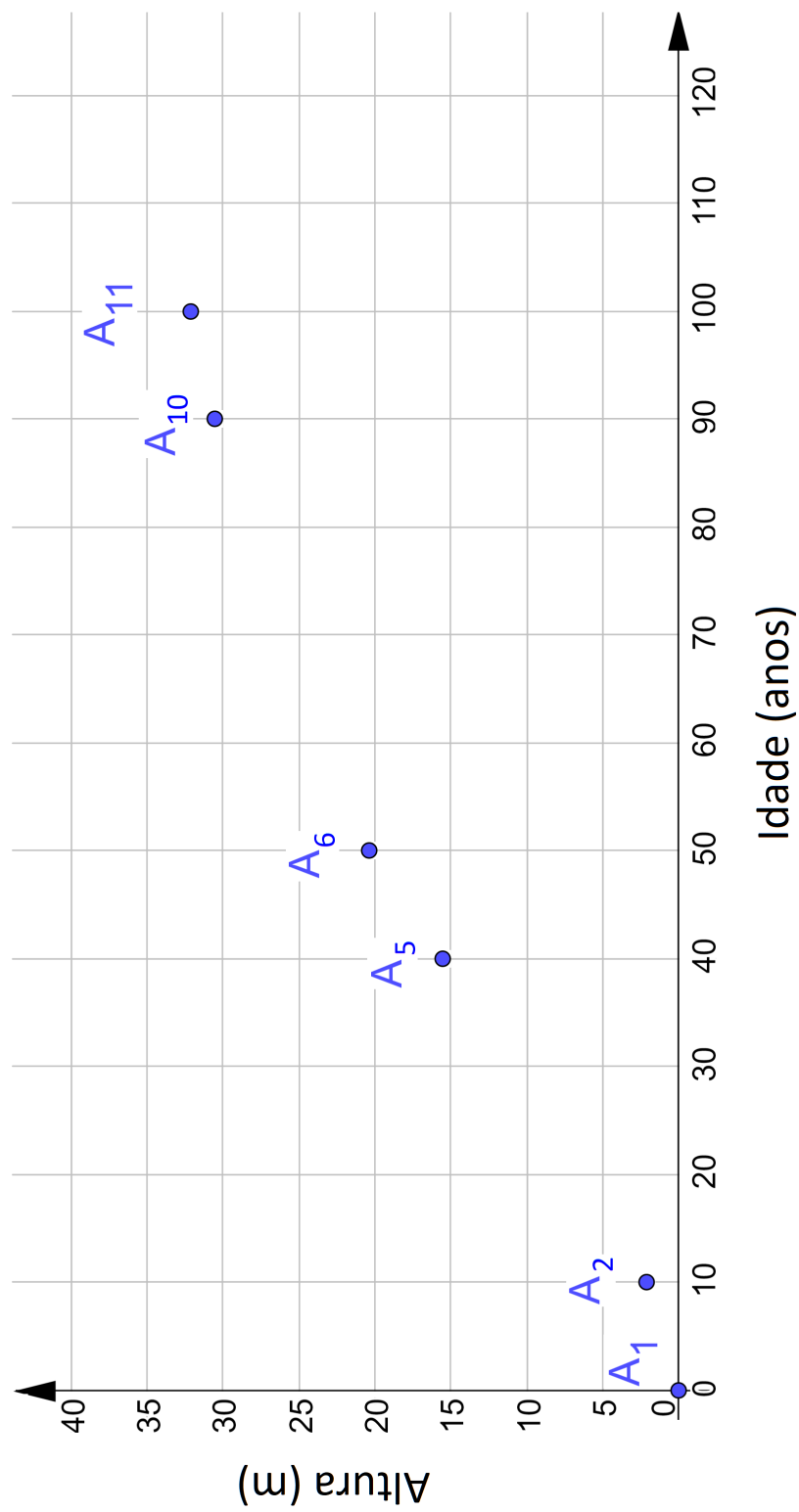
**Dado ajustado devido à diferença (normal, conforme procedimentos de recontagem) no tamanho populacional publicado no ano do censo de 2010 e nas projeções publicadas no ano de 2018 (na qual, além das projeções, constam também dados anuais a partir do ano de 2010), ambos pelo IBGE.

Figura A.3: Estimativa de crescimento para a população brasileira (Parte 2) - N° do grupo ou nome(s): _____



a

Figura A.4: Estimativa de crescimento para a altura de pinho-alemão (Parte 2) - N° do grupo ou nome(s): _____





ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Parte 4

Ponto	Ano	População (milhões)
P_1	1872	9,9
P_2	1890	14,3
P_3	1900	17,4
P_4	1920	30,6
P_5	1940	41,2
P_6	1950	51,9
P_7	1960	71,0
P_8	1970	94,5
P_9	1980	121,2
P_{10}	1991	146,9
P_{11}	2000	169,6
P_{12}	2010	190,8
P_{13}	2020	207,3*
P_{14}	2030	220,1*
P_{15}	2040	227,0*
P_{16}	2050	228,0*
P_{17}	2060	223,4*

Tabela A.5: População brasileira - censos até 2010 e projeções até 2060

Ponto	Idade (anos)	Altura (metros)
A_1	0	0,0
A_2	10	2,0
A_3	20	6,3
A_4	30	10,9
A_5	40	15,6
A_6	50	20,3
A_7	60	23,6
A_8	70	26,3
A_9	80	29,3
A_{10}	90	30,5
A_{11}	100	32,1
A_{12}	103	32,4

Tabela A.6: Altura de pinho-alemão (0 a 103 anos)

*Dado ajustado devido à diferença (normal, conforme procedimentos de recontagem) no tamanho populacional publicado no ano do censo de 2010 e nas projeções publicadas no ano de 2018 (na qual, além das projeções, constam também dados anuais a partir do ano de 2010), ambos pelo IBGE.

a

Figura A.5: Crescimento da população brasileira - censos até 2010 e projeções até 2060 (Parte 4)

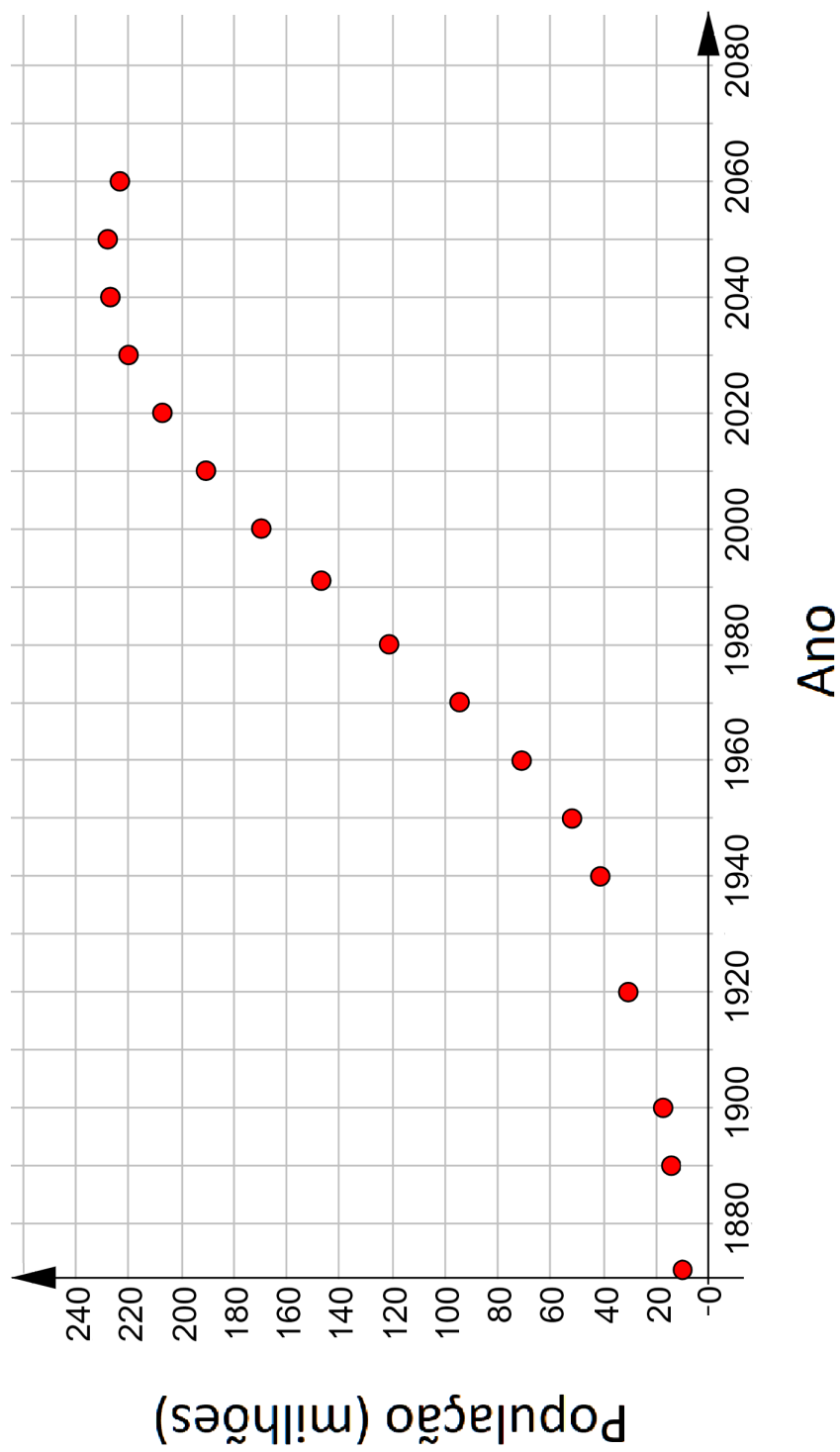
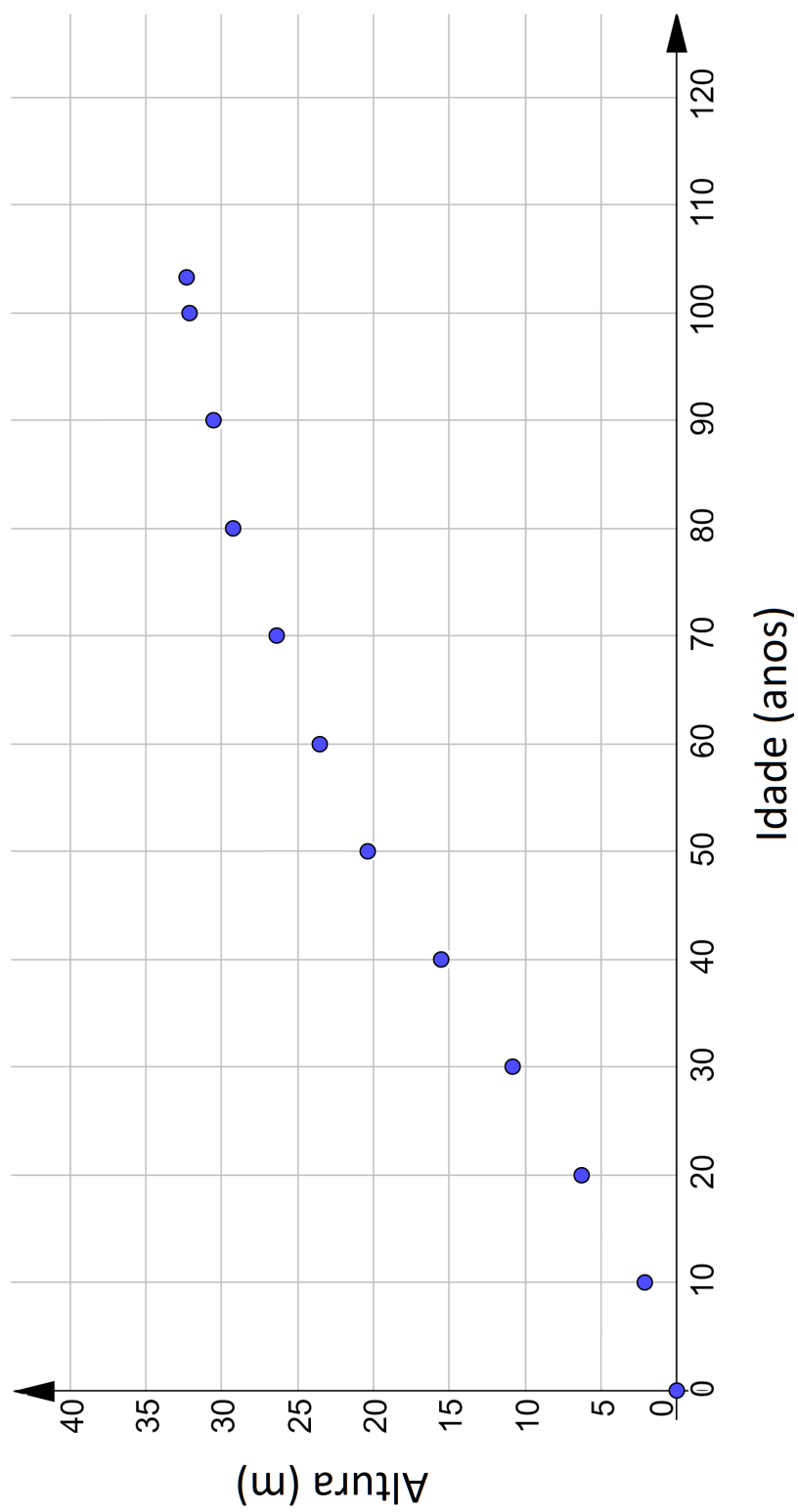


Figura A.6: Crescimento em altura de pinho-alemão (Parte 4)





ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Parte 5 - Modelo de Malthus

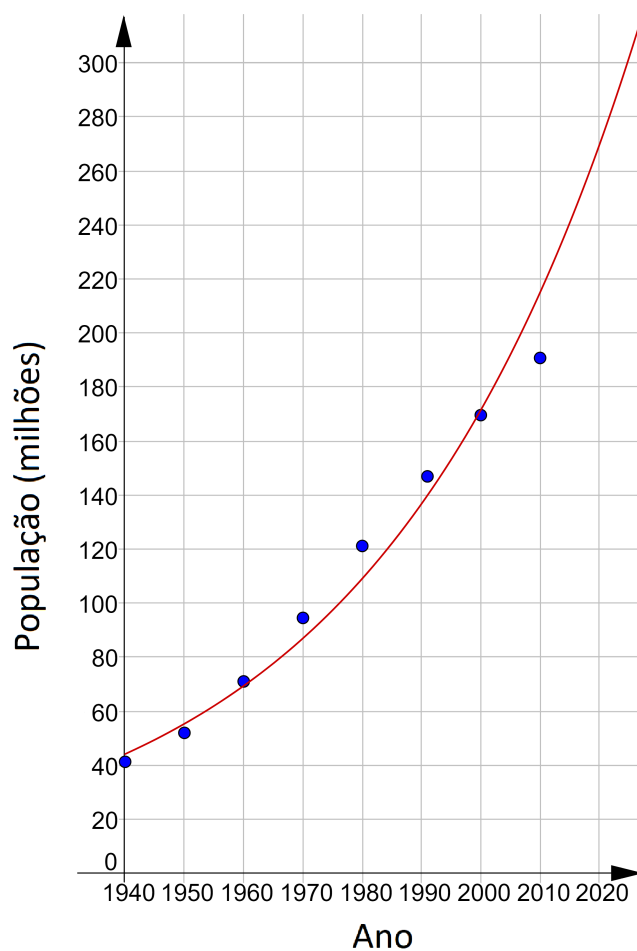


Figura A.7: Ajuste de curva - Malthus

Equação diferencial	Solução	Modelo
$\frac{dP}{dt} = rP$	$P(t) = P_0 e^{rt}$	$P(t) \simeq 44105954e^{0,02263t}$

Tabela A.7: Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Malthus



ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Parte 5 - Modelo de Verhulst (logístico)

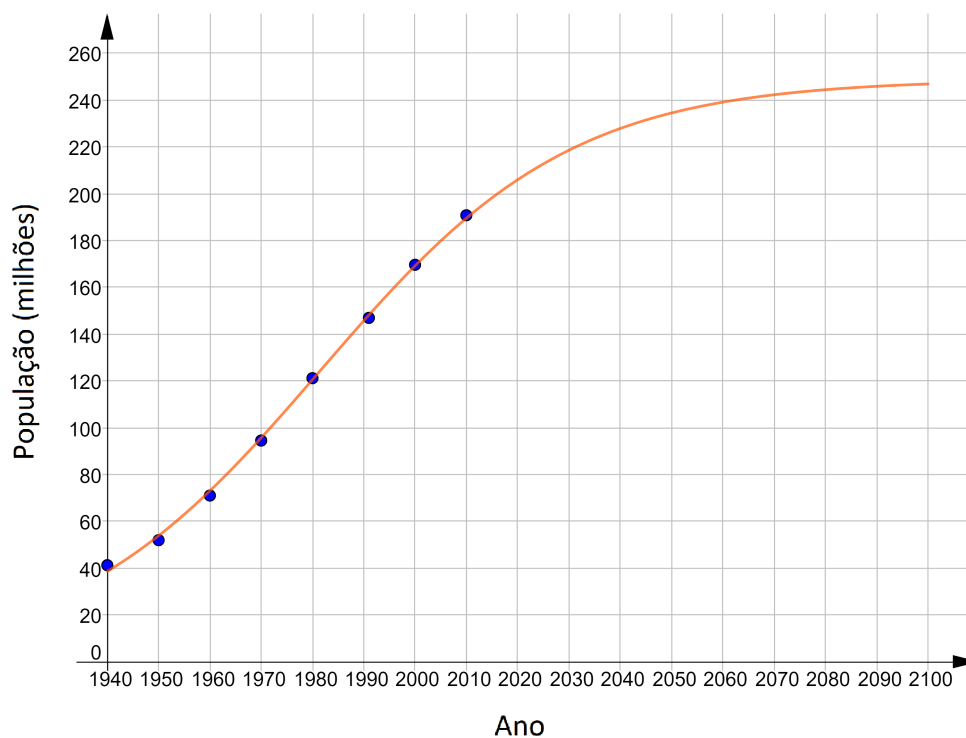


Figura A.8: Ajuste de curva - Verhulst

Equação diferencial	Solução	Modelo
$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right)$	$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{-rt}}$	$P(t) \simeq \frac{248807079}{1 + 5,44475e^{-0,04080t}}$

Tabela A.8: Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Verhulst



ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Parte 5 - Modelo de Gompertz

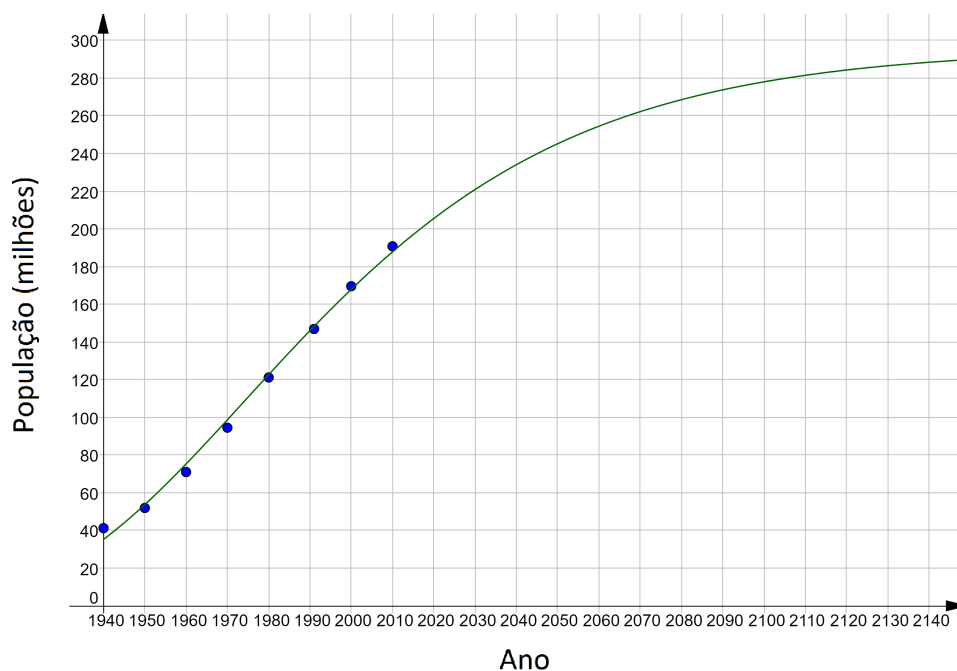


Figura A.9: Ajuste de curva - Gompertz

Equação diferencial	Solução	Modelo
$\frac{dP}{dt} = P(r - \mu \ln P)$	$P(t) = K \left(\frac{P_0}{K} \right) e^{-\mu t}$	$P(t) \simeq 295976615 \left(\frac{35270874}{295976615} \right) e^{-0,02204t}$

Tabela A.9: Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Gompertz



ATIVIDADE DE MATEMÁTICA
Modelos de
crescimento populacional

Parte 5 - Modelo de Montroll

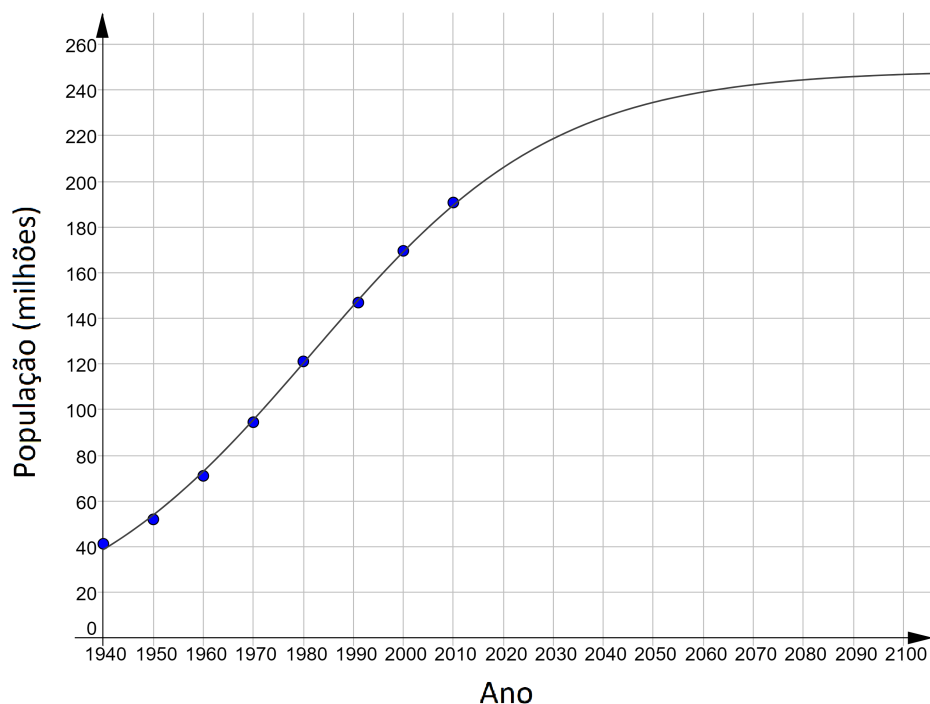


Figura A.10: Ajuste de curva - Montroll

Equação diferencial	Solução	Modelo
$\frac{dP}{dt} = rP \left[1 - \left(\frac{P}{K} \right)^\lambda \right]$	$P(t) = \frac{K}{(1 + ce^{-\lambda rt})^{\frac{1}{\lambda}}}$	$P(t) \simeq \frac{248807079}{(1 + 5,71875e^{-0,04115t})^{\frac{1}{1,02367}}}$

Tabela A.10: Caracterização básica e modelo via ajuste de curva - Montroll