Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Valessa Zaigla Faustino Sousa Carvalho

Teresina - 2013

Valessa Zaigla Faustino Sousa Carvalho

Dissertação de Mestrado:

FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina - 2013

Carvalho, V.Z

xxxx FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA.

Valessa Zaigla Faustino Sousa Carvalho – Teresina: 2013.

Orientador: Prof. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes.

Coorientador: Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo de Sousa.

1. Matemática

CDD xxx.xx

Dedicatória:

Ciente de que esta é mais uma etapa concluída de um longo caminho a ser percorrido, dedico esta dissertação a todos os familiares e amigos que me incentivaram, desde o início, a procurar cada vez mais o conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por estar sempre ao meu lado.

Agradeço a todos os meus familiares que sempre me deram suporte ao longo da minha vida escolar e da minha vida acadêmica.

Agradeço em especial a meu esposo Valtercio Almeida, pelo companheirismo, dedicação, paciência, incentivo e compreensão.

Agradeço a todos os meus colegas do PROFMAT e, em especial, a meu grupo de estudo, constituído por Edivan, Ethiamara, Hélder, Janiel, Marcos Nery, Nascimento, Paulo e Valtercio. Sem a ajuda deles, certamente não teria conseguido chegar até aqui.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, em especial, ao professor Dr. Paulo Alexandre (Coorientador), pela idéia do tema e pela concessão do material de estudo para a dissertação, ao professor Dr. Jurandir de Oliveira Lopes (Orientador), pela paciência, apoio e orientação, e a todos aqueles que participaram de forma efetiva no mestrado.

Agradeço aos professores Dr. Arnaldo Silva Brito e Dr. Barnabé Pessoa Lima, por aceitarem participar da banca de defesa da dissertação.

Agradeço a Capes, pelo apoio financeiro a mim concedido.

"Para evoluir e somar conquistas é preciso adicionar persistência em tudo".

Nuno Cobra.

Resumo

O estudo central dessa dissertação abordará os conceitos básicos sobre funções convexas em uma variável real. Usaremos os conceitos de funções convexas para mostrar resultados importantes de desigualdades, médias e normas, como por exemplo: Desigualdade de Jensen, Generalização da Desigualdade das Médias, Desigualdade de Minkowski, Desigualdade de Young e Desigualdade de Hölder.

Esse tema é bastante apropriado, principalmente, a alunos que buscam ferramentas para a resolução de questões de Olimpíadas de Matemática. Usaremos, pois, alguns resultados abordados nesta dissertação como ferramenta essencial à resolução de problemas olímpicos de vários níveis de diversas olimpíadas. Os resultados contidos neste trabalho foram extraídos dos artigos [2], [7], [8], [9] e [10].

Palavras chave: Desigualdades, Funções Convexas, Médias, Normas, Olimpíadas de Matemática.

Abstract

The core of this dissertation study will address the basics of convex functions in a real variable. We will use the concepts of convex functions to show important results of inequalities, averages and standards, such as: the inequalities of Jensen, the generalization of the inequalities of averages, from Minkowski, Young's inequality and Hölder's inequality.

That's an interesting theme, particularly to students who are looking for tools to resolve issues of Mathematics Olympics. We use therefore some results discussed in this dissertation as an essential tool in troubleshooting Olympic various levels and various Olympiads. The main results contained in this paper were extracted from the following articles: [2],[7] [8], [9] and [10].

Keywords: Inequalities, Convex Functions, Means, Standards, Math Olympics.

Sumário

Resumo **iv**

Abstract **v**

1 Funções Convexas **4**

1.1 Funções Convexas 4

1.2 Funções Convexas Deriváveis 8

1.3 Aplicações 18

2 Médias **21**

2.1 Média Harmônica (MH) 21

2.2 Média Geométrica (MG) 21

2.3 Média Aritmética (MA) 22

2.4 Média Quadrática (MQ) 22

2.5 Desigualdade das Médias 22

2.6 p-Médias 23

2.7 Aplicações 27

3 Normas **29**

3.1 Desigualdade de Minkowski 30

3.2 Desigualdade de Young 31

3.3 Desigualdade de Hölder 32

3.4 Aplicações 34

4 Problemas de Olimpíadas **36**

5 Considerações Finais **48**

Referências Bibliográficas **49**

Introdução

A Olimpíada de Matemática é uma competição inspirada nos jogos olímpicos, que por sua vez são inspirados nos festivais esportivos que os gregos realizavam na antiga Élida, em honra ao deus Zeus e de outros deuses que habitavam o Olimpo. Ver [13], [14] e [15].

Principais objetivos das olimpíadas:

- Induzir nos jovens o gosto e o prazer de estudar Matemática.
- Estimular o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.
- Disponibilizar aos estudantes e professores uma coleção de problemas estimulantes e desafiadores.

A Olimpíada de Matemática é uma disputa entre os jovens, de caráter intelectual, um torneio onde as armas dos participantes são: a inteligência, a criatividade, a imaginação e a disciplina mental.

Na Olimpíada de Matemática, os estudantes são divididos, de acordo com o ano que cursa na sua escola e concorrem experimentando o prazer de resolver problemas intrigantes. Este tipo de atividade intelectual, que valoriza a competência e o saber, é uma demonstração de civilidade e avanço cultural. A história da humanidade comprova que as sociedades mais desenvolvidas têm cultivado esse sentimento de respeito pelas vitórias do espírito.

A realização de Olimpíadas de Matemática no mundo é um acontecimento que data do século dezenove, sendo que a primeira Olimpíada de Matemática ocorreu no Leste Europeu, mais precisamente na Hungria, no ano de 1894, em homenagem ao Ministro da Educação da Hungria, Jósef Kürschák, Professor de Matemática, membro da Academia de Ciências da Hungria e do Instituto Politécnico da Universidade de Budapeste. Essa ideia salutar foi disseminada pelo resto da Europa e para todo o mundo.

Desde 1959, acontece, anualmente, sempre em um país diferente, a Olimpíada Internacional de Matemática (International Mathematical Olympiad - IMO). O Brasil tem participado da IMO e obtido, através de seus jovens, diversas medalhas de ouro. Existe também, desde 1985, patrocinada pela Organização dos Estados Ibero-Americanos para a Educação, Ciência e Cultura, a Olimpíada Ibero-Americana de Matemática. Nessa Olimpíada, o Brasil já conquistou, ao longo dos anos, medalhas de ouro, prata e bronze. Acontece também, anualmente, sempre em um país diferente, a Olimpíada de Matemática do Cone Sul, envolvendo estudantes do Brasil, Argentina, Bolívia, Chile, Equador, Paraguai, Peru e Uruguai. No Brasil, a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM - promove, anualmente, desde 1979, a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e, através da Comissão Brasileira de Olimpíadas de Matemática, coordena a participação de estudantes brasileiros em competições internacionais. Pensando na melhoria do ensino de matemática nas escolas públicas de todo o País, o MEC (Ministério da Educação), a SBM e o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) estão promovendo e organizando, desde 2005, a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). A OBMEP vem crescendo a cada ano, criando um ambiente estimulante para o estudo da Matemática entre alunos e professores de todo o país. Em 2012, cerca de 19,1 milhões de alunos se inscreveram na competição e 99,4% dos municípios brasileiros estiveram representados.

Os sucessivos recordes de participação fazem da OBMEP a maior Olimpíada de Matemática do mundo. Desde o início da OBMEP, duas escolas piauienses vêm se destacando: A Unidade Escolar Estadual Ensino Médio Augustinho Brandão e a Unidade Escolar Municipal Teotônio, ambas localizadas em Cocal dos Alves. Em 2010, estudantes das duas escolas conquistaram quatro medalhas de ouro, três de prata, cinco de bronze e 12 menções honrosas. Em 2011, foram 24 premiações, sendo: 10 medalhas e 14 menções honrosas.

Em entrevista ao Jornal Correio Braziliense, o professor de Matemática, Antônio Cardoso do Amaral, que leciona nessas duas escolas, relatou que os resultados só foram possíveis graças à parceria entre docentes e estudantes. "Temos um grupo de meia dúzia de professores que se desempenham muito além da sua obrigação. Sacrificamos nossos fins de semana e feriados. Mas, se nossos alunos oferecessem resistência, não conseguiríamos fazer o que fazemos hoje. O que ajuda é que lá não tem marginalidade, drogas nem muito lazer, ou seja, coisas que os tiram da escola".

Nas provas de Olimpíadas de Matemática, há um grande número de problemas envolvendo desigualdades e, para facilitar a resolução de questões dessa natureza, apresentaremos a ferramenta Funções Convexas de uma Variável Real.

Funções Convexas de uma Variável Real forma uma importante classe de funções no contexto de Análise Real. Elas são muito utilizadas em Otimização, bem como em outras áreas da Matemática Aplicada. Uma das principais propriedades das funções convexas é que o ponto de mínimo local (quando existe) é global, pois uma função qualquer pode ter vários pontos de mínimos locais, sendo que eles nem sempre são pontos de mínimo globais. A generalização da desigualdade que define uma função convexa para mais de dois pontos é chamada de desigualdade de Jensen, graças ao engenheiro dinamarquês Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925).

Essa dissertação está dividida da seguinte forma: No primeiro capítulo, abordaremos Funções Convexas em uma variável real, mostrando suas principais definições e proposições. No segundo capítulo, apresentaremos as Médias, as desigualdades entre elas, dando destaque para a demonstração, usando função convexa da desigualdade entre Média Geométrica e Média Aritmética. Abordaremos também as p-Médias, a sua correspondente ponderada e as principais proposições. No terceiro capítulo, definiremos Normas e usaremos as definições de funções convexas para demonstrar importantes desigualdades, como por exemplo, a Desigualdade de Minkowski, de Young e Hölder. Ao final do primeiro, do segundo e do terceiro capítulos, faremos aplicações, reverenciando os conteúdos abordados, no quarto capítulo, resolveremos problemas de Olimpíadas, envolvendo Funções Convexas, Médias e Normas e no quinto capítulo faremos as considerações finais.

Capítulo 1

Funções Convexas

Trabalharemos as funções convexas no contexto de funções reais de uma variável real.

Neste capítulo, apresentaremos as principais definições, proposições e algumas aplicações significativas.

O assunto aqui abordado pode ser encontrado em [8].

1.1 Funções Convexas

Definição 1. *Sejam* $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. *Uma função* $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita convexa se tiver a seguinte propriedade: Dados dois pontos* A *e* B *no gráfico de* f*, a corda que une estes dois pontos está sempre acima do gráfico de* f.

Dados $a \leqslant x \leqslant b$ em (α, β), chamando $\lambda = \dfrac{x-a}{b-a}$, temos $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ e:

$$x = a + (x - a) = a + \lambda(b - a) = (1 - \lambda)a + \lambda b.$$

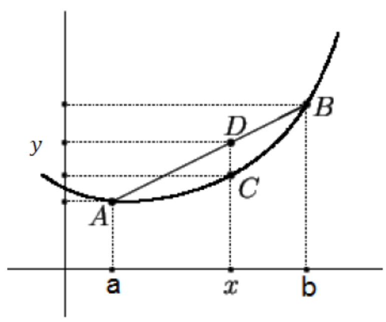

Figura 1.1:

O segmento que passa por A e B tem a equação da forma:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(a) + \lambda(f(b) - f(a)) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b), 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Ou seja, geometricamente, a função:

$$\lambda \mapsto ((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)), 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

é uma parametrização de um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$.

Assim, os pontos C e D da Figura 1.1 têm coordenadas:

$$C = ((1-\lambda)a + \lambda b, f((1-\lambda)a + \lambda b)) \quad \text{e} \quad D = ((1-\lambda)a + \lambda b, (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)).$$

A função f é convexa quando o ponto D está sempre acima de C. Isto se expressa como:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b); \forall a, b \in (\alpha, \beta) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Portanto, f é convexa se, e somente se:

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b); \forall a, b \in (\alpha, \beta) \quad \text{e} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Definição 2. *Sejam* $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. *Uma função* $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita côncava se tiver a seguinte propriedade: Dados dois pontos* A *e* B *no gráfico de* f*, a corda que une estes dois pontos está sempre abaixo do gráfico de* f*. Isto se expressa como:*

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \geqslant (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b); \forall a, b \in (\alpha, \beta) \quad e \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Exemplo 1. *A função modular* $f(x) = |x|$ *é convexa.*

Solução: *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$. *Então, para todo* $\lambda \in [0,1]$*, vale:*

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)a + \lambda b) &= |(1-\lambda)a + \lambda b| \\ &\leqslant |(1-\lambda)a| + |\lambda b| \\ &= (1-\lambda)|a| + \lambda|b| \\ &= (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b). \end{aligned}$$

Portanto, por (1.1) concluímos que a função modular é convexa.

Observação 1. *Na resolução, usamos a desigualdade triangular e o fato de que* $\lambda \in [0,1]$.

Exemplo 2. *Uma função quadrática* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a > 0$ *é convexa.*

Solução: *Sejam* $a', b' \in \mathbb{R}$ *e suponhamos, sem perda de generalidade, que* $a' < b'$. *Então, para todo* $\lambda \in [0,1]$, *vale:*

$$\begin{aligned}
f((1-\lambda)a' + \lambda b') &= a((1-\lambda)a' + \lambda b')^2 + b((1-\lambda)a' + \lambda b') + c \\
&= a[(1-\lambda)^2 a'^2 + 2\lambda(1-\lambda)a'b' + \lambda^2 b'^2] + (1-\lambda)ba' + \lambda bb' + c \\
&= a[(1-\lambda)^2 a'^2 + \lambda(1-\lambda)2a'b' + \lambda^2 b'^2] + (1-\lambda)ba' + \lambda bb' + c \\
&\leqslant (1-\lambda)^2 aa'^2 + \lambda(1-\lambda)a(a'^2 + b'^2) + \lambda^2 ab'^2 + (1-\lambda)ba' + \lambda bb' \\
&\quad + (1-\lambda)c + \lambda c \\
&= (1-\lambda)[(1-\lambda)aa'^2 + \lambda a(a'^2 + b'^2) + ba' + c] + \lambda^2 ab'^2 + \lambda bb' + \lambda c \\
&= (1-\lambda)(aa'^2 + ba' + c) + (1-\lambda)\lambda ab'^2 + \lambda^2 ab'^2 + \lambda bb' + \lambda c \\
&= (1-\lambda)(aa'^2 + ba' + c) + \lambda ab'^2 + \lambda bb' + \lambda c \\
&= (1-\lambda)(aa'^2 + ba' + c) + \lambda(ab'^2 + bb' + c) \\
&= (1-\lambda)f(a') + \lambda f(b').
\end{aligned}$$

Observação 2. *Na desigualdade que aparece na solução, usamos o fato de* a *ser positivo e a desigualdade* $a'b' \leqslant \dfrac{a'^2 + b'^2}{2}$.

Uma das principais propriedades das funções convexas é que o ponto de mínimo local (quando existe) é global.

Resolveremos um problema de minimização convexa,para isto, formalizaremos a definição de mínimo de uma função de uma variável real.

Definição 3. *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função qualquer. Um ponto* $c \in I$ *é:*

(i) um mínimo local de f *se existe* $r > 0$ *tal que :* $|x - c| < r$ *implica* $f(c) \leqslant f(x)$, *para todo* $x \in (c - r, c + r)$*;*

(ii) um mínimo global de f *se* $f(c) \leqslant f(x)$, *para todo* $x \in I$.

Proposição 1. *Sejam* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa e* c *um mínimo local de* f *em* I. *Então* c *é mínimo global de* f *em* I.

Demonstração. Suponhamos que f admita um mínimo local c que não é mínimo global. Sendo c um mínimo local, existe $r > 0$ tal que $f(c) \leqslant f(x)$, para todo $x \in (c - r, c + r)$. Como c não é mínimo global, existe $z \in I$ tal que $f(z) < f(c)$.

Escolha λ suficientemente próximo da unidade tal que $\lambda c + (1-\lambda)z \in (c-r, c+r)$. Pela convexidade de f, temos:

$$f(\lambda c + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(c) + (1-\lambda)f(z) < f(c).$$

Pois, $f(z) < f(c)$. Mas, pela construção, $\lambda c + (1-\lambda)z \in (c-r, c+r)$. Como c um mínimo local, $f(c) \leqslant f(\lambda c + (1-\lambda)z)$, uma contradição. Portanto, c é um mínimo global de f em I. ■

O resultado abaixo é uma generalização de (1.1).

Proposição 2 (Desigualdade de Jensen). *Sejam* $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$. *Uma função* $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é convexa se, e somente se,* $\forall \;\; n \geqslant 2, \forall \;\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in (\alpha, \beta), \forall \;\; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$, *tais que,* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, *tem-se:*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{1.3}$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) Supondo válida a condição (1.3) e tomando, em particular, $n = 2$, conclui-se que f é convexa.
($\Rightarrow$) Suponhamos que f é convexa. Vamos provar por indução sobre n, que vale a condição (1.3) para todo $n \geqslant 2$.

(i) Para $n = 2$ é válido por definição de função convexa.

(ii) Hipótese de Indução: Suponhamos que (1.3) vale para um certo $n > 2$.

(iii) Tese: Vamos mostrar que (1.3) vale também para $n+1$. Ou seja, devemos mostrar que:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in (\alpha, \beta)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \geqslant 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$.
1º caso: $\lambda_{n+1} = 1$.
Então, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ e, neste caso, a condição (1.3) vale trivialmente, pois se reduz a $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_{n+1})$.
2º caso: $\lambda_{n+1} \neq 1$.
Chamando

$$y = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}{1 - \lambda_{n+1}},$$

e observando que $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$, temos que:

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

Pela convexidade de f e pela Hipótese de Indução, temos:

$$\begin{aligned}
&f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
&= f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\
&\leqslant (1-\lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}{1-\lambda_{n+1}}\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leqslant (1-\lambda_{n+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{n+1}} f(x_2) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).
\end{aligned}$$

■

Observação 3. *Quando* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, *a desigualdade de Jensen nos diz que:*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

1.2 Funções Convexas Deriváveis

Se nos restringirmos à classe das funções deriváveis, vamos obter um critério para verificar se uma função é convexa. Uma função convexa não é necessariamente derivável. Por exemplo, tendo como referência (6), a função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$ e vimos no Exemplo 1 que ela é uma função convexa.

Proposição 3. *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função* f *contínua definida em um intervalo aberto* I. *Se* f *tem mínimo local em* $x = c, c \in I$ *e* f *é derivável em* c *então* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Suponha que f tenha um mínimo local em $x = c$. Como f é derivável em c, então

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c).$$

Como c é ponto de mínimo local, existe $r > 0$ tal que $f(c) \leqslant f(x)$, para todo $x \in (c-r, c+r)$. Portanto, $f(x) - f(c) \geqslant 0$, para todo $x \in (c-r, c+r)$.

Se $x < c$ então $x - c < 0$, e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$ para $x \in (c - r, c + r)$, logo:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0. \tag{1.4}$$

Por outro lado, $x > c$ então $x - c > 0$ e, portanto, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$ para $x \in (c - r, c + r)$:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Comparando as desigualdades (1.4) e (1.5) e levando em conta que são o mesmo valor, resulta:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = 0.$$

■

Exemplo 3. *Determine o valor mínimo global da função* f *dada por* $f(x) = 2x^2 + 1$.

Solução: *Vimos no Exemplo 2 que f é convexa e como* $f'(x) = 4x$, *pela Proposição 1 se f admite um mínimo local, esse mínimo é global. Portanto, como* f *é derivável em* $x = 0$ *e* $f'(0) = 0$, *pela Proposição 3, esse mínimo ocorre em* $x = 0$. *Assim, o valor mínimo global de* f *é* $f(0) = 1$.

Proposição 4. *Sejam* $A = (x_1, y_1)$, $B = (u, v)$ *e* $C = (x_3, y_3)$ *três pontos distintos sobre o gráfico de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *onde* f *é convexa, com* $x_1 < u < x_3$. *Então as três propriedades seguintes são equivalentes:*

(a) O ponto B *está abaixo da corda* AC*;*

(b) A inclinação de AB *é menor ou igual à inclinação de* AC*;*

(c) A inclinação de AC *é menor ou igual à inclinação de* BC.

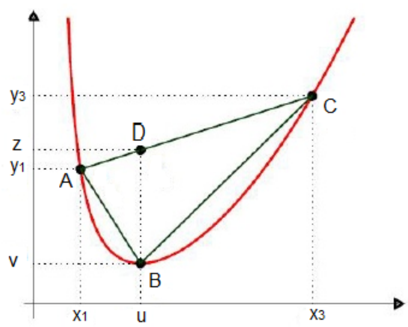

Figura 1.2:

Demonstração. (a)$\Rightarrow$ (b): A propriedade (a) que dizer que a imagem de u por f está abaixo da reta que passa por A e C (e passa por D). De acordo com a Figura 1.2, a equação dessa reta é dada por:

$$y - z = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - u). \tag{1.6}$$

Como qualquer ponto da reta que passa por A e C (e passa por D) satisfaz a equação (1.6), em particular o ponto $A = (x_1, y_1)$, ou seja:

$$y_1 - z = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x_1 - u) \Rightarrow z = y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(u - x_1).$$

Com isso a imagem de u por f é menor que a imagem de u pela reta dada por (1.6). Assim,

$$v \leqslant z \Rightarrow v \leqslant y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(u - x_1).$$

Como $u - x_1 \geqslant 0$, temos:

$$\frac{v - y_1}{u - x_1} \leqslant \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

(b)$\Rightarrow$ (c):

$$\frac{v - y_1}{u - x_1} \leqslant \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Como $u - x_1 > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$, podemos então reescrever a última desigualdade assim:

$$\begin{aligned}
&(v - y_1)(x_3 - x_1) \leqslant (y_3 - y_1)(u - x_1) \\
&\Rightarrow \quad vx_3 - vx_1 - y_1x_3 + y_1x_1 \leqslant y_3u - y_3x_1 - y_1u + y_1x_1 \\
&\Rightarrow \quad vx_3 - vx_1 - y_1x_3 \leqslant y_3u - y_3x_1 - y_1u.
\end{aligned}$$

Somando agora x_3y_3 em ambos os membros da última desigualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
&x_3y_3 - y_1x_3 + uy_1 - uy_3 \leqslant x_3y_3 - y_3x_1 - vx_3 + vx_1 \\
&\Rightarrow \quad x_3(y_3 - y_1) - u(y_3 - y_1) \leqslant y_3(x_3 - x_1) - v(x_3 - x_1) \\
&\Rightarrow \quad (y_3 - y_1)(x_3 - u) \geqslant (x_3 - x_1)(y_3 - v).
\end{aligned}$$

Como $(x_3 - u) > 0$ e $(x_3 - x_1) > 0$, então:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{y_3 - v}{x_3 - u}.$$

(c)$\Rightarrow$ (a):

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{y_3 - v}{x_3 - u}.$$

Como $x_3 - u > 0$ e $x_3 - x_1 > 0$, podemos então reescrever a última desigualdade assim:

$$
\begin{aligned}
&(y_3 - y_1)(x_3 - u) \leqslant (y_3 - v)(x_3 - x_1) \\
&\quad \Rightarrow \quad y_3x_3 - uy_3 - y_1x_3 + y_1u \leqslant y_3x_3 - y_3x_1 - vx_3 + vx_1 \\
&\quad \Rightarrow \quad -uy_3 - y_1x_3 + y_1u \leqslant -y_3x_1 - vx_3 + vx_1 \\
&\quad \Rightarrow \quad vx_3 - vx_1 - y_1x_3 \leqslant uy_3 - y_3x_1 - uy_1.
\end{aligned}
$$

Somando agora x_1y_1 em ambos os membros da última desigualdade, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&x_1y_1 + vx_3 - vx_1 - y_1x_3 \leqslant x_1y_1 + uy_3 - y_3x_1 - uy_1 \\
&\quad \Rightarrow \quad vx_3 - vx_1 - y_1x_3 + y_1x_1 \leqslant uy_3 - uy_1 - x_1y_3 + x_1y_1 \\
&\quad \Rightarrow \quad v(x_3 - x_1) - y_1(x_3 - x_1) \leqslant u(y_3 - y_1) - x_1(y_3 - y_1) \\
&\quad \Rightarrow \quad (x_3 - x_1)(v - y_1) \leqslant (y_3 - y_1)(u - x_1).
\end{aligned}
$$

Como $(x_3 - x_1) > 0$, então:

$$
v \leqslant y_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(u - x_1).
$$

■

Nas proposições 5 e 6, usaremos o resultado da Proposição 4.

Proposição 5. *Seja* $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função convexa. Dados quatro pontos* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ *em* (α, β), *vale* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \dfrac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$.

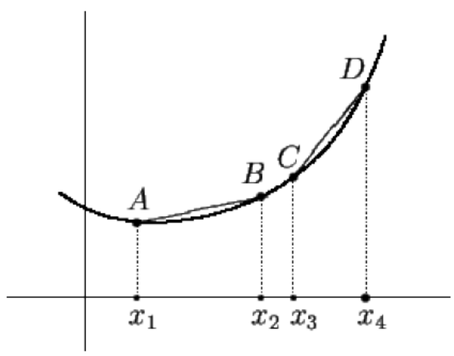

Figura 1.3:

Demonstração. De acordo com a Figura 1.3, temos que o ponto B está abaixo da corda AC. Pela Proposicão 4, a inclinação de AB é menor ou igual a inclinação de AC e esta é menor ou igual à inclinação de BC. Ou seja:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}. \tag{1.7}$$

Logo, a inclinação de AB é menor ou igual à inclinação de BC.

O ponto C está abaixo da corda BD. Logo, a inclinação de BC é menor ou igual à inclinação de BD e esta é menor ou igual à inclinação de CD. Ou seja:

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leqslant \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2} \leqslant \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}. \tag{1.8}$$

Portanto de (1.7) e (1.8) concluímos que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$

■

Proposição 6. *Seja* $f:(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função convexa. Então* f *é contínua em* (α,β).

Demonstração. Dado $x\in(\alpha,\beta)$, escolha $\delta>0$ tal que $[x-\delta,x+\delta]\subset(\alpha,\beta)$. Agora, considere um ponto $z_1\in(x-\delta,x)$. Aplicando a Proposição 4 para os pontos $x-\delta, z_1, x$, temos:

$$\frac{f(z_1)-f(x-\delta)}{z_1-(x-\delta)} \leqslant \frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leqslant \frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1}. \tag{1.9}$$

Agora, aplicando a Proposição 4 para os pontos $z_1, x, x+\delta$, temos:

$$\frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1} \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(z_1)}{(x+\delta)-z_1} \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \tag{1.10}$$

Logo, de (1.9) e (1.10), obtemos:

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leqslant \frac{f(x)-f(z_1)}{x-z_1} \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \tag{1.11}$$

Seja agora um ponto $z_2\in(x,x+\delta)$. Aplicando a Proposição 4 para os pontos $x-\delta, x, z_2$, temos:

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leqslant \frac{f(z_2)-f(x-\delta)}{z_2-(x-\delta)} \leqslant \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x}. \tag{1.12}$$

Agora, aplicando a Proposição 4 para os pontos $x, z_2, x+\delta$, temos:

$$\frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(z_2)}{(x+\delta)-z_2}. \tag{1.13}$$

Logo, de (1.12)e (1.13), obtemos:

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leqslant \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x} \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \tag{1.14}$$

Então, podemos concluir de (1.11) e (1.14), que se, $z \in [x-\delta, x+\delta]$,

$$\frac{f(x)-f(x-\delta)}{\delta} \leqslant \left|\frac{f(x)-f(z)}{x-z}\right| \leqslant \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}. \tag{1.15}$$

Seja:

$$L = \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}.$$

Portanto, temos que:

$$|f(x)-f(z)| \leqslant L|x-z|,$$

para qualquer $z \in [x-\delta, x+\delta]$. Passando o limite quando $z \to x$, obtemos:

$$\lim_{z \to x} |f(x)-f(z)| = 0,$$

o que prova que f é contínua. ■

Observação 4. *Ver definição de função contínua na Referência 6.*

Mostraremos na próxima proposição um critério para determinar quando uma função derivável é convexa.

Proposição 7. *Seja* $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável. Então* f *é convexa se, e somente se,* f' *é crescente (isto é:* $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$*).*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que f convexa e derivável. Vamos mostrar que f' é crescente. Sejam $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ pontos de (α, β).
Pela Proposição 5, tem-se:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}.$$

Fazendo $x_2 \to x_1$ e $x_4 \to x_3$, obtemos $f'(x_1) \leqslant f'(x_3)$. Portanto, f' é crescente.
($\Leftarrow$) Suponhamos que f' seja crescente. Vamos provar que f é convexa. Sejam $x_1 < x_2$ em (α, β) e $0 < \lambda < 1$. Queremos mostrar que:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Fazendo $\mu = 1 - \lambda$, queremos mostrar que:

$$f(\mu x_1 + \lambda x_2) \leqslant \mu f(x_1) + \lambda f(x_2); \quad 0 < \lambda, \mu < 1 \quad \text{e} \quad \lambda + \mu = 1.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \mu f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(\mu x_1 + \lambda f(x_2) &= \mu f(x_1) + \lambda f(x_2) - (\lambda + \mu) f(\mu x_1 + \lambda x_2) \\ &= \mu[f(x_1) - f(\mu x_1 + \lambda x_2)] + \lambda[f(x_2) - f(\mu x_1 + \lambda x_2)]. \end{aligned}$$

Sendo f uma função derivável em (α, β) , então f é contínua em (α, β), portanto, contínua nos intervalos $(x_1, \mu x_1 + \lambda x_2)$ e $(\mu x_1 + \lambda x_2, x_2)$. Por conseguinte, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio nesses intervalos. Ou seja, existe $c \in (x_1, \mu x_1 + \lambda x_2)$ e $d \in (\mu x_1 + \lambda x_2, x_2)$, tal que:

$$f(\mu x_1 + \lambda x_2) - f(x_1) = f'(c)(\mu x_1 + \lambda x_2 - x_1) = \lambda(x_2 - x_1) f'(c). \tag{1.16}$$

$$f(x_2) - f(\mu x_1 + \lambda x_2) = f'(d)(x_2 - (\mu x_1 + \lambda x_2)) = \mu(x_2 - x_1) f'(d). \tag{1.17}$$

Observe que $c < d$ e como f' é crescente, temos que $f'(c) \leqslant f'(d)$.
De (1.16) e (1.17) concluímos que:

$$\begin{aligned} &\frac{f(\mu x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)}{\lambda} \leqslant \frac{f(x_2) - f(\mu x_1 + \lambda x_2)}{\mu} \\ &\Rightarrow \mu[f(\mu x_1 + \lambda x_2) - f(x_1)] \leqslant \lambda[f(x_2) - f(\mu x_1 + \lambda x_2)] \\ &\Rightarrow \mu f(x_1) + \lambda f(x_2) - (\lambda + \mu) f(\mu x_1 + \lambda x_2) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Como $\lambda + \mu = 1$, temos:

$$\mu f(x_1) + \lambda f(x_2) - f(\mu x_1 + \lambda x_2) \geqslant 0.$$

Ou seja:

$$f(\mu x_1 + \lambda x_2) \leqslant \mu f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

■

Se f é contínua em um intervalo I e $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f é crescente em I (ver referência 6). Portanto, o Corolário 1 abaixo, é uma consequência do Proposição 7.

Corolário 1. *Se* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *é duas vezes derivável, então* f *é convexa se* $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$.

Proposição 8. *Seja* f *uma função derivável em um intervalo aberto* (α, β) . *Se* f *é uma função convexa, dado* $x_1 \in (\alpha, \beta)$, *então:*

$$f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \tag{1.18}$$

para todo $x \in (\alpha, \beta)$.

Demonstração. Se $x = x_1$ em (1.18) vale a igualdade: $f(x_1) = f(x_1)$.

Portanto, podemos supor $x \neq x_1$. Como f é convexa, por (1.1), temos:

$$\begin{aligned}
& f((1-\lambda)x_1 + \lambda x) \leqslant (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x) \\
& \Rightarrow \quad f(x_1 + \lambda(x - x_1)) \leqslant f(x_1) + \lambda(f(x) - f(x_1)) \\
& \Rightarrow \quad f(x_1 + \lambda(x - x_1)) - f(x_1) \leqslant \lambda(f(x) - f(x_1)) \\
& \Rightarrow \quad (x - x_1)\frac{f(x_1 + \lambda(x - x_1)) - f(x_1)}{\lambda(x - x_1)} \leqslant f(x) - f(x_1) \\
& \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_1 + \lambda(x - x_1)) - f(x_1)}{\lambda(x - x_1)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $h = \lambda(x - x_1)$, e aplicando limite quando $h \to 0$ obtemos:

$$f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

$\blacksquare$

Observação 5. *Na demonstração da Proposição 8, supomos* $\lambda \neq 0$ *pois, caso contrário, vale a igualdade em (1.18).*

Na próxima proposição, mostraremos que a volta do Corolário 1 também é válida.

Proposição 9. *Seja* $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *duas vezes derivável. Se* $f''(x) \geqslant 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$, *então* f *é convexa.*

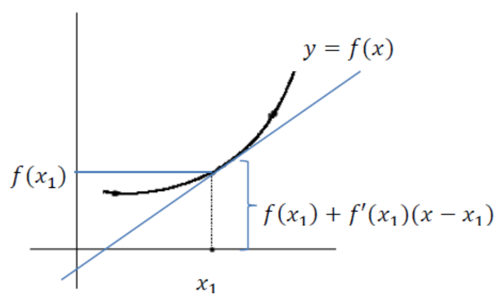

Figura 1.4:

Demonstração. Pela Proposição 8, basta provar que $f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$, para todo $x \in (\alpha, \beta)$.

1º caso: $x > x_1$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x_1, x]$ temos que existe um $c \in (x_1, x)$ tal que:

$$f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1). \tag{1.19}$$

Como $c \in (\alpha, \beta)$, então $f''(c) \geqslant 0$, logo $f'(x)$ é uma função crescente e, portanto $f'(x_1) \leqslant f'(c)$. Multiplicando essa inequação pelo fator positivo $(x - x_1)$, resulta:

$$f'(c)(x - x_1) \geqslant f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow f(x_1) + f'(c)(x - x_1) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

Mas, por (1.19), $f(x) = f(x_1) + f'(c)(x - x_1)$, logo:

$$f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

2º caso: $x < x_1$.

Aplicando o Teorema do Valor Médio no intervalo $[x, x_1]$, temos que existe um $c \in (x, x_1)$ tal que:

$$f(x_1) - f(x) = f'(c)(x_1 - x). \tag{1.20}$$

Como $c \in (\alpha, \beta)$, então $f''(c) \geqslant 0$, logo $f'(x)$ é uma função crescente e portanto $f'(c) \leqslant f'(x_1)$. Multiplicando essa inequação pelo fator positivo $(x_1 - x)$, resulta:

$$\begin{aligned} & f'(c)(x_1 - x) \leqslant f'(x_1)(x - x_1) \\ \Rightarrow \quad & -f'(c)(x - x_1) \geqslant f'(x_1)(x - x_1) \\ \Rightarrow \quad & f(x_1) - f'(c)(x_1 - x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1). \end{aligned}$$

Mas, por (1.20), $f(x) = f(x_1) - f'(c)(x - x_1)$, logo:

$$f(x) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

∎

Definição 4. *Uma função* $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita estritamente convexa quando, dados dois pontos* A *e* B *em seu gráfico, além da corda* AB *estar acima do gráfico de* f*, ela toca o gráfico apenas nos pontos* A *e* B*. Ou seja,* f *é estritamente convexa quando:*

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b); \forall a, b \in [\alpha, \beta] \quad \textit{com} \quad a \neq b \quad \textit{e} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Exemplo 4. *Uma função constante é convexa, mas não é estritamente convexa.*

Observação 6. *Olhando as Proposições 7 e 9, temos que:*

i. A igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$;

ii. Se f é derivável, então f é estritamente convexa se, e somente se, f' é estritamente crescente $(x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2))$;

iii. Se f é duas vezes derivável e $f''(x) > 0, \forall x \in I$, então f é estritamente convexa.

A recíproca é falsa, pois a função $f(x) = x^4$ é estritamente convexa e $f''(0) = 0$.

Exemplo 5 (Exemplos de funções estritamente convexas)**.**

(i) $f(x) = x^{2n}, x \in \mathbb{R}$ *e* n *é um inteiro positivo;*

(ii) $f(x) = x^p, x \geqslant 0 \quad e \quad p > 1$*;*

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{(x+a)^p}, x > -a \quad e \quad p > 0$*;*

(iv) $f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$*;*

(v) $f(x) = x \ln x, x > 0$*;*

(vi) $f(x) = \ln(1 + e^x), x \in \mathbb{R}$*;*

(vii) $f(x) = \operatorname{tg} x, 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$*;*

(viii) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}, x > 0.$

Resolveremos os itens (v), (vi) e (viii), pois iremos utilizar essas funções na próxima seção.

(v) $f(x) = x \ln x, x > 0$.
Solução: Sendo $f(x) = x \ln x \quad \text{com} \quad x > 0$, temos que $f'(x) = \ln x + 1$ e $f''(x) = \dfrac{1}{x}$.
Como $f''(x) > 0, \forall x \in D_f$, temos que f é estritamente convexa.

(vi) $f(x) = \ln(1 + e^x), x \in \mathbb{R}$.
Solução: Sendo $f(x) = \ln(1 + e^x), x \in \mathbb{R}$. Temos:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Como $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que f é estritamente convexa.

(viii) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}, x > 0.$

Solução: Sendo $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$. Temos:

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} > 0.$$

Como $f''(x) > 0, \forall x > 0$, temos que função f é estritamente convexa.

Observação 7.

1. *A função linear* $f(x) = ax + b$ *com* $x \in \mathbb{R}$ *é convexa e também côncava.*

2. *A soma de duas funções convexas (côncavas) é uma função convexa (côncava).*

1.3 Aplicações

Exemplo 6. *Prove que para quaisquer* a, b, x *e* y *reais positivos:*

$$(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b} \leqslant x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b},$$

com igualdade se, e somente se, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

Solução: *Vimos no item (v) do Exemplo 5 que* $f(x) = x\ln x, x > 0$ *é estritamente convexa. Dados* $a, b > 0$*, tomando* $\lambda = \dfrac{b}{a+b}$ *e* $\mu = \dfrac{a}{a+b}$*, temos* $\lambda + \mu = 1$ *com* $\lambda, \mu > 0$*. Portanto,*

$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = f\left(\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\right) \leqslant \frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b} &\leqslant \frac{a}{a+b}\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\ln\frac{y}{b}\\ \Rightarrow \quad (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) &\leqslant x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b}.\end{aligned}$$

Como f *é estritamente convexa, pelo item (i) da Observação 6, a igualdade ocorre se, e somente se,* $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

Exemplo 7. *Dados números reais* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ *tais que* $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$ *, então para todos reais* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ *positivos, tem-se:*

$$a_1^{\alpha_1}.\ldots.a_n^{\alpha_n} + b_1^{\alpha_1}.\ldots.b_n^{\alpha_n} \leqslant (a_1+b_1)^{\alpha_1}.\ldots.(a_n+b_n)^{\alpha_n}. \tag{1.21}$$

com igualdade se, e somente se, $\dfrac{b_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{b_n}{a_n}$.

Solução: *Vimos no item (vi) do Exemplo 5 que* $f(x) = \ln(1+e^x)$ *é estritamente convexa. Portanto:*

$$
\begin{aligned}
& f\left(\alpha_1 \ln \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \alpha_n \ln \frac{b_n}{a_n}\right) \leqslant \alpha_1 f\left(\ln \frac{b_1}{a_1}\right) + \ldots + \alpha_n f\left(\ln \frac{b_n}{a_n}\right) \\
\Rightarrow\ & f\left(\ln \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} + \ldots + \ln\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right) \leqslant \alpha_1 \ln\left(1 + e^{\ln \frac{b_1}{a_1}}\right) + \ldots + \alpha_n \ln\left(1 + e^{\ln \frac{b_n}{a_n}}\right) \\
\Rightarrow\ & f\left[\ln\left(\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)\right] \leqslant \alpha_1 \ln\left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right) + \ldots + \alpha_n \ln\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) \\
\Rightarrow\ & \ln\left[1 + e^{\ln\left(\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right)}\right] \leqslant \ln\left[\left(\frac{a_1+b_1}{a_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{a_n+b_n}{a_n}\right)^{\alpha_n}\right] \\
\Rightarrow\ & \ln\left(1 + \frac{b_1^{\alpha_1}.\ldots.b_n^{\alpha_n}}{a_1^{\alpha_1}.\ldots.a_n^{\alpha_n}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{(a_1+b_1)^{\alpha_1}.\ldots.(a_n+b_n)^{\alpha_n}}{a_1^{\alpha_1}.\ldots.a_n^{\alpha_n}}\right).
\end{aligned}
$$

Daí segue a desigualdade (1.21).

Como f *é estritamente convexa, ocorre igualdade se, e somente se,* $\ln \dfrac{b_1}{a_1} = \ldots = \ln \dfrac{b_n}{a_n}$, *isto é, se, e somente se,* $\dfrac{b_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{b_n}{a_n}$.*(ver item (i) da Observação 6).*

Exemplo 8. *Se* $a, b, c > 0$, *então* $a^a.b^b.c^c \geqslant \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$.

Solução: *Devemos mostrar que:*

$$
\begin{aligned}
& \ln(a^a.b^b.c^c) \geqslant \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \\
\Rightarrow\ & a\ln a + b\ln b + c\ln c \geqslant (a+b+c)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right). \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Considerando a função $f(x) = x\ln x, x \in (0,\infty)$ *estritamente convexa (item (v) do Exemplo 5), temos:*

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)+f(c)}{3} \\
\Rightarrow\ & \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant \frac{a\ln a + b\ln b + c\ln c}{3} \\
\Rightarrow\ & (a+b+c)\ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leqslant a\ln a + b\ln b + c\ln c.
\end{aligned}
$$

Que está de acordo com a desigualdade (1.22) que queríamos demonstrar.

Exemplo 9. *Se* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 1$, *então*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

Solução: *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}, x \geqslant 0$. *A função* f *é estritamente convexa (item (viii) do Exemplo 5). Assim, por (1.3), temos:*

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{1 + e^{\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{x_k}}}{n} \\
\Rightarrow \quad & \frac{n}{1 + e^{\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+e^{x_k}}.
\end{aligned}
$$

Tomando $x_k = \ln a_k$, *obtemos:*

$$
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a_k} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.
$$

Capítulo 2

Médias

Neste capítulo, abordaremos as definições das principais médias e as desigualdades existentes entre elas. Definiremos a média das potências de ordem p (p-médias), versões ponderadas para p-médias e ao final, apresentaremos alguns exemplos de aplicações.

O assunto abordado nesse capítulo pode ser encontrado em [5], [7] e [9].

2.1 Média Harmônica (MH)

Definição 5. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos, a média harmônica de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é dada por:*

$$\mathrm{MH} = \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

A média harmônica é utilizada, por exemplo, para calcular a resistência média de resistores em paralelo.

2.2 Média Geométrica (MG)

Definição 6. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos, a média geométrica de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é dada por:*

$$\mathrm{MG} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

A média geométrica é utilizada, por exemplo, para encontrar a taxa média de retorno.

2.3 Média Aritmética (MA)

Definição 7. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos, a média aritmética de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é dada por:*

$$\mathsf{MA} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Além da Matemática e Estatística, a média aritmética é usada com freqüência em áreas como Economia, Sociologia e História. Pode-se ter como exemplo a renda per capita, que é a renda média aritmética da população de um país.

2.4 Média Quadrática (MQ)

Definição 8. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos, a média quadrática de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é dada por:*

$$\mathsf{MQ} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Esta média é usada para medições médias, tomadas para o desvio padrão de uma variável aleatória.

2.5 Desigualdade das Médias

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos, valem as desigualdades:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Ou seja,

$$\mathsf{MH} \leqslant \mathsf{MG} \leqslant \mathsf{MA} \leqslant \mathsf{MQ}.$$

Mostraremos na Proposição 10, a Desigualdade entre a médias Geométrica e Aritmética e ao final da seção, as outras Desigualdades entre as Médias.

Proposição 10 (Desigualdade entre a médias Geométrica e Aritmética (MG-MA))**.** *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos, tem-se:*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \tag{2.1}$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demonstração. Consideremos a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$. Como $f''(x) = e^x > 0$, concluímos que f é convexa. Temos, então, que $\forall \quad b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ e $\forall \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ vale:

$$e^{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n} \leqslant \lambda_1 e^{b_1} + \lambda_2 e^{b_2} + \ldots + \lambda_n e^{b_n}. \tag{2.2}$$

Tomando $b_i = \ln a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ com cada $a_i > 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, temos que a igualdade ocorre se, e somente se, $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$. Portanto, fazendo a substituição $b_i = \ln a_i$ em (2.2), temos:

$$\begin{aligned}
& e^{\left(\frac{1}{n}\ln a_1 + \frac{1}{n}\ln a_2 + \ldots + \frac{1}{n}\ln a_n\right)} \leqslant \frac{1}{n}e^{\ln a_1} + \frac{1}{n}e^{\ln a_2} + \ldots + \frac{1}{n}e^{\ln a_n} \\
\Rightarrow \quad & e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n)} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\
\Rightarrow \quad & e^{\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2 \ldots a_n)} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \\
\Rightarrow \quad & e^{\ln(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \\
\Rightarrow \quad & \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},
\end{aligned}$$

com igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. ■

2.6 p-Médias

Definição 9. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *reais positivos. Se* $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, *a* p- *média de* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *é dada por:*

$$\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

i) Se $p = -1$, temos a média harmônica;

ii) Se $p = 1$, temos a média aritmética;

iii) Se $p = 2$, temos a média quadrática;

iv) Se $p \to 0$, temos a média geométrica.

Vamos demonstrar, usando a Regra de L' Hospital, que para todo $a_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Demonstração.

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p\to 0} e^{\frac{1}{p}\ln\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}}. \tag{2.3}$$

Vamos calcular $\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\ln\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n} = \lim_{p\to 0}\frac{\ln(a_1^p + \ldots + a_n^p) - \ln n}{p}$.

Aplicando a Regra de L' Hospital, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0}\frac{\ln(a_1^p + \ldots + a_n^p) - \ln n}{p} &= \lim_{p\to 0}\frac{1}{a_1^p + \ldots + a_n^p}\quad(a_1^p \quad \ln a_1 + \ldots + a_n^p \quad \ln a_n)\\
&= \frac{\ln a_1 + \ldots + \ln a_n}{n}\\
&= \ln(a_1 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}\\
&= \ln\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.
\end{aligned}$$

Portanto, por (2.3), temos que:

$$\lim_{p\to 0}\left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{\lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{p}\ln\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)} = e^{\ln\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}} = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

■

Assim, podemos pensar na média geométrica como sendo a p-média para $p = 0$.

v) Se $p \to \infty$, temos o max $\{a_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$.

Vamos demonstrar que $\lim_{p\to\infty}\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = max\{a_i\}$.

Demonstração. Suponhamos que $a_k = max\{a_i\}, i = 1, 2, \ldots, n$. Assim,

$$a_k^p < a_1^p + \ldots + a_n^p < na_k^p$$

$$\Rightarrow \frac{a_k^p}{n} < \frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n} < a_k^p$$

$$\Rightarrow \frac{a_k}{n^{\frac{1}{p}}} < \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < a_k.$$

Aplicando o limite quando $p \to \infty$, temos:

$$\lim_{p\to\infty} \frac{a_k}{n^{\frac{1}{p}}} < \lim_{p\to\infty} \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < \lim_{p\to\infty} a_k.$$

Como $\lim_{p\to\infty} a_k = a_k$ e $\lim_{p\to\infty} n^{\frac{1}{p}} = 1$, então:

$$a_k < \lim_{p\to\infty} \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} < a_k.$$

Portanto, pelo teorema do confronto:

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = a_k = \quad \max \quad \{a_i\}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

■

Assim a ∞-média de $a_1, \ldots, a_n$ é simplesmente max $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

De modo análogo, mostra-se que a $-\infty$-média de $a_1, \ldots, a_n$ é o min $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Assim como acontece com as médias aritméticas e geométricas, também podemos definir versões ponderadas para p-médias.

Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, com $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, a correspondente ponderada da p-média é dada por:

$$(\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 11 (Generalização da desigualdade das médias)**.** *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$*, com* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$*. Para todo* $p, q \in \mathbb{R} - \{0\}$*, tem-se:*

$$p \leqslant q \Rightarrow (\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \ldots + \lambda_n a_n^q)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.4}$$

Demonstração. **1º caso:** Se $0 < p < q$ ou $p < 0 < q$.

Considerando a função $f(x) = x^{\frac{q}{p}}$, com $x > 0$, temos que:

$$f'(x) = \frac{q}{p}.x^{\frac{q}{p}-1} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{q}{p}.\frac{q-p}{p}.x^{\frac{q}{p}-2} = \frac{q(q-p)}{p^2}.x^{\frac{q}{p}-2} \geqslant 0.$$

Portanto, f é convexa, ou seja:

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p) \leqslant \lambda_1 f(a_1^p) + \lambda_2 f(a_2^p) + \ldots + \lambda_n f(a_n^p) \\ \Rightarrow \quad & (\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{q}{p}} \leqslant \lambda_1 (a_1^p)^{\frac{q}{p}} + \lambda_2 (a_2^p)^{\frac{q}{p}} + \ldots + \lambda_n (a_n^p)^{\frac{q}{p}} \\ \Rightarrow \quad & (\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{q}{p}} \leqslant \lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \ldots + \lambda_n a_n^q. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{q} > 0$, temos:

$$(\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \ldots + \lambda_n a_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

2º caso: Se $p < q < 0$.

Temos $0 < -q < -p$ Assim, pelo caso anterior, temos:

$$(\lambda_1 x_1^{-q} + \lambda_2 x_2^{-q} + \ldots + \lambda_n x_n^{-q})^{\frac{1}{-q}} \leqslant (\lambda_1 x_1^{-p} + \lambda_2 x_2^{-p} + \ldots + \lambda_n x_n^{-p})^{\frac{1}{-p}}.$$

Fazendo $x_i = \frac{1}{a_i}, i = 1, 2, \ldots, n$, temos:

$$\begin{aligned} & \left[\lambda_1 \left(\frac{1}{a_1}\right)^{-q} + \lambda_2 \left(\frac{1}{a_2}\right)^{-q} + \ldots + \lambda_n \left(\frac{1}{a_n}\right)^{-q}\right]^{\frac{1}{-q}} \\ \leqslant \quad & \left[\lambda_1 \left(\frac{1}{a_1}\right)^{-p} + \lambda_2 \left(\frac{1}{a_2}\right)^{-p} + \ldots + \lambda_n \left(\frac{1}{a_n}\right)^{-p}\right]^{\frac{1}{-p}} \\ \Rightarrow \quad & (\lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \ldots + \lambda_n a_n^q)^{\frac{1}{-q}} \leqslant (\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{1}{-p}}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os membros a $-1 < 0$, temos:

$$(\lambda_1 a_1^p + \lambda_2 a_2^p + \ldots + \lambda_n a_n^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\lambda_1 a_1^q + \lambda_2 a_2^q + \ldots + \lambda_n a_n^q)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Portanto, como $-1 \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant 2$, segue que:

$$MH \leqslant MG \leqslant MA \leqslant MQ.$$

2.7 Aplicações

Exemplo 10. *Entre todos os paralelepípedos com área lateral fixada* A *o de maior volume é o cubo.*

Solução: *A área lateral de um paralelepípedo de lados* a, b *e* c *é dada por* $A_L = 2(ab + ac + bc)$*. Sendo* V *o volume do paralelepípedo e usando a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, temos:*

$$V^2 = ab.ac.bc \leqslant \left[\frac{ab+ac+bc}{3}\right]^3 = \left(\frac{A_L}{6}\right)^3.$$

Assim, o maior volume possível é $V = \sqrt{\left(\frac{A_L}{6}\right)^3} = \sqrt{\left[\frac{ab+ac+bc}{3}\right]^3}$*, obtido quando* $ab = ac = bc$*, consequentemente* $a = b = c$*.*

Exemplo 11. *Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é sempre menor ou igual a metade da hipotenusa. Além disso, a igualdade só ocorre quando o triângulo retângulo é isósceles, ou seja, seus catetos são iguais.*

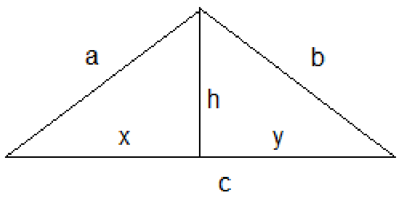

Figura 2.1:

Solução: *Usando a Figura 2.1, temos que a hipotenusa* c *é dada por* $c = x + y$ *e, usando o teorema das alturas para um triângulo retângulo, temos que* $h^2 = x.y$*, logo:*

$$h = \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{c}{2}.$$

Além disso, a igualdade ocorre quando $x = y$*, ou seja, quando os catetos* a *e* b *são iguais.*

Exemplo 12. *Sejam* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *reais positivos,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$*, com* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$*. Se* $a_1^{\lambda_1}.\ldots.a_n^{\lambda_n} = 1$*, então :*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1}.\ldots.\lambda_n^{\lambda_n}}.$$

Solução:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &= \lambda_1.\frac{a_1}{\lambda_1} + \lambda_2.\frac{a_2}{\lambda_2} + \ldots + \lambda_n.\frac{a_n}{\lambda_n} \\ &\geqslant \left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right)^{\lambda_1} + \left(\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^{\lambda_2} + \ldots + \left(\frac{a_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} \\ &= \frac{1}{\lambda_1^{\lambda_1}.\ldots.\lambda_n^{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Observação 8. *Na solução usamos a desigualdade da MG-MA ponderada.*

Exemplo 13. *Se* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *e* $k > p \geqslant 0$*, então:*

$$\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{a_1^p + \ldots + a_n^p} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{k-p}.$$

Solução: *Sendo* $M_k = \left(\dfrac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$*, temos:*

$$\begin{aligned} a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k &= nM_k^k = nM_k^p.M_k^{k-p} \\ \geqslant\ nM_p^p.M_1^{k-p} &= (a_1^p + \ldots + a_n^p).\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{k-p}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{a_1^p + \ldots + a_n^p} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{k-p}.$$

Observação 9. *Na solução, aplicamos a Generalização da desigualdade das médias (2.4).*

Capítulo 3

Normas

Um espaço vetorial real é um conjunto cujos elementos são chamados de vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição e a multiplicação por um número real (escalar). Estas operações devem satisfazer certos requisitos, chamados de axiomas. Uma norma consiste em uma função que associa a cada vetor de um espaço vetorial um número real não-negativo. O conceito de norma está intuitivamente relacionado à noção geométrica de comprimento (generalização de módulo).

Abordaremos neste capítulo a definição de p-norma em $\mathbb{R}^n$, as principais desigualdades: desigualdade de Minkowski, de Young, de Hölder e algumas aplicações.

O assunto abordado nesse capítulo pode ser visto em [7], [8] e [9].

Definição 10. *Seja* $p \geqslant 1$ *um número real. A* p*-norma em* $\mathbb{R}^n$ *é definida por:*

$$\|(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_p = (|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 12. *Sejam* $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $p \geqslant 1$*, então:*

(a) $\|u\|_p \geqslant 0$ *e* $\|u\|_p = 0 \Leftrightarrow u = (0, 0, \ldots, 0)$.

Demonstração. Como $|a_i| \geqslant 0, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então $|a_i|^p \geqslant 0$, e portanto:

$$\|u\|_p = (|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0.$$

E como $|a_i| = 0 \Leftrightarrow a_i = 0, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, então:

$$\|u\|_p = (|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |a_i| = 0, i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ou seja, se, e somente se, $u = (0, 0, \ldots, 0)$. ■

(b) $\|\lambda u\|_p = |\lambda|\|u\|_p$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_p &= \|\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n)\|_p = \|(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)\|_p \\
&= (|\lambda a_1|^p + |\lambda a_2|^p + \ldots + |\lambda a_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p|a_1|^p + |\lambda|^p|a_2|^p + \ldots + |\lambda|^p|a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\lambda|^p(|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p))^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}}(|a_1|^p + |a_2|^p + \ldots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda|\|u\|_p.
\end{aligned}$$

■

3.1 Desigualdade de Minkowski

A Desigualdade de Minkowski estabelece a desigualdade triangular em um espaço vetorial normado. Ela pode ser estabelecida para vetores usando a p-Norma.

Proposição 13 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $u, v \in \mathbb{R}^n$ *e* $p \geqslant 1$*, então:*

$$\|u + v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p. \tag{3.1}$$

Demonstração. Sejam $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Se $p \geqslant 1$, a função dada por $f(x) = |x|^p$ é convexa. Portanto:

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)u + \lambda v\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |(1-\lambda)a_i + \lambda b_i|^p \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda)|a_i|^p + \lambda|b_i|^p \\
&= (1-\lambda)\|u\|_p^p + \lambda\|v\|_p^p, \quad \forall \quad u, v \quad \text{e} \quad \lambda \in [0,1].
\end{aligned}$$

Em particular,

$$\|(1-\lambda)u + \lambda v\|_p^p \leqslant 1, \text{quando} \quad \|u\|_p = \|v\|_p = 1. \tag{3.2}$$

Supondo u, v vetores não nulos, temos que $\dfrac{u}{\|u\|_p}$ e $\dfrac{v}{\|v\|_p}$ são vetores unitários. Assim,

$$\left\| \frac{u+v}{\|u\|_p + \|v\|_p} \right\|_p = \left\| \frac{\|u\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p} \frac{u}{\|u\|_p} + \frac{\|v\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p} \frac{v}{\|v\|_p} \right\|_p.$$

Fazendo $\lambda = \dfrac{\|v\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p}$, temos que $1 - \lambda = \dfrac{\|u\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p}$. Portanto, por (3.2), temos:

$$\left\| \frac{\|u\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p} \frac{u}{\|u\|_p} + \frac{\|v\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p} \frac{v}{\|v\|_p} \right\|_p \leqslant 1.$$

Ou seja,

$$\left\| \frac{u+v}{\|u\|_p + \|v\|_p} \right\|_p \leqslant 1 \Rightarrow \frac{\|u+v\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p} \leqslant 1.$$

Logo,

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Que é a desigualdade (3.1) que queríamos demonstrar. ∎

Definição 11. *Se* $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, *o produto interno usual de* u *e* v *é o número real* $u.v$ *dado por:*

$$u.v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *são as coordenadas de* u *e* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *são as coordenadas de* v *com respeito a um sistema de coordenadas ortonormal.*

Quando $p = 2$ em (3.1), temos a norma Euclidiana usual em $\mathbb{R}^n$, definida por:

$$\|u\| = \sqrt{u.u}.$$

3.2 Desigualdade de Young

Em matemática, a Desigualdade de Young, devida ao matemático Willian Henry Young, é usada para provar a Desigualdade de Hölder (3.4).

Lema 1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $a, b > 0$ *e* $p, q \in (1, \infty)$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *então:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b > 0.$$

Demonstração. Como $ab = e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q}$, devemos mostrar que:

$$e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Como $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, usando o fato que a função exponencial é convexa, por (1.1), temos:

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leqslant \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q}$$
$$\Rightarrow \quad ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

■

Essa desigualdade é importante, pois dela segue, que dados $p, q > 1$ números reais satisfazendo $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ com os a_i e b_i não nulos, com $i = 1, 2, \ldots, n$, tem-se:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q. \tag{3.3}$$

3.3 Desigualdade de Hölder

A Desigualdade de Hölder foi descoberta por Otto Hölder em 1889. É uma desigualdade fundamental em um espaço vetorial normado. Aplicaremos a Desigualdade de Hölder para vetores usando a p-Norma. Quando $p = q = 2$ temos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Proposição 14 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $p, q \in (1, \infty)$ *tal que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*. Então:*

$$|u.v| \leqslant \|u\|_p \|v\|_q. \tag{3.4}$$

Ou seja,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.5}$$

Demonstração. Sejam $A = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ e $B = \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Se $A = 0$, então $a_i = 0, \forall i$ e (3.5) vale trivialmente. Da mesma forma, se $B = 0$, então (3.5) também vale. Podemos então supor que $A > 0$ e $B > 0$. Sejam $x_i = \frac{a_i}{A}$ e $y_i = \frac{b_i}{B}, \forall i$. Temos:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p} = 1.$$

Da mesma forma $\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q = 1$. Logo, pela desigualdade (3.3), $\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.
Assim, de $\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leqslant 1$, segue que $\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_ib_i}{AB}\right| \leqslant 1$, isto é:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leqslant AB. \tag{3.6}$$

Pela Desigualdade de Minkowski (3.1), temos que $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|$. Substituindo essa desigualdade em (3.6), obtemos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \leqslant AB$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Outra demonstração da Desigualdade de Hölder:

Demonstração. Aplicando a Desigualdade Triangular, temos que:

$$|u.v| \leqslant |a_1b_1| + |a_2b_2| + \ldots + |a_nb_n| = |a_1||b_1| + |a_2||b_2| + \ldots + |a_n||b_n|. \tag{3.7}$$

Aplicando a Desigualdade de Young em (3.7), obtemos:

$$|u.v| \leqslant \frac{|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p}{p} + \frac{|b_1|^q + \ldots + |b_n|^q}{q} \leqslant \frac{\|u\|_p^p}{p} + \frac{\|v\|_q^q}{q}. \tag{3.8}$$

Em particular, se $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$ então, em (3.8), obtemos:

$$|u.v| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{3.9}$$

o que prova a Desigualdade de Holder para este caso.
Para o caso geral, podemos supor $u, v \neq 0$. Assim, $\frac{u}{\|u\|_p}$ e $\frac{v}{\|v\|_q}$ são vetores unitários. Portanto, por (3.9), temos:

$$\left|\frac{u}{\|u\|_p}.\frac{v}{\|v\|_q}\right| \leqslant 1.$$

Assim,

$$|u.v| \leqslant \|u\|_p\|v\|_q.$$

■

Quando $p = q = 2$ em (3.4), temos a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|u.v| \leqslant \|u\|_2 \|v\|_2. \tag{3.10}$$

Ou seja, se $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n), v = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, a desigualdade (3.10) se expressa como:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Além disso, a igualdade só ocorrerá se existir um número real λ, tal que $a_i = \lambda b_i$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

3.4 Aplicações

Exemplo 14. *Entre todos os triângulos retângulos de catetos a e b e hipotenusa c fixada, o que tem maior soma dos catetos $s = a + b$ é o triângulo isósceles.*

Solução: *Usando a desigualdade de Cauchy - Schwarz (3.10) temos que:*

$$a + b = a.1 + b.1 \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{1^2 + 1^2} = c\sqrt{2}.$$

E este é máximo quando $a = \lambda.1$ e $b = \lambda.1$, ou seja $a = b$.

Exemplo 15. *Se $a, b, c, x, y, z, n > 0$ e $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$. Então:*

$$\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \geqslant 1.$$

Solução:

$$\begin{aligned} a^n + b^n + c^n &= \left(\frac{a^{n+1}}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \quad x^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{b^{n+1}}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}}.y^{\frac{n}{n+1}} \\ &+ \left(\frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \quad z^{\frac{n}{n+1}}. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Hölder (3.5) na equação acima com $p = \dfrac{n+1}{n}$ e $q = n+1$, obtemos:

$$a^n + b^n + c^n \leqslant \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}}. \quad (x^n + y^n + z^n)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Como $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$, *temos:*

$$a^n + b^n + c^n \leqslant \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}} . \left((a^n + b^n + c^n)^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad a^n + b^n + c^n \leqslant \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}} . \quad (a^n + b^n + c^n).$$

Ou seja,

$$\left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right) \geqslant 1.$$

Exemplo 16. *Se* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n > 0$, *então:*

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{n+1}}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^n} \leqslant \frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \frac{a_2^{n+1}}{b_2^n} + \ldots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}.$$

Solução:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} . \quad b_1^{\frac{n}{n+1}} + \ldots + \left(\frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} . \quad b_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

Usando a Desigualdade de Holder (3.5) com $p = n + 1$ *e* $q = \dfrac{n+1}{n}$, *obtemos:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant \left(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \ldots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} . \quad (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Assim, elevando ambos os membros da desigualdade acima a $n + 1$, *obtemos:*

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^{n+1}}{(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^n} \leqslant \frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \frac{a_2^{n+1}}{b_2^n} + \ldots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n}.$$

Capítulo 4

Problemas de Olimpíadas

A Olimpíada de Matemática é uma disputa entre os jovens de caráter intelectual, é um torneio em que as armas dos participantes são a inteligência, a criatividade, a imaginação e a disciplina mental.

Como nas provas de Olimpíadas de Matemáticas surgem muitos problemas de desigualdades, apresentaremos neste capítulo dez problemas de Olimpíadas envolvendo Funções Convexas, Médias e Normas, com o objetivo de estimular cada vez mais o estudante pelo gosto à Matemática, à curiosidade e a novos desafios.

As resoluções dos problemas resolvidos neste capítulo podem ser encontradas em [2], [4], [10] e [12].

(1) **(Olimpíada Balcânica)** Sejam $n > 1$ e $a_1, \ldots, a_n$ reais positivos com soma 1. Para cada i, seja $b_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$.

Prove que

$$\frac{a_1}{1+b_1} + \frac{a_2}{1+b_2} + \ldots + \frac{a_n}{1+b_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

Solução: Observe que $b_j = 1 - a_j$. Então devemos provar que:

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{2-a_n} \geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

Vamos analisar a convexidade da função $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$. Temos:

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{4}{(2-x)^3}.$$

Portanto, $f''(x) > 0 \quad \text{em} \quad (-\infty, 2)$, sendo convexa nesse intervalo.

Como $a_1 + \ldots + a_n = 1$, f satisfaz a Desigualdade de Jensen (1.3), logo:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}}{2 - \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}} \leqslant \frac{\dfrac{a_1}{2 - a_1} + \dfrac{a_2}{2 - a_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{2 - a_n}}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2n - 1} \leqslant \frac{\dfrac{a_1}{2 - a_1} + \dfrac{a_2}{2 - a_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{2 - a_n}}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1}{2 - a_1} + \frac{a_2}{2 - a_2} + \ldots + \frac{a_n}{2 - a_n} \geqslant \frac{n}{2n - 1}.$$

(2) **(Seleção para IMO 99- Brasil)** Para a, b, c reais positivos satisfazendo $a+b+c = abc$, mostre que $\dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \leqslant \dfrac{3}{2}$, e determine quando a igualdade ocorre.

Solução: Sendo a um real positivo, podemos fazer $a = \text{tg}\alpha, \alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Sabemos que $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$, portanto $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \cos\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Façamos $a = \text{tg}\alpha, b = \text{tg}\beta$ e $c = \text{tg}\gamma$, onde $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Como $a + b + c = abc$, temos:

$$\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta + \text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha.\text{tg}\beta.\text{tg}\gamma. \tag{4.1}$$

Como $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha}} = \cos\alpha, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, então o que devemos mostrar agora é que:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}, \alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{4.2}$$

Mas de (4.1) vem que $\text{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$ (use a fórmula da tangente da soma de três termos).

Logo, como $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, temos que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Como a função cosseno é estritamente côncava no intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, temos por (1.2) que:

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3} \leqslant \cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, temos a desigualdade (4.2) desejada. Ocorrendo a igualdade se, e somente se,

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Ou seja, se, e somente se, $a = b = c = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

(3) **(IMO 95/2)** Para reais positivos satisfazendo $abc = 1$, mostre que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Solução: Façamos $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ e $z = \frac{1}{c}$. Da igualdade $abc = 1$, obtemos $xyz = 1$. Fazendo as devidas substituições devemos mostrar que:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{4.3}$$

Consideremos a função convexa $f(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$, por Jensen (1.3), temos:

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{x}{x+y+z} \cdot \frac{y+z}{x} + \frac{y}{x+y+z} \cdot \frac{x+z}{y} + \frac{z}{x+y+z} \cdot \frac{x+y}{z}\right) \\ & \leqslant \frac{x}{x+y+z} f\left(\frac{y+z}{x}\right) + \frac{y}{x+y+z} f\left(\frac{x+z}{y}\right) + \frac{z}{x+y+z} f\left(\frac{x+y}{z}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $x+y+z > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} & (x+y+z) \quad f\left(\frac{y+z+x+z+x+y}{x+y+z}\right) \leqslant \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \\ & \Rightarrow \quad \frac{x+y+z}{2} \leqslant \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}. \end{aligned}$$

Como pela desigualdade MG-MA (2.1), $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz} = 3$, obtemos a desigualdade desejada (4.3).

(4) **(IMO 2008)** Sejam a, b, c, d reais positivos tais que $abcd = 1$ e $a+b+c+d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$. Prove que:

$$a+b+c+d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Solução:

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{a}{d}} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d}\right);$$

$$b = \sqrt[4]{\frac{b^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{b}{c}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{b}{a}} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{b}{a}\right);$$

$$c = \sqrt[4]{\frac{c^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{c}{d}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}.\frac{c}{b}} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b}\right);$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{d^4}{abcd}} = \sqrt[4]{\frac{d}{a}.\frac{d}{a}.\frac{a}{b}.\frac{d}{c}} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{d}{a} + \frac{d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c}\right).$$

Somando as quatro inequações acima, obtemos:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{3a}{b} + \frac{3b}{c} + \frac{3c}{d} + \frac{3d}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right) \\ &\leqslant \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right). \end{aligned}$$

Como por hipótese $a+b+c+d > \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$, temos:

$$a+b+c+d < \frac{3}{4}(a+b+c+d) + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}\right).$$

Portanto,

$$a+b+c+d < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

(5) **(OBM-PRIMEIRA FASE-NÍVEL UNIVERSITÁRIO-2010)** Há muito tempo em uma galáxia muito distante, utilizavam-se como referência para viagens espaciais os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, vértices de um cubo de ares igual a um ano-luz tendo os quadrados $ABCD$ e $EFGH$ como faces e tendo os segmentos AE, BF, CG e DH como arestas. Uma nave espacial viaja com velocidade constante em trajetória retilínea de B para C. Outra nave viaja com velocidade constante igual ao triplo da velocidade da primeira, em trajetória retilínea de A para G. Sabendo que a primeira atinge o ponto C no mesmo instante em que a segunda atinge o ponto G, determine a menor distância entre as naves durante esse deslocamento.

Solução: Consideremos os pontos $A = (0,0,0), B = (1,0,0), C = (1,1,0), D = (0,1,0), E = (0,0,1), F = (1,0,1), G = (1,1,1), H = (0,1,1)$. Portanto, as posições (em função do tempo) das duas naves são:

$$\alpha(t) = (1,0,0) + t(0,1,0);$$

$$\beta(t) = (1,0,0) + \sqrt{3}t(1,1,1,).$$

Assim, o quadrado da distância em função do tempo é:

$$\begin{aligned} h(t) &= 3t^2 + (4-2\sqrt{3})t^2 + 1 + 2\sqrt{3}t + 3t^2 \\ &= (10-2\sqrt{3})t^2 + 2\sqrt{3}t + 1. \end{aligned}$$

Como $h'(t) = (20-4\sqrt{3}t) + 2\sqrt{3}$ e $h''(t) = 20-4\sqrt{3} > 0$, temos que o quadrado da distância é uma função convexa, sendo o seu mínimo global em $t_0 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{20-4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-10} = -\dfrac{3+5\sqrt{3}}{44}$.

Assim, o mínimo do quadrado da distância é:

$$h(t_0) = \frac{29-3\sqrt{3}}{44} \approx 0,541.$$

E a distância mínima é:

$$\sqrt{\frac{29-3\sqrt{3}}{44}} \approx 0,7355.$$

Observação: Como $h(t)$ é uma função quadrática com $a > 0$, tem-se que o mínimo global ocorre no ponto $(x,y) = (x_v, y_v)$, onde:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} = \frac{-2\sqrt{3}}{2(10-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{(2\sqrt{3}-10)}; \\ y_v &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a} = \sqrt{\frac{29-3\sqrt{3}}{44}}. \end{aligned}$$

(6) **(VIETNAN)** Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos tal que:

$$\frac{1}{x_1+2013} + \frac{1}{x_2+2013} + \ldots + \frac{1}{x_n+2013} = \frac{1}{2013}.$$

Prove que:

$$\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}{n-1} \geqslant 2013. \tag{4.4}$$

Solução: Seja $y_i = \dfrac{1}{x_i + 2013}$. Assim, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{2013}$ e $x_i = \dfrac{1}{y_i} - 2013$.
Temos:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i} - 2013\right) = e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{y_i}-2013\right)}.$$

Assim, para minimizar o produto dos x_i, é equivalente minimizar a soma dos $\ln\left(\dfrac{1}{y_i} - 2013\right)$.

Temos que:

$$\frac{d}{dy}\left(\ln\left(\frac{1}{y} - 2013\right)\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - 2013\right)}.\frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{(1-2013y)y} = \frac{-1}{y - 2013y^2};$$

$$\frac{d^2}{dy^2} = \frac{1}{(y-2013y^2)^2}.(1-4026y) = \frac{1-4026y}{(y-2013y^2)^2}.$$

Então, $f(y) = \ln\left(\dfrac{1}{y} - 2013\right)$ é convexa em $\left[0, \dfrac{1}{4026}\right]$.

Assim, se $0 \leqslant y_i \leqslant \dfrac{1}{4026}$, podemos aplicar Jensen (1.3). Temos:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right) &\leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{y_1} - 2013\right) + \ldots + \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{y_n} - 2013\right) \\ &= \ln\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i} - 2013\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2013n}\right) &\leqslant \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow \quad \ln(2013n - 2013) &\leqslant \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow \quad 2013(n-1) &\leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\frac{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}}{n-1} \geqslant 2013.
$$

Que está de acordo com a desigualdade (4.4).

Observação: Podemos sempre considerar, $0 \leqslant y_i \leqslant \frac{1}{4026}$, pois para quaisquer i, j tem-se $y_i + y_j \leqslant \frac{1}{2013}$. Assim:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a} - 2013\right)\left(\frac{1}{b} - 2013\right) \geqslant \left(\frac{2}{a+b} - 2013\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{ab} - 2013\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant \frac{4}{(a+b)^2} - \frac{4.2013}{a+b} \\
\Leftrightarrow \quad & (a+b)^2 - 2013(a+b)^3 \geqslant 4ab - 4ab(a+b).2013 \\
\Leftrightarrow \quad & (a-b)^2 \geqslant 2013(a+b)(a-b)^2.
\end{aligned}
$$

Que é válido quando $a + b \leqslant \frac{1}{2013}$.

Conclusão: Quaisquer y_i, y_j pode ser definido para sua média, enquanto a soma é minimizada.

Portanto, podemos supor $0 \leqslant y_i \leqslant \frac{1}{4026}$.

(7) **(IMO 99)** Seja $n \geqslant 2$ um inteiro positivo fixado, encontre a menor constante C tal que para todos reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tem-se:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4.$$

Solução:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right)^2.$$

Usando a desigualdade (MG-MA) (2.1), temos:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^4 &\geqslant 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j\right) \\ &= 8 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \sum_{i=1}^{n} x_k^2.\end{aligned}$$

Mas $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_i^2 + x_j^2$, com igualdade se $x_k = 0$ para todo $k \neq i, j$. Daí resulta que:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^4 \geqslant 8 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

Portanto,

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^4.$$

Resposta: $C = \dfrac{1}{8}$.

(8) **(OBM-PRIMEIRA FASE-NÍVEL UNIVERSITÁRIO-2009)**

(a) Encontre o valor mínimo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{\frac{x}{e}} - x$.

Solução: Temos $f'(x) = \dfrac{1}{e} e^{\frac{x}{e}} - 1$ e $f''(x) = \dfrac{1}{e^2} e^{\frac{x}{e}}$. Como $f''(x) > 0$, temos que f é uma função convexa, portanto seu mínimo é global no ponto onde $f'(x) = 0$. Ou seja,

$$\frac{1}{e} e^{\frac{x}{e}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{x}{e}} = e \Rightarrow \frac{x}{e} = 1 \Rightarrow x = e.$$

Logo, o valor mínimo da função é dado por $f(e) = e^{\frac{e}{e}} - e = 0$.

(b) Qual desses números é maior e^{π} ou π^{e}?

Solução: Como o valor mínimo da função é igual a zero, temos que $f(\pi) > 0$, ou seja:

$$e^{\frac{\pi}{e}} - \pi > 0 \Rightarrow e^{\frac{\pi}{e}} > \pi.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade acima por $e > o$, obtemos:

$$e^{\pi} > \pi^{e}.$$

(9) **(IMO-2009)** Sejam a, b, c reais positivos tal que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Prove que:

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

Solução: É o mesmo que provarmos que:

$$\frac{(a+b+c)^2}{(2a+b+c)^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(2b+c+a)^2} + \frac{(a+b+c)^2}{(2c+a+b)^2} \leqslant \frac{3}{16}(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Para todo real positivo a, b, c.

Podemos supor sem perca de generalidade que $a + b + c = 1$. Assim, o problema é equivalente a provar que para todo $a, b, c > 0$ a desigualdade:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \leqslant \frac{3}{16}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \tag{4.5}$$

Considerando a função convexa $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, temos $f'(x) = \frac{-x^2+1}{(1+x)^4}$ e $f''(x) = \frac{2(x-2)}{(1+x)^4}$. Assim, $f(x)$ é côncava no intervalo $[0, 2]$ e portanto $f(x)$ é côncava para $0 \leqslant x \leqslant 1$. Pela Desigualdade de Jensen, temos que:

$$f\left(\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}\right) \geqslant \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} f(a) + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma} f(b) + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} f(c)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha f(a) + \beta f(b) + \gamma f(c) \leqslant (\alpha+\beta+\gamma) f(A), \quad \text{onde} \quad A = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Fazendo $\alpha = \frac{1}{a}, \beta = \frac{1}{b}$ e $\gamma = \frac{1}{c}$, temos:

$$\frac{1}{a} f(a) + \frac{1}{b} f(b) + \frac{1}{c} f(c) \leqslant (\alpha+\beta+\gamma) \frac{A}{(1+A)^2}, \quad \text{onde} \quad A = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}. \tag{4.6}$$

Aplicando a desigualdade média harmônica e aritmética, temos que:

$$A = \frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, em (4.6) temos:

$$\frac{1}{a}f(a)+\frac{1}{b}f(b)+\frac{1}{c}f(c) \leqslant (\alpha+\beta+\gamma)\frac{\dfrac{1}{3}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2} \leqslant \frac{3}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Que é a desigualdade (4.5) que queríamos demonstrar.

(10) **(IMO 2008)** Prove que para quaisquer reais positivos a, b, c, d:

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}+\frac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}+\frac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}+\frac{(d-a)(d-b)}{d+a+b} \geqslant 0. \quad (4.7)$$

Solução: Sejam $A = \dfrac{(a-b)(a-c)}{a+b+c}$, $B = \dfrac{(b-c)(b-d)}{b+c+d}$, $C = \dfrac{(c-d)(c-a)}{c+d+a}$ e $D = \dfrac{(d-a)(d-b)}{d+a+b}$.

Podemos obter as expressões:

- $2A = A_1 + A_2$, onde $A_1 = \dfrac{(a-c)^2}{a+b+c}$ e $A_2 = \dfrac{(a-c)(a-2b+c)}{a+b+c}$;
- $2B = B_1 + B_2$, onde $B_1 = \dfrac{(b-d)^2}{b+c+d}$ e $B_2 = \dfrac{(b-d)(b-2c+d)}{b+c+d}$;
- $2C = C_1 + C_2$, onde $C_1 = \dfrac{(c-a)^2}{c+d+a}$ e $C_2 = \dfrac{(c-a)(c-2d+a)}{c+d+a}$;
- $2D = D_1 + D_2$, onde $D_1 = \dfrac{(d-b)^2}{d+a+b}$ e $D_2 = \dfrac{(d-b)(d-2a+b)}{d+a+b}$.

Fazendo $s = a+b+c+d$, temos:

$$A_1+B_1+C_1+D_1 = \frac{(a-c)^2}{s-d}+\frac{(b-d)^2}{s-a}+\frac{(c-a)^2}{s-b}+\frac{(d-b)^2}{s-c}.$$

Por Cauchy-Schwarz (3.10), temos:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{|a-c|}{\sqrt{s-d}}\sqrt{s-d}+\frac{|b-d|}{\sqrt{s-a}}\sqrt{s-a}+\frac{|c-a|}{\sqrt{s-b}}\sqrt{s-b}+\frac{|d-b|}{\sqrt{s-c}}\sqrt{s-c}\right)^2 \\
\leqslant\ &\left(\frac{(a-c)^2}{s-d}+\frac{(b-d)^2}{s-a}+\frac{(c-a)^2}{s-b}+\frac{(d-b)^2}{s-c}\right) \ . \ 3s \\
=\ &3s(A_1+B_1+C_1+D_1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 \geqslant \frac{(2|a-c| + 2|b-d|)^2}{3s}.$$

Usando a desigualdade MG-MA (2.1), obtemos:

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 \geqslant \frac{16|a-c||b-d|}{3s}. \tag{4.8}$$

Agora vamos calcular $A_2 + C_2$:

$$\begin{aligned}
A_2 + C_2 &= \frac{(a-c)(a+c-2b)}{a+b+c} + \frac{(c-a)(c-2d+a)}{c+d+a} \\
&= \frac{(a-c)(a+c-2b)(s-b) + (c-a)(c+a-2d)(s-d)}{(s-d)(s-b)} \\
&= \frac{(a-c)((a+c-2b)(s-b) - (c+a-2d)(s-d))}{(s-d)(s-b)} \\
&= \frac{(a-c)[(-2b)(s-b) - b(a+c) - 2d(s-d) + d(a+c)]}{s(a+c)+bd} \\
&= \frac{3(a-c)(d-b)(a+c)}{s(a+c)+bd}.
\end{aligned}$$

De forma análoga, obtemos:

$$B_2 + D_2 = \frac{3(b-d)(a-c)(b+d)}{s(b+d)+ca}. \tag{4.9}$$

Portanto, de (4.8) e (4.9), obtemos:

$$\begin{aligned}
&A_2 + B_2 + C_2 + D_2 \\
&= 3(a-c)(b-d)\left[\frac{b+d}{s(b+d)+ca} - \frac{a+c}{s(a+c)+bd}\right] \\
&= \frac{(b+d)(s(a+c)+bd) - (a+c)(s(b+d)+ca)}{(s(b+d)+ca)(s(a+c)+bd)} \\
&= \frac{3(a-c)(b-d)(bd(b+d) - ac(a+c))}{(s(b+d)+ca)(s(a+c)+bd)}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
[s(b+d)+ca][s(a+c)+bd] &\geqslant [ac(a+c)+bd(b+d)]s \\
&\geqslant |[bd(b+d) - ac(a+c)]|s.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Portanto de (4.10) e (4.11) obtemos a desigualdade:

$$|A_2 + B_2 + C_2 + D_2| \leqslant \frac{3|a-c||b-d|}{s}. \tag{4.12}$$

Combinando (4.12) com (4.8), temos:

$$\begin{aligned}2(A+B+C+D) &\geqslant \frac{16|a-c||b-d|}{3s} - \frac{3|a-c||b-d|}{s}\\ &\geqslant \frac{7|a-c||b-d|}{3s}.\end{aligned}$$

Assim,

$$(A+B+C+D) \geqslant \frac{7|a-c||b-d|}{6s}.$$

Portanto,

$$A+B+C+D \geqslant 0.$$

que é justamente a desigualdade (4.7) que queríamos demonstrar.

Capítulo 5

Considerações Finais

Esta dissertação é bastante apropriada a alunos de matemática que gostam de desafios e, sobretudo, procuram algum incentivo para a realização das provas das Olimpíadas de Matemática. Nela, foi apresentada de maneira objetiva e detalhada o estudo de funções convexas em uma variável real, médias e normas. Ela pode ser um incentivo a esses estudantes e também aos professores de Ensino Médio, para que possam estar bem preparados e bem motivados ao ensino de boa qualidade.

Sabendo-se que o desenvolvimento e a facilidade na resolução de questões acontecem com a prática sucessiva e com a devida dedicação, ilustramos este trabalho com vários problemas de olimpíadas, em todos os níveis de dificuldade, acompanhados da devida resolução.

Referências Bibliográficas

[1] Caminha, Antônio Muniz Neto. - *Volume 3.* 1ª Edição, SBM- Sociedade Brasileira de Matemática,Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

[2] Caminha, Antônio Muniz Neto. - *Desigualdades Elementares.* SBM- Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Professor de Matemática, Revista Eureka 5, p. 34-49, Rio de Janeiro, 2012.

[3] Figuereido, Djairo Guedes de - *Análise I.* 2ª Edição, LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1996.

[4] Fonteles, Rafael Tajra. - *Trigonometria e Desigualdades em Problemas de Olimpíadas.* SBM- Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Professor de Matemática, Revista Eureka 11, p.24- 33.

[5] Krerley, Irraciel Martins Oliveira e Adán José Corcho Fernández - *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 1ª Edição, SBM, Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Olimpíadas de Matemática, Rio de Janeiro, 2010.

[6] Lima, Elon Lages. - *Curso de Análise, volume 1.* 12ª Edição, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2009.

[7] *Convexity, Inequalities, and Norms.* Disponível em <http://math.bard.edu//belk/math461/Inequalities.pdf>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[8] *Funções Convexas.* Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/ brietzke/conv/conv.html>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[9] Bjorn Poonen. - *Inequalities.* Disponível em <http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/ps0506/inequalities.pdf>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[10] Mildorf,Thomas J. - *Olympiad Inequalities*. December 22,2005. Disponível em <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/MildorfInequalities.pdf>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[11] International Mathematical Olympiad. Disponível em <http://www.imo-official.org/problems.aspx>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[12] Olimpíada Brasileira de Matemática. Disponível em <http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos/>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[13] *O que é a Olimpíada de Matemática?*. Disponível em <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/corpo_o_que_e.html>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[14] <http://www.obmep.org.br/apresentacao.html>. Acesso em 26 de julho de 2013.

[15] <http://www.augustinhobrandao.net.br/2012/03/professor-amaral-representa-os_02.html>. Acesso em 26 de julho de 2013.