UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Bruno Sirtoli

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Vitória
2019

Bruno Sirtoli

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Doutor Moacir Rosado Filho

Vitória
2019

Bruno Sirtoli

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Doutor Moacir Rosado Filho

Trabalho aprovado. Vitória, 13 de dezembro de 2019:

Prof. Doutor Moacir Rosado Filho (UFES- Orientador)

Prof. Doutor Florêncio F. Guimarães Filho (Examinador Interno)

Profª. Doutora Fabiana Garcia Papani (Examinador Externo)

Vitória
2019

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado força, saúde e proteção para conciliar as horas em sala como docente, nas escolas Narceu de Paiva Filho e no Centro Educacional de Aracruz, com as horas semanais na UFES como discente durante os dois anos do mestrado.

Aos meus pais, José Sirtoli e Helena Merces Locateli Sirtoli por todas as vezes que, buscaram, através do exemplo e incentivo mostrar que a educação e o conhecimentos são os melhores caminhos para sermos ferramentas de transformação neste mundo.

A minha esposa Karla Medani Demuner, que durante os dois anos de curso e também durante a produção desta dissertação sempre me apoiou e cobrou que eu buscasse sempre o meu melhor, mesmo que por muitas vezes para isso eu a tenha deixando em segundo plano para estudar e escrever. Sou muito grato por Deus ter te colocado em minha vida.

Ao professor e orientador Moacir Rosado Filho, por todas as dicas e paciência durante o processo de construção desta dissertação.

Ao demais professores do Mestrado PROFMAT Dr. Florêncio, Dr. Valmecir, Dr. Domingos, Dra. Magda e Dra. Rosa, por todo o conhecimento partilhado, e por toda a força dada a turma nos momentos de desânimo e cansaço durante o curso.

A toda a turma do PROFMAT 2015 (Andressa, Chargles, Mary Jane, Nailson, Mônica, Camila, Núbia, Roberto, Adolfo Midon, Muriel, Marcelo Peres, Marcelo, Antônio, Ricardo, Isaque, Anne, Fábio, Eduardo e Douglas), por todas as horas de aula e compartilhamento de informações, por todas as resenhas sobre futebol, Star Wars e filmes nos intervalos das aulas, por todos os almoços no RU. Deixo um agradecimento especial aos amigos Andressa, Roberto e Muriel por todas as caronas e conversas entre Ibiraçu e Vitória e também ao grande amigo Chargles, que sem dúvida durante os dois anos de curso foi a pessoa que mais vezes me deu apoio a seguir no curso, sempre com uma palavra amiga e uma visão otimista de tudo.

A escola Narceu de Paiva Filho e ao Centro Educacional de Aracruz que se organizaram e me permitiram ter um dia livre para realizar as aulas presenciais.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é fornecer um caminho para que o estudo da Geometria Espacial, em sala de aula, seja realizado de maneira mais dinâmica e atraente. Dessa forma, esta pesquisa será fundamentada em uma revisão teórica dos aspectos relacionados a geometria e ao software GeoGebra, escolhido devido às suas características didáticas. Tal revisão servirá de base à apresentação de demonstrações e construções tridimensionais, que poderão ser utilizadas em sala de aula por professores e alunos, a fim de observar sólidos como poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas; buscando assim criar, sobretudo no professor, a vontade de buscar novas construções e significados à aula de geometria, tornando a aula mais atual por meio do uso de ferramentas tecnológicas.

Palavras Chave: GeoGebra, Geometria Espacial, Plano de Aula.

ABSTRACT

The main objective of this work is to provide a way for the study of Space Geometry in the classroom to be performed in a more dynamic and attractive way. In this way, the same will be based on a theoretical revision of the aspects related to geometry and GeoGebra software, which was chosen due to its didactic characteristics. This revision will serve as a basis for the presentation of demonstrations and three-dimensional constructions that can be used in the classroom by teachers and students in order to observe solids such as polyhedra, prisms, pyramids, cylinders, cones and spheres. to look for new constructions to the meanings for the geometry class, making the class more current through the use of technological tools.

Keywords: GeoGebra, Spatial Geometry, Class Plan.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Rememorando meu trajeto durante minha formação estudantil, sobretudo o período do ensino médio cursado na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Narceu de Paiva Filho” percebi que meus professores de matemática raramente apresentavam algum tipo de demonstração ou justificativa que validasse as fórmulas as quais aprenderíamos e utilizaríamos na resolução de problemas.

Em um artigo apresentado na Revista EIXO o professor Per Christian Braathen caracteriza tal atitude como uma Aprendizagem Mecânica, uma vez que:

> A Aprendizagem Mecânica ocorre com a incorporação de um conhecimento novo de forma arbitrária, ou seja, o aluno precisa aprender sem entender do que se trata ou compreender o significado do porquê.
> Essa aprendizagem também acontece de maneira literal, o aluno aprende exatamente como foi falado ou escrito, sem margem para uma interpretação própria. A aprendizagem acontece como produto da ausência de conhecimento prévio relacionado e relevante ao novo conhecimento a ser aprendido. (BRAATHEN, 2012).

Essa dificuldade tornava-se ainda mais evidente quando o assunto era Geometria Espacial. Imagino como hipótese a falta de habilidade do professor em formular os desenhos apropriados, ou o fato de suas formações iniciais terem sido pautadas em modelos mecanicistas, ou mesmo pelo tempo para apresentar o conteúdo, que como narra (SANTOS; NACARATO, 2014), sofreu abandono histórico nos anos 70 e 80 sob influência do Movimento Matemática Moderna, no qual os conteúdos de Geometria foram alocados nos capítulos finais e a abordagem passou a ser principalmente na linguagem, e não na compreensão dos conceitos.

O ensino da Geometria Espacial e suas demonstrações são importantes para a formação do educando, tal relevância é citada por exemplo pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM*)*, os quais reforçam que a Matemática não deve ter unicamente caráter formativo e instrumental, deve ser observada como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno visualize que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a prerrogativa de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que são necessários para validar intuições e significar às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p. 40)

O estudo da Geometria deveria ser ponto central durante toda a formação de um aluno na Matemática da Educação Básica. Por exemplo, (BRASIL, 2006) menciona que a Geometria deve instruir o aluno não apenas para lidar com problemas do dia a dia, como "contemplar a faceta da Matemática que aborda os teoremas e argumentações dedutivas". O PCNEM revela ainda que o ensino de Geometria no ensino fundamental está parametrizado para permitir uma reflexão inicial dos alunos por meio de deduções informais e estudos a fim de reforçar o raciocínio lógico, para que quando no ensino médio haja um aprofundamento das ideias levando o aluno a analisar postulados e teoremas por meio de uma sistemática dedutiva e com demonstrações para fatos que lhes são habituais. (BRASIL, 2004, p.123)

Uma maneira de minimizar as dificuldades dos professores na apresentação dos conteúdos é o uso da tecnologia. No contexto social atual, é impensável deixar fora da sala de aula as discussões e aplicações dos diversos recursos tecnológicos disponíveis.

Santos M. (2017, p.43) diz que:

> [...] o desafio para o professor é ensinar com tecnologia, ou seja, empregar uma sequência didática em que o computador, através de um software educativo, seja utilizado para desenvolver um conteúdo. É o computador como parte do planejamento do professor, não sendo utilizado para fins ilustrativos, que pelas suas características (som, imagens coloridas, animações, ...) acaba causando uma mera impressão visual, porém, sem resultados significativos em termos de aprendizagem. Nessa perspectiva, a informática adquire um importante significado no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Dentro desse panorama, os softwares de geometria dinâmica podem se tornar um aliado de grande valor ao ensino da geometria espacial, pois permitem ao aluno manipular tridimensionalmente objetos que são estáticos em livros ou em desenhos feitos no quadro. De acordo com Giraldo (2012, p. 114), as ferramentas de geometria dinâmica possibilitam a melhor visualização de construções, propriedades e relações estabelecidas, uma vez que os objetos podem ser movimentados dinamicamente, permitindo múltiplos olhares sobre a questão em análise.

Dentre os diversos softwares disponíveis, Souza (2014) indica o uso do GeoGebra como ferramenta para o estudo da Geometria Espacial, com o intuito de diminuir as dificuldades de visualização geométrica, incentivando a construção de figuras presentes no livro didático. A autora afirma ainda que a simplicidade dos comandos básicos incentiva os alunos a uma maior aproximação ao conteúdo, já que se veem motivados a buscar novas construções. Outro aspecto relevante em relação ao GeoGebra é o fato de ser disponibilizado gratuitamente na internet, o que possibilita sua utilização por parte dos educandos tanto em suas residências quanto nos laboratórios de informática das escolas onde estudam.

Perante a percepção de que existe uma pequena aplicação no uso de tecnologias para o ensino de matemática, seja por falta de infraestrutura nas escolas ou mesmo por um processo de formação e aperfeiçoamento deficitário, este trabalho visa contribuir com atividades que facilitem as práticas diárias do professor em sala de aula, especialmente no ensino médio, propondo construções de sólidos geométricos, bem como com a visualização e compreensão de suas definições e elementos básicos por meio do GeoGebra.

Para tanto, o presente estudo consiste em 9 capítulos. Além da Introdução, o Capítulo 2 trará um histórico resumido sobre a construção histórica dos conhecimentos em geometria espacial, além de contextualizar histórica e socialmente o ensino da geometria no Brasil. No Capítulo 3 será feito um breve relato sobre o software GeoGebra, além da apresentação de suas ferramentas básicas. O Capítulo 4 apresentará os poliedros e suas características, e algumas de suas propriedades. Os capítulos 5, 6 e 7 abordarão os prismas e pirâmides, os cones e cilindros e esferas, respectivamente. No Capítulo 8, estão apresentados planos de aula usando o GeoGebra por meio de atividades de construções de sólidos relacionados aos capítulos 4, 5, 6 e 7. Tais construções estão disponíveis na internet e seus protocolos de construção constam nos Anexos. O capítulo 9 será formado por listas de exercícios modelo ENEM separadas por tema. Vale ressaltar que as resoluções das listas estarão nos Apêndices de 1 a 7.

2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA

2.1 Geometria pelo Mundo

Indicar com precisão o nascimento da geometria não é uma tarefa simples, haja vista que seu surgimento precede até mesmo a escrita. Ao que tudo indica, os conhecimentos geométricos apresentaram seus primeiros passos em areias egípcias, por meio da resolução de problemas práticos da comunidade que necessitava demarcar terras e construir moradias adequadas as suas necessidades, ou mesmo para a construção de grandes obras como as pirâmides do Egito. (PAVANELLO, 1989). Somos levados a crer em tais fatos devido às inúmeras evidências encontradas pelo homem ao longo dos anos, como diversos papiros, dos quais podem-se citar como mais relevantes o Rhind, também conhecido como Ahmes, que data de 1650 a.C. e o papiro Moscou, datado de 1850 a.C.

O papiro Rhind foi encontrado por volta do ano de 1850, ao que tudo indica, nos destroços de uma pequena construção nos arredores do templo de Ramssés II em Tebas. Foi comprado e levado para Luxor por Alexander Henry Rhind, um antiquário francês (BOYER, 1996). Com o falecimento de Rhind, o papiro foi adquirido pelo Museu Britânico em 1865. O papiro intitula-se “Instruções para conhecer todas as coisas secretas”, atualmente é constituído por 14 folhas de papiros com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura totalizando 513 cm de comprimento, contudo, há indícios de que o original continha 20 folhas. Também é conhecido como papiro Ahmose ou papiro Ahmes em virtude de ter sido transcrito ao que tudo indica em 1650 a.C. pelo escriba Ahmose. Esse documento contém 87 problemas, assim como suas soluções e se trata, provavelmente, de um registro dos conhecimentos de Imhotep, conceituado físico e arquiteto da época do faraó Djozer.

Figura 1 - Fragmento do Papiro Rhind

O papiro Moscou é mais antigo que o Rhind, entretanto é visto como o segundo papiro matemático mais influente. Pode também ser apresentado como papiro Golonishev, fazendo uma alusão ao seu proprietário Vladimir Golenishchev, que o adquiriu em 1893. É um papiro egípcio com formato de uma tira estreita de aproximadamente 5 m de comprimento por 8 cm de largura. Um fragmento encontra-se no Museu das Finas Artes de Moscou, porém, devido a seu estado de degradação, é praticamente impossível interpretá-lo adequadamente. Escrito por volta de 1850 a.C, esse papiro possui 25 problemas e nele estão contidos dois resultados de grande notoriedade na matemática egípcia: a fórmula para o cálculo do volume do tronco de pirâmide e a solução para um problema que muitos pensam tratar-se da área de um hemisfério. (MACÊDO, 2013; GASPAR, 2003).

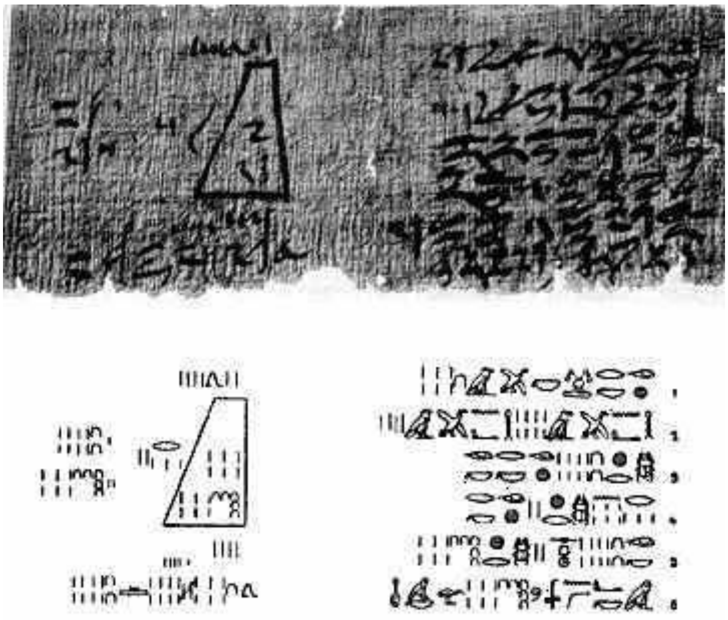


Figura 2 - Fragmento do Papiro de Moscou

O povo egípcio levava muito a sério a demarcação de terras, e como as cheias do Nilo faziam-no transbordar, apagando por vezes as demarcações, surgiu a necessidade de refazê-las com agilidade e precisão. Para tal tarefa, os egípcios usavam cordas entrelaçadas e instrumentos para formar ângulos, delimitando assim terrenos retangulares e triangulares. Segundo Mlodinow (2005), o provável motivo inicial da utilização da geometria no Egito tenha sido ligado à cobrança de impostos, visto que o governo determinava a cobrança por meio da área dos terrenos e da altura da enchente no ano.

Para a tarefa de regularizar as propriedades, segundo Boyer (1996), o faraó determinou funcionários a fim de verificarem os transtornos causados pelas cheias, bem como para refazer as marcações das propriedades. Eram uma espécie de agrimensores que, devido à falta de demarcações eficientes já que as cheias destruíam por vezes tudo, desenvolveram a técnica de triangulação (dividir o terreno em pedaços menores, em formato de triângulos, sendo que a soma das áreas de todos os triângulos era igual à área total) tal técnica era muito empregada pois os terrenos eram bastante irregulares.

Outro fator que demonstra a grandeza dos egípcios ante a geometria, segundo Gaspar (2003), são as pirâmides. Sem dúvida, um dos maiores feitos arquitetônicos da história da humanidade, foram construídas por volta de 3000 a.C., sendo suas faces voltadas para os pontos cardeais. Além disso, Quéops, que é a maior das três, tem base quadrada e altura igual aos lados da base, o que demonstra um alto grau de habilidade e conhecimento de geometria.

Vale destacar que outros povos antigos também contribuíram com registros da aplicação da geometria. Por exemplo, os babilônicos, que usavam barras de argila cozida para efetuar seus registros, sendo encontradas em escavações milhares de natureza matemática, dentre as quais vale citar a Plimpton 322.

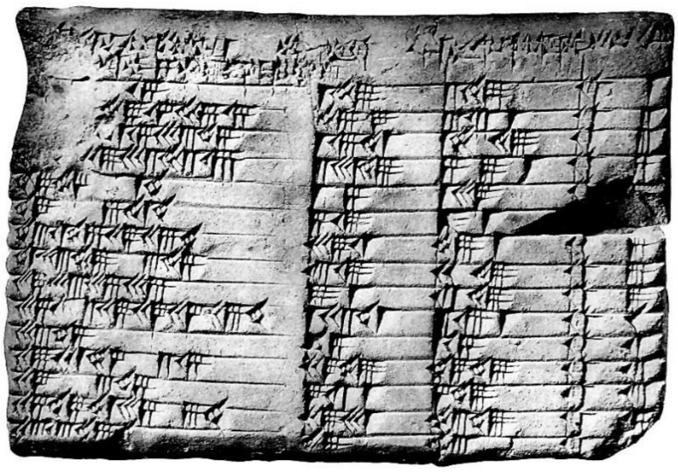


Figura 3 - Plimpton 322

Essa tabuleta possui 4 colunas e 15 linhas em escrita cuneiforme, datada do século XVII a.C., sendo três das colunas preenchidas por ternas pitagóricas.

Segundo Eves (1992), destacaram-se também os chineses e os Hindus, que utilizavam fibras de árvores e bambus para registrarem suas descobertas, contudo, devido à baixa resistência e durabilidade desses materiais, poucos relatos resistiram ao tempo, sendo creditado aos egípcios e aos babilônicos grande parcela do saber desenvolvido nesse período.

Avançando um pouco no contexto histórico, outro povo que apresentou relevantes fatos geométricos foram os gregos, figuras como Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides e Platão contribuíram com diversas ideias, formulando as bases da Geometria, que é aplicada até os dias de hoje.

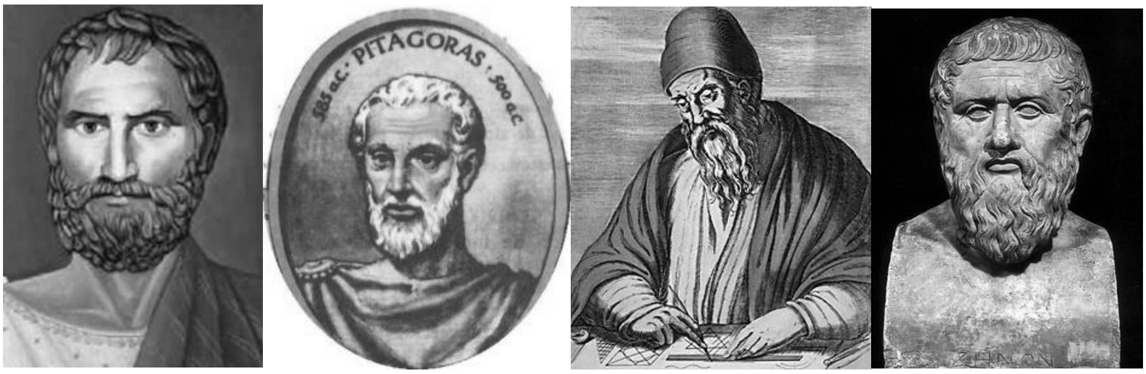


Figura 4 - Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides e Platão respectivamente

Tales de Mileto viveu no período compreendido entre os anos de 640 a.C e 564 a.C, realizando diversas viagens ao Egito, buscando as teorias usadas como base para a construção das pirâmides. Segundo Mlodinow (2005), nessas incursões desenvolveu as técnicas baseadas na relação de semelhança de triângulos para determinar a altura aproximada da pirâmide de Quéops.

Pitágoras nasceu em Samos, ilha grega, por volta de 570 a.C. e assim como Tales percorreu o Egito e também a Babilônia. Foi o fundador da escola pitagórica, que tinha como lemas a matemática ser a realidade da natureza e a filosofia servir para elevar o espírito, dentre outros ideais. No contexto matemático, segundo Kahan (2007), pouco dos conhecimentos gerados pela escola pitagórica se pode atribuir exclusivamente a Pitágoras, pois os membros de sua sociedade produziam e compartilhavam informações, contudo o crédito nunca lhes era dado individualmente, dado que todos os teoremas e descobertas eram atribuídos unicamente ao mestre. Pode-se citar como mais relevante feito o Teorema de Pitágoras, que afirma ser sempre válida a relação $a^2 = b^2 + c^2$ em qualquer triângulo retângulo.

Autor do histórico “Os Elementos”, obra de 13 livros que fundamentou a base da geometria, Euclides sempre buscou apresentar afirmações simples que pudessem ser compreendidas por todos. Ele não se deteve apenas em fazer afirmações excessivas, mas também em demonstrar a veracidade das mesmas.

> Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos (GARBI, 2006, p.49).

Poucos são os registros sobre a bibliografia e o período em que Euclides viveu, o certo é que ele fez a proeza de analisar e compilar em Os Elementos o trabalho de diversos matemáticos ao longo de mais de dois séculos, apresentando nos livros os primeiros sistemas axiomáticos da história. Um dos traços marcantes de sua obra é o não uso de fórmulas, que são trocadas por métodos comparativos ou mesmo por análise de proporções, como descreve Ávila (2013):

> “... enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado;”

Platão, por sua vez, apresentou inúmeras contribuições no campo da filosofia, contudo também era um entusiasta matemático, tendo uma grande afinidade pela geometria. Ele acreditava na teoria dos cinco elementos: fogo, ar, água, terra e universo, relacionando-os a 5 sólidos (cada um composto por apenas um tipo de face regular), respectivamente, o tetraedro, octaedro, icosaedro, hexaedro e o dodecaedro.

2.2 Geometria no Brasil

O ensino no Brasil, após a chegada dos portugueses, permaneceu por cerca de dois séculos relegado apenas aos jesuítas, que não demonstraram nenhum apreço pela matemática, visto que não a consideraram importante na formação humana. Logo, segundo Valente (1999) apesar de o país ter recebido inúmeros professores vindos da Europa com proposição de trabalhos no ramo da engenharia, astronomia e cartografia, eles não eram direcionados a ensinar matemática.

Segundo Valente (1999), apenas a necessidade de preparação para eventuais conflitos com outros povos, para a tomada das terras brasileiras, motivou a Coroa

Portuguesa, por meio do imperador Dom João IV, permitir que a geometria fosse ensinada no Brasil, já que diversos conceitos, como ângulos e distâncias, influenciavam na utilização de armamentos como canhões e outros, logo deviam ser ensinados aos alunos cursistas das aulas de artilharia e fortificação na escola militar. A partir dessa ação foram publicados os dois primeiros livros didáticos de matemática, formalizados por José Fernandes Pintos Alpoim que, inclusive, ministrou aulas utilizando-os.

Figura 5 - José Fernandes Pintos Alpoim.

Passado esse momento de ensino voltado à perspectiva militar, no qual os livros de Alpoim determinavam o modelo educacional brasileiro, surgiram outros autores na Europa que influenciaram os ensinamentos no Brasil, podemos citar Lacroix, Legendre entre outros. Contudo, foi a criação do curso da Academia Real dos Guardas Marinhas em 1782 e a criação dos cursos de matemática na Academia Real Militar em 1810, que, segundo Meneses (2007), impulsionaram o estudo da matemática em solo brasileiro. Isso se deve ao fato da mudança de foco, pois, além de engenharia e artilharia, agora o pensamento era formar geógrafos e topógrafos que pudessem usar sua força de trabalho em outras frentes como portos, canais, pontes e minas.

Os cursos da Academia Real dos Guardas Marinhas com o passar do tempo constituiu-se num curso de nível secundário, enquanto o curso da Academia Real Militar migrou para um curso superior. Em níveis primários de educação, só em 1827, por meio da Lei 15 de novembro, o regente D. Pedro I criou a gratuidade do ensino primário bem como a criação de escolas primárias. Já nos cursos primários houve tentativas de inserir a geometria, visando a criar alunos com capacidade de realizar desenhos a mão com régua e compasso, no entanto tais ideias foram abolidas e aplicadas apenas a partir do ensino secundarista. Com tal mudança, ocorre também a aplicação da geometria como base para cursos superiores que formavam advogados, profissão de grande destaque no século XVIII. A lei que criou as Academias de São Paulo e Olinda trazia em seu 8º artigo que os estudantes para serem aptos a se matricularem nos Cursos Jurídicos deveriam apresentar aprovação em diversas disciplinas, dentre elas a Geometria.

A inclusão da geometria no rol das disciplinas necessárias para a matrícula em cursos superiores fez disparar sua procura e aceitação em cursos secundários, fazendo com que deixasse de ter apenas caráter militar, e fizesse parte da formação cultural do aluno, surgindo inclusive em 1827 vestibulares e cursos preparatórios. A partir da obrigatoriedade, pode-se afirmar que a Geometria deu os passos iniciais para se consolidar como disciplina escolar.

A criação do Imperial Colégio de Dom Pedro II, no ano de 1837, também reafirma o nascimento das disciplinas escolares, porque surge a sistematização dos ensinamentos e metodologias para propiciaram uma aprendizagem diferente do que havia no modelo social até aquele momento.

Tantas novidades fizeram surgir um novo ciclo no ensino da matemática, iniciando a produção de textos elaborados por brasileiros. Alguns fizeram somente uma releitura dos autores franceses Lacroix e Legendre, enquanto outros construíram apostilas com os conteúdos previamente cobrados nos preparatórios. A obra mais relevante foi elaborada por Cristiano Benedito Ottoni, pois relacionava os conhecimentos oriundos da aritmética, álgebra e geometria.

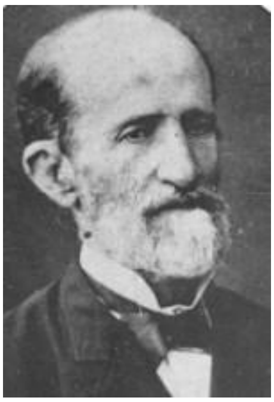


Figura 6 - Cristiano Benedito Ottoni.

Segundo Valente (1999) as obras de Ottoni obtiveram tanto êxito que os preparatórios para curso superior, e os programas das escolas secundárias passaram a adotar a estrutura de seus livros no programa de aulas.

A partir do caminho trilhado por Ottoni, diversos autores surgiram, tanto para Geometria, quanto para Álgebra ou Aritmética, dentre os quais vale destacar Vianna com a obra Elementos de Aritmética, Coqueiro com o Tratado de Aritmética e Thimotheo Pereira com o Curso de Geometria. Cabe ressaltar que essa nova geração trouxe os exercícios como um diferencial para o momento. Tal novidade fez o aluno deixar de ser apenas um ouvinte e copista e passar a apresentar suas dúvidas e dificuldades durante o processo de aprendizagem. Além disso, os exercícios simulavam o que eles enfrentariam nos exames de acesso para o ensino superior.

Até o início do século XX, aritmética, álgebra e geometria, eram estudadas e analisadas de forma separada. A partir daí se tornam apenas uma, em que os problemas deveriam ser desenvolvidos e aplicados às necessidades dos alunos (SILVA, 2013). Na década de trinta, chegaram ao país as ideias de Félix Klein, que propunha em seu projeto modernizar o ensino de Matemática, no qual o desenrolar das aulas, teria como ponto de partida conceitos matemáticos simples e exemplos plausíveis aos conhecimentos dos alunos. Com esse novo pensamento, surge a demanda de novos livros didáticos. Euclides Roxo é o pioneiro em atender as novas necessidades, quando em 1929, elabora o livro didático Curso de Matemática Elementar, desenvolvido para o ensino de matemática do colégio Pedro II, que em um curto espaço, de tempo é utilizado por todo o Brasil, em que a geometria passa a ser vista por: hipótese, demonstração e tese.

A “matemática moderna” surge na década de 60, sendo a ideia que simbolizou essa fase a perspectiva de aproximar a matemática escolar da matemática científica. É nesse instante que, segundo Pavanello (1993), a geometria passa a ocupar posição secundária no ensino, iniciando o processo de “esquecimento” dos conteúdos na prática das salas de aula. Dessa forma, o ensino de geometria inicia-se “pela noção de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjunto de pontos do plano, adotando-se, para sua representação, a linguagem da teoria dos conjuntos” (PAVANELLO, 1993, p.13). A matemática moderna, após sofrer duras críticas ao excesso de formalismo, cerca de 20 anos depois, não atendendo às expectativas de aprendizagem, é abandonada dando-se iniciou a outro ciclo.

A partir da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), de 1996, e também do Plano Nacional de Educação (PNE), de 2001, a geometria retorna ao foco do processo de ensino e aprendizagem. É importante ressaltar que, especificamente, na geometria espacial essa alteração coloca o aluno na condição de perceber a relação existente entre o conteúdo analisado e sua conexão com mundo a seu redor.

Os PCN’s (BRASIL, 2000) sugestionam que a geometria no ensino médio deva ser explorada em quatro eixos, que são:

- Geometria Plana,
- Geometria Espacial,
- Geometria Métrica,
- Geometria Analítica.

Os PCN’s avaliam também que o ensino de geometria não deve ser pensado e realizado apenas com base nas relações métricas com cálculos de comprimento, áreas e volumes, mas, sobretudo, levando em consideração as relações geométricas, evidenciando as propriedades das posições relativas das congruências, as semelhanças entre figuras planas e espaciais, suas diferentes representações no plano e a utilização de instrumentos para realizar desenhos, planificações e construções diversas.

3 SOFTWARE GEOGEBRA

3.1 Histórico

A maior função dos softwares educacionais em um primeiro momento é estimular o interesse do aluno pelo aprendizado, pois os temas abordados podem ser tratados de forma lúdica e menos engessado, desenvolvendo com mais qualidade as habilidades intelectuais dos alunos, motivando-os, por meio das manipulações que eles têm com os objetos no software.

O GeoGebra é um software matemático com finalidade educacional, disponível de forma gratuita, o que contribui para torná-lo muito popular entre professores e alunos que pretendem desenvolver as habilidades geométricas. Esse software tem várias possibilidades de utilização no ensino, abordando geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo num único aplicativo, o que o faz presente desde o nível básico até as salas de aula das universidades.

O GeoGebra nasceu em 2001, como uma tese do matemático austríaco Markus Hohenwarter e sua disseminação foi muito rápida, chegando a 190 países, sendo traduzido para 55 idiomas, com 62 Institutos GeoGebra em 44 países produzindo e trocando materiais, além de oferecer suporte para seus usuários, que realizam cerca de 300000 downloads por mês, segundo informações do Instituto São Paulo GeoGebra.

Ainda, segundo o Instituto, algumas características do software são:

- Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
- Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;
- Software gratuito e de código aberto.

No site do GeoGebra, (https://www.geogebra.org/about), pode-se verificar que tais características levaram-no a conquistar inúmeros prêmios ao redor do globo, dentre os quais destacam-se:

- Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany);

- Microsoft Partner of the Year Award 2015: Finalist, Public Sector: Education (Redmond, WA, USA);
- MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA);
- NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award (Washington D.C., USA);
- Tech Award 2009: Laureat in the Education Category (San Jose, California, USA);
- BETT Award 2009: Finalist in London for British Educational Technology Award;
- SourceForge.net Community Choice Awards 2008: Finalist, Best Project for Educators;
- AECT Distinguished Development Award 2008: Association for Educational Communications and Technology (Orlando, USA);
- Learnie Award 2006: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria);
- eTwinning Award 2006: 1st prize for "Crop Circles Challenge" with GeoGebra (Linz, Austria);
- Trophées du Libre 2005: International Free Software Award, category Education (Soisson, France);
- Comenius 2004: German Educational Media Award (Berlin, Germany);
- Learnie Award 2005: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria);
- Digita 2004: German Educational Software Award (Cologne, Germany);
- Learnie Award 2003: Austrian Educational Software Award (Vienna, Austria);
- EASA 2002: European Academic Software Award (Ronneby, Sweden);

O GeoGebra possibilita a realização de construções geométricas, utilização de funções de forma dinâmica, inserção de equações sendo que gráfico é prontamente plotado, além de ser capaz de operar com vetores, derivar e integrar funções, dentre outros. Assim se percebe que o GeoGebra possui uma série de mecanismos indo da geometria à álgebra e ao cálculo, de forma prática e didática, alternando e relacionando características geométricas e algébricas.

3.2 Interface do programa

A versão do software GeoGebra apresentada será o GeoGebra Classic 5, disponível em https://www.GeoGebra.org/download. Ao acessar a página, basta procurar o ícone do aplicativo e clicar na versão do sistema operacional do computador.

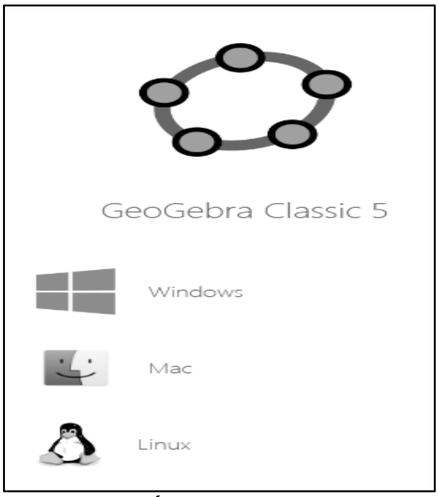


Figura 7 - Ícone para download.

Após os procedimentos de download e instalação, o usuário é levado à interface inicial do software como representado na figura 8.

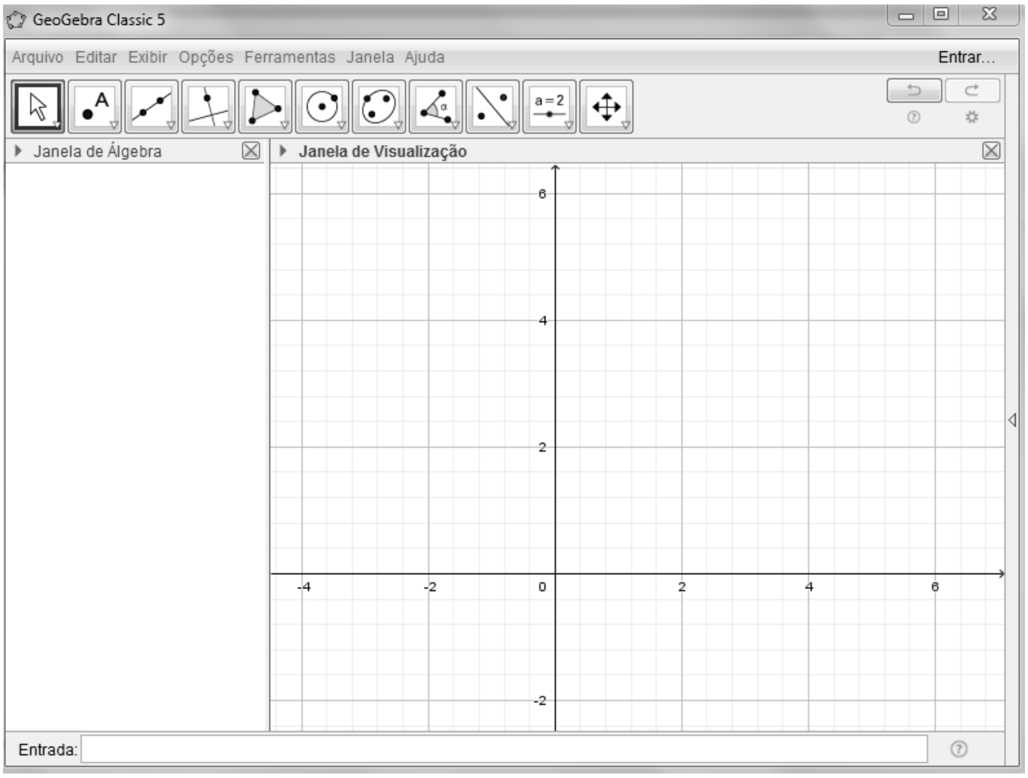


Figura 8 - Página inicial.

Podemos analisar a página inicial em 4 blocos de informação, conforme destacado na figura 9, em que temos em vermelho a Barra de Menu e Ferramentas; em azul, a Janela Algébrica; em verde a Janela de Visualização; e em preto, o campo de Entrada.

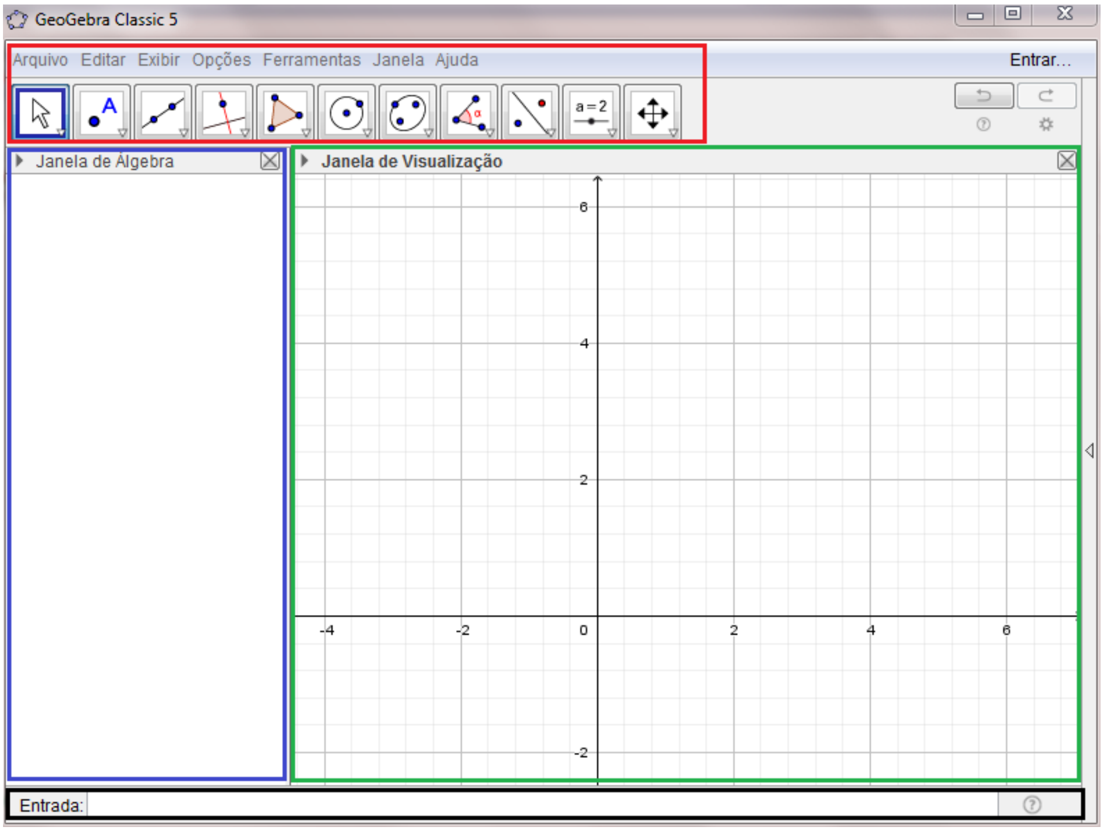


Figura 9 - Página inicial dividida em setores.

Barra de Menu e Ferramentas: Localizada na parte superior da tela, podemos acessar com clique simples os itens *Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, ou Ajuda* na qual obteremos uma série de subitens relacionados. Além desses, existem alguns ícones para utilizarmos, que são as ferramentas de visualização 2D, como detalhados na figura 10.

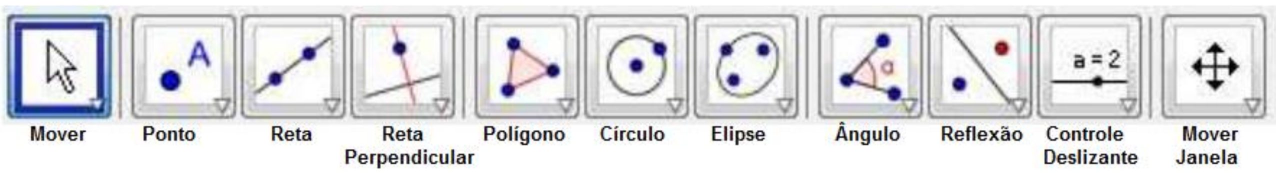


Figura 10 - Barra de ferramentas 2D.

Cada um desses ícones tem em sua parte inferior uma seta que abre outras opções de construção que poderão ser detalhadas em algumas das construções posteriormente apresentadas.

Janela Algébrica: Situada no modo padrão no canto esquerdo da tela tem com objetivo principal apresentar as informações algébricas dos itens que compõem a Janela de Visualização. Os objetos são organizados em dois segmentos: *objetos livres e objetos dependentes*. Ao criarmos um objeto novo sem utilizarmos qualquer objeto existente, ele é designado um objeto livre. Se, ao contrário, o novo objeto for construído utilizando recurso e objetos já existentes, ele é caracterizado como objeto dependente.

Janela de Visualização 2D : Visualizamos objetos e ou gráficos construídos. A combinação da janela algébrica com a janela de visualização apresenta um grande ganho didático, pois alia os aspectos geométricos e algébricos em um único espaço.

Campo de Entrada: Localizado na parte inferior da janela do GeoGebra. Por meio desse campo, podemos inserir manualmente comandos escritos, como funções ou quaisquer outros itens exibidos na barra de ferramentas. Vale destacar que existem comandos no campo de entrada que não estão na barra de ferramentas.

Voltando à Barra de Menu e ferramentas, há uma guia que precisa ser melhor apresentada em virtude do tema proposto nesta dissertação. Quando clicamos em *Exibir* podemos observar alguns campos como apresentados na figura 11.

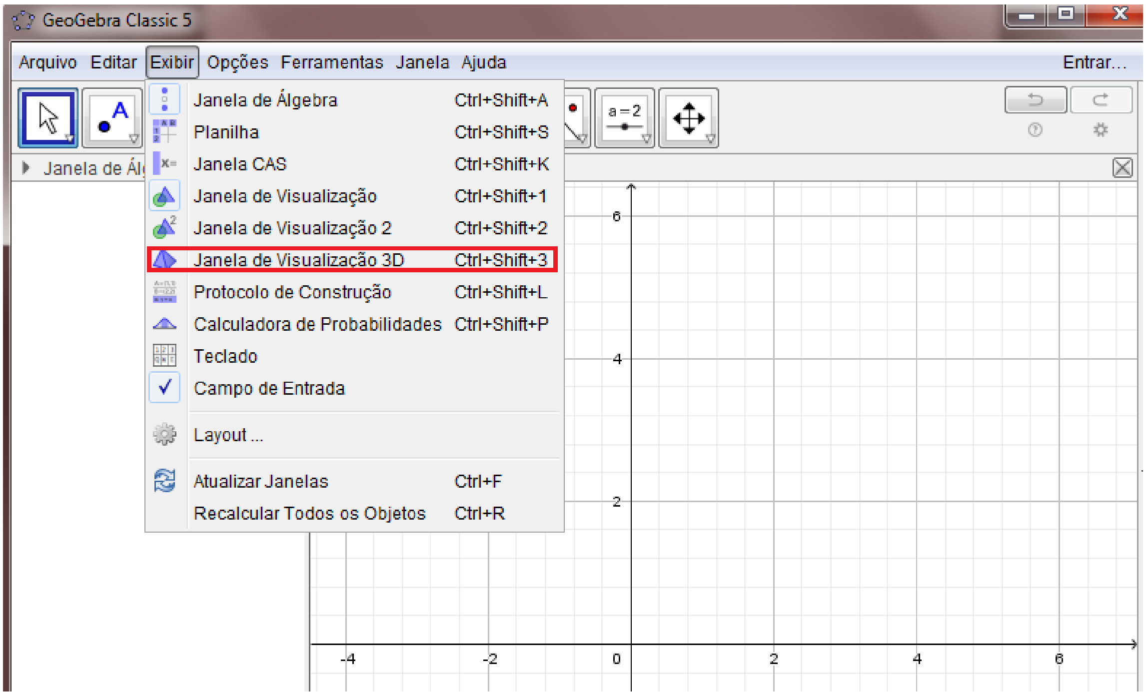


Figura 11 - Opções do menu Exibir.

Dentre as diversas opções apresentadas, vale salientar a que está em vermelho. Ao clicarmos em Janela de Visualização 3D, a interface inicial do software sofre algumas alterações, como podem ser observadas na figura 12.

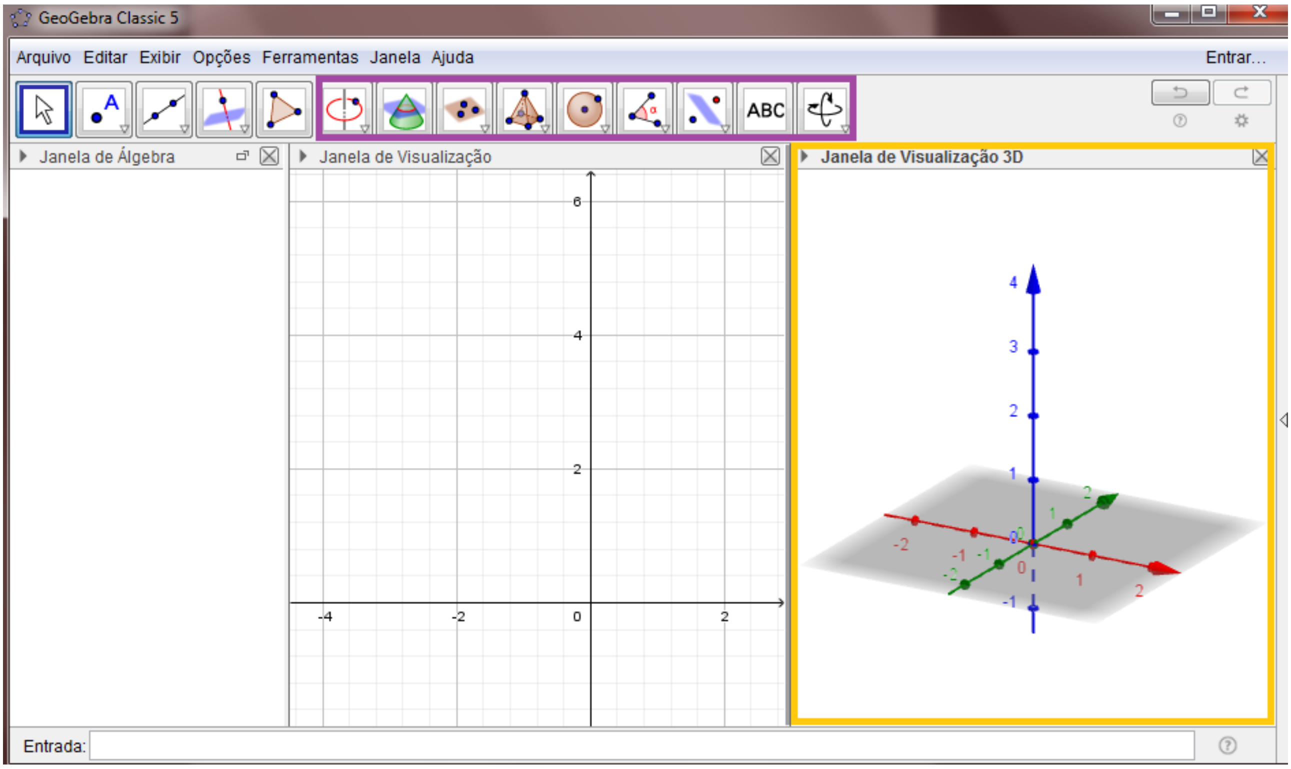


Figura 12 - Tela de visualização 3D.

Nota-se que surgiu (em amarelo) a representação da Janela 3D, em que poderemos visualizar os objetos tridimensionais construídos. Além disso na Barra de ferramentas pode-se perceber que alguns ícones da janela 2D foram substituídos ou ganharam novas funções na janela 3D, como por exemplo a possibilidade de realizar intersecção entre planos, entre sólidos e planos, a construção de prismas, poliedros, pirâmides, cones e esfera.

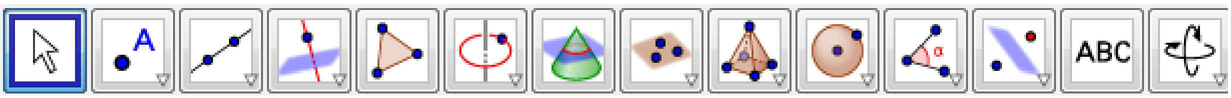


Figura 13 - Barra de ferramentas 3D.

Apenas em caráter explicativo, ao clicarmos no nono ícone apresentado na figura 13, observaremos os subitens apresentados na figura 14.

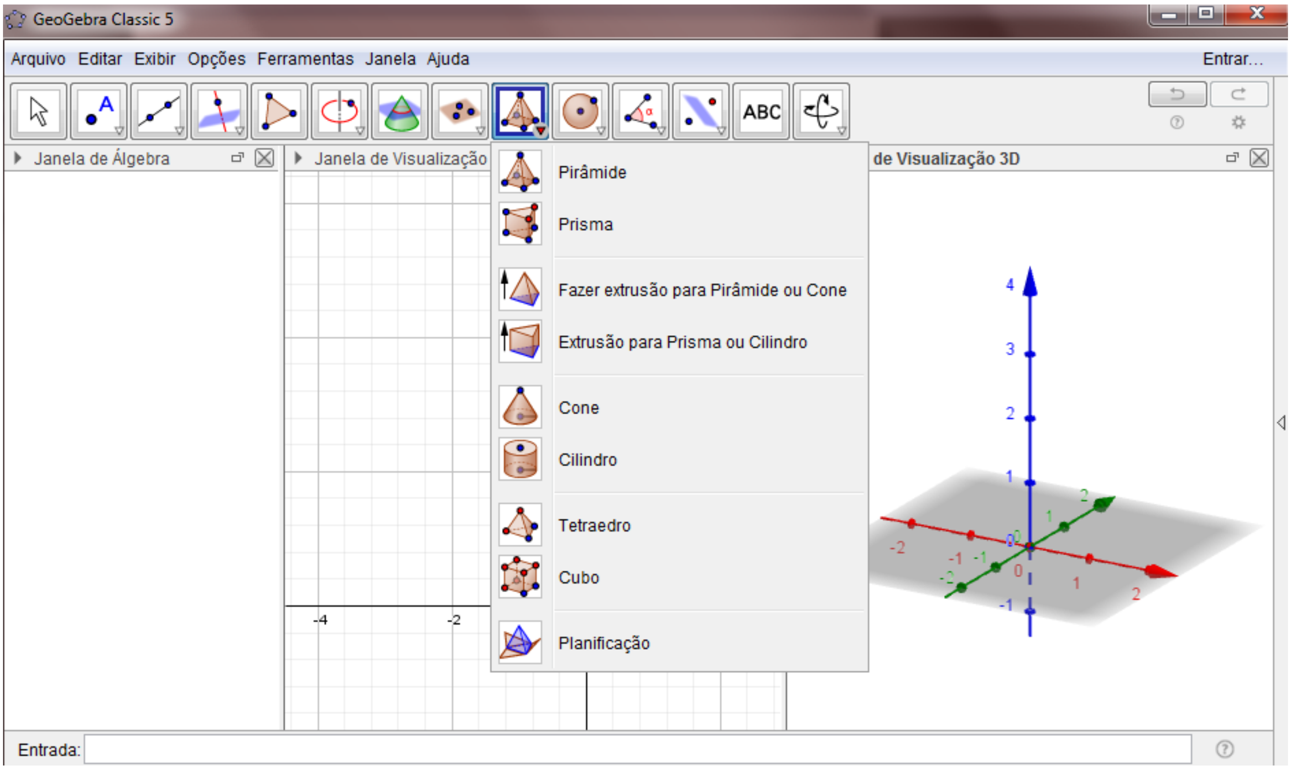


Figura 14 - Opções da ferramenta pirâmide.

Nessa ferramenta, podemos realizar uma série de construções como a construção de Pirâmides, Prismas, Extrusões, Cones, Cilindros, Planificações, entre outros. Vale ressaltar que nos outros ícones da Barra de Ferramentas 3D também há uma grande quantidade de opções de construções diferentes das apresentadas.

4 POLIEDROS

Adotaremos como definição de poliedro a disposta em Lima *et al*. (2006, p. 232-233). “*Poliedro* é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces em que:

- Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono;
- A intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum ou é vértice, ou é vazia.
- É sempre possível ir de um ponto de uma face a um outro ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice“.

Baseado na definição acima, infere-se que todo poliedro limita uma região espacial denominada interior do poliedro.

Os poliedros são classificados em convexo e não convexo. Segundo Paiva (2013), os poliedros convexos contêm qualquer um de seus polígonos contidos em um plano α e os demais polígonos estão contidos em um mesmo semiespaço de origem α, conforme mostra a figura 15.

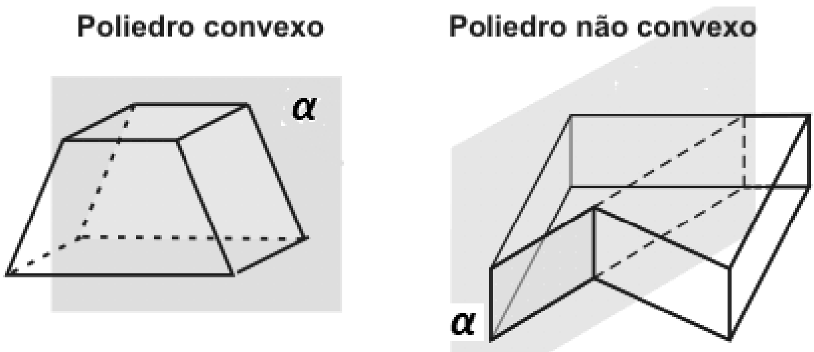


Figura 15 – Poliedro convexo e poliedro não convexo.

Daremos ênfase nesta dissertação apenas aos poliedros convexos, nos quais existe uma importante relação entre os lados, vértices e arestas, chamada de Relação de Euler, em homenagem ao matemático que a descobriu, o suíço Leonhard Euler (1707 – 1783). Relação de Euler: Em todo poliedro convexo, vale a seguinte relação $V - A + F = 2$ ou $V + F = A + 2$, em que, V, A e F representam os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente. Contudo, cabe ainda mencionar que a Relação de Euler também é validade para alguns poliedros não convexos. Para verificar a demonstração e as análises a respeito da Relação de Euler para poliedros, vide Lima (2012, p. 85 a 109).

Dentre o grupo dos poliedros, temos os famosos poliedros regulares, formados por polígonos regulares e congruentes, conhecidos como Poliedros de Platão, como mostra a figura 16. Tais poliedros são analisados pelo homem desde os tempos antes de Cristo. Platão, grande filósofo grego, discípulo de Sócrates, estudou esses sólidos. Para ele, tudo era composto por terra, ar, fogo e água, sendo atribuído a cada um desses elementos um dos poliedros regulares. A terra era representada pelo hexaedro (cubo) devido à sua "estabilidade"; ao ar o octaedro; ao fogo o tetraedro; à água, o icosaedro; e o dodecaedro representava o elemento de que o universo seria feito.

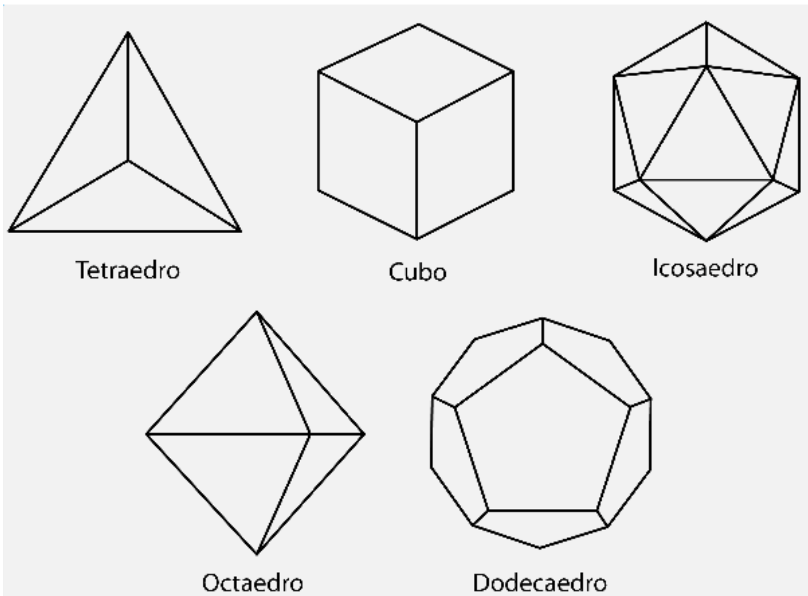


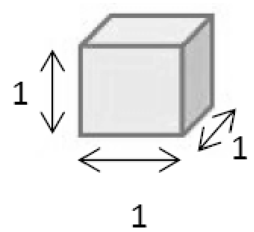
Figura 16 – Poliedros de Platão.

5 PRISMAS E PIRÂMIDES

5.1 Noção Intuitiva de Volume

De acordo com Lima (2011), podemos caracterizar o *volume* de um sólido, de forma intuitiva, como sendo a quantidade de espaço por ele ocupado. E para quantificar essa grandeza “volume” devemos equipará-la com uma unidade. O resultado dessa comparação será um número, ou seja, uma medida do volume.

A unidade padrão de volume, em geral, é um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual denominaremos cubo unitário, como representado na figura 17. Seu volume, por definição, será igual a 1.



1 unidade de volume ou $1\ u^3$.

Figura 17 – Região cúbica unitária.

Por meio desse conceito, podemos dizer que o volume de um determinado sólido será um número que represente a quantidade de vezes que esse sólido contém o cubo unitário. Como podemos ter sólidos de formas bastante irregulares, nem sempre é exato o número de vezes em que o sólido contém o cubo unitário. Mais uma vez, temos aqui uma ideia intuitiva, que necessitamos aplicar como guia, e a qual devemos atribuir um significado preciso.

Para simplificar a escrita, será utilizada a notação $V_{(SÓLIDO)}$ e $A_{(SÓLIDO)}$ para representar o volume e a área lateral do sólido que estiver sendo discutido no contexto, respectivamente. Além disso, usaremos $A_{(BASE)}$ e $A_{(LATERAL)}$ para representar a área da base e a área lateral, nessa ordem.

5.2 Volume de um bloco retangular

Segundo Lima (2011), o *paralelepípedo* retângulo, normalmente chamado de bloco retangular, é um sólido geométrico formado por 6 faces retangulares. Ele fica exatamente determinado por três medidas, sendo estas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).

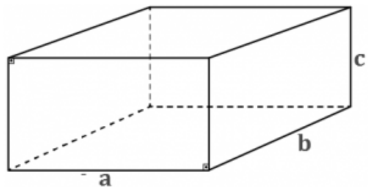


Figura 18 – Paralelepípedo de dimensões a, b e c.

Quando há um bloco com todas as arestas de mesmo comprimento, temos um caso particular conhecido como *cubo*, cujas faces são quadrados iguais. Como já mencionado anteriormente, o cubo de aresta de uma unidade é chamado cubo unitário. Caso tenhamos um cubo cuja aresta tenha n unidades de comprimento, podemos decompô-lo em n^3 cubos unitários, logo o volume dele é n^3. A figura 19 apresenta um cubo sendo $n = 3$.

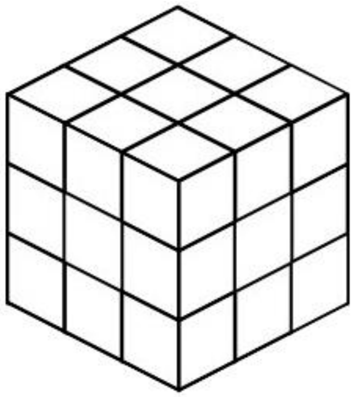


Figura 19 – Cubo de aresta 3 decomposto em $27 = 3^3$ cubos unitários

De forma análoga, se decompusermos as arestas de um cubo unitário em um inteiro q de partes iguais, teremos q^3 cubos de volume V, todos com arestas $1/q$. Assim, q^3V é igual ao volume do cubo unitário, que é igual a 1. Segue-se que um cubo de aresta $1/q$ tem volume igual a $\frac{1}{q^3} = \left(\frac{1}{q}\right)^3$.

Mas geralmente, sendo um cubo C, tendo como medida da aresta um número racional p/q, conseguimos decompô-las em p partes iguais, todas com comprimento $1/q$, formando assim p^3 cubos, cada um destes com arestas $1/q$. O volume de cada cubo menor é dado por $(1/q)^3$, logo o volume de C será:

$$p^3 \cdot \frac{1}{q} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Assim, se um cubo C tem como medida de sua aresta um número racional a, então seu volume é a^3.

Analisando essa demonstração nas questões relacionadas à prática cotidiana, resolve-se o problema do cálculo do volume do cubo, uma vez que não conseguimos por meio de qualquer instrumento obter um número irracional para utilizarmos como aresta. Contudo, sob o prisma teórico, sabemos que os números irracionais existem. Um simples exemplo é a medida da diagonal da face do cubo unitário, que mede $\sqrt{2}$**,** ou mesmo de sua diagonal interna que mede $\sqrt{3}$**.**

Para os casos em que a medida da aresta de um cubo C é um número irracional, o volume do cubo pode ser dado por:

$$V_{(CUBO)} = (aresta\ de\ C)^3.$$

Para demonstrar esse caso, a ideia é usar o método da exaustão, vide Lima (2011, p. 64 e 65).

Consideremos agora um bloco retangular B com aresta de medidas racionais. Podemos reduzir esses três números ao mesmo denominador, supondo que tais medidas são a/q, b/q e c/q, sendo a, b, c e q inteiros. A partir disso, decompomos as três arestas de B em a, b e c seguimentos iguais de medidas $1/q$, logo o bloco fica dividido em abc cubos justapostos, sendo que cada cubo tem aresta $1/q$ e volume $1/q^3$ assim:

$$V_{(BLOCO)} = \frac{abc}{q^3} = \frac{a}{q}.\frac{b}{q}.\frac{c}{q}.$$

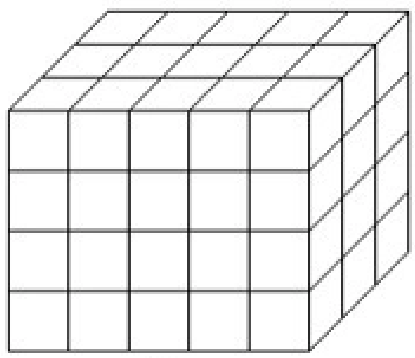


Figura 20 – Paralelepípedo dividido em 5x3x4 cubos de mesmo volume.

Assim podemos afirmar que se um bloco retangular B tem arestas de medidas racionais a, b e c, seu volume será o produto dessas medidas, logo $V_{(BLOCO)} = abc$. De forma análoga ao cubo, a fórmula também é válida, mesmo que alguma das arestas seja irracional, podendo-se obter essa conclusão também pelo método da exaustão.

5.3 O Princípio de Cavalieri

Oriundo de Milão, discípulo de Galileu e sacerdote matemático, Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), publicou, em 1635, a obra *Geometria indivisibilibus*, que contém em seu contexto o que hoje conhecemos como o “Princípio de Cavalieri”, obra muito criticada naquela época em virtude da falta de rigor matemático, mesmo tendo possibilitado o cálculo rápido e prático de diversas formas tridimensionais. Anos mais tarde, em 1647, Cavalieri publicou *Exercitaciones geometricae sex,* no qual fundamentou os argumentos apresentados anos antes.

Figura 21 – Bonaventura Francesco Cavalieri .

Antes de apresentarmos a demonstração do princípio, passaremos por uma análise prática para facilitar o entendimento. Suponha que em uma superfície plana há uma pilha de cartas de baralho completamente alinhadas como representado na figura 22 (A). Note que a pilha tem o formato de um paralelepípedo retângulo com um volume que pode ser calculado rapidamente pelo produto de suas dimensões. Com a ajuda de um suporte, podemos inclinar a pilha de cartas e formar um paralelepípedo oblíquo da figura 22 (C), ou mesmo com as mãos poderíamos deformar a pilha formando os casos das figuras 22 (B) e 22 (D).

Figura 22 – Volume do Prisma

Em todas as pilhas, temos o mesmo número de cartas, logo os volumes de A, B, C e D são iguais. Imagine, portanto, que as bases de todas as pilhas estão apoiadas sobre um plano α, por exemplo, e que, em dado momento, passamos por todas as pilhas um plano β, logo, esse plano determinará em todas as pilhas a mesma carta, e tendo as cartas todas as áreas iguais, em todos os planos que passarmos pelas pilhas, sempre teremos a mesma área, logo o volume será igual em todos os casos.

O *Princípio de Cavalieri* diz: "sejam A e B dois sólidos, se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas com áreas iguais, então $V_{(A)} = V_{(B)}$". Não será apresentada a demonstração desse princípio, uma vez que para tanto seriam necessários conceitos avançados da Teoria da Medida, o que foge do escopo desta dissertação. Dessa forma, consideraremos o Princípio de Cavalieri como verdadeiro.

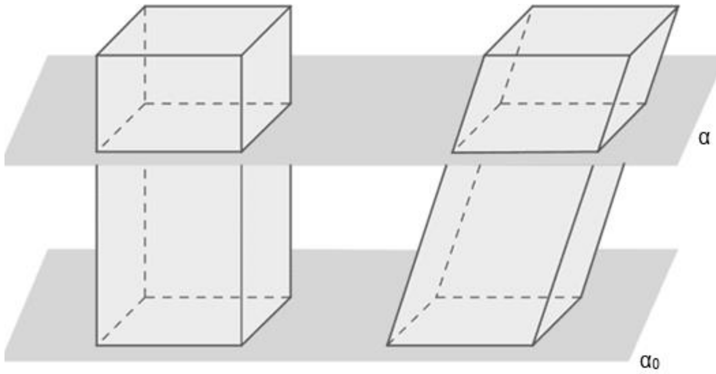


Figura 23 – Comparando áreas de prismas diferentes.

5.4 Prismas

Segundo Paiva (2013), *prismas* são poliedros cujas duas bases são congruentes e paralelas, sendo as arestas que as unem paralelas entre si. Temos basicamente dois tipos de prismas, os retos e os oblíquos. A diferença básica entres eles são as retas que ligam as bases do prisma; no caso dos prismas retos, formam um ângulo reto com as bases, já nos oblíquos essas formam uma inclinação com a base, conforme pode ser observado na figura 24.

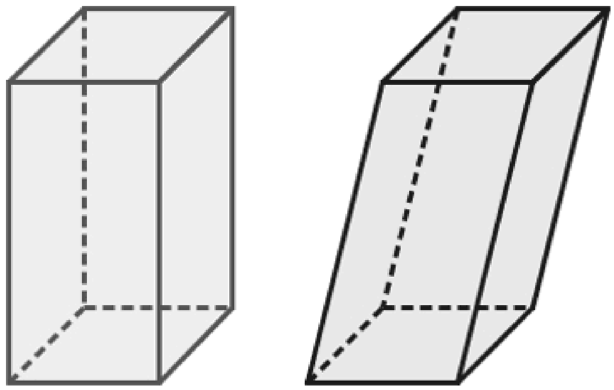


Figura 24 – Prisma reto e prisma oblíquo.

A figura 25 apresenta os elementos que podemos observar em um prisma, que são:

- Faces laterais: são os polígonos que formam o corpo do prisma, que são paralelogramos.
- Base: são polígonos congruentes que estão em planos paralelos.
- Aresta: é o segmento de reta formado no encontro entre duas faces, sendo as que estão no plano da base são chamadas de arestas da base e as outras são as arestas laterais.
- Vértice: são os pontos formados no encontro das arestas.
- Altura: é a distância entre as bases que formam o prisma.

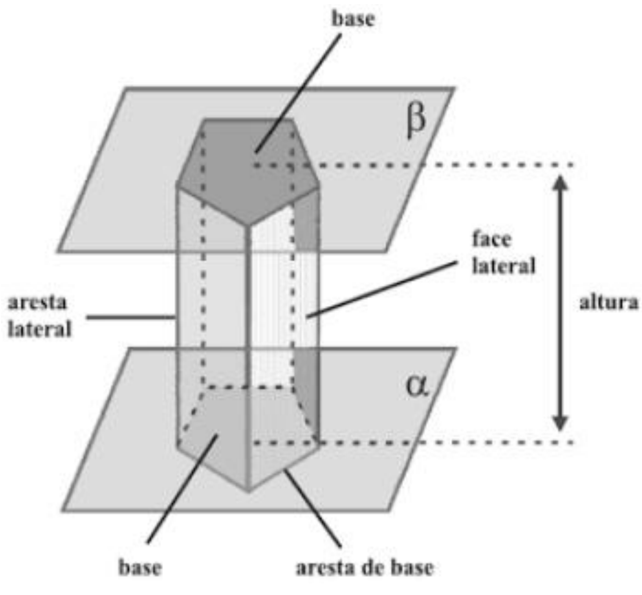


Figura 25 – Elementos de um prisma.

O que define a nomenclatura de um prisma é a sua base, vide figura 26, quando essa é um triângulo, chamamos de prisma de base triangular; se for um pentágono, temos um prisma de base pentagonal; um hexágono, temos prisma de base hexagonal e assim por diante.

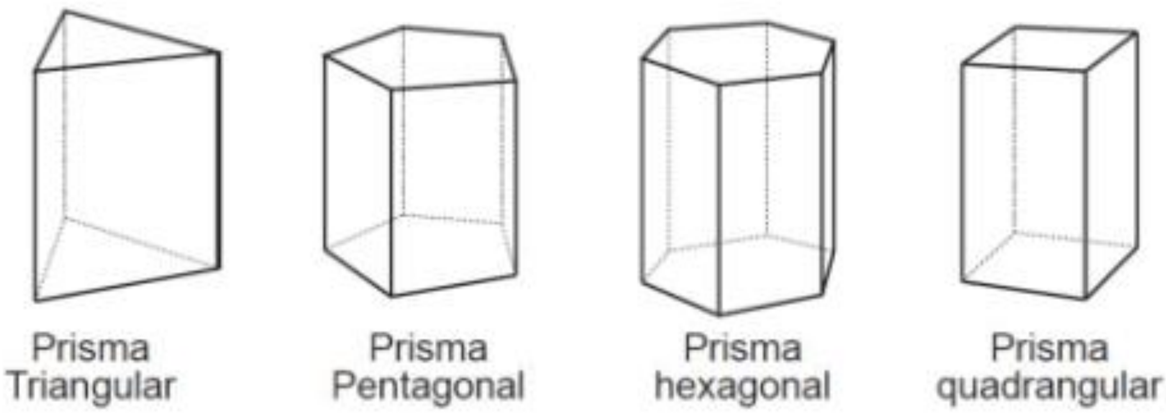


Figura 26 – Nomenclatura dos prismas.

Por definição, a área de um prisma é a soma de sua área lateral ($A_{LATERAL}$), que no caso é a soma das áreas das faces laterais, com a área das bases inferior e superior (A_{BASES}).

$$A_{(PRISMA)} = A_{(LATERAL)} + A_{(BASES)}.$$

Como temos diversos tipos de prismas, devido ao formato da base, o cálculo da área total é realizado a partir da identificação dos polígonos da base e das faces e do cálculo dessas áreas.

Utilizando o Princípio de Cavalieri podemos determinar a fórmula do volume de um prisma. Para tanto, basta tomarmos um prisma de altura h, cuja base, de área A_b, pertença a um plano α. Ao lado desse, construímos um paralelepípedo de altura h, cuja base seja um retângulo de área A_b situada no mesmo plano α.

Se passarmos um plano β, paralelo ao plano α a uma altura menor que h, seccionaremos o prismas e o paralelepípedo obtendo áreas A_p e A_r respectivamente. Sabemos que um paralelepípedo também pode ser classificado como um prisma, logo, uma secção paralela à base tem área congruente a ela, ver figura 27. Desta forma:

$$A_p = A_r = A_b$$

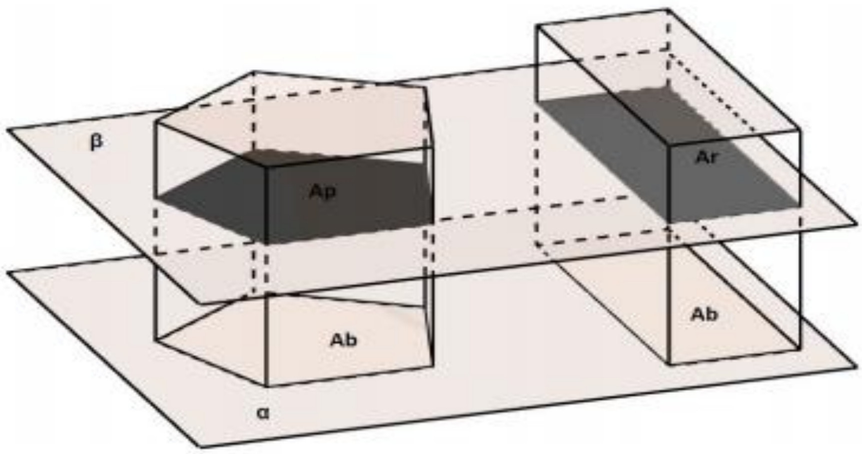


Figura 27 –Volume de um prisma com o Princípio de Cavalieri.

Assim, todo plano paralelo ao plano α determinará no prisma e no paralelepípedo secções de área A_b e, portanto, pelo Princípio de Cavalieri seus volumes são iguais. No caso do paralelepípedo, determinamos seu volume como o produto da área da base pela altura, e podemos proceder de forma análoga para o prisma.

$$V_{(PRISMA)} = A_{(BASE)} \cdot h.$$

5.5 Pirâmides

Consideremos o polígono convexo formado por vértices A_2, $A_{3,}$ ..., A_n pertencentes a um plano qualquer, e um ponto K não pertencente a esse plano. Consideremos ainda todos os segmentos de reta que tem início nos vértices do polígono e fim no ponto K. O objeto tridimensional formado recebe o nome de *pirâmide*.

Da mesma forma que os prismas, as pirâmides têm como elementos faces, arestas, vértices e altura, contudo tem apenas uma base, que, por sua vez, determina a nomenclatura da pirâmide, mudando de acordo com o polígono, como pode ser observado na figura 28.

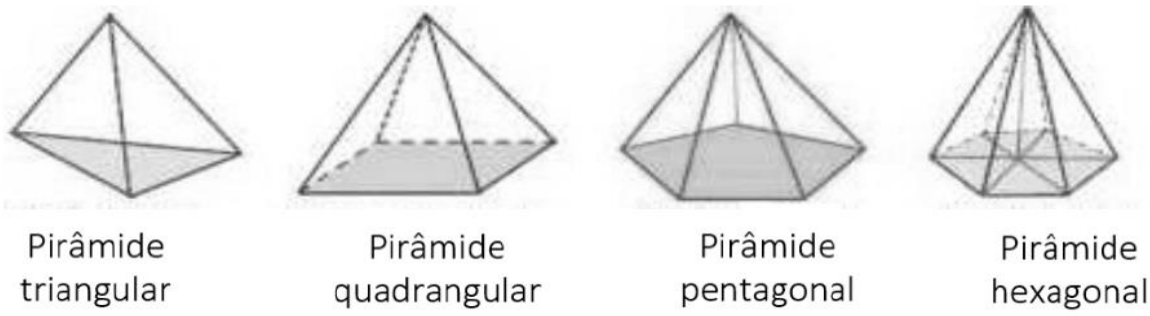


Figura 28 – Nomenclatura das pirâmides.

Temos uma pirâmide reta quando o único vértice que não pertence à base tem projeção ortogonal no centro da base como mostra a figura 29, nos outros casos dizemos que a pirâmide é obliqua.

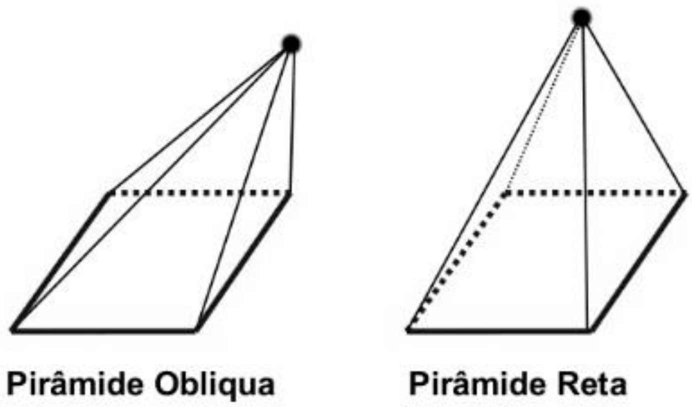


Figura 29 – Classificação das pirâmides.

Quando temos uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o polígono coincide com o centro deste temos o que chamamos de pirâmide regular. Em qualquer pirâmide regular podemos observar quatro importantes triângulos retângulos, sendo que neles podemos observar alguns elementos como: a aresta da base, a aresta lateral, o raio da circunferência circunscrita à base, o apótema da pirâmide, o apótema da base e a altura da pirâmide. Vale salientar que, de acordo com Lengruber (2011), a apótema da base é a distância entre o centro geométrico do polígono regular e o ponto médio de um de seus lados, perpendicularmente. Já a apótema da pirâmide é a altura de uma face lateral em relação à aresta da base. A figura 30 apresenta tais triângulos, e o fato desses triângulos serem retângulos explica o motivo do Teorema de Pitágoras ser tema recorrente na resolução de problemas envolvendo pirâmides.

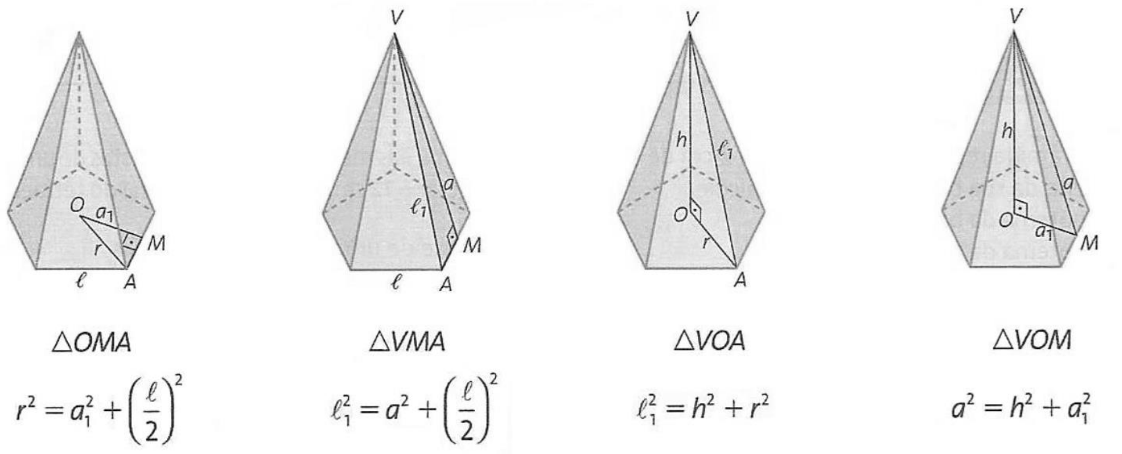


Figura 30 – Aplicação do teorema de Pitágoras numa pirâmide regular.

Para calcularmos a área total de uma pirâmide, devemos encontrar a área da base e somar as áreas laterais, que são todas triangulares. O número de triângulos depende do formato da base.

Um importante teorema que está relacionado com as relações apresentadas na figura 30 é o Teorema das três perpendiculares, que diz: “A reta r é perpendicular ao plano α no ponto P. A reta s está contida em α e não passa por P. O ponto Q da reta s é tal que PQ é perpendicular a s. Então, se R é qualquer ponto de r, RQ é perpendicular a s.” A representação geométrica do teorema pode ser observada na figura 31 e sua demonstração consta em Caminha (2013).

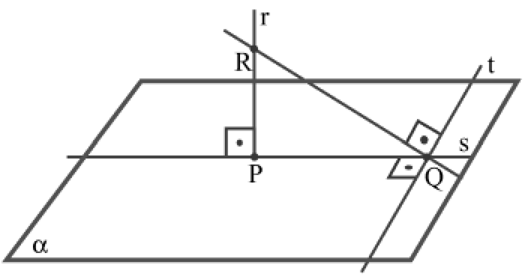


Figura 311 – Teorema das três perpendiculares.

5.5.1 Demonstração do volume da pirâmide

O volume de uma pirâmide qualquer é dado como um terço do produto da área da base por sua altura. Para demonstrar tal afirmação, basta provar que podemos decompor um prisma triangular em três pirâmides triangulares de mesmo volume, como podemos observar na figura 32.

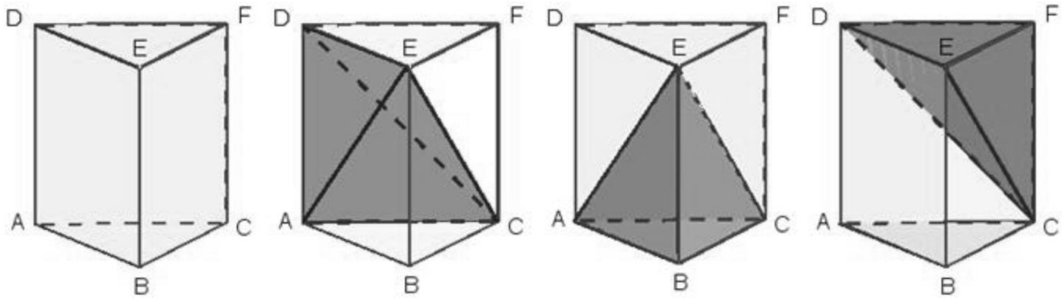


Figura 322 – Prisma regular e pirâmides internas.

Ao analisarmos a figura, podemos chegar às seguintes conclusões:

(I) As pirâmides $CDEF$ e $ABCE$ possuem bases de mesma área, pois, ao observarmos os triângulos DEF e ABC, notamos que eles são bases do prisma. Além disso, as alturas FC e EB são arestas laterais do prisma e possuem a mesma medida, logo:

$$V_{(ABCE)} = V_{(CDEF)}.$$

(II) Se tomarmos os triângulos ACD e CDF como as bases das pirâmides, perceberemos que ambos têm a mesma área, ademais a altura das duas são é distância do ponto E até o plano que as contém, obtendo assim a mesma altura, logo.

$$V_{(ADCE)} = V_{(CDEF)}.$$

Usando as afirmações (I) e (II), chegamos à conclusão que:

$$V_{(ABCE)} = V_{(CDEF)} = V_{(ADCE)}.$$

Dessa forma, um prisma de base triangular pode ser seccionado em três pirâmides de igual volume, assim, o volume da pirâmide é dado pela terça parte do volume do prisma.

$$V_{(PIRÂMIDE)} = \frac{1}{3} A_{(BASE)} \cdot h.$$

Tal conclusão é facilmente ampliada para uma pirâmide qualquer, bastando para isso decompô-la em n pirâmides triangulares. Seja uma pirâmide de vértice T, altura h, base $A_1A_2A_3\ldots A_n$ e área da base B, sendo P um ponto interno à base. Podemos decompor a pirâmide usando o ponto P em n pirâmides de base triangular formando TA_1A_2P, TA_2A_3P, TA_3A_4P, ... e TA_nA_1P, sendo a área da base destas denotadas por B_1, B_2, B_3, ... e B_n, de acordo com o apresentado na figura 33.

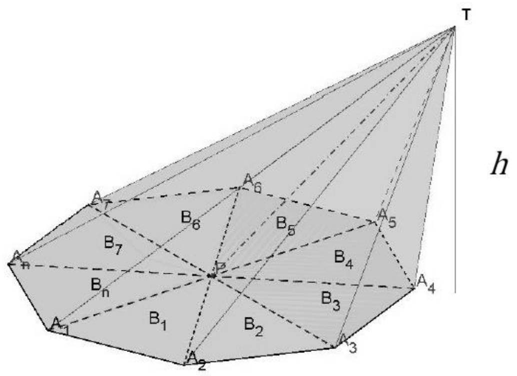


Figura 333 – Decomposição de uma pirâmide qualquer.

Perceba que todas a pirâmides possuem a mesma altura h e a área B pode ser dada como:

$$B = \sum_{j=1}^{n} B_j.$$

Bem como o volume V que pode ser apresentado por:

$$V = \sum_{j=1}^{n} V_j.$$

Sendo que:

$$V_{(1)} = \frac{1}{3} B_1 \cdot h. \qquad V_{(2)} = \frac{1}{3} B_2 \cdot h. \qquad V_{(3)} = \frac{1}{3} B_3 \cdot h. \qquad V_{(n)} = \frac{1}{3} B_n \cdot h.$$

Assim,

$$V_{(1)} + V_{(2)} + V_{(3)} + \cdots + V_{(n)} = \frac{1}{3} B_1 \cdot h + \frac{1}{3} B_2 \cdot h + \frac{1}{3} B_3 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3} B_n \cdot h.$$

O que nos leva a:

$$V_{(1)} + V_{(2)} + V_{(3)} + \cdots + V_{(n)} = h \cdot \left(\frac{1}{3} B_1 + \frac{1}{3} B_2 + \frac{1}{3} B_3 + \cdots + \frac{1}{3} B_n \right).$$

Lembrando que a soma dos volumes representa o volume total e que tal fato também ocorre com as áreas das bases podemos reescrever a equação como:

$$V_{(PIRÂMIDE)} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

6 CILINDROS E CONES

6.1 Cilindros

O cilindro é um sólido geométrico com grande aplicação no cotidiano da sociedade moderna. É possível observá-lo em muitos exemplos na construção civil, nas embalagens de refrigerantes e em diversos tipos de reservatórios. Na definição dada por Paiva (2013) *cilindro* é qualquer forma geométrica que possui duas bases circulares paralelas e congruentes, por conseguinte se os extremos dos segmentos estiverem um em cada base, como representado na figura 34.

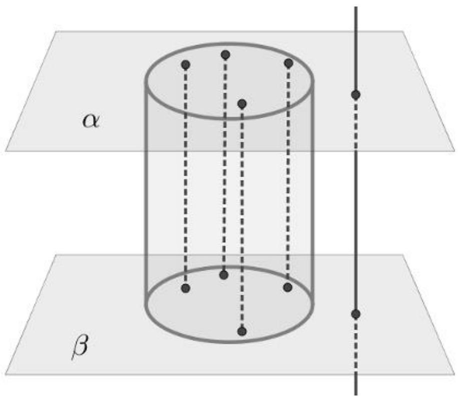


Figura 344 – Definição de um cilindro.

Podemos classificar os cilindros em dois grupos, os retos e os oblíquos, como podemos observar na figura 35 ambos possuem altura e raio da base previamente definidos, o que os diferencia é que nos cilindros oblíquos as bases não estão com os centros alinhados, o que faz o eixo central formar um ângulo diferente de $90º$ com a base.

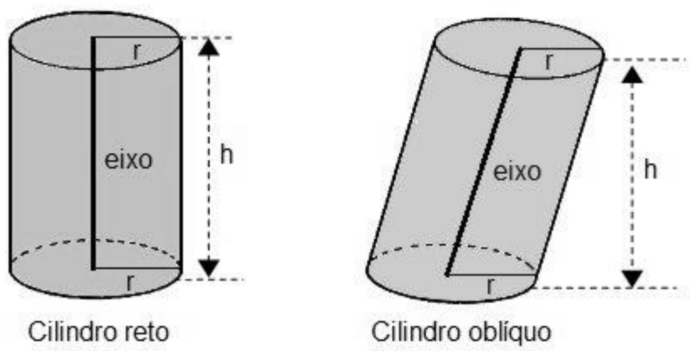


Figura 355 – Exemplos de cilindro reto e oblíquo.

Um caso particular de cilindro que é importante apresentar é aquele cuja secção meridiana é um quadrado, logo a altura é igual ao diâmetro da base. Tal cilindro representado na figura 36 é chamado de equilátero.

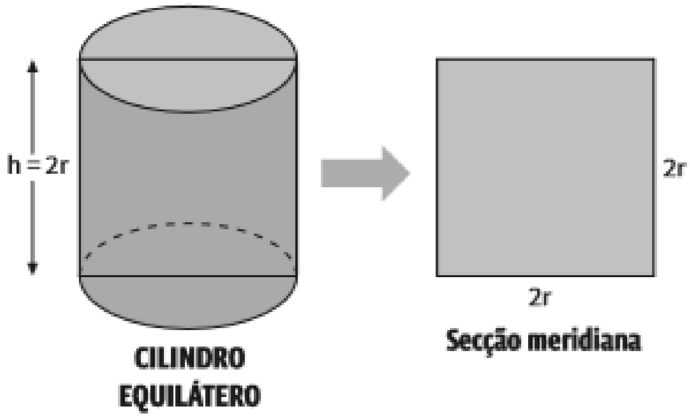


Figura 366 – Cilindro Equilátero

6.1.1 Área do cilindro

Para obtermos a área da superfície de um cilindro, devemos planificá-lo e observar sua composição. Um exemplo de tal ação pode ser verificado na figura 37.

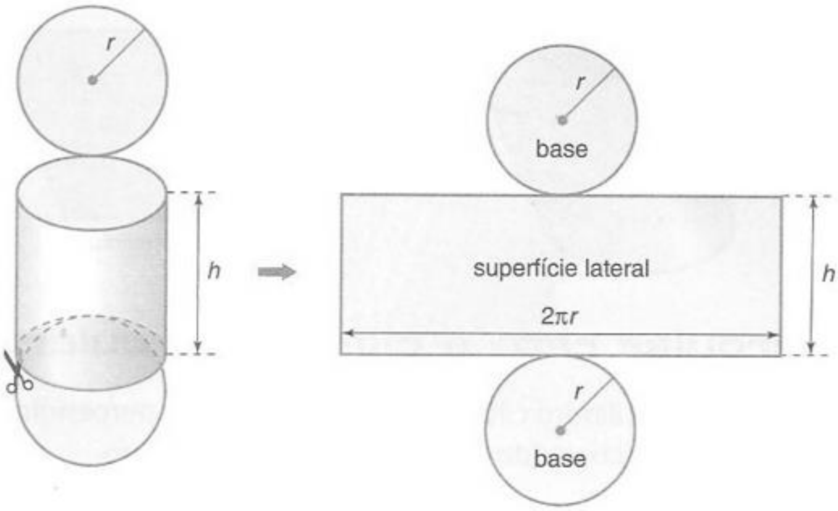


Figura 377 – Planificação de um cilindro

Na planificação, percebe-se que o cilindro é formado por duas bases circulares e um corpo retangular de comprimento $2\pi r$ e altura h, sendo portanto necessário calcular a área desses e somar para alcançar a área total. Desta forma:

$$A_{(CILINDRO)} = A_{(BASE1)} + A_{(BASE2)} + A_{(LATERAL)}.$$

$$A_{(CILINDRO)} = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh.$$

$$A_{(CILINDRO)} = 2\pi r(r + h).$$

6.1.2 Volume do cilindro

Aplicando o Princípio de Cavalieri, de maneira análoga ao procedimento feito no caso de prismas, conclui-se que o volume do cilindro é obtido por meio do produto da área da base por sua altura h.

$$V_{(CILINDRO)} = A_{(BASE)} \cdot altura.$$

$$V_{(CILINDRO)} = \pi r^2 \cdot h.$$

$$V_{(CILINDRO)} = \pi r^2 h.$$

6.2 Cones

Estes sólidos geométricos estão presentes em uma infinidade de aplicações cotidianas, sejam no funil de coar café, nos cones de sinalização de trânsito ou mesmo em uma simples casquinha de sorvete. Segundo Dante (2013), quando consideramos um plano α, no qual está contido uma região circular R e um ponto P não pertencente à α, a reunião de todos os segmentos que partem de R ao ponto P formam o sólido chamado *cone*, como pode ser visto na figura 38.

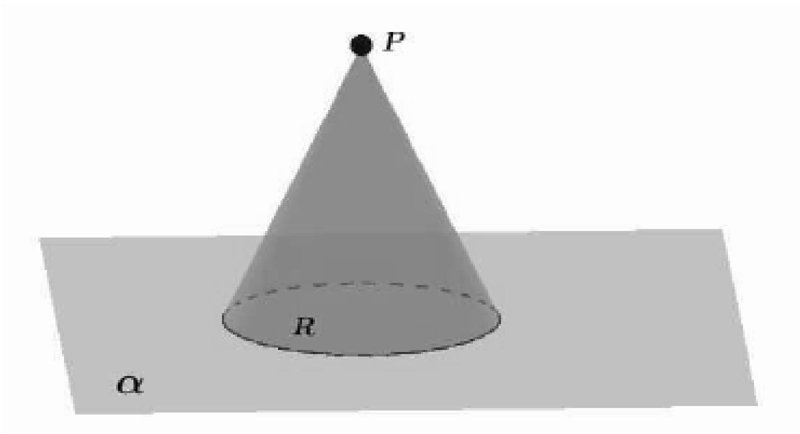


Figura 388 – Definição de cone

Também de maneira análoga aos cilindros, classificamos os cones em retos e oblíquos, sendo possível identificar seus elementos primordiais, que são a base, a altura e a geratriz. Esses elementos se relacionam no cone reto, como na figura 39, segundo o Teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2.$$

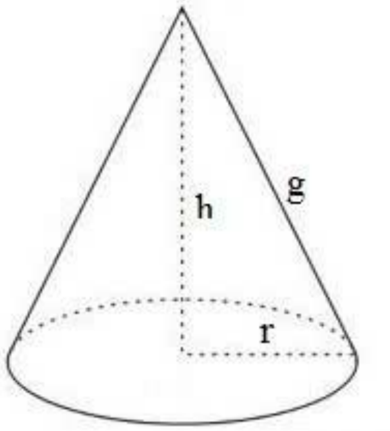


Figura 399 – Elementos do cone

6.2.1 Área do cone

Quando buscamos a área total de um sólido, uma das maneiras mais eficientes é observar sua planificação. Ao analisarmos a figura 40, temos uma base circular de raio r e uma área lateral composta pela reunião de todas as geratrizes do cone. Essa observação vai ao encontro com Paiva (2013), que a área total de um cone é a soma da área de sua base de raio r com a superfície lateral do cone reto. A área lateral é equivalente à área de um setor circular de raio g e arco de comprimento $2\pi r$.

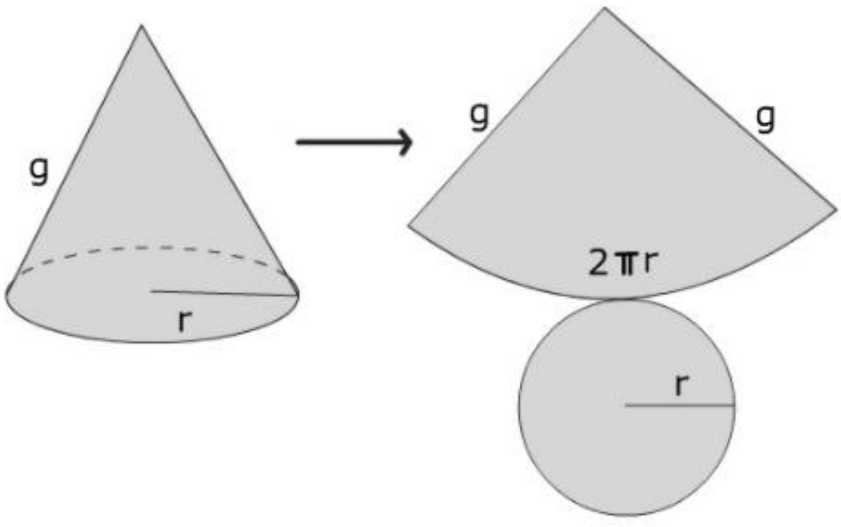


Figura 40 – Planificação do cone

Assim:

$$A_{(CONE)} = A_{(BASE)} + A_{(LATERAL)}.$$

Sabemos que a base é uma circunferência de raio r, cuja área é $A = \pi r^2$, o que nos leva à área lateral, que é um setor circular, cuja área pode ser determinada por meio de uma simples regra de três, na qual podemos correlacionar a lateral com o comprimento do arco que a delimita e a possível área total com o comprimento total.

$$\frac{A_{(LATERAL)}}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g}.$$

$$A_{(LATERAL)} = \frac{2r\pi^2 g^2}{2\pi g}.$$

$$A_{(LATERAL)} = \pi r g.$$

Voltando a área do cone temos:

$$A_{(CONE)} = \pi r^2 + \pi r g.$$

$$A_{(CONE)} = \pi r(r + g).$$

6.2.2 Volume do cone

Assim como podemos calcular o volume de um cilindro utilizando o Princípio de Cavalieri, fazendo alusão a um prisma, também é possível calcular o volume de um cone por meio de uma pirâmide. Vamos inicialmente considerar um cone de altura h e área da base B e uma pirâmide com a mesma altura h e uma área A, ambos em um mesmo plano α, considere ainda que as áreas A e B são iguais. Segundo Lima (2011) se passarmos um plano paralelo à α, cuja distância em relação aos vértices seja H, encontraremos áreas A' e B' , vide figura 41, sendo que:

$$\frac{A'}{A} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 = \frac{B'}{B}$$

Com isso temos, $A' = B'$, assim, pelo Princípio de Cavalieri, garantimos que ambos os sólidos têm mesmo volume.

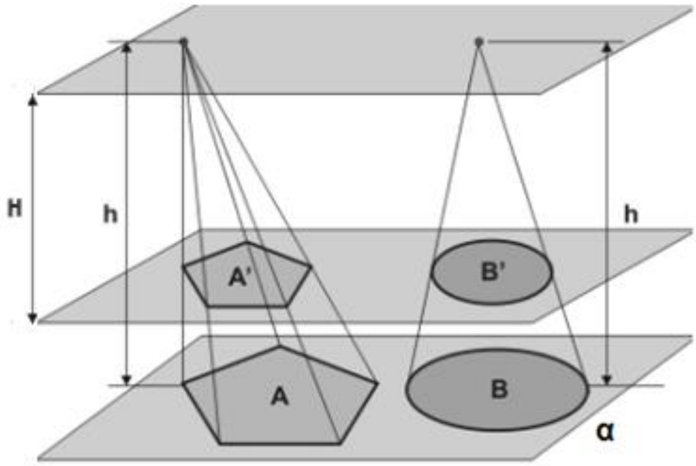


Figura 411 – Volume do cone

Portanto,

$$V_{(CONE)} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

$$V_{(CONE)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

7 ESFERAS

Paiva (2013), considera um ponto O e um segmento de medida R. A *esfera* de centro no ponto O e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a R, como na figura 42. A esfera também é um sólido obtido por meio da rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contenha seu diâmetro.

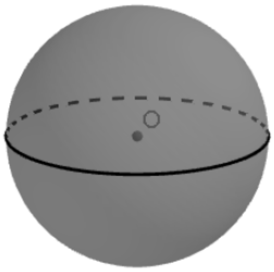


Figura 422 – Esfera

7.1 Volume da esfera

O volume da esfera será calculado usando o Princípio de Cavalieri. Inicialmente vamos observar um sólido denominado de *anticlepsidra*. Tal sólido é obtido por meio da retirada de dois cones cujas bases coincidem com as bases de um cilindro equilátero, de raio r e altura $2r$. Quando unimos os dois cones, temos uma *clepsidra*.

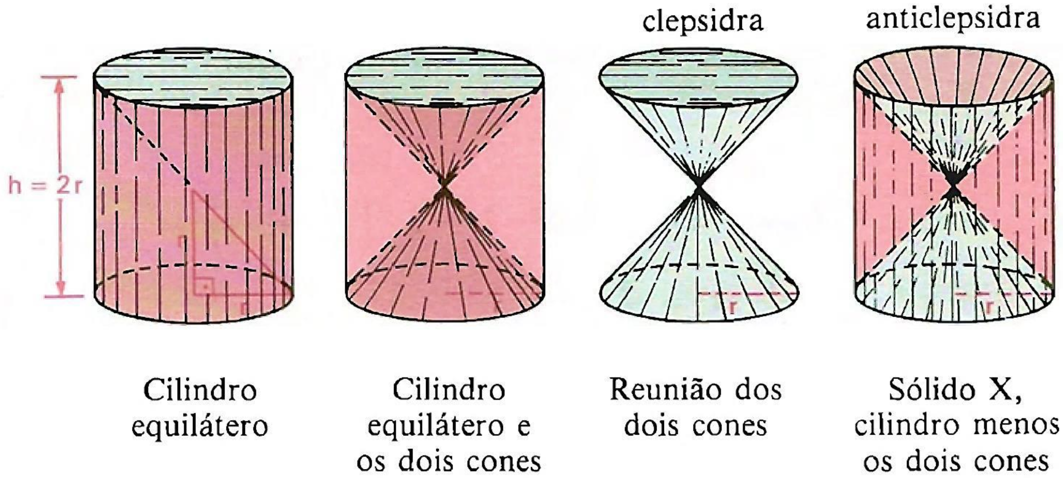


Figura 433 - Construindo uma anticlepsidra

Por meio da figura 43, percebemos que o volume de uma anticlepsidra (V_A) é igual a diferença entre o volume do cilindro e dos dois cones.

$$V_{(CILINDRO)} = \pi r^2 h\,.$$

$$V_{(CILINDRO)} = \pi r^2 2r.$$

$$V_{(CILINDRO)} = 2\pi r^3.$$

$$V_{(CONES)} = 2\left(\frac{\pi r^2 h}{3}\right).$$

$$V_{(CONES)} = 2\left(\frac{\pi r^2 r}{3}\right).$$

$$V_{(CONES)} = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

$$V_A = V_{(CILINDRO)} - V_{(CONES)}.$$

$$V_A = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3}.$$

$$V_A = \frac{6\,\pi r^3 - 2\pi r^3}{3}.$$

$$V_A = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Agora, vamos mostrar que o volume da esfera S é igual ao da anticlepsidra. Para isso, em consonância com o Princípio de Cavalieri, é suficiente mostrar que a esfera S e a anticlepsidra determinam seções de igual área em cada um dos planos horizontais que os cortam. De fato, consideremos um cilindro reto cuja base é um círculo de raio r e cuja altura tem medida $2r$. Imaginemos que a esfera dada se apoie sobre o mesmo plano horizontal no qual está contido a base do cilindro, como na figura 44.

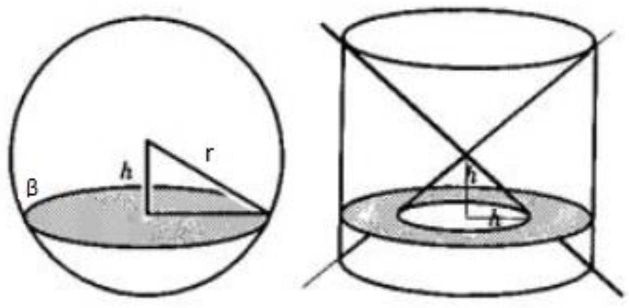


Figura 444 – Esfera S e Cilindro cortados por um plano β.

Dado o plano β, seja h sua distância ao centro da esfera ou ao vértice comum dos dois cones. Então, $\beta \cap S$ é um círculo de raio

$$\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Além disso, $\beta \cap A$ é uma coroa circular cujo raio externo é igual a r e o raio interno é igual a h. Segue-se que:

$$\text{Área de } (\beta \cap S) = \pi(r^2 - h^2) \text{ e Área de } (\beta \cap A) = \pi(r^2 - h^2).$$

Logo:

$$V_{(ESFERA)} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

8 PLANO DE AULA COM O GEOGEBRA

Neste capítulo será apresentada uma série de planos de aula de geometria em que o GeoGebra surge como um elemento facilitador do processo de compreensão, devido ao seu potencial dinâmico e interativo. Vale ressaltar que a aula ganha ainda mais integração se for realizada no laboratório de informática, visto que todos os alunos poderão interagir com o aplicativo, podendo surgir inclusive novas perspectivas durante a aula. No capítulo 9 será apresentada uma lista de exercícios para cada plano de aula visando fixar os conteúdos. Nos Apêndices constam as soluções das listas, sendo alguns dos exercícios resolvidos com o auxílio do GeoGebra.

Em todos os planos de aula apresentados, serão expostos links com trabalhos realizados no GeoGebra, os quais estão disponíveis para utilização. Cabe ao professor, de acordo com as necessidades e características de cada turma, adaptar e criar novas aulas. No caso do site, em que as construções apresentadas estão ancoradas, sair do ar, a seção de anexos tem todos os protocolos de construção.

8.1 – Aula 1 (Projeções e vistas)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Exercitar a visualização espacial.

- Analisar as vertentes do mecanismo de obtenção de vistas e projeções.

- Visualizar objetos tridimensionais em conjunto com suas projeções obtidas sobre planos diversos.

Duração da atividade:

Duas aulas de 55 minutos.

Recursos da aula:

Notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios.

Sequência da aula:

Inicialmente, o professor deverá apresentar os conceitos relativos à ortogonalidade, o significado de projeção ortogonal e o que são vistas.

A partir daí, solicitará que os alunos acessem a primeira atividade, disponível em https://www.geoebra.org/m/tDPaWeWW.

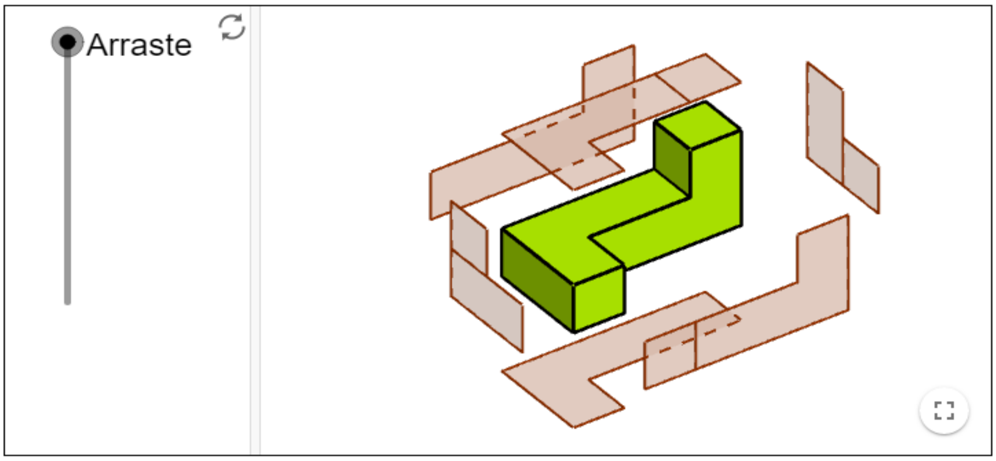


Figura 455 – Projeções

Nesse espaço interativo, como apresentado na figura 45, o professor mostrará aos alunos, por meio do botão lateral de arraste todas as vistas de um sólido tridimensional, sendo possível rotacionar a imagem e observar todas as projeções por diversos ângulos.

A segunda atividade, disponível em https://www.GeoGebra.org/m/dyY2TTbL, permitirá ao professor e aos alunos transitarem entre as três vistas mais comuns, que são a superior, a frontal e a lateral, de acordo com a figura 46.

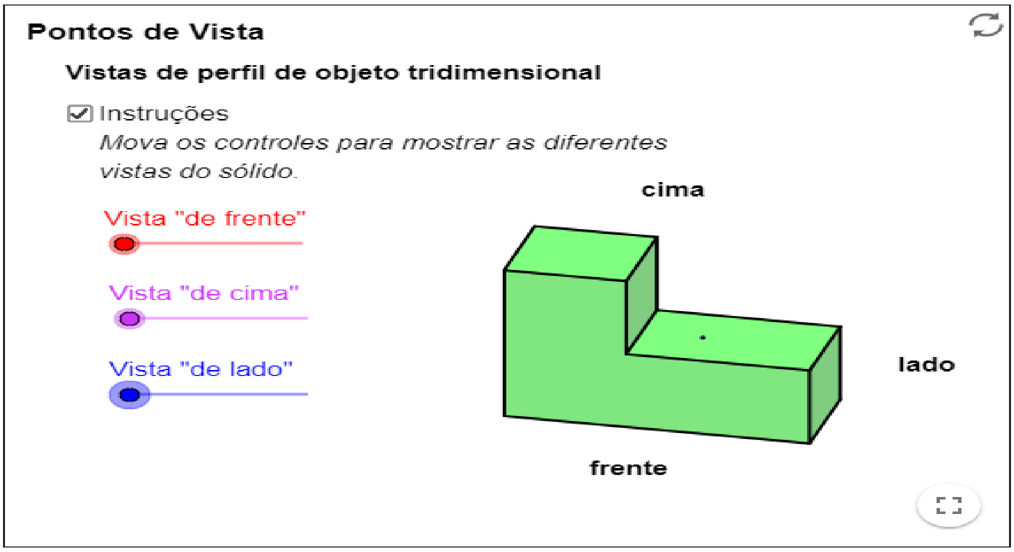


Figura 466 – Vistas

E para finalizar a aula, é interessante apresentar aos alunos que um mesmo sólido pode apresentar diferentes projeções dependendo da vista escolhida. Para isso, poderá utilizar os conteúdos disponíveis em https://www.GeoGebra.org/m/n7hB2Tr5 e https://www.GeoGebra.org/m/apDQNNdv, de projeções de um cone e de um cilindro como apresentado na figura 47.

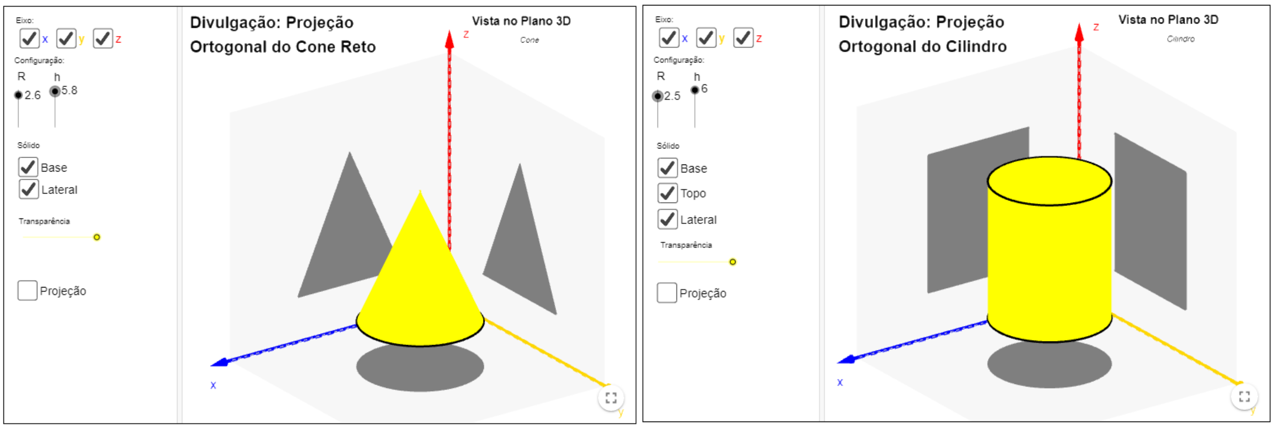


Figura 477 – Projeções de cone e cilindro.

Após essas apresentações e interação dos alunos com o software o professor solicitará a solução da lista de exercícios como forma de avaliar o aprendizado a respeito do tema.

8.2 – Aula 2 (Teorema de Euler e os Poliedros de Platão)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Diferenciar diferentes tipos de sólidos.

- Visualizar o processo de planificação de alguns sólidos.

- Identificar os poliedros de Platão.

- Diferenciar vértices, faces e arestas.

Duração da atividade:

Uma aula de 55 minutos.

Recursos da aula:

Quadro branco, pincel, notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios impressa.

Sequência da aula:

A princípio, o professor deverá discorrer sobre o conceito de sólidos, os principais sólidos e as figuras bidimensionais que os formam, bem como definir vértices, faces, arestas, bases, alturas. Além disso, pode explanar sobre Platão e sua contribuição no campo da Geometria Espacial culminando com a apresentação das características dos poliedros de Platão.

Após a teoria inicial, o professor deve solicitar que os alunos acessem https://www.GeoGebra.org/m/jsmdgPCF, para que possam visualizar na prática os poliedros de Platão, vide figura 48, bem como suas planificações, permitindo ainda observar os conceitos de arestas, vértices e faces apresentando, inclusive, o Teorema de Euler.

Figura 488 – Sólidos de Platão

8.3 – Aula 3 (Prismas)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Identificar e separar os prismas de outros sólidos como pirâmides, cones e cilindros.

- Analisar e resolver problemas inerentes a prismas que envolvam suas bases, faces, altura e outros elementos.

- Classificar os prismas.

- Calcular a área e o volume de diversos prismas.

Duração da atividade:

Duas aulas de 55 minutos.

Recursos da aula:

Quadro branco, pincel, notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios impressa.

Sequência da aula:

O professor pode apresentar uma breve introdução a respeito dos prismas e sua visualização no dia a dia. Após esse instante, pode solicitar que os alunos acessem o link https://www.GeoGebra.org/m/DQwB6Mhg, no qual poderão visualizar os diversos tipos de prismas, bem como suas planificações, suas faces, apótema, vértices e arestas, como pode ser observado na figura 49.

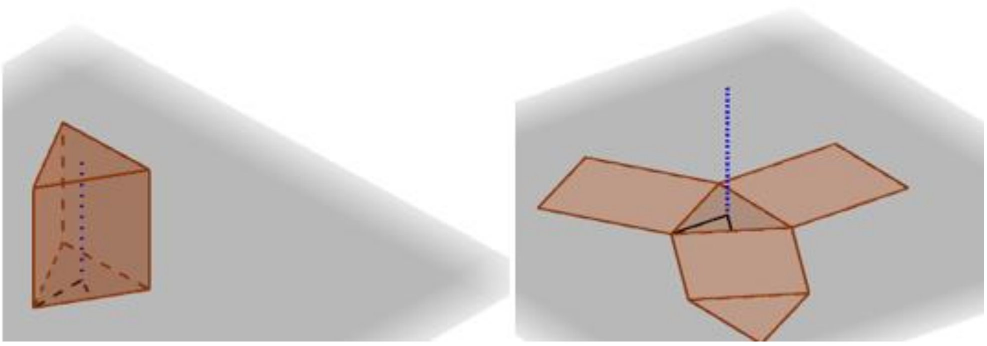


Figura 499 – Prismas e planificações.

Ao concluir com os alunos as investigações a respeito dos prismas, pode-se conduzi-los ao segundo estágio que é o cálculo efetivo da área da base, das áreas laterais, da área total e do volume dos prismas. Para isso, sugira que acessem os dois links https://www.GeoGebra.org/m/qSj8NWjr e https://www.GeoGebra.org/m/VQfuU8cR, nos quais são apresentados alguns casos para fazê-los inferir como calcular os itens mencionados anteriormente tendo alguns dados disponíveis, vide figura 50.

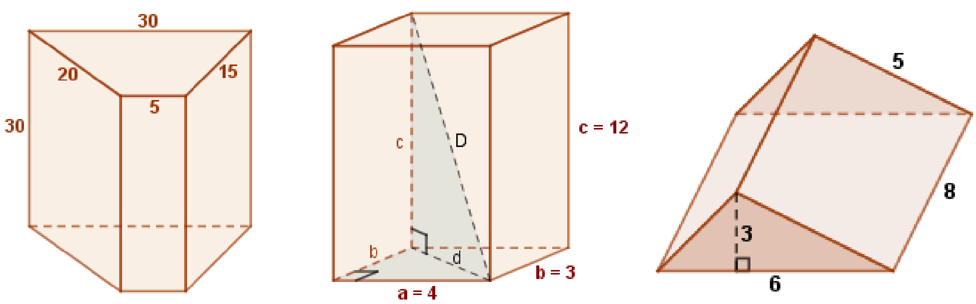


Figura 50 – Exemplos de áreas e volumes de prismas.

8.4 – Aula 4 (Pirâmides)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Diferenciar os diferentes tipos de pirâmides.
- Visualizar a planificação das pirâmides.
- Analisar as relações métricas envolvidas nos cálculos de área e volume.
- Calcular a área e o volume de pirâmides.

Duração da atividade:

Duas aulas de 55 minutos.

Recursos da aula:

Quadro branco, pincel, notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios impressa.

Sequência da aula:

A princípio, o professor pode apresentar aos alunos os conceitos e elementos relacionados a pirâmides, como na figura 51. Uma opção para tal pode ser observada em https://www.GeoGebra.org/m/MayxczTq.

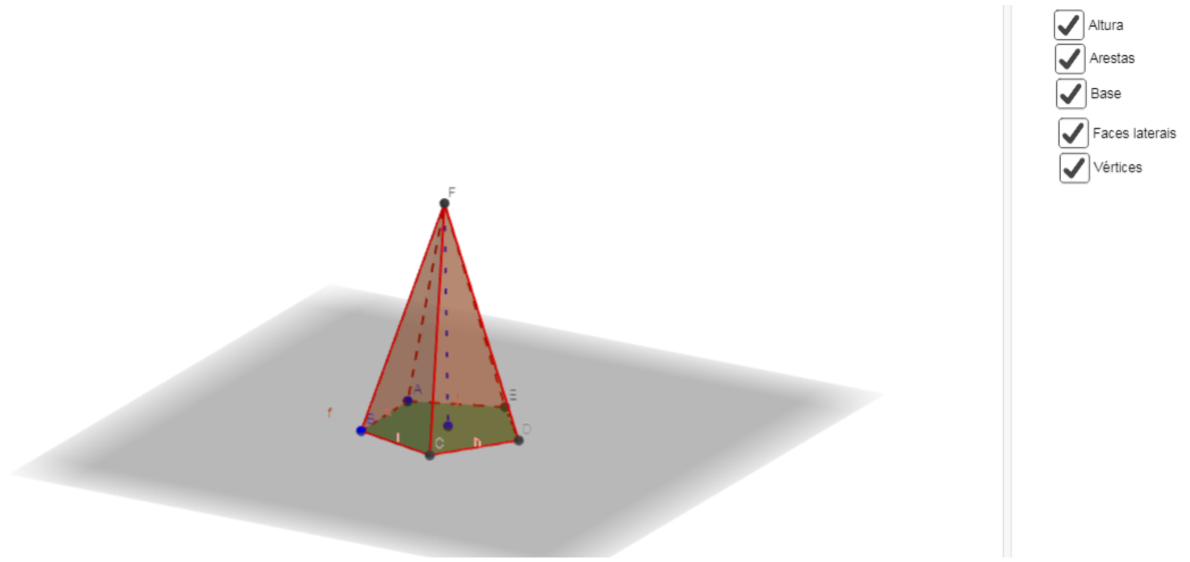


Figura 51 – Elementos da pirâmide.

Após esse instante inicial, é preciso perceber que nas pirâmides existem alguns triângulos retângulos importantes que trazem elementos para o cálculo da área e do volume. Estes, como na figura 52, podem ser observados e discutidos em https://www.GeoGebra.org/m/TCRGMWZZ.

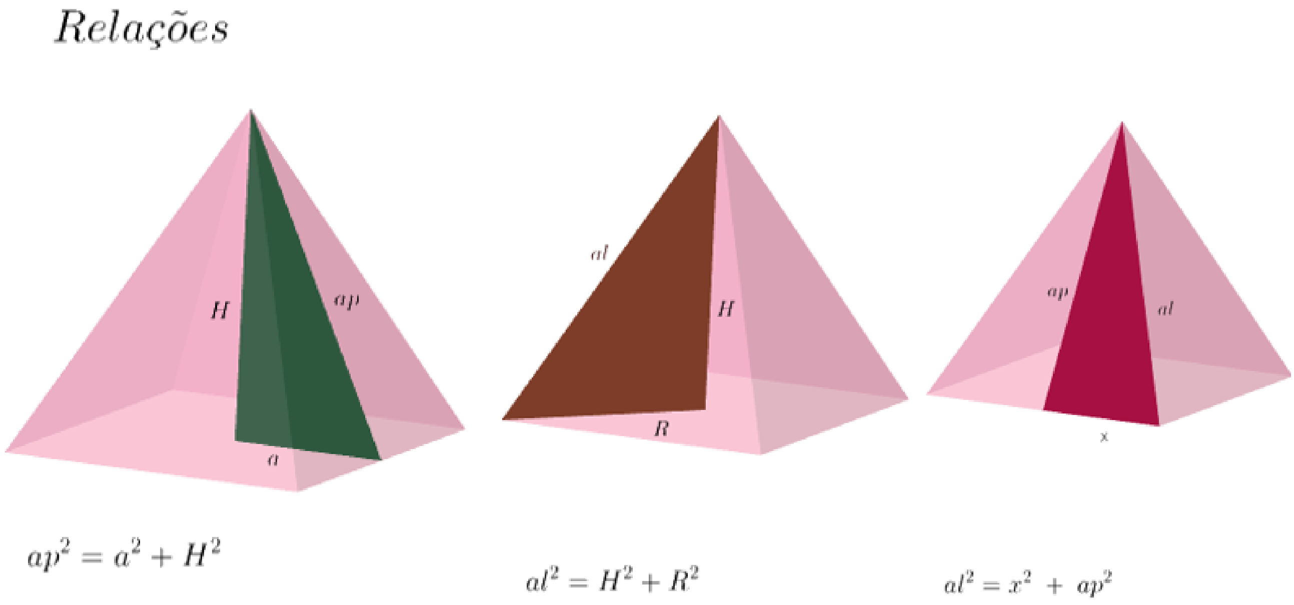


Figura 52 – Relação do teorema de Pitágoras nas pirâmides.

Por fim, é relevante analisar uma possível dedução da fórmula do volume da pirâmide, para levar ao aluno maior embasamento e perspectiva quanto a compreensão e aplicação dessa fórmula. Para isso, pode-se solicitar que os alunos acessem https://www.GeoGebra.org/m/nj7A2eTd, com essa apresentação ficará mais claro o formato da fórmula bem como sua origem, como representado na figura 53.

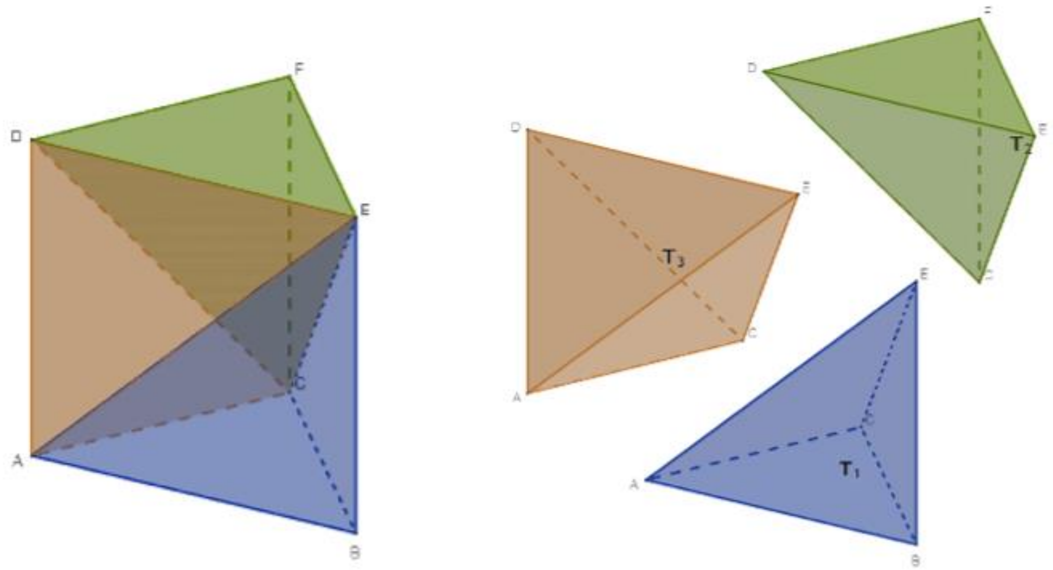


Figura 533 - Relação do teorema de Pitágoras nas pirâmides.

8.5 – Aula 5 (Cilindros)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Compreender e visualizar as propriedades do cilindro como um sólido de rotação.
- Visualizar o processo de planificação de um cilindro.
- Identificar as formas geométricas que formam o cilindro.
- Calcular área da base, lateral, total e o volume de um cilindro.

Duração da atividade:

Duas aulas de 55 minutos.

Recursos da aula:

Quadro branco, pincel, notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios impressa.

Sequência da aula:

Em um primeiro momento, é essencial que o professor apresente a teoria relacionada a cilindros a partir da base, que retome os conceitos de circunferência e seus elementos, passe também pelo Princípio de Cavalieri, até apresentar propriamente os conceitos de área da base, área lateral e volume. Feito isso, pode solicitar que os alunos acessem o link https://www.GeoGebra.org/m/fPwMxVQB em que visualizarão algumas informações sobre cilindros, como por exemplo seus elementos, processo de construção e cálculo de volume com a altura definida, como pode ser observado nas figuras 54, 55 e 56.

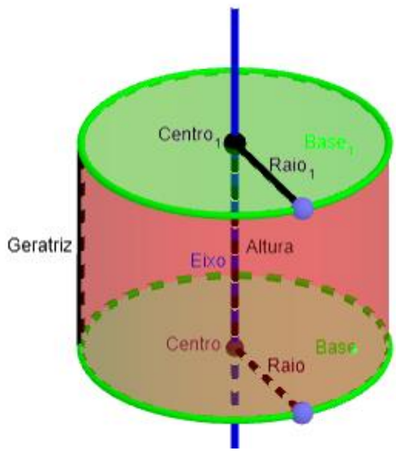


Figura 544 – Elementos de um cilindro.

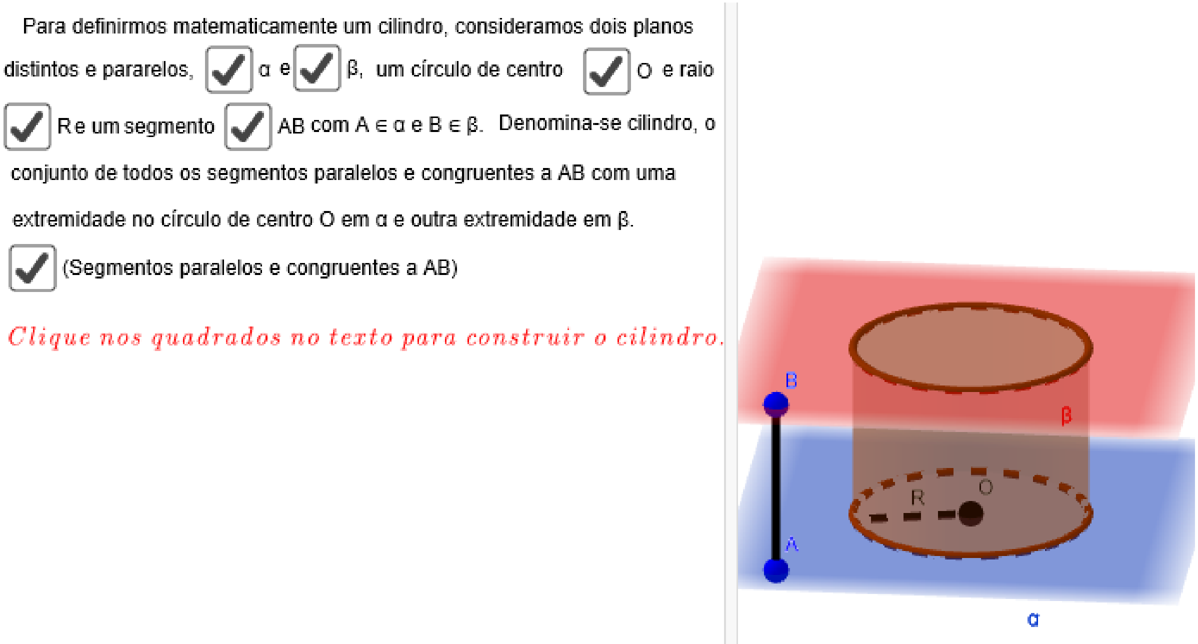


Figura 555 – Construção de um cilindro.

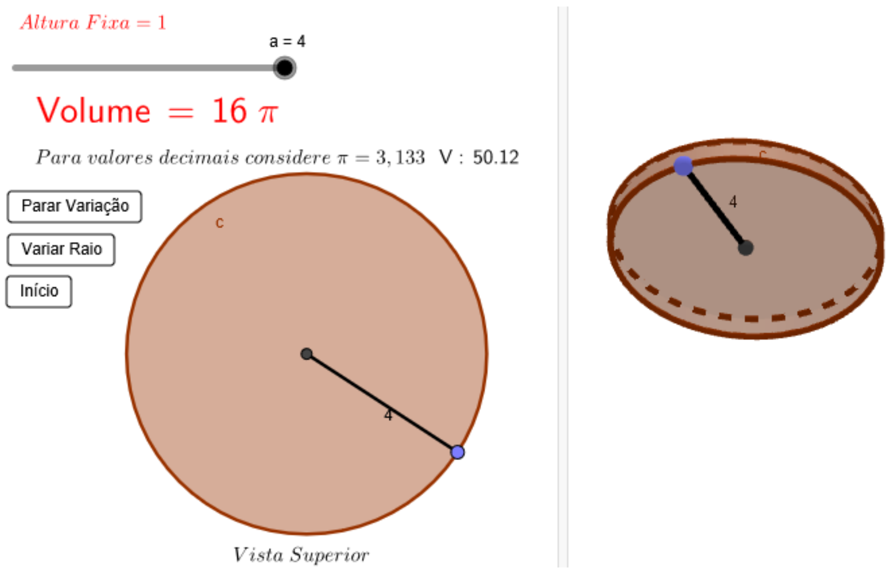


Figura 566 – Análise do volume de um cilindro.

Nesse momento de interação com o software, o professor poderá complementar suas apresentações teóricas realizando cálculos intuitivos com os alunos analisando, inclusive, o que ocorre com varrições proporcionais de raios e alturas e os volumes dos respectivos cilindros gerados.

A figura 57 representa um segundo momento, em que os alunos acessarão https://www.GeoGebra.org/m/XzfFNDYV no qual poderão interagir com o cilindro fazendo a sua planificação e observando seus detalhes de construção bem como sua área da base, área lateral e área total.

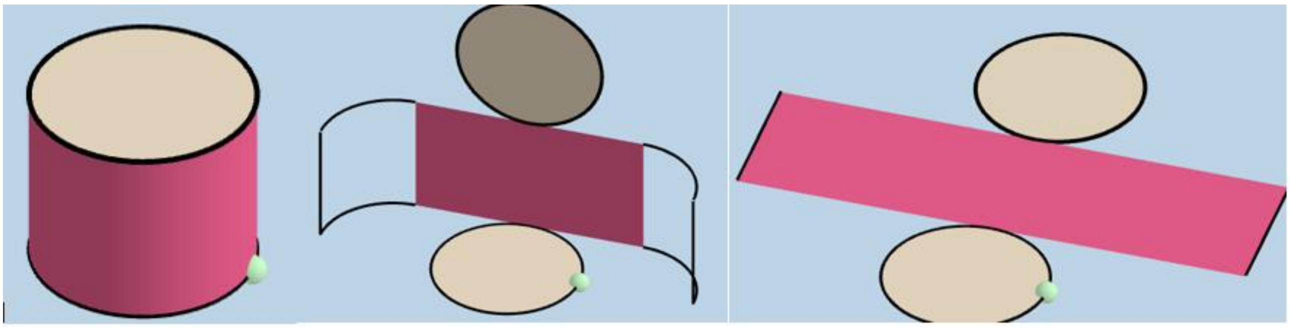


Figura 577 – Planificação de um cilindro.

8.6 – Aula 6 (Cones)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Identificar os principais elementos que compõem um cone.
- Visualizar seu processo de planificação.
- Calcular sua área da base, lateral e total.
- Calcular o volume do cone.

Duração da atividade:

Duas aulas de 55 minutos.

Recursos da aula:

Quadro branco, pincel, notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios impressa.

Sequência da aula:

Ao abordar o assunto cone, um primeiro questionamento costuma ser sua relação com o cilindro. Esse é um ponto de partida relativamente natural, assim é interessante o professor relembrar os aspectos mais relevantes desse sólido bem como correlacioná-lo ao cone, para isso pode solicitar que os alunos acessem https://www.GeoGebra.org/m/DpPN2jZz a fim de que possam variar a altura e o raio de um cilindro e de um cone calculando seus respectivos volumes.

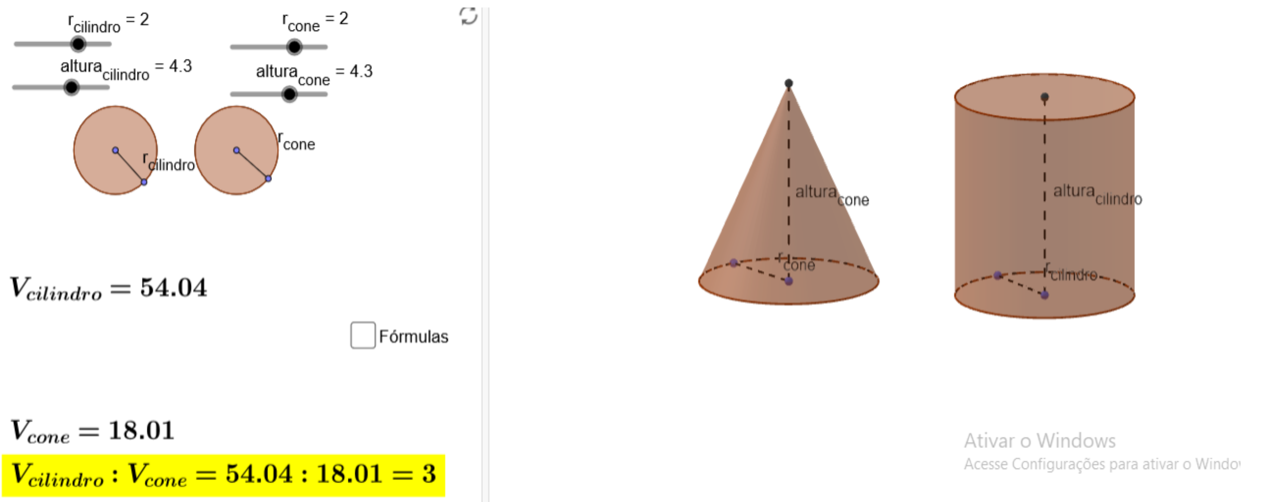


Figura 588 – Comparando cilindro e cone.

Observando a figura, é interessante perceberem que quando ambos possuem mesmo raio e altura, a razão entre seus volumes é 3, o que permitirá uma melhor assimilação da fórmula do cone a partir do cilindro.

Outra possibilidade que os alunos podem ter com o GeoGebra é a formação do cone por meio da revolução de um triângulo retângulo, para visualizar esse efeito podem acessar https://www.GeoGebra.org/m/gzGHtW7c.

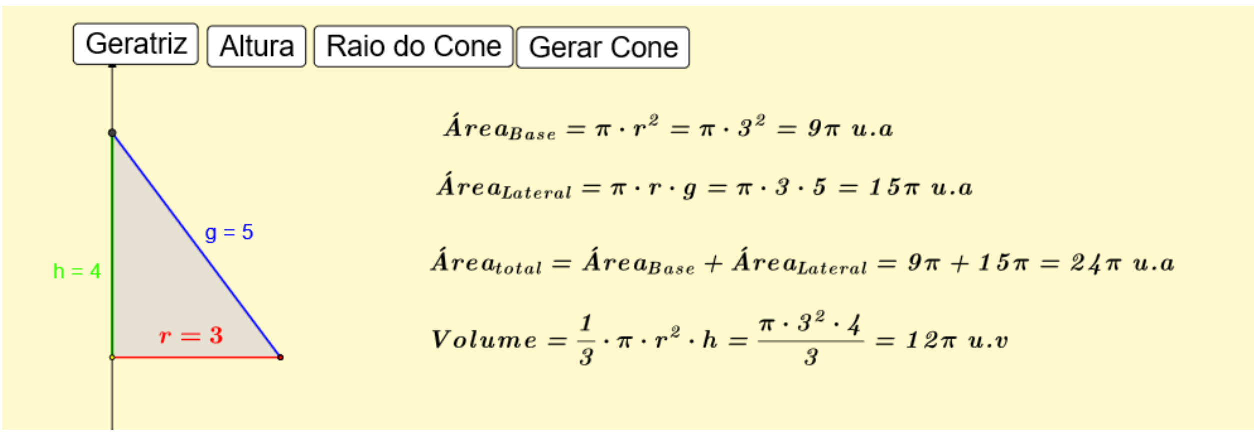


Figura 599 – Cone de revolução.

A figura 59 é uma representação do que o aluno encontrará. Ao clicar na opção gerar cone será construído o referido sólido por meio da rotação da geratriz em torno da altura. Nesse momento pode ser trabalhado de forma complementar também o teorema de Pitágoras.

Para finalizar a aula, ainda é necessário compreender a área lateral de um cone, isso pode ser observado por meio do link https://www.GeoGebra.org/m/v9azzUF2.

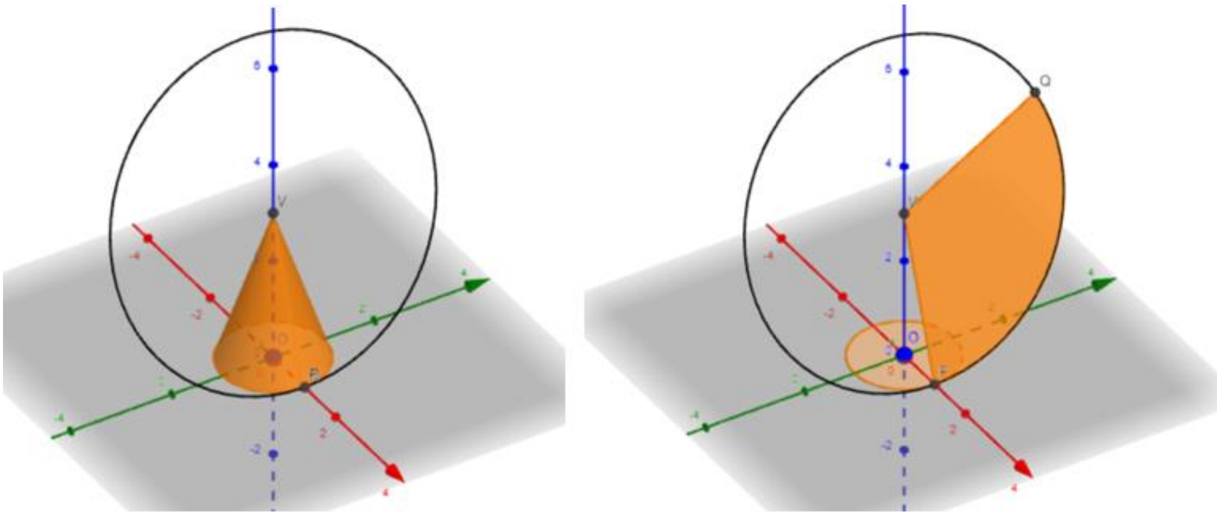


Figura 60 – Área lateral de um cone.

Nesse momento é necessário que o professor pondere a respeito da área lateral do cone dando ênfase ao fato de ela ser obtida através da área de um setor circular do qual o raio é a geratriz do cone, como pode ser visto na figura 60.

8.7 – Aula 7 (Esferas)

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

- Calcular a área superficial de uma esfera.
- Calcular o volume de uma esfera.
- Visualizar e compreender uma das demonstrações do volume da esfera.

Duração da atividade:

Duas aulas de 55 minutos.

Recursos da aula:

Quadro branco, pincel, notebook, projetor multimídia, laboratório de informática e lista de exercícios impressa.

Sequência da aula:

A esfera é um sólido à parte, já que seu volume e sua área superficial não tem uma correlação direta com outro sólido. Assim uma primeira abordagem pode ser realizada quanto ao conhecimento de seus elementos, definindo seu centro, sua condição de existência, o raio e o diâmetro, bem como as fórmulas para cálculo de área superficial e volume. Definidos tais elementos, os alunos poderão observá-los, como na figura 61, em https://www.GeoGebra.org/m/TqcaB5Qz, tendo inclusive como variar o raio para perceber as mudanças em área e volume.

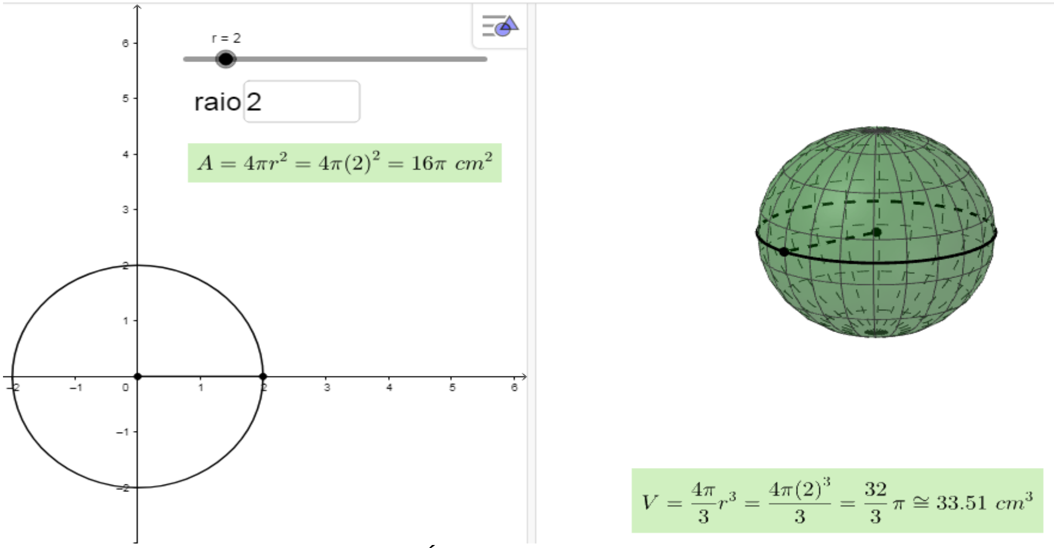


Figura 61 – Área e volume de uma esfera.

Um outro aspecto interessante para se observar de forma interativa, é a construção da fórmula do volume da esfera por meio da comparação entre a diferença de volumes entre um cilindro e dois cones. Uma demonstração desse princípio, como na figura 62, pode ser encontrada em https://www.GeoGebra.org/m/mjJZpYwW.

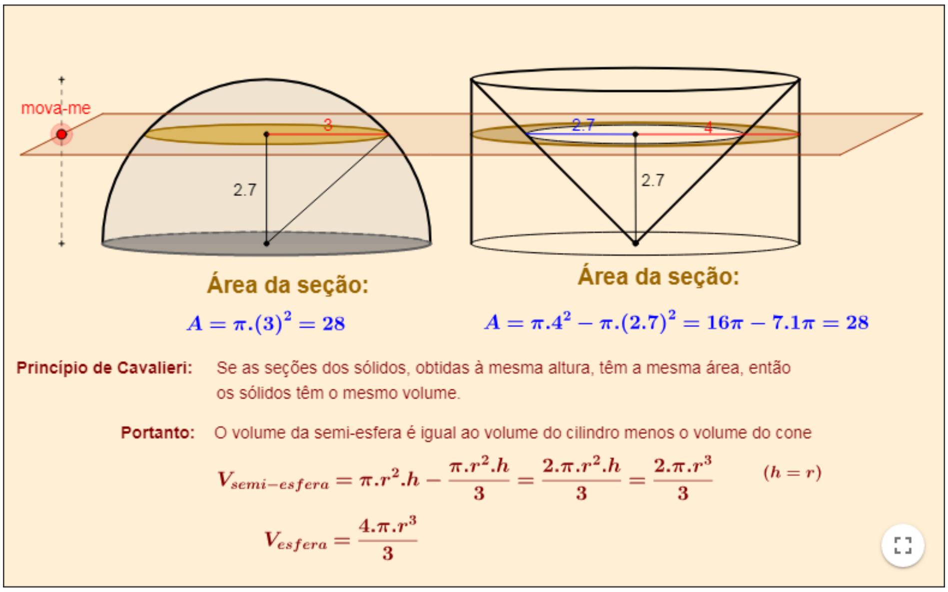


Figura 622 – Demonstração do volume de uma esfera.

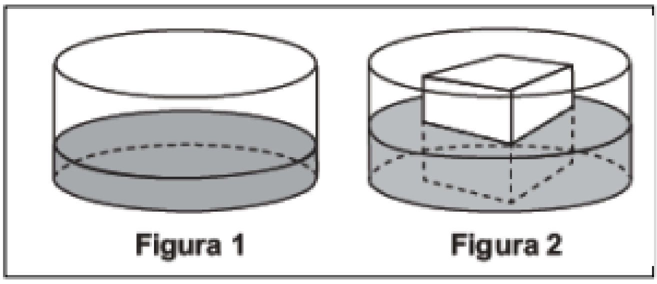
Com esse momento de interação podem ser ainda revisitados temas como cilindros, cones, teorema de Pitágoras, área de circunferência e coroa circular, fortalecendo conceitos anteriores com os alunos.

9 LISTAS DE EXERCÍCIOS

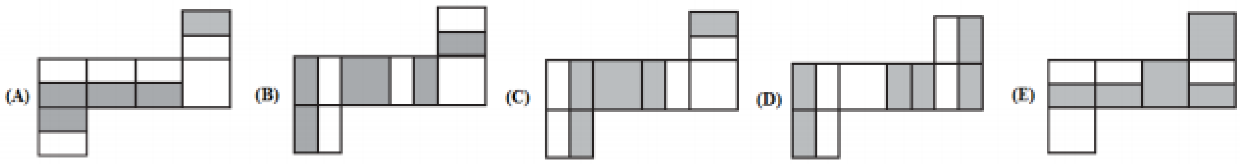
Uma forma de verificar a absorção das atividades computacionais apresentadas no capítulo 8 é a resolução de exercícios relacionados ao tema. Esse capítulo apresenta uma série de questões, em sua maioria aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio.

9.1 Lista (Projeções e vistas)

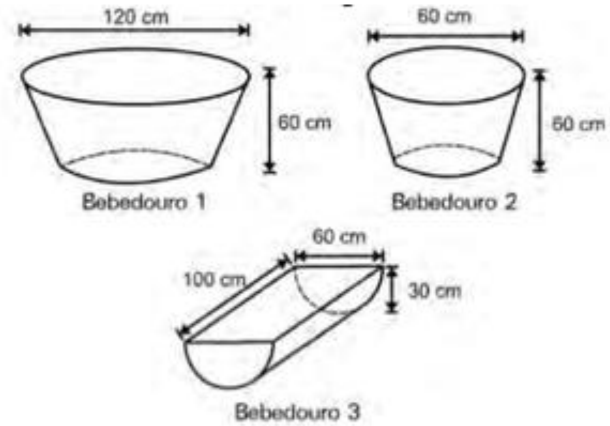
01) (ENEM 2015) Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.



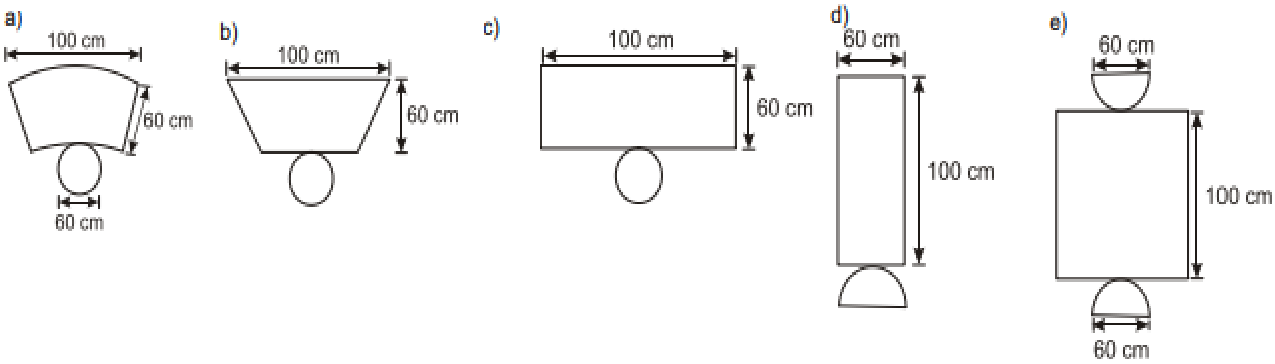
Qual é a planificação desse cubo após submerso?



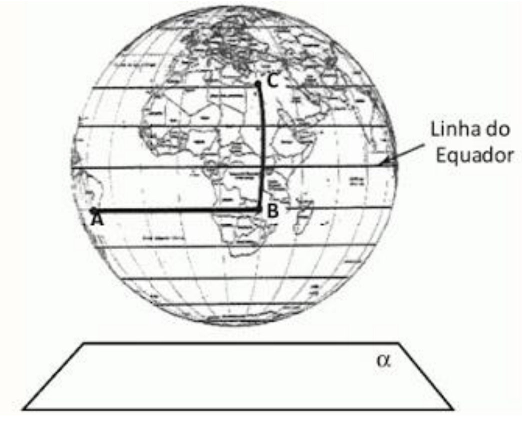
02) (ENEM 2010) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura a seguir.



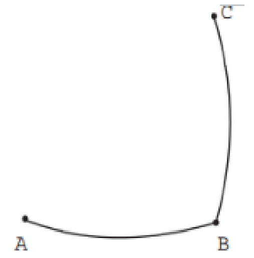
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



03) (ENEM 2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

a) 

b) 

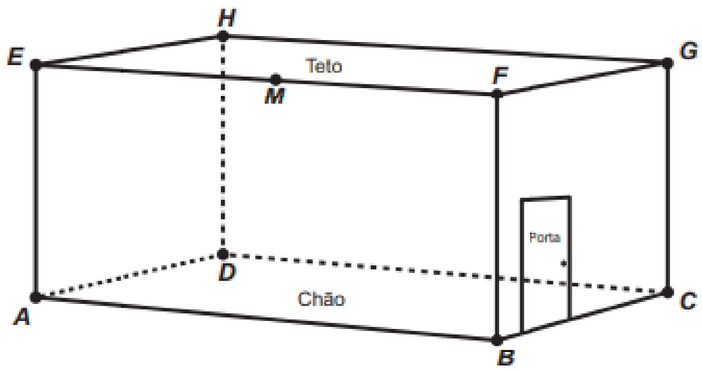
c) 

d) 

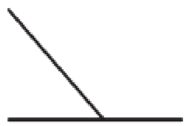
e) 

04) (ENEM 2017) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresenta o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura. A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

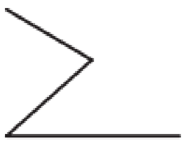
A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

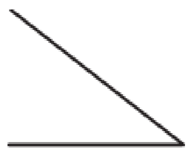


A

B 

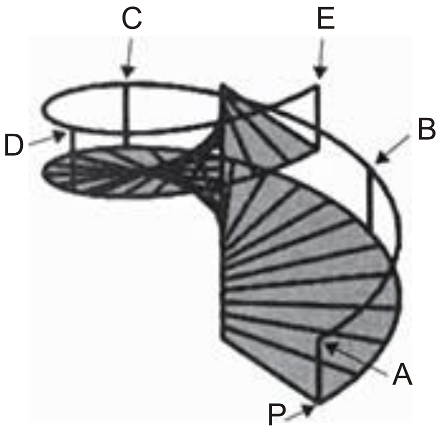
C 

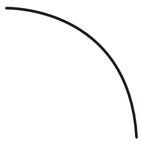
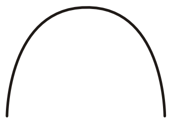
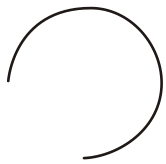
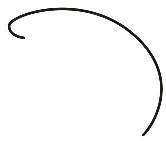
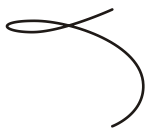
D 

E 

05) (ENEM 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D e E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:



A)  B)  C)  D)  E) 

9.2 Lista (Poliedros e Sólidos de Platão)

01) (ENEM 2016) Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler, $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

a) $2\,V - 4F = 4$

b) $2\,V - 2F = 4$

c) $2\,V - F = 4$

d) $2\,V + F = 4$

e) $2\,V + 5F = 4$

02) (ENEM 2015) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6 b) 8 c) 14 d) 24 e) 30

03) Sobre as sentenças:

I. Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.

II. Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.

III. Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.

É correto afirmar que apenas:

a) I é verdadeira.

b) II é verdadeira.

c) III é verdadeira.

d) I e III são verdadeiras.

e) II e III são verdadeiras.

04) (ENEM 2016) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

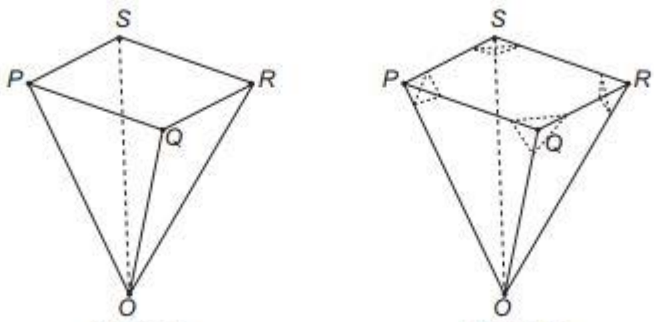


Figura 1 Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.

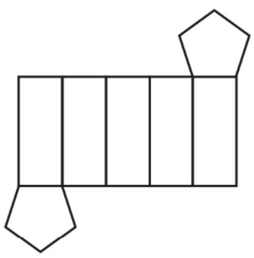
b) 9, 24 e 13.

c) 7, 15 e 12.

d) 10, 16 e 5.

e) 11, 16 e 5.

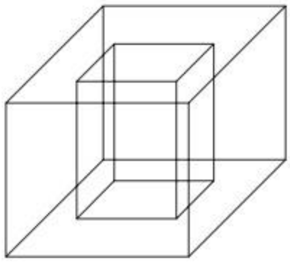
05) (ENEM 2014) Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura. Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?



a) 10 b) 12 c) 14 d) 15 e) 16

9.3 Lista (Prismas)

01) (ENEM 2010) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

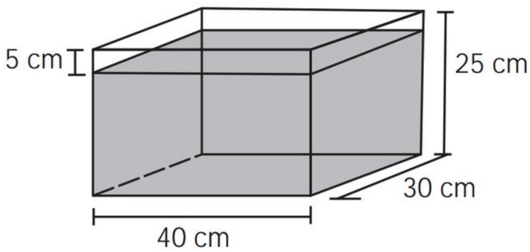
a) 12 cm³ b) 64 cm³ c) 96 cm³ d) 1216 cm³ e) 1728 cm³

02) (ENEM 2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

a)5 cm. b) 6 cm. c) 12 cm. d) 24 cm. e) 25 cm.

03) (ENEM 2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

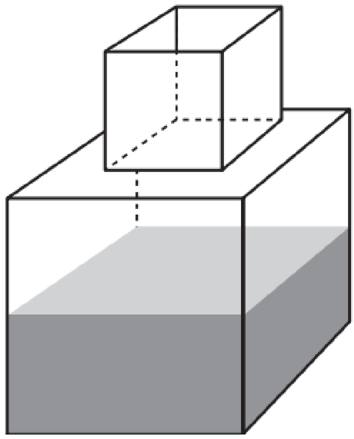
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

04) (ENEM 2014) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

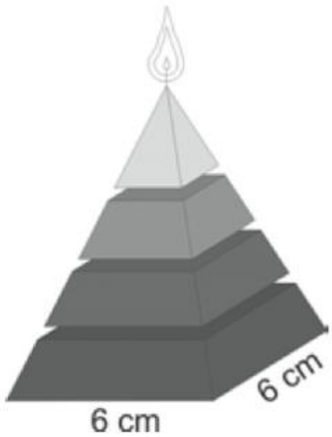
a) 8 b) 10 c) 16 d) 18 e) 24

05) (ENEM 2014) Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas no aquário. Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário. O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a:

a) 48. b) 72. c) 84. d) 120. e) 168.

9.4 Lista (Pirâmides)

01) (ENEM 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos da mesma altura, 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e uma pirâmide na parte superior, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem $1{,}5$ cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3 b) 189 cm^3 c) 192 cm^3 d) 216 cm^3. e) 540 cm^3

02) (ENEM 2009) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

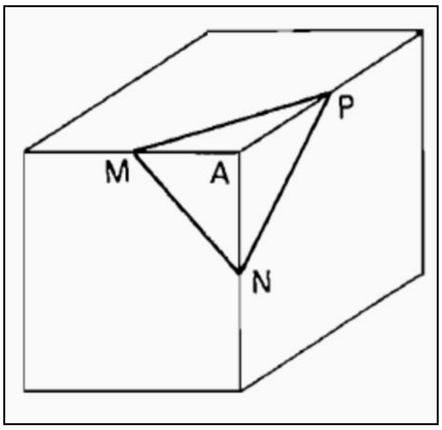
d) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

03) Um faraó projetou uma pirâmide de 72 m de altura, cuja base é um quadrado de lado 100 m, dentro da qual estaria seu túmulo. Para edificar 1000 m^3 a mão de obra escrava gastava, em média, 72 dias. Nessas condições, o tempo necessário, em anos, para a construção dessa pirâmide foi, aproximadamente,

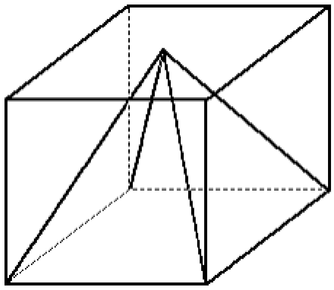
a) 47 b) 52 c) 56 d) 60 e) 66

04) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira se recorta uma pirâmide $AMNP$, no qual M, N e P são os pontos médios das arestas, como se mostra na figura. Se V é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta ao retirar as 8 pirâmides é igual a:



a) $\frac{1}{2}$V b) $\frac{3}{4}$V c) $\frac{2}{3}$V d) $\frac{5}{6}$V e) $\frac{3}{8}$V

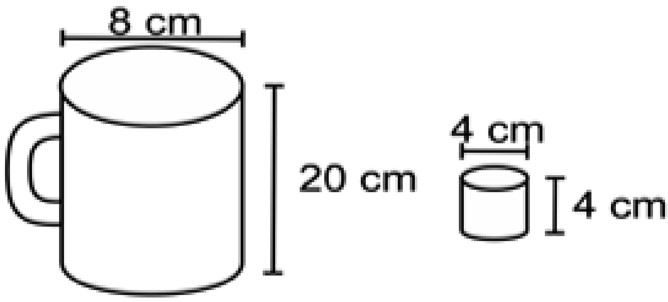
05) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura anterior. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então, o volume do cubo, em m^3, é igual a:



a) 9 b) 12 c) 15 d) 18 e) 21

9.5 Lista (Cilindros)

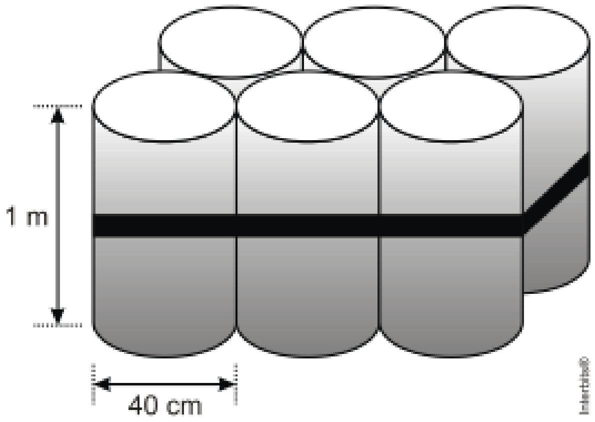
01) (ENEM 2010) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

02) (ENEM 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente $R\$\ 2{,}50$ por metro cúbico utilizado.



Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere $\pi = 3$)

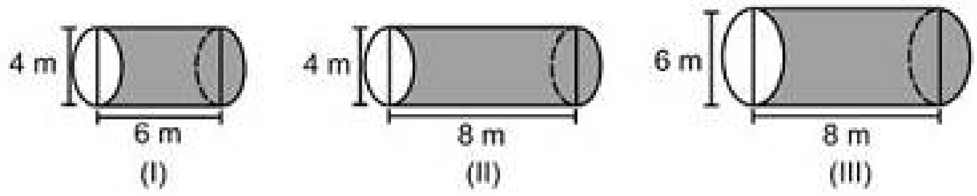
a) R$ 86,40. b) R$ 21,60. c) R$ 8,64. d)R$ 7,20. e)R$ 1,80.

03) (ENEM 2011) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores, Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

a) 20 mL. b) 24 mL. c) 100 mL. d) 120 mL. e) 600 mL.

04) (ENEM 2010) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi = 3$)

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $1/3$

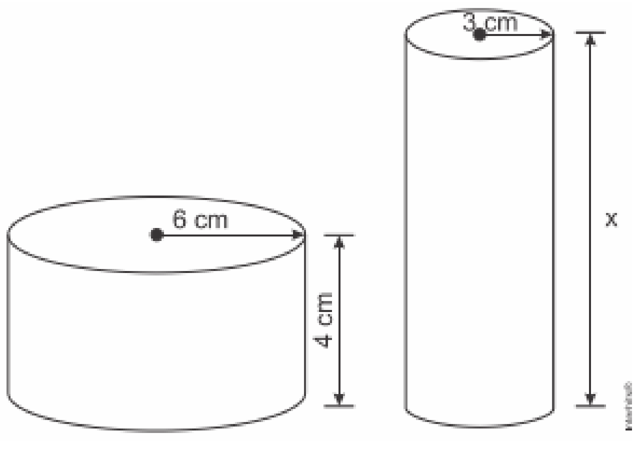
b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $4/3$

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $3/4$

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $2/3$.

e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $7/12$

05) (ENEM 2015) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, $V1$, é $1{,}6$ vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, $V2$.



A medida da altura desconhecida vale:

a) 8 cm. b) 10 cm. c) 16 cm. d) 20 cm. e) 40 cm.

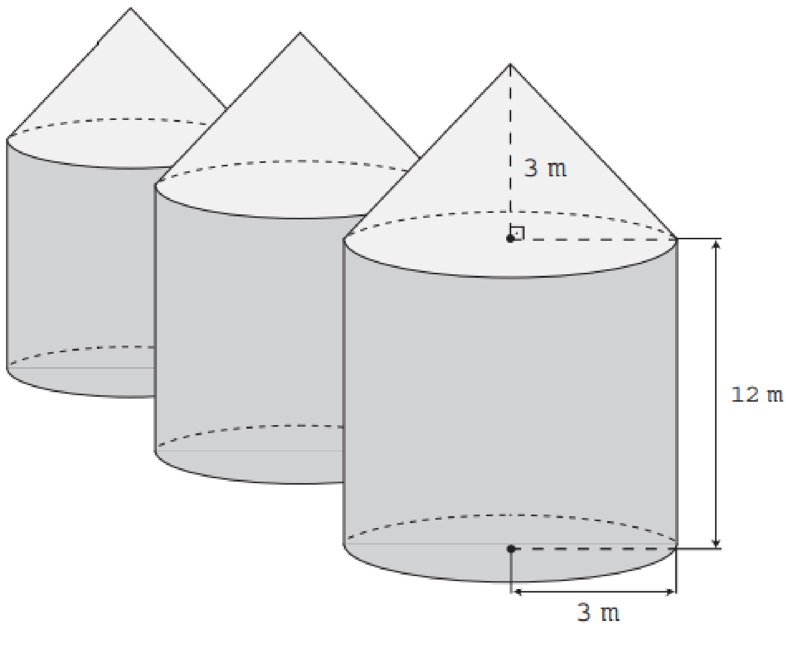
9.6 Lista (Cones)

01) (ENEM 2011) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

a) pirâmide. b) semiesfera. c) cilindro. d) tronco de cone. e) cone.

02) (ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

a) 6 b) 16 c) 17 d) 18 e) 21

03) (ENEM 2011) Célia é uma confeiteira renomada na pequena cidade em que mora. Herdou de sua avó uma receita de brigadeiro que faz o maior sucesso. Os ingredientes da receita enchem sempre uma panela, de forma cilíndrica, com 40 cm de altura e 30 cm de diâmetro. Para inovar e atrair mais clientes, em vez de vender os brigadeiros na forma de "bolinhas", Célia tem feito brigadeiros em forma de cones. Para isso, utiliza forminhas cônicas de 5 cm de altura e raio da base de $1{,}5$ cm.

A cada receita produzida, a quantidade de cones de brigadeiro que Célia consegue obter é

a) 600 unidades.

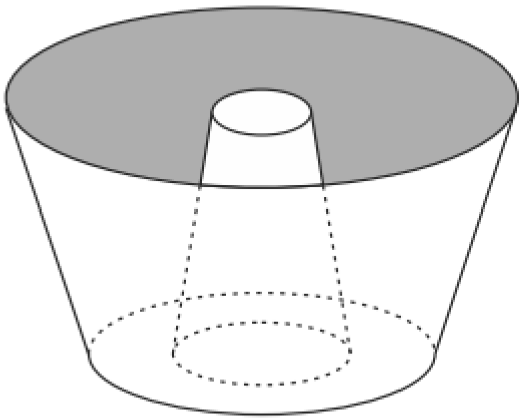
b) 800 unidades.

c) 2 400 unidades.

d) 3 200 unidades.

e) 9 600 unidades.

04) (ENEM 2013) Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

a) um tronco de cone e um cilindro.

b) um cone e um cilindro.

c) um tronco de pirâmide e um cilindro.

d) dois troncos de cone.

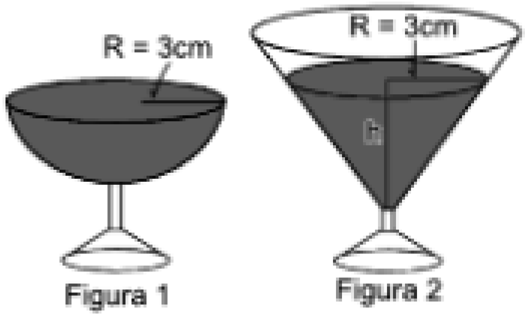
e) dois cilindros.

05) (ENEM 2015) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é $2{,}4$ metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada. Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

a) 1,44 b) 6,00 c) 7,20 d) 8,64 e) 36,00

9.7 Lista (Esferas)

01) (ENEM 2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



$$V_{(ESFERA)} = \frac{4\pi r^3}{3}. \qquad V_{(CONE)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33 b) 6,00 c)12,00 d) 56,52 e) 113,04

02) (ENEM 2014) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

Use 3 como valor aproximado para π.

a) 168. b) 304. c) 306. d) 378. e) 514.

03) Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 h$, sendo *h* a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a:

a) 2R b) 4R c) 6R d) 9R e) 12R

04) (ENEM 2014) Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

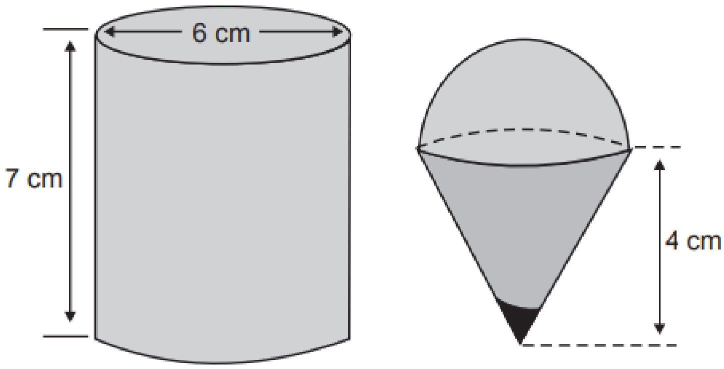


Figura 1 Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é:

a) 45 b) 48 c) 72 d) 90 e)99

05) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

Suponha que cada esfera tenha $10{,}5$ cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo $1{,}4$ cm. Se a densidade do ferro é $7{,}8$ g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = \frac{22}{7}$)

a) 8 b) 16 c) 15 d) 12 e) 10

CONCLUSÃO

O software GeoGebra, devido a sua vasta gama de possibilidades, possui o potencial de despertar no aluno a vontade de analisar os sólidos geométricos, visto que seu caráter interativo permite criar ideias ou mesmo, a partir de modelos previamente estabelecidos, fazer experimentações e propor melhorias. Partindo desse pressuposto, sua apresentação neste trabalho engloba um dos objetivos que é a utilização da tecnologia com a finalidade de potencializar a compreensão e motivação dos alunos diante de novos conteúdos. Além disso, cabe destacar também a qualidade e precisão dos desenhos produzidos no software, que em sua maioria são superiores aos desenhados no quadro, otimizando a visualização tridimensional e o aproveitamento do tempo de aula.

Pensando no professor, a utilização do software oportuniza inicialmente maior velocidade nas construções e a possibilidade de repensar as práticas atuais agregando mais tecnologia às aulas indo inclusive além da Geometria Espacial, uma vez que o software possui uma infinidade de recursos que são aprimorados ano a ano em virtude de novas possibilidades no campo da programação. Ademais, quando o professor se permitir conhecer novas ferramentas, pode inclusive ultrapassar o limite do próprio programa, buscando, em suas práticas de planejamento, novas possibilidades que o permitam explorar ainda mais a tecnologia disponível atualmente. Deve-se observar, contudo, que, como todo recurso didático, o professor precisa se apropriar da ferramenta a fim de não perder tempo e sobretudo a atenção do aluno durante as aulas, devendo portanto planejar a aplicação do software dentro do contexto geral da aula.

Por fim, ao pensarmos nas relações professor/aluno e aluno/aluno, temos ainda a perspectiva de obtermos um ganho nessa integração, pois muitos alunos possuem um conhecimento em tecnologia superior ao dos professores, podendo ser esse ponto uma conexão entre eles. Quando todos os atores do processo estão motivados a apresentar e absorver conhecimento, fica mais fácil abordar temas complexos como a demonstração de teoremas, por exemplo, que nesse contexto podem ser inseridos com maior facilidade.

REFERÊNCIAS

[1] ÁVILA, G. **Euclides, geometria e fundamentos**. In: HELLMEISTER, A. C. P. (Ed.). *Geometria em Sala de Aula*. [S.l.]: SBM, 2013. p. 437. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 28.

[2] BOYER, C. B.. **História da Matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide, 2 ed. São Paulo : Blüncher, 1996.

[3] BRAATHEN, P. C. **Aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa no processo de ensino-aprendizagem de química**. *REVISTA EIXO*, v.1, n. 1, p. 63–69, 2012. Disponível em: <http://revistaeixo.ifb.edu.br/index.php/RevistaEixo/article/view/53>. 15

[4] BRASIL. ***Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III***. Brasília, 2000. 58 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 63.

[5] BRASIL. ***PCNEM+:Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias***. [S.l.], 2004. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 05.02.2017. Citado na página 55.

[6] BRASIL. ***Orientações Curriculares para o Ensino Médio****; volume 2*. [S.l.], 2006. 137 p. Citado na página 55.

[7] CAMINHA A. M. N. ***Geometria (Coleção Profmat)***. [S.l.]: SBM. 2013. 427 páginas

[8] DANTE, L. R., **Matemática, Contexto e Aplicação**. Editora Ática, volume 2, 2013.

[9] EVES, H.. **História da geometria: Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. Tradução.Hygino H. Domingues v.3. São Paulo: Atual,1992.

[10] GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[11] GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 2003. 318 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

[12] GIRALDO, V. **Recursos computacionais no ensino de matemática** / Victor Giraldo, Paulo Caetano e Francisco Mattos. – Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[13] KAHAN, C. H. **Pitágoras e os pitagóricos: Uma breve história**. São Paulo: Loyola, 2007

[14] LENGRUBER, F. **Dicionário de Matemática**. Curitiba: Base Editorial, 2011.

[15] LIMA, E. L. *et. al.*, **A Matemática do Ensino Médio 2**, Vol.2, 6ª edição, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[16] LIMA, E. L.. **Medida e Forma em Geometria** – 4ª edição, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, ano 2011.

[17] LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias** – 6ª edição, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[18] MACÊDO, I. A. **Facilitando o Estudo da Geometria Espacial com o GeoGebra 3D**. 2013. 127 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013.

[19] MENESES, R. S. **Uma história da geometria escolar no Brasil**: de disciplina a conteúdo. 2007. 172 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

[20] MLODINOW, L. **A Janela de Euclides**. A História da Geometria: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço. São Paulo: Geração, 2005.

[21] PAIVA, M. **Matemática Paiva 2**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013. p 220 – 275.

[22] PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké, ano 1, n.1, p. 7-17, 1993.

[23] SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica: A fotografia e a escrita na sala de aula.** [S.l.]: Autêntica, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 64.

[24] SANTOS, M. A. **Novas tecnologias no ensino de matemática:** possibilidades e desafios. 2017.Disponível em:<http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/tics/101092011085446.pdf> acesso em 21 de julho de 2017

[25] SILVA, A. R. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial métrica no ensino médio**. 2013. 94 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

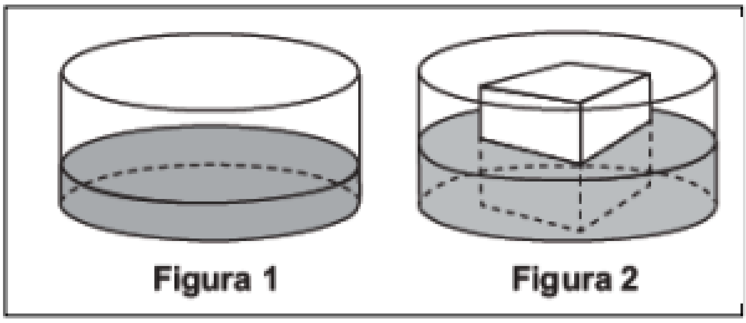
[26] SOUZA, L. A. **Uma proposta para o ensino da geometria espacial usando o geogebra 3D- PB**, 2014, 66f. Dissertação (Mestrado profissional em matemática em rede nacional) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciência e Tecnologia, 2014.

[27] VALENTE, W.R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930).** 2.ed. São Paulo: Editora Annablume, 1999.

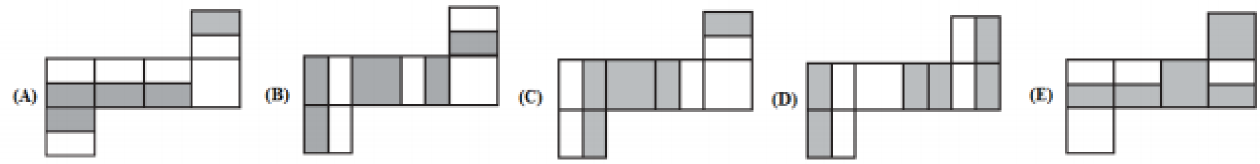
APÊNDICES

APÊNDICE 1 – SOLUÇÃO DA LISTA 1

01) (ENEM 2015) Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

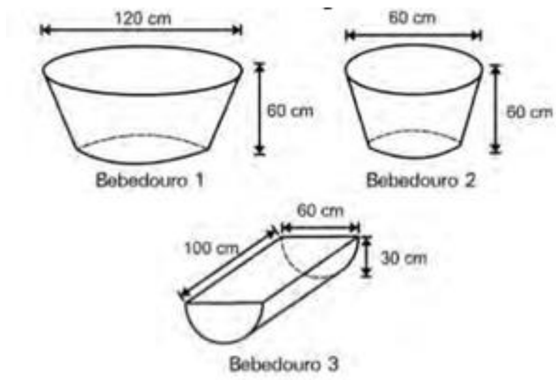


Qual é a planificação desse cubo após submerso?

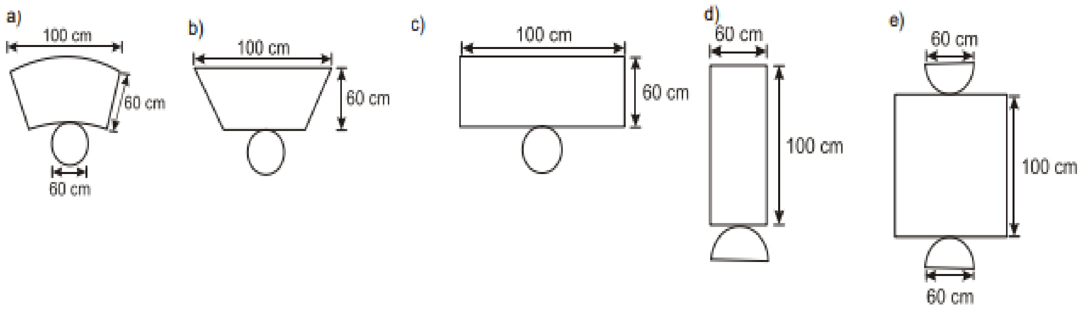


Solução – Basta observarmos que uma das faces (BASE) ficou completamente submersa, uma não teve contato com o líquido (TOPO) e que as faces laterais ficaram com líquido até a metade. Dessa forma, analisando as alternativas, chegamos à resposta C.

02) (ENEM 2010) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura a seguir.

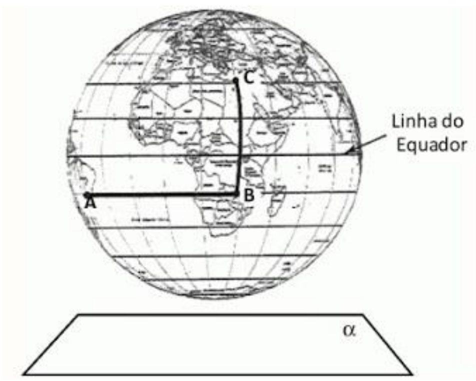


Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?



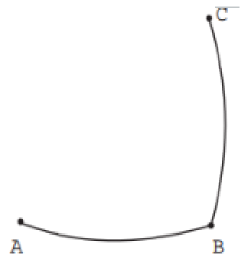
Solução – Nota-se que o bebedouro 3 é um semicilindro que quando planificado gera duas semicircunferências e um retângulo como apresentado na figura E.

03) (ENEM 2016) A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por

a)



b)

c)

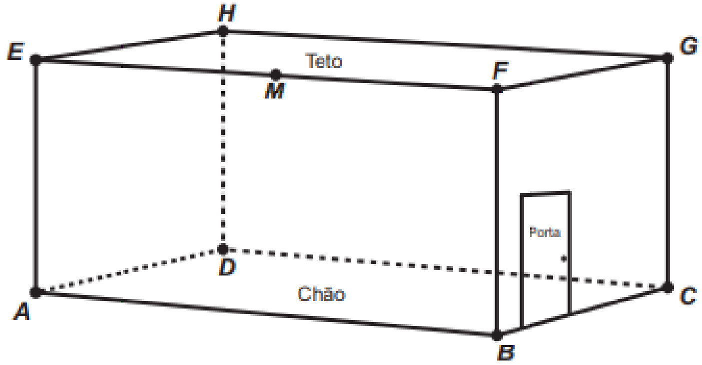
d)

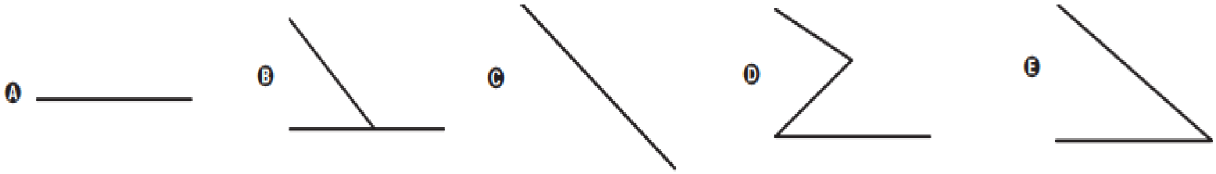
e)

Solução – Vale salientar inicialmente que a pergunta se refere a uma projeção ortogonal, logo estamos olhando o globo de cima. Dessa forma, o caminho entre A e B será um arco, já que estamos caminhando sobre uma esfera. Já o caminho de B até C será um segmento de reta, pois ao olharmos de cima, a curva do deslocamento é projetada no plano como um segmento de reta. Assim a alternativa correta é a letra E.

04) (ENEM 2017) Uma lagartixa está no interior de um quarto e começa a se deslocar. Esse quarto, apresenta o formato de um paralelepípedo retangular, é representado pela figura. A lagartixa parte do ponto B e vai até o ponto A. A seguir, de A ela se desloca, pela parede, até o ponto M, que é o ponto médio do segmento EF. Finalmente, pelo teto, ela vai do ponto M até o ponto H. Considere que todos esses deslocamentos foram feitos pelo caminho de menor distância entre os respectivos pontos envolvidos.

A projeção ortogonal desses deslocamentos no plano que contém o chão do quarto é dado por:

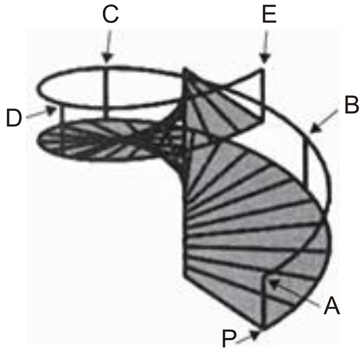


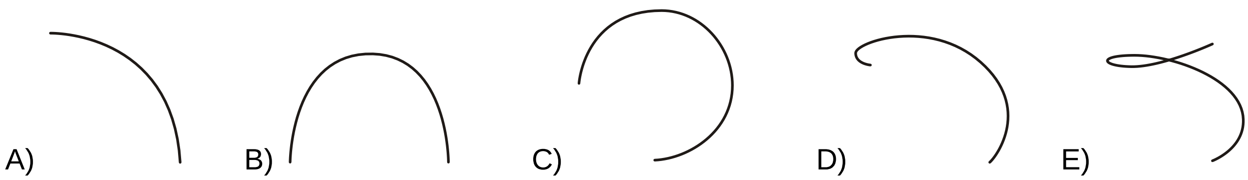


Solução – Quando falamos de projeção ortogonal, estamos olhando o objeto de cima, logo o trajeto de B até A é um segmento de reta. Quanto ao deslocamento de A até M, visto de cima, ele é um segmento de reta que projetado no plano fica sobre o segmento AB; por fim o deslocamento de M até H é um segmento de reta inclinado em relação à AB, partindo do meio dele, o que nos leva à alternativa B.

05) (ENEM 2014) O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D e E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:





Solução – A projeção ortogonal é a vista superior da escada. O enunciado diz que os pontos são equidistantes e que E e A estão numa mesma reta, logo, pensando na projeção, temos uma circunferência completa. Ocorre, contudo, que o questionamento é da projeção e A até D, logo teremos apenas 75% da circunferência, o que nos resulta a alternativa C.

APÊNDICE 2 – SOLUÇÃO DA LISTA 2

01) (ENEM 2016) Os sólidos de Platão são poliedros convexos cujas faces são todas congruentes a um único polígono regular, todos os vértices têm o mesmo número de arestas incidentes e cada aresta é compartilhada por apenas duas faces. Eles são importantes, por exemplo, na classificação das formas dos cristais minerais e no desenvolvimento de diversos objetos. Como todo poliedro convexo, os sólidos de Platão respeitam a relação de Euler, $V - A + F = 2$, em que V, A e F são os números de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente.

Em um cristal, cuja forma é a de um poliedro de Platão de faces triangulares, qual é a relação entre o número de vértices e o número de faces?

a) $2\,V - 4F = 4$

b) $2\,V - 2F = 4$

c) $2\,V - F = 4$

d) $2\,V + F = 4$

e) $2\,V + 5F = 4$

Solução – Cada face tem 3 lados. Sabe-se que o número de arestas de um poliedro é encontrado dividindo por 2 o produto da quantidade de faces do poliedro pelo número de lados das faces. Como o poliedro em questão tem apenas faces triangulares, podemos escrever:

$$A = \frac{3F}{2}.$$

Substituindo na relação de Euler temos:

$$V - A + F = 2.$$

$$V - \frac{3F}{2} + F = 2.$$

Multiplicando a equação por 2 temos:

$$2V - 3F + 2F = 4.$$

$$2V - F = 4.$$

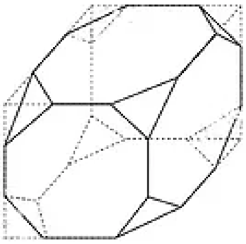
Alternativa correta: Letra C

02) (ENEM 2015) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo,

retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.
Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6 b) 8 c) 14 d) 24 e) 30

Solução – O poliedro P é um cubo, logo tem 6 faces e 8 vértices. Quando tiramos uma pirâmide de cada vértice, geramos 8 novas faces no poliedro, que passa a ter 14 faces. Logo, a alternativa correta é a letra C.



03) Sobre as sentenças:

I. Um octaedro regular tem 8 faces quadradas.

II. Um dodecaedro regular tem 12 faces pentagonais.

III. Um icosaedro regular tem 20 faces triangulares.

É correto afirmar que apenas:

a) I é verdadeira.

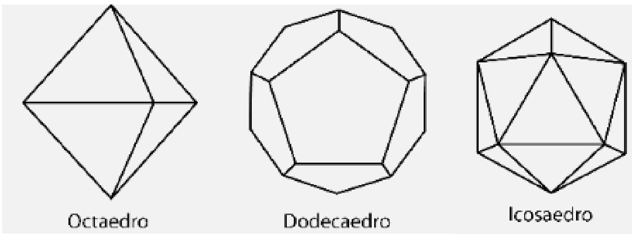
b) II é verdadeira.

c) III é verdadeira.

d) I e III são verdadeiras.

e) II e III são verdadeiras.

Solução – Esta é uma questão de conhecimento teórico, a única das alternativas que está incorreta é a primeira, pois o octaedro possui 8 faces triangulares e não quadradas como diz o enunciado, portanto a alternativa correta é a letra E.



04) (ENEM 2016) Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.

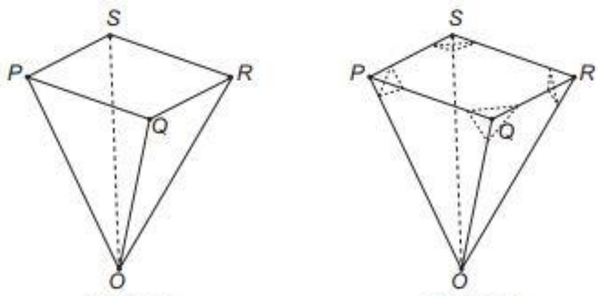


Figura 1 Figura 2

Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a

a) 9, 20 e 13.

b) 9, 24 e 13.

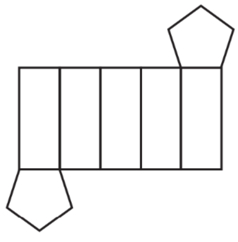
c) 7, 15 e 12.

d) 10, 16 e 5.

e) 11, 16 e 5.

Solução – O poliedro do exercício é uma pirâmide que possui 5 faces, 8 arestas e 5 vértices, entretanto com os cortes, os quatro vértices da base serão retirados sobrando apenas um vértice. Com os cortes são gerados 4 faces, 12 arestas e 12 vértices, levando-nos a quantidade de 9 faces, 20 arestas e 13 vértices, sendo correta a alternativa A.

05) (ENEM 2014) Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura. Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

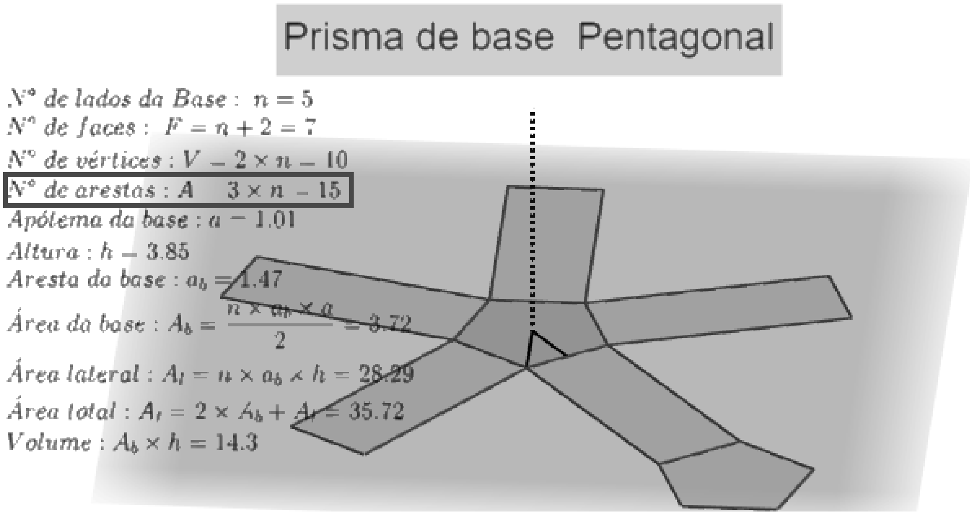


a) 10 b) 12 c) 14 d) 15 e) 16

Solução – O poliedro tem duas faces pentagonais e 5 faces retangulares, logo o número de arestas é dado por:

$$A = \frac{2 \cdot 5 + 5 \cdot 4}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

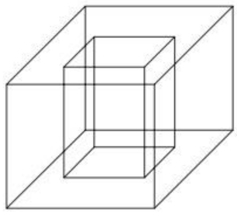
Uma outra possibilidade é utilizar o GeoGebra para visualizar o sólido e verificar a quantidade de arestas.



Alternativa D.

APÊNDICE 3 – SOLUÇÃO DA LISTA 3

01) (ENEM 2010) Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



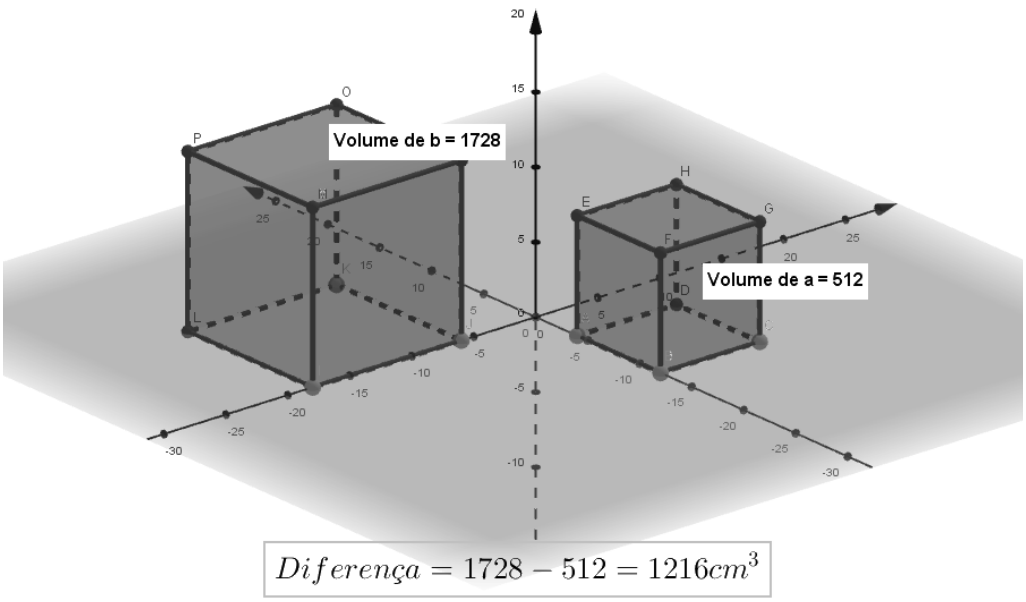
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

a) 12 cm³ b) 64 cm³ c) 96 cm³ d) 1216 cm³ e) 1728 cm³

Solução — O volume do porta-lápis pode ser determinado através da subtração do volume do cubo maior pelo volume do cubo menor.

$$Volume_{porta\ lápis} = Volume_{cubo\ maior} - Volume_{cubo\ menor}.$$
$$Volume_{porta\ lápis} = 12^3 - 8^3.$$
$$Volume_{porta\ lápis} = 1216\ cm^3.$$

Outra possibilidade é construir no GeoGebra os cubos separadamente e usar o botão de cálculo de volume para determinar seus valores e depois subtraí-los para chegar ao resultado.



Alternativa D.

02) (ENEM 2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

a)5 cm. b) 6 cm. c) 12 cm. d) 24 cm. e) 25 cm.

Solução – Vamos considerar inicialmente V_P como sendo o volume do paralelepípedo e V_C o volume do cubo. O volume do paralelepípedo é:

$V_P = 3 \cdot 18 \cdot 4 = 216\ cm^3$.

Como o cubo tem o mesmo volume do paralelepípedo:

$V_C = V_P$.

$$V_C = 216.$$

Da geometria espacial, temos que o volume do cubo é dado por $V_C = a^3$, sendo a a aresta do cubo, assim:

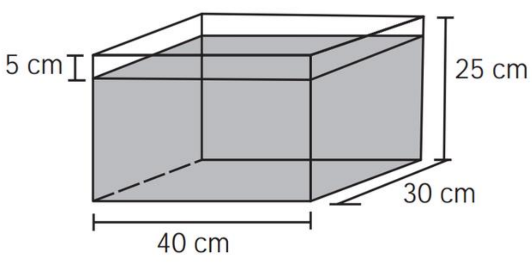
$$216 = a^3.$$

$$a = \sqrt[3]{216}.$$

$$a = 6\ cm.$$

Alternativa B.

03) (ENEM 2012) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Solução – Analisando a figura, temos que a base tem $30\ cm$ por $40\ cm$, o que nos dá uma área de base de $1200\ cm^2$. Pensando num volume de $2400\ cm^3$e aplicando a fórmula do volume do paralelepípedo, temos.

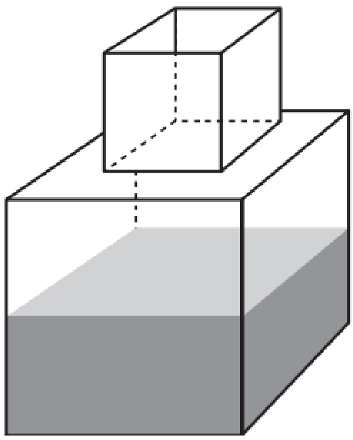
$$V_P = Área\ da\ base\ \cdot Altura$$

$$2400 = 1200\ \cdot Altura$$

$$Altura = 2\ cm$$

O nível sobe 2 cm, alternativa C.

04) (ENEM 2014) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8 b) 10 c) 16 d) 18 e) 24

Solução – Como não temos as medidas das arrestas chamaremos a aresta do cubo menor de a e do cubo maior de $2a$, dessa forma concluímos que o volume do cubo menor é a^3e do cubo maior $8a^3$. Com isso o volume total analisado é de $9a^3$. Durante 8 minutos, foi enchido metade do cubo maior, no caso $4a^3$, ou seja, a cada dois minutos encheu a^3, como ainda falta encher $5a^3$, por simples regra de três chegamos ao tempo de 10 minutos, alternativa B.

05) (ENEM 2014) Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas no aquário. Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário. O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a:

a) 48. b) 72. c) 84. d) 120. e) 168.

Solução – Primeiramente, vamos analisar a altura do reservatório que é de 20 cm, contudo ele será cheio até a metade, sobrando 10 cm. Quando as pedrinhas são colocadas, ainda restam 6 cm, no caso as pedrinhas deslocaram o volume de 4 cm. Assim o volume deslocado pelas pedras é de:

$$Volume_{Pedras} = 40 \cdot 15 \cdot 4 = 2400\ cm^3$$

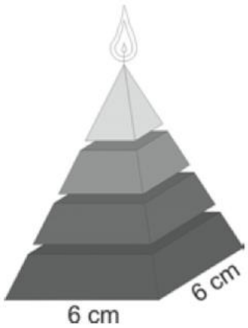
Para encontrar o total de pedras, basta dividir o volume total pelo volume de cada pedra.

$$Total_{pedras} = \frac{2400}{50} = 48$$

Alternativa A

APÊNDICE 4 – SOLUÇÃO DA LISTA 4

01) (ENEM 2009) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos da mesma altura, 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e uma pirâmide na parte superior, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem $1{,}5$ cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3 b) 189 cm^3 c) 192 cm^3 d) 216 cm^3. e) 540 cm^3

Solução – Primeiro calculamos o volume da vela como mostrada na figura, lembrando que devemos descontar os 3 centímetros de espaço vazio da altura total da pirâmide.

$$V_{Total} = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}.$$

$$V_{Total} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 16}{3} = 192\ cm^3.$$

Após esse passo, devemos calcular o volume da pirâmide menor que compõe o último andar da vela.

$$V_{Topo} = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}.$$

$$V_{Topo} = \frac{1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 4}{3} = 9\ cm^3.$$

A vela resultante da retirada do topo piramidal terá volume igual à diferença entre o volume total e o volume do topo, no caso $192 - 3 = 189\ cm^3$, sendo a alternativa B a correta.

02) (ENEM 2009) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

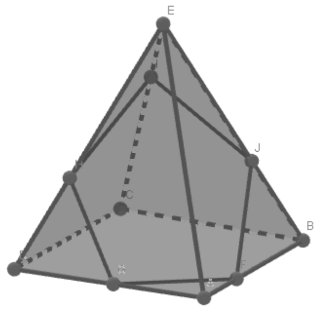
c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

d) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

Solução – No enunciado, o artesão afirma que ao final do processo, uma das faces formadas é pentagonal, dessa forma pode-se eliminar as alternativas A, B e E, restando apenas as letras C e D como possibilidade.

A única maneira de criar um polígono com 5 lados em uma pirâmide de base quadrada é interceptando com o plano todas as 5 faces da pirâmide, logo a alternativa correta é a letra C. A figura a seguir construída no GeoGebra ajuda o aluno a compreender o processo de construção do polígono.



03) Um faraó projetou uma pirâmide de 72 m de altura, cuja base é um quadrado de lado 100 m, dentro da qual estaria seu túmulo. Para edificar 1000 m^3 a mão de obra escrava gastava, em média, 72 dias. Nessas condições, o tempo necessário, em anos, para a construção dessa pirâmide foi, aproximadamente,

a) 47 b) 52 c) 56 d) 60 e) 66

Solução – Iniciamos calculando o volume da pirâmide.

$$V_{Pirâmide} = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}.$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 72}{3} = 240.000\ m^3.$$

Utilizando regra de três

$$\frac{72}{1000} = \frac{x}{240000}.$$

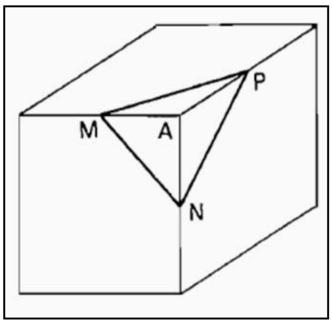
$$x = 17280\ dias.$$

Sabendo que $1\ ano = 365\ dias$

$$Total_{anos} = \frac{17280}{365} = 47{,}34\ anos.$$

Logo a alternativa correta é a letra A.

04) Em cada um dos vértices de um cubo de madeira se recorta uma pirâmide $AMNP$, no qual M, N e P são os pontos médios das arestas, como se mostra na figura. Se V é o volume do cubo, o volume do poliedro que resta ao retirar as 8 pirâmides é igual a:



a) $\frac{1}{2}$V b) $\frac{3}{4}$V c) $\frac{2}{3}$V d) $\frac{5}{6}$V e) $\frac{3}{8}$V

Solução – Consideremos inicialmente como a a medida da aresta do cubo. Ao realizarmos o corte MNP, formamos uma pirâmide tendo por base um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem $\frac{a}{2}$, e cuja altura também mede $\frac{a}{2}$. Dessa forma podemos calcular o volume da pirâmide.

$$V_{Pirâmide} = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}.$$

Devemos lembrar que a base é um triângulo, logo teremos:

$$V_{Pirâmide} = \frac{\left(\frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2}\right) \cdot \frac{a}{2}}{3}.$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{\left(\frac{a^2}{8}\right) \cdot \frac{a}{2}}{3} = \frac{\frac{a^3}{16}}{3} = \frac{a^3}{48}.$$

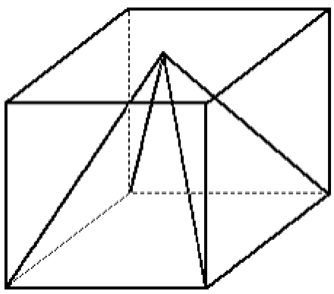
Lembrando que serão 8 pirâmides temos:

$$\frac{a^3}{48} \cdot 8 = \frac{a^3}{6}.$$

Sendo o volume do cubo igual a a^3, o volume restante será $a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$.

Logo a alternativa correta é a letra D.

05) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura anterior. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então, o volume do cubo, em m^3, é igual a:



a) 9 b) 12 c) 15 d) 18 e) 21

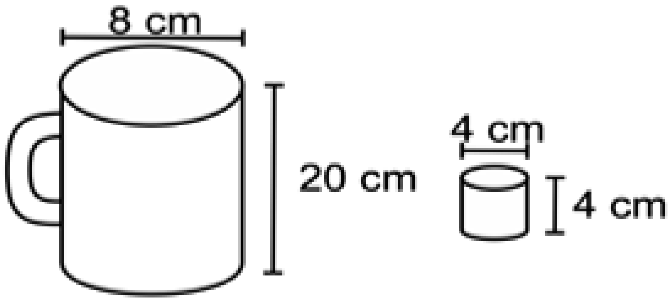
Solução – Esta questão pode ser solucionada a partir da análise pura da fórmula da pirâmide que está inscrita no cubo. Sabemos que:

$$V_{Pirâmide} = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}.$$

Sabendo que a área da base da pirâmide é igual à área da base do cubo e que a altura de ambos também é a mesma, podemos concluir que a pirâmide tem a terça parte do volume do cubo, logo a alternativa correta é a letra D.

APÊNDICE 5 – SOLUÇÃO DA LISTA 5

01) (ENEM 2010) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

Solução – Devemos calcular o V_L, volume da leiteira e o V_C, volume dos copinhos. Ambos são cilindros cuja fórmula é o produto da área da base pela altura, lembrando que a base é uma circunferência.

$$V_L = \pi r^2 h.$$

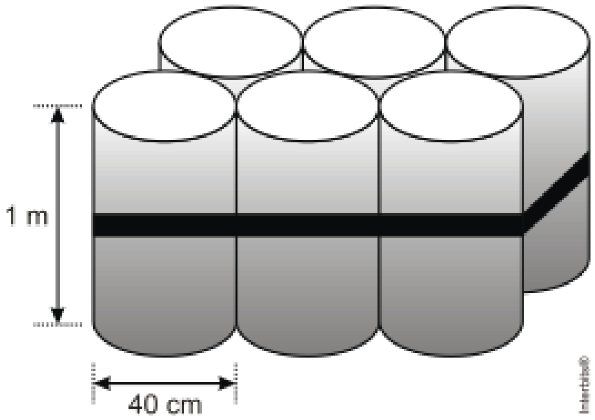
$$V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 320\pi.$$

$$V_C = \pi r^2 h.$$

$$V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi.$$

Quando dividimos os volumes, encontramos quantas vezes o volume da leiteira é maior que o volume do copinho. Assim temos que, $\frac{320\pi}{16\pi} = 20$, logo sabemos que a leiteira é 20 vezes maior. Assim para encher 20 copinhos pela metade será necessário apenas metade do volume da leiteira. Alternativa A.

02) (ENEM 2010) O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente $R\$\ 2{,}50$ por metro cúbico utilizado.



Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere $\pi = 3$)

a) R$ 86,40. b) R$ 21,60. c) R$ 8,64. d)R$ 7,20. e)R$ 1,80.

Solução – Primeiramente, devemos transformar o diâmetro do cilindro em metros, logo temos $0{,}4\ m$, o que proporciona $0{,}2\ m$ de raio.

Devemos calcular o volume do kit, para isso começaremos calculando o volume de um cilindro.

$$V_C = \pi r^2 h.$$

$$V_C = \pi \cdot 0{,}2^2 \cdot 1 = 0{,}04\pi\ m^3$$

Como são 6 cilindros por kit, temos:

$$Volume_{kit} = V_C \cdot 6 = 0{,}04\pi \cdot 6 = 0{,}24\pi\ m^3$$

Sabendo que a família usa 12 kits e utilizando $\pi = 3$, temos:

$$Volume_{gasto} = V_{kit} \cdot 12 = 0{,}24 \cdot 3 \cdot 12 = 8{,}64\ m^3$$

Sendo o gasto por $m^3 = R\$2{,}50$.

$$Valor_{pago} = V_{gasto} \cdot 2{,}5 = 8{,}64 \cdot 2{,}5 = R\$21{,}60.$$

Logo a resposta é a alternativa B.

03) (ENEM 2011) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores, Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro, A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

a) 20 mL. b) 24 mL. c) 100 mL. d) 120 mL. e) 600 mL.

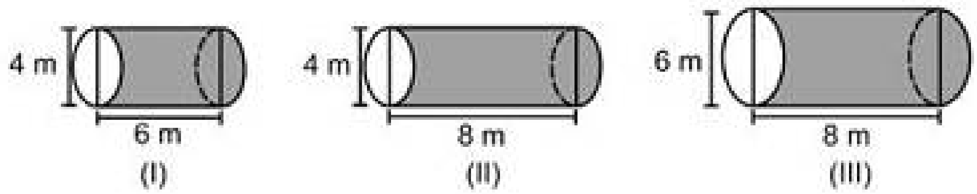
Solução – Calculando o volume do cilindro:

$$V_C = \pi r^2 h.$$

$$V_C = 3 \cdot 2^2 10 = 120\ cm^3.$$

Lembrando que $1mL = 1cm^3$, temos então 120 mL como volume total, contudo a proporção é de 1 de açúcar para 5 água, ou seja, temos 6 partes, quando dividimos 120 por 6 encontramos que cada parte vale 20, logo temos 100 mL de água, alternativa C.

04) (ENEM 2010) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi\ = 3$)

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $1/3$

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $4/3$

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $3/4$

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $2/3$.

e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $7/12$

Solução – Para a solução do problema, necessitamos das áreas laterais e dos volumes dos três cilindros para analisar a proporção. Dessa forma, vamos chamar as áreas de $A_1, A_2\ e\ A_3$, respectivamente, e de mesmo modo os volume de $V_1, V_2\ e\ V_3$. Calculando as áreas, temos de lembrar que o corpo cilindro, quando planificado, torna-se um retângulo de altura igual à do cilindro e base igual ao comprimento da circunferência, que é base do cilindro, logo a área é dada por:

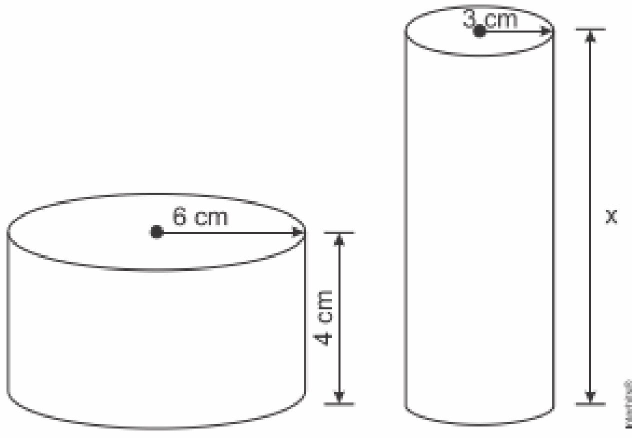
$$A_1 = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 6 = 24\pi\ m^2.$$
$$A_2 = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi\ m^2.$$
$$A_3 = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi\ m^2.$$

Os volumes são:

$$V_1 = \ \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 6 = 24\pi\ m^3.$$
$$V_2 = \ \pi r^2 h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi\ m^3.$$
$$V_1 = \ \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 8 = 72\pi\ m^3.$$

Analisando os resultados, podemos perceber que a razão entre área e volume dos dois primeiros tanques é 1. Já o do terceiro tanque será um valor menor que 1, logo seu custo será menor, fazendo a divisão temos $\frac{48\pi}{72\pi} = \frac{2}{3}$. Alternativa correta letra D.

05) (ENEM 2015) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, $V1$, é $1{,}6$ vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, $V2$.



A medida da altura desconhecida vale:

a) 8 cm. b) 10 cm. c) 16 cm. d) 20 cm. e) 40 cm.

Solução – Vamos calcular o volume de V_1 e V_2 já definidos no enunciado.

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 144\pi\ cm^3.$$

$$V_2 = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot h = 9\pi h\ cm^3$$

Sendo:

$$V_1 = 1{,}6 \cdot V_2.$$

$$144\pi = 1{,}6 \cdot 9\pi h$$

$$h = 10\ cm$$

Assim a alternativa correta é a letra B.

APÊNDICE 6 – SOLUÇÃO DA LISTA 6

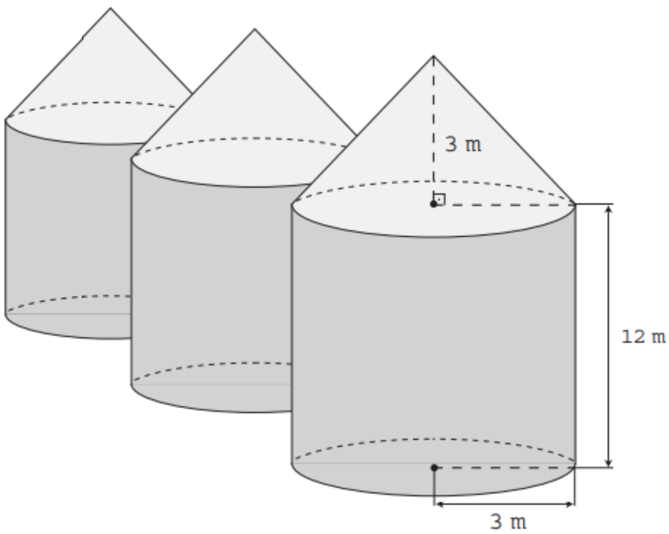
01) (ENEM 2011) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

a) pirâmide. b) semiesfera. c) cilindro. d) tronco de cone. e) cone.

Solução – Basta apenas observar a figura para verificar que se trata de um cone. Alternativa E.

02) (ENEM 2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

a) 6 b) 16 c) 17 d) 18 e) 21

Solução – A figura é uma composição de dois sólidos, um cilindro e um cone, logo devemos calcular seus volumes em separado e depois somarmos para encontrarmos o volume total do silo.

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h = 3 \cdot 3^2 \cdot 12 = 324\, m^3.$$

$$V_{Cone} = \frac{\pi r^2\, h}{3} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 3}{3} = 27\, m^3.$$

$$V_{Silo} = V_{Cilindro} + V_{Cone} = 324 + 27 = 351 m^3.$$

Sabendo que cada caminhão carrega $20\, m^3$, temos que o total de viagens será $\frac{351}{20} = 17{,}55$. Ou seja, o caminhão precisará fazer ao menos 18 viagens, alternativa D.

03) (ENEM 2011) Célia é uma confeiteira renomada na pequena cidade em que mora. Herdou de sua avó uma receita de brigadeiro que faz o maior sucesso. Os ingredientes da receita enchem sempre uma panela, de forma cilíndrica, com 40 cm de altura e 30 cm de diâmetro. Para inovar e atrair mais clientes, em vez de vender os brigadeiros na forma de “bolinhas”, Célia tem feito brigadeiros em forma de cones. Para isso, utiliza forminhas cônicas de 5 cm de altura e raio da base de $1{,}5$ cm.

A cada receita produzida, a quantidade de cones de brigadeiro que Célia consegue obter é

a) 600 unidades.

b) 800 unidades.

c) 2 400 unidades.

d) 3 200 unidades.

e) 9 600 unidades.

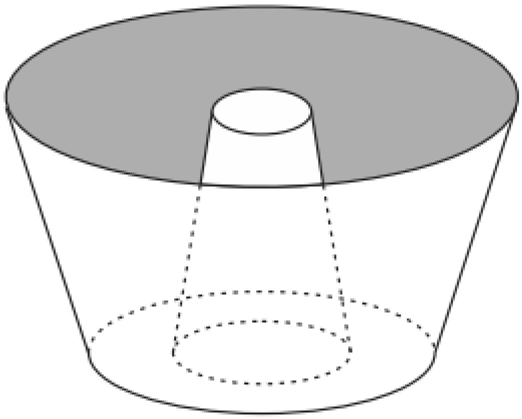
Solução – Vamos iniciar chamando de V_P o volume da panela, que é cilíndrica, e de V_D o volume do doce, que é um cone. Para determinarmos o total de doces, devemos dividir o volume da panela pelo volume de cada doce.

$$V_P = \pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 40 = 9000\pi\, cm^3.$$

$$V_D = \frac{\pi r^2\, h}{3} = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5}{3} = 3{,}75\pi\, cm^3.$$

Fazendo a divisão, temos $\frac{9000\pi}{3,75\pi} = 2400$. Logo serão feitos 2400 doces, sendo a alternativa C a correta.

04) (ENEM 2013) Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

a) um tronco de cone e um cilindro.

b) um cone e um cilindro.

c) um tronco de pirâmide e um cilindro.

d) dois troncos de cone.

e) dois cilindros.

Solução – Na questão basta observar que a figura da forma representa dois troncos de cone. Alternativa D.

05) (ENEM 2015) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é $2,4$ metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada. Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

a) 1,44 b) 6,00 c) 7,20 d) 8,64 e) 36,00

Solução – Sabemos que:

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h \text{ e } V_{Cone} = \frac{\pi R^2\, h}{3}.$$

O enunciado diz que o raio do cone é o triplo do raio do cilindro e que sua altura é $2,4\ m$. Além disso, o volume do cone é 20% maior que o do cilindro, logo:

$$V_{Cone} = 1,2 \cdot V_{Cilindro}.$$

$$\frac{\pi \cdot (3r)^2 \cdot 2,4}{3} = 1,2 \cdot \pi r^2 h.$$

$$\frac{\pi \cdot 9r^2 \cdot 2,4}{3} = 1,2 \cdot \pi r^2 h.$$

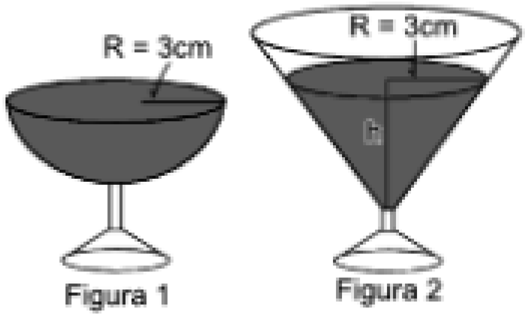
$$21,6 = 3,6 \cdot h.$$

$$h = 6\ metros.$$

Alternativa correta: letra B.

APÊNDICE 7 – SOLUÇÃO DA LISTA 7

01) (ENEM 2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



$$V_{(ESFERA)} = \frac{4\pi r^3}{3}. \qquad V_{(CONE)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33 b) 6,00 c)12,00 d) 56,52 e) 113,04

Solução – Sabemos que:

$$V_{Esfera} = \frac{4\pi r^3}{3} e \quad V_{Cone} = \frac{\pi R^2\ h}{3}.$$

Lembrando que a primeira taça é uma semiesfera, logo seu volume será a metade do volume de uma esfera. Para que os volumes sejam iguais, devemos ter:

$$V_{Semi\ esfera} = V_{Cone}.$$

$$\frac{4\pi r^3}{6} = \frac{\pi R^2\ h}{3}.$$

Eliminando π em ambos os lados e substituindo os raios por 3 temos:

$$\frac{4 \cdot 3^3}{6} = \frac{3^2 \cdot h}{3}.$$

Fazendo as devidas multiplicações e simplificações, chegamos a $h = 6$. Logo a alternativa correta é letra B.

02) (ENEM 2014) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

Use 3 como valor aproximado para π.

a) 168. b) 304. c) 306. d) 378. e) 514.

Solução – Temos na questão duas situações, a primeira em que o raio é $5\ mm$ e a segunda na qual o raio é $4\ mm$, logo devemos calcular as duas e subtrair para encontrar a redução do volume. A pílula é composta por uma esfera e um cilindro, assim vamos ao cálculo do volume da pílula de $5\ mm$ de raio.

$$V_{Pílula} = V_{Esfera} + V_{Cilindro}.$$

$$V_{Pílula} = \frac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2 h.$$

$$V_{Pílula} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5^3}{3} + 3 \cdot 5^2 \cdot 10 = 1250\ mm^3.$$

O cálculo do volume da pílula de 4 mm:

$$V_{Pílula} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 \cdot 10 = 736\ mm^3.$$

Logo a diferença é de $514 mm^3$, e a alternativa correta é a letra E.

03) Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 h$, sendo *h* a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a:

a) 2R b) 4R c) 6R d) 9R e) 12R

Solução – O enunciado já apresenta as relações entre os frascos para que ocorra a igualdade, logo basta igualarmos as fórmulas.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi\left(\frac{R}{3}\right)^2 h.$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi\frac{R^2}{9} h$$

Eliminando π e fazendo as simplificações chegamos a $h = 12R$. Logo a alternativa correta é a letra E.

04) (ENEM 2014) Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura 4 cm, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

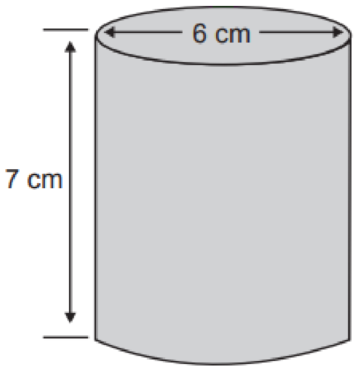


Figura 1

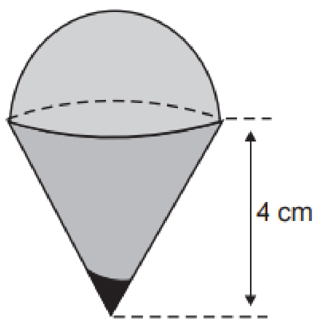


Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada. Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S \cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3} \cdot S \cdot h$;

Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é:

a) 45 b) 48 c) 72 d) 90 e)99

Solução – Para chegarmos ao volume descartado, devemos encontrar o volume do cilindro e subtrair da soma do cone e da semiesfera que formam o pião. Vamos iniciar pelo cilindro:

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h.$$

$$V_{Cilindro} = 3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 189\ cm^3\ .$$

Calculando o volume da semiesfera:

$$V_{Semi\ esfera} = \frac{4\pi r^3}{6}.$$

$$V_{Semi\ esfera} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3^3}{6} = 54\ cm^3.$$

Calculando o volume do cone:

$$V_{Cone} = \frac{\pi r^2\ h}{3}.$$

$$V_{Cone} = \frac{3 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 36\ cm^3.$$

Assim o volume descartado será $189 - 54 - 36 = 99\ cm^3$, alternativa E.

05) A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

Suponha que cada esfera tenha $10{,}5$ cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo $1{,}4$ cm. Se a densidade do ferro é $7{,}8$ g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use: $\pi = \frac{22}{7}$)

a) 8 b) 16 c) 15 d) 12 e) 10

Solução – Devemos calcular o volume das esferas e do bastão, depois somá-los e por fim, por meio da densidade, encontrar o resultado. Como o enunciado pede para usar $\pi = \frac{22}{7}$, é interessante usar os raios no formato fracionário para facilitar as simplificações.
Calculando o volume da esfera:

$$V_{Esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

$$V_{Esfera} = \frac{4 \cdot \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{21}{4}\right)^3}{3} = 606{,}37\ cm^3$$

Como são duas esferas temos $1212{,}75\ cm^3$

Calculando o volume do bastão, que é um cilindro:

$$V_{Cilindro} = \pi r^2 h.$$

$$V_{Cilindro} = \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot 50 = 77\ cm^3$$

Logo o volume total do aparelho é de $1212{,}75 + 77 = 1289{,}75\ cm^3$.
Sabendo que a densidade é de $7{,}8$ g/cm³, temos que o peso em gramas será de $1289{,}75 \cdot 7{,}8 = 10.060{,}05$ gramas o que resulta em aproximadamente 10 kg. Alternativa E.

ANEXOS

ANEXO 1 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 1

Atividade 1

Nome	Definição	Valor
Vetor $vx2_p$		$vx2_p$ = (2, 0, 0)
Número t		t = 0
Ponto B		B = (4, 1, 2)
Ponto A		A = (2, 1, 2)
Ponto C		C = (4, 2, 2)
Ponto D		D = (3, 2, 2)
Ponto E		E = (3, 5, 2)
Ponto F		F = (2, 5, 2)
Hexágono pol1	Polígono(A, B, C, D, E, F)	pol1 = 5
Segmento a	Segmento(A, B, pol1)	a = 2
Segmento b	Segmento(B, C, pol1)	b = 1
Segmento c	Segmento(C, D, pol1)	c = 1
Segmento d	Segmento(D, E, pol1)	d = 3
Segmento e	Segmento(E, F, pol1)	e = 1
Segmento f	Segmento(F, A, pol1)	f = 4
Ponto G	A + (0, 0, 1)	G = (2, 1, 3)
Ponto H	B + (0, 0, 1)	H = (4, 1, 3)
Ponto I	C + (0, 0, 1)	I = (4, 2, 3)
Ponto J	D + (0, 0, 1)	J = (3, 2, 3)
Ponto K	E + (0, 0, 2)	K = (3, 5, 4)
Ponto L	F + (0, 0, 2)	L = (2, 5, 4)
Ponto M	F + (0, -1, 1)	M = (2, 4, 3)
Ponto N	E + (0, -1, 1)	N = (3, 4, 3)
Ponto O	M + (0, 0, 1)	O = (2, 4, 4)
Ponto P	N + (0, 0, 1)	P = (3, 4, 4)
Quadrilátero pol2	Polígono(H, B, C, I)	pol2 = 1
Segmento h	Segmento(H, B, pol2)	h = 1
Segmento b_1	Segmento(B, C, pol2)	b_1 = 1
Segmento c_1	Segmento(C, I, pol2)	c_1 = 1
Segmento i	Segmento(I, H, pol2)	i = 1
Hexágono pol3	Polígono(D, E, K, P, N, J)	pol3 = 4

Segmento d_1	Segmento(D, E, pol3)	$d_1 = 3$
Segmento e_1	Segmento(E, K, pol3)	$e_1 = 2$
Segmento k	Segmento(K, P, pol3)	$k = 1$
Segmento p	Segmento(P, N, pol3)	$p = 1$
Segmento n	Segmento(N, J, pol3)	$n = 2$
Segmento j	Segmento(J, D, pol3)	$j = 1$
Quadrilátero pol4	Polígono(J, D, C, I)	pol4 = 1
Segmento j_1	Segmento(J, D, pol4)	$j_1 = 1$
Segmento d_2	Segmento(D, C, pol4)	$d_2 = 1$
Segmento c_2	Segmento(C, I, pol4)	$c_2 = 1$
Segmento i_1	Segmento(I, J, pol4)	$i_1 = 1$
Quadrilátero pol5	Polígono(E, K, L, F)	pol5 = 2
Segmento e_2	Segmento(E, K, pol5)	$e_2 = 2$
Segmento k_1	Segmento(K, L, pol5)	$k_1 = 1$
Segmento l	Segmento(L, F, pol5)	$l = 2$
Segmento f_1	Segmento(F, E, pol5)	$f_1 = 1$
Hexágono pol6	Polígono(G, A, F, L, O, M)	pol6 = 5
Segmento g	Segmento(G, A, pol6)	$g = 1$
Segmento a_1	Segmento(A, F, pol6)	$a_1 = 4$
Segmento f_2	Segmento(F, L, pol6)	$f_2 = 2$
Segmento l_1	Segmento(L, O, pol6)	$l_1 = 1$
Segmento o	Segmento(O, M, pol6)	$o = 1$
Segmento m	Segmento(M, G, pol6)	$m = 3$
Quadrilátero pol7	Polígono(B, H, G, A)	pol7 = 2
Segmento b_2	Segmento(B, H, pol7)	$b_2 = 1$
Segmento h_1	Segmento(H, G, pol7)	$h_1 = 2$
Segmento g_1	Segmento(G, A, pol7)	$g_1 = 1$
Segmento a_2	Segmento(A, B, pol7)	$a_2 = 2$
Hexágono pol8	Polígono(H, I, J, N, M, G)	pol8 = 4
Segmento h_2	Segmento(H, I, pol8)	$h_2 = 1$
Segmento i_2	Segmento(I, J, pol8)	$i_2 = 1$
Segmento j_2	Segmento(J, N, pol8)	$j_2 = 2$
Segmento n_1	Segmento(N, M, pol8)	$n_1 = 1$
Segmento m_1	Segmento(M, G, pol8)	$m_1 = 3$
Segmento g_2	Segmento(G, H, pol8)	$g_2 = 2$
Quadrilátero pol9	Polígono(N, P, O, M)	pol9 = 1
Segmento n_2	Segmento(N, P, pol9)	$n_2 = 1$
Segmento p_1	Segmento(P, O, pol9)	$p_1 = 1$

Segmento o_1	Segmento(O, M, pol9)	$o_1 = 1$
Segmento m_2	Segmento(M, N, pol9)	$m_2 = 1$
Quadrilátero pol10	Polígono(P, K, L, O)	pol10 = 1
Segmento p_2	Segmento(P, K, pol10)	$p_2 = 1$
Segmento k_2	Segmento(K, L, pol10)	$k_2 = 1$
Segmento l_2	Segmento(L, O, pol10)	$l_2 = 1$
Segmento o_2	Segmento(O, P, pol10)	$o_2 = 1$
Vetor vz_n		$vz_n = (0, 0, -2)$
Ponto Q	$A + t\ vz_n$	Q = (2, 1, 2)
Ponto R	$B + t\ vz_n$	R = (4, 1, 2)
Ponto S	$C + t\ vz_n$	S = (4, 2, 2)
Ponto T	$D + t\ vz_n$	T = (3, 2, 2)
Ponto U	$E + t\ vz_n$	U = (3, 5, 2)
Ponto V	$F + t\ vz_n$	V = (2, 5, 2)
Hexágono pol11	Polígono(S, T, U, V, Q, R)	pol11 = 5
Segmento s	Segmento(S, T, pol11)	s = 1
Segmento t_1	Segmento(T, U, pol11)	$t_1 = 3$
Segmento u	Segmento(U, V, pol11)	u = 1
Segmento v_1	Segmento(V, Q, pol11)	$v_1 = 4$
Segmento q	Segmento(Q, R, pol11)	q = 2
Segmento r	Segmento(R, S, pol11)	r = 1
Vetor $vx1_p$		$vx1_p = (3, 0, 0)$
Ponto W	$J + t\ vx1_p$	W = (3, 2, 3)
Ponto Z	$D + t\ vx1_p$	Z = (3, 2, 2)
Ponto A_1	$E + t\ vx1_p$	$A_1 = (3, 5, 2)$
Ponto B_1	$K + t\ vx1_p$	$B_1 = (3, 5, 4)$
Ponto C_1	$P + t\ vx1_p$	$C_1 = (3, 4, 4)$
Ponto D_1	$N + t\ vx1_p$	$D_1 = (3, 4, 3)$
Hexágono pol12	Polígono(Z, A_1, B_1, C_1, D_1, W)	pol12 = 4
Segmento z_1	Segmento(Z, A_1, pol12)	$z_1 = 3$
Segmento a_3	Segmento(A_1, B_1, pol12)	$a_3 = 2$
Segmento b_3	Segmento(B_1, C_1, pol12)	$b_3 = 1$
Segmento c_3	Segmento(C_1, D_1, pol12)	$c_3 = 1$
Segmento d_3	Segmento(D_1, W, pol12)	$d_3 = 2$
Segmento w	Segmento(W, Z, pol12)	w = 1
Ponto F_1	$C + t\ vx2_p$	$F_1 = (4, 2, 2)$
Ponto G_1	$H + t\ vx2_p$	$G_1 = (4, 1, 3)$
Ponto H_1	$I + t\ vx2_p$	$H_1 = (4, 2, 3)$

Ponto E_1	B + t $vx2_p$	$E_1 = (4, 1, 2)$
Quadrilátero pol13	Polígono(E_1, F_1, H_1, G_1)	pol13 = 1
Segmento e_3	Segmento(E_1, F_1, pol13)	$e_3 = 1$
Segmento f_3	Segmento(F_1, H_1, pol13)	$f_3 = 1$
Segmento h_3	Segmento(H_1, G_1, pol13)	$h_3 = 1$
Segmento g_3	Segmento(G_1, E_1, pol13)	$g_3 = 1$
Vetor $vy1_n$		$vy1_n = (0, -4, 0)$
Ponto I_1	M + t $vy1_n$	$I_1 = (2, 4, 3)$
Ponto J_1	N + t $vy1_n$	$J_1 = (3, 4, 3)$
Ponto K_1	O + t $vy1_n$	$K_1 = (2, 4, 4)$
Ponto L_1	P + t $vy1_n$	$L_1 = (3, 4, 4)$
Vetor $vy2_n$		$vy2_n = (0, -1, 0)$
Ponto M_1	A + t $vy2_n$	$M_1 = (2, 1, 2)$
Ponto N_1	B + t $vy2_n$	$N_1 = (4, 1, 2)$
Ponto O_1	H + t $vy2_n$	$O_1 = (4, 1, 3)$
Ponto P_1	G + t $vy2_n$	$P_1 = (2, 1, 3)$
Quadrilátero pol14	Polígono(N_1, O_1, P_1, M_1)	pol14 = 2
Segmento n_3	Segmento(N_1, O_1, pol14)	$n_3 = 1$
Segmento o_3	Segmento(O_1, P_1, pol14)	$o_3 = 2$
Segmento p_3	Segmento(P_1, M_1, pol14)	$p_3 = 1$
Segmento m_3	Segmento(M_1, N_1, pol14)	$m_3 = 2$
Quadrilátero pol15	Polígono(J_1, L_1, K_1, I_1)	pol15 = 1
Segmento j_3	Segmento(J_1, L_1, pol15)	$j_3 = 1$
Segmento l_3	Segmento(L_1, K_1, pol15)	$l_3 = 1$
Segmento k_3	Segmento(K_1, I_1, pol15)	$k_3 = 1$
Segmento i_3	Segmento(I_1, J_1, pol15)	$i_3 = 1$
Vetor vx_n		$vx_n = (-2, 0, 0)$
Ponto Q_1	F + t vx_n	$Q_1 = (2, 5, 2)$
Ponto R_1	L + t vx_n	$R_1 = (2, 5, 4)$
Ponto S_1	A + t vx_n	$S_1 = (2, 1, 2)$
Ponto T_1	G + t vx_n	$T_1 = (2, 1, 3)$
Ponto U_1	M + t vx_n	$U_1 = (2, 4, 3)$
Ponto V_1	O + t vx_n	$V_1 = (2, 4, 4)$
Hexágono pol16	Polígono(R_1, Q_1, S_1, T_1, U_1, V_1)	pol16 = 5
Segmento r_1	Segmento(R_1, Q_1, pol16)	$r_1 = 2$
Segmento q_1	Segmento(Q_1, S_1, pol16)	$q_1 = 4$
Segmento s_1	Segmento(S_1, T_1, pol16)	$s_1 = 1$
Segmento t_2	Segmento(T_1, U_1, pol16)	$t_2 = 3$

Segmento u_1	Segmento(U_1, V_1, pol16)	$u_1 = 1$
Segmento v_2	Segmento(V_1, R_1, pol16)	$v_2 = 1$
Vetor $vy1_p$		$vy1_p = (0, 5, 0)$
Ponto W_1	$C + t\ vy1_p$	$W_1 = (4, 2, 2)$
Ponto Z_1	$D + t\ vy1_p$	$Z_1 = (3, 2, 2)$
Ponto A_2	$I + t\ vy1_p$	$A_2 = (4, 2, 3)$
Ponto B_2	$J + t\ vy1_p$	$B_2 = (3, 2, 3)$
Quadrilátero pol17	Polígono(W_1, Z_1, B_2, A_2)	pol17 = 1
Segmento w_1	Segmento(W_1, Z_1, pol17)	$w_1 = 1$
Segmento z_2	Segmento(Z_1, B_2, pol17)	$z_2 = 1$
Segmento b_4	Segmento(B_2, A_2, pol17)	$b_4 = 1$
Segmento a_4	Segmento(A_2, W_1, pol17)	$a_4 = 1$
Vetor $vy2_p$		$vy2_p = (0, 2, 0)$
Ponto C_2	$E + t\ vy2_p$	$C_2 = (3, 5, 2)$
Ponto D_2	$F + t\ vy2_p$	$D_2 = (2, 5, 2)$
Ponto E_2	$K + t\ vy2_p$	$E_2 = (3, 5, 4)$
Ponto F_2	$L + t\ vy2_p$	$F_2 = (2, 5, 4)$
Quadrilátero pol18	Polígono(C_2, D_2, F_2, E_2)	pol18 = 2
Segmento c_4	Segmento(C_2, D_2, pol18)	$c_4 = 1$
Segmento d_4	Segmento(D_2, F_2, pol18)	$d_4 = 2$
Segmento f_4	Segmento(F_2, E_2, pol18)	$f_4 = 1$
Segmento e_4	Segmento(E_2, C_2, pol18)	$e_4 = 2$
Vetor $vz1_p$		$vz1_p = (0, 0, 1)$
Ponto G_2	$O + t\ vz1_p$	$G_2 = (2, 4, 4)$
Ponto H_2	$L + t\ vz1_p$	$H_2 = (2, 5, 4)$
Ponto I_2	$P + t\ vz1_p$	$I_2 = (3, 4, 4)$
Ponto J_2	$K + t\ vz1_p$	$J_2 = (3, 5, 4)$
Quadrilátero pol19	Polígono(G_2, I_2, J_2, H_2)	pol19 = 1
Segmento g_4	Segmento(G_2, I_2, pol19)	$g_4 = 1$
Segmento i_4	Segmento(I_2, J_2, pol19)	$i_4 = 1$
Segmento j_4	Segmento(J_2, H_2, pol19)	$j_4 = 1$
Segmento h_4	Segmento(H_2, G_2, pol19)	$h_4 = 1$
Vetor $vz2_p$		$vz2_p = (0, 0, 2)$
Ponto K_2	$M + t\ vz2_p$	$K_2 = (2, 4, 3)$
Ponto L_2	$N + t\ vz2_p$	$L_2 = (3, 4, 3)$
Ponto M_2	$G + t\ vz2_p$	$M_2 = (2, 1, 3)$
Ponto N_2	$H + t\ vz2_p$	$N_2 = (4, 1, 3)$
Ponto O_2	$I + t\ vz2_p$	$O_2 = (4, 2, 3)$

Ponto P_2	J + t $vz2_p$	P_2 = (3, 2, 3)
Hexágono pol20	Polígono(K_2, M_2, N_2, O_2, P_2, L_2)	pol20 = 4
Segmento k_4	Segmento(K_2, M_2, pol20)	k_4 = 3
Segmento m_4	Segmento(M_2, N_2, pol20)	m_4 = 2
Segmento n_4	Segmento(N_2, O_2, pol20)	n_4 = 1
Segmento o_4	Segmento(O_2, P_2, pol20)	o_4 = 1
Segmento p_4	Segmento(P_2, L_2, pol20)	p_4 = 2
Segmento l_4	Segmento(L_2, K_2, pol20)	l_4 = 1

Atividade 2

Nome	Descrição	Valor
Número top		top = 0
Número front		front = 0
Ponto O		O = (1.41, 0.54)
Ponto rotateUDc		rotateUDc = (0.91, -4.08)
Ponto rotateUD0	rotateUDc + (0.5, 0)	rotateUD0 = (1.41, -4.08)
Círculo d	Círculo por rotateUD0 com centro rotateUDc	d: $(x - 0.91)^2 + (y + 4.08)^2 = 0.25$
Ponto rotateUD	Ponto sobre d	rotateUD = (1.18, -3.66)
Ângulo β	Ângulo entre rotateUD0, rotateUDc, rotateUD	β = 58.17°
Ângulo δ	90° - β	δ = 31.83°
Ponto rotateLRc		rotateLRc = (-2.01, -3.96)
Ponto rotateLR0	rotateLRc + (0.5, 0)	rotateLR0 = (-1.51, -3.96)
Círculo c	Círculo por rotateLR0 com centro rotateLRc	c: $(x + 2.01)^2 + (y + 3.96)^2 = 0.25$
Ponto rotateLR	Ponto sobre c	rotateLR = (-2.49, -3.84)
Ângulo α	Ângulo entre rotateLR0, rotateLRc, rotateLR	α = 165.96°
Ângulo γ	180° - α	γ = 14.04°
Ângulo ε	90° - γ	ε = 75.96°
Número side		side = 0
Segmento a	Segmento rotateLRc, rotateLR0	a = 0.5
Segmento b	Segmento rotateLRc, rotateLR	b = 0.5
Segmento e	Segmento rotateUDc, rotateUD0	e = 0.5
Segmento f	Segmento rotateUDc, rotateUD	f = 0.5
Vetor Oz	Vetor(O, O + (0, sen(β + δ front + δ side - β top)))	Oz = (0, 0.85)

Vetor Oy	Vetor(O, O + (-sen(α + γ front - ε side + γ top), cos(α + γ front - ε side + γ top) cos(β + δ front + δ side - β top)))	Oy = (-0.24, -0.51)
Número B1		B1 = 3
Número C1		C1 = 1
Número D1		D1 = -2
Vetor Ox	Vetor(O, O + (cos(α + γ front - ε side + γ top), sen(α + γ front - ε side + γ top) cos(β + δ front + δ side - β top)))	Ox = (-0.97, 0.13)
Ponto A1	O + B1 Ox + C1 Oy + D1 Oz	A1 = (-1.75, -1.29)
Número D2		D2 = -2
Número C2		C2 = -1
Número B2		B2 = 3
Número B3		B3 = -2
Número B4		B4 = -2
Número C3		C3 = -1
Número D3		D3 = -2
Número C4		C4 = 1
Número D4		D4 = -2
Ponto A3	O + B3 Ox + C3 Oy + D3 Oz	A3 = (3.59, -0.9)
Ponto A4	O + B4 Ox + C4 Oy + D4 Oz	A4 = (3.1, -1.93)
Número D5		D5 = 0
Número C5		C5 = 1
Número B5		B5 = -2
Ponto A5	O + B5 Ox + C5 Oy + D5 Oz	A5 = (3.1, -0.23)
Número D6		D6 = 0
Número C6		C6 = -1
Número B6		B6 = -2
Ponto A6	O + B6 Ox + C6 Oy + D6 Oz	A6 = (3.59, 0.8)
Número B7		B7 = 1
Número B8		B8 = 1
Número D7		D7 = 0
Número D8		D8 = 0
Número C7		C7 = 1
Número C8		C8 = -1
Ponto A7	O + B7 Ox + C7 Oy + D7 Oz	A7 = (0.19, 0.16)
Ponto A8	O + B8 Ox + C8 Oy + D8 Oz	A8 = (0.68, 1.18)
Número B9		B9 = 1
Número C9		C9 = 1

Número D9		D9 = 2
Número B10		B10 = 1
Número C10		C10 = -1
Número D10		D10 = 2
Ponto A9	O + B9 Ox + C9 Oy + D9 Oz	A9 = (0.19, 1.86)
Ponto A10	O + B10 Ox + C10 Oy + D10 Oz	A10 = (0.68, 2.88)
Número B11		B11 = 3
Número C11		C11 = 1
Número D11		D11 = 2
Número B12		B12 = 3
Número C12		C12 = -1
Número D12		D12 = 2
Ponto A11	O + B11 Ox + C11 Oy + D11 Oz	A11 = (-1.75, 2.11)
Ponto A12	O + B12 Ox + C12 Oy + D12 Oz	A12 = (-1.26, 3.13)
Segmento h	Segmento A1, A11	h = 3.4
Segmento i	Segmento A1, A4	i = 4.89
Segmento j	Segmento A4, A5	j = 1.7
Segmento m	Segmento A12, A11	m = 1.13
Segmento n	Segmento A12, A10	n = 1.96
Segmento p	Segmento A9, A11	p = 1.96
Segmento q	Segmento A9, A10	q = 1.13
Segmento r	Segmento A9, A7	r = 1.7
Segmento s_1	Segmento A7, A5	s_1 = 2.94
Segmento t_1	Segmento A10, A8	t_1 = 1.7
Segmento a_1	Segmento A8, A6	a_1 = 2.94
Segmento b_1	Segmento A6, A5	b_1 = 1.13
Segmento c_1	Segmento A6, A3	c_1 = 1.7
Segmento d_1	Segmento A7, A8	d_1 = 1.13
Segmento e_1	Segmento A3, A4	e_1 = 1.13
Texto text1		frente
Texto text2		lado
Texto text3		cima
Hexágono poly1	Polígono A11, A1, A4, A5, A7, A9	poly1 = 11.54
Segmento a11	Segmento A11, A1	a11 = 3.4
Segmento a1	Segmento A1, A4	a1 = 4.89
Segmento a4	Segmento A4, A5	a4 = 1.7
Segmento a5	Segmento A5, A7	a5 = 2.94
Segmento a7	Segmento A7, A9	a7 = 1.7

Segmento a9	Segmento A9, A11	a9 = 1.96
Quadrilátero poly2	Polígono A9, A10, A8, A7	poly2 = 0.82
Segmento $a9_1$	Segmento A9, A10	$a9_1$ = 1.13
Segmento a10	Segmento A10, A8	a10 = 1.7
Segmento a8	Segmento A8, A7	a8 = 1.13
Segmento $a7_1$	Segmento A7, A9	$a7_1$ = 1.7
Quadrilátero poly3	Polígono A5, A6, A3, A4	poly3 = 0.82
Segmento $a5_1$	Segmento A5, A6	$a5_1$ = 1.13
Segmento a6	Segmento A6, A3	a6 = 1.7
Segmento a3	Segmento A3, A4	a3 = 1.13
Segmento $a4_1$	Segmento A4, A5	$a4_1$ = 1.7
Quadrilátero poly4	Polígono A12, A11, A9, A10	poly4 = 2.11
Segmento a12	Segmento A12, A11	a12 = 1.13
Segmento $a11_1$	Segmento A11, A9	$a11_1$ = 1.96
Segmento $a9_2$	Segmento A9, A10	$a9_2$ = 1.13
Segmento $a10_1$	Segmento A10, A12	$a10_1$ = 1.96
Quadrilátero poly5	Polígono A8, A7, A5, A6	poly5 = 3.16
Segmento $a8_1$	Segmento A8, A7	$a8_1$ = 1.13
Segmento $a7_2$	Segmento A7, A5	$a7_2$ = 2.94
Segmento $a5_2$	Segmento A5, A6	$a5_2$ = 1.13
Segmento $a6_1$	Segmento A6, A8	$a6_1$ = 2.94
Texto text4		Pontos de Vista
Texto text5		Vistas de perfil de objeto tridimensional
Valor Booleano g		g = true
Texto text6		Mova os controles para mostrar as diferentes vistas do sólido.
Texto text7		lado

Atividade 3

Nome	Definição	Valor
Número R		R = 3
Ponto O	CentroDeGravidade(Polígono((0, 0, 0), (10, 0, 0), (10, 10, 0), (0, 10, 0)))	O = (5, 5, 0)
Número h		h = 6
Vetor $Eixo_X$	Vetor((0, 0, -2), (12, 0, -2))	$Eixo_X$ = (12, 0, 0)

Vetor $Eixo_Y$	Vetor((0, 0, -2), (0, 12, -2))	$Eixo_Y$ = (0, 12, 0)
Texto texto1		"Configuração:"
Texto texto2		"Sólido"
Número t		t = 1
Valor Booleano StLateral		StLateral = true
Valor Booleano StBase		StBase = true
Lista $Plano_{XOY}$	{Polígono((0, 0, -2), (11, 0, -2), (11, 11, -2), (0, 11, -2))}	$Plano_{XOY}$ = {121}
Lista $Plano_{XOZ}$	{Polígono((0, 0, -2), (0, 0, 9), (11, 0, 9), (11, 0, -2))}	$Plano_{XOZ}$ = {121}
Lista $Plano_{YOZ}$	{Polígono((0, 0, -2), (0, 0, 9), (0, 11, 9), (0, 11, -2))}	$Plano_{YOZ}$ = {121}
Vetor $Eixo_Z$	Vetor((0, 0, -2), (0, 0, 10))	$Eixo_Z$ = (0, 0, 12)
Valor Booleano StEixoX		StEixoX = true
Valor Booleano StEixoY		StEixoY = true
Valor Booleano StEixoZ		StEixoZ = true
Texto texto4		"Eixo:"
Texto texto5		"R"
Texto texto6		"h"
Segmento div_x	Segmento((0, 0, -2), (11, 0, -2))	div_x = 11
Segmento div_y	Segmento((0, 0, -2), (0, 11, -2))	div_y = 11
Segmento div_z	Segmento((0, 0, -2), (0, 0, 9))	div_z = 11
Texto texto7		"Cone"
Texto texto8		"x"
Texto texto9		"y"
Texto texto10		"z"
Texto texto11		"Vista no Plano 3D"
Texto texto13		"Transparência"
Número d_{xOy}		d_{xOy} = 0
Número d_{xOz}		d_{xOz} = 0
Número d_{yOz}		d_{yOz} = 0
Valor Booleano StProjecao		StProjecao = false
Valor Booleano StPlanoxOy		StPlanoxOy = true
Valor Booleano StPlanoxOz		StPlanoxOz = true
Valor Booleano StPlanoyOz		StPlanoyOz = true
Ponto O_h	(x(O), y(O), z(O) + h)	O_h = (5, 5, 6)
Ponto O_{h-y}	(0, y(O), z(O) + h)	O_{h-y} = (0, 5, 6)
Ponto O_{h-z}	(x(O), 0, z(O) + h)	O_{h-z} = (5, 0, 6)
Ponto O_{h-x}	(x(O), y(O), -2)	O_{h-x} = (5, 5, -2)

Círculo Base	Círculo(O, R, EixoZ)	Base: X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Círculo $Base_L$	Base	$Base_L$: X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Cone Solido	Cone(Base, h)	Solido: 56.55
Superfície Lateral	Cone(Base, h)	Lateral: 63.22
Ponto Vertice	Cone(Base, h)	Vertice: X = (5, 5, 6)
Lista $Vista_{xOy}$	{Transladar(Base, Vetor(O, (x(O), y(O), -2)))}	$Vista_{xOy}$ = {X = (5, 5, -2) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista $Vista_{yOz}$	{Polígono((0, y(O) + R, z(O)), (0, y(O) - R, z(O)), O_{h-y})}	$Vista_{yOz}$ = {18}
Lista $Vista_{xOz}$	{Polígono((x(O) + R, 0, z(O)), (x(O) - R, 0, z(O)), O_{h-z})}	$Vista_{xOz}$ = {18}
Lista $L_{BaseL-y}$	{Segmento((0, y(O) + R, z(O)), (0, y(O) - R, z(O)))}	$L_{BaseL-y}$ = {6}
Lista $L_{BaseL-z}$	{Segmento((x(O) + R, 0, z(O)), (x(O) - R, 0, z(O)))}	$L_{BaseL-z}$ = {6}
Lista P_{xOy}	Transladar({Solido, Base}, Vetor(d_{xOy} / 10 Vetor((x(O), y(O), z(O) + h), (x(O), y(O), -2))))	P_{xOy} = {56.55, X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{xOy-L}	{Transladar($Base_L$, Vetor(d_{xOy} / 10 Vetor((x(O), y(O), z(O) + h), (x(O), y(O), -2))))}	P_{xOy-L} = {X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{xOz}	Transladar({Solido, Base}, Vetor(d_{xOz} / 10 Vetor(O, (x(O), -2, z(O)))))	P_{xOz} = {56.55, X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{yOz}	Transladar({Solido, Base}, Vetor(d_{yOz} / 10 Vetor(O, (-2, y(O), z(O)))))	P_{yOz} = {56.55, X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{xOz-L}	{Transladar($Base_L$, Vetor(d_{xOz} / 10 Vetor(O, (x(O), -2, z(O)))))}	P_{xOz-L} = {X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{yOz-L}	{Transladar($Base_L$, Vetor(d_{yOz} / 10 Vetor(O, (-2, y(O), z(O)))))}	P_{yOz-L} = {X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Texto texto3		"Divulgaçao: Projeção Ortogonal do Cone Reto"

Atividade 4

Nome	Definição	Valor
Número h		h = 6
Número R		R = 3
Ponto O	CentroDeGravidade(Polígono((0, 0, 0), (10, 0, 0), (10, 10, 0), (0, 10, 0)))	O = (5, 5, 0)
Círculo Base	Círculo(O, R, EixoZ)	Base: X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Cilindro Solido	Cilindro(Base, h)	Solido: 169.65

Superfície Lateral	Cilindro(Base, h)	Lateral: 113.1
Círculo Topo	Cilindro(Base, h)	Topo: X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Vetor $Eixo_X$	Vetor((0, 0, -2), (12, 0, -2))	$Eixo_X$ = (12, 0, 0)
Vetor $Eixo_Y$	Vetor((0, 0, -2), (0, 12, -2))	$Eixo_Y$ = (0, 12, 0)
Texto texto1		"Configuração:"
Texto texto2		"Sólido"
Número t		t = 1
Valor Booleano StLateral		StLateral = true
Valor Booleano StBase		StBase = true
Lista $Plano_{XOY}$	{Polígono((0, 0, -2), (11, 0, -2), (11, 11, -2), (0, 11, -2))}	$Plano_{XOY}$ = {121}
Lista $Plano_{XOZ}$	{Polígono((0, 0, -2), (0, 0, 9), (11, 0, 9), (11, 0, -2))}	$Plano_{XOZ}$ = {121}
Lista $Plano_{YOZ}$	{Polígono((0, 0, -2), (0, 0, 9), (0, 11, 9), (0, 11, -2))}	$Plano_{YOZ}$ = {121}
Vetor $Eixo_Z$	Vetor((0, 0, -2), (0, 0, 10))	$Eixo_Z$ = (0, 0, 12)
Valor Booleano StEixoX		StEixoX = true
Valor Booleano StEixoY		StEixoY = true
Valor Booleano StEixoZ		StEixoZ = true
Texto texto4		"Eixo:"
Texto texto5		"R"
Texto texto6		"h"
Segmento div_x	Segmento((0, 0, -2), (11, 0, -2))	div_x = 11
Segmento div_y	Segmento((0, 0, -2), (0, 11, -2))	div_y = 11
Segmento div_z	Segmento((0, 0, -2), (0, 0, 9))	div_z = 11
Texto texto7		"Cilindro"
Texto texto8		"x"
Texto texto9		"y"
Texto texto10		"z"
Texto texto11		"Vista no Plano 3D"
Texto texto13		"Transparência"
Número d_{xOy}		d_{xOy} = 0
Número d_{xOz}		d_{xOz} = 0
Número d_{yOz}		d_{yOz} = 0
Valor Booleano StProjecao		StProjecao = false
Valor Booleano StPlanoxOy		StPlanoxOy = true
Valor Booleano StPlanoxOz		StPlanoxOz = true
Valor Booleano StPlanoyOz		StPlanoyOz = true

Círculo $Base_L$	Base	$Base_L$: X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Lista $Vista_{xOy}$	{Transladar(Base, Vetor(O, (x(O), y(O), -2)))}	$Vista_{xOy}$ = {X = (5, 5, -2) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista $L_{BaseL-y}$	{Segmento((0, y(O) + R, z(O)), (0, y(O) - R, z(O)))}	$L_{BaseL-y}$ = {6}
Lista $L_{BaseL-z}$	{Segmento((x(O) + R, 0, z(O)), (x(O) - R, 0, z(O)))}	$L_{BaseL-z}$ = {6}
Valor Booleano StTopo		StTopo = true
Círculo $Topo_L$	Topo	$Topo_L$: X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Lista P_{xOy-L}	Transladar({$Base_L$, $Topo_L$}, Vetor(d_{xOy} / 10 Vetor((x(O), y(O), z(O) + h), (x(O), y(O), -2))))	P_{xOy-L} = {X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0), X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{xOz-L}	Transladar({$Base_L$, $Topo_L$}, Vetor(d_{xOz} / 10 Vetor(O, (x(O), -2, z(O)))))	P_{xOz-L} = {X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0), X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{yOz-L}	Transladar({$Base_L$, $Topo_L$}, Vetor(d_{yOz} / 10 Vetor(O, (-2, y(O), z(O)))))	P_{yOz-L} = {X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0), X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista $L_{TopoL-z}$	{Segmento((x(O) + R, 0, z(O) + h), (x(O) - R, 0, z(O) + h))}	$L_{TopoL-z}$ = {6}
Lista $L_{TopoL-y}$	{Segmento((0, y(O) + R, z(O) + h), (0, y(O) - R, z(O) + h))}	$L_{TopoL-y}$ = {6}
Lista $Vista_{xOz}$	{Polígono((x(O) + R, 0, z(O)), (x(O) - R, 0, z(O)), (x(O) - R, 0, z(O) + h), (x(O) + R, 0, z(O) + h))}	$Vista_{xOz}$ = {36}
Lista $Vista_{yOz}$	{Polígono((0, y(O) + R, z(O)), (0, y(O) - R, z(O)), (0, y(O) - R, z(O) + h), (0, y(O) + R, z(O) + h))}	$Vista_{yOz}$ = {36}
Lista P_{xOy}	Transladar({Solido, Base, Topo}, Vetor(d_{xOy} / 10 Vetor((x(O), y(O), z(O) + h), (x(O), y(O), -2))))	P_{xOy} = {169.65, X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0), X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{xOz}	Transladar({Solido, Base, Topo}, Vetor(d_{xOz} / 10 Vetor(O, (x(O), -2, z(O)))))	P_{xOz} = {169.65, X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0), X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Lista P_{yOz}	Transladar({Solido, Base, Topo}, Vetor(d_{yOz} / 10 Vetor(O, (-2, y(O), z(O)))))	P_{yOz} = {169.65, X = (5, 5, 0) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0), X = (5, 5, 6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)}
Texto texto3		"Divulgação: Projeção Ortogonal do Cilindro"

ANEXO 2 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 2

Atividade 1

Nome	Definição	Valor
Número l		l = 8
Número a		a = 1.2
Ponto A		A = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto B	PontoEm(Esfera(A, a))	B = (0.44, -2.57, 0)
Segmento f	Segmento(A, B)	f = 1.2
Ponto C	Ponto(Círculo(PontoMédio(A, B), Distância(A, B) sqrt(3) / 2, Segmento(A, B)))	C = (-0.16, -1.53, 0)
Tetraedro a_1	Tetraedro(A, B, C)	a_1 = 0.2
Ponto D	Tetraedro(A, B, C)	D = (-0.16, -2.22, 0.98)
Segmento arestaAC	Segmento(C, A, a_1)	arestaAC = 1.2
Segmento arestaAB_1	Segmento(A, B, a_1)	arestaAB_1 = 1.2
Segmento arestaBC	Segmento(B, C, a_1)	arestaBC = 1.2
Triângulo faceABC	Polígono(C, A, B, a_1)	faceABC = 0.62
Segmento arestaAD	Segmento(D, A, a_1)	arestaAD = 1.2
Segmento arestaCD	Segmento(C, D, a_1)	arestaCD = 1.2
Triângulo faceACD	Polígono(D, A, C, a_1)	faceACD = 0.62
Segmento arestaBD	Segmento(D, B, a_1)	arestaBD = 1.2
Triângulo faceABD	Polígono(B, A, D, a_1)	faceABD = 0.62
Triângulo faceBCD	Polígono(C, B, D, a_1)	faceBCD = 0.62
Nùmero t		t = 0.7
Planificação b	Planificação(a_1, t)	b = 2.49
Ponto E	Planificação(a_1, t)	E = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto F	Planificação(a_1, t)	F = (0.44, -2.57, 0)
Ponto G	Planificação(a_1, t)	G = (-0.16, -1.53, 0)
Ponto H	Planificação(a_1, t)	H = (-1.21, -1.61, 0.56)
Ponto I	Planificação(a_1, t)	I = (-0.16, -3.44, 0.56)
Ponto J	Planificação(a_1, t)	J = (0.9, -1.61, 0.56)
Segmento arestaEG	Segmento(G, E, b)	arestaEG = 1.2
Segmento arestaEF	Segmento(E, F, b)	arestaEF = 1.2
Segmento arestaFG	Segmento(F, G, b)	arestaFG = 1.2
Triângulo faceEFG	Polígono(G, E, F, b)	faceEFG = 0.62
Segmento arestaGH	Segmento(G, H, b)	arestaGH = 1.2
Segmento arestaEH	Segmento(H, E, b)	arestaEH = 1.2
Triângulo faceEGH	Polígono(E, G, H, b)	faceEGH = 0.62

Segmento arestaEI	Segmento(E, I, b)	arestaEI = 1.2
Segmento arestaFI	Segmento(I, F, b)	arestaFI = 1.2
Triãngulo faceEFI	Polígono(F, E, I, b)	faceEFI = 0.62
Segmento arestaFJ	Segmento(F, J, b)	arestaFJ = 1.2
Segmento arestaGJ	Segmento(J, G, b)	arestaGJ = 1.2
Triângulo faceFGJ	Polígono(G, F, J, b)	faceFGJ = 0.62
Ponto Q	Ponto(Círculo(B, Distância(A, B), Segmento(A, B)))	Q = (0.44, -1.37, 0)
Cubo c	Cubo(A, B, Q)	c = 1.73
Ponto R	Cubo(A, B, Q)	R = (-0.76, -1.37, 0)
Ponto S	Cubo(A, B, Q)	S = (-0.76, -2.57, 1.2)
Ponto T	Cubo(A, B, Q)	T = (0.44, -2.57, 1.2)
Ponto U	Cubo(A, B, Q)	U = (0.44, -1.37, 1.2)
Ponto V	Cubo(A, B, Q)	V = (-0.76, -1.37, 1.2)
Segmento arestaAR	Segmento(R, A, c)	arestaAR = 1.2
Segmento arestaAB$_2$	Segmento(A, B, c)	arestaAB$_2$ = 1.2
Segmento arestaBQ	Segmento(B, Q, c)	arestaBQ = 1.2
Segmento arestaQR	Segmento(Q, R, c)	arestaQR = 1.2
Quadrilátero faceABQR	Polígono(R, A, B, Q, c)	faceABQR = 1.44
Segmento arestaAS	Segmento(S, A, c)	arestaAS = 1.2
Segmento arestaRV	Segmento(R, V, c)	arestaRV = 1.2
Segmento arestaSV	Segmento(V, S, c)	arestaSV = 1.2
Quadrilátero faceARVS	Polígono(S, A, R, V, c)	faceARVS = 1.44
Segmento arestaST	Segmento(S, T, c)	arestaST = 1.2
Segmento arestaBT	Segmento(T, B, c)	arestaBT = 1.2
Quadrilátero faceABTS	Polígono(B, A, S, T, c)	faceABTS = 1.44
Segmento arestaTU	Segmento(T, U, c)	arestaTU = 1.2
Segmento arestaQU	Segmento(U, Q, c)	arestaQU = 1.2
Quadrilátero faceBQUT	Polígono(Q, B, T, U, c)	faceBQUT = 1.44
Segmento arestaUV	Segmento(U, V, c)	arestaUV = 1.2
Quadrilátero faceQRVU	Polígono(R, Q, U, V, c)	faceQRVU = 1.44
Quadrilátero faceSTUV	Polígono(S, V, U, T, c)	faceSTUV = 1.44
Planificação d	Planificação(c, t)	d = 8.64
Ponto W	Planificação(c, t)	W = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto Z	Planificação(c, t)	Z = (0.44, -2.57, 0)
Ponto A_1	Planificação(c, t)	A_1 = (0.44, -1.37, 0)
Ponto B_1	Planificação(c, t)	B_1 = (-0.76, -1.37, 0)
Ponto C_1	Planificação(c, t)	C_1 = (-1.83, -2.57, 0.54)

Ponto D_1	Planificação(c, t)	D_1 = (-1.83, -1.37, 0.54)
Ponto E_1	Planificação(c, t)	E_1 = (-2.53, -1.37, 1.52)
Ponto F_1	Planificação(c, t)	F_1 = (-2.53, -2.57, 1.52)
Ponto G_1	Planificação(c, t)	G_1 = (-0.76, -3.64, 0.54)
Ponto H_1	Planificação(c, t)	H_1 = (0.44, -3.64, 0.54)
Ponto I_1	Planificação(c, t)	I_1 = (1.51, -2.57, 0.54)
Ponto J_1	Planificação(c, t)	J_1 = (1.51, -1.37, 0.54)
Ponto K_1	Planificação(c, t)	K_1 = (0.44, -0.3, 0.54)
Ponto L_1	Planificação(c, t)	L_1 = (-0.76, -0.3, 0.54)
Segmento aresta1	Segmento(B_1, W, d)	aresta1 = 1.2
Segmento arestaWZ	Segmento(W, Z, d)	arestaWZ = 1.2
Segmento aresta4	Segmento(Z, A_1, d)	aresta4 = 1.2
Segmento aresta7	Segmento(A_1, B_1, d)	aresta7 = 1.2
Quadrilátero face1	Polígono(B_1, W, Z, A_1, d)	face1 = 1.44
Segmento aresta10	Segmento(B_1, D_1, d)	aresta10 = 1.2
Segmento aresta12	Segmento(D_1, C_1, d)	aresta12 = 1.2
Segmento aresta2	Segmento(C_1, W, d)	aresta2 = 1.2
Quadrilátero face3	Polígono(W, B_1, D_1, C_1, d)	face3 = 1.44
Segmento aresta3	Segmento(W, G_1, d)	aresta3 = 1.2
Segmento aresta16	Segmento(G_1, H_1, d)	aresta16 = 1.2
Segmento aresta5	Segmento(H_1, Z, d)	aresta5 = 1.2
Quadrilátero face2	Polígono(Z, W, G_1, H_1, d)	face2 = 1.44
Segmento aresta6	Segmento(Z, I_1, d)	aresta6 = 1.2
Segmento aresta17	Segmento(I_1, J_1, d)	aresta17 = 1.2
Segmento aresta8	Segmento(J_1, A_1, d)	aresta8 = 1.2
Quadrilátero face4	Polígono(A_1, Z, I_1, J_1, d)	face4 = 1.44
Segmento aresta9	Segmento(A_1, K_1, d)	aresta9 = 1.2
Segmento aresta18	Segmento(K_1, L_1, d)	aresta18 = 1.2
Segmento aresta11	Segmento(L_1, B_1, d)	aresta11 = 1.2
Quadrilátero face5	Polígono(B_1, A_1, K_1, L_1, d)	face5 = 1.44
Segmento aresta14	Segmento(D_1, E_1, d)	aresta14 = 1.2
Segmento aresta15	Segmento(E_1, F_1, d)	aresta15 = 1.2
Segmento aresta13	Segmento(F_1, C_1, d)	aresta13 = 1.2
Quadrilátero face6	Polígono(C_1, D_1, E_1, F_1, d)	face6 = 1.44
Ponto W		W = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto Z		Z = (1.19, -2.57, 0)
Ponto K	Ponto(Círculo(PontoMédio(A, B), Distância(A, B) sqrt(3) / 2, Segmento(A, B)))	K = (-0.16, -1.53, 0)

Octaedro e	Octaedro(A, B, K)	e = 0.81
Ponto L	Octaedro(A, B, K)	L = (-0.16, -2.91, 0.98)
Ponto M	Octaedro(A, B, K)	M = (0.44, -1.87, 0.98)
Ponto N	Octaedro(A, B, K)	N = (-0.76, -1.87, 0.98)
Segmento arestaAK	Segmento(K, A, e)	arestaAK = 1.2
Segmento $arestaAB_3$	Segmento(A, B, e)	$arestaAB_3$ = 1.2
Segmento arestaBK	Segmento(B, K, e)	arestaBK = 1.2
Triângulo faceABK	Polígono(K, A, B, e)	faceABK = 0.62
Segmento arestaAN	Segmento(N, A, e)	arestaAN = 1.2
Segmento arestaKN	Segmento(K, N, e)	arestaKN = 1.2
Triângulo faceAKN	Polígono(N, A, K, e)	faceAKN = 0.62
Segmento arestaAL	Segmento(L, A, e)	arestaAL = 1.2
Segmento arestaLN	Segmento(N, L, e)	arestaLN = 1.2
Triângulo faceALN	Polígono(L, A, N, e)	faceALN = 0.62
Segmento arestaBL	Segmento(L, B, e)	arestaBL = 1.2
Triângulo faceABL	Polígono(B, A, L, e)	faceABL = 0.62
Segmento arestaBM	Segmento(M, B, e)	arestaBM = 1.2
Segmento arestaLM	Segmento(L, M, e)	arestaLM = 1.2
Triângulo faceBLM	Polígono(M, B, L, e)	faceBLM = 0.62
Segmento arestaKM	Segmento(M, K, e)	arestaKM = 1.2
Triângulo faceBKM	Polígono(K, B, M, e)	faceBKM = 0.62
Segmento arestaMN	Segmento(M, N, e)	arestaMN = 1.2
Triângulo faceKMN	Polígono(N, K, M, e)	faceKMN = 0.62
Triângulo faceLMN	Polígono(N, M, L, e)	faceLMN = 0.62
Planificação g	Planificação(e, t)	g = 4.99
Ponto O	Planificação(e, t)	O = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto P	Planificação(e, t)	P = (0.44, -2.57, 0)
Ponto M_1	Planificação(e, t)	M_1 = (-0.16, -1.53, 0)
Ponto N_1	Planificação(e, t)	N_1 = (-1.3, -1.56, 0.38)
Ponto O_1	Planificação(e, t)	O_1 = (-1.72, -2.63, 0.71)
Ponto P_1	Planificação(e, t)	P_1 = (-1.99, -1.65, 1.35)
Ponto Q_1	Planificação(e, t)	Q_1 = (-0.58, -0.66, 0.71)
Ponto R_1	Planificação(e, t)	R_1 = (-0.16, -3.54, 0.38)
Ponto S_1	Planificação(e, t)	S_1 = (0.98, -3.37, 0.71)
Ponto T_1	Planificação(e, t)	T_1 = (0.98, -1.56, 0.38)
Segmento aresta19	Segmento(M_1, O, g)	aresta19 = 1.2
Segmento arestaOP	Segmento(O, P, g)	arestaOP = 1.2
Segmento aresta23	Segmento(P, M_1, g)	aresta23 = 1.2

Triângulo face7	Polígono(M_1, O, P, g)	face7 = 0.62
Segmento aresta27	Segmento(M_1, N_1, g)	aresta27 = 1.2
Segmento aresta20	Segmento(N_1, O, g)	aresta20 = 1.2
Triângulo face9	Polígono(O, M_1, N_1, g)	face9 = 0.62
Segmento aresta30	Segmento(N_1, O_1, g)	aresta30 = 1.2
Segmento aresta21	Segmento(O_1, O, g)	aresta21 = 1.2
Triângulo face10	Polígono(O, N_1, O_1, g)	face10 = 0.62
Segmento aresta22	Segmento(O, R_1, g)	aresta22 = 1.2
Segmento aresta24	Segmento(R_1, P, g)	aresta24 = 1.2
Triângulo face8	Polígono(P, O, R_1, g)	face8 = 0.62
Segmento aresta34	Segmento(R_1, S_1, g)	aresta34 = 1.2
Segmento aresta25	Segmento(S_1, P, g)	aresta25 = 1.2
Triângulo face12	Polígono(P, R_1, S_1, g)	face12 = 0.62
Segmento aresta26	Segmento(P, T_1, g)	aresta26 = 1.2
Segmento aresta29	Segmento(T_1, M_1, g)	aresta29 = 1.2
Triângulo face11	Polígono(M_1, P, T_1, g)	face11 = 0.62
Segmento aresta28	Segmento(M_1, Q_1, g)	aresta28 = 1.2
Segmento aresta32	Segmento(Q_1, N_1, g)	aresta32 = 1.2
Triângulo face13	Polígono(N_1, M_1, Q_1, g)	face13 = 0.62
Segmento aresta31	Segmento(N_1, P_1, g)	aresta31 = 1.2
Segmento aresta33	Segmento(P_1, O_1, g)	aresta33 = 1.2
Triângulo face14	Polígono(O_1, N_1, P_1, g)	face14 = 0.62
Ponto U_1	Ponto(Círculo((A (1 - sqrt(5)) + B (3 + sqrt(5))) / 4, Distância(A, B) sqrt(10 + 2sqrt(5)) / 4, Segmento(A, B)))	U_1 = (0.81, -1.43, 0)
Dodecaedro h	Dodecaedro(A, B, U_1)	h = 13.24
Ponto V_1	Dodecaedro(A, B, U_1)	V_1 = (-0.16, -0.72, 0)
Ponto W_1	Dodecaedro(A, B, U_1)	W_1 = (-1.13, -1.43, 0)
Ponto Z_1	Dodecaedro(A, B, U_1)	Z_1 = (0.81, -3.08, 1.02)
Ponto A_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	A_2 = (1.41, -1.23, 1.02)
Ponto B_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	B_2 = (-0.16, -0.09, 1.02)
Ponto C_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	C_2 = (-1.73, -1.23, 1.02)
Ponto D_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	D_2 = (-1.13, -3.08, 1.02)
Ponto E_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	E_2 = (-0.16, -3.39, 1.65)
Ponto F_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	F_2 = (1.41, -2.25, 1.65)
Ponto G_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	G_2 = (0.81, -0.4, 1.65)
Ponto H_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	H_2 = (-1.13, -0.4, 1.65)
Ponto I_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	I_2 = (-1.73, -2.25, 1.65)

Ponto J_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	J_2 = (-0.16, -2.76, 2.67)
Ponto K_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	K_2 = (0.81, -2.06, 2.67)
Ponto L_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	L_2 = (0.44, -0.91, 2.67)
Ponto M_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	M_2 = (-0.76, -0.91, 2.67)
Ponto N_2	Dodecaedro(A, B, U_1)	N_2 = (-1.13, -2.06, 2.67)
Segmento aresta35	Segmento(W_1, A, h)	aresta35 = 1.2
Segmento arestaAB_4	Segmento(A, B, h)	arestaAB_4 = 1.2
Segmento aresta37	Segmento(B, U_1, h)	aresta37 = 1.2
Segmento aresta39	Segmento(U_1, V_1, h)	aresta39 = 1.2
Segmento aresta41	Segmento(V_1, W_1, h)	aresta41 = 1.2
Pentágono face15	Polígono(W_1, A, B, U_1, V_1, h)	face15 = 2.48
Segmento aresta36	Segmento(D_2, A, h)	aresta36 = 1.2
Segmento aresta43	Segmento(W_1, C_2, h)	aresta43 = 1.2
Segmento aresta51	Segmento(C_2, I_2, h)	aresta51 = 1.2
Segmento aresta53	Segmento(I_2, D_2, h)	aresta53 = 1.2
Pentágono face17	Polígono(D_2, A, W_1, C_2, I_2, h)	face17 = 2.48
Segmento aresta52	Segmento(D_2, E_2, h)	aresta52 = 1.2
Segmento aresta44	Segmento(E_2, Z_1, h)	aresta44 = 1.2
Segmento aresta38	Segmento(Z_1, B, h)	aresta38 = 1.2
Pentágono face16	Polígono(B, A, D_2, E_2, Z_1, h)	face16 = 2.48
Segmento aresta45	Segmento(Z_1, F_2, h)	aresta45 = 1.2
Segmento aresta46	Segmento(F_2, A_2, h)	aresta46 = 1.2
Segmento aresta40	Segmento(A_2, U_1, h)	aresta40 = 1.2
Pentágono face18	Polígono(U_1, B, Z_1, F_2, A_2, h)	face18 = 2.48
Segmento aresta47	Segmento(A_2, G_2, h)	aresta47 = 1.2
Segmento aresta48	Segmento(G_2, B_2, h)	aresta48 = 1.2
Segmento aresta42	Segmento(B_2, V_1, h)	aresta42 = 1.2
Pentágono face19	Polígono(V_1, U_1, A_2, G_2, B_2, h)	face19 = 2.48
Segmento aresta49	Segmento(B_2, H_2, h)	aresta49 = 1.2
Segmento aresta50	Segmento(H_2, C_2, h)	aresta50 = 1.2
Pentágono face20	Polígono(W_1, V_1, B_2, H_2, C_2, h)	face20 = 2.48
Segmento aresta57	Segmento(H_2, M_2, h)	aresta57 = 1.2
Segmento aresta63	Segmento(M_2, N_2, h)	aresta63 = 1.2
Segmento aresta58	Segmento(N_2, I_2, h)	aresta58 = 1.2
Pentágono face24	Polígono(I_2, C_2, H_2, M_2, N_2, h)	face24 = 2.48
Segmento aresta60	Segmento(N_2, J_2, h)	aresta60 = 1.2
Segmento aresta54	Segmento(J_2, E_2, h)	aresta54 = 1.2
Pentágono face25	Polígono(D_2, I_2, N_2, J_2, E_2, h)	face25 = 2.48

Segmento aresta59	Segmento(J_2, K_2, h)	aresta59 = 1.2
Segmento aresta55	Segmento(K_2, F_2, h)	aresta55 = 1.2
Pentágono face21	Polígono(Z_1, E_2, J_2, K_2, F_2, h)	face21 = 2.48
Segmento aresta61	Segmento(K_2, L_2, h)	aresta61 = 1.2
Segmento aresta56	Segmento(L_2, G_2, h)	aresta56 = 1.2
Pentágono face22	Polígono(A_2, F_2, K_2, L_2, G_2, h)	face22 = 2.48
Segmento aresta62	Segmento(L_2, M_2, h)	aresta62 = 1.2
Pentágono face23	Polígono(B_2, G_2, L_2, M_2, H_2, h)	face23 = 2.48
Pentágono face26	Polígono(N_2, M_2, L_2, K_2, J_2, h)	face26 = 2.48
Planificação i	Planificação(h, t)	i = 29.73
Ponto O_2	Planificação(h, t)	O_2 = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto P_2	Planificação(h, t)	P_2 = (0.44, -2.57, 0)
Ponto Q_2	Planificação(h, t)	Q_2 = (0.81, -1.43, 0)
Ponto R_2	Planificação(h, t)	R_2 = (-0.16, -0.72, 0)
Ponto S_2	Planificação(h, t)	S_2 = (-1.13, -1.43, 0)
Ponto T_2	Planificação(h, t)	T_2 = (-1.67, -3.25, 0.37)
Ponto U_2	Planificação(h, t)	U_2 = (-2.27, -1.41, 0.37)
Ponto V_2	Planificação(h, t)	V_2 = (-2.6, -2.54, 0.6)
Ponto W_2	Planificação(h, t)	W_2 = (-3.03, -0.67, 0.94)
Ponto Z_2	Planificação(h, t)	Z_2 = (-3.84, -1.35, 1.52)
Ponto A_3	Planificação(h, t)	A_3 = (-3.57, -2.5, 1.31)
Ponto B_3	Planificação(h, t)	B_3 = (-4.54, -1.3, 2.49)
Ponto C_3	Planificação(h, t)	C_3 = (-4.71, -2.42, 2.88)
Ponto D_3	Planificação(h, t)	D_3 = (-4.11, -3.16, 2.15)
Ponto E_3	Planificação(h, t)	E_3 = (-3.37, -3.13, 1.31)
Ponto F_3	Planificação(h, t)	F_3 = (-2.9, -4.22, 1.52)
Ponto G_3	Planificação(h, t)	G_3 = (-1.85, -4.29, 0.94)
Ponto H_3	Planificação(h, t)	H_3 = (-1.13, -3.65, 0.37)
Ponto I_3	Planificação(h, t)	I_3 = (-0.16, -4.31, 0.6)
Ponto J_3	Planificação(h, t)	J_3 = (0.81, -3.65, 0.37)
Ponto K_3	Planificação(h, t)	K_3 = (0.18, -5.22, 1.31)
Ponto L_3	Planificação(h, t)	L_3 = (1.35, -5.12, 1.52)
Ponto M_3	Planificação(h, t)	M_3 = (1.75, -4.14, 0.94)
Ponto N_3	Planificação(h, t)	N_3 = (1.35, -3.25, 0.37)
Ponto O_3	Planificação(h, t)	O_3 = (2.29, -2.54, 0.6)
Ponto P_3	Planificação(h, t)	P_3 = (1.95, -1.41, 0.37)
Ponto Q_3	Planificação(h, t)	Q_3 = (3.26, -2.5, 1.31)
Ponto R_3	Planificação(h, t)	R_3 = (3.52, -1.35, 1.52)

Ponto S_3	Planificação(h, t)	S_3 = (2.72, -0.67, 0.94)
Ponto T_3	Planificação(h, t)	T_3 = (1.75, -0.77, 0.37)
Ponto U_3	Planificação(h, t)	U_3 = (1.35, 0.34, 0.6)
Ponto V_3	Planificação(h, t)	V_3 = (0.18, 0.37, 0.37)
Ponto W_3	Planificação(h, t)	W_3 = (1.62, 1.27, 1.31)
Ponto Z_3	Planificação(h, t)	Z_3 = (0.6, 1.88, 1.52)
Ponto A_4	Planificação(h, t)	A_4 = (-0.29, 1.32, 0.94)
Ponto B_4	Planificação(h, t)	B_4 = (-0.49, 0.37, 0.37)
Ponto C_4	Planificação(h, t)	C_4 = (-1.67, 0.34, 0.6)
Ponto D_4	Planificação(h, t)	D_4 = (-2.06, -0.77, 0.37)
Segmento aresta65	Segmento(S_2, O_2, i)	aresta65 = 1.2
Segmento aresta64	Segmento(O_2, P_2, i)	aresta64 = 1.2
Segmento aresta68	Segmento(P_2, Q_2, i)	aresta68 = 1.2
Segmento aresta71	Segmento(Q_2, R_2, i)	aresta71 = 1.2
Segmento aresta74	Segmento(R_2, S_2, i)	aresta74 = 1.2
Pentágono face27	Polígono(S_2, O_2, P_2, Q_2, R_2, i)	face27 = 2.48
Segmento aresta77	Segmento(S_2, U_2, i)	aresta77 = 1.2
Segmento aresta81	Segmento(U_2, V_2, i)	aresta81 = 1.2
Segmento aresta79	Segmento(V_2, T_2, i)	aresta79 = 1.2
Segmento aresta66	Segmento(T_2, O_2, i)	aresta66 = 1.2
Pentágono face29	Polígono(O_2, S_2, U_2, V_2, T_2, i)	face29 = 2.48
Segmento aresta67	Segmento(O_2, H_3, i)	aresta67 = 1.2
Segmento aresta93	Segmento(H_3, I_3, i)	aresta93 = 1.2
Segmento aresta94	Segmento(I_3, J_3, i)	aresta94 = 1.2
Segmento aresta69	Segmento(J_3, P_2, i)	aresta69 = 1.2
Pentágono face28	Polígono(P_2, O_2, H_3, I_3, J_3, i)	face28 = 2.48
Segmento aresta70	Segmento(P_2, N_3, i)	aresta70 = 1.2
Segmento aresta99	Segmento(N_3, O_3, i)	aresta99 = 1.2
Segmento aresta100	Segmento(O_3, P_3, i)	aresta100 = 1.2
Segmento aresta72	Segmento(P_3, Q_2, i)	aresta72 = 1.2
Pentágono face30	Polígono(Q_2, P_2, N_3, O_3, P_3, i)	face30 = 2.48
Segmento aresta73	Segmento(Q_2, T_3, i)	aresta73 = 1.2
Segmento aresta105	Segmento(T_3, U_3, i)	aresta105 = 1.2
Segmento aresta106	Segmento(U_3, V_3, i)	aresta106 = 1.2
Segmento aresta75	Segmento(V_3, R_2, i)	aresta75 = 1.2
Pentágono face31	Polígono(R_2, Q_2, T_3, U_3, V_3, i)	face31 = 2.48
Segmento aresta76	Segmento(R_2, B_4, i)	aresta76 = 1.2
Segmento aresta111	Segmento(B_4, C_4, i)	aresta111 = 1.2

Segmento aresta112	Segmento(C_4, D_4, i)	aresta112 = 1.2
Segmento aresta78	Segmento(D_4, S_2, i)	aresta78 = 1.2
Pentágono face32	Polígono(S_2, R_2, B_4, C_4, D_4, i)	face32 = 2.48
Segmento aresta82	Segmento(U_2, W_2, i)	aresta82 = 1.2
Segmento aresta85	Segmento(W_2, Z_2, i)	aresta85 = 1.2
Segmento aresta86	Segmento(Z_2, A_3, i)	aresta86 = 1.2
Segmento aresta83	Segmento(A_3, V_2, i)	aresta83 = 1.2
Pentágono face34	Polígono(V_2, U_2, W_2, Z_2, A_3, i)	face34 = 2.48
Segmento aresta84	Segmento(V_2, E_3, i)	aresta84 = 1.2
Segmento aresta91	Segmento(E_3, F_3, i)	aresta91 = 1.2
Segmento aresta92	Segmento(F_3, G_3, i)	aresta92 = 1.2
Segmento aresta80	Segmento(G_3, T_2, i)	aresta80 = 1.2
Pentágono face33	Polígono(T_2, V_2, E_3, F_3, G_3, i)	face33 = 2.48
Segmento aresta95	Segmento(I_3, K_3, i)	aresta95 = 1.2
Segmento aresta97	Segmento(K_3, L_3, i)	aresta97 = 1.2
Segmento aresta98	Segmento(L_3, M_3, i)	aresta98 = 1.2
Segmento aresta96	Segmento(M_3, J_3, i)	aresta96 = 1.2
Pentágono face36	Polígono(J_3, I_3, K_3, L_3, M_3, i)	face36 = 2.48
Segmento aresta101	Segmento(O_3, Q_3, i)	aresta101 = 1.2
Segmento aresta103	Segmento(Q_3, R_3, i)	aresta103 = 1.2
Segmento aresta104	Segmento(R_3, S_3, i)	aresta104 = 1.2
Segmento aresta102	Segmento(S_3, P_3, i)	aresta102 = 1.2
Pentágono face37	Polígono(P_3, O_3, Q_3, R_3, S_3, i)	face37 = 2.48
Segmento aresta107	Segmento(U_3, W_3, i)	aresta107 = 1.2
Segmento aresta109	Segmento(W_3, Z_3, i)	aresta109 = 1.2
Segmento aresta110	Segmento(Z_3, A_4, i)	aresta110 = 1.2
Segmento aresta108	Segmento(A_4, V_3, i)	aresta108 = 1.2
Pentágono face38	Polígono(V_3, U_3, W_3, Z_3, A_4, i)	face38 = 2.48
Segmento aresta87	Segmento(Z_2, B_3, i)	aresta87 = 1.2
Segmento aresta89	Segmento(B_3, C_3, i)	aresta89 = 1.2
Segmento aresta90	Segmento(C_3, D_3, i)	aresta90 = 1.2
Segmento aresta88	Segmento(D_3, A_3, i)	aresta88 = 1.2
Pentágono face35	Polígono(A_3, Z_2, B_3, C_3, D_3, i)	face35 = 2.48
Ponto S_5	Ponto(Círculo(PontoMédio(A, B), Distância(A, B) sqrt(3) / 2, Segmento(A, B)))	S_5 = (-0.16, -1.53, 0)
Icosaedro j	Icosaedro(A, B, S_5)	j = 3.77
Ponto T_5	Icosaedro(A, B, S_5)	T_5 = (-0.16, -3.34, 0.69)
Ponto U_5	Icosaedro(A, B, S_5)	U_5 = (0.81, -1.66, 0.69)

Ponto V_5	Icosaedro(A, B, S_5)	V_5 = (-1.13, -1.66, 0.69)
Ponto W_5	Icosaedro(A, B, S_5)	W_5 = (-1.13, -2.78, 1.12)
Ponto Z_5	Icosaedro(A, B, S_5)	Z_5 = (0.81, -2.78, 1.12)
Ponto A_6	Icosaedro(A, B, S_5)	A_6 = (-0.16, -1.1, 1.12)
Ponto B_6	Icosaedro(A, B, S_5)	B_6 = (-0.16, -2.91, 1.81)
Ponto C_6	Icosaedro(A, B, S_5)	C_6 = (0.44, -1.87, 1.81)
Ponto D_6	Icosaedro(A, B, S_5)	D_6 = (-0.76, -1.87, 1.81)
Segmento aresta113	Segmento(S_5, A, j)	aresta113 = 1.2
Segmento arestaAB	Segmento(A, B, j)	arestaAB = 1.2
Segmento aresta117	Segmento(B, S_5, j)	aresta117 = 1.2
Triângulo face39	Polígono(S_5, A, B, j)	face39 = 0.62
Segmento aresta115	Segmento(V_5, A, j)	aresta115 = 1.2
Segmento aresta122	Segmento(S_5, V_5, j)	aresta122 = 1.2
Triângulo face41	Polígono(V_5, A, S_5, j)	face41 = 0.62
Segmento aresta116	Segmento(W_5, A, j)	aresta116 = 1.2
Segmento aresta130	Segmento(V_5, W_5, j)	aresta130 = 1.2
Triângulo face43	Polígono(W_5, A, V_5, j)	face43 = 0.62
Segmento aresta114	Segmento(T_5, A, j)	aresta114 = 1.2
Segmento aresta124	Segmento(W_5, T_5, j)	aresta124 = 1.2
Triângulo face42	Polígono(T_5, A, W_5, j)	face42 = 0.62
Segmento aresta118	Segmento(T_5, B, j)	aresta118 = 1.2
Triângulo face40	Polígono(B, A, T_5, j)	face40 = 0.62
Segmento aresta120	Segmento(Z_5, B, j)	aresta120 = 1.2
Segmento aresta125	Segmento(T_5, Z_5, j)	aresta125 = 1.2
Triângulo face45	Polígono(Z_5, B, T_5, j)	face45 = 0.62
Segmento aresta119	Segmento(U_5, B, j)	aresta119 = 1.2
Segmento aresta127	Segmento(Z_5, U_5, j)	aresta127 = 1.2
Triângulo face46	Polígono(U_5, B, Z_5, j)	face46 = 0.62
Segmento aresta121	Segmento(U_5, S_5, j)	aresta121 = 1.2
Triângulo face44	Polígono(S_5, B, U_5, j)	face44 = 0.62
Segmento aresta123	Segmento(A_6, S_5, j)	aresta123 = 1.2
Segmento aresta128	Segmento(U_5, A_6, j)	aresta128 = 1.2
Triângulo face47	Polígono(A_6, S_5, U_5, j)	face47 = 0.62
Segmento aresta131	Segmento(A_6, V_5, j)	aresta131 = 1.2
Triângulo face48	Polígono(V_5, S_5, A_6, j)	face48 = 0.62
Segmento aresta129	Segmento(C_6, U_5, j)	aresta129 = 1.2
Segmento aresta136	Segmento(Z_5, C_6, j)	aresta136 = 1.2
Triângulo face51	Polígono(C_6, U_5, Z_5, j)	face51 = 0.62

Segmento aresta137	Segmento(C_6, A_6, j)	aresta137 = 1.2
Triângulo face52	Polígono(A_6, U_5, C_6, j)	face52 = 0.62
Segmento aresta138	Segmento(D_6, A_6, j)	aresta138 = 1.2
Segmento aresta141	Segmento(C_6, D_6, j)	aresta141 = 1.2
Triângulo face57	Polígono(D_6, A_6, C_6, j)	face57 = 0.62
Segmento aresta132	Segmento(D_6, V_5, j)	aresta132 = 1.2
Triângulo face54	Polígono(V_5, A_6, D_6, j)	face54 = 0.62
Segmento aresta139	Segmento(B_6, C_6, j)	aresta139 = 1.2
Segmento aresta135	Segmento(Z_5, B_6, j)	aresta135 = 1.2
Triângulo face56	Polígono(B_6, C_6, Z_5, j)	face56 = 0.62
Segmento aresta140	Segmento(B_6, D_6, j)	aresta140 = 1.2
Triângulo face58	Polígono(D_6, C_6, B_6, j)	face58 = 0.62
Segmento aresta134	Segmento(W_5, D_6, j)	aresta134 = 1.2
Segmento aresta133	Segmento(B_6, W_5, j)	aresta133 = 1.2
Triângulo face55	Polígono(W_5, D_6, B_6, j)	face55 = 0.62
Triângulo face53	Polígono(V_5, D_6, W_5, j)	face53 = 0.62
Segmento aresta126	Segmento(T_5, B_6, j)	aresta126 = 1.2
Triângulo face50	Polígono(T_5, B_6, Z_5, j)	face50 = 0.62
Triângulo face49	Polígono(W_5, B_6, T_5, j)	face49 = 0.62
Planificação k	Planificação(j, t)	k = 12.47
Ponto E_6	Planificação(j, t)	E_6 = (-0.76, -2.57, 0)
Ponto F_6	Planificação(j, t)	F_6 = (0.44, -2.57, 0)
Ponto G_6	Planificação(j, t)	G_6 = (-0.16, -1.53, 0)
Ponto H_6	Planificação(j, t)	H_6 = (-1.34, -1.54, 0.23)
Ponto I_6	Planificação(j, t)	I_6 = (-1.87, -2.59, 0.44)
Ponto J_6	Planificação(j, t)	J_6 = (-2.35, -1.58, 0.87)
Ponto K_6	Planificação(j, t)	K_6 = (-2.74, -2.64, 1.27)
Ponto L_6	Planificação(j, t)	L_6 = (-0.69, -0.55, 0.44)
Ponto M_6	Planificação(j, t)	M_6 = (-1.81, -0.65, 0.87)
Ponto N_6	Planificação(j, t)	N_6 = (-0.16, -3.58, 0.23)
Ponto O_6	Planificação(j, t)	O_6 = (-1.34, -3.52, 0.44)
Ponto P_6	Planificação(j, t)	P_6 = (-0.69, -4.44, 0.87)
Ponto Q_6	Planificação(j, t)	Q_6 = (1.02, -3.52, 0.44)
Ponto R_6	Planificação(j, t)	R_6 = (0.38, -4.44, 0.87)
Ponto S_6	Planificação(j, t)	S_6 = (1.02, -1.54, 0.23)
Ponto T_6	Planificação(j, t)	T_6 = (1.56, -2.59, 0.44)
Ponto U_6	Planificação(j, t)	U_6 = (2.03, -1.58, 0.87)
Ponto V_6	Planificação(j, t)	V_6 = (2.43, -2.64, 1.27)

Ponto W_6	Planificação(j, t)	W_6 = (0.38, -0.55, 0.44)
Ponto Z_6	Planificação(j, t)	Z_6 = (1.5, -0.65, 0.87)
Ponto A_7	Planificação(j, t)	A_7 = (0.77, 0.23, 1.27)
Ponto B_7	Planificação(j, t)	B_7 = (1.8, -0.01, 1.84)
Segmento aresta143	Segmento(G_6, E_6, k)	aresta143 = 1.2
Segmento aresta142	Segmento(E_6, F_6, k)	aresta142 = 1.2
Segmento aresta148	Segmento(F_6, G_6, k)	aresta148 = 1.2
Triângulo face59	Polígono(G_6, E_6, F_6, k)	face59 = 0.62
Segmento aresta153	Segmento(G_6, H_6, k)	aresta153 = 1.2
Segmento aresta144	Segmento(H_6, E_6, k)	aresta144 = 1.2
Triângulo face61	Polígono(E_6, G_6, H_6, k)	face61 = 0.62
Segmento aresta157	Segmento(H_6, I_6, k)	aresta157 = 1.2
Segmento aresta145	Segmento(I_6, E_6, k)	aresta145 = 1.2
Triângulo face62	Polígono(E_6, H_6, I_6, k)	face62 = 0.62
Segmento aresta146	Segmento(N_6, E_6, k)	aresta146 = 1.2
Segmento aresta147	Segmento(E_6, O_6, k)	aresta147 = 1.2
Segmento aresta165	Segmento(O_6, N_6, k)	aresta165 = 1.2
Triângulo face63	Polígono(N_6, E_6, O_6, k)	face63 = 0.62
Segmento aresta149	Segmento(N_6, F_6, k)	aresta149 = 1.2
Triângulo face60	Polígono(F_6, E_6, N_6, k)	face60 = 0.62
Segmento aresta167	Segmento(N_6, Q_6, k)	aresta167 = 1.2
Segmento aresta150	Segmento(Q_6, F_6, k)	aresta150 = 1.2
Triângulo face65	Polígono(F_6, N_6, Q_6, k)	face65 = 0.62
Segmento aresta151	Segmento(S_6, F_6, k)	aresta151 = 1.2
Segmento aresta152	Segmento(F_6, T_6, k)	aresta152 = 1.2
Segmento aresta171	Segmento(T_6, S_6, k)	aresta171 = 1.2
Triângulo face66	Polígono(S_6, F_6, T_6, k)	face66 = 0.62
Segmento aresta155	Segmento(S_6, G_6, k)	aresta155 = 1.2
Triângulo face64	Polígono(G_6, F_6, S_6, k)	face64 = 0.62
Segmento aresta173	Segmento(S_6, W_6, k)	aresta173 = 1.2
Segmento aresta156	Segmento(W_6, G_6, k)	aresta156 = 1.2
Triângulo face68	Polígono(G_6, S_6, W_6, k)	face68 = 0.62
Segmento aresta154	Segmento(G_6, L_6, k)	aresta154 = 1.2
Segmento aresta159	Segmento(L_6, H_6, k)	aresta159 = 1.2
Triângulo face67	Polígono(H_6, G_6, L_6, k)	face67 = 0.62
Segmento aresta175	Segmento(T_6, U_6, k)	aresta175 = 1.2
Segmento aresta172	Segmento(U_6, S_6, k)	aresta172 = 1.2
Triângulo face74	Polígono(S_6, T_6, U_6, k)	face74 = 0.62

Segmento aresta174	Segmento(S_6, Z_6, k)	aresta174 = 1.2
Segmento aresta178	Segmento(Z_6, W_6, k)	aresta178 = 1.2
Triângulo face75	Polígono(W_6, S_6, Z_6, k)	face75 = 0.62
Segmento aresta180	Segmento(Z_6, A_7, k)	aresta180 = 1.2
Segmento aresta179	Segmento(A_7, W_6, k)	aresta179 = 1.2
Triângulo face77	Polígono(W_6, Z_6, A_7, k)	face77 = 0.62
Segmento aresta164	Segmento(L_6, M_6, k)	aresta164 = 1.2
Segmento aresta160	Segmento(M_6, H_6, k)	aresta160 = 1.2
Triângulo face70	Polígono(H_6, L_6, M_6, k)	face70 = 0.62
Segmento aresta176	Segmento(T_6, V_6, k)	aresta176 = 1.2
Segmento aresta177	Segmento(V_6, U_6, k)	aresta177 = 1.2
Triângulo face76	Polígono(U_6, T_6, V_6, k)	face76 = 0.62
Segmento aresta181	Segmento(Z_6, B_7, k)	aresta181 = 1.2
Segmento aresta182	Segmento(B_7, A_7, k)	aresta182 = 1.2
Triângulo face78	Polígono(A_7, Z_6, B_7, k)	face78 = 0.62
Segmento aresta161	Segmento(I_6, J_6, k)	aresta161 = 1.2
Segmento aresta163	Segmento(J_6, K_6, k)	aresta163 = 1.2
Segmento aresta162	Segmento(K_6, I_6, k)	aresta162 = 1.2
Triângulo face71	Polígono(I_6, J_6, K_6, k)	face71 = 0.62
Segmento aresta158	Segmento(H_6, J_6, k)	aresta158 = 1.2
Triângulo face69	Polígono(I_6, H_6, J_6, k)	face69 = 0.62
Segmento aresta168	Segmento(N_6, R_6, k)	aresta168 = 1.2
Segmento aresta170	Segmento(R_6, Q_6, k)	aresta170 = 1.2
Triângulo face73	Polígono(Q_6, N_6, R_6, k)	face73 = 0.62
Segmento aresta169	Segmento(O_6, P_6, k)	aresta169 = 1.2
Segmento aresta166	Segmento(P_6, N_6, k)	aresta166 = 1.2
Triângulo face72	Polígono(N_6, O_6, P_6, k)	face72 = 0.62
Texto texto1		"Tetraedro"
Texto texto2		"Cubo"
Texto texto3		"Octaedro"
Texto texto5		"Icosaedro"
Texto texto4		"Dodecaedro"
Texto texto6		"Movimente os controles delizantes :"

ANEXO 3 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 3

Atividade 1

Nome	Definição	Valor
Número R		R = 1.75
Ponto A	Interseção(EixoX, EixoY)	A = (0, 0)
Círculo c	Círculo(A, R)	c: $x^2 + y^2 = 3.06$
Ponto B	Interseção(c, EixoY, 1)	B = (0, -1.75)
Número n		n = 3
Ponto B'	Girar(B, 360° / n, A)	B' = (1.52, 0.88)
Ângulo α	Ângulo(B, A, B')	α = 120º
Polígono pol1	Polígono(B, B', n)	pol1 = 3.98
Segmento f	Segmento(B, B', pol1)	f = 3.03
Segmento g	Segmento(B', C, pol1)	g = 3.03
Ponto C	Polígono(B, B', n)	C = (-1.52, 0.88)
Ponto D	Polígono(B, B', n)	D indefinido
Ponto E	Polígono(B, B', n)	E indefinido
Ponto F	Polígono(B, B', n)	F indefinido
Ponto G	Polígono(B, B', n)	G indefinido
Ponto H	Polígono(B, B', n)	H indefinido
Ponto I	Polígono(B, B', n)	I indefinido
Ponto J	Polígono(B, B', n)	J indefinido
Ponto K	Polígono(B, B', n)	K indefinido
Ponto L	Polígono(B, B', n)	L indefinido
Ponto M	Polígono(B, B', n)	M indefinido
Ponto N	Polígono(B, B', n)	N indefinido
Ponto F_1	Polígono(B, B', n)	F_1 indefinido
Ponto G_1	Polígono(B, B', n)	G_1 indefinido
Ponto H_1	Polígono(B, B', n)	H_1 indefinido
Ponto I_1	Polígono(B, B', n)	I_1 indefinido
Ponto N_1	Polígono(B, B', n)	N_1 indefinido
Ponto O_1	Polígono(B, B', n)	O_1 indefinido
Ponto P_1	Polígono(B, B', n)	P_1 indefinido
Ponto Q_1	Polígono(B, B', n)	Q_1 indefinido
Ponto R_1	Polígono(B, B', n)	R_1 indefinido
Ponto S_1	Polígono(B, B', n)	S_1 indefinido
Ponto T_1	Polígono(B, B', n)	T_1 indefinido
Ponto U_1	Polígono(B, B', n)	U_1 indefinido

Ponto V_1	Polígono(B, B', n)	V_1 indefinido
Ponto W_1	Polígono(B, B', n)	W_1 indefinido
Ponto Z_1	Polígono(B, B', n)	Z_1 indefinido
Ponto A_2	Polígono(B, B', n)	A_2 indefinido
Segmento h_1	Segmento(C, B, pol1)	h_1 = 3.03
Segmento i	Segmento(D, E, pol1)	i indefinido
Segmento j	Segmento(E, F, pol1)	j indefinido
Segmento k	Segmento(F, G, pol1)	k indefinido
Segmento l	Segmento(G, H, pol1)	l indefinido
Segmento m	Segmento(H, I, pol1)	m indefinido
Segmento p_2	Segmento(I, J, pol1)	p_2 indefinido
Segmento q	Segmento(J, K, pol1)	q indefinido
Segmento r	Segmento(K, L, pol1)	r indefinido
Segmento s	Segmento(L, M, pol1)	s indefinido
Segmento t	Segmento(M, N, pol1)	t indefinido
Segmento a	Segmento(N, F_1, pol1)	a indefinido
Segmento d	Segmento(F_1, G_1, pol1)	d indefinido
Segmento e	Segmento(G_1, H_1, pol1)	e indefinido
Segmento f_1	Segmento(H_1, I_1, pol1)	f_1 indefinido
Segmento g_1	Segmento(I_1, N_1, pol1)	g_1 indefinido
Segmento i_1	Segmento(N_1, O_1, pol1)	i_1 indefinido
Segmento j_1	Segmento(O_1, P_1, pol1)	j_1 indefinido
Segmento k_1	Segmento(P_1, Q_1, pol1)	k_1 indefinido
Segmento l_1	Segmento(Q_1, R_1, pol1)	l_1 indefinido
Segmento m_1	Segmento(R_1, S_1, pol1)	m_1 indefinido
Segmento n_1	Segmento(S_1, T_1, pol1)	n_1 indefinido
Segmento p_1	Segmento(T_1, U_1, pol1)	p_1 indefinido
Segmento q_1	Segmento(U_1, V_1, pol1)	q_1 indefinido
Segmento r_1	Segmento(V_1, W_1, pol1)	r_1 indefinido
Segmento s_1	Segmento(W_1, Z_1, pol1)	s_1 indefinido
Segmento t_1	Segmento(Z_1, A_2, pol1)	t_1 indefinido
Segmento a_1	Segmento(A_2, B, pol1)	a_1 indefinido
Número h		h = 4.6
Ponto B_1	(0, -R, h)	B_1 = (0, -1.75, 4.6)
Prisma b	Prisma(pol1, B_1)	b = 18.3
Ponto O	Prisma(pol1, B_1)	O = (1.52, 0.88, 4.6)
Ponto P	Prisma(pol1, B_1)	P = (-1.52, 0.88, 4.6)
Segmento arestaB'O	Segmento(B', O, b)	arestaB'O = 4.6

Segmento aresta6	Segmento(O, B_1, b)	aresta6 = 3.03
Segmento aresta1	Segmento(B_1, B, b)	aresta1 = 4.6
Quadrilátero face1	Polígono(B, B', O, B_1, b)	face1 = 13.94
Segmento arestaCP	Segmento(C, P, b)	arestaCP = 4.6
Segmento arestaOP	Segmento(P, O, b)	arestaOP = 3.03
Quadrilátero faceB'CPO	Polígono(B', C, P, O, b)	faceB'CPO = 13.94
Segmento arestaPQ	Segmento(P, B_1, b)	arestaPQ = 3.03
Quadrilátero faceCDQP	Polígono(C, D, Q, P, b)	faceCDQP = 13.94
Triângulo face7	Polígono(B_1, O, P, b)	face7 = 3.98
Ponto Q	Prisma(pol1, B_1)	Q indefinido
Ponto S	Prisma(pol1, B_1)	S indefinido
Ponto T	Prisma(pol1, B_1)	T indefinido
Ponto U	Prisma(pol1, B_1)	U indefinido
Ponto V	Prisma(pol1, B_1)	V indefinido
Ponto W	Prisma(pol1, B_1)	W indefinido
Ponto Z	Prisma(pol1, B_1)	Z indefinido
Ponto A_1	Prisma(pol1, B_1)	A_1 indefinido
Ponto C_1	Prisma(pol1, B_1)	C_1 indefinido
Ponto D_1	Prisma(pol1, B_1)	D_1 indefinido
Ponto E_1	Prisma(pol1, B_1)	E_1 indefinido
Ponto J_1	Prisma(pol1, B_1)	J_1 indefinido
Ponto K_1	Prisma(pol1, B_1)	K_1 indefinido
Ponto L_1	Prisma(pol1, B_1)	L_1 indefinido
Ponto M_1	Prisma(pol1, B_1)	M_1 indefinido
Ponto B_2	Prisma(pol1, B_1)	B_2 indefinido
Ponto C_2	Prisma(pol1, B_1)	C_2 indefinido
Ponto D_2	Prisma(pol1, B_1)	D_2 indefinido
Ponto E_2	Prisma(pol1, B_1)	E_2 indefinido
Ponto F_2	Prisma(pol1, B_1)	F_2 indefinido
Ponto G_2	Prisma(pol1, B_1)	G_2 indefinido
Ponto H_2	Prisma(pol1, B_1)	H_2 indefinido
Ponto I_2	Prisma(pol1, B_1)	I_2 indefinido
Ponto J_2	Prisma(pol1, B_1)	J_2 indefinido
Ponto K_2	Prisma(pol1, B_1)	K_2 indefinido
Ponto L_2	Prisma(pol1, B_1)	L_2 indefinido
Ponto M_2	Prisma(pol1, B_1)	M_2 indefinido
Segmento arestaES	Segmento(E, S, b)	arestaES indefinido
Segmento arestaQS	Segmento(S, Q, b)	arestaQS indefinido

Segmento arestaDQ	Segmento(Q, D, b)	arestaDQ indefinido
Quadrilátero faceDESQ	Polígono(D, E, S, Q, b)	faceDESQ indefinido
Segmento arestaFT	Segmento(F, T, b)	arestaFT indefinido
Segmento arestaST	Segmento(T, S, b)	arestaST indefinido
Quadrilátero faceEFTS	Polígono(E, F, T, S, b)	faceEFTS indefinido
Segmento arestaGU	Segmento(G, U, b)	arestaGU indefinido
Segmento arestaTU	Segmento(U, T, b)	arestaTU indefinido
Quadrilátero faceFGUT	Polígono(F, G, U, T, b)	faceFGUT indefinido
Segmento arestaHV	Segmento(H, V, b)	arestaHV indefinido
Segmento arestaUV	Segmento(V, U, b)	arestaUV indefinido
Quadrilátero faceGHVU	Polígono(G, H, V, U, b)	faceGHVU indefinido
Segmento arestaIW	Segmento(I, W, b)	arestaIW indefinido
Segmento arestaVW	Segmento(W, V, b)	arestaVW indefinido
Quadrilátero faceHIWV	Polígono(H, I, W, V, b)	faceHIWV indefinido
Segmento arestaJZ	Segmento(J, Z, b)	arestaJZ indefinido
Segmento arestaWZ	Segmento(Z, W, b)	arestaWZ indefinido
Quadrilátero faceIJZW	Polígono(I, J, Z, W, b)	faceIJZW indefinido
Segmento aresta2	Segmento(K, A_1, b)	aresta2 indefinido
Segmento aresta8	Segmento(A_1, Z, b)	aresta8 indefinido
Quadrilátero face3	Polígono(J, K, A_1, Z, b)	face3 indefinido
Segmento aresta3	Segmento(L, C_1, b)	aresta3 indefinido
Segmento aresta9	Segmento(C_1, A_1, b)	aresta9 indefinido
Quadrilátero face4	Polígono(K, L, C_1, A_1, b)	face4 indefinido
Segmento aresta4	Segmento(M, D_1, b)	aresta4 indefinido
Segmento aresta10	Segmento(D_1, C_1, b)	aresta10 indefinido
Quadrilátero face5	Polígono(L, M, D_1, C_1, b)	face5 indefinido
Segmento aresta5	Segmento(N, E_1, b)	aresta5 indefinido
Segmento aresta11	Segmento(E_1, D_1, b)	aresta11 indefinido
Quadrilátero face6	Polígono(M, N, E_1, D_1, b)	face6 indefinido
Segmento aresta12	Segmento(F_1, J_1, b)	aresta12 indefinido
Segmento aresta7	Segmento(J_1, E_1, b)	aresta7 indefinido
Quadrilátero face2	Polígono(N, F_1, J_1, E_1, b)	face2 indefinido
Segmento aresta13	Segmento(G_1, K_1, b)	aresta13 indefinido
Segmento aresta16	Segmento(K_1, J_1, b)	aresta16 indefinido
Quadrilátero face8	Polígono(F_1, G_1, K_1, J_1, b)	face8 indefinido
Segmento aresta14	Segmento(H_1, L_1, b)	aresta14 indefinido
Segmento aresta17	Segmento(L_1, K_1, b)	aresta17 indefinido
Quadrilátero face9	Polígono(G_1, H_1, L_1, K_1, b)	face9 indefinido

Segmento aresta15	Segmento(I_1, M_1, b)	aresta15 indefinido
Segmento aresta18	Segmento(M_1, L_1, b)	aresta18 indefinido
Quadrilátero face10	Polígono(H_1, I_1, M_1, L_1, b)	face10 indefinido
Segmento aresta20	Segmento(N_1, B_2, b)	aresta20 indefinido
Segmento aresta19	Segmento(B_2, M_1, b)	aresta19 indefinido
Quadrilátero face11	Polígono(I_1, N_1, B_2, M_1, b)	face11 indefinido
Segmento aresta21	Segmento(O_1, C_2, b)	aresta21 indefinido
Segmento aresta32	Segmento(C_2, B_2, b)	aresta32 indefinido
Quadrilátero face12	Polígono(N_1, O_1, C_2, B_2, b)	face12 indefinido
Segmento aresta22	Segmento(P_1, D_2, b)	aresta22 indefinido
Segmento aresta33	Segmento(D_2, C_2, b)	aresta33 indefinido
Quadrilátero face13	Polígono(O_1, P_1, D_2, C_2, b)	face13 indefinido
Segmento aresta23	Segmento(Q_1, E_2, b)	aresta23 indefinido
Segmento aresta34	Segmento(E_2, D_2, b)	aresta34 indefinido
Quadrilátero face14	Polígono(P_1, Q_1, E_2, D_2, b)	face14 indefinido
Segmento aresta24	Segmento(R_1, F_2, b)	aresta24 indefinido
Segmento aresta35	Segmento(F_2, E_2, b)	aresta35 indefinido
Quadrilátero face15	Polígono(Q_1, R_1, F_2, E_2, b)	face15 indefinido
Segmento aresta25	Segmento(S_1, G_2, b)	aresta25 indefinido
Segmento aresta36	Segmento(G_2, F_2, b)	aresta36 indefinido
Quadrilátero face16	Polígono(R_1, S_1, G_2, F_2, b)	face16 indefinido
Segmento aresta26	Segmento(T_1, H_2, b)	aresta26 indefinido
Segmento aresta37	Segmento(H_2, G_2, b)	aresta37 indefinido
Quadrilátero face17	Polígono(S_1, T_1, H_2, G_2, b)	face17 indefinido
Segmento aresta27	Segmento(U_1, I_2, b)	aresta27 indefinido
Segmento aresta38	Segmento(I_2, H_2, b)	aresta38 indefinido
Quadrilátero face18	Polígono(T_1, U_1, I_2, H_2, b)	face18 indefinido
Segmento aresta28	Segmento(V_1, J_2, b)	aresta28 indefinido
Segmento aresta39	Segmento(J_2, I_2, b)	aresta39 indefinido
Quadrilátero face19	Polígono(U_1, V_1, J_2, I_2, b)	face19 indefinido
Segmento aresta29	Segmento(W_1, K_2, b)	aresta29 indefinido
Segmento aresta40	Segmento(K_2, J_2, b)	aresta40 indefinido
Quadrilátero face20	Polígono(V_1, W_1, K_2, J_2, b)	face20 indefinido
Segmento aresta30	Segmento(Z_1, L_2, b)	aresta30 indefinido
Segmento aresta41	Segmento(L_2, K_2, b)	aresta41 indefinido
Quadrilátero face21	Polígono(W_1, Z_1, L_2, K_2, b)	face21 indefinido
Segmento aresta31	Segmento(A_2, M_2, b)	aresta31 indefinido
Segmento aresta42	Segmento(M_2, L_2, b)	aresta42 indefinido

Quadrilátero face22	Polígono(Z_1, A_2, M_2, L_2, b)	face22 indefinido
Segmento aresta43	Segmento(B_1, M_2, b)	aresta43 indefinido
Quadrilátero face23	Polígono(A_2, B, B_1, M_2, b)	face23 indefinido
Ponto X	(0, 0, h)	X = (0, 0, 4.6)
Segmento b_1	Segmento(X, A)	b_1 = 4.6
Segmento d_1	Segmento(A, B)	d_1 = 1.75
Ponto N_2	PontoMédio(f)	N_2 = (0.76, -0.44)
Segmento c_1	Segmento(N_2, A)	c_1 = 0.88
Número p		p = 0.12
Planificação u	Planificação(b, p)	u = 49.79
Ponto O_2	Planificação(b, p)	O_2 = (0, -1.75, 0)
Ponto P_2	Planificação(b, p)	P_2 = (1.52, 0.88, 0)
Ponto Q_2	Planificação(b, p)	Q_2 = (-1.52, 0.88, 0)
Ponto R_2	Planificação(b, p)	R_2 = (0.75, -2.18, 4.52)
Ponto S_2	Planificação(b, p)	S_2 = (2.26, 0.44, 4.52)
Ponto T_2	Planificação(b, p)	T_2 = (1.52, 1.74, 4.52)
Ponto U_2	Planificação(b, p)	U_2 = (-1.52, 1.74, 4.52)
Ponto V_2	Planificação(b, p)	V_2 = (-2.26, 0.44, 4.52)
Ponto W_2	Planificação(b, p)	W_2 = (-0.75, -2.18, 4.52)
Ponto Z_2	Planificação(b, p)	Z_2 = (-0.61, 0.35, 5.48)
Segmento aresta44	Segmento(O_2, P_2, u)	aresta44 = 3.03
Segmento aresta48	Segmento(P_2, Q_2, u)	aresta48 = 3.03
Segmento aresta45	Segmento(Q_2, O_2, u)	aresta45 = 3.03
Triângulo face24	Polígono(O_2, P_2, Q_2, u)	face24 = 3.98
Segmento aresta49	Segmento(P_2, S_2, u)	aresta49 = 4.6
Segmento aresta53	Segmento(S_2, R_2, u)	aresta53 = 3.03
Segmento aresta46	Segmento(R_2, O_2, u)	aresta46 = 4.6
Quadrilátero face26	Polígono(O_2, P_2, S_2, R_2, u)	face26 = 13.94
Segmento aresta51	Segmento(Q_2, U_2, u)	aresta51 = 4.6
Segmento aresta56	Segmento(U_2, T_2, u)	aresta56 = 3.03
Segmento aresta50	Segmento(T_2, P_2, u)	aresta50 = 4.6
Quadrilátero face28	Polígono(P_2, Q_2, U_2, T_2, u)	face28 = 13.94
Segmento aresta47	Segmento(O_2, W_2, u)	aresta47 = 4.6
Segmento aresta57	Segmento(W_2, V_2, u)	aresta57 = 3.03
Segmento aresta52	Segmento(V_2, Q_2, u)	aresta52 = 4.6
Quadrilátero face27	Polígono(Q_2, O_2, W_2, V_2, u)	face27 = 13.94
Segmento aresta55	Segmento(S_2, Z_2, u)	aresta55 = 3.03
Segmento aresta54	Segmento(Z_2, R_2, u)	aresta54 = 3.03

Triângulo face25	Polígono(R_2, S_2, Z_2, u)	face25 = 3.98
Ponto A_3	Planificação(b, p)	A_3 indefinido
Ponto E_3	Planificação(b, p)	E_3 indefinido
Ponto F_3	Planificação(b, p)	F_3 indefinido
Ponto G_3	Planificação(b, p)	G_3 indefinido
Ponto Q_3	Planificação(b, p)	Q_3 indefinido
Ponto R_3	Planificação(b, p)	R_3 indefinido
Ponto S_3	Planificação(b, p)	S_3 indefinido
Ponto T_3	Planificação(b, p)	T_3 indefinido
Ponto U_3	Planificação(b, p)	U_3 indefinido
Ponto V_3	Planificação(b, p)	V_3 indefinido
Ponto W_3	Planificação(b, p)	W_3 indefinido
Ponto Z_3	Planificação(b, p)	Z_3 indefinido
Ponto A_4	Planificação(b, p)	A_4 indefinido
Ponto B_4	Planificação(b, p)	B_4 indefinido
Ponto C_4	Planificação(b, p)	C_4 indefinido
Ponto D_4	Planificação(b, p)	D_4 indefinido
Ponto E_4	Planificação(b, p)	E_4 indefinido
Ponto F_4	Planificação(b, p)	F_4 indefinido
Ponto G_4	Planificação(b, p)	G_4 indefinido
Ponto H_4	Planificação(b, p)	H_4 indefinido
Ponto I_6	Planificação(b, p)	I_6 indefinido
Ponto J_6	Planificação(b, p)	J_6 indefinido
Ponto K_6	Planificação(b, p)	K_6 indefinido
Ponto U_6	Planificação(b, p)	U_6 indefinido
Ponto V_6	Planificação(b, p)	V_6 indefinido
Ponto W_6	Planificação(b, p)	W_6 indefinido
Ponto Z_6	Planificação(b, p)	Z_6 indefinido
Ponto B_3	Planificação(b, p)	B_3 indefinido
Ponto H_3	Planificação(b, p)	H_3 indefinido
Ponto I_3	Planificação(b, p)	I_3 indefinido
Ponto J_3	Planificação(b, p)	J_3 indefinido
Ponto I_4	Planificação(b, p)	I_4 indefinido
Ponto J_4	Planificação(b, p)	J_4 indefinido
Ponto K_4	Planificação(b, p)	K_4 indefinido
Ponto L_4	Planificação(b, p)	L_4 indefinido
Ponto M_4	Planificação(b, p)	M_4 indefinido
Ponto N_4	Planificação(b, p)	N_4 indefinido

Ponto O_4	Planificação(b, p)	O_4 indefinido
Ponto P_4	Planificação(b, p)	P_4 indefinido
Ponto Q_4	Planificação(b, p)	Q_4 indefinido
Ponto R_4	Planificação(b, p)	R_4 indefinido
Ponto S_4	Planificação(b, p)	S_4 indefinido
Ponto T_4	Planificação(b, p)	T_4 indefinido
Ponto U_4	Planificação(b, p)	U_4 indefinido
Ponto V_4	Planificação(b, p)	V_4 indefinido
Ponto W_4	Planificação(b, p)	W_4 indefinido
Ponto Z_4	Planificação(b, p)	Z_4 indefinido
Ponto L_6	Planificação(b, p)	L_6 indefinido
Ponto M_6	Planificação(b, p)	M_6 indefinido
Ponto N_6	Planificação(b, p)	N_6 indefinido
Ponto A_7	Planificação(b, p)	A_7 indefinido
Ponto B_7	Planificação(b, p)	B_7 indefinido
Ponto C_7	Planificação(b, p)	C_7 indefinido
Ponto D_7	Planificação(b, p)	D_7 indefinido
Segmento aresta58	Segmento(B_3, H_3, u)	aresta58 indefinido
Segmento aresta63	Segmento(H_3, I_3, u)	aresta63 indefinido
Segmento aresta64	Segmento(I_3, J_3, u)	aresta64 indefinido
Segmento aresta65	Segmento(J_3, I_4, u)	aresta65 indefinido
Segmento aresta78	Segmento(I_4, J_4, u)	aresta78 indefinido
Segmento aresta79	Segmento(J_4, K_4, u)	aresta79 indefinido
Segmento aresta80	Segmento(K_4, L_4, u)	aresta80 indefinido
Segmento aresta81	Segmento(L_4, M_4, u)	aresta81 indefinido
Segmento aresta82	Segmento(M_4, N_4, u)	aresta82 indefinido
Segmento aresta83	Segmento(N_4, O_4, u)	aresta83 indefinido
Segmento aresta84	Segmento(O_4, P_4, u)	aresta84 indefinido
Segmento aresta85	Segmento(P_4, Q_4, u)	aresta85 indefinido
Segmento aresta86	Segmento(Q_4, R_4, u)	aresta86 indefinido
Segmento aresta87	Segmento(R_4, S_4, u)	aresta87 indefinido
Segmento aresta88	Segmento(S_4, T_4, u)	aresta88 indefinido
Segmento aresta89	Segmento(T_4, U_4, u)	aresta89 indefinido
Segmento aresta90	Segmento(U_4, V_4, u)	aresta90 indefinido
Segmento aresta91	Segmento(V_4, W_4, u)	aresta91 indefinido
Segmento aresta92	Segmento(W_4, Z_4, u)	aresta92 indefinido
Segmento aresta93	Segmento(Z_4, L_6, u)	aresta93 indefinido
Segmento aresta158	Segmento(L_6, M_6, u)	aresta158 indefinido

Segmento aresta159	Segmento(M_6, N_6, u)	aresta159 indefinido
Segmento aresta160	Segmento(N_6, A_7, u)	aresta160 indefinido
Segmento aresta173	Segmento(A_7, B_7, u)	aresta173 indefinido
Segmento aresta174	Segmento(B_7, C_7, u)	aresta174 indefinido
Segmento aresta175	Segmento(C_7, D_7, u)	aresta175 indefinido
Segmento aresta176	Segmento(D_7, R_2, u)	aresta176 indefinido
Ponto C_3	Planificação(b, p)	C_3 indefinido
Ponto D_3	Planificação(b, p)	D_3 indefinido
Ponto K_3	Planificação(b, p)	K_3 indefinido
Ponto L_3	Planificação(b, p)	L_3 indefinido
Ponto M_3	Planificação(b, p)	M_3 indefinido
Ponto N_3	Planificação(b, p)	N_3 indefinido
Ponto O_3	Planificação(b, p)	O_3 indefinido
Ponto P_3	Planificação(b, p)	P_3 indefinido
Ponto A_5	Planificação(b, p)	A_5 indefinido
Ponto B_5	Planificação(b, p)	B_5 indefinido
Ponto C_5	Planificação(b, p)	C_5 indefinido
Ponto D_5	Planificação(b, p)	D_5 indefinido
Ponto E_5	Planificação(b, p)	E_5 indefinido
Ponto F_5	Planificação(b, p)	F_5 indefinido
Ponto G_5	Planificação(b, p)	G_5 indefinido
Ponto H_5	Planificação(b, p)	H_5 indefinido
Ponto I_5	Planificação(b, p)	I_5 indefinido
Ponto J_5	Planificação(b, p)	J_5 indefinido
Ponto K_5	Planificação(b, p)	K_5 indefinido
Ponto L_5	Planificação(b, p)	L_5 indefinido
Ponto M_5	Planificação(b, p)	M_5 indefinido
Ponto N_5	Planificação(b, p)	N_5 indefinido
Ponto O_5	Planificação(b, p)	O_5 indefinido
Ponto P_5	Planificação(b, p)	P_5 indefinido
Ponto Q_5	Planificação(b, p)	Q_5 indefinido
Ponto R_5	Planificação(b, p)	R_5 indefinido
Ponto S_5	Planificação(b, p)	S_5 indefinido
Ponto T_5	Planificação(b, p)	T_5 indefinido
Ponto U_5	Planificação(b, p)	U_5 indefinido
Ponto V_5	Planificação(b, p)	V_5 indefinido
Ponto W_5	Planificação(b, p)	W_5 indefinido
Ponto Z_5	Planificação(b, p)	Z_5 indefinido

Ponto A_6	Planificação(b, p)	A_6 indefinido
Ponto B_6	Planificação(b, p)	B_6 indefinido
Ponto C_6	Planificação(b, p)	C_6 indefinido
Ponto D_6	Planificação(b, p)	D_6 indefinido
Ponto E_6	Planificação(b, p)	E_6 indefinido
Ponto F_6	Planificação(b, p)	F_6 indefinido
Ponto G_6	Planificação(b, p)	G_6 indefinido
Ponto H_6	Planificação(b, p)	H_6 indefinido
Ponto O_6	Planificação(b, p)	O_6 indefinido
Ponto P_6	Planificação(b, p)	P_6 indefinido
Ponto Q_6	Planificação(b, p)	Q_6 indefinido
Ponto R_6	Planificação(b, p)	R_6 indefinido
Ponto S_6	Planificação(b, p)	S_6 indefinido
Ponto T_6	Planificação(b, p)	T_6 indefinido
Ponto E_7	Planificação(b, p)	E_7 indefinido
Ponto F_7	Planificação(b, p)	F_7 indefinido
Ponto G_7	Planificação(b, p)	G_7 indefinido
Ponto H_7	Planificação(b, p)	H_7 indefinido
Ponto I_7	Planificação(b, p)	I_7 indefinido
Ponto J_7	Planificação(b, p)	J_7 indefinido
Ponto K_7	Planificação(b, p)	K_7 indefinido
Ponto L_7	Planificação(b, p)	L_7 indefinido
Segmento aresta59	Segmento(A_3, E_3, u)	aresta59 indefinido
Segmento aresta62	Segmento(E_3, D_3, u)	aresta62 indefinido
Segmento aresta61	Segmento(D_3, C_3, u)	aresta61 indefinido
Segmento aresta60	Segmento(C_3, A_3, u)	aresta60 indefinido
Quadrilátero face29	Polígono(A_3, E_3, D_3, C_3, u)	face29 indefinido
Segmento aresta66	Segmento(E_3, F_3, u)	aresta66 indefinido
Segmento aresta71	Segmento(F_3, L_3, u)	aresta71 indefinido
Segmento aresta70	Segmento(L_3, K_3, u)	aresta70 indefinido
Segmento aresta69	Segmento(K_3, E_3, u)	aresta69 indefinido
Quadrilátero face30	Polígono(E_3, F_3, L_3, K_3, u)	face30 indefinido
Segmento aresta67	Segmento(F_3, G_3, u)	aresta67 indefinido
Segmento aresta74	Segmento(G_3, N_3, u)	aresta74 indefinido
Segmento aresta73	Segmento(N_3, M_3, u)	aresta73 indefinido
Segmento aresta72	Segmento(M_3, F_3, u)	aresta72 indefinido
Quadrilátero face31	Polígono(F_3, G_3, N_3, M_3, u)	face31 indefinido
Segmento aresta68	Segmento(G_3, Q_3, u)	aresta68 indefinido

Segmento aresta77	Segmento(Q_3, P_3, u)	aresta77 indefinido
Segmento aresta76	Segmento(P_3, O_3, u)	aresta76 indefinido
Segmento aresta75	Segmento(O_3, G_3, u)	aresta75 indefinido
Quadrilátero face32	Polígono(G_3, Q_3, P_3, O_3, u)	face32 indefinido
Segmento aresta94	Segmento(Q_3, R_3, u)	aresta94 indefinido
Segmento aresta112	Segmento(R_3, B_5, u)	aresta112 indefinido
Segmento aresta111	Segmento(B_5, A_5, u)	aresta111 indefinido
Segmento aresta110	Segmento(A_5, Q_3, u)	aresta110 indefinido
Quadrilátero face33	Polígono(Q_3, R_3, B_5, A_5, u)	face33 indefinido
Segmento aresta95	Segmento(R_3, S_3, u)	aresta95 indefinido
Segmento aresta115	Segmento(S_3, D_5, u)	aresta115 indefinido
Segmento aresta114	Segmento(D_5, C_5, u)	aresta114 indefinido
Segmento aresta113	Segmento(C_5, R_3, u)	aresta113 indefinido
Quadrilátero face34	Polígono(R_3, S_3, D_5, C_5, u)	face34 indefinido
Segmento aresta96	Segmento(S_3, T_3, u)	aresta96 indefinido
Segmento aresta118	Segmento(T_3, F_5, u)	aresta118 indefinido
Segmento aresta117	Segmento(F_5, E_5, u)	aresta117 indefinido
Segmento aresta116	Segmento(E_5, S_3, u)	aresta116 indefinido
Quadrilátero face35	Polígono(S_3, T_3, F_5, E_5, u)	face35 indefinido
Segmento aresta97	Segmento(T_3, U_3, u)	aresta97 indefinido
Segmento aresta121	Segmento(U_3, H_5, u)	aresta121 indefinido
Segmento aresta120	Segmento(H_5, G_5, u)	aresta120 indefinido
Segmento aresta119	Segmento(G_5, T_3, u)	aresta119 indefinido
Quadrilátero face36	Polígono(T_3, U_3, H_5, G_5, u)	face36 indefinido
Segmento aresta98	Segmento(U_3, V_3, u)	aresta98 indefinido
Segmento aresta124	Segmento(V_3, J_5, u)	aresta124 indefinido
Segmento aresta123	Segmento(J_5, I_5, u)	aresta123 indefinido
Segmento aresta122	Segmento(I_5, U_3, u)	aresta122 indefinido
Quadrilátero face37	Polígono(U_3, V_3, J_5, I_5, u)	face37 indefinido
Segmento aresta99	Segmento(V_3, W_3, u)	aresta99 indefinido
Segmento aresta127	Segmento(W_3, L_5, u)	aresta127 indefinido
Segmento aresta126	Segmento(L_5, K_5, u)	aresta126 indefinido
Segmento aresta125	Segmento(K_5, V_3, u)	aresta125 indefinido
Quadrilátero face38	Polígono(V_3, W_3, L_5, K_5, u)	face38 indefinido
Segmento aresta100	Segmento(W_3, Z_3, u)	aresta100 indefinido
Segmento aresta130	Segmento(Z_3, N_5, u)	aresta130 indefinido
Segmento aresta129	Segmento(N_5, M_5, u)	aresta129 indefinido
Segmento aresta128	Segmento(M_5, W_3, u)	aresta128 indefinido

Quadrilátero face39	Polígono(W_3, Z_3, N_5, M_5, u)	face39 indefinido
Segmento aresta101	Segmento(Z_3, A_4, u)	aresta101 indefinido
Segmento aresta133	Segmento(A_4, P_5, u)	aresta133 indefinido
Segmento aresta132	Segmento(P_5, O_5, u)	aresta132 indefinido
Segmento aresta131	Segmento(O_5, Z_3, u)	aresta131 indefinido
Quadrilátero face40	Polígono(Z_3, A_4, P_5, O_5, u)	face40 indefinido
Segmento aresta102	Segmento(A_4, B_4, u)	aresta102 indefinido
Segmento aresta136	Segmento(B_4, R_5, u)	aresta136 indefinido
Segmento aresta135	Segmento(R_5, Q_5, u)	aresta135 indefinido
Segmento aresta134	Segmento(Q_5, A_4, u)	aresta134 indefinido
Quadrilátero face41	Polígono(A_4, B_4, R_5, Q_5, u)	face41 indefinido
Segmento aresta103	Segmento(B_4, C_4, u)	aresta103 indefinido
Segmento aresta139	Segmento(C_4, T_5, u)	aresta139 indefinido
Segmento aresta138	Segmento(T_5, S_5, u)	aresta138 indefinido
Segmento aresta137	Segmento(S_5, B_4, u)	aresta137 indefinido
Quadrilátero face42	Polígono(B_4, C_4, T_5, S_5, u)	face42 indefinido
Segmento aresta104	Segmento(C_4, D_4, u)	aresta104 indefinido
Segmento aresta142	Segmento(D_4, V_5, u)	aresta142 indefinido
Segmento aresta141	Segmento(V_5, U_5, u)	aresta141 indefinido
Segmento aresta140	Segmento(U_5, C_4, u)	aresta140 indefinido
Quadrilátero face43	Polígono(C_4, D_4, V_5, U_5, u)	face43 indefinido
Segmento aresta105	Segmento(D_4, E_4, u)	aresta105 indefinido
Segmento aresta145	Segmento(E_4, Z_5, u)	aresta145 indefinido
Segmento aresta144	Segmento(Z_5, W_5, u)	aresta144 indefinido
Segmento aresta143	Segmento(W_5, D_4, u)	aresta143 indefinido
Quadrilátero face44	Polígono(D_4, E_4, Z_5, W_5, u)	face44 indefinido
Segmento aresta106	Segmento(E_4, F_4, u)	aresta106 indefinido
Segmento aresta148	Segmento(F_4, B_6, u)	aresta148 indefinido
Segmento aresta147	Segmento(B_6, A_6, u)	aresta147 indefinido
Segmento aresta146	Segmento(A_6, E_4, u)	aresta146 indefinido
Quadrilátero face45	Polígono(E_4, F_4, B_6, A_6, u)	face45 indefinido
Segmento aresta107	Segmento(F_4, G_4, u)	aresta107 indefinido
Segmento aresta151	Segmento(G_4, D_6, u)	aresta151 indefinido
Segmento aresta150	Segmento(D_6, C_6, u)	aresta150 indefinido
Segmento aresta149	Segmento(C_6, F_4, u)	aresta149 indefinido
Quadrilátero face46	Polígono(F_4, G_4, D_6, C_6, u)	face46 indefinido
Segmento aresta108	Segmento(G_4, H_4, u)	aresta108 indefinido
Segmento aresta154	Segmento(H_4, F_6, u)	aresta154 indefinido

Segmento aresta153	Segmento(F_6, E_6, u)	aresta153 indefinido
Segmento aresta152	Segmento(E_6, G_4, u)	aresta152 indefinido
Quadrilátero face47	Polígono(G_4, H_4, F_6, E_6, u)	face47 indefinido
Segmento aresta109	Segmento(H_4, I_6, u)	aresta109 indefinido
Segmento aresta157	Segmento(I_6, H_6, u)	aresta157 indefinido
Segmento aresta156	Segmento(H_6, G_6, u)	aresta156 indefinido
Segmento aresta155	Segmento(G_6, H_4, u)	aresta155 indefinido
Quadrilátero face48	Polígono(H_4, I_6, H_6, G_6, u)	face48 indefinido
Segmento aresta161	Segmento(I_6, J_6, u)	aresta161 indefinido
Segmento aresta166	Segmento(J_6, P_6, u)	aresta166 indefinido
Segmento aresta165	Segmento(P_6, O_6, u)	aresta165 indefinido
Segmento aresta164	Segmento(O_6, I_6, u)	aresta164 indefinido
Quadrilátero face49	Polígono(I_6, J_6, P_6, O_6, u)	face49 indefinido
Segmento aresta162	Segmento(J_6, K_6, u)	aresta162 indefinido
Segmento aresta169	Segmento(K_6, R_6, u)	aresta169 indefinido
Segmento aresta168	Segmento(R_6, Q_6, u)	aresta168 indefinido
Segmento aresta167	Segmento(Q_6, J_6, u)	aresta167 indefinido
Quadrilátero face50	Polígono(J_6, K_6, R_6, Q_6, u)	face50 indefinido
Segmento aresta163	Segmento(K_6, U_6, u)	aresta163 indefinido
Segmento aresta172	Segmento(U_6, T_6, u)	aresta172 indefinido
Segmento aresta171	Segmento(T_6, S_6, u)	aresta171 indefinido
Segmento aresta170	Segmento(S_6, K_6, u)	aresta170 indefinido
Quadrilátero face51	Polígono(K_6, U_6, T_6, S_6, u)	face51 indefinido
Segmento aresta177	Segmento(U_6, V_6, u)	aresta177 indefinido
Segmento aresta183	Segmento(V_6, F_7, u)	aresta183 indefinido
Segmento aresta182	Segmento(F_7, E_7, u)	aresta182 indefinido
Segmento aresta181	Segmento(E_7, U_6, u)	aresta181 indefinido
Quadrilátero face52	Polígono(U_6, V_6, F_7, E_7, u)	face52 indefinido
Segmento aresta178	Segmento(V_6, W_6, u)	aresta178 indefinido
Segmento aresta186	Segmento(W_6, H_7, u)	aresta186 indefinido
Segmento aresta185	Segmento(H_7, G_7, u)	aresta185 indefinido
Segmento aresta184	Segmento(G_7, V_6, u)	aresta184 indefinido
Quadrilátero face53	Polígono(V_6, W_6, H_7, G_7, u)	face53 indefinido
Segmento aresta179	Segmento(W_6, Z_6, u)	aresta179 indefinido
Segmento aresta189	Segmento(Z_6, J_7, u)	aresta189 indefinido
Segmento aresta188	Segmento(J_7, I_7, u)	aresta188 indefinido
Segmento aresta187	Segmento(I_7, W_6, u)	aresta187 indefinido
Quadrilátero face54	Polígono(W_6, Z_6, J_7, I_7, u)	face54 indefinido

Segmento aresta180	Segmento(Z_6, O_2, u)	aresta180 indefinido
Segmento aresta192	Segmento(O_2, L_7, u)	aresta192 indefinido
Segmento aresta191	Segmento(L_7, K_7, u)	aresta191 indefinido
Segmento aresta190	Segmento(K_7, Z_6, u)	aresta190 indefinido
Quadrilátero face55	Polígono(Z_6, O_2, L_7, K_7, u)	face55 indefinido
Texto A1		"Triângular"
Texto A2		"Quadrângular"
Texto A3		"Pentagonal"
Texto A4		"Hexagonal"
Texto A5		"Heptagonal"
Texto A6		"Octagonal"
Texto A7		"Eneagonal"
Texto A8		"Decagonal"
Texto A9		"Undecagonal"
Texto A10		"Duodecagonal"
Texto A11		"Tridecagonal"
Texto A12		"Tetradecagonal"
Texto A13		"Pentadecagonal"
Texto A14		"Hexadecagonal"
Texto A15		"Heptadecagonal"
Texto A16		"Octadecagonal"
Texto A17		"Eneadecagonal"
Texto A18		"Icosagonal"
Número te	t e	te indefinido
Número $A1_1$		$A1_1$ indefinido
Número ar	a r	ar indefinido
Texto texto3		"Na parte superior, mova o ponto: R para alterar o tamanho da base; n para alterar a quantidade de faces laterais; h para alterar a altura; p para abrir ou fechar a planificação."
Texto texto1	"Prisma de base " + (Célula(1, n - 2)) + ""	"Prisma de base Triângular"
Texto texto4	"N°\; de\; lados\; da \;Base:\;n=" + (LaTeX(n)) + " \\ N°\; de\; faces:\;F=n+2= " + (LaTeX(n + 2)) + "\\ N° \;de \;vértices:V=2×n= " + (LaTeX(2n)) + " \\ N° \;de\; arestas:A=3×n= " + (LaTeX(3n)) + " \\	"Nº\; de\; lados\; da \;Base:\;n=3 \\ Nº\; de\; faces:\;F=n+2= 5\\ Nº \;de \;vértices:V=2, n= 6 \\ Nº \;de\; arestas:A=3, n= 9 \\ Apótema\; da\; base:a= 0.88 \\ Altura:h= 4.6 \\ Aresta\;da \;base:a_b= 3.03\\ Área\; da\; base:A_b=\frac{n/a_b/a}{2}= 3.98\\

	Apótema\; da\; base:a= " + (LaTeX(c_1)) + " \\ Altura:h= " + (LaTeX(h)) + " \\ Aresta\;da \;base:a_b= " + (LaTeX(aresta44)) + "\\ Área\; da\; base:A_b=\frac{n×a_b×a}{2}= " + (LaTeX(n c_1 aresta44 / 2)) + "\\ Área\;lateral:A_l=n×a_b×h= " + (LaTeX(n aresta44 h)) + "\\ Área\; total:A_t=2×A_b+A_l= " + (LaTeX(n aresta44 (c_1 + h))) + "\\ Volume: A_b×h= " + (LaTeX(n c_1 aresta44 h / 2)) + ""	Área\;lateral:A_l=n/a_b/h= 41.83\\ Área\; total:A_t=2/A_b+A_l= 49.79\\ Volume: A_b/h= 18.3"

Atividade 2

Nome	Definição	Valor
Ponto A		A = (1, 3)
Ponto B		B = (4, 3)
Ponto C		C = (3, 4)
Triângulo t1	Polígono(A, B, C)	t1 = 1.5
Segmento c	Segmento(A, B, t1)	c = 3
Segmento a	Segmento(B, C, t1)	a = 1.41
Segmento b	Segmento(C, A, t1)	b = 2.24
Ponto D	Ponto(EixoX)	D = (1, 0)
Ponto E	Ponto(EixoX)	E = (4, 0)
Ponto F		F = (3, 1)
Triângulo t2	Polígono(D, E, F)	t2 = 1.5
Segmento f	Segmento(D, E, t2)	f = 3
Segmento d	Segmento(E, F, t2)	d = 1.41
Segmento e	Segmento(F, D, t2)	e = 2.24
Quadrilátero q1	Polígono(D, E, B, A)	q1 = 9
Segmento d_1	Segmento(D, E, q1)	d_1 = 3
Segmento e_1	Segmento(E, B, q1)	e_1 = 3
Segmento b_1	Segmento(B, A, q1)	b_1 = 3
Segmento a_1	Segmento(A, D, q1)	a_1 = 3
Segmento g	Segmento(F, C)	g = 3
Ângulo α	Ângulo(B, A, C)	α = 26.57º
Texto texto1		"5"
Texto texto3		"13"
Texto texto4		"6"

Valor Booleano j		j = true
Texto texto6		"Calcule o volume, a área lateral e a área total do prisma reto abaixo, nos seguintes casos:"
Texto texto7		"5"
Texto texto8		"8"
Texto texto28		"12"
Imagem fig1		fig1
Valor Booleano k		k = false
Imagem fig2		fig2
Imagem fig3		fig3
Valor Booleano l		l = false
Valor Booleano m		m = false
Imagem fig4		fig4
Texto texto2		"FÓRMULAS:"
Texto texto5		"Área da base (A_B) : depende do tipo da base área lateral (A_L) : soma das áreas de todas as faces laterais (retângulos) área total (A_T) : A_T = A_L + 2 . A_B Volume (V) : V = A_B . H"
Ponto G		G = (2.79, 3.89)
Ponto H		H = (2.96, 3.71)
Segmento h	Segmento(G, H)	h = 0.25
Ponto I		I = (3.18, 3.81)
Segmento i	Segmento(H, I)	i = 0.24
Ponto J		J = (2.99, 3.85)
Ponto K		K = (6.74, 4.96)
Ponto L		L = (11.87, 4.96)
Ponto M		M = (11.87, -0.17)
Ponto N		N = (6.74, -0.17)
Quadrilátero q2	Polígono(K, L, M, N)	q2 = 26.34
Segmento k_1	Segmento(K, L, q2)	k_1 = 5.13

Atividade 3

Nome	Definição	Valor
Imagem fig1		fig1

Texto texto1		"Calcule a área Lateral, a área total e o Volume dos prismas conforme o caso abaixo:"
Valor Booleano a		a = true
Texto texto2		"trapézio isósceles"
Texto texto3		"retângulos"
Valor Booleano b		b = false
Imagem fig2		fig2
Texto texto4		"trapézio qualquer"
Texto texto5		"retângulos"
Valor Booleano c		c = false
Imagem fig3		fig3
Valor Booleano d		d = false
Imagem fig4		fig4
Valor Booleano e		e = false
Imagem fig5		fig5
Ponto A		A = (3.02, 6.24)
Ponto B		B = (8.33, 6.24)
Ponto C		C = (8.38, 1.69)
Ponto D		D = (3.02, 1.69)
Quadrilátero q1	Polígono(A, B, C, D)	q1 = 24.24
Segmento a_1	Segmento(A, B, q1)	a_1 = 5.31
Segmento b_1	Segmento(B, C, q1)	b_1 = 4.54
Segmento c_1	Segmento(C, D, q1)	c_1 = 5.36
Segmento d_1	Segmento(D, A, q1)	d_1 = 4.54

ANEXO 4 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 4

Atividade 1

Nome	Definição	Valor
Ponto A		A = (0.8, 1.48)
Ponto B		B = (0.86, -0.28)
Polígono pol1	Polígono(A, B, 5)	pol1 = 5.34
Segmento a	Segmento(A, B, pol1)	a = 1.76
Segmento b	Segmento(B, C, pol1)	b = 1.76
Ponto C	Polígono(A, B, 5)	C = (2.55, -0.77)
Ponto D	Polígono(A, B, 5)	D = (3.54, 0.69)
Ponto E	Polígono(A, B, 5)	E = (2.46, 2.08)
Segmento c	Segmento(C, D, pol1)	c = 1.76
Segmento d	Segmento(D, E, pol1)	d = 1.76
Segmento e	Segmento(E, A, pol1)	e = 1.76
Pirâmide f	Pirâmide(pol1, 4.24)	f = 7.53
Ponto F	Pirâmide(pol1, 4.24)	F = (2.04, 0.64, 4.24)
Segmento arestaBF	Segmento(B, F, f)	arestaBF = 4.49
Segmento arestaAF	Segmento(F, A, f)	arestaAF = 4.49
Triângulo faceABF	Polígono(A, B, F, f)	faceABF = 3.88
Segmento arestaCF	Segmento(C, F, f)	arestaCF = 4.49
Triâgulo faceBCF	Polígono(B, C, F, f)	faceBCF = 3.88
Segmento arestaDF	Segmento(D, F, f)	arestaDF = 4.49
Triângulo faceCDF	Polígono(C, D, F, f)	faceCDF = 3.88
Segmento arestaEF	Segmento(E, F, f)	arestaEF = 4.49
Triângulo faceDEF	Polígono(D, E, F, f)	faceDEF = 3.88
Triângulo faceAEF	Polígono(E, A, F, f)	faceAEF = 3.88
Valor Booleano Vértices		Vértices = true
Segmento h	Segmento(C, D)	h = 1.76
Segmento i	Segmento(E, D)	i = 1.76
Segmento j	Segmento(E, A)	j = 1.76
Segmento k	Segmento(A, B)	k = 1.76
Segmento l	Segmento(B, C)	l = 1.76
Valor Booleano g		g = true
Valor Booleano m		m = true
Valor Booleano n		n = true
Ponto G		G = (2.08, 0.71, 0)
Segmento p	Segmento(F, G)	p = 4.24

Valor Booleano o		o = true

Atividade 2

Nome	Definição	Valor
Número comp		comp = 3.9
Número larg		larg = 4.1
Número h		h = 4
Ponto A		A = (0, 0)
Ponto B	(comp, 0)	B = (3.9, 0)
Ponto C	(comp, larg)	C = (3.9, 4.1)
Ponto D	(0, larg)	D = (0, 4.1)
Ponto H	(1.5, 2, h)	H = (1.5, 2, 4)
Quadrilátero pol1	Polígono(A, B, C, D)	pol1 = 15.99
Segmento a	Segmento(A, B, pol1)	a = 3.9
Segmento b	Segmento(B, C, pol1)	b = 4.1
Segmento c	Segmento(C, D, pol1)	c = 3.9
Segmento d	Segmento(D, A, pol1)	d = 4.1
Pirâmide e	Pirâmide(pol1, H)	e = 21.32
Segmento arestaBH	Segmento(B, H, e)	arestaBH = 5.08
Segmento arestaAH	Segmento(H, A, e)	arestaAH = 4.72
Triângulo faceABH	Polígono(A, B, H, e)	faceABH = 8.72
Segmento arestaCH	Segmento(C, H, e)	arestaCH = 5.12
Triângulo faceBCH	Polígono(B, C, H, e)	faceBCH = 9.56
Segmento arestaDH	Segmento(D, H, e)	arestaDH = 4.76
Triângulo faceCDH	Polígono(C, D, H, e)	faceCDH = 8.81
Triângulo faceADH	Polígono(D, A, H, e)	faceADH = 8.76
Ponto E	PontoMédio(A, C)	E = (1.95, 2.05)
Segmento f	Segmento(E, H)	f = 4.03
Ponto F	PontoMédio(D, C)	F = (1.95, 4.1)
Segmento g	Segmento(E, F)	g = 2.05
Segmento i	Segmento(F, H)	i = 4.54
Texto texto1		"Aresta\;da\;base"
Valor Booleano j		j = false
Valor Booleano k		k = false
Valor Booleano l		l = false
Texto texto2		"Pirâmides\\A\;Pirâmide\;é\;uma\;figura\;geométrica\;espacial\\que\;está\;no\;grupo\;dos\;poliedros.\\As\;Pirâmides\;são\;classificadas\;conforme\;sua\;base:\\Pirâmi

		de\;Triângular;\;Pirâmide\;Quadrangular\;(ao\;lado);\\Pirâmide\;Pentagonal\;etc..\\Clique\;abaixo\;e\;veja\;os\;elementos\;de\;uma\;Pirâmide:"
Texto texto3		"Sabendo\;que:\\Ab=\;área\;da\;base\\h=\;Altura\\O\;Volume\;de\;uma\;Piràmide\;é\;dado\;por:\\V=1/3*Ab*h"
Ponto G	PontoMédio(B, C)	G = (3.9, 2.05)
Triângulo pol2	Polígono(H, E, F)	pol2 = 4.13
Segmento f_1	Segmento(H, E, pol2)	f_1 = 4.03
Segmento h_1	Segmento(E, F, pol2)	h_1 = 2.05
Segmento e_1	Segmento(F, H, pol2)	e_1 = 4.54
Triângulo pol3	Polígono(H, E, B)	pol3 = 5.68
Segmento b_1	Segmento(H, E, pol3)	b_1 = 4.03
Segmento h_2	Segmento(E, B, pol3)	h_2 = 2.83
Segmento e_2	Segmento(B, H, pol3)	e_2 = 5.08
Triângulo pol4	Polígono(H, G, C)	pol4 = 4.78
Segmento p	Segmento(H, G, pol4)	p = 4.67
Segmento q	Segmento(G, C, pol4)	q = 2.05
Segmento r	Segmento(C, H, pol4)	r = 5.12
Texto texto4		"H"
Texto texto5		"ap"
Texto texto6		"a"
Texto texto7		"$ap^2=a^2+H^2$"
Texto texto8		"al"
Texto texto9		"R"
Texto texto10		"al"
Texto texto11		"x"
Texto texto12		"ap"
Texto texto13		"$al^2=H^2+R^2$"
Texto texto14		"$al^2=x^2$\;+\;ap^2"
Valor Booleano n		n = false
Valor Booleano o		o = false
Texto texto15		"H"
Valor Booleano s		s = false
Texto texto16		"Relações"

Atividade 3

Nome	Definição	Valor
Número t		t = 0
Ponto A	(0, 0, -t)	A = (0, 0, 0)
Ponto B	(4, 0, -t)	B = (4, 0, 0)
Ponto C	(3, -4, -t)	C = (3, -4, 0)
Ponto D	(3, -4, 5 - t)	D = (3, -4, 5)
Pirâmide a	Pirâmide(A, B, C, D)	a = 13.33
Segmento arestaAB	Segmento(A, B, a)	arestaAB = 4
Segmento arestaBC	Segmento(B, C, a)	arestaBC = 4.12
Segmento arestaAC	Segmento(C, A, a)	arestaAC = 5
Triângulo faceABC	Polígono(A, B, C, a)	faceABC = 8
Segmento arestaBD	Segmento(B, D, a)	arestaBD = 6.48
Segmento arestaAD	Segmento(D, A, a)	arestaAD = 7.07
Triângulo faceABD	Polígono(A, B, D, a)	faceABD = 12.81
Segmento arestaCD	Segmento(C, D, a)	arestaCD = 5
Triângulo faceBCD	Polígono(B, C, D, a)	faceBCD = 10.31
Triângulo faceACD	Polígono(C, A, D, a)	faceACD = 12.5
Ponto E	(4 + t, 0, 0)	E = (4, 0, 0)
Ponto F	(4 + t, 0, 5)	F = (4, 0, 5)
Ponto G	(3 + t, -4, 5)	G = (3, -4, 5)
Ponto H	(t, 0, 5)	H = (0, 0, 5)
Pirâmide b	Pirâmide(H, G, F, E)	b = 13.33
Segmento arestaGH	Segmento(H, G, b)	arestaGH = 5
Segmento arestaFG	Segmento(G, F, b)	arestaFG = 4.12
Segmento arestaFH	Segmento(F, H, b)	arestaFH = 4
Triângulo faceFGH	Polígono(H, G, F, b)	faceFGH = 8
Segmento arestaEG	Segmento(G, E, b)	arestaEG = 6.48
Segmento arestaEH	Segmento(E, H, b)	arestaEH = 6.4
Triângulo faceEGH	Polígono(H, G, E, b)	faceEGH = 14.84
Segmento arestaEF	Segmento(F, E, b)	arestaEF = 5
Triângulo faceEFG	Polígono(G, F, E, b)	faceEFG = 10.31
Triângulo faceEFH	Polígono(F, H, E, b)	faceEFH = 10
Ponto I	(-t, 0, 5)	I = (0, 0, 5)
Ponto J	(-t, 0, 0)	J = (0, 0, 0)
Ponto K	(4 - t, 0, 0)	K = (4, 0, 0)
Ponto L	(3 - t, -4, 5)	L = (3, -4, 5)
Pirâmide c	Pirâmide(I, J, L, K)	c = 13.33

Segmento arestaIJ	Segmento(I, J, c)	arestaIJ = 5
Segmento arestaJL	Segmento(J, L, c)	arestaJL = 7.07
Segmento arestaIL	Segmento(L, I, c)	arestaIL = 5
Triângulo faceIJL	Polígono(I, J, L, c)	faceIJL = 12.5
Segmento arestaJK	Segmento(J, K, c)	arestaJK = 4
Segmento arestaIK	Segmento(K, I, c)	arestaIK = 6.4
Triângulo faceIJK	Polígono(I, J, K, c)	faceIJK = 10
Segmento arestaKL	Segmento(L, K, c)	arestaKL = 6.48
Triângulo faceJKL	Polígono(J, L, K, c)	faceJKL = 12.81
Triângulo faceIKL	Polígono(L, I, K, c)	faceIKL = 14.84
Plano d	Plano(H, F, E)	d: y = 0
Reta f	Perpendicular(G, d)	f: X = (3, -4, 5) + (0, 20, 0)
Reta g	Perpendicular(L, d)	g: X = (3, -4, 5) + (0, 20, 0)
Ponto M	Interseção(g, d)	M = (3, 0, 5)
Ponto N	Interseção(f, d)	N = (3, 0, 5)
Segmento h	Segmento(L, M)	h = 4
Segmento i	Segmento(N, G)	i = 4
Ângulo α	Ângulo(I, M, L, PlanoXOY)	α = 90º
Ângulo	Ângulo(H, N, G, PlanoXOY)	β = 90º
Ponto O	PontoEm(faceIJL)	O = (1.43, -1.91, 3.41)
Ponto P	PontoEm(faceEFG)	P = (3.53, -1.87, 3.89)
Ponto Q	PontoEm(faceACD)	Q = (2.09, -2.78, 1.28)
Texto texto1		"T_{1}"
Texto texto2		"T_{2}"
Texto texto3		"T_{3}"
Texto texto4		"Considere um prisma triangular reto ABCDEF. Lembre-se que já sabemos calcular o seu volume. A ideia será dividir o prisma em três tetraedros de mesmo volume. Acompanhe as divisões movimentado o Controle Deslizanteabaixo:"
Texto texto5		"Volume da Pirâmide"
Texto texto6		"O nosso prisma ficou assim dividido nos tetraedros T_1 = EABC, T_2 = EDFC e T_3 = EDAC. Mostraremos agora que T_1, T_2 e T_3 têm o mesmo volume."
Texto texto7		"Em primeiro lugar, considere T_2 e T_3 com bases DFC e DAC. Como DACF é um retângulo, a diagonal DC divide DACF em dois triângulos congruentes, que são DAC e DFC. Logo, T_2 e T_3 tem bases de mesma área. Além disso, como as bases DFC e DAC estão em um

		mesmo plano (o plano do retângulo DACF), tem-se que as alturas de E em relação as bases DFC"
Texto texto8		"Considere agora T_1 e T_2 com bases ABC e DEF, respectivamente. Como ABC e DEF são congruentes (pois são bases do prisma ABCDEF), tem-se que área(ABC)=área (DEF). Além disso, como m(EB) é a altura de T_1 relativa à base ABC, m(FC) é a altura de T_2 relativa à base DEF e EBaFC, segue que T_1 e T_2 tem também a mesma altura. Usando a proposição citada anteriormente, conclui-se que Vol(T_1) = Vol(T_2). Portanto, o nosso prisma ABCDEF foi dividido em três tetraedros de mesmo volume: T_1, T_2 e T_3. "
Valor Booleano e		e = false
Valor Booleano j		j = false
Texto texto9		"e DAC são iguais . Assim, T_2 e T_3 tem também a mesma altura. Usando a proposição que diz que se dois tetraedros tem a mesma altura e mesma área da base, então eles têm o mesmo volume, conclui-se que Vol(T_2)=Vol(T_3)."
Ponto R		R = (-1.96, -11.3)
Ponto S		S = (9.1, -11.34)
Imagem fig1		fig1

ANEXO 5 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 5

Atividade 1

Nome	Descrição	Valor
Texto texto1		"O estudo dos corpos redondos são relacionados com sólidos gerados a partir de círculos, semicírculos e circunferências "
Texto texto2		"ou que tem em sua estrutura algum desses elementos."
Texto texto3		"Alguns exemplos de corpos redondos são, o cilindro, o cone e a esfera, em particular será estudado o cilindro e alguns "
Texto texto4		"elementos básicos que o compõem."
Texto texto5		"O estudo dos corpos redondos são relacionados com sólidos gerados a partir de círculos, semicírculos e circunferências "
Texto texto6		"ou que tem em sua estrutura algum desses elementos."
Texto texto7		"Alguns exemplos de corpos redondos são, o cilindro, o cone e a esfera, em particular será estudado o cilindro e alguns "
Texto texto8		"elementos básicos que o compõem, observe abaixo:"
Ponto Centro	Ponto de interseção de EixoZ, EixoX	Centro = (0, 0, 0)
Ponto $Centro_1$	Ponto sobre EixoZ	$Centro_1$ = (0, 0, 3)
Cilindro a	Cilindro(Centro, $Centro_1$, 2)	a: 37.7
Superfície b	Cilindro(Centro, $Centro_1$, 2)	b: 37.7
Círculo Base	Cilindro(Centro, $Centro_1$, 2)	Base: X = (0, 0, 0) + (2 cos(t), -2 sin(t), 0)
Círculo $Base_1$	Cilindro(Centro, $Centro_1$, 2)	$Base_1$: X = (0, 0, 3) + (2 cos(t), 2 sin(t), 0)
Ponto C_1	Ponto sobre $Base_1$	C_1 = (1.96, -0.39, 3)
Segmento $Raio_1$	Segmento $Centro_1$, C_1	$Raio_1$ = 2
Segmento Altura	Segmento $Centro_1$, Centro	Altura = 3
Ponto D	Ponto sobre Base	D = (-1.27, -1.55, 0)
Ponto E	Ponto sobre $Base_1$	E = (-1.28, -1.54, 3)
Segmento Geratriz	Segmento D, E	Geratriz = 3
Ponto A	Ponto sobre Base	A = (1.96, -0.4, 0)
Segmento Raio	Segmento Centro, A	Raio = 2
Texto texto9		"As bases são os círculos de Centro1 e Centro com Raio1 e Raio, sendo que, Raio1 = Raio."

Texto texto10		"A geratriz é qualquer segmento com pontos nas circunferências paralelo ao segmento que ligam o Centro ao Centro1."
Ponto B	Ponto sobre EixoZ	B = (0, 0, 5)
Ponto C	Ponto sobre EixoZ	C = (0, 0, -1.66)
Segmento Eixo	Segmento B, C	Eixo = 6.66
Texto texto11		"O eixo é a reta que passa pelos centros."
Texto texto12		"A altura é a menor distância entre os planos das bases."
Texto texto13		"A superfície lateral é a reunião de todas as geratrizes."

Nome	Descrição	Valor
Texto texto1		"Para definirmos matematicamente um cilindro, consideramos dois planos"
Texto texto2		"distintos e pararelos,"
Valor Booleano a		a = false
Texto texto3		"e"
Valor Booleano b		b = false
Texto texto4		"um círculo de centro"
Texto texto5		"e raio"
Valor Booleano c		c = false
Valor Booleano d		d = false
Texto texto6		"e um"
Texto texto7		"segmento"
Valor Booleano e		e = false
Texto texto8		"com A ∈ α e B ∈ β."
Texto texto9		"Denomina-se cilindro, o "
Texto texto10		"conjunto de todos os segmentos paralelos e congruentes a AB com uma "

Texto texto11		"extremidade no círculo de centro O em α e outra extremidade em β."
Valor Booleano f		f = false
Ponto P	Ponto sobre EixoZ	P = (0, 0, 4)
Plano β	Plano passando por P e paralelo a PlanoXOY	β: z = 4
Ponto O	Ponto sobre EixoZ	O = (0, 0, 1)
Plano α	Plano passando por O e paralelo a PlanoXOY	α: z = 1
Cilindro g	Cilindro(O, P, 2)	g: 37.7
Superfície i	Cilindro(O, P, 2)	i: 37.7
Círculo h	Cilindro(O, P, 2)	h: X = (0, 0, 1) + (2 cos(t), -2 sin(t), 0)
Círculo k	Cilindro(O, P, 2)	k: X = (0, 0, 4) + (2 cos(t), 2 sin(t), 0)
Ponto Q	Ponto sobre h	Q = (1.94, 0.48, 1)
Segmento R	Segmento O, Q	R = 2
Ponto A		A = (3, 3, 1)
Ponto B		B = (3, 3, 4)
Segmento j	Segmento B, A	j = 3
Texto texto12		"Clique\;nos\;quadrados\;no\;texto\;para\;construir\;o\;cilindro."

Nome	Descrição	Valor
Número Altura		Altura = 1.6
Ponto A	Ponto de interseção de EixoZ, EixoY	A = (0, 0, 0)
Ponto B_1	(0, 0, Altura)	B_1 = (0, 0, 1.6)
Cilindro a	Cilindro(A, B_1, 3)	a: 45.24
Superfície b	Cilindro(A, B_1, 3)	b: 30.16
Círculo c	Cilindro(A, B_1, 3)	c: X = (0, 0, 0) + (3 cos(t), -3 sin(t), 0)
Círculo d	Cilindro(A, B_1, 3)	d: X = (0, 0, 1.6) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)
Botão bt1		bt1

Botão bt2		bt2
Botão bt3		bt3
Botão bt4		bt4
Botão bt5		bt5
Botão bt6		bt6
Botão bt7		bt7
Botão bt8		bt8
Texto texto1		"Raio = 3"
Texto texto2		"1≤Altura≤4"
Valor Booleano e		e = false
Ponto B	Ponto sobre d	B = (1.96, -2.27, 1.6)
Segmento f	Segmento B_1, B	f = 3
Número perímetrod	Perímetro(d)	perímetrod = 18.85
Texto Textod	"Circunferência de " + (Nome(d)) + " = " + perímetrod	"Circunferência de d = 18.85"
Ponto $Pontod_1$	Ponto em d	$Pontod_1$ = (2.86, 0.91, 1.6)
Número g	Perímetro(d)	g = 18.85
Ponto Pontod	Ponto em d	Pontod = (2.9, 0.77, 1.6)
Valor Booleano h		h = false
Valor Booleano i		i = false
Botão bt9		bt9
Botão bt10		bt10
Botão bt11		bt11
Segmento k	Segmento A, B_1	k = 1.6
Valor Booleano m		m = false
Texto texto3		"Cilindro\; Elementos\; Básicos"
Número j		j = 1

Nome	Descrição	Valor
Número a		a = 3
Ponto A	Ponto de interseção de EixoX, EixoZ	A = (0, 0, 0)
Ponto B	Ponto sobre EixoZ	B = (0, 0, 1)
Cilindro V	Cilindro(A, B, a)	V: 28.19
Superfície e	Cilindro(A, B, a)	e: 18.79
Círculo c	Cilindro(A, B, a)	c: X = (0, 0, 0) + (3 cos(t), -3 sin(t), 0)
Círculo d	Cilindro(A, B, a)	d: X = (0, 0, 1) + (3 cos(t), 3 sin(t), 0)

Número Volume	a² π	Volume = 9π
Texto texto2	LaTeX(Volume, true, true)	"Volume \, = \,9 \; \pi "
Texto texto1		"Altura \;Fixa=1"
Texto texto3		"Vista\;Superior"
Ponto C	Ponto sobre c	C = (2.51, -1.64)
Segmento f	Segmento A, C	f = 3
Texto texto4		"Para \;valores \;decimais\; considere \;π=3,133"
Botão bt1		bt1
Botão bt2		bt2
Botão bt3		bt3
Texto texto5	LaTeX(V, true, true)	"V: \,28.19"
Texto texto6		"Se a altura for 2 o volume dobrará, se for 3 triplicará e assim por diante."
Texto texto7		"Altura\;Fixa=2"
Texto texto8		"Altura\;Fixa=3"
Número Volume2	2a² π	Volume2 = 18π
Número Volume3	3a² π	Volume3 = 27π
Texto texto9	LaTeX(Volume2, true, true)	"Volume2 \, = \,18 \; \pi "
Texto texto10	LaTeX(Volume3, true, true)	"Volume3 \, = \,27 \; \pi "

Nome	Descrição	Valor
Número Raio		Raio = 5
Ponto A	Ponto de interseção de EixoY, EixoZ	A = (0, 0, 0)
Ponto B	Ponto sobre EixoZ	B = (0, 0, 6)
Cilindro Volume	Cilindro(A, B, Raio)	Volume: 471.24
Superfície e	Cilindro(A, B, Raio)	e: 188.5
Círculo c	Cilindro(A, B, Raio)	c: X = (0, 0, 0) + (5 cos(t), -5 sin(t), 0)
Círculo d	Cilindro(A, B, Raio)	d: X = (0, 0, 6) + (5 cos(t), 5 sin(t), 0)
Ponto C	Ponto sobre d	C = (5, 0, 6)
Segmento f	Segmento B, C	f = 5
Texto texto1	LaTeX(Volume, true, true)	"Volume: \,471.24"
Texto texto2		"Vista\;Superior\;do\;Cilindro"
Texto texto3		"Altura =6"
Botão bt1		bt1
Valor Booleano a		a = true
Botão bt2		bt2

Botão bt3		bt3
Texto texto4		"Volume\;Segundo\;o\;Raio"
Texto texto5		"Volume = Raio x Raio x Altura x π "
Texto texto6		" π= 3,14159"

Nome	Descrição	Valor
Ponto A	Interseção de EixoX, EixoY	A = (0, 0, 0)
Ponto B	Ponto sobre EixoZ	B = (0, 0, 4)
Cilindro a	Cilindro(A, B, 2)	a: 50.27
Superfície b	Cilindro(A, B, 2)	b: 50.27
Círculo c	Cilindro(A, B, 2)	c: X = (0, 0, 0) + (2 cos(t), -2 sin(t), 0)
Círculo d	Cilindro(A, B, 2)	d: X = (0, 0, 4) + (2 cos(t), 2 sin(t), 0)
Ponto C	Ponto sobre EixoZ	C = (0, 0, 1)
Cilindro e	Cilindro(A, C, 2)	e: 12.57
Superfície h	Cilindro(A, C, 2)	h: 12.57
Círculo f	Cilindro(A, C, 2)	f: X = (0, 0, 0) + (2 cos(t), -2 sin(t), 0)
Círculo g	Cilindro(A, C, 2)	g: X = (0, 0, 1) + (2 cos(t), 2 sin(t), 0)
Texto texto1		"1 - Sabendo que o copo cilindrico ao lado está com um quarto de"
Texto texto2		"sua capacidade de água o que corresponde a 12,568 m³ marque"
Texto texto3		"a alternativa aproximada que representa o copo cheio em m³."
Valor Booleano i		i = false
Valor Booleano j		j = false
Valor Booleano k		k = false
Valor Booleano l		l = false
Valor Booleano m		m = false
Botão bt1		bt1
Botão bt2		bt2
Texto texto4		"Exercício"

Atividade 2

Nome	Definição	Valor
Número r		r = 3.41
Número h		h = 5.9
Ponto A		A = (0, 0, 0)

Ponto B	(r, 0, 0)	B = (3.41, 0, 0)
Ponto C	(0, 0, h)	C = (0, 0, 5.9)
Cilindro a	Cilindro(A, C, r)	a: 215.88
Superfície b	Cilindro(A, C, r)	b: 126.51
Círculo c	Cilindro(A, C, r)	c: X = (0, 0, 0) + (3.41 cos(t), -3.41 sin(t), 0)
Círculo d	Cilindro(A, C, r)	d: X = (0, 0, 5.9) + (3.41 cos(t), 3.41 sin(t), 0)
Ponto D	(0, r, z(C))	D = (0, 3.41, 5.9)
Ponto E	(x(D), y(D), 0)	E = (0, 3.41, 0)
Reta f	Reta(D, E)	f: X = (0, 3.41, 5.9) + (0, 0, -5.9)
Ponto F	Interseção(f, d, 1)	F = (0, 3.41, 5.9)
Esfera e	Esfera(F, r)	e: $x^2 + (y - 3.41)^2 + (z - 5.9)^2 = 11.65$
Ponto G	Interseção(f, e)	G = (0, 3.41, 9.31)
Ponto H	Interseção(f, e)	H = (0, 3.41, 2.49)
Número i		i = 0
Plano g	Plano(G, F, C)	g: 11.65x = 0
Ponto C'	Girar(C, Se(0 < i ≤ 1, i π / 2, π / 2), D, g)	C' = (0, 3.41, 9.31)
Círculo d'	Girar(d, Se(0 < i ≤ 1, i π / 2, π / 2), D, g)	d': X = (0, 3.41, 9.31) + (3.41 cos(t), 0, -3.41 sin(t))
Círculo dd	d	dd: X = (0, 0, 5.9) + (3.41 cos(t), 3.41 sin(t), 0)
Círculo dd'	Girar(dd, Se(0 < i ≤ 1, i π / 2, π / 2), D, g)	dd': X = (0, 3.41, 9.31) + (3.41 cos(t), 0, -3.41 sin(t))
Ponto I	(π r, 0, z(C))	I = (10.72, 0, 5.9)
Ponto J	(-π r, 0, z(C))	J = (-10.72, 0, 5.9)
Ponto C'_1	Homotetia(C, Se(1 < i ≤ 2, 2 - i, 0), I)	C'_1 = (10.72, 0, 5.9)
Ponto C'_2	Homotetia(C, Se(1 < i ≤ 2, 2 - i, 0), J)	C'_2 = (-10.72, 0, 5.9)
Vetor u	Vetor(C, C'_1)	u = (10.72, 0, 0)
Vetor v	Vetor(C, C'_2)	v = (-10.72, 0, 0)
Círculo dd'_1	Transladar(dd, u)	dd'_1: X = (10.72, 0, 5.9) + (3.41 cos(t), 3.41 sin(t), 0)
Círculo dd'_2	Transladar(dd, v)	dd'_2: X = (-10.72, 0, 5.9) + (3.41 cos(t), 3.41 sin(t), 0)
Ponto K	(0, -y(D), z(D))	K = (0, -3.41, 5.9)
Ponto K'	Transladar(K, u)	K' = (10.72, -3.41, 5.9)
Ponto K'_1	Transladar(K, v)	K'_1 = (-10.72, -3.41, 5.9)
Ponto K''	Girar(K', Se(1 < i ≤ 2, (i - 1) π, π), C'_1)	K'' = (10.72, 3.41, 5.9)
Ponto L	Girar(K'_1, Se(1 < i ≤ 2, -(i - 1) π, -π), C'_2)	L = (-10.72, 3.41, 5.9)
Ponto D'	Transladar(D, u)	D' = (10.72, 3.41, 5.9)

Ponto D'_1	Transladar(D, v)	D'_1 = (-10.72, 3.41, 5.9)
Ponto O	(0, 0, r)	O = (0, 0, 3.41)
Ponto M	(x(D'), y(D'), 0)	M = (10.72, 3.41, 0)
Ponto N	($x(D'_1)$, $y(D'_1)$, 0)	N = (-10.72, 3.41, 0)
Quadrilátero poly1	Polígono(D', D'_1, N, M)	poly1 = 126.51
Segmento d'_1	Segmento(D', D'_1, poly1)	d'_1 = 21.44
Segmento d'_2	Segmento(D'_1, N, poly1)	d'_2 = 5.9
Segmento n	Segmento(N, M, poly1)	n = 21.44
Segmento m	Segmento(M, D', poly1)	m = 5.9
Ponto P	($x(C'_1)$, 0, 0)	P = (10.72, 0, 0)
Ponto Q	(x(K''), y(K''), 0)	Q = (10.72, 3.41, 0)
Segmento j	Segmento(K'', Q)	j = 5.9
Arco k	ArcoCircular(P, Q, M)	k = 0
Ponto R	($x(C'_2)$, 0, 0)	R = (-10.72, 0, 0)
Ponto S	(x(L), y(L), 0)	S = (-10.72, 3.41, 0)
Segmento l	Segmento(L, S)	l = 5.9
Arco p	ArcoCircular(R, N, S)	p = 0
Arco q	ArcoCircular(C'_2, D'_1, L)	q = 0
Arco s	ArcoCircular(C'_1, K'', D')	s = 0
Ponto T		T = (0, -3, 0)
Plano o	Plano(T, A, B)	o: 10.24z = 0
Ponto C''	Girar(C', Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	C'' = (0, 12.73, 0)
Quadrilátero poly1'	Girar(poly1, Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	poly1' = 126.51
Círculo d'_3	Girar(d', Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	d'_3: X = (0, 12.73, 0) + (3.41 cos(t), -3.41 sin(t), 0)
Círculo dd'_3	Girar(dd', Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	dd'_3: X = (0, 12.73, 0) + (3.41 cos(t), -3.41 sin(t), 0)
Ponto K'''	Girar(K'', Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	K''' = (10.72, 9.31, 0)
Ponto Q'	Girar(Q, Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	Q' = (10.72, 3.41, 0)
Segmento j'	Segmento(K''', Q')	j' = 5.9
Ponto L'	Girar(L, Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	L' = (-10.72, 9.31, 0)
Ponto S'	Girar(S, Se(2 < i ≤ 3, (i - 2) π / 2, π / 2), E, g)	S' = (-10.72, 3.41, 0)
Segmento l'	Segmento(L', S')	l' = 5.9
Círculo cc	c	cc: X = (0, 0, 0) + (3.41 cos(t), -3.41 sin(t), 0)
Ponto U	(π r, 2r + h, 0)	U = (10.72, 12.73, 0)
Ponto V	(-π r, 2r + h, 0)	V = (-10.72, 12.73, 0)

Ponto C'''	Homotetia(C'', Se(3 < i ≤ 4, 4 - i, 0), U)	C''' = (10.72, 12.73, 0)
Vetor w	Vetor(C'', C''')	w = (10.72, 0, 0)
Ponto C'''_1	Homotetia(C'', Se(3 < i ≤ 4, 4 - i, 0), V)	C'''_1 = (-10.72, 12.73, 0)
Vetor t	Vetor(C'', C'''_1)	t = (-10.72, 0, 0)
Ponto W	(0, 3r + h, 0)	W = (0, 16.14, 0)
Ponto Z	(0, r + h, 0)	Z = (0, 9.31, 0)
Ponto Z'	Transladar(Z, w)	Z' = (10.72, 9.31, 0)
Ponto Z'_1	Transladar(Z, t)	Z'_1 = (-10.72, 9.31, 0)
Ponto W'	Transladar(W, w)	W' = (10.72, 16.14, 0)
Ponto W'_1	Transladar(W, t)	W'_1 = (-10.72, 16.14, 0)
Ponto W''	Girar(W', Se(3 < i ≤ 4, -(i - 3) π, -π), C''')	W'' = (10.72, 9.31, 0)
Arco c_1	ArcoCircular(C''', Z', W'')	c_1 = 0
Segmento f_1	Segmento(Z, Z')	f_1 = 10.72
Ponto A_1	Girar(W'_1, Se(3 < i ≤ 4, (i - 3) π, π), C'''_1)	A_1 = (-10.72, 9.31, 0)
Arco d_1	ArcoCircular(C'''_1, Z'_1, A_1)	d_1 = 0
Segmento g_1	Segmento(Z, Z'_1)	g_1 = 10.72

ANEXO 6 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 6

Atividade 1

Nome	Descrição	Valor
Ponto A	Ponto sobre EixoX	A = (-2.14, 0)
Ponto B	Ponto sobre EixoX	B = (4.4, 0)
Número $r_{cilindro}$		$r_{cilindro}$ = 2
Número r_{cone}		r_{cone} = 2
Círculo c	Círculo com centro A e raio $r_{cilindro}$	c: $(x + 2.14)^2 + y^2 = 4$
Círculo d	Círculo com centro B e raio r_{cone}	d: $(x - 4.4)^2 + y^2 = 4$
Número $altura_{cilindro}$		$altura_{cilindro}$ = 5.7
Número $altura_{cone}$		$altura_{cone}$ = 5.7
Ponto C	(x(A), y(A), $altura_{cilindro}$)	C = (-2.14, 0, 5.7)
Ponto D	(x(B), y(B), $altura_{cone}$)	D = (4.4, 0, 5.7)
Cilindro a	Cilindro(A, C, $r_{cilindro}$)	a: 71.63
Superfície b	Cilindro(A, C, $r_{cilindro}$)	b: 71.63
Círculo e	Cilindro(A, C, $r_{cilindro}$)	e: X = (-2.14, 0, 0) + (2 cos(t), -2 sin(t), 0)
Círculo f	Cilindro(A, C, $r_{cilindro}$)	f: X = (-2.14, 0, 5.7) + (2 cos(t), 2 sin(t), 0)
Cone g	Cone(B, D, r_{cone})	g: 23.88
Superfície i	Cone(B, D, r_{cone})	i: 37.95
Círculo h	Cone(B, D, r_{cone})	h: X = (4.4, 0, 0) + (2 cos(t), -2 sin(t), 0)
Texto texto1		"V_{cilindro}=\pi r^2 \space × \space h "
Texto texto4	"V_{cone}= " + (LaTeX((π r_{cone}^2 $altura_{cone}$) / 3)) + ""	"V_{cone}= 23.88"
Texto texto2		"V_{cone}=\frac{\pi r^2 \space × \space h}{3} "
Texto texto3	"$V_{cilindro}$=" + (LaTeX(π $r_{cilindro}^2$ $altura_{cilindro}$)) + ""	"V_{cilindro}=71.63"
Valor Booleano j		j = false
Texto texto5	"$V_{cilindro}$: V_{cone}=" + (LaTeX(π $r_{cilindro}^2$ $altura_{cilindro}$)) + ":" + (LaTeX((π r_{cone}^2 $altura_{cone}$) / 3)) + "=" + (LaTeX((π $r_{cilindro}^2$ $altura_{cilindro}$) / ((π r_{cone}^2 $altura_{cone}$) / 3))) + ""	"V_{cilindro}: V_{cone}=71.63:23.88=3"
Ponto E	Ponto sobre c	E = (-0.76, -1.45, 0)
Ponto F	Ponto sobre d	F = (5.93, -1.29, 0)
Segmento k	Segmento A, C	k = 5.7
Segmento l	Segmento B, D	l = 5.7
Segmento n	Segmento A, E	n = 2

Segmento m	Segmento F, B	m = 2

Atividade 2

Nome	Definição	Valor
Ponto A	Ponto(EixoY)	A = (0, 0)
Ponto B	Ponto(EixoY)	B = (0, 4)
Número a		a = 0
Ponto C	(3cos(a), sen(a))	C = (3, 0)
Triângulo pol1	Polígono(A, B, C)	pol1 = 6
Segmento h	Segmento(A, B, pol1)	h = 4
Segmento g	Segmento(B, C, pol1)	g = 5
Segmento r	Segmento(C, A, pol1)	r = 3
Ponto D		D = (0, 0)
Segmento f	Segmento(C, D)	f = 3
Elipse d		d: $0.11x^2 + y^2 = 1$
Valor Booleano e		e = true
Botão bt1		bt1
Reta h_1	Perpendicular(C, EixoX)	h_1: x = 3
Ponto F	Interseção(h, g)	F = (0, 4)
Reta i	Perpendicular(F, EixoY)	i: y = 4
Ponto E	Ponto(EixoY)	E = (0, 5.46)
Vetor u	Vetor(A, E)	u = (0, 5.46)
Ponto G	Ponto(EixoY)	G = (0, -2.38)
Vetor v	Vetor(A, G)	v = (0, -2.38)
Texto texto1		"r = 3"
Texto texto2	"Área$_{Base}$ =\pi\cdot r^2 = \pi\cdot 3^2 = " + (LaTeX(3^2)) + "\pi\ u.a"	"área_{Base} =\pi\cdot r^2 = \pi\cdot 3^2 = 9\pi\ u.a"
Texto texto3	"Área$_{Lateral}$ = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot " + (LaTeX(3)) + "\cdot" + (LaTeX(5)) + " =" + (LaTeX(3 * 5)) + "\pi\ u.a"	"área_{Lateral} = \pi\cdot r\cdot g = \pi\cdot 3\cdot5 =15\pi\ u.a"
Texto texto4	"Área$_{total}$ = Área$_{Base}$ +Área$_{Lateral}$ = " + (LaTeX(3^2)) + "\pi +" + (LaTeX(3 * 5)) + "\pi =" + (LaTeX(3^2 + 3 * 5)) + "\pi\ u.a"	"área_{total} = área_{Base} +área_{Lateral} = 9\pi +15\pi =24\pi\ u.a"
Texto texto5	"Volume = \frac{1}{3}\cdot \pi\cdot r^2\cdot h = \frac{\pi\cdot" + (LaTeX(3)) + "^2\cdot " + (LaTeX(4)) + "}{3} = " + (LaTeX((3^2 4) / 3)) + "\pi\ u.v"	"Volume = \frac{1}{3}\cdot \pi\cdot r^2\cdot h = \frac{\pi\cdot3^2\cdot 4}{3} = 12\pi\ u.v"
Ponto H	Ponto(EixoX)	H = (-3, 0)
Ponto I	Interseção(h, g)	I = (0, 4)

Número b		b = 0
Ponto C'	Homotetia(C, b, I)	C' = (0, 4)
Segmento j	Segmento(I, C')	j = 0
Valor Booleano c		c = true
Botão bt2		bt2
Número k		k = 0
Ponto C'_1	Homotetia(C, k, A)	C'_1 = (0, 0)
Segmento l	Segmento(A, C'_1)	l = 0
Valor Booleano m		m = true
Botão bt3		bt3
Número n		n = 0
Ponto A'	Homotetia(A, n, I)	A' = (0, 4)
Valor Booleano o		o = true
Botão bt4		bt4
Segmento p	Segmento(I, A')	p = 0

Atividade 3

Nome	Definição	Valor
Ângulo α		α = 6º
Ponto O		O = (0, 0)
Número r		r = 1
Ponto P	(r cos(θ), r sen(θ))	P = (0.99, 0.1)
Número h		h = 3.1
Número g	sqrt(r² + h²)	g = 3.26
Ângulo β	r (360° - θ) / g	β = 108.68º
Ponto V	(0, 0, h)	V = (0, 0, 3.1)
Vetor u	Vetor(V, P)	u = (0.99, 0.1, -3.1)
Reta f	Reta(V, P)	f: X = (0, 0, 3.1) + (0.99, 0.1, -3.1)
Cone a	Cone(O, V, r)	a: 3.25
Superfície b	Cone(O, V, r)	b: 10.23
Círculo c	Cone(O, V, r)	c: X = (0, 0, 0) + (cos(t), - sin(t), 0)
Reta gg	Tangente(P, c)	gg: X = (1.01, 0, 0) + (0.1, -0.99, 0)
Reta j	Reta(V, gg)	j: X = (0, 0, 3.1) + (0.1, -0.99, 0)
Plano d	Plano(f, gg)	d: -3.08x - 0.32y - 1z = -3.1
Reta i	Perpendicular(V, d)	i: X = (0, 0, 3.1) + (-3.08, -0.32, -1)
Círculo e	Círculo(i, P)	e: X = (0, 0, 3.1) + (0.99 cos(t) + 0.34 sin(t), 0.1 cos(t) - 3.24 sin(t), -3.1 cos(t))

Ponto A	Interseção(j, e, 2)	A = (-0.34, 3.24, 3.1)
Vetor v	Vetor(V, A)	v = (-0.34, 3.24, 0)
Ponto Q	V + cos(α) u + sen(α) v	Q = (-0.64, 3.04, 4.09)
Setor k	SetorCircular(V, P, Q)	k = 10.06
Superfície l	Superfície(r u cos(v), r u sen(v), (1 - u) h, u, 0, 1, v, 0, θ)	l(u,v) = (u cos(v), u sen(v), (1 - u) 3.1)

ANEXO 7 – PROTOCOLOS DE CONSTRUÇÃO DA AULA 7

Atividade 1

Nome	Definição	Valor
Número r		r = 2
Campo de Entrada ct1	CampoDeTexto(r)	ct1
Superfície a	Superfície(r cos(t) sen(u), r sen(t) sen(u), r cos(u), t, 0, 2π, u, 0, π)	a(t,u) = (2 cos(t) sen(u), 2 sen(t) sen(u), 2 cos(u))
Ponto A		A = (0, 0, 0)
Ponto B	(r, 0, 0)	B = (2, 0, 0)
Segmento f	Segmento(A, B)	f = 2
Esfera b	Esfera(A, r)	b: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
Número c	Volume(b)	c = 33.51
Número d	r^3 4 / 3	d = 32 / 3
Texto texto2	FraçãoEmTexto(d)	" \frac{ 32 }{ 3 } "
Texto texto1	"V=\dfrac{4π}{3}r^3=\dfrac{4π(" + (LaTeX(r)) + ")^3}{3}=" + (LaTeX(texto2)) + "π≅" + (LaTeX(c)) + "\ cm^3"	"V=\dfrac{4}{3}r^3=\dfrac{4(2)^3}{3}= \frac{ 32 }{ 3 } E33.51\ cm^3"
Número e	r^2 4	e = 16
Número g	e π	g = 16 π
Texto texto4	FraçãoEmTexto(g)	" \frac{ 1146053 }{ 22800 } "
Círculo h	Círculo(A, r, PlanoXOY)	h: X = (0, 0, 0) + (2 cos(t), 2 sin(t), 0)
Texto texto3	"A=4πr^2=4π(" + (LaTeX(r)) + ")^2=" + (LaTeX(e)) + "π\ cm^2"	"A=4 π r^2=4 π (2)^2=16 π \ cm^2"

Atividade 2

Nome	Definição	Valor
Ponto A		A = (1, 2)
Ponto B		B = (9, 2)
Arco c	Semicírculo(A, B)	c = 12.6
Ponto D		D = (0, 6)
Ponto E		E = (0, 2)
Segmento f	Segmento(D, E)	f = 4
Ponto F	Ponto(f)	F = (0, 4.4)
Reta g	Perpendicular(F, f)	g: y = 4.4
Ponto G	Interseção(c, g, 1)	G = (1.8, 4.4)
Ponto H	Interseção(c, g, 2)	H = (8.2, 4.4)
Ponto C	Ponto(c)	C = (1, 2)

Ponto I	Ponto(c)	I = (9, 2)
Ponto J	PontoMédio(G, H)	J = (5, 4.4)
Segmento h	Segmento(J, H)	h = 3.2
Elipse d	Elipse(G, H, h + 0)	d: $1x^2 + 165y^2 - 10.3x - 1451.4y = -3206.9$
Elipse e	Elipse(G, H, h + 0)	e: $1x^2 + 165y^2 - 10.3x - 1451.4y = -3206.9$
Elipse k	Elipse(C, I, 4)	k: $(x - 5)^2 / 16.1 + (y - 2)^2 / 0.1 = 1$
Função p		$p(x) = 2 + sqrt(0.1 - (x - 5)^2 / 201)$
Função q		$q(x) = 2 - sqrt(0.1 - (x - 5)^2 / 201)$
Arco r	Semicírculo(C, I)	r = 12.6
Ponto K		K = (10, 6)
Ponto L		L = (18, 6)
Elipse s	Elipse(K, L, 4)	s: $1.3x^2 + 257.3y^2 - 35.9x - 3087.4y = -9492.7$
Ponto M		M = (14, 2)
Segmento i	Segmento(K, M)	i = 5.7
Segmento j	Segmento(L, M)	j = 5.7
Ponto N		N = (10, 2)
Ponto O		O = (18, 2)
Elipse t	Elipse(N, O, 4)	t: $1.3x^2 + 257.3y^2 - 35.9x - 1029.1y = -1259.7$
Segmento l	Segmento(K, N)	l = 4
Segmento m	Segmento(L, O)	m = 4
Ponto P	Interseção(g, i)	P = (11.6, 4.4)
Ponto Q	Interseção(g, j)	Q = (16.4, 4.4)
Ponto R	Interseção(g, l)	R = (10, 4.4)
Ponto S	Interseção(g, m)	S = (18, 4.4)
Ponto T	PontoMédio(P, Q)	T = (14, 4.4)
Segmento n	Segmento(T, Q)	n = 2.4
Elipse c_1	Elipse(P, Q, n + 0)	c_1: $0.8x^2 + 92.8y^2 - 21.5x - 816.5y = -1941.9$
Elipse d_1	Elipse(R, S, 4)	d_1: $1.3x^2 + 257.3y^2 - 35.9x - 2263.3y = -5208.1$
Elipse e_1	Elipse(P, Q, n + 0)	e_1: $0.8x^2 + 92.8y^2 - 21.5x - 816.5y = -1941.9$
Semirreta a	Semirreta(F, J)	a: y = 4.4
Ponto U	PontoMédio(C, I)	U = (5, 2)
Ponto V	PontoMédio(R, S)	V = (14, 4.4)
Segmento b	Segmento(U, J)	b = 2.4
Ponto W	Ponto(j)	W = (14, 2)
Segmento f_1	Segmento(W, V)	$f_1 = 2.4$
Segmento g_1	Segmento(V, S)	$g_1 = 4$
Ponto Z	Ponto(h)	Z = (8.2, 4.4)
Segmento h_1	Segmento(U, Z)	$h_1 = 4$

Ponto A_1	Interseção(e_1, i, 1)	A_1 = (11.6, 4.4)
Segmento i_1	Segmento(V, A_1)	i_1 = 2.4
Ponto B_1	F - (1, 0.5)	B_1 = (-1, 3.9)
Ponto C_1	Reflexão(B_1, F)	C_1 = (1, 4.9)
Ponto D_1	B_1 + (20, 0)	D_1 = (19, 3.9)
Ponto E_1	C_1 + (20, 0)	E_1 = (21, 4.9)
Quadrilátero pol1	Polígono(C_1, B_1, D_1, E_1)	pol1 = 20
Segmento c_2	Segmento(C_1, B_1, pol1)	c_2 = 2.2
Segmento b_1	Segmento(B_1, D_1, pol1)	b_1 = 20
Segmento d_2	Segmento(D_1, E_1, pol1)	d_2 = 2.2
Segmento e_2	Segmento(E_1, C_1, pol1)	e_2 = 20
Texto texto1		"área da seção:"
Texto texto2		"área da seção:"
Texto texto3	"A=π.(" + (LaTeX(h)) + ")²=" + (LaTeX(LaTeX(round(h² π, 2)))) + ""	
Texto texto4	"A=π.4²-π.(" + (LaTeX(i_1)) + ")²=16π-" + (LaTeX(i_1^2)) + "π=" + (LaTeX(LaTeX(round(h² π, 2)))) + ""	
Texto texto5		"Se as seções dos sólidos, obtidas à mesma altura, têm a mesma área, então os sólidos têm o mesmo volume."
Texto texto6		"Princípio de Cavalieri:"
Texto texto7		"Portanto:"
Texto texto8		"O volume da semi-esfera é igual ao volume do cilindro menos o volume do cone"
Texto texto9		
Texto texto10		"V_{esfera}=\frac{4. π.r³{3}"
Texto texto11		"(h=r)"
Texto texto12		"A=0"
Texto $texto12_1$		"A=0"