UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

ROSANGELA MALAGUTI

Razões Trigonométricas: Dos triângulos à circunferência – Estratégias de ensino

Presidente Prudente
2019

ROSANGELA MALAGUTI

Razões Trigonométricas: Dos triângulos à circunferência – Estratégias de ensino

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Presidente Prudente.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Rodrigues

Presidente Prudente
2019

M236r

Malaguti, Rosangela

Razões Trigonométricas: dos triângulos à circunferência – Estratégias de ensino/ Rosangela Malaguti. Presidente Prudente, 2019.

91 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente.

Orientador: José Carlos Rodrigues.

1. Matemática. 2. Trigonometria. 3. Material Manipulável. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ROSANGELA MALAGUTI

Razões Trigonométricas: Dos triângulos à circunferência – Estratégias de ensino

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional, junto ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Carlos Rodrigues
UNESP – Campus de Presidente Prudente
Orientador

Profª. Drª. Cristiane Nespoli de Oliveira
UNESP – Campus de Presidente Prudente

Profª. Drª. Larissa Ferreira Marques
UTFPR – Campus de Cornélio Procópio - Paraná

Presidente Prudente
14 de outubro de 2019

Àqueles que me apoiaram na construção do conhecimento,
enquanto alguns se dedicavam a dizer que eu não seria capaz.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, meu criador, pela graça de me permitir concretizar mais essa realização.

Ao meu esposo Luís Claudio pelo companheirismo e por compartilhar desse sonho me apoiando nas horas difíceis, pelo incentivo, pelas broncas e pela preocupação, sendo paciente nas longas horas de estudo, não me deixado desistir.

Aos meus filhos Paulo, Beatriz e Rodrigo, pela compreensão da minha ausência, dos finais de semana, feriados e férias não vividas ao longo de todo o período de estudo, sempre me apoiando incondicionalmente.

A minha mãe e irmãos que são a base da minha vida, por todo incentivo, obrigado por me apoiarem nessa caminhada, e por tudo que representam para mim.

Aos amigos do PROFMAT pelos bons momentos de convivência e pela amizade que certamente ficará para o resto da vida, em especial a amiga Camila Tolin, companheira de viagem, pelas horas de estudo, e por todas as informações compartilhadas conosco.

Aos professores do PROFMAT que ministraram as aulas durante os quatro semestres, pelas valiosas contribuições ao meu crescimento e amadurecimento, em especial ao professor Doutor Suetônio Meira, coordenador do curso, pelo apoio e orientações.

Ao professor Doutor José Carlos Rodrigues, que pacientemente me orientou neste trabalho, me ajudando a superar as dificuldades e esclarecendo de maneira clara e objetiva todas as dúvidas, por compartilhar seu conhecimento, e exemplo profissional que representa.

Ao Ibilce, pelo apoio acadêmico que abriu os caminhos para essa conquista.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro que me permitiu mais essa conquista.

E a todas as demais pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram nessa caminhada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Muito Obrigada!

“A Matemática é como um moinho de café que mói admiravelmente o que se lhe dá para moer, mas não devolve outra coisa senão o que se lhe deu.”

(Faraday)

RESUMO

O estudo da Matemática, em especial da trigonometria é de suma importância para o desenvolvimento das ciências desde os primórdios dos tempos. Nesse trabalho abordamos o estudo das razões trigonométricas do triângulo retângulo até o círculo trigonométrico.

Em análise feita na proposta curricular do Estado de São Paulo, detectamos a necessidade de novas abordagens de ensino que venham melhorar a qualidade deste nas salas de aula das escolas públicas, tornando o estudo do tema mais prazeroso e atrativo.

O cenário presente na maioria das escolas públicas, destaca a falta de professor e o desinteresse dos alunos pela matemática, fatores que agravam a defasagem de conteúdo em relação ao ano/série que estão cursando.

Diante desse cenário, apresentamos neste trabalho uma Sequência Didática que prevê a construção de materiais pedagógicos confeccionados pelos próprios alunos que permitam dinamizar as aulas, melhorando o estudo da trigonometria e oportunizando aos alunos à construção do próprio conhecimento, despertando mais interesse pelas aulas.

A Sequência didática foi testada em uma turma da 2ª série de Ensino Médio de uma escola pública de área rural na cidade de Caiuá, São Paulo, utilizando os materiais em sala de aula e analisando os resultados obtidos.

A proposta deste estudo é encontrar opção que viabilize o ensino do tema, otimizando o tempo de ensino, trabalhando estratégias como o uso de materiais concretos e ao final das atividades concluir que a aplicação dessas estratégias irão contribuir com a melhora do processo ensino aprendizagem, em especial da trigonometria e consequentemente da matemática nas salas de aula.

Palavras Chaves: Matemática, Trigonometria, Material Manipulável.

ABSTRACT

The study of mathematics, especially trigonometry, is of paramount importance for the development of science since the dawn of time. In this paper we will study the trigonometric ratios of the rectangle triangle to the trigonometric circle. In an analysis made in the curricular proposal of the State of São Paulo, we detected the need for new teaching approaches that will improve its quality in public school classrooms, making the study of the subject more pleasant and attractive.

The scenario that exists in most public schools, is the lack of teacher and students' lack of interest in mathematics, factors that aggravate the mismatch of content in relation to the year / grade they are attending. Given this scenario, we present in this paper some proposals to improve the study of the theme and two materials made, with the help of students, to streamline the classes, giving students the opportunity to seek their own knowledge, arousing more interest in the classes.

The applicability was tested in a high school 2nd grade class of a rural public school in the city of Caiuá, São Paulo, using the materials in the classroom and analyzing the results obtained.

The purpose of this study is to find an option that enables the teaching of the subject, optimizing the teaching time, as well as working new approaches with the use of concrete subjects and at the end of the activities conclude that the use of these approaches may contribute to the improvement of the teaching process. learning, especially trigonometry and therefore mathematics in the classroom.

Keywords: Mathematics, Trigonometry, Manipulable Material.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
cos	cosseno
cossec	cossecante
cotg	cotangente
DNIT	Departamento Nacional de Infraestrutura de Transporte
D.O.U	Diário Oficial da União
E.F	Ensino Fundamental
E.M	Ensino Médio
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IDESP	Índice de desenvolvimento da Educação do estado de São Paulo
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
R.I	Recuperação Intensiva
rad	radianos
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do estado de São Paulo
SEESP	Secretaria da Educação do estado de São Paulo
sen	seno
tg	tangente

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A trigonometria é o ramo da Matemática que estuda as relações entre a medida dos lados e ângulos de um triângulo. O ensino deste conceito encontra algumas dificuldades. Uma delas é que a trigonometria é abordada de maneira superficial, dando maior ênfase ao cálculo de razões e proporções, às fórmulas e aos cálculos algébricos no lugar de apresentar aplicações e conceitos que tenham significado para o aluno, o que causa aversão e desinteresse na aprendizagem desse conteúdo.

Outra dificuldade é que grande parte dos professores que atuam na rede pública do estado de São Paulo, apresentam uma sequela em sua formação acadêmica, pois o ensino dos conceitos abordados na trigonometria exige um conhecimento mais aprofundado de determinados conteúdos, o que não é geralmente oferecido no ensino superior. Em consequência, o tema é simplificado ou às vezes até subtraído do conteúdo do currículo.

Uma prática observada é que devido a essa dificuldade os docentes evitam ter aulas atribuídas na segunda série do Ensino Médio, onde há maior incidência desse conteúdo, sendo muito comum a abordagem superficial do tema, deixando uma grande lacuna no aprendizado.

A trigonometria exerce papel fundamental tanto na resolução de problemas de matemática como também de diversas áreas das demais ciências, por exemplo, na física, na geografia, na cartografia, na astronomia, na medicina entre outras.

Segundo Masseto, 2010, o professor deve estimular o aluno na buscar de informações,

> Atualmente o professor assume um papel muito importante e duradouro juntos aos seus alunos no que diz respeito ao conhecimento: colaborar para que o aluno aprenda a buscar informações, detectar as fontes atuais dessas informações, dominar o caminho para acessá-las, aprender a selecioná-las, compará-las, criticá-las, integrá-las ao seu mundo intelectual. (MASETTO, 2010, p.68)

Freire, 1979, diz que “a ação docente é a base de uma boa formação escolar e contribui para a construção de uma sociedade pensante”, dessa forma, o professor deve exercer papel mediador na busca do aluno pelo conhecimento, desenvolvendo estratégias facilitadoras, utilizando material concreto e tecnológico, trazendo significado a processo de aprendizagem, em especial da trigonometria, sem que se perca, no entanto, a formalidade dos conceitos abordados.

Diante dessa problemática, nos questionamos se o uso de tecnologia através de softwares, simuladores e sites interativos, ou de materiais concretos e jogos, poderão tornar o estudo desse tema mais atraente facilitando seu aprendizado, despertando nos estudantes maior interesse.

Neste trabalho foram abordados os conceitos trigonométricos básicos, como a trigonometria do triângulo retângulo e a trigonometria no círculo de raio unitário, dando ênfase para a simetria existente no círculo trigonométrico e para as razões básicas - seno, cosseno e tangente, procurando encontrar um facilitador para o aprendizado, o que acreditamos ser a base para a compreensão das funções e das equações trigonométricas.

Mostraremos a importância de uma abordagem mais dinâmica e contextualizada da trigonometria no círculo de raio unitário, investigando a aplicação de alguns materiais que foram confeccionados pelos alunos e utilizados em sala de aula, e o impacto dessa aplicação sobre o aprendizado dos alunos.

Inicialmente apresentamos um contexto histórico enfocando os avanços no estudo da trigonometria, os principais povos que se utilizaram dela e suas evoluções, evidenciando sua importância no processo de desenvolvimento da Matemática, e da humanidade.

Em seguida, abordarmos a importância do estudo da trigonometria segundo documentos oficiais, PCN (Parâmetros Curriculares Nacional) de Matemática do Ensino Médio, Currículo do Estado de São Paulo, BNCC (Base Nacional Comum Curricular), e algumas habilidades que envolvem a trigonometria presentes em provas externas que avaliam o nível de aprendizado dos estudantes de acordo com as competências e habilidades propostas para cada nível de ensino, tais como SARESP(Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do estado de São Paulo), o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

Como a Sequência Didática foi desenvolvida em uma escola estadual de São Paulo, o estudo das Razões Trigonométricas e Círculo Unitário, será embasado na proposta do Currículo do Estado de São Paulo, do triangulo retângulo, arcos e ângulos até as razões trigonométricas dentro do círculo trigonométrico, procurando mostrar métodos facilitadores para a aplicação do tema.

Apresentamos nesse trabalho alguns materiais que foram confeccionados pelos alunos, e utilizados na sala de aula para introdução e desenvolvimento do tema, objetivando melhor entendimento pelos alunos, sendo esses materiais de fácil confecção e manuseio.

Destacamos o uso do geoplano circular e o da circunferência trigonométrica manipulável como facilitadores do processo de ensino e aprendizado do tema.

O ensino da matemática, em especial da trigonometria não deve se resumir à mera memorização de fórmulas e reprodução de exercícios. Deve possibilitar a investigação, trazer significados e contextualização. Neste contexto o uso de material concreto e manipulável é uma estratégia que pode tornar a aula mais significativa e interessante, quebrando o tradicionalismo.

Analisamos uma turma da 2ª Série do Ensino Médio de uma escola pertencente a área rural, composta por 12 alunos, que apresentam grande defasagem de conteúdo e desinteresse pelo aprendizado da matemática.

Dois terços são alunos oriundos de R.I (recuperação intensiva), sendo que destes, um terço passou por correção de ciclo. Uma turma de R.I, apresenta dificuldades de aprendizagem e defasagem escolares, essa recuperação é adotada no Ensino Fundamental II (entre o 6º e 9º anos), sendo desenvolvidas nessas salas atividades diferenciadas e específicas. A correção de ciclo é feita geralmente no 6º e no 9º ano do Ensino Fundamental II, e consiste em repetir uma única vez, um ou os dois anos citados.

A escola tem boa estrutura física, com laboratório de informática contendo 20 computadores ligados a rede de internet, sala de leitura com um diversificado acervo de livros, laboratório de ciências bem equipado, e laboratório de matemática com jogos pedagógicos e mente inovadora MindLab. Além disso, possui uma sala de materiais pedagógicos, uma sala para o grêmio estudantil e refeitório. As salas de aula são climatizadas, assim como todos os espaços descritos acima. A área externa que engloba o pátio e a quadra esportiva é bem ampla, com um espaço gramado, proporcionando ao aluno um ambiente agradável e bastante favorável para o convívio e o aprendizado.

Apesar de ter uma boa estrutura, até 2018, a parte pedagógica foi bastante prejudicada pela falta e grande rotatividade de professores, o que colaborou para o aumento da defasagem e das dificuldades dos alunos.

A aplicação desse material, através de atividades investigativas mostrou que os resultados obtidos com o uso dessas ferramentas foram bastante significativos para o processo de ensino aprendizagem do tema.

2 HISTÓRIA

A Matemática é uma ciência estudada desde o início dos tempos, e o avanço dos estudos realizados por várias civilizações, propiciaram à humanidade o desenvolvimento de conceitos e teoremas que conhecemos hoje, sendo responsável pelo avanço tecnológico em várias áreas do conhecimento.

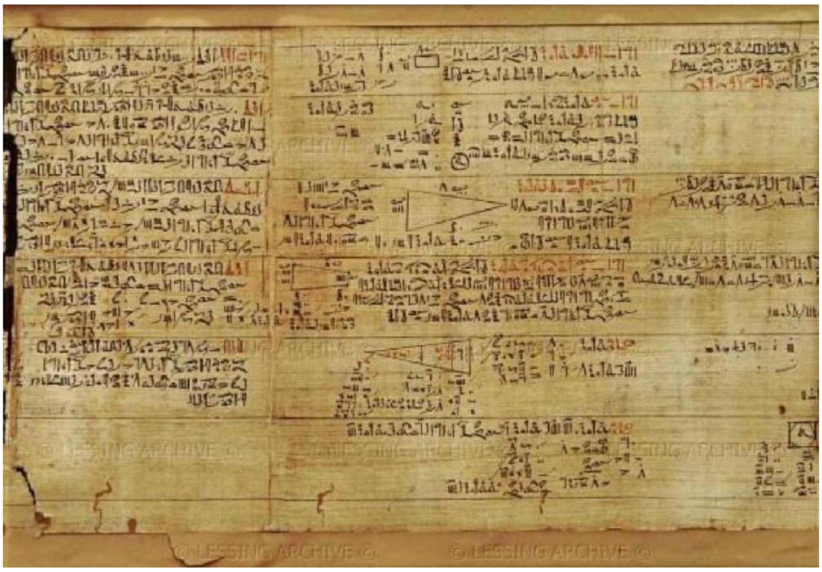
O estudo da história da matemática, em particular o da trigonometria, não só permite um entendimento mais concreto da própria matemática, como dá origem a um grande acervo cultural de vários povos, principalmente dos egípcios, babilônicos, hindus e árabes.

Segundo Kennedy (1992), a trigonometria desenvolveu-se pela forte necessidade por técnicas práticas que resolvessem problemas cotidianos ligados a cálculos astronômicos, de agrimensura e de navegação.

Os primeiros estudos da trigonometria envolviam a função da corda de um arco de um círculo arbitrário, onde sequências numéricas eram relacionadas com o comprimento das sombras em determinada hora do dia. Posteriormente, aproximadamente no século II, essa função tornou-se as variações do seno. Mas somente nas proximidades do século IX a função seno e a antiga função corda que envolvia a tangente, secante e cotangente, foram tabuladas em sexagenárias. Assim surgia a trigonometria que estudava o triângulo no plano ou na esfera, seus lados e ângulos.

Segundo Reis (2016), a contribuição dos egípcios se deu a partir da revolução agrícola, como marco para o início da trigonometria. Nesse período, surgiu a necessidade de o homem medir suas terras, fixar propriedades, plantar, quantificar os números de seus trabalhadores. Para isso precisavam de profissionais qualificados, surgindo assim, os escribas. Aahmesu (filho da lua), um dos primeiros escribas registrado na história, ficou conhecido como Ahmes, responsável por escrever um dos textos matemáticos mais antigos da história da matemática, o famoso Papiro de Ahmes, conhecido também por Papiro de Rhind.

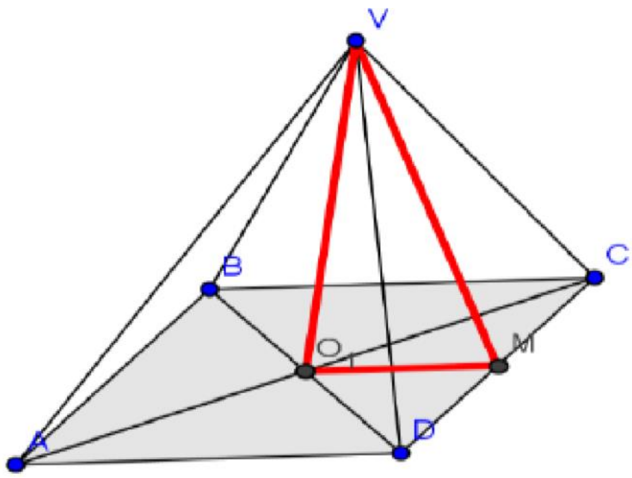
Figura 1: O papiro de Rind.



Fonte: Reis (2016)

O documento, ilustrado na figura 1, data de aproximadamente 1650 a.C. e apresenta cerca de 85 problemas, dos quais 4 apresentam conceitos ligados à trigonometria. A palavra seqt, é mencionada, sendo possível concluir que o seqt de uma pirâmide equivaleria a cotangente de um ângulo, o que pode ser observado na figura 2. Seqt seria a razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto.

Figura 2: Seqt egípcios.



. Fonte: Reis (2016)

Segundo Reis (2016), os egípcios utilizaram esse modelo para construir as pirâmides, pois era necessário manter a mesma inclinação para todas as faces. Se por exemplo $OV = 30\ e\ OM = 60$, então, $seqt = \frac{OM}{OV} = \frac{60}{30} = 2$. Sendo assim pode-se concluir que por volta de 2600 a.C. esses conceitos já eram utilizados na construção das pirâmides egípcias.

Figura 3:Pirâmides de Guisê. Foto Waj/Shutterstpck.com.

Fonte: www.infoescola.com – último acesso em 23/02/2019

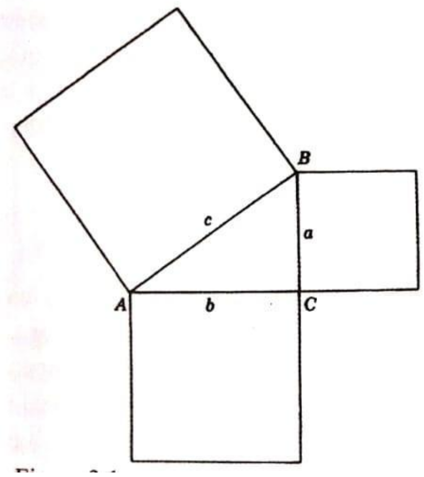
Segundo Boyer (2010, pág.24), uma tábua do período babilônico (1900 a 1600 a.C.) conhecida como Plimpton 322, ilustrada na figura 4, que faz parte da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Columbia, catalogada sob o nº 322, contém representações de termos pitagóricos primitivos.

Figura 4: Plimpton 322.

Fonte: Boyer 2010, pág.24

A figura 5, ilustra um possível significado da tabela para os babilônios. Se os números nas 2ª e 3ª colunas (esquerda para direita) foram considerados como lados a e c, respectivamente, a 1ª coluna mostra em cada situação o quadrado da razão $\frac{c}{b}$, o que nos leva a concluir que já nessa época as relações entre os lados do triângulo retângulo já eram conhecidas, mesmo que de forma intuitiva, como podemos observar a seguir:

Figura 5: Possível interpretação da tabela de Plimpton.

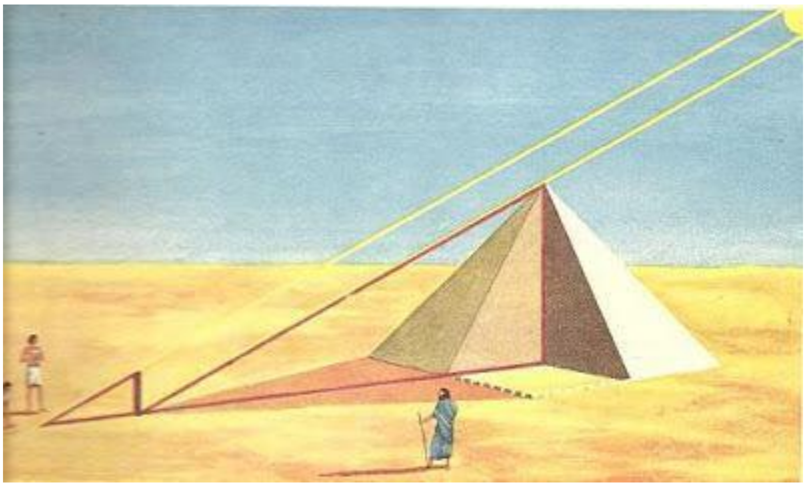


1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

Fonte: Boyer 2010, pág. 25

O primeiro matemático a organizar a Geometria de forma dedutiva foi Tales de Mileto que fez muito sucesso no Egito por seus estudos na geometria e principalmente na astronomia. Uma das suas grandes contribuições para a matemática foi o teorema que leva seu nome: Teorema de Tales. Foi também o primeiro a medir a altura de uma pirâmide, localizada em Quéops, no Egito, a partir de sua sombra e uma estaca. Ambas formavam um triângulo semelhante ao da pirâmide. Tales observou que existia proporcionalidade entre o tamanho da pirâmide e o tamanho de sua sombra. Valeu-se dessa ideia para calcular sua altura. (Uberti,2003)

Figura 6: Medida da Pirâmide pela sua Sombra.



Fonte: https://www.esudopratico.com.br/teorema-de-tales. Acesso em 22/02/2019

Outro matemático muito importante foi Pitágoras de Samos, do qual o que se sabe resume-se a relatos. Ele foi o fundador da irmandade pitagórica que era secreta com muitos rituais místicos. Os pitagóricos, como ficaram conhecidos, fizeram grandes descobertas na matemática, filosofia e astronomia. Na geometria encontramos o Teorema de Pitágoras, grande contribuição para resolução de problemas que envolvem trigonometria, (Reis,2016).

Para os Gregos, a trigonometria surgiu na astronomia, a fim de conhecer os fenômenos celestes, calcular o tempo, estudar as rotas de navegação e na geometria. O estudo da trigonometria era voltado para o os triângulos dentro da esfera terrestre. Esse estudo se desenvolvia desde a época dos últimos pitagóricos, surgindo a necessidade de iniciar o estudo da trigonometria plana.

No trabalho de Euclides (300 a.C.), nomeado Os Elementos, encontramos as leis de Cossenos para ângulos obtuso e agudo, já enunciadas em linguagem geométrica.

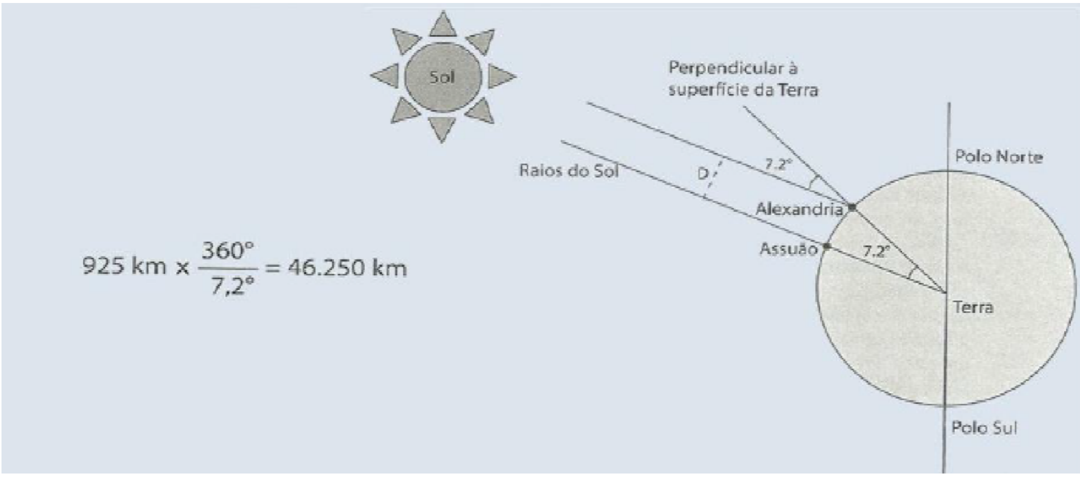
Arquimedes (287 a.C.), foi considerado um dos maiores matemáticos dos últimos tempos, pelas engenhosidades que construía, tais como catapultas, alavancas e polias. Uma fórmula atribuída a ele é conhecida como “fórmula de Heron”, que ele já conhecia séculos antes do nascimento de Heron.

A “Idade Áurea” da Matemática é considerada de 300 a.C. a 200 a.C., devido aos trabalhos de três matemáticos: Euclides, Arquimedes e Apolônio. A esse último foi atribuído o título de “O grande Geômetra”, que em uma de suas obras faz a demonstração de como traçar tangentes a uma cônica usando a teoria da divisão harmônica.

Outro nome importante dessa época é Aristarco de Samos, 310 a.C. Ele observou a razão da distância entre o Sol e a Terra e entre o Sol e a Lua. Os dois últimos, tinham tamanhos próximos visto pelo mesmo ângulo de um observador na Terra, mas seus cálculos não estavam corretos. Faltou aos cálculos de Aristarco a correção da medida do raio da Terra para chegar a seus tamanhos aproximados.

Os cálculos de Erastóstenes de Cirene, 276 a.C, para a medida da circunferência da Terra, conforme ilustrado na figura 7, foram considerados os mais certeiros para a época. Ele utilizou a igualdade de ângulos, chegando à conclusão de que a circunferência da Terra deveria ter aproximadamente cinquenta vezes a distância entre as cidades de Siene e Alexandria.

Figura 7: Medida da Terra obtida por Erastóstenes



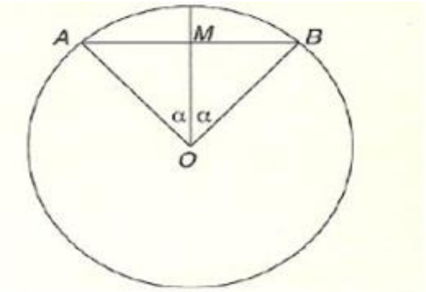
Fonte: Reis (2016), pág. 19

Presume-se que Hiparco de Nicéia, 190 a.C, compilou a primeira tabela trigonométrica, o que lhe rendeu o título de "pai da trigonometria", e permitiu calcular com precisão o nascimento e morte de várias estrelas, utilizando-se da referida tabela de cordas (mesma função corda ou sombra). Ele utilizou valores entre 0º e 180º de cordas de diversos ângulos, apresentando a correspondência entre o arco e sua corda.

Antes de Hiparco, ninguém havia tabulado valores para todos os ângulos. A essa tabela dá-se o crédito da origem da divisão do círculo em 360 partes. A astronomia primitiva de Hiparco, deu origem a trigonometria esférica, estudo dos triângulos na esfera, passando a considerar sua superfície côncava, provocando algumas mudanças em definições dos triângulos ditos planos. (Boyer,2010).

Segundo Eves (2011), se deve a Hiparco a divisão do círculo em 360 partes, ou 360º. Existe a hipótese dele ter escrito 12 livros que tratam da construção de tábuas de cordas equivalente à tábua trigonométrica do seno que conhecemos hoje, como mostra a figura 8:

Figura 8: Senos Trigonométricos.



$$sen = \frac{AM}{OA} = \frac{AB}{\text{diâmetro do círculo}} = \frac{crd\ 2\propto}{120}$$

Fonte: Eves (2011), pág. 202

Segundo Eves (2011), em sua obra *Sphaerica*, Menelau de Alexandria (100 d.C.) apresenta o "Teorema de Menelau", que é fundamentalmente parte da trigonometria esférica ou das cordas num círculo. Para ele o trabalho de Menelau foi uma luz intensa sobre o incremento da trigonometria.

A obra *Syntaxis*, de Cláudio Ptolomeu (150 d.C.), que ficou conhecida como o *Almagesto*, que significa "o maior", expõe tabelas trigonométricas e os métodos utilizados em sua construção, conforme ilustra figura 9.

Figura 9: Reprodução de parte do "Almagesto".

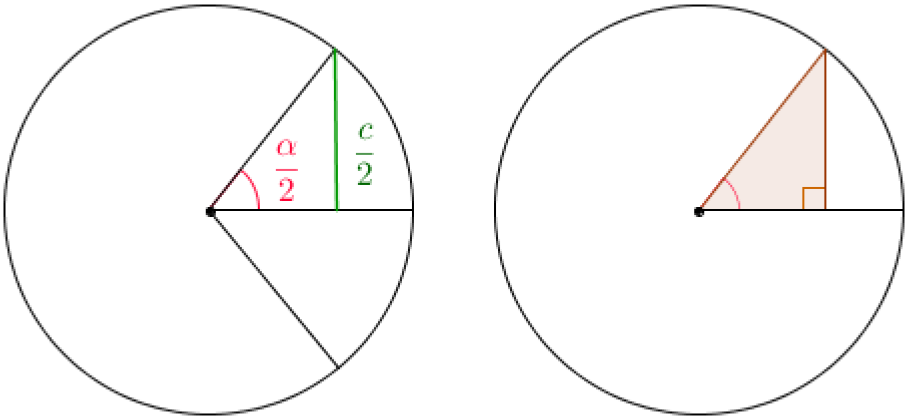
Fonte: Gutierre (2009), pág.05

As linhas trigonométricas utilizadas pelos povos hindus, árabes e gregos eram similares, mas foi Ptolomeu que associou valores numéricos aproximados às cordas. Ele subdividiu o diâmetro do círculo trigonométrico em 120 partes e depois cada uma das partes em sessenta minutos, e depois segundos, pensamento derivado do sistema sexagesimal, considerado um sistema de aproximações precisas para a época.

Após 300 d.C., a matemática grega estacionou. Em contrapartida, a matemática na Índia cresceu e floresceu, e algumas obras importantes para o desenvolvimento da trigonometria se destacaram. Entre elas, *Sulvasutras,* ou "regra de cordas" que apresentava noções de geometria, tendo uma relação com os esticadores de corda egípcios.

Uma outra, os *Siddhantas*, mais ligada à astronomia, acredita-se ter sido escrita por Surya, o Deus do Sol, que abriu novos horizontes no estudo das cordas e ângulos centrais, conforme mostra a figura 10, revolucionando a trigonometria. Nessa obra, os autores constituem uma correspondência entre a metade da corda do círculo e a metade do ângulo central dele. Essa meia corda foi denominada jiva**,** segundo os autores de *Siddhantas,* que construíram uma tabela trigonométrica com valores de jiva para os ângulos correspondentes de até 90°. (Boyer, 2011). Neste contexto, origina-se a "Trigonometria no Triângulo Retângulo".

Figura 10:Ângulos e Cordas segundo os Siddhanta.



Fonte:http://clubes.obmep.org.br/blog/trigonometria-trigonometria-do-triangulo-retangulo. Acessado em 23/02/2019

Por volta de 850 – 929 d.C. o matemático árabe AL-Battani, baseando-se na trigonometria hindu, introduziu o círculo de raio unitário, demonstrando que os valores de ***jiva,*** eram uma razão válida para qualquer triângulo retângulo, independente da hipotenusa. Outro matemático árabe importante surge em 980 d. C. Abu'L-Wefa, responsável por sistematizar provas e teoremas de trigonometria e usar todas as seis funções trigonométricas, assim como as razões entre elas. A ele também se credita o primeiro tratado sistemático sobre trigonometria plana e esférica. (Reis,2016).

Com a expansão marítima europeia, a trigonometria passou a ser utilizada na Cartografia e na Topografia, práticas já propostas por Fibonacci (1175-1250) em Prática da Geometria. Com a aceitação da teoria heliocêntrica de Copérnico, houve também a necessidade de refazer os cálculos trigonométricos voltados para a Astronomia. A construção das tábuas trigonométricas era lenta e cansativa, porém necessárias para o desenvolvimento dos cálculos astronômicos e para os avanços matemáticos.

Posteriormente, o matemático George Joaquim Rético (1514-1576), juntou as ideias de vários matemáticos com suas próprias, desenvolvendo a trigonometria do triângulo retângulo, como é conhecida hoje.

Com a descoberta da Geometria Analítica por Galileu (1564-1642), Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), desenvolveram-se acentuadamente o estudo das curvas, que foi introduzido nos estudos de Roberval (1602-1675) que falava sobre a curva seno (cicloide), usando o método dos indivisíveis, Wallis (1616-1703), publicou em 1670 um gráfico de dois períodos da função seno. Foi o surgimento da primeira função trigonométrica.

Com o avanço dos estudos matemáticos, as funções trigonométricas e as tabelas de cordas, passaram a ser cada vez mais precisas, principalmente para aplicações em Topografia, Astronomia e Navegação. A partir dos séculos XVIII e XIX passaram a ser consideradas imprescindíveis para os estudos da Física e para a resolução de alguns problemas matemáticos. As Séries de Fourier mostraram a posição central dessas funções e suas aplicações na matemática moderna

. Atualmente a trigonometria é aplicada em diversos setores, como telecomunicações, medicina, música, astronomia, geometria e em muitas outras áreas científicas, sendo indispensável praticamente para o estudo de diversas ciências. (Uberti,2003).

3 A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DA TRIGONOMETRIA SEGUNDO OS DOCUMENTOS OFICIAIS

Segundo Oliveira (2014), o ensino da matemática é fundamental para o desenvolvimento da humanidade, pois suas raízes se confundem com a história. E sendo inquestionável o papel desafiador e investigador dessa disciplina para os estudiosos das demais ciências. Mas infelizmente não é esta a opinião da pela maioria dos nossos estudantes. Por isso deve ser contextualizada dentro da realidade, mostrada como estratégia na resolução de problemas cotidianos explanando sua aplicabilidade.

Nesse contexto, o ensino da trigonometria é ferramenta essencial para resolver problemas oriundos de diversos segmentos tais como engenharia, física, informática, entre outras ciências. No Ensino Médio é apresentada em situações cotidianas como o cálculo de alturas de prédios, medida de pistas de atletismos, entre outros.

Segundo Souza (2014), tradicionalmente a trigonometria se apresenta desconectada das suas aplicações práticas. Investe-se muito tempo nos cálculos algébricos das identidades e equações. Deve ser apresentado ao aluno situações problemas que envolvam medições, cálculos de distâncias e modelagem dos fenômenos periódicos.

Assim, o estudo não deve se aprofundar em fórmulas e equações, mas enfatizar-se o estudo das funções básicas seno, cosseno e tangente, detalhando o estudo da primeira volta do círculo trigonométrico, e a relação da história da trigonometria com suas aplicações, já que esse conhecimento foi responsável pelo avanço tecnológico no curso da história. Neste contexto pode-se citar as grandes navegações, a agrimensura, permitindo ao aluno reconhecer que o estudo da matemática foi responsável pela resolução de vários problemas com os quais o homem se deparou e continua se deparando ao longo de sua história.

A trigonometria não deve ser apresentada reduzindo-se a fórmulas, é preciso que seu estudo tenha significado, o estudante deve entender que é necessário obter esses conhecimentos, como foram criados e como eles contribuíram para a evolução da humanidade através dos tempos. É natural a curiosidade dos estudantes em saber de onde surgiram tantos conhecimentos e porque o estudo desses conceitos se torna tão importante para que entendam sua própria participação na sociedade. Mesmo sabendo que as dificuldades relacionadas ao ensino da trigonometria são muitas, a importância desse tema justifica a insistência para que ele seja bem compreendido, justificando a compreensão de suas aplicações. (Costa 2016).

Segundo Costa 2016:

> "... a Matriz de referência de Matemática do SAEB para o Ensino Médio estabelece algumas habilidades e competências necessárias aos estudantes concluintes do Ensino Médio, em unidades denominadas Descritores, que são elas:
> 1) Descritores do Tema Espaço e Forma: Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo;
> 2) Descritores do Tema Números e Operações / Álgebra e Funções: Identificar gráficos e funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente) reconhecendo suas propriedades.
> Já a matriz de referência de Matemática do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM estabelece alguns objetos de conhecimentos referentes ao estudo de trigonometria, que são eles:
> 1) Conhecimentos Geométricos: Relações métricas nos triângulos e trigonometria do ângulo agudo.
> 2) Conhecimentos Algébricos: Relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas."

Nos PCN's para o Ensino Médio, o estudo da trigonometria está relacionado ao segundo eixo para o estudo da álgebra, números e funções. Tal eixo aborda a trigonometria do triângulo retângulo, a trigonometria em um triângulo qualquer, e a trigonometria da primeira volta do círculo unitário. As principais habilidades a serem desenvolvidas são:

> • Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos.
> • Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.

No currículo do Estado de São Paulo, a trigonometria está relacionada ao bloco temático Relações, mais precisamente nas relações de interdependência. Nesse bloco se enquadra todo o estudo da trigonometria, iniciando com as relações métricas do triângulo retângulo no 9º ano do Ensino Fundamental, até o estudo das características das funções trigonométricas como representação dos fenômenos periódicos, estudadas na 2ª série do Ensino Médio. As funções trigonométricas são tidas como relações de interdependência, generalizando a ideia de proporcionalidade precursora das noções de seno, cosseno, tangente.

A Matriz de Avaliação Processual (2006), apresenta os conteúdos, competências e habilidades propostos no Currículo Oficial, com o intuito de sinalizar os percursos de aprendizagem e de desenvolvimento que devem ser assegurados aos estudantes paulistas ao longo da Educação Básica.

Segundo a Matriz de Avaliação Processual, temos, devendo ser asseguradas o desenvolvimento das seguintes habilidades:

No 9º Ano do Ensino Fundamental II:

- Determinar as razoes trigonométricas de um angulo agudo.
- Utilizar a razão trigonométrica de um angulo agudo na resolução de situações-problema.
- Estimar a medida de ângulos de inclinação.
- Efetuar medidas angulares com teodolito simplificado.

Na 1ª série do Ensino médio:

- Expressar e compreender fenômenos naturais de diversos tipos.
- Enfrentar situações-problema envolvendo as razoes trigonométricas em diferentes contextos.
- Resolver situações-problema, envolvendo as razoes trigonométricas no triangulo retângulo.
- Estender o uso da linguagem trigonométrica para fenômenos que envolvem ângulos maiores do que 90°
- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico
- Compreender algumas relações essenciais entre a Geometria e a Trigonometria, inter-relacionando linguagens e ampliando as possibilidades de expressão.

Na 2ª série do Ensino Médio:

- Reconhecer a periodicidade presente em alguns fenômenos naturais.
- Representar a periodicidade identificada em situações-problema por intermédio de um gráfico cartesiano.
- Identificar a relação entre uma medida angular em graus e em radianos.
- Representar graficamente fenômenos periódicos por meio de gráficos cartesianos.
- Identificar as simetrias presentes na circunferência trigonométrica, utilizando-as para a resolução de situações-problema.

- Localizar na circunferência trigonométrica a extremidade final de arcos dados em graus ou em radianos.
- Calcular seno e cosseno de ângulos expressos em radianos com suporte do ciclo trigonométrico.
- Resolver equações trigonométricas simples.

Em dezembro de 2017, foi homologado o texto da BNCC – Base Nacional Comum Curricular, para o Ensino Médio, documento homologado pela Portaria n° 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, Seção 1, Pág. 146.

> Prevista na Constituição de 1988, na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, de 1996, e no Plano Nacional de Educação, de 2014, a BNCC expressa o compromisso do Estado Brasileiro com a promoção de uma educação integral e desenvolvimento pleno dos estudantes, voltada ao acolhimento com respeito às diferenças e sem discriminação e preconceitos.(BNCC, 2017).

No que tange a área da matemática e suas tecnologias, a BNCC sugere a ampliação e o aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos no ensino fundamental, explorando a interligação entre os conteúdos já trabalhados possibilitando aos estudantes a construção de uma visão mais integrada da matemática e sua respectiva aplicação à realidade.

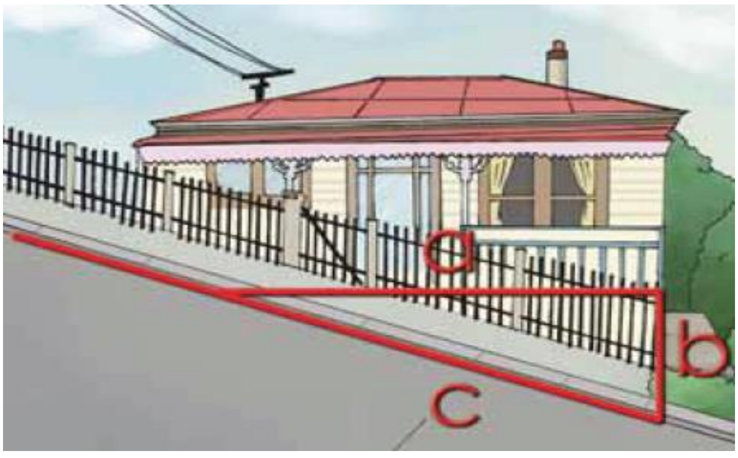
4 ESTUDO TEÓRICO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS E SIMETRIA NO CÍRCULO UNITÁRIO, COM ABORDAGEM SEGUNDO O CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Os primeiros conceitos de trigonometria são apresentados no terceiro bimestre do 9º ano do Ensino Fundamental, como pré-requisitos para a introdução do tema, os alunos deverão ter conhecimentos prévios de razão e proporção, ângulos, semelhança de triângulos e relações métricas do triângulo retângulo, conteúdos que compõem a grade de anos anteriores.

4.1 Razões trigonométricas de ângulo agudo

A proposta curricular do Estado de São Paulo oferece alternativas para a apresentação das razões trigonométricas no triângulo retângulo com o objetivo de ampliar o espectro de significados, utilizando o ângulo de inclinação de ruas e estradas de acordo com regras estabelecidas pelo Departamento Nacional de Infraestrutura e Transporte (DNIT). Através de texto informativo, enuncia-se que as divisões das medidas horizontais, verticais e reais da inclinação de uma rua, representadas pela figura do triângulo retângulo, como mostra a figura 11 possuem nomes especiais, como exemplificado nesta figura a divisão de (b) por (a) é a tangente do ângulo, e a divisão de (b) por (c) é o seno do ângulo.

Figura 11: Inclinação de uma rua



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,9º Ano, Vol.2 – pág.43.

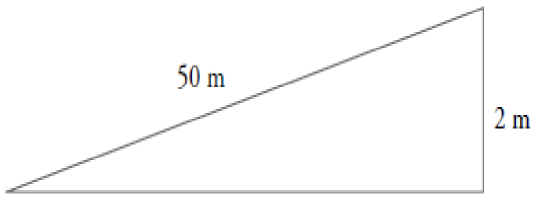
Tal proposta parte da fixação do angulo agudo do triângulo retângulo e da obtenção das razões entre seus lados, trabalhando apenas as razões básicas seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, com o objetivo de que o estudante perceba que as razões trigonométricas são prioritariamente associadas ao ângulo, e não às medidas dos lados do triângulo retângulo.

Para explorar esses conceitos são propostos, no caderno do aluno, alguns problemas.

As figuras 12 e 13, mostram algumas dessas atividades:

Figura 12: Estudo da Rampa

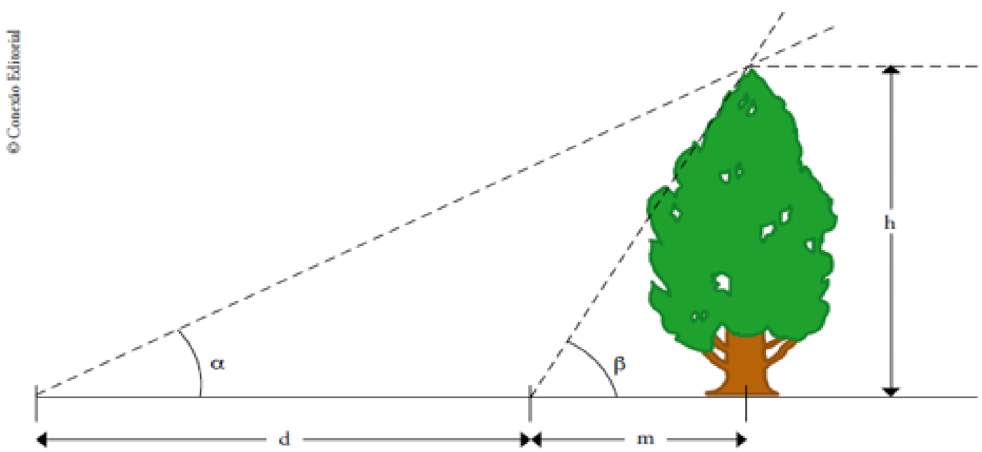
Em determinada rua, um pedestre caminha 50 m e percebe que se elevou 2 m em relação ao ponto onde iniciou a caminhada. Qual é a inclinação percentual dessa rua? E qual é a medida do ângulo de inclinação?



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,9º Ano, Vol.2 – pág.45.

Figura 13: Medida da altura de um objeto quando não se tem acesso à base

9. Observe a figura que representa a tentativa de medir a altura (**h**) de uma árvore, sem, todavia, conhecer a distância entre o vértice do ângulo de elevação e a base da árvore.



Supondo que $\alpha = 23°$, $\beta = 34°$ e $d = 3$ m, determine a altura da árvore.

Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,9º Ano, Vol.2 – pág.45.

As atividades propostas anteriormente têm por finalidade apresentar o conteúdo, de forma contextualizada com atividades que contenham exemplos práticos, mostrando ao aluno algumas das aplicações da trigonometria em situações reais do cotidiano. O tema voltará a ser abordado no Ensino Médio com maior aprofundamento.

Apesar do conteúdo ser apresentado de forma contextualizada, a prática em sala de aula mostra que os estudantes ainda apresentam grande dificuldade na compreensão dos conceitos e aplicações das razões trigonométricas. Não conseguem perceber que essas razões estão diretamente ligadas ao ângulo e não ao tamanho dos lados do triângulo, não sendo capazes de resolver situações problemas que envolvam esses conceitos, chegando ao Ensino Médio sem os pré-requisitos mínimos para o domínio desse conteúdo.

Observações feitas em salas de aula do Ensino Médio comprovam que essa abordagem não é suficiente para que os alunos aprendam esses conceitos. Existe uma grande dificuldade em relacionar os nomes ao significado dessas razões.

A primeira barreira observada, é que os alunos geralmente acreditam de forma equivocada que o seno, cosseno e tangente são o valor de um ângulo específico, e não uma medida.

Outra dificuldade está em perceber que o ângulo não depende da medida dos lados, e que o prolongamento da reta de inclinação determina o tamanho dos trechos horizontal e vertical de acordo com a distância percorrida.

Ainda temos o agravante de que o as atividades comtempladas no Ensino Fundamental, cuja contextualização é o estudo de rampas de acesso, priorizam o uso da tangente e não utilizam as outras duas razões.

Entende-se que é necessária uma complementação do currículo, proporcionando ao aluno um trabalho investigativo que o leve a construir esses conceitos, enfocando as três razões trigonométricas básicas, seno, cosseno e tangente, simultaneamente.

De acordo com a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (2014-2017), na primeira série do Ensino Médio, os alunos terão novamente contato com o estudo da trigonometria no quarto bimestre, porém a maioria dos docentes da rede não consegue concluir essa etapa do currículo.

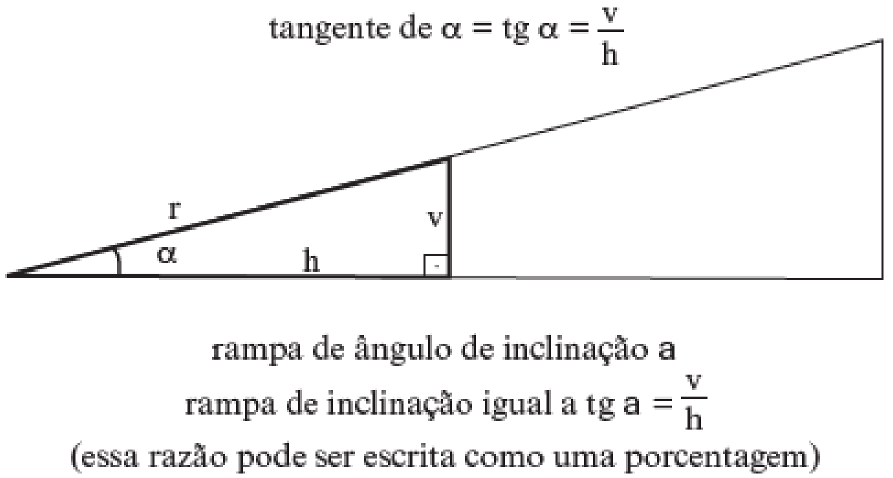
Os principais fatores, responsáveis por esse atraso são, a defasagem da turma em relação do conteúdo do ano/série e a falta de professores.

Nessa etapa, a Proposta Curricular sugere que sejam retomados os conceitos já abordados em anos/séries anteriores, buscando aprofundá-los em relação ao que foi estudado nos anos finais do Ensino Fundamental.

O caderno do professor recomenda-se o estudo da tangente, abordando a inclinação de uma rampa, metodologia semelhante à proposta para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Deve-se observar nesse momento a relação entre a distância vertical para cada unidade percorrida horizontalmente, representando a rampa pelo desenho de um triângulo retângulo com ângulo agudo α , onde a razão entre a distância vertical (cateto oposto à α) e a distância horizontal (cateto adjacente a α **),** determina para cada ângulo α **,** uma constante característica do ângulo, que se denomina de tangente de α**.**

Figura 14: Tangente de um angulo, observada em uma Rampa



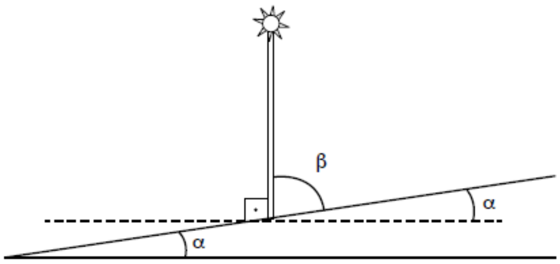
Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.61.

No caderno do aluno, inicia-se a Situação de Aprendizagem com a seção “Você Aprendeu”, retomando o conceito de inclinação de uma rampa. Antes de iniciar as atividades propostas, é necessário que o professor faça um diagnóstico da turma, para saber se ela tem pré-requisitos para a abordagem do tema, pois, como já foi dito anteriormente, nem sempre a introdução desse conteúdo é ministrada no 9º ano.

Vemos na figura 15, um dos problemas propostos no caderno do aluno:

Figura 15: Atividade do Caderno do Aluno

2. Para calcular a inclinação α de uma rua, podemos observar o ângulo β formado pelo poste (vertical) com o leito da rua, conforme indica a figura a seguir. Se tal ângulo for igual a 84°, qual será a inclinação da rua?
(**Dica**: consulte a tabela trigonométrica disponível no Anexo, no final deste Caderno.)



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,1ª série E.M., Vol.2 – pág. 59.

Nesse exercício, o aluno deverá utilizar o conceito de ângulo complementar, para determinar o ângulo $\boldsymbol{\alpha}$, e o conceito de tangente para determinar a inclinação da rampa.

Resolução da Atividade proposta no caderno do professor:

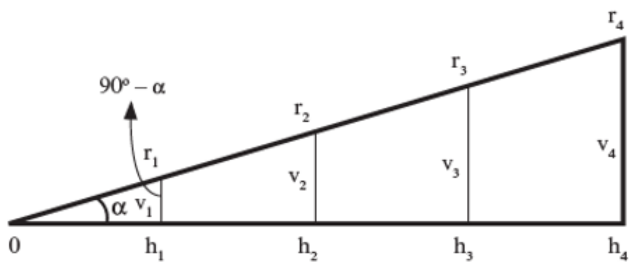
- Utilizando os conceitos de ângulos complementares vemos que $\beta + \alpha = 90°$, logo $\alpha = 90° - \beta$, sendo $\beta = 84°$, $\alpha = 6°$
- O próximo passo é determinar a tangente de 6º, que poderá ser encontrado através da consulta de uma tabela de tangentes ou utilizando a calculadora cientifica, donde será encontrado o valor aproximado de 0,105, ou seja, $\text{tg } 6° = 0{,}105$.
- Logo a inclinação da rampa será de 0,105 ou 10,5%.

O objetivo é que o aluno compreenda que a cada 100 m percorridos horizontalmente, haverá uma altura de 10,5 m.

Em um segundo momento, aborda-se o conceito de tangente, contextualizado por distâncias astronômicas, mas geralmente essa contextualização não é abordada devido à dificuldade do aluno em conceitos de geometria plana que teriam de ser retomados, não restando tempo insuficiente para cumprimento do currículo.

Quanto ao estudo do seno e cosseno de um ângulo agudo, sugere uma abordagem por semelhança de triângulos retângulos, com origem em um único ponto O. Espera-se que o aluno observe que, não só a razão entre o cateto oposto à $\boldsymbol{\alpha}$ e o cateto adjacente à $\boldsymbol{\alpha}$ (tangente de α), é determinada pelo valor do ângulo α , mas também as razões entre o cateto opostos a α e a hipotenusa (seno de α), e a razão entre o cateto adjacente a α e a hipotenusa (cosseno de α), determinam valores constantes para o ângulo α, como mostra a figura 16.

Figura 16: Triângulos Retângulos Semelhantes



$$\frac{v_1}{h_1} = \frac{v_2}{h_2} = \frac{v_3}{h_3} = \frac{v_4}{h_4} = \text{constante} = \text{tg}\ \alpha$$

$$\frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \frac{v_3}{r_3} = \frac{v_4}{r_4} = \text{constante} = \text{sen}\ \alpha$$

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} = \frac{h_3}{r_3} = \frac{h_4}{r_4} = \text{constante} = \cos \alpha$$

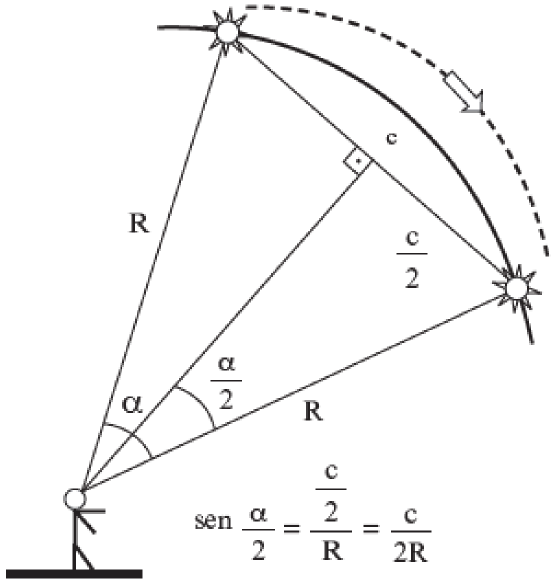
Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.62/63.

Segundo o texto do caderno do professor, é importante observar que o cosseno de **α,** é o seno do ângulo complementar de **α**, ou seja, cos α = sen(90 – α), sendo essa a origem do nome cosseno. Os triângulos encaixados, demostrados na figura 16, deram origem às razões seno, cosseno e tangente, e a todos os estudos que envolvem a trigonometria.

Recomenda-se que o professor aborde o conteúdo, valendo-se da história da matemática. Assim podendo ser possível resgatar a origem das tabelas de cordas utilizadas por Ptolomeu e Hiparco, que continham cálculos astronômicos que possibilitaram estimar distâncias entre os corpos celestes e a terra, mostra a construção do seno, como a razão $\boldsymbol{\frac{c}{2R}}$ entre a metade do comprimento **c** das cordas de uma circunferência e seu raio ***R*** .

Dado a existência de uma proporcionalidade entre seus valores, um observador da Terra, enxergaria o arco descrito por um astro no céu, conforme mostra a figura 17.

Figura 17: Arco visto por um observador da Terra

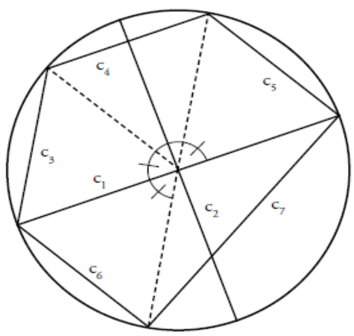


Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.63.

A atividade mostrada na figura 18, extraída do caderno do aluno, mostra a proposta de estudo do seno de um ângulo sob esse olhar.

Figura 18: Atividade do Caderno do Aluno, Cálculo do Seno de um angulo, utilizando o tamanho da corda de uma circunferência.

Em uma circunferência de raio 1 m, podemos traçar cordas de todos os tamanhos possíveis de 0 m a 2 m. Algumas dessas cordas, de comprimento c_1 a c_7, estão representadas na figura a seguir. Os quatro ângulos indicados têm medida de 60°.



a) Calcule o comprimento de cada uma das cordas.

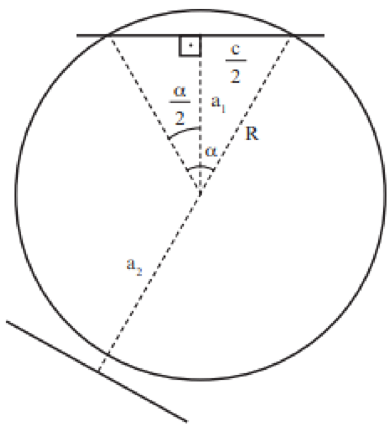
Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.61

Para resolução dessa atividade o aluno deverá ter conhecimentos prévios de geometria plana, das partes da circunferência, raio, corda, diâmetro, de inscrição de polígonos regulares na circunferência, ângulo central, e do teorema de Pitágoras.

Embora se espere que uma turma de 1ª série do Ensino Médio já tenha domínio sobre esses conteúdos, na realidade o que geralmente acontece é que para utilizar essa abordagem ou o professor terá que retomar, ou até introduzir todo esse conteúdo. Caso contrário, os exercícios serão dados como mera informação, não havendo aprendizado.

Para o conceito de secante, o caderno do professor propõe também uma abordagem pela história da matemática. "*A palavra "secante" se origina em secare, que em latim, quer dizer "cortar".* Para determinar se uma reta qualquer é ou não secante à circunferência, calculamos a razão entre ***a*** (distância do centro da circunferência à reta) e seu raio ***R.*** *Se* a razão $\frac{a}{R} < 1$, a reta será secante à circunferência, conforme observado na figura 19.

Figura 19: Corda Secante à Circunferência



As razões entre a semicorda $\frac{c}{2}$ e o raio **R** constituem uma **tabela de senos** do ângulo $\frac{\alpha}{2}$.

Por possibilitar a identificação das retas secantes à circunferência, as razões $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{a}}$ constituíam outra tabela, chamada **tabela de secantes** do ângulo $\frac{\alpha}{2}$.

Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,1ª série E.M., Vol.2 – pág.60.

Após essa abordagem através da história da matemática, a seção Leitura e Análise de Texto, do Caderno do Aluno, apresenta novas razões decorrentes do triângulo retângulo: cotangente (cotg) e cossecante, (cossec), utilizando-se do conceito do ângulo complementar, como mostra a figura 20.

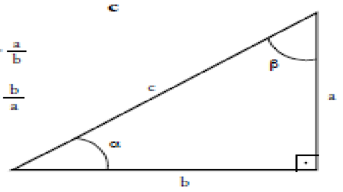
Figura 20: Apresentação das Razões Trigonométricas Inversas, Cotangente, Secante e Cossecante

Leitura e análise de texto

No triângulo retângulo de hipotenusa **c**, o ângulo α é oposto ao cateto **a** e o ângulo β é oposto ao cateto **b**. Já sabemos que a razão $\frac{a}{b}$ é a tangente de α, a razão $\frac{a}{c}$ é o seno de α e, analogamente, a razão $\frac{b}{a}$ é a tg β e a razão $\frac{b}{c}$ é o sen β.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{a}{c};\ \text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

$\text{sen}\,\beta = \frac{b}{c};\ \text{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$



Sobre as retas secantes às circunferências, podemos dizer que o que se chama **secante** de α é a razão $\frac{c}{b}$, sendo representada por **sec** α; analogamente, **sec** $\beta = \frac{c}{a}$.

Assim, como se convencionou chamar o **seno** do complementar de α de **cosseno** de α, representando-se por **cos** α o **sen** (90° – α), também se convenciona chamar:

- a **tangente do** complementar de α de **cotangente** de α, representando-se por **cotg** α;
- a **secante do** complementar de α de **cossecante** de α, representando-se por **cossec** α.

Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,1ª série E.M., Vol.2 – pág.66.

Nas atividades que se seguem, os alunos são convidados à demonstrar algumas igualdades como: $sen\,\alpha = cos\,\beta$, $cossec\,\beta = sec\,\alpha$, $sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$, e algumas relações fundamentais como $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Essas demonstrações exigem do aluno um conhecimento mais aprofundado do conteúdo, e pré-requisitos que eles em sua grande maioria não têm. Além disso, não tem contato com demonstrações teóricas. Acredita-se que o estudo das razões trigonométrica seno, cosseno, tangente e suas inversas secante, cossecante e cotangente, possam ser mais bem visualizadas e entendidas quando apresentadas no círculo trigonométrico.

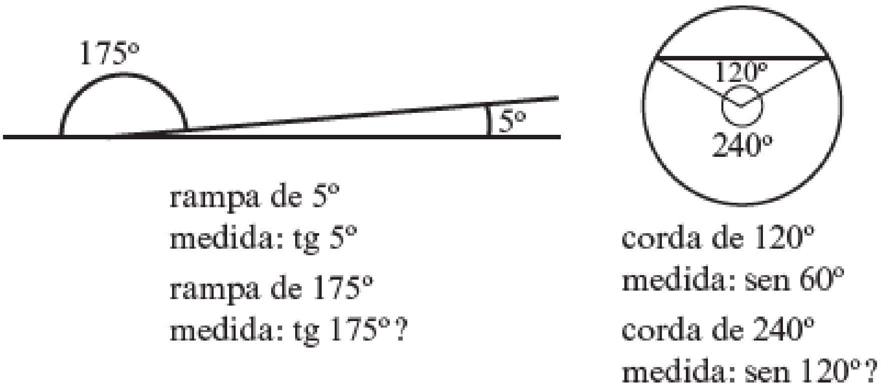
Devemos considerar ainda que o conceito de secante está ligado à uma reta que intercepta a circunferência em dois de seus pontos, sugere-se que as razões inversas sejam apresentadas após o estudo das propriedades do círculo unitário, onde a visualização geométrica dessas retas será mais clara, aumentando a probabilidade de haver aprendizado.

4.2 Razões trigonométricas de ângulos maiores de 90º, introdução ao círculo unitário

As razões trigonométricas de ângulos maiores que 90º são introduzidas no segundo semestre da 1ª série do Ensino Médio, associando essas medidas às medidas das rampas ou cordas e raios, e às características de ângulos maiores ou iguais a 90º.

No caderno do professor justifica-se a importância desse estudo fazendo uma correspondência entre cordas de diferentes ângulos, que possuem a mesma medida e entre o ângulo de inclinação de uma rampa com o uso do ângulo suplementar como estratégia de ensino, como mostra figura 21.

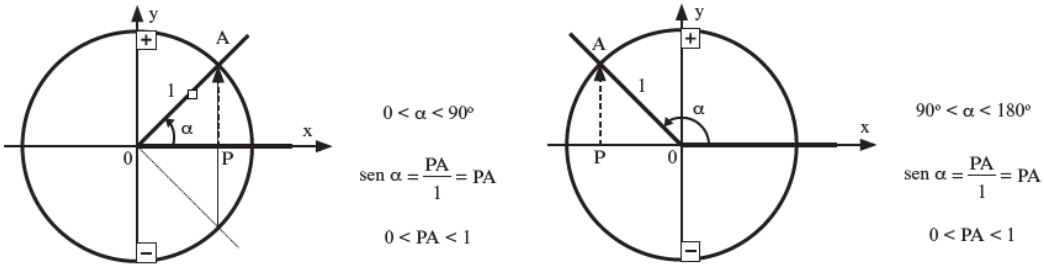
Figura 21: Ângulos maiores que 90º



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.73.

Nesse momento, a proposta curricular, traz de volta a ideia das tabelas de razões entre as semi cordas e raio de uma circunferência de raio unitário, estendendo a definição de seno de um ângulo **α**, para ângulos entre 90º e 180º, e atribui ao seno de **α** , o valor da medida da semi corda (PA), observa-se que essa medida está compreendida entre 0 e 1. Veja figura 22.

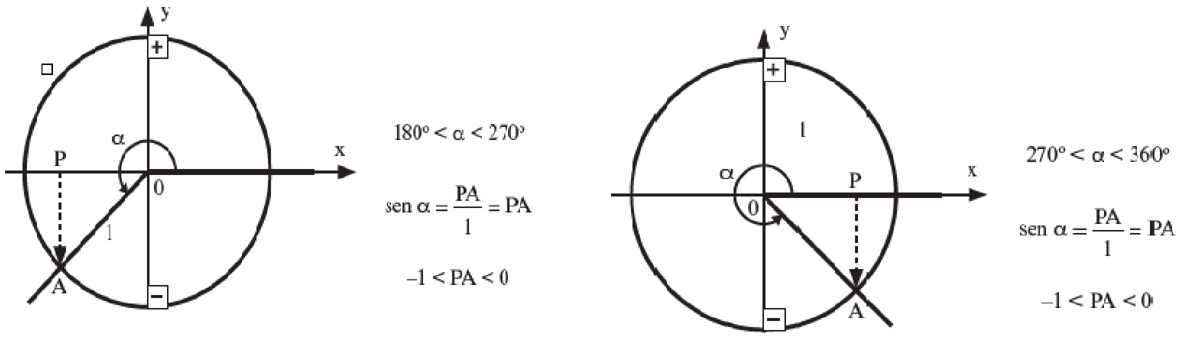
Figura 22: Seno de um angulo entre 0º e 180º



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.72.

Analogamente define-se as medidas da semi corda (PA) para ângulos entre 180º e 270º e entre 270º e 360º, orientadas agora em sentido contrário ao eixo Y, observando que nesses casos a medida das semi cordas serão negativas.

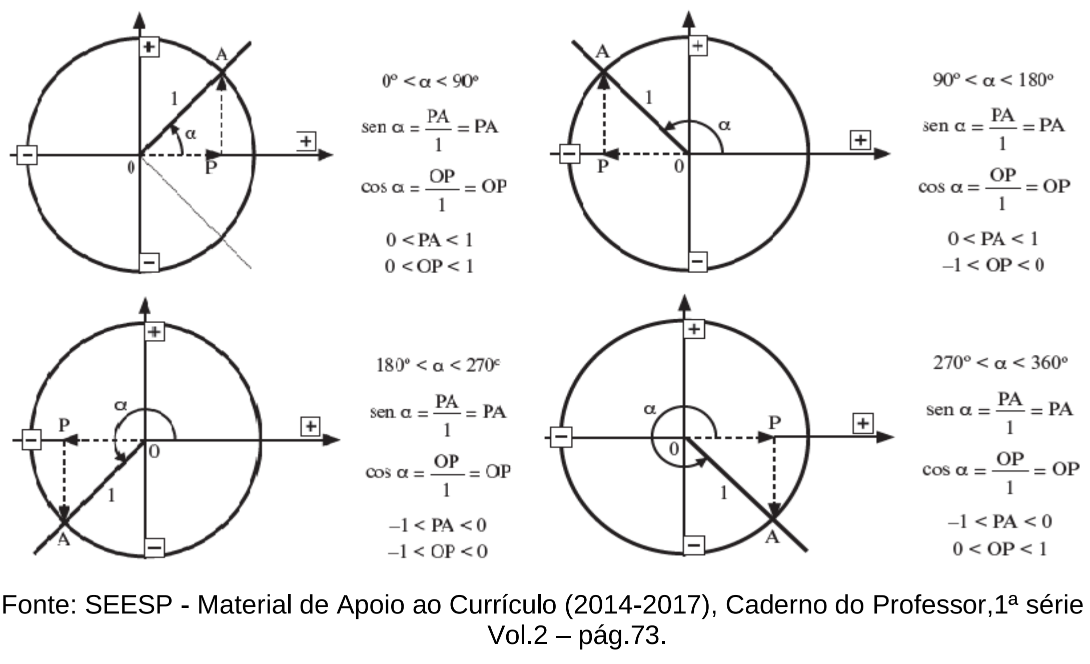
Figura 23: Seno de um angulo entre 270º e 360º



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.72.

De modo análogo, trabalha a definição de cosseno:

Figura 24: Cosseno de Ângulos entre 0º e 360º



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.73.

Após a apresentação e a sistematização do conteúdo, espera-se do aluno que ele tenha notado que:

- o tamanho das cordas PA e OP estão sempre dentro do intervalo [-1, 1].
- para as razões dos ângulos 0º, 90º, 180º, 270º e 360 º, observa-se o “fechamento do triângulo OPA e o comportamento das cordas PA e OP.

Para verificar o aprendizado segue a proposta de uma atividade, extraída do caderno do aluno, página 70:

"Construa uma tabela com os valores das seis razões trigonométricas (sen, cos, tg, cotg, sec e cossec) para os ângulos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360°, indicando também os sinais das razões nos intervalos compreendidos entre tais valores".

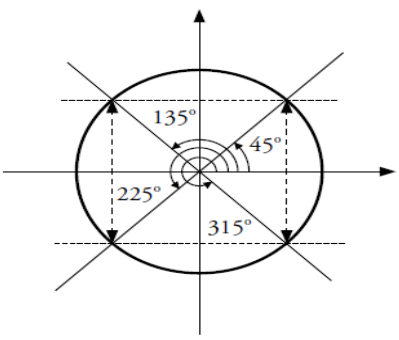
Nesta atividade espera-se que o aluno use os conceitos trabalhados na sessão leitura e análise do texto, de que: $tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$, $cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}$, $sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$ e $cossec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$, observando que, onde os denominadores são nulos, não existe razão correspondente.

Mais uma vez ressaltamos que essa abordagem mais teórica é muito abstrata para o aluno, devido à defasagem que acumula durante os anos finais do ensino fundamental, com o agravante de ser pouco trabalhada no Ensino Médio, além de que o aluno não consegue enxergar o porquê de não existir valor para a tangente de alguns ângulos. A visão geométrica é muito importante para que o aluno fixe esses conceitos, por isso propomos o uso de materiais mais concretos.

Vejamos na figura 25, outra atividade proposta no caderno do aluno:

Figura 25: Atividade do Caderno do Aluno, Seno de Ângulos Simétricos

Sabemos que $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$. Tendo como referência a circunferência de raio igual a 1 representada a seguir, calcule o valor do sen 45° e, com ele, complete a tabela com os valores do seno de cada um dos ângulos indicados.



Ângulo	Seno
45°	
135°	
225°	
315°	

Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,1ª série E.M., Vol.2 – pág.69.

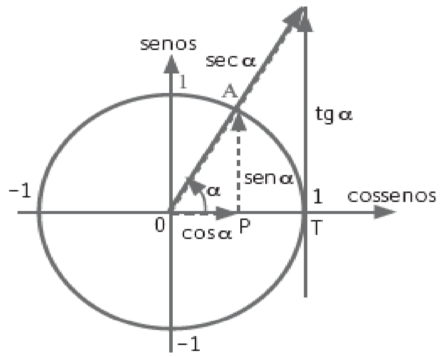
Para a resolução dessa atividade o aluno deve ter compreendido, como já foi dito anteriormente que o tamanho dos segmentos orientados (semi corda) que representam o seno dos ângulos dados, possuem a mesma medida, respeitando o sinal do quadrante em que se encontram, que tenha absorvido todos os conceitos estudados até agora, ainda assim, será preciso que tenha conhecimentos geométricos prévios, para perceber que o triângulo formado é isóscele, o aluno mais observador poderá perceber que o raio da circunferência determina a diagonal de um quadrado e sendo os lados iguais poderá utilizar esse o cálculo para a resolução. Obtendo o valor do lado do quadrado ou utilizando a relação fundamental da trigonometria, chegará ao valor do seno do ângulo de 45°; a segunda etapa é perceber a simetria existente em relação aos quadrantes observando o sinal pertinente a cada um, onde certamente precisarão da intervenção do professor.

A partir desse momento, começa a introduzir o círculo de raio unitário e trabalha a representação das razões trigonométricas neste círculo. Tomando como suficiente o que já foi apresentado ao aluno e supondo que ele tenha construído o conhecimento do plano cartesiano, propõe que se construa o círculo unitário em uma malha quadriculada, conforme atividade a seguir retirada do caderno do aluno página 71:

Ao construir uma circunferência de raio 1 com centro no sistema de coordenadas, podemos representar geometricamente todas as razões trigonométricas. Já vimos que o seno e o cosseno de um ângulo a, medidos a partir do eixo **x** em sentido anti-horário, são, respectivamente, a ordenada e a abscissa do ponto **A** da circunferência que corresponde ao ângulo a. Identifique, na circunferência citada, o segmento orientado que representa, a tangente de a, e a secante de a.

Com a realização dessa atividade, espera-se dos alunos que tomem como base os eixos cartesianos, utilizem semelhança de triângulos e aponte os segmentos orientados que representarão as seis razões já estudadas., conforme a figura 26.

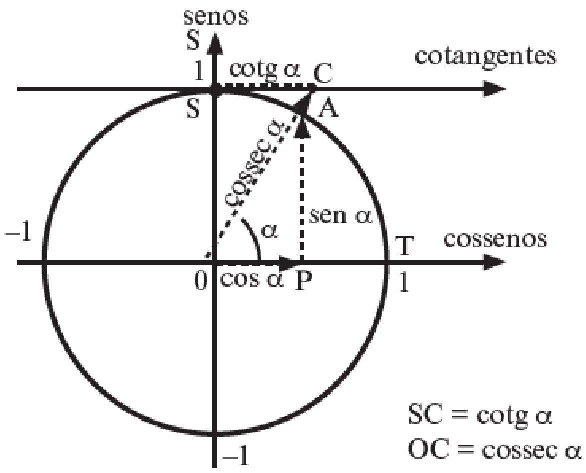
Figura 26: Razões Trigonométricas no Círculo Unitário



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.75.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos OPA e OTB, da figura anterior, chega-se à identidades importantes, como $\boldsymbol{sen^2\alpha} + \boldsymbol{cos^2\alpha} = \mathbf{1}$ e $\mathbf{1} + \boldsymbol{tg^2\alpha} = \boldsymbol{sec^2\alpha}$, mostradas na figura 27.

Figura 27: Representação Geométrica das Relações Trigonométricas Fundamentais



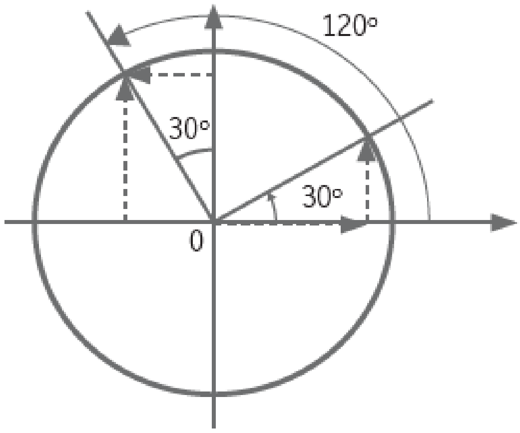
Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.75.

Em outra atividade, o aluno deve calcular o valor do seno e do cosseno de um ângulo de 30°, presumindo-se que conheça o valor do seno.

"Calcule o valor do seno e do cosseno dos ângulos de 120°, 150°,210°,240°,300° e 330°".

Espera-se que os alunos sejam capazes de relacionar os segmentos orientados observando a relação de igualdade entre as medidas dessas razões, como mostra a figura 28.

Figura 28: Simetria dos segmentos orientados, que formam o mesmo ângulo



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,1ª série E.M., Vol.2 – pág.78.

Observa-se na figura que o segmento orientado que representa o seno do ângulo de 120° tem a mesma medida do segmento orientado que representa o cosseno do ângulo de 30°, donde se conclui que $sen\,120° = cos\,30°$, analogamente, temos que $cos\,120° = -sen\,30°$.

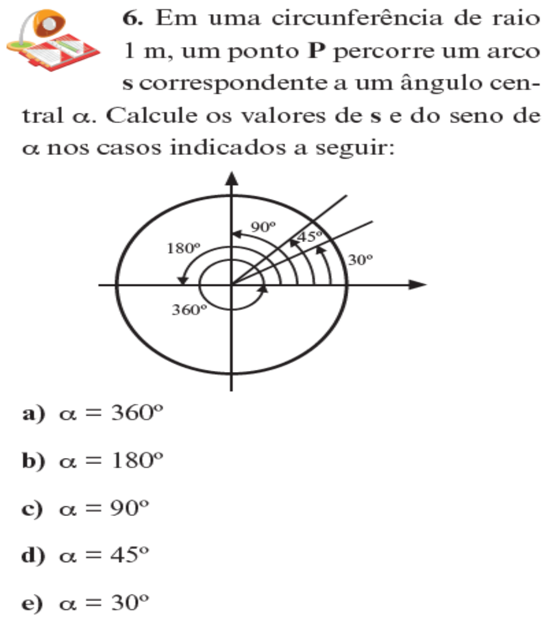
A atividade aparentemente simples, se torna bem complexa diante da dificuldade dos alunos em observar o ângulo complementar e concluir de que a o arco de circunferência formado entre os ângulos de 90° e 120°, é equivalente a um arco de 30° graus, e dominar o conceito de ângulo complementar.

Acredita-se que explorar a forma geométrica, facilita o olhar do aluno sobre a simetria existente nessa atividade, sendo conveniente explorar a figura do retângulo, suas propriedades geométricas, comparando a inversão da posição de horizontal para vertical, e o tamanho de seus lados com os segmentos orientados que determinam o seno e o cosseno de um ângulo.

Ainda nesse contexto aborda-se o tamanho do arco formado por um ângulo, retomando a razão entre o comprimento ***C*** de um círculo de raio 1 e seu diâmetro (2r), que resulta no número irracional π, $\frac{C}{2r} = \pi$, sendo que uma volta completa na circunferência equivale ao seu comprimento, e também a 360° , tendo 360° = 2π = C.

A figura 29, mostra uma atividade que trabalha o comprimento do arco em π radianos.

Figura 29:Cálculo do Comprimento de um Arco.


6. Em uma circunferência de raio 1 m, um ponto **P** percorre um arco s correspondente a um ângulo central α. Calcule os valores de s e do seno de α nos casos indicados a seguir:

a) α = 360°

b) α = 180°

c) α = 90°

d) α = 45°

e) α = 30°

Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,1ª série E.M., Vol.2 – pág.72.

O principal objetivo da atividade a seguir, é fazer com que o aluno estabeleça uma correspondência entre um ângulo dado em graus, o comprimento de seu arco dado em π radianos e o valor do seno correspondente, segundo comentado no caderno do professor, página 77.

> *Podemos generalizar os resultados da atividade 6 da seguinte maneira:*
>
> - *em uma circunferência de raio 1, os arcos correspondentes a 360°, 180°, 90°,45° e 22,5° têm comprimentos iguais a, respectivamente,* $2\pi,\ \pi,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}$ *, medidos na mesma unidade do raio;*
> - *em uma circunferência de raio 1, os arcos correspondentes a 90° e 30° tem comprimento iguais a, respectivamente,*$\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{6}$ *, medidos na mesma unidade de raio. Percebe-se que 30° é a terça parte de 90° e que* $\frac{\pi}{6}$ *é a terça parte de* $\frac{\pi}{2}$ *; e*
> - *de modo geral, existe uma proporcionalidade direta entre a medida do arco e a medida do ângulo central correspondente: se o ângulo central dobrar, o comprimento do arco também dobrará, e assim por diante;*

Nessa fase, do Ensino Médio, trabalha-se o conceito de circunferência orientada, simetria no círculo, e razões trigonométricas nessa circunferência dando ênfase para o seno e cosseno de um ângulo, sem apresentar, no entanto, formalmente os conceitos de arco, ângulo, e das características do círculo trigonométrico.

A falta de uma apresentação formal dos conceitos importantes como os de ângulo e arco, das demonstrações práticas, deixa para o aluno um aprendizado abstrato, dificultando a compreensão do conteúdo.

4.3 Círculo trigonométrico e Simetria dos Arcos.

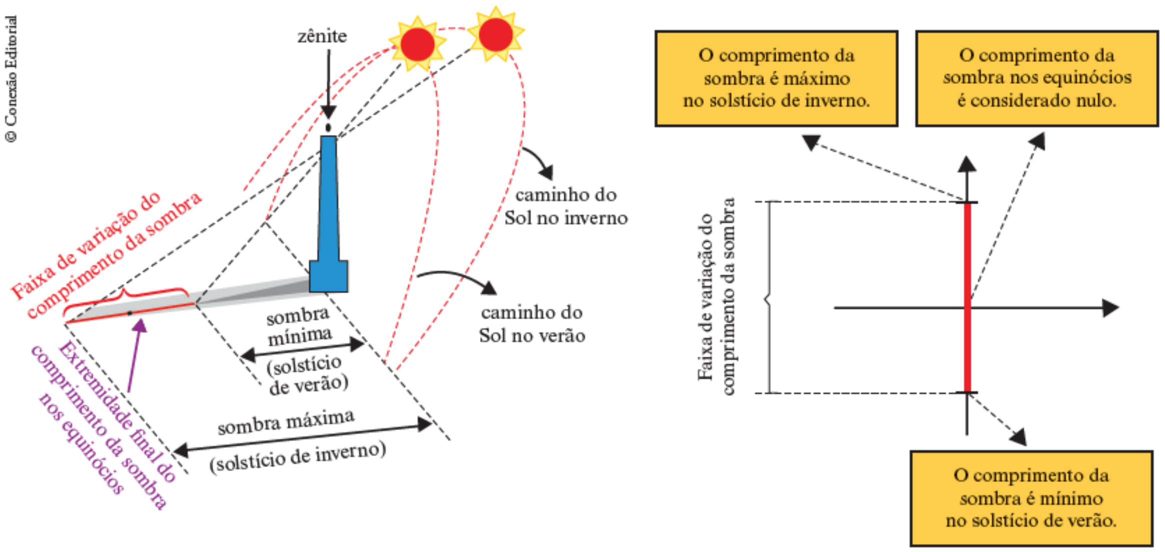
Somente na 2ª série do Ensino Médio introduz-se o estudo formal do círculo trigonométrico, contextualizado pelo estudo dos fenômenos periódicos e suas características.

O modelo da circunferência trigonométrica e a simetria dos arcos notáveis, as medidas de senos e de cossenos desses arcos serão estudadas no primeiro bimestre do referido ano/série.

O objetivo é apresentar ao aluno a relação entre as razões trigonométricas do triângulo retângulo e as medidas de suas projeções sobre os eixos coordenados, observando o movimento aparente do Sol, e o comprimento das sombras, convidando o aluno a reconhecer a periodicidade dos fenômenos apresentados, como mostra a figura 30, esboçando situações reais através de equações que envolvam seno e cosseno.

Espera-se que o aluno desenvolva naturalidade ao trabalhar com a circunferência trigonométrica, identificando a medida dos arcos em graus e em radianos.

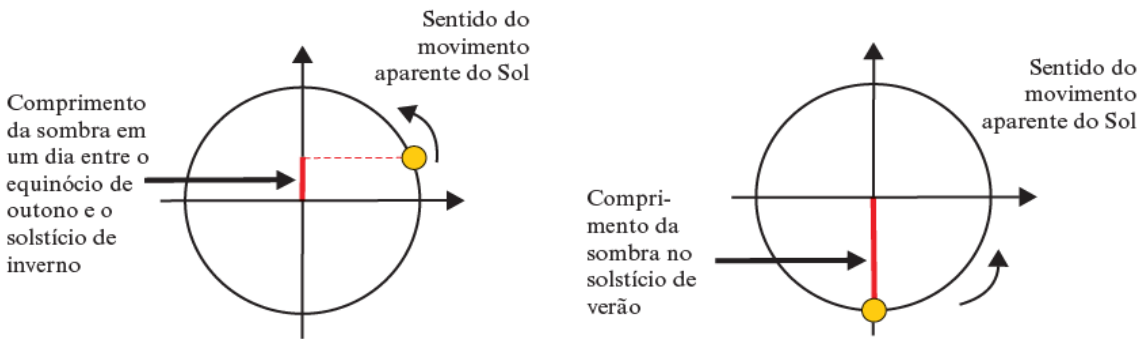
Figura 30: Fenômeno Periódico. Movimento Aparente do Sol ao Redor da Terra



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,2ª série E.M., Vol.1 – pág.24.

Após a apresentação do movimento aparente do sol, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo recomenda a construção da circunferência trigonométrica seguindo a modelagem deste fenômeno, e comparando o movimento de um ponto sobre uma circunferência centrada no plano cartesiano, à projeção vertical e horizontal da “sombra” em seus eixos, conforme mostra figura 31.

Figura 31: Projeção da Sombra sobre os Eixos Cartesianos



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,2ª série E.M., Vol.1 – pág.17.

Seguindo esse modelo, propõe que se desenhe uma escala sobre o eixo vertical para possibilitar a associação dos giros do sol à projeção vertical do ângulo, e se construa uma tabela com as medidas aproximadas dessas projeções como vemos nas figuras a seguir:

Figura 32: Projeção da Sombra sobre o Eixo Vertical

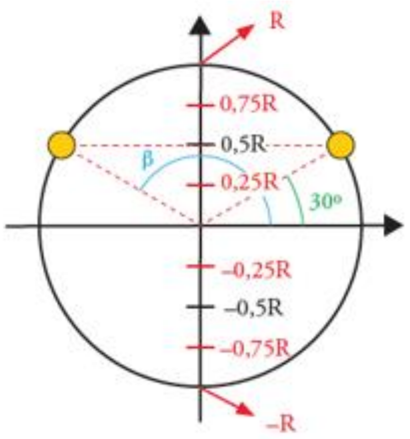
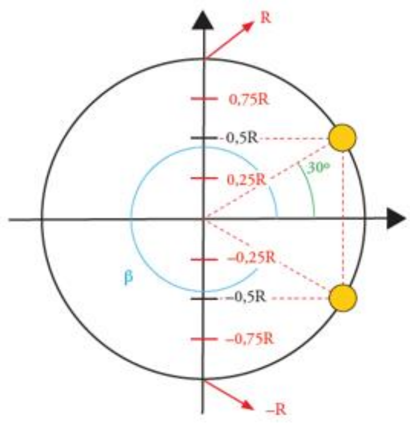


Figura 33: Projeção da Sombra sobre o Eixo Horizontal



Fonte figuras 32 e 33: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno, 2ª série E.M., Vol.1 – pág.18/19.

De acordo com a proposta curricular do Estado de São Paulo, os principais pontos que deverão ser observados são:

- *A medida das projeções equivale a frações de raio, e estão compreendidos no intervalo entre – 1 e + 1, as frações serão aproximadas em décimos.*

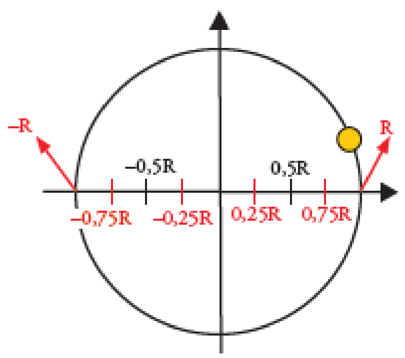
- ➢ *A medida das projeções não é diretamente proporcional à medida dos ângulos.*
- ➢ *Alguns ângulos apresentam medidas iguais para a projeção vertical.*

Essa última observação tem a intenção de introduzir a noção de simetria existente na circunferência trigonométrica. O reconhecimento dessa simetria em determinados pares de ângulos é de suma importância para o aprofundamento no estudo do tema.

Após essa explanação o caderno do aluno apresenta atividades, que visam a compreensão da simetria existente entre as projeções horizontais e verticais, espera-se que os alunos sejam capazes de fazer uma ligação entre as medidas equivalentes para determinados ângulos no que se refere às projeções sobre os eixos cartesianos, como mostram as figuras 34:

Figura 34: Medida da Projeção Vertical.

5. Complete a tabela seguinte associando a medida do ângulo de elevação do Sol com a medida da projeção sobre o eixo horizontal. Em seguida, desenhe um gráfico cartesiano para representar os dados tabelados. Escolha a escala que julgar mais adequada para cada um dos eixos cartesianos.



Ângulo (º)	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Projeção (kR)																	

Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,2ª série E.M., Vol.1 – pág.19.

Em outras atividades explora-se a comparação entre projeções nos eixos vertical e horizontal, segundo caderno do aluno página 23.

- *Há pares de ângulos que alternam os valores das medidas das projeções horizontal e vertical, como é o caso, por exemplo, da projeção vertical do ângulo de 60°, que é igual a medida da projeção horizontal do ângulo de 30°. Encontre mais um par de valores nessas condições.*
- *Há ângulos que apresentam valores iguais para projeções horizontal e vertical, como é o caso, por exemplo, do ângulo de 45°. Encontre dois valores de ângulos nessas condições.*

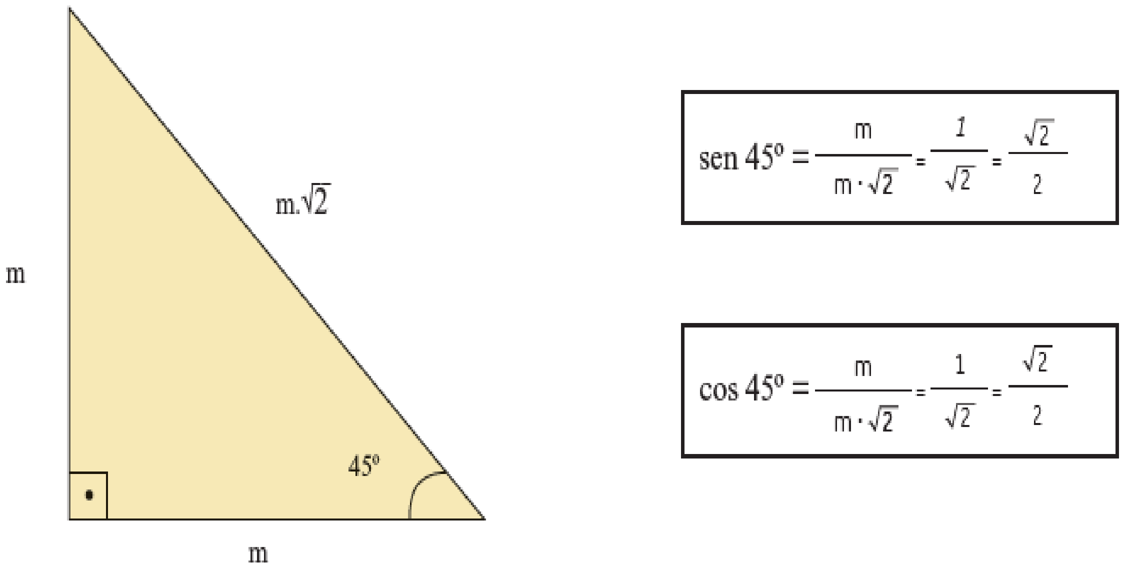
Pode-se observar que desde a 1ª série do EM até o presente momento, foi trabalhado o mesmo tema, quando a abordagem é feita pelo estudo da semi cordas de uma circunferência e sua relação com o ângulo central referente ao arco e o raio dessa circunferência, o trabalho de estudo do seno e cosseno de ângulos simétricos também já foi abordado na primeira série do ensino médio. Observa-se uma repetição de conteúdo mudando apenas a estratégia de ensino.

A vivência em sala de aula nos leva a observar que essa metodologia é ineficaz, pois o aluno chega a 2ª série do Ensino médio sem os conhecimentos necessários para prosseguir com o estudo da trigonometria. Há ainda o fato de que o aluno não consegue fazer ligação entre a situação real e o conteúdo teórico.

O estudo da simetria dos ângulos notáveis é feito por observação e construção de gráficos no próprio caderno do aluno, agora formaliza o valor do seno e cosseno de ângulos notáveis trabalhando conceitos de geometria plana, para o ângulo de 45°, utiliza a diagonal do quadrado, e para os ângulos de 30° e 60° a altura do triângulo equilátero.

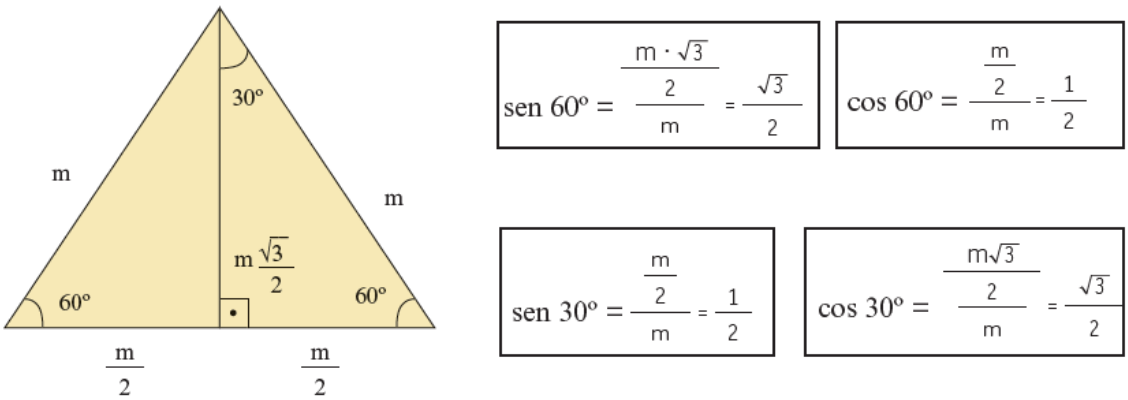
Acredita-se que essa formalização seria mais eficaz se aplicada 1ª série do Ensino Médio, contribuindo para fundamentar o valor das razões trigonométricas de uma maneira mais clara para o aluno, já que utiliza o conceito de ângulo complementar. As figuras 35 e 36 apresentam a resolução dessas atividades propostas no caderno do professor.

Figura 35: Angulo Notável de 45º



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,2ª série E.M., Vol.1 – pág.31

Figura 36: Ângulos Notáveis de 30º e 60º



Fonte: SEESP - Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,2ª série E.M., Vol.1 – pág.31

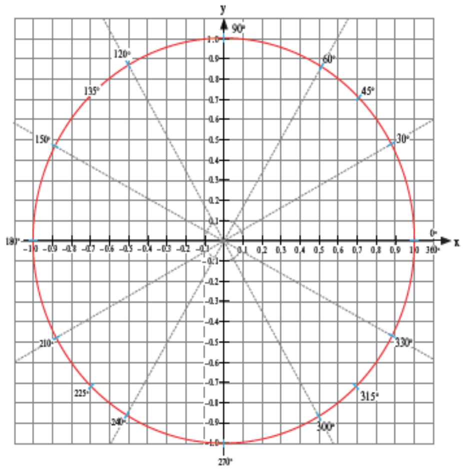
Em seguida propõe a construção da circunferência trigonométrica assinalando os arcos de 30°, 45° e 60° e seus simétricos, em relação aos eixos, com a utilização de compasso e transferidor, finalizando com uma tabela contendo os valores de seno e cosseno destes arcos em décimos. A figura 37 mostra a atividade e o resultado esperado do aluno.

Figura 37: Construção dos Ângulos Notáveis e seus Simétricos na Circunferência.

9. Na malha quadriculada, desenhe uma circunferência trigonométrica de raio 10 unidades e, em seguida, faça o que se pede.

a) Adotando a escala 1:10 unidades, divida os eixos cartesianos em subunidades, como, por exemplo, de 0,1 em 0,1.

b) Assinale sobre a circunferência a extremidade final dos arcos de 30°, 45° e 60°, bem como os simétricos em relação aos eixos nos demais quadrantes. Para essa tarefa, utilize compasso ou transferidor.



c) Complete a tabela a seguir, relacionando todos os arcos assinalados às medidas de seus senos e cossenos, lembrando que $\frac{\sqrt{2}}{2} \equiv 0{,}7$ e que $\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv 0{,}87$.

Ângulo (°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Seno	0	0,5	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,5	0	– 0,5	– 0,7	– 0,9	– 1	– 0,9	– 0,7	– 0,5	0
Cosseno	1	0,9	0,7	0,5	0	– 0,5	– 0,7	– 0,9	– 1	– 0,9	– 0,7	– 0,5	0	0,5	0,7	0,9	1

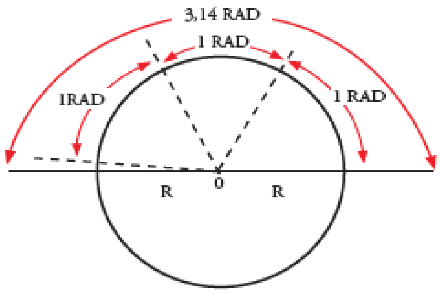
Fonte: Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Professor,2ª série E.M., Vol.1 – pág.31

Um agravante é que somente depois de toda essa abordagem é que se introduz o estudo formal do conceito de arco, e a relação de suas medidas em graus e radiano, se retoma os valores dos ângulos notáveis, como já foi dito, utilizando a geometria plana e a simetria de arcos, explorando seus valores em $\pi\ radianos$, em poucas atividade que acreditamos ser insuficientes para que o aluno consiga absorver todos os conceitos relacionados a esse tema, sendo necessário, o complemento do conteúdo pelo professor.

As figuras 38 e 39, mostram algumas dessas atividades:

Figura 38: Conceito de Grau e Radiano

"Um radiano é a medida de um arco de comprimento igual ao do raio da circunferência."
Observe a imagem a seguir e responda às questões:



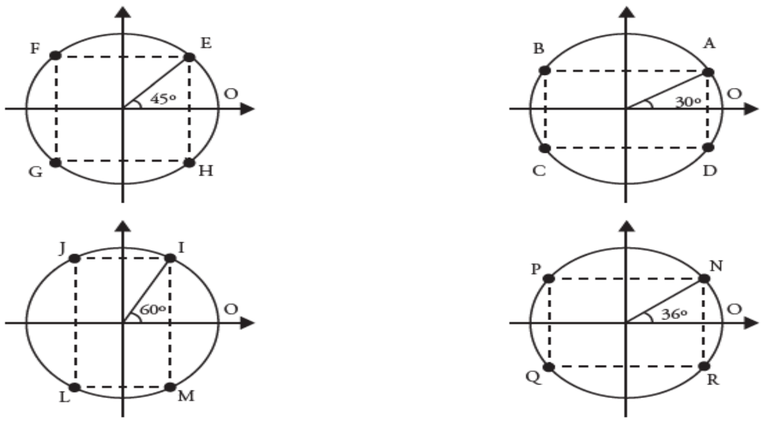
a) Meia circunferência equivale a, aproximadamente, quantos radianos?

b) Quantos radianos mede um arco de semicircunferência?

Fonte: Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,2ª série E.M., Vol.1 – pág.33

Figura 39: Medindo um Arco em Radianos

19. Considerando os giros no sentido anti-horário, assinale nas circunferências a medida em radianos do arco que tem extremidade inicial em O e extremidade final em cada ponto, de A a R.



Fonte: Material de Apoio ao Currículo (2014-2017), Caderno do Aluno,2ª série E.M., Vol.1 – pág.30.

Apesar dessa abordagem formal ser extremamente necessária, acredita-se que nesse momento o uso de material concreto e ou de um software, usado paralelamente com o estudo teórico, favorece a compreensão dos conceitos propostos e proporciona maior fixação do tema.

Embora a intenção da proposta curricular seja que o estudo da trigonometria tenha uma abordagem contextualizada, acreditamos que falta embasamento teórico, para que o estudo não seja superficial, na maioria das vezes é complementado pelo professor.

A exploração da simetria existente no círculo trigonométrico é um importante instrumento de aprendizado, que pode facilitar a resolução de problemas, sua abordagem através da geometria plana, utilizando não só a figura do triângulo retângulo, o quadrado e principalmente o retângulo, por ter propriedades de um paralelogramo, a inversão da posição dessa figura no círculo trigonométrico pode mostrar de forma mais eficaz essa simetria.

Nos próximos capítulos serão apresentadas algumas propostas de Sequências Didáticas, elaboradas e o resultado de um estudo feito com uma turma da 2ª série do Ensino Médio, de uma escola pública de zona rural do estado de São Paulo.

5 O USO DE DIFERENTES MATERIAIS PARA DINAMIZAR O ESTUDO DA TRIGONOMETRIA

Segundo Rusciolelli (2014), fatores como formação insuficiente dos professores, jornada de trabalho inadequada, que os desestimula, somando-se a defasagem de aprendizagem e falta de interesse dos alunos, levam aos baixos níveis de aprendizagem da matemática nas escolas brasileiras, e o uso de materiais manipuláveis são um grande aliado do professor, que se torna um mediador do conhecimento, objetivando maior eficácia no processo ensino-aprendizagem, pois apresenta ao aluno várias possibilidades para a construção do conhecimento, através das discussões, investigações e levantamento de hipóteses.

De acordo com os PCN's para o Ensino Médio:

> [...] As habilidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como um dos objetivos levar o aluno a compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral. [...] (BRASIL, 2000, pág. 42)

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) para o Ensino Médio, deve-se aprofundar de modo inter-relacionado os conteúdos essenciais já vistos no ensino fundamental, possibilitando ao estudante construir uma visão mais integrada da Matemática, percebendo sua aplicação na vida real, devendo aproveitar o potencial dos estudantes, promovendo ações que estimulem e desenvolvam processos de reflexão e abstração, culminando em um pensamento criativo, analítico, indutivo e sistemático que facilitem a tomada de decisão direcionadas a ética e ao bem comum.

Nesse sentido a área da matemática deve desenvolver no estudante, habilidades que se relacionem com a investigação e construção de modelos e de resolução de problemas, devendo para tanto, estimular o raciocínio, a argumentação, comunicação, discussões e validações conjuntas, favorecendo a aprendizagem de conceitos, desenvolvendo representações de procedimentos cada vez mais avançados. Dentre as 5 competências específicas da área de Matemática e suas tecnologias, temos:

> *Utilizar, estratégias conceitos e procedimentos matemáticos em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística – para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.*
> *Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, Brasil,2017)*

Neste contexto propõe-se algumas estratégias e Sequências Didáticas (S.D), que são um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, que serão apresentadas a seguir com o objetivo de motivar e despertar o interesse do aluno, tornando o estudo da trigonometria mais significativo e prazeroso.

5.1 – Uso da tecnologia – Software GeoGebra

O software GeoGebra, criado por Markus Hohenwarter, é uma boa opção para melhor fixação dos conceitos que envolvem a trigonometria, por ser um software gratuito de matemática dinâmica, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário).

Reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si.

Outro aspecto positivo para o uso do software é que já está instalado em todos os computadores da rede de ensino da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

5.1.1 – Estudo das Razões Trigonométricas no GeoGebra

A sequência didática a seguir utiliza o software GeoGebra como recurso tecnológico e pode ser aplicada na sala de tecnologia. Na impossibilidade de uso dela, o professor poderá adaptar essa sequência para a apresentação com o uso de data show na sala de aula, ou sala de vídeo, se a escola dispuser de uma.

O desenvolvimento dessa Sequência é proposto em dois momentos e tem como objetivo fixar os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo, conteúdo abordado inicialmente no 9º ano do ensino fundamental, mas que pode ser aplicada em qualquer uma das séries do Ensino Médio como revisão e fixação de conteúdo.

Na sala de informática formar grupos, o ideal é separar os alunos em duplas, mas pode-se formar grupos maiores de acordo com a disponibilidades de computadores. Instruir os alunos para que abram o programa e dar uma prévia noção da interface e de seus comandos. Em seguida seguir os passos abaixo.

1º Momento: O triângulo retângulo, elementos e relações

Passo 1: Construção do Triângulo Retângulo

a) Trace um segmento de reta AB horizontal paralelo ao eixo x (use a ferramenta segmento);

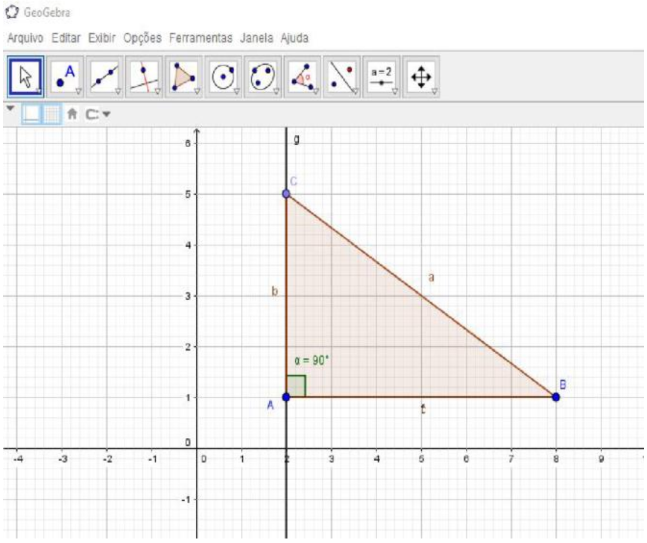
b) Trace uma reta, perpendicular ao segmento AB passando por A (utilize a ferramenta reta perpendicular);

c) Marque um ponto C sobre a reta construída no item acima (utilize a ferramenta ponto);

d) Construa o triângulo ABC (utilize a ferramenta polígono). Marcar o ângulo de 90º. (utilize a ferramenta ângulo).

Veja o resultado na figura 40:

Figura 40: Construção do Triangulo Retângulo no GeoGebra



Fonte: Figura da Autora

Passo 2: Construção de triângulos semelhantes

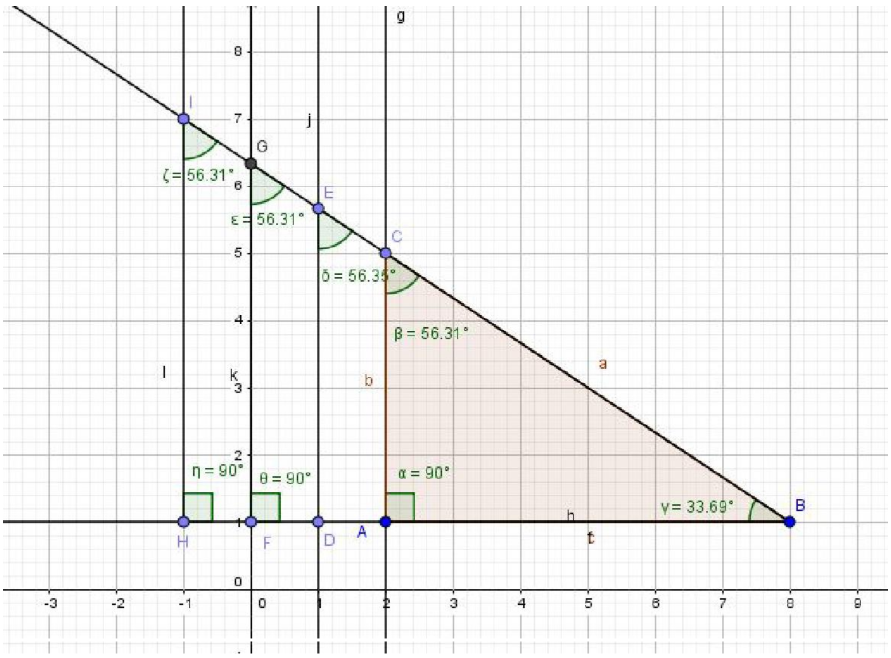
a) Com a ferramenta semirreta, prolongar os lados AB e BC;

b) Traçar 3 segmentos de retas paralelas ao lado AC (usar a ferramenta semirreta);

c) Marcar sobre a semirreta AB os pontos D; F; H e sobre a reta BC os pontos D; G; I;

d) Marcas os ângulos nos triângulos ABC; DBE; FBG; HBI

Figura 41: Construção de Triângulos Semelhantes no GeoGebra



Fonte: Figura da Autora

Passo 3: Comparar a razão entre os lados

a) Primeiramente vamos comparar as medidas dos catetos opostos pelos catetos adjacentes, (texto 1);

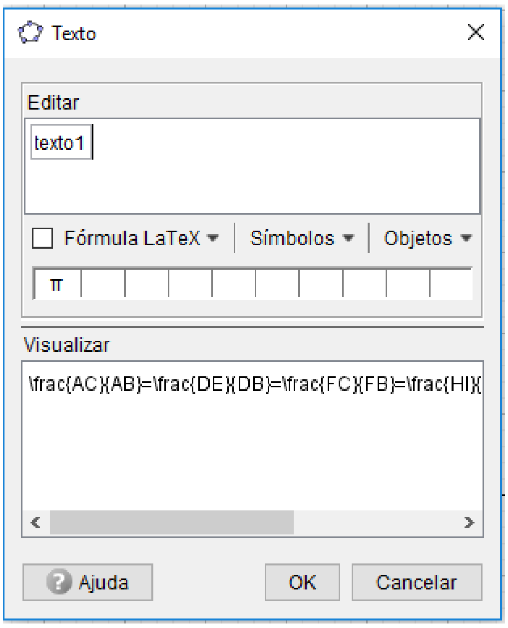
b) Depois as medidas dos catetos opostos pelas hipotenusas (texto 2);

c) Em seguida as medidas dos catetos adjacentes pelas hipotenusas (texto 3);

d) Espera-se que os alunos observem que sempre que dividimos esses lados, nos 4 triângulos semelhantes, obtemos a mesma razão.

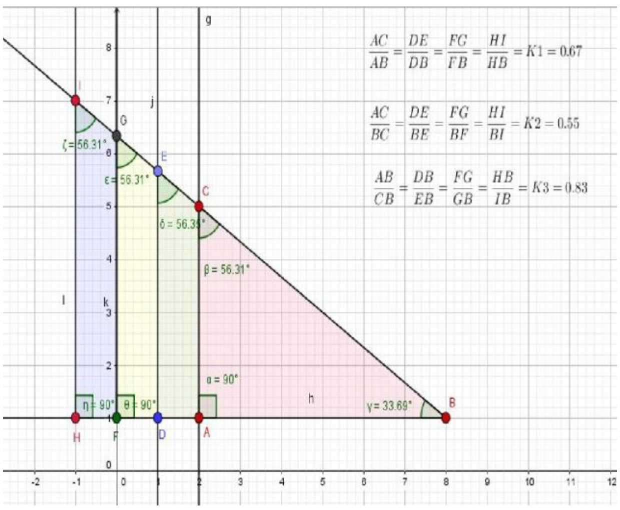
Para os itens de **a)** a **c)**, use a ferramenta texto conforme figuras 42 e 43.

Figura 42: Uso da Ferramenta Texto – GeoGebra



Fonte: Figura da Autora

Figura 43: Comparando Triângulos Semelhante com o uso do GeoGebra



Fonte: Figura da Autora

2º Momento: Seno, Cosseno e Tangente de um ângulo agudo

Passo 1: Mostre aos alunos que eles obtiveram três constantes ao relacionar as medidas dos lados, em triângulos retângulos, elas recebem nomes especiais, são denominadas, seno, cosseno e tangente.

Nesse momento crie a seguinte animação:

a) Vá em opções - rotular - menos para objetos novo, para que o GeoGebra não nomeie os objetos automaticamente;

b) criar 2 controles deslizantes a e b, com intervalos de 1 a 10, incremento = 1 (ferramenta: controle deslizante);

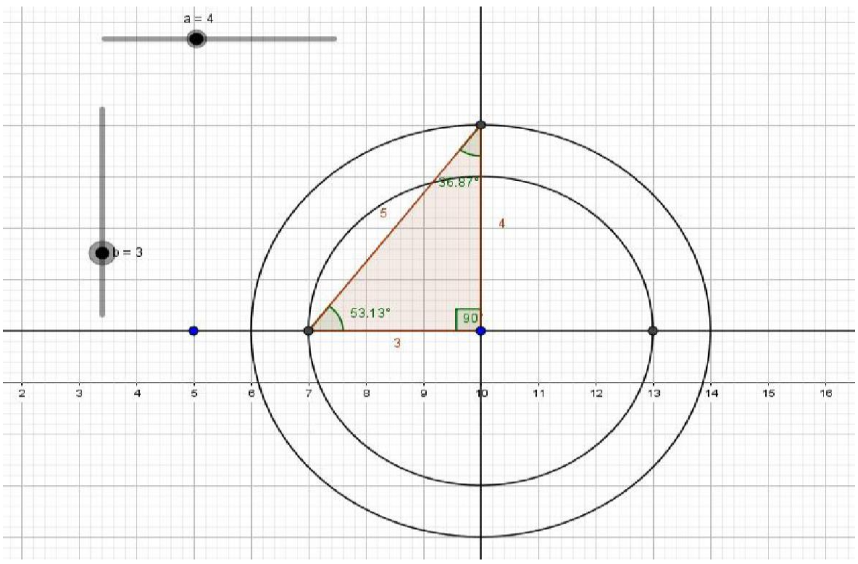
c) construir o triângulo retângulo, utilizando duas circunferências como apoio, conforme a figura 44;

d) Ocultar todos os objetos, com exceção do Triângulo Retângulo ABC;

e) Marcar o ângulo reto e os dois ângulos agudos do Triângulo;

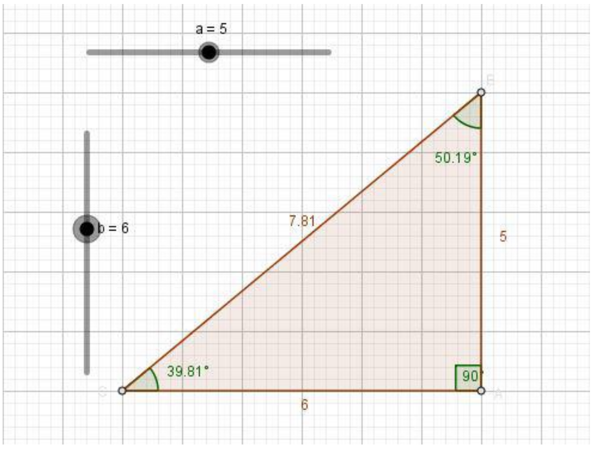
f) Pedir para que os alunos "brinquem" com os controles, observando a alteração no comprimento dos segmentos que formam os catetos do triângulo e consequentemente na hipotenusa, veja figura 45.

Figura 44: Animação Criada no GeoGebra, investigação sobre as razões trigonométricas



Fonte: Figura da Autora

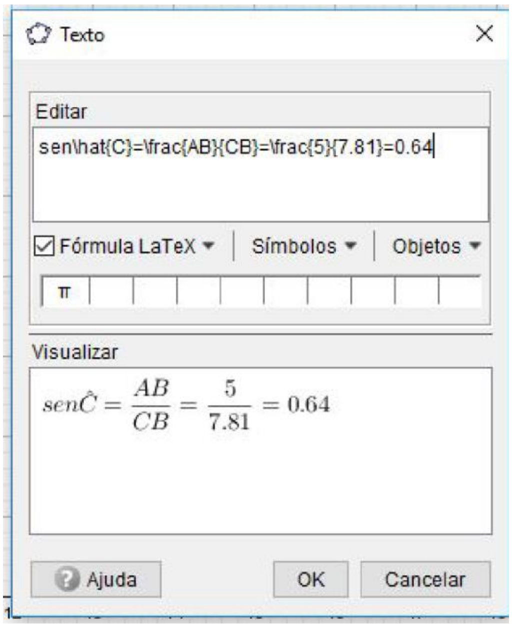
Figura 45: Uso dos Controles Deslizantes – Razões Trigonométricas no GeoGebra



Fonte: Figura da Autora

Nessa etapa, faz-se à investigação das razões de semelhança contidas no triângulo, com a ajuda da ferramenta "texto" e observa-se as medidas da figura e introduz-se as relações trigonométricas. Repete o procedimento para o cosseno e tangente. Se preferir, pode-se facilitar o cálculo das razões trigonométricas renomeando os lados do triângulo.

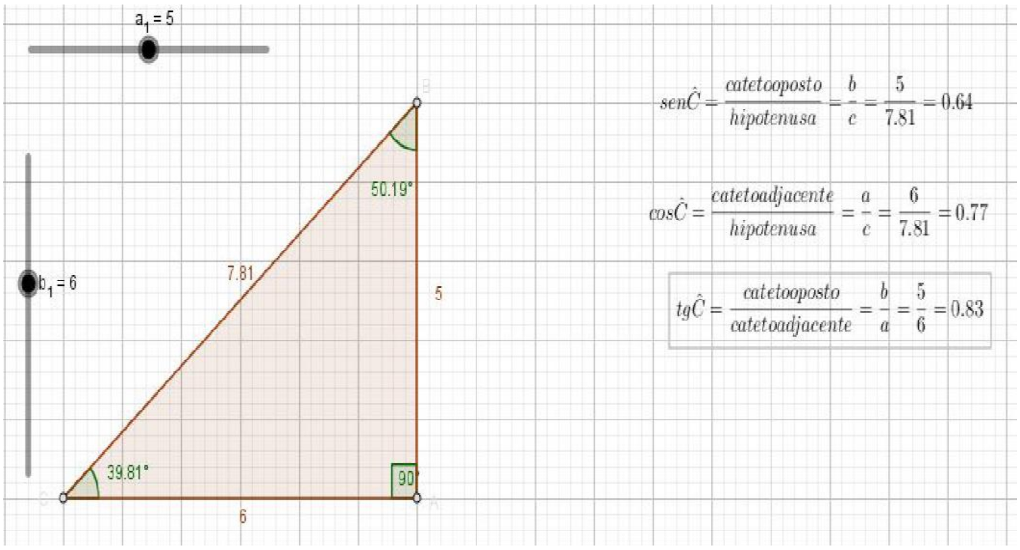
Figura 46: Cálculo da Razões Trigonométricas



Fonte: Figura da Autora

Usando os controles deslizantes os alunos poderão investigar o que acontece com os ângulos e com as razões trigonométricas ao mudar o tamanho dos catetos. Essas informações podem ser anotadas em uma tabela, inclusive para os mesmos valores de ângulos.

Figura 47: Investigando o valor do Sen, Cos, e Tg de um ângulo no GeoGebra



Fonte: Figura da Autora

Espera-se que ao final das atividades os alunos consigam formar o conceito das razões trigonométricas fortalecida pela semelhança de triângulos. Algumas situações problemas podem ser apresentadas ao aluno, ao final da sequência didática, onde deverão utilizar as razões seno, cosseno e tangente.

Possíveis exemplos:

Exemplo 1 - Ao levantar voo, um avião sobe formando com a pista um ângulo de 30º. Considerando que o ângulo formado seja contínuo, determine a altura atingida pelo avião ao percorrer 2 km (2000 metros).

Exemplo 2 - Se deseja esticar uma corda do topo de um mastro até um ponto P distante 40 metros da base do mastro, sabendo que o ângulo formado entre a superfície e a corda é de 60º, determine o comprimento da corda.

Pode-se ainda fazer o estudo do círculo trigonométrico e suas propriedades no software GeoGebra. Deixamos como sugestão, caso a escola possua sala de informática com uma quantidade suficiente de computadores para atender a demanda dos alunos.

5.2 – Uso de Material Concreto

A busca por um material concreto que pudesse ser confeccionado e utilizado nas aulas auxiliando no conteúdo de trigonometria, tornando-as mais atraentes e divertidas, e que pudesse ser reproduzido na escola, para atender aos alunos, quando não há possibilidade de uso da sala de informática, nos levou a uma pesquisa sobre materiais já existentes e que pudessem ser adaptados. Destacamos dois materiais que foram adaptados e confeccionados na própria escola.

5.2.1 – Geoplano Circular

Nos estudos de Matreiro (2018), encontramos uma aplicação do Geoplano Circular. É um material concreto que pode proporcionar uma aprendizagem significativa sendo utilizado como um recurso facilitador da aprendizagem de conteúdos significativos de Trigonometria.

Segundo Matreiro, 2018, a Geometria é um meio de apreensão da nossa relação com o espaço. As atividades Geométricas favorecem o desenvolvimento da percepção espacial, da habilidade de observação do espaço tridimensional e da elaboração de meios de se comunicar a respeito desse espaço, podendo prevenir certas dificuldades de aprendizagem favorecendo uma atitude positiva em relação ao estudo da matemática.

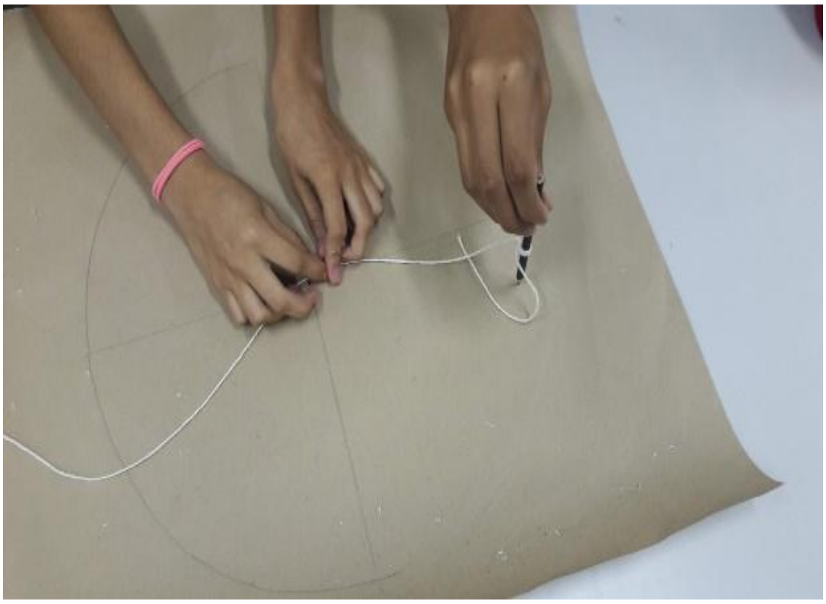
O estudo da Geometria é um forte instrumento para o desenvolvimento do raciocínio lógico. O modelo apresentado, foi utilizado para o ensino da trigonometria e suas funções, é de fácil observação, como já citado anteriormente. Os materiais concretos são alternativas interessantes para que alunos formulem hipóteses, troquem ideias, façam descobertas, ou seja, enriqueçam o momento de aprendizagem.

O material foi construído pelos próprios alunos, utilizando material reciclado. Com a construção e utilização do Geoplano Circular foi possível realizar atividades com a finalidade de:

- compreender a estrutura de figuras geométricas planas como quadrado, retângulo e circunferência;
- retomar os conceitos de raio, corda, diâmetro e ângulos;

- explorar conceitos do círculo trigonométrico, como sentido, quadrantes, ângulos;
- representar as medidas em graus e radianos;
- relacionar simetrias presentes no círculo trigonométrico; e
- construção dos conceitos das razões trigonométricas no círculo unitário, observação de sua simetria.

Figura 48: Alunos Desenhando a Circunferência para construção do Geoplano Circular



Fonte: Foto da Autora, durante a realização da Atividade

Figura 49: Construção do Geoplano Circular pelos alunos

Fonte: Foto da Autora, durante a realização da Atividade

A utilização desse recurso didático contribuiu para a observação e construção de conceitos trigonométricos importantes, principalmente no estudo da simetria existente no círculo trigonométrico, tornando o aprendizado mais significativo por ter sido construído pelos alunos, para posteriormente ser utilizado em sala de aula.

Material utilizado na construção do Geoplano Circular:

- 01 base quadrada de madeira com 18 a 20 centímetros de lado;
- 25 preguinhos 10x10 sem cabeça;
- martelo;
- borrachinhas para dinheiro;
- folha de papel;
- régua; compasso; e
- transferidor.

Passos da construção:

a. Desenhar um quadrado em folha de papel usando a base de madeira como molde.

b. Marcar o centro deste quadrado utilizando as diagonais.

c. Usando o compasso, traçar a circunferência com mesmo centro do quadrado e raio com medida igual a metade do lado do quadrado

d. Marcar duas retas perpendiculares passando pelo centro do quadrado.

e. Traçar a circunferência.

d. Dividir a circunferência em 12 arcos.

e. Sobrepor o desenho feito como molde sobre a base de madeira e marcar os pontos onde serão fixados os pregos.

f. Traçar a reta tangente e fixar os pregos concluindo a construção do geoplano circular.

5.2.2 – Circunferência Trigonométrica Manipulável

Na empresa MM Materiais Pedagógicos, encontrou-se uma Prancha Trigonométrica, contendo uma versão do material para o professor e outra para o aluno. Após pesquisa de preço, verificou-se que a aquisição do material não seria possível para atender a demanda de alunos, por questões orçamentárias. Sendo assim, passou-se a pesquisar possíveis adaptações do material.

Nos estudos de Rusciolelli (2014) encontrou-se uma versão adaptada da prancha sendo nomeada circunferência trigonométrica manipulável. O material elaborado pelo professor, era composto por uma placa de aço, barra de alumínio, folha imantada, material impresso em gráfica, chapa de acetato transparente, papel adesivo colorido e adesivo transparente.

Considerando a realidade local, observou-se a dificuldade na aquisição e fabricação do material apresentado. Fez-se então uma adaptação do material com custo bastante reduzido diante da proposta apresentada por Rusciolelli, possibilitando a confecção do material em quantidade necessária para equipar o laboratório de matemática da escola, sem necessidade de recursos governamentais.

Para construção da versão adaptada utilizou-se o modelo do desenho proposto por Rusciolelli (2014), com adaptação para os seguintes materiais:

- Fotocópia do desenho da circunferência trigonométrica adaptado para tamanho A4
- Papelão
- Base de madeira (forro de guarda roupa que foi desmontado);
- Folha transparente utilizada para encadernação;
- Parafuso com porca;
- Cola de madeira; e
- Adesivo transparente para plastificar.

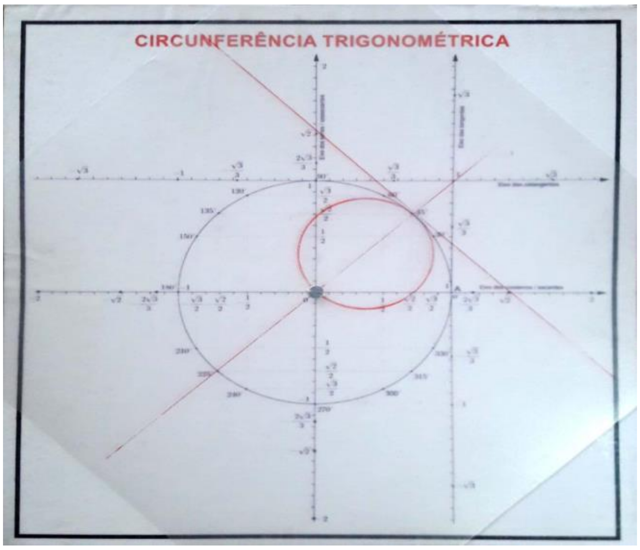
A princípio colocou-se a fotocópia do desenho no papelão e em seguida na base de madeira, plastificando-se o material. Na folha transparente desenhou-se uma circunferência **£** de raio medindo a metade do diâmetro da circunferência do desenho, riscando uma reta **r** secante que passa pelo seu centro e uma reta **s** tangente à circunferência **£** no ponto (1,0), conforme a figura 50:

Figura 50: Circunferência Trigonométrica Manipulável

Fonte: Foto da Autora

Ao utilizar a circunferência trigonométrica manipulável, percebe-se que ao girar a parte transparente, a reta r, forma um ângulo com o eixo dos cossenos, sendo possível verificar simultaneamente os valores do seno e do cosseno do ângulo, pela intercepção da circunferência **£** com os eixos das abscissas e ordenadas, a tangente e cotangente são determinadas pela intercepção da reta **r** com seus respectivos eixos, e a secante e cossecante pela intercepção da reta **s** com seus respectivos eixos.

Figura 51: Explorando a Circunferência Trigonométrica



Fonte: Foto da Autora

Com o material em mãos é possível explorar diversos conceitos trigonométricos, como investigar o comportamento de cada uma das razões trigonométricas de um arco, seu sinal para cada quadrante, valores máximos e mínimos, a medida do ângulo correspondente em graus e radianos, observar as características dos ângulos notáveis e seus simétricos, entre outros aspectos de acordo com o nível de aprendizado e o ano / série.

Como a proposta deste trabalho é investigar a abordagem do currículo do estado de são Paulo para o estudo das razões trigonométricas e do círculo unitário, sugere-se que as atividades propostas no caderno do aluno da primeira e segunda série do Ensino médio, sejam refeitas, utilizando o material acima confeccionado.

No próximo capítulo é apresentado um estudo feito com a utilização desse material em uma sala da 2ª série do Ensino Médio, de uma escola de área rural no município de Caiuá, São Paulo, onde lecionamos.

6 DESENVOLVIMENTO DO ESTUDO DA TRIGONOMETRIA COM USO DE DIFERENTES ESTRATÉGIAS DE ENSINO E APLICAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMETRIA MANIPULÁVEL

Para comprovar que o uso de estratégias diferenciadas pode facilitar a aprendizagem, escolhemos uma turma da 2ª série do Ensino Médio, em que lecionamos a disciplina de matemática, na E.E. Projeto Lagoa São Paulo, a escola está localizada à Rua Terezinha Almeida Santos nº 1005, Agrovila III, na cidade de Caiuá. Trata-se de uma escola de zona rural classificada na SED (Secretaria Escolar Digital) como escola de Assentamento (área rural). Neste ano, foi implantado o Programa de Ensino Integral (PEI), atendendo alunos das séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Os alunos são provenientes da própria Agrovila III e de outras Agrovilas pertencentes ao município, bem como alunos de assentamentos e sítios, formando uma clientela bastante heterogênea com interesse e atitudes diversas. A construção de um novo modelo de escola, espera superar diversas dificuldades enfrentadas na educação. Acredita-se que este modelo venha fornecer e ampliar as oportunidades de formação de jovens protagonistas, autônomos, solidários e competentes, capazes de alcançarem seus sonhos e aprimorarem-se como seres humanos, tendo maiores chances de acesso ao Ensino Superior e ao mercado de trabalho.

O histórico do IDESP do ano de 2018, mostra que a escola tinha a meta estabelecida pela SEESP, no Ensino Médio de 2,18 pontos, mas obteve média 1,83, não atingindo a meta e ainda declinando em relação ao ano anterior. Os resultados do ano letivo de 2018 da unidade escolar apontam fragilidades em relação ao aprendizado das habilidades essenciais para o ciclo que estão concluindo (Ver capítulo 3).

A análise dos indicadores constantes na Plataforma Foco Aprendizagem e no Boletim do SARESP/2018 possibilitou a compreensão da composição do índice do IDESP de 1,83 no Ensino Médio, onde foi possível delinear como fragilidades a meta do IDESP, que previa 100% de aprovação nas primeiras, segundas e terceiras séries e o percentual de alunos evadidos igual a zero% compondo o fluxo escolar com indicador um. O aumento do indicador de desempenho (ID) na 3ª série do EM diminuiu de 3,04 (2017) para 2,81 (2018).

Em Matemática houve aumento do abaixo do básico de 45,5% (2017) para 56,03% (2018) e diminuiu o número de alunos no básico de 54,5% (2017) para 43,8% (2018), não pontuando no nível adequado e no nível avançado. Os indicadores apontam que uma das principais fragilidades da escola está no desempenho dos alunos em Matemática, a meta da escola para o ano de 2019 para o Ensino Médio é de 2,04.

A turma da 2ª série do Ensino Médio, é composta de 12 alunos, sendo 3 meninas e 9 meninos com idades entre quatorze e dezoito anos. Alguns já passaram por correção de ciclo e estão atrasados com relação ao ano série. A turma ainda era considerada uma turma de R.I. (Recuperação Intensiva), com grande defasagem de conteúdo com relação ao ano/série que estão cursando, um outro agravante é que nos anos anteriores a escola teve muita rotatividade de professores, havendo períodos em que as aulas eram “cobertas” por professores eventuais, que não tinham formação específica na área de matemática, aumentando ainda mais a lacuna no conteúdo.

A proposta foi realizada entre os meses de março e junho de 2019, compondo a parte final deste estudo.

6.1 – Estudo do Triângulo Retângulo

Em um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos notou-se que tiveram contato com o triângulo retângulo. Sendo assim os conhecimentos insuficientes para a introdução dos conceitos trigonométricos. Então foi necessária uma retomada em conceitos de geometria de figuras planas como quadrado, retângulo e circunferência, conceito de ângulos, semelhança de triângulos, características do triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras. Na sequência apresentou-se aos alunos os conceitos das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Uma estratégia simples aplicada pela autora em sala de aula, foi a construção com régua, compasso e transferidor, de triângulos com mesmos ângulos, porém, de tamanhos diferentes. Em grupos, os alunos construíram triângulos de vários tamanhos. Os ângulos propostos para a investigação foram os de 30°, 45° e 60°; em seguida foi proposto aos alunos que fizessem a divisão entre os lados dos triângulos anotando os resultados.

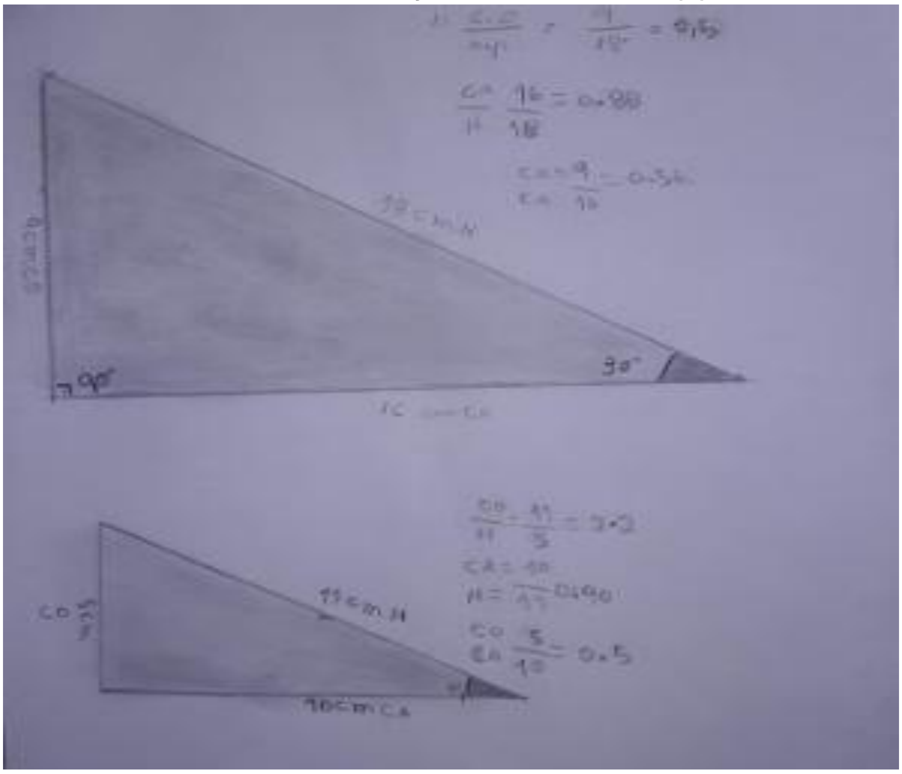
Durante a socialização, cada grupo transcreveu para uma tabela os resultados encontrados, anotando na lousa a conclusão das atividades. Os alunos puderam concluir que o resultado das divisões entre os lados de todos os triângulos que possuíam ângulos iguais, eram o mesmo, independentemente da medida dos lados.

A atividade foi bastante produtiva considerando-se que foi aplicada em uma sala da 2ª série do Ensino Médio, e que foi necessário retomar todo o conteúdo referente ao triângulo retângulo, desde a nomenclatura dos lados, significado de cateto oposto e adjacente, hipotenusa.

Os alunos foram exitosos na conclusão de que o valor resultante da divisão entre os lados dependia exclusivamente do ângulo e não da medida dos lados do triângulo. Na sequência foi apresentado aos alunos, os respectivos nomes dessas razões, seno, cosseno e tangente, concluindo com a resolução de situações problemas que envolviam os conceitos estudados.

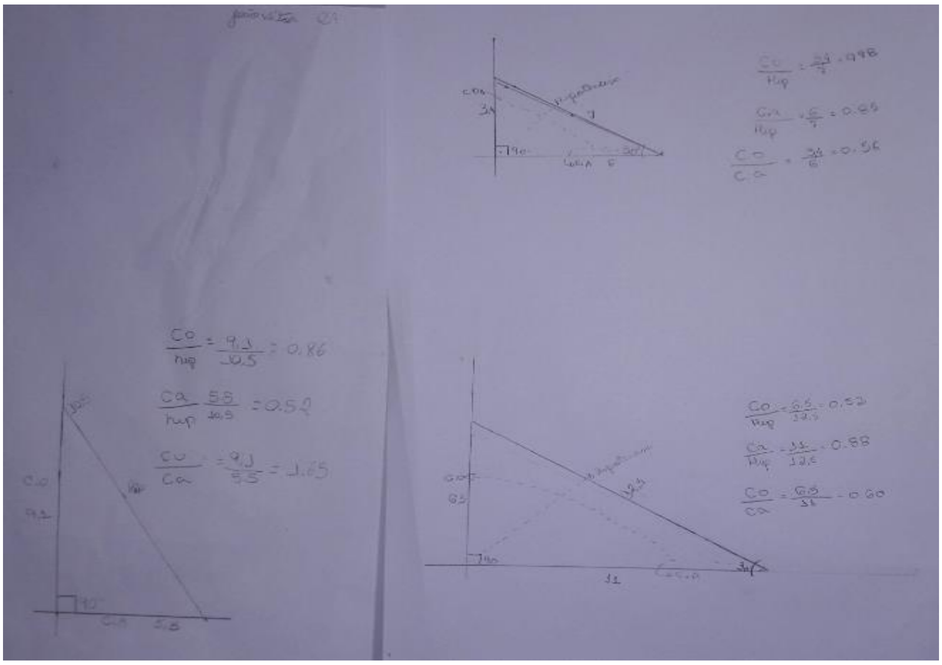
Observou-se que ainda há dificuldades no desenvolvimento das atividades, fazendo-se necessário a intervenção da professora. Diante dessa dificuldade presentada pela turma, terminamos essa etapa no início do mês de abril.

Figura 52: Triângulos construídos pelos alunos
durante a realização da Atividades (1)



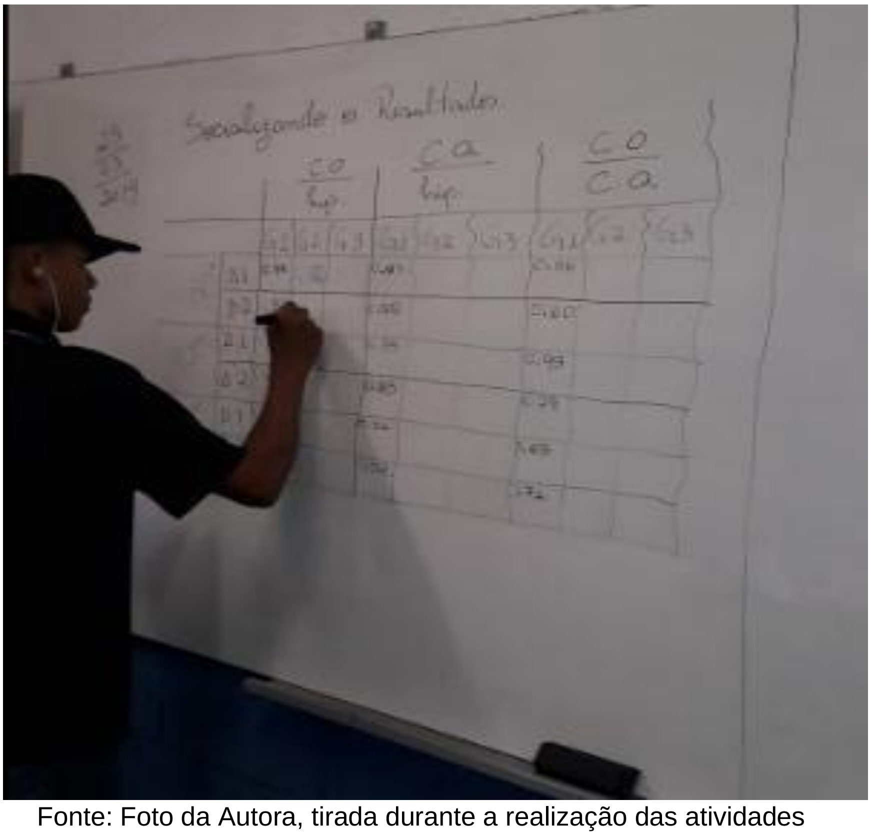
Fonte: Foto da autora, tirada durante a realização das atividades

Figura 53: Triângulos construídos pelos alunos durante a realização da Atividades (2)



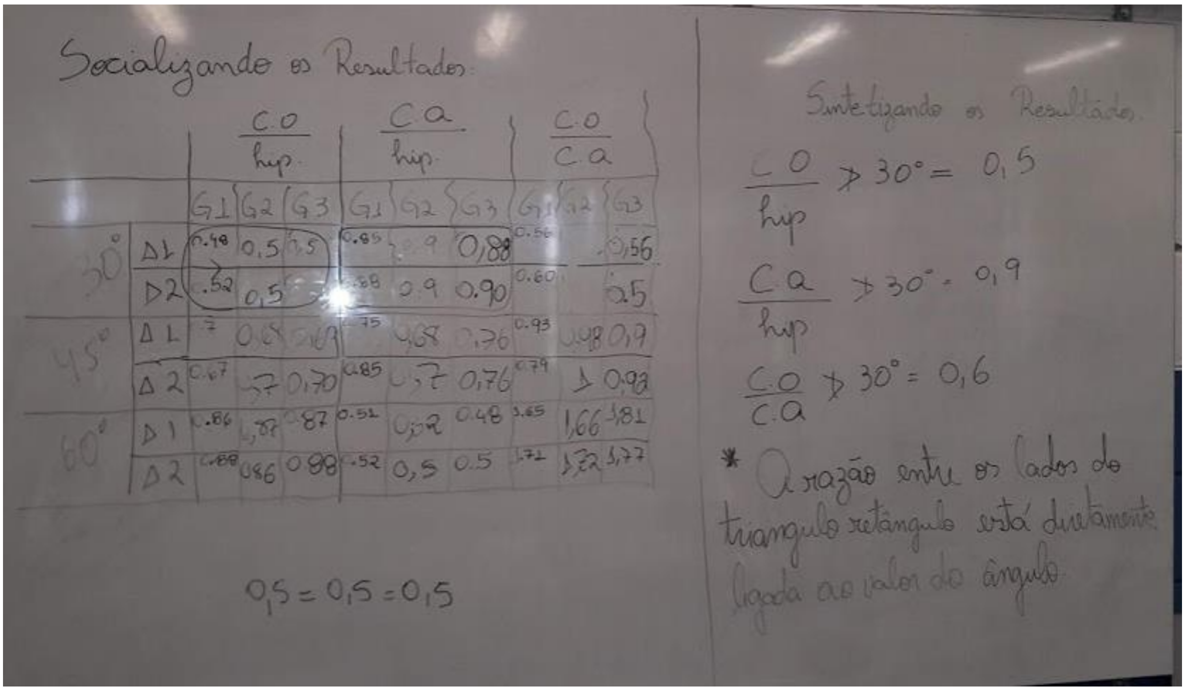
Fonte: Foto da autora, tirada durante a realização das atividades

Figura 54: Elaboração da Tabela de Resultados



Fonte: Foto da Autora, tirada durante a realização das atividades

Figura 55: Socialização dos resultados feito pelos alunos



Fonte: Foto da Autora, tirada durante a realização das atividades

6.2 – Aplicação do Geoplano Circular

Na sequência, realizou-se o estudo dos arcos na circunferência, e suas medidas em grau e radiano. Nessa etapa encontrou-se outra barreira: os alunos não sabiam aplicar a regra de três, apresentavam dificuldade de realizar a divisão, sendo necessário o uso de calculadora para avançar na apresentação dos conceitos.

Para essa etapa, além da apresentação teórica dos conteúdos, foi utilizado o geoplano circular construído por eles nas aulas de laboratório de matemática. Os alunos realizaram a atividade investigativa com barbante dividindo os ângulos de 180º e 360º em partes menores, relacionando essas partes com a divisão em π radianos. Foi possível verificar o tamanho do arco como medida expressa por um número real, o que facilitou a compreensão dos alunos na comparação das medidas.

Após as atividades práticas, foi proposto aos alunos que desenhassem um círculo trigonométrico em papel quadriculado, fazendo a divisão a cada 30° marcando as medidas em graus e em radianos.

Figura 56: Utilização do Geoplano Circular em Sala de Aula

Fonte: Foto da Autora, tirada durante a realização das atividades

6.3 – Aplicação da Circunferência Trigonométrica Manipulável

Nas aulas seguintes foram introduzidas as razões trigonométricas na circunferência. Devido à dificuldade dos alunos com relação aos conteúdos de matemática, optou-se por enfatizar somente as 3 razões principais, seno, cosseno e tangente. Observou-se que a maioria dos alunos apresentava pouco interesse nas aulas teóricas, pois a falta de pré-requisitos dificultava o aprendizado, sendo o principal dificultador no processo de ensino aprendizagem.

As principais dificuldades encontradas, foram que, apesar da revisão feita, ainda não dominavam o conceito de circunferência, não identificavam retas verticais e horizontais, reta tangente, tinham dificuldade em estabelecer a sequência dos números na reta real, não tinham domínio de plano cartesiano. Sendo assim foi necessário abordar esses conteúdos que eram pré-requisitos essenciais para continuidade do conteúdo, conseguindo atingir o final dessa etapa em meados do mês de maio.

Ao final dessa etapa foram propostos aos alunos algumas atividades que abordavam a inserção do triângulo retângulo no círculo trigonométrico e o estudo de suas propriedades.

A primeira atividade propôs que observassem um desenho do círculo trigonométrico explorando alguns arcos notáveis e os triângulos retângulos formados por eles, conforme descrito na Atividade 1. Seguindo a resolução apresentada por alguns alunos.

Atividade 1

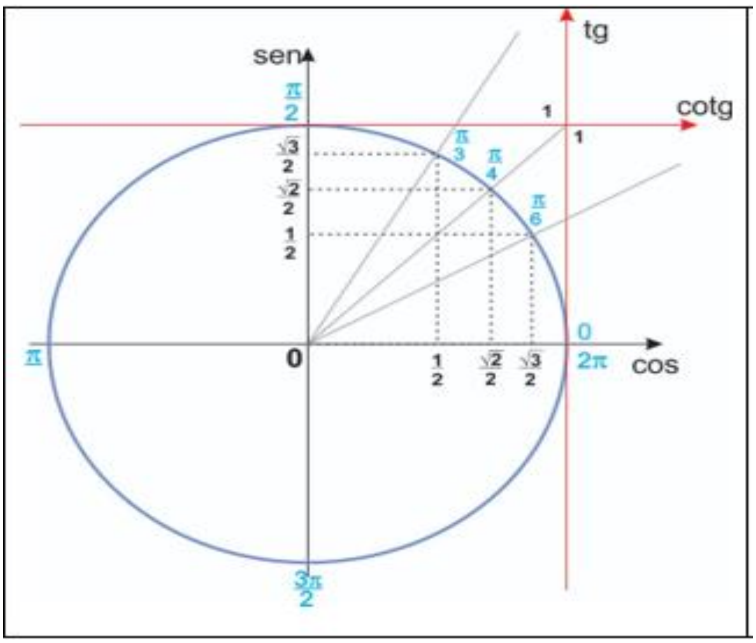
Estudando Os Arcos Do Primeiro Quadrante

1.Os ângulos correspondem a arcos sobre a circunferência. Essa correspondência se dá pelo triângulo retângulo traçado com um dos vértices no centro do círculo e outro sobre a circunferência. Quantos triângulos retângulos se formam para cada ponto da circunferência? _______________

2.Onde se apoia o terceiro vértice? ________________________________.

3.Observe o desenho da circunferência a seguir: (Os alunos receberam um desenho ampliado)

Figura 57 Desenho impresso do círculo trigonométrico recebido pelos alunos para a realização da atividade 1



Fonte: Figura da Autora

Localize na circunferência trigonométrica o ponto que determina o ângulo correspondente ao arco π/6 radianos. Veja os triângulos retângulos formados e encontre o terceiro vértice de cada triângulo.

- Qual ângulo central corresponde ao arco de π/6 radianos?
- Qual o valor encontrado para o seno desse ângulo?
- E para o cosseno?
- Repita esse procedimento para os outros arcos assinalados em azul no primeiro quadrante do desenho acima, anotando os valores encontrados:

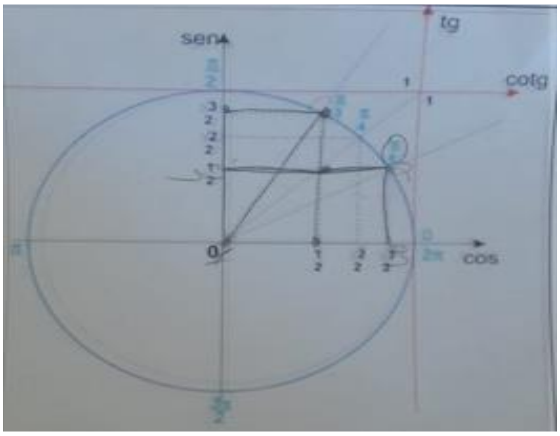
	Ângulo central	**seno**	**cosseno**
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{2}$			

Nos itens 1 e 2, era esperado dos alunos que conseguissem enxergar que, ao tomar o centro da circunferência como um dos vértices do triângulo e apoiando um segundo vértice sobre a circunferência, os eixos horizontal e vertical servirão de apoio para o terceiro vértice, formando-se 2 triângulos retângulos para cada vértice. No item 3, os alunos deveriam expressar os ângulos dados em radiano, em graus, e relacioná-los com os valores do seno e cosseno apontados nos eixos cartesianos.

Durante essa atividade os alunos apresentaram inicialmente bastante dificuldade na resolução, apresentando desinteresse na resolução, sendo necessário a intervenção da professora.

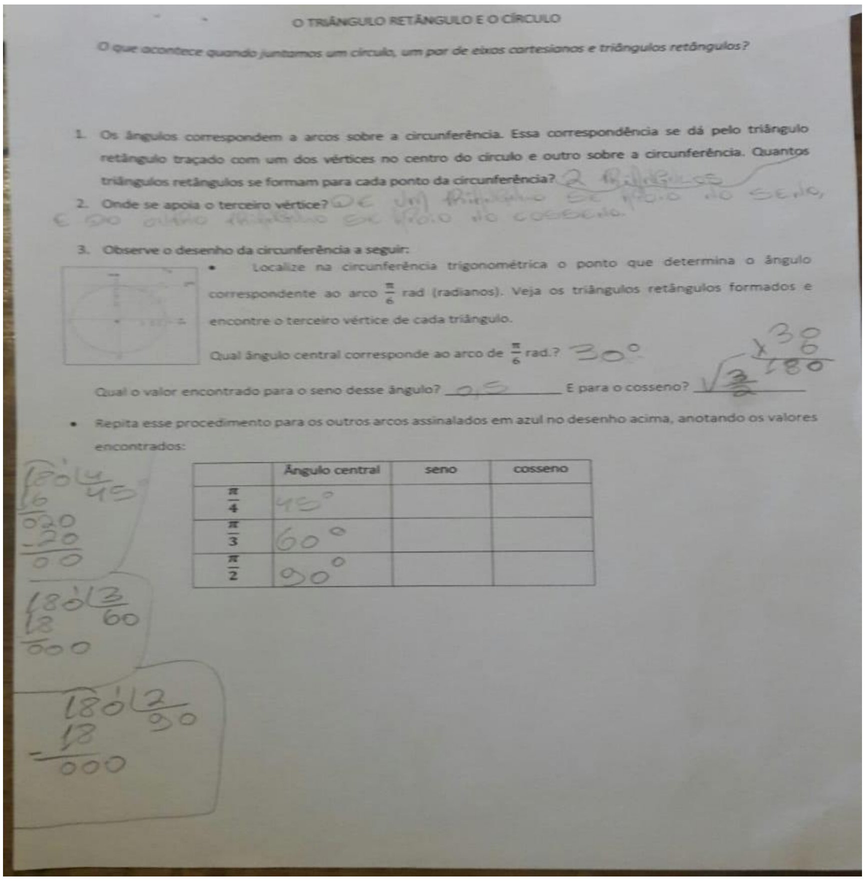
Vejamos a resolução de alguns alunos nas figuras 58 e 59.

Figura 58: Resolução do Aluno, Atividade 1



Fonte: Foto tirada pela autora, durante as atividades

Figura 59: Resolução apresentada por aluno, continuação da atividade 1



Fonte: Foto tirada pela autora, durante as atividades

Na análise de resultados da primeira atividade percebemos que 8 dos 12 alunos, conseguiram apontar que o terceiro vértice do triângulo pode ser apoiado em qualquer um dos eixos, podendo ser formados 2 triângulos retângulos semelhantes. Já no item 3, observou-se que os alunos não apresentaram problemas em apontar o ângulo de 30° para o arco de medida π/6 radiano , porém quando se pede que apontem o valor encontrado para o seno e cosseno desse ângulo, assim como para os demais ângulos assinalados em azul no primeiro quadrante, 10 dos 12 alunos apontam valores na forma decimal, o que nos leva a entender que não observaram corretamente o desenho, utilizando outros recursos para resolver a atividade.

Na sequência foi proposto à turma que fizesse as atividades descritas abaixo, investigando as razões trigonométricas básicas, seno, cosseno e tangente, e a simetria existente no círculo, com o uso da circunferência trigonométrica manipulável.

O material foi apresentado aos alunos, explicando como encontrar os valores das razões trigonométricas. Observou-se a mudança no interesse dos alunos quanto à resolução das atividades, ficaram curiosos em entender a lógica e o funcionamento do material, comparando as informações encontradas com o que foi estudado nas aulas teóricas.

Atividade 2 – Investigando o Seno e o Cosseno de um Arco

Questão 01: Observando a Circunferência Trigonométrica, complete a tabela para os primeiro e segundo quadrantes:

$\alpha\ (em\ radianos)$		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\,\pi}{3}$	$\frac{3\,\pi}{4}$	$\frac{5\,\pi}{6}$	π
$\alpha\ (em\ graus)$									
$sin\ \alpha$									
$cos\ \alpha$									

Observando a Circunferência Trigonométrica, complete a tabela para os terceiro e quarto quadrantes:

$\alpha\ (em\ radianos)$	$\frac{7\,\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\,\pi}{2}$	$\frac{5\,\pi}{3}$	$\frac{7\,\pi}{4}$	$\frac{11\,\pi}{6}$	$2\,\pi$
$\alpha\ (em\ graus)$								
$sin\ \alpha$								
$cos\ \alpha$								

Questão 02

a) Qual o valor máximo e valor mínimo encontrado para o seno?

b) Qual o valor máximo e valor mínimo encontrado para o cosseno?

c) Podemos dizer que o seno e o cosseno de um arco pertencem ao intervalo [- 1,1]?

d) Complete a tabela abaixo determinado a variação do seno e do cosseno:

Variação	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
seno				
Cosseno				

e) Na tabela abaixo determine os sinais do seno e do cosseno:

Sinal	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
seno				
Cosseno				

f) Na tabela abaixo determine se o seno e o cosseno são crescentes ou decrescentes:

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	adrante
seno				
Cosseno				

Atividade 3 – Investigando a Tangente de um Arco

Questão 01: Complete as tabelas abaixo:

$\alpha\ (em\ radianos)$		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\,\pi}{3}$	$\frac{3\,\pi}{4}$	$\frac{5\,\pi}{6}$	π
$\alpha\ (em\ graus)$									
$tg\ \alpha$									
$\alpha\ (em\ radianos)$	$\frac{7\,\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\,\pi}{2}$	$\frac{5\,\pi}{3}$	$\frac{7\,\pi}{4}$	$\frac{11\,\pi}{6}$	$2\,\pi$	
$\alpha\ (em\ graus)$									
$tg\ \alpha$									

Questão 2

a) Por que não está definido, ou seja, não existe tg90º e tg270º?

b) A tangente de um arco pode assumir qualquer valor real?

c) A tangente de um arco possui valor máximo e mínimo?

d) Complete a tabela abaixo determinado o sinal da tangente no:

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
tangente				

e) Na tabela abaixo determine se a tangente é crescente ou decrescente no:

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
tangente				

Atividade 4 – Investigando A Simetria No Círculo Trigonométrico

Questão 01: Sendo **α** e **β** complementares, das relações trigonométricas entre os lados de um triângulo retângulo, temos que o seno do complementar de α, é o cosseno de α. Verifique na circunferência trigonométrica essa relação, para alguns ângulos pertencentes ao primeiro quadrante:

Se α = 30° então β =__________ assim, sen30° = cos ____° = ________
Se α = 45° então β =__________ assim, sen45° = cos ____° = ________
Se α = 60° então β =__________ assim, sen60° = cos ____° = ________

Questão 2: Agora observe a simetria existente entre os ângulos do primeiro quadrante e seus simétricos pertencentes aos outros três quadrantes do Círculo. Conhecendo o sen30º = _________ e cos30º=___________, relacione-os com a medida dos segmentos orientados que representam o seno e o cosseno dos seguintes ângulos:

sen 120° = _______° = ________ e cos 120° = ________° = ________
sen 150°= _______° = ________ e cos 150° = ________° = ________
sen 210°= _______° = ________ e cos 210° = ________° = ________
sen 240° = _______° = ________ e cos 240° = ________° = ________
sen 300°= ________° = ________ e cos 300° = _______° = _________
sen 330°= ________° = _________ e cos 330° = ________° = ________

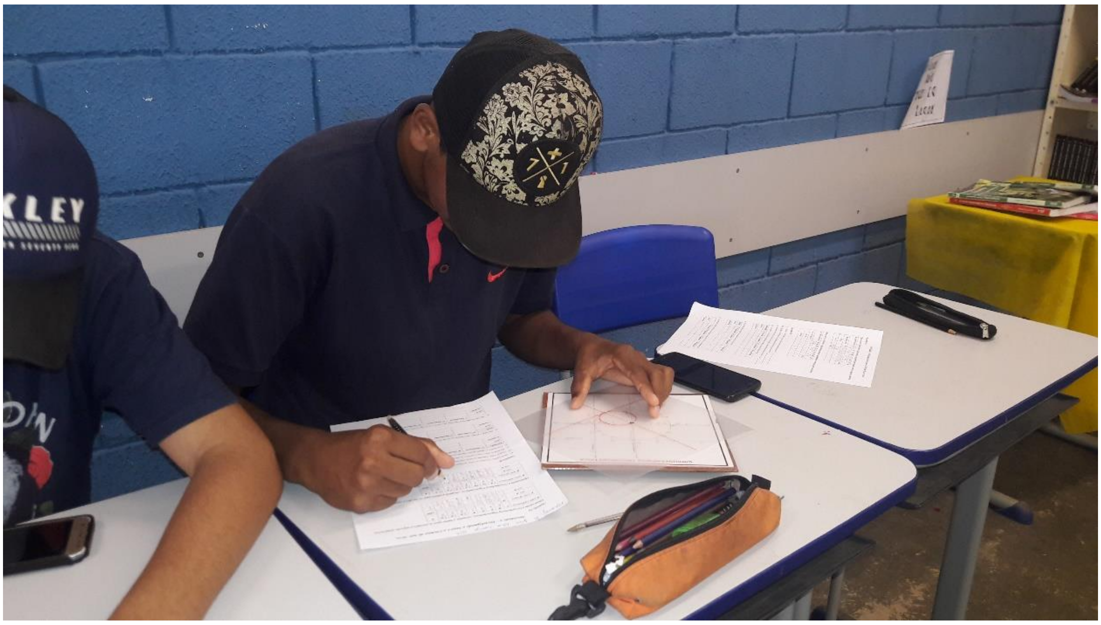
Figura 60: Resolução das atividades com o uso do material manipulável

Fonte: Foto da autora, tirada durante a realização das atividades

Figura 61: Resolução das atividades com o uso do material manipulável

Fonte: Foto da autora, tirada durante a realização das atividades

Figura 62: Alunos realizando as atividades com o uso do material



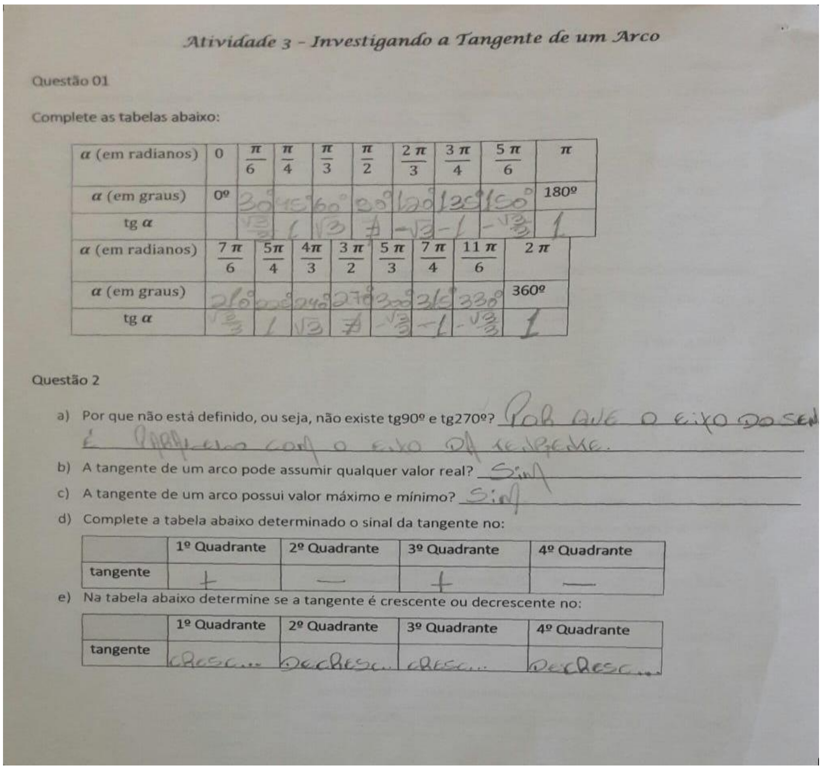
Fonte: Foto da autora, tirada durante a realização das atividades

Analisando os resultados da segunda etapa de atividades em relação à primeira, feita sem o uso do material manipulável, observou-se uma melhora no interesse e no aprendizado dos alunos. Entre os itens que apresentaram resolução satisfatória, podemos apontar:

- Identificar corretamente o valor das razões trigonométricas, em especial para os arcos de 0º,90°,180°,270° e 360°.
- Observar as variações das razões trigonométricas na circunferência e nos quadrantes.
- Verificar o porquê a tangente não é definida para alguns arcos.
- Analisar corretamente o crescimento e decrescimento das razões trigonométricas.
- Estudo dos sinais das razões de acordo com cada um dos quatro quadrantes.
- Verificação de arcos simétricos.
- Simetria existente entre o valor do seno e cosseno de arcos complementares.

As figuras 63 e 64, mostram a resolução da Atividade 3, realizada com o auxílio do material manipulável.

Figura 63: Atividade 3 - Resolução de Aluno



Atividade 3 – Investigando a Tangente de um Arco

Questão 01

Complete as tabelas abaixo:

α (em radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α (em graus)	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º
tg α		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

α (em radianos)	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α (em graus)	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1

Questão 2

a) Por que não está definido, ou seja, não existe tg90º e tg270º? Por que o eixo do seno é paralelo com o eixo da tangente.

b) A tangente de um arco pode assumir qualquer valor real? Sim

c) A tangente de um arco possui valor máximo e mínimo? Sim

d) Complete a tabela abaixo determinado o sinal da tangente no:

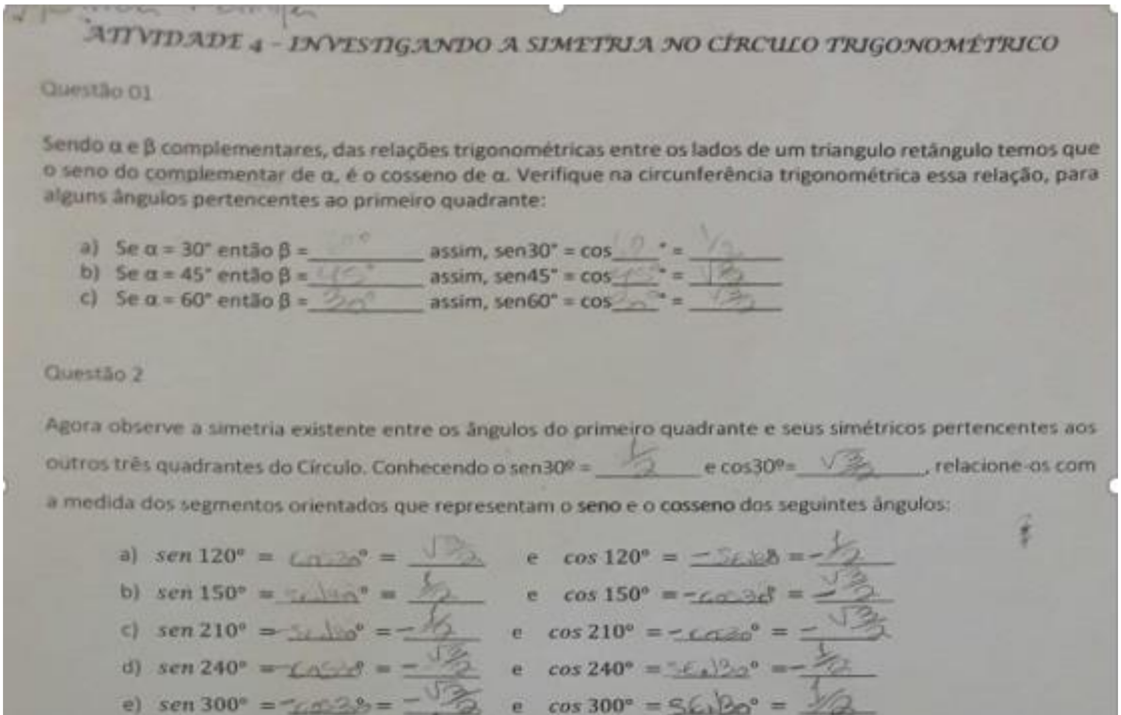
	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
tangente	+	—	+	—

e) Na tabela abaixo determine se a tangente é crescente ou decrescente no:

	1º Quadrante	2º Quadrante	3º Quadrante	4º Quadrante
tangente	cresc...	decresc...	cresc...	decresc...

Fonte: Foto da Autora, tirada durante a realização das atividades

Figura 64: Resolução de atividade de aluno, com uso do material manipulável



ATIVIDADE 4 – INVESTIGANDO A SIMETRIA NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Questão 01

Sendo α e β complementares, das relações trigonométricas entre os lados de um triangulo retângulo temos que o seno do complementar de α, é o cosseno de α. Verifique na circunferência trigonométrica essa relação, para alguns ângulos pertencentes ao primeiro quadrante:

a) Se α = 30° então β = 60º assim, sen30° = cos 60° = 1/2

b) Se α = 45° então β = 45º assim, sen45° = cos 45° = √2/2

c) Se α = 60° então β = 30º assim, sen60° = cos 30° = √3/2

Questão 2

Agora observe a simetria existente entre os ângulos do primeiro quadrante e seus simétricos pertencentes aos outros três quadrantes do Círculo. Conhecendo o sen30º = 1/2 e cos30º = √3/2, relacione-os com a medida dos segmentos orientados que representam o seno e o cosseno dos seguintes ângulos:

a) *sen* 120° = cos 30° = √3/2 e *cos* 120° = − sen 30 = −1/2

b) *sen* 150° = sen 30° = 1/2 e *cos* 150° = − cos 30° = −√3/2

c) *sen* 210° = − sen 30° = −1/2 e *cos* 210° = − cos 30° = −√3/2

d) *sen* 240° = − cos 30° = −√3/2 e *cos* 240° = − sen 30° = −1/2

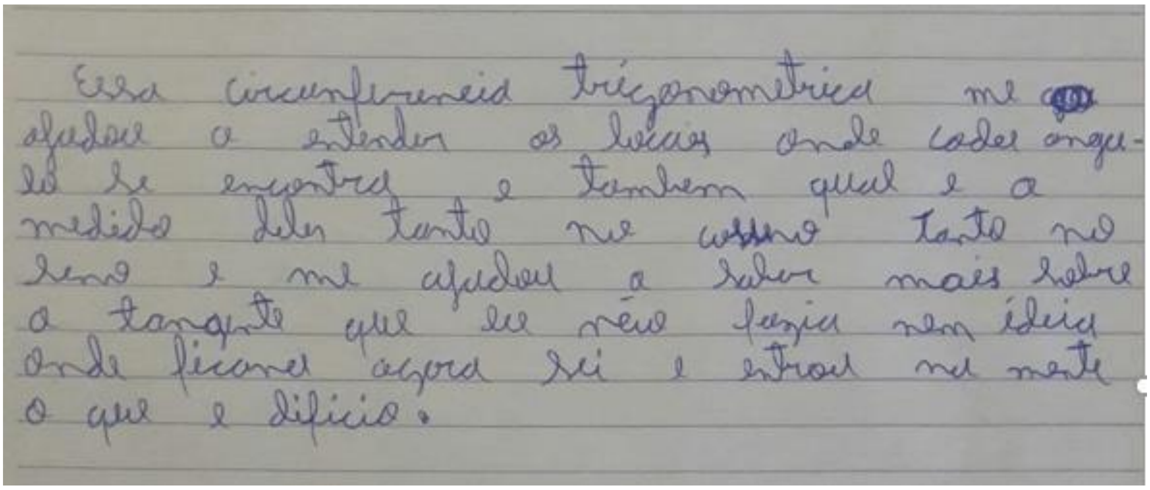
e) *sen* 300° = − cos 30 = −√3/2 e *cos* 300° = sen 30° = 1/2

f) *sen* 330° = − sen 30 = −1/2 e *cos* 330° = cos 30° = √3/2

Fonte: Foto da Autora, tirada durante a realização das atividades

Ao término das atividades pediu-se aos alunos que descrevessem como foi a experiência de trabalhar com a circunferência trigonométrica e em que o uso do equipamento ajudou na aprendizagem. Os apontamentos foram bastante satisfatórios com pode-se observar em alguns depoimentos:

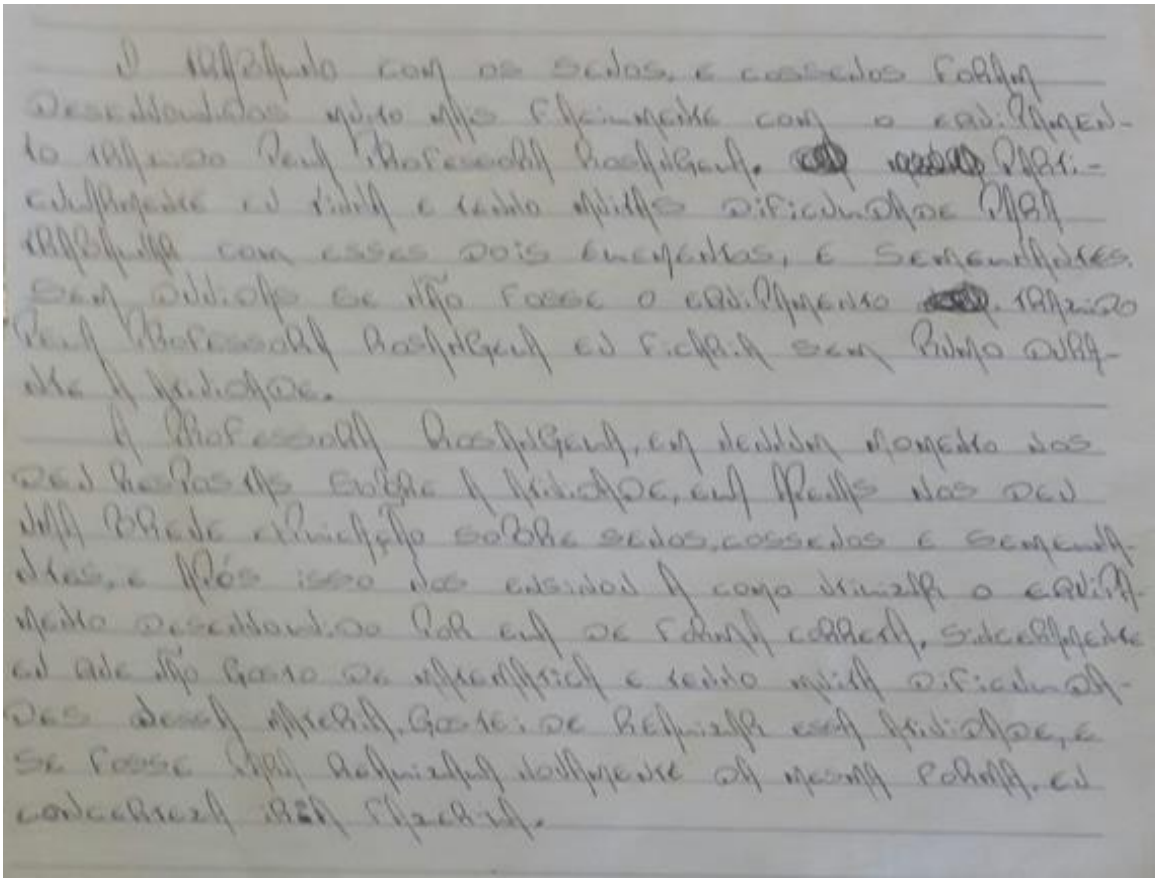
Figura 65: Depoimento de aluno, quanto ao uso do material manipulável



Essa circunferencia trigonometrica me ajudou a entender os locais onde cada angulo se encontra e tambem qual e a medida dele tanto no cosseno tanto no seno e me ajudou a saber mais sobre a tangente que eu não fazia nem ideia onde ficava agora sei e entrou na mente o que e dificio.

Fonte: Foto da Autora

Figura 66: Depoimento de aluno sobre o uso do material manipulável

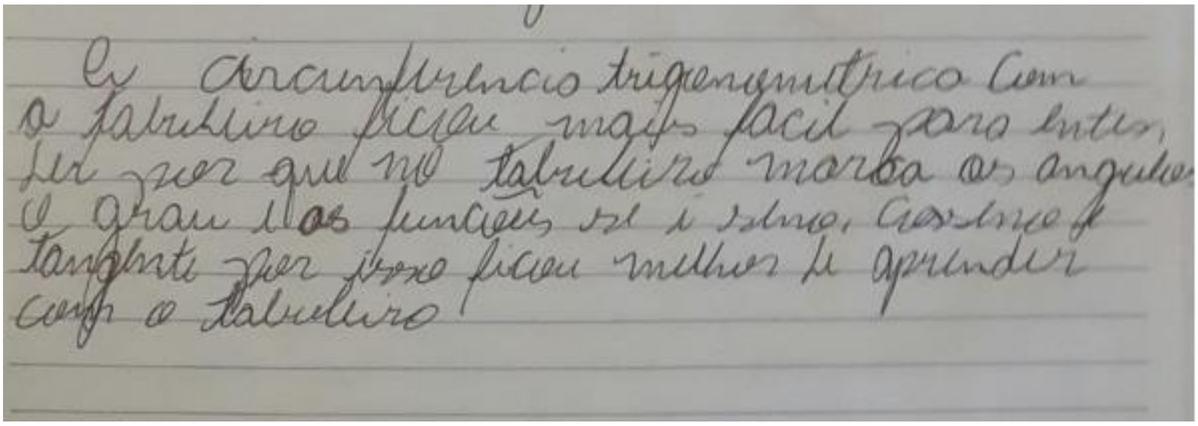


O trabalho com os senos e cossenos foram desenvolvidos muito mais facilmente com o equipamento trazido pela professora Rosangela. praticamente eu tinha e tenho muitas dificuldades para trabalhar com esses dois elementos, e semelhantes. Sem dúvida se não fosse o equipamento trazido pela professora Rosangela eu ficaria sem rumo durante a atividade.

A professora Rosangela, em nenhum momento nos deu respostas sobre a atividade, ela apenas nos deu uma breve explicação sobre senos, cossenos e semelhantes, e após isso nos ensinou a como utilizar o equipamento desenvolvido por ela de forma correta, sinceramente eu que não gosto de matemática e tenho muitas dificuldades desta matéria, gostei de realizar esta atividade, e se fosse para realizar novamente da mesma forma, eu concordaria para fazê-la.

Fonte: Foto da Autora

Figura 67: Depoimento de aluno sobre o uso do material manipulável


e circunferencio trigonometrica com
o tabuleiro ficou mais facil para enten-
der por que no tabuleiro marca os angulos
e grau das funções sen e seno, Cosseno e
tangente por isso ficou melhor de aprender
com o tabuleiro

Fonte: Foto da Autora

6.4 – Considerações após as atividades

Após realizar as atividades descritas com a turma do 2°A, percebeu-se que o uso de diferentes estratégias de ensino, a cada etapa do aprendizado, bem como o uso de materiais concretos, são de grande valia para o ensino da trigonometria e da matemática, pois diversificam a aula, despertando o interesse dos alunos e tornando-os mais receptivos à realização das atividades.

Ao comparar as aulas em que utilizamos somente a metodologia proposta nos cadernos do Currículo do estado de São Paulo com as aulas em que utilizamos estratégias diversificadas, como o geoplano e a circunferência trigonométrica manipulável, os alunos realizaram as atividades de forma mais assertiva, conseguindo assimilar melhor os conceitos trigonométricos abordados, realizando as atividades com mais independência, tendo a oportunidade de construir o próprio conhecimento, o que certamente tornará o aprendizado mais significativo e permanente.

Um outro ponto a se considerar com relação à proposta do Currículo do estado de São Paulo é quanto ao ensino em espiral do conteúdo, ou seja, os conteúdos são ensinados e revistos posteriormente com maior aprofundamento, esse modelo aumenta o tempo em que se trabalha um mesmo conteúdo, porém esse espaçamento de tempo em anos/séries diferentes, causa grandes lacunas e quebra a sequência de aprendizagem dos alunos.

Observou-se os resultados de uma turma que não havia tido contato com o conteúdo sendo possível criar uma sequência didática que abrangesse os principais conceitos em apenas 4 meses de atividades.

Como já dito anteriormente nesse estudo, a trigonometria é vista como um conteúdo abstrato e sem significado, de difícil compreensão para os alunos. O trabalho com materiais concretos tornou o aprendizado das razões trigonométricas eficaz, modificando a visão dos alunos sobre a dificuldade em aprender esse conteúdo.

Os conceitos aprendidos servirão de base para que possam avançar e aprofundar os conhecimentos de trigonometria, podendo aplicar esses conhecimentos em situações problemas que envolvem o uso do tema.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tem-se observado, um declínio cada vez mais acentuado no aprendizado da matemática, principalmente nos índices das escolas públicas, em especial no ensino médio. Um dos maiores problemas encontrados é a falta de professores efetivos e a defasagem em relação aos conteúdos, tendo como consequência, alunos sem pré-requisitos para o ano/série que estão cursando, dificultando bastante a aprendizagem, principalmente nos conteúdos relacionados a trigonometria. Diante desse contexto, é necessário que haja mudanças nas estratégias de ensino, para que o aprendizado ocorra de forma eficaz, trazendo novo significado ao ensino e aprendizagem da matemática.

Recursos como o uso de tecnologia e materiais concretos, são grandes ajudadores se usados adequadamente, podendo ser construídos juntamente com os alunos, sendo o professor um mediador na construção do conhecimento, dando ao aluno a oportunidade de traçar seu próprio caminho para o aprendizado.

Percebeu-se que é possível traçar estratégias de ensino diferenciadas, complementando a proposta curricular do Estado de são Paulo, otimizando o tempo em sala de aula e tornando o aprendizado mais eficaz.

Com a utilização de aulas práticas, material concreto como o geoplano, e o uso da circunferência trigonométrica manipulável, observou-se que foi possível criar uma sequência didática para uma turma da 2ª série do Ensino Médio, que estava bem atrasada no conteúdo em relação ao ano/série, e que ainda tinha o agravante de ser considera uma turma de R.I. (Recuperação Intensiva), em que os alunos apresentavam total desinteresse pelas aulas.

Os alunos conseguiram assimilar os conteúdos básicos relacionados à trigonometria, apresentando interesse durante as aulas em que se utilizou o geoplano e a circunferência trigonométrica manipulável, comprovado nos depoimentos dados per eles.

Pode-se concluir que esses materiais são um recurso facilitador, fundamental para despertar o interesse dos educandos pelas aulas, tornado mais eficaz o processo ensino-aprendizagem.

Além de tornar as aulas mais dinâmicas e prazerosas, o uso desses materiais tornou mais fácil a visualização das propriedades referentes às razões trigonométricas e à simetria existente no círculo trigonométrico, tornando o aluno protagonista do próprio conhecimento.

Infelizmente as dificuldades encontradas nessa turma do ensino médio, representam o cenário encontrado nas escolas públicas do estado de São Paulo, e consequentemente presentes nas salas de aula.

Ao aplicar estratégias diferenciadas de ensino na sala de aula, percorremos caminhos que desmistificam o ensino da trigonometria e principalmente da matemática, desconstruindo a imagem de “terror das matérias”, trazendo significado para sua aprendizagem, fazendo com que nossos alunos se tornem investigativos e consigam traçar estratégias para a resolução de problemas, que é uma das principais exigências da sociedade moderna. No entanto é preciso também que o estado invista na formação continuada dos professores, oferecendo cursos de aperfeiçoamento visando a melhoria do ensino, e a valorização desse profissional.

Espera-se que esse trabalho tenha contribuído para melhorar o olhar sobre a metodologia utilizada no Currículo do estado de são Paulo e que as estratégias diferenciadas e materiais concretos aqui apresentados, contribuam para um trabalho mais prazeroso e eficaz na sala de aula.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. Prefácio de Isaac Azimov e Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, SP: Blucher,2010, 496 p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 15 de mar. 2016

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf pdf> Acesso em: 15 mar. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio, vol. 2**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf> Acesso em: 15 mar. 2016

BRASIL. Ministério da Educação. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei no 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília, DF, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática; 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio**: Matemática. Brasília, DF, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **PCN +** (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais); Volume 2, 2002.

COSTA, Camila Lima da. **A utilização do laboratório de matemática para o ensino e aprendizagem da trigonometria no 2º ano do ensino médio**. 2016. 95 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Alagoas, Maceió, 2016.

DE OLIVEIRA, DAVI VIEIRA RAMOS. **A Resolução de Problemas como Método de Ensino de Trigonometria**. 2014. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014.

EVES, Howard Whitley. **Introdução da história da matemática**. 5a ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2011, 843p.

FARADAY. **Frases Matemáticas.** Disponível em <https://www.andersondeassisbarros.wordpress.com/2017/07/24/frases-matematicas> Acesso em 22 de fevereiro de 2019.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. 17º ed. Rio de Janeiro, Paz e Terra, 1987.

FREIRE, P. **Pedagogia da Esperança:** um reencontro com a pedagogia do oprimido. 3 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1994. 245 p.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa / Paulo Freire. – São Paulo: Paz e Terra, 1996. – (Coleção leitura).

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia** – Saberes Necessários a Prática Educativa. Editora Paz e Terra, São Paulo, 2011.

FREIRE. P.; SHOR. I. **Medo e Ousadia** – O cotidiano do Professor. 13 edição. Editora Paz e Terra. São Paulo, 2011.

GUTIERRE, Liliane dos Santos. **O ensino de Matemática no Rio Grande do Norte: trajetória de uma modernização (1950-1980)**. 2008. 2008. Tese de Doutorado. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

KENNEDY, Eduard S. **Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula: trigonometria** (v.5). 6. ed. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

MASETTO, M.T. **O professor na hora da verdade: a prática docente no ensino superior.** São Paulo: Avercamp, 2010.

MATREIRO, Amanda. **A desmistificação da geometria por meio da ludicidade: Geoplano como ferramenta facilitadora para o ensino e aprendizagem.** 2018. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2018.

REIS, Fabiana dos. **Uma Visão Geral Da Trigonometria: História, Conceitos E Aplicações**. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual De Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

RUSCIOLELLI, Danilo Porto. **Circunferência Trigonométrica Manipulável**. 2014. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2014. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2011.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno: matemática, ensino fundamental – 9º ano**, volume 2/ Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: matemática, ensino fundamental – 9º ano**, volume 2/ Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno: matemática, ensino médio- 1ª série**, volume 2/ Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe,Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: matemática, ensino médio- 1ª série**, volume 2/ Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe,Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno: matemática, ensino médio- 2ª série**, volume 2/ Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe,Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: matemática, ensino médio- 2ª série**, volume 2/ Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe,Nilson José Machado, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Walter Spinelli, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo. - São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Matriz de Avaliação Processual: Matemática. Encarte do Professor: matemática.** Secretaria da Educação; coordenação, Ghrisleine Trigo Silveira, Regina Aparecida Resek Santiago; elaboração, equipe curricular de Matemática - São Paulo: SEE, 2016.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo**: Matemática / Coord. Maria Inês Fini. – São Paulo: SEE, 2014-2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Boletim Pedagógico do SARESP de 2018**. Disponível em: http://saresp.fde.sp.gov.br/2016/ Acesso em 20 jul. 2019.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **IDESP**. Disponível em: http://www.educacao.sp.gov.br/idesp Acesso em 20 jul. 2019.

Sala de estudo: Trigonometria do triângulo retângulo. Disponível em <http://clubes.obmep.org.br/blog/trigonometria-do-triangulo-retangulo>. Acesso em 22 de fevereiro de 2019.

SOUSA, Francisco Delmar Pinheiro de. **Proposta de atividades para o ensino de trigonometria**. 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

Teorema de Tales. <https://www.estudopratico.com.br/teorema de tales.jpg>. Acesso em 22 de fevereiro de 2019.

UBERTI, G.L. **Uma abordagem das aplicações trigonométricas**. 2003. Tese (Doutorado em Física) - Centro de Ciências Físicas e Matemáticas - Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.