

**O corpo dos números complexos e uma proposta de
abordagem no ensino médio**

Carlos Silveira de Souza Filho

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Carlos Silveira de Souza Filho

O corpo dos números complexos e uma proposta de abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Ires Dias

USP – São Carlos
Agosto de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S729c Souza Filho, Carlos Silveira
O corpo dos números complexos e uma proposta de
abordagem no ensino médio / Carlos Silveira Souza
Filho; orientadora Ires Dias. -- São Carlos, 2019.
53 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática, Estatística
e Computação Aplicadas à Indústria) -- Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade
de São Paulo, 2019.

1. Números complexos. 2. Quatérnios. I. Dias,
Ires, orient. II. Título.

Carlos Silveira de Souza Filho

The complexes numbers field and a proposition approach in
high school

Master dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
Mathematics Professional Master's Program. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree
Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Ires Dias

USP – São Carlos
August 2019

Dedico esse trabalho a minha esposa Fayene, amiga, companheira e meu grande amor, que esteve do meu lado todo esse tempo.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer as seguintes pessoas:

Minha mãe Adelaide pelo suporte emocional e financeiro que, mesmo não estando presente nessa última parte da minha vida, tornou possível todo caminho para eu chegar aqui.

Minha esposa Fayene e ao meu pai Carlos que sempre me incentivaram a realizar esse trabalho.

A minha Orientadora Ires Dias pelo profissionalismo e paciência que teve durante toda a construção desse trabalho.

RESUMO

SOUZA, C. S. **O corpo dos números complexos e uma proposta de abordagem no ensino médio**. 2019. 55 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Nesta dissertação abordamos o conjunto dos números complexos, apresentando sua forma algébrica e geométrica, demonstrando que se trata de um conjunto com estrutura algébrica de corpo.

Apresentamos também as características de rotação e homotetia da operação de multiplicação, a contextualização histórica e finalizamos com uma proposta de abordagem para o ensino médio. Vemos também a impossibilidade de realizar rotação em três dimensões culminando com a criação dos quatérnios.

Palavras-chave: Números complexos, Homotetia, quatérnios, corpo, estrutura algébrica.

ABSTRACT

SOUZA, C. S. **The complexes numbers fild and a proposition approach in high school.** 2019. 55 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

In this master's thesis we discuss the complex numbers set, showing its algebraic and geometric forms, demonstrating which it is a set with algebraic structure of field.

We also presente the rotation characteristics and homothety of multiplication operation, the historical contextualization and we finalized with an approach proposal for the high school. We also see the impossibility of performing the rotation in three dimensions resulting the generation of quaternions.

Keywords: complex numbers, homothety, quaternions, field, algebraic structure.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Multiplicação de números complexos em sua forma vetorial	37
Figura 2 – Representação vetorial dos números reais	42
Figura 3 – Rotação do ponteiro do relógio	43
Figura 4 – Representação gráfica de um número complexo	46
Figura 5 – Representação gráfica de $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	NÚMEROS COMPLEXOS - UM POUCO DE HISTÓRIA	19
2.1	O surgimento dos números complexos	19
2.2	Os quatérnios	23
3	O PLANO COMPLEXO	27
3.1	Estruturas algébricas	27
3.2	Forma algébrica do corpo dos números complexos	30
3.3	Forma vetorial do conjunto dos número complexos.	33
4	COMO APRESENTAR OS NÚMEROS COMPLEXOS AOS ALU- NOS - UMA PROPOSTA	39
4.1	Construção geométrica do conjunto dos números complexos.	41
4.1.1	<i>Revisão de vetores.</i>	41
4.1.2	<i>Apresentação de um problema conveniente.</i>	42
4.1.3	<i>Resolução do problema sugerido.</i>	44
4.1.4	<i>Resolução de exercícios.</i>	44
4.2	Apresentação dos números complexos na forma algébrica.	44
4.2.1	<i>Contextualização histórica e apresentação de problemas.</i>	44
4.2.2	<i>Solução para os problemas envolvendo raízes negativas.</i>	45
4.2.3	<i>Forma polar ou trigonométrica de um número complexo</i>	45
4.2.4	<i>Algumas curiosidades envolvendo o conjunto dos números complexos.</i>	47
4.2.5	<i>Resolução de exercícios</i>	48
4.2.5.1	<i>Resolução da equação do terceiro grau estudada por Bombelli</i>	48
4.3	Equivalência da forma geométrica e da algébrica do conjunto dos números complexos	49
4.3.1	<i>Resolução de um problema de rotação</i>	49
4.3.2	<i>Demonstração da equivalência entre a forma algébrica e a forma geométrica dos números complexos</i>	49
4.3.3	<i>Resolução de exercícios</i>	50
4.4	Rotação em três dimensões	50

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	55

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática é um desafio em qualquer sistema de ensino, esse desafio é imposto por diversos motivos, vão desde a conjuntura social em que os alunos estão inseridos (um desafio para o ensino como um todo), passando pelo extenso conteúdo, até as dificuldades inerentes da própria matemática, como por exemplo, o pensamento abstrato.

Diante das dificuldades citadas acima, nós professores, não temos como mudar a realidade social em que os alunos estão inseridos e muito menos subtrair a abstração necessária para compreender muitas áreas da matemática, porém podemos analisar o conteúdo, não só do ponto de vista da quantidade, mas também do modo como trabalhamos e do modo como diferentes áreas da matemática e das outras disciplinas se entrelaçam.

Ao estudar uma progressão aritmética, juros simples, equação do primeiro grau, função afim, função linear, movimento uniforme, uma parte do movimento uniformemente variado na mecânica e a segunda lei de Newton na dinâmica nota-se variações do estudo da reta, ou seja, tanto o estudo da função afim como do movimento uniforme é o estudo de uma determinada reta.

Porém estudamos os conteúdos citados acima como se fossem coisas completamente diferentes, existe um descolamento entre a natureza do problema e o problema, ou seja, é ignorado que a natureza desses problemas é uma taxa de variação constante entre duas grandezas.

Essa natureza em comum aparece como mágica para os estudantes, como no estudo do movimento uniforme onde, como num passe de mágica, é apresentado que a velocidade é igual a tangente ou coeficiente angular da reta formada pelo gráfico do espaço pelo tempo, ou seja, $Sx t$. Como o aluno não compreende a natureza dos problemas trabalhados então resta a ele decorar essa informação sem saber o motivo pelo qual isso acontece.

Diante desse cenário, colocamos neste trabalho uma proposta de mostrar para o aluno a natureza do objeto estudado, diversas maneiras de estudá-lo e diferentes tipos de aplicações e

interpretações.

Para atingir esses objetivos pretendemos dar ênfase em duas maneiras de abordar o conjunto dos números complexos, sendo uma delas o tratamento dos números complexos como vetores munidos de operações que, entre outras coisas, fazem rotação e homotetia, a outra abordagem seria uma ferramenta para resolver equações do terceiro grau e questionar as diferentes interpretações das raízes quadradas negativas nas equações do segundo e terceiro grau, ou seja, usando o fato de que quando tentamos resolver equações de segundo grau e nos deparamos com uma raiz quadrada negativa concluímos a não existência de raiz real, porém aos nos depararmos com esse mesmo problema ao tentar resolver equações do terceiro grau a conclusão é diferente, pois toda equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz real. Assim estimulamos o aluno a perceber a natureza geométrica da operação multiplicação dos números complexos e a existência de um universo maior que os números reais.

Também comentamos sobre as tentativas de fazer algo análogo aos complexos no espaço $\mathbb{R}^3$, mostrando que esta tentativa é impossível e apresentamos a generalização no $\mathbb{R}^4$, ou seja, os quatérnios.

Os alunos deverão compreender a natureza das operações do conjunto dos números complexos, a existência de um conjunto "maior" que o conjunto dos números reais, as relações entre eles e alguns problemas concretos. Para atingir esses objetivos vamos construir uma proposta de ensino do conjunto dos números complexos utilizando sua forma vetorial e algébrica, problemas concretos e, sempre que possível, a contextualização histórica desses problemas.

NÚMEROS COMPLEXOS - UM POUCO DE HISTÓRIA

Em geral os números complexos são apresentados de maneira abstrata, ou seja, apresenta-se e ensina-se os alunos a trabalhar com eles, porém com poucas conexões práticas ou contretas.

O objetivo deste capítulo é oferecer uma alternativa para minimizar esses problemas, ou seja, disponibilizar algumas ferramentas para que o professor possa contextualizar historicamente o conjunto dos números complexos e trabalhá-los de uma maneira mais concreta, não só isso, buscaremos também oferecer ferramentas para que o professor possa ir um pouco além, ou seja, mostrar as limitações de um sistema com um eixo real e dois imaginários e finalmente apresentar uma noção sobre os quatérnios.

2.1 O surgimento dos números complexos

Historicamente existiram algumas razões para o surgimentos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, pode-se ler nos livros de história da matemática como os sistemas de numeração ajudaram o desenvolvimento tecnológico, desde a facilitação da contagem de ovelhas no final do dia, (ver pág 13 de [Mol 2013]), passando por projeções no mercado financeiro até cálculos para pousarmos foguetes em asteróides, ou seja, as circunstâncias fazem com que determinados conceitos se imponham, (ver introdução ii de [Milies]). Os números complexos fazem parte dessa evolução, assim como os pastores de ovelhas tinham necessidade de um modo mais prático de contar suas ovelhas os físicos precisavam de um corpo algébrico com conceito de vetor para modelar suas teorias e, matemáticos, entre outras coisas, queriam resolver uma equação do tipo $x^2 + a = 0$, com $a > 0$, (ver pág 1 de [Felzenszwalb 1979]). Quando olhamos para os números complexos como um modo de operar vetores no plano, fazendo translação (+) e roto-homotetia ($\cdot$), temos que além de resolver a equação $x^2 + a = 0$, com $a > 0$, o conjunto dos

números complexos se torna uma excelente ferramenta de modelagem de fenômenos que podem ser descritos como vetores no plano, como acontece em várias áreas da física e da matemática.

Para melhor compreender o surgimento e desenvolvimento dos números complexos é interessante conhecer um pouco mais sobre o desenvolvimento da álgebra.

Porém, para podermos falar sobre a evolução da álgebra, não podemos nos furtar de lembrar que a mesma experimentou um “alargamento” do conceito de operação e número (agora visto como um elemento) marcando a ruptura entre a álgebra clássica (concreta) e a álgebra abstrata. Assim o foco deixa de ser o significado das operações e dos elementos e passa a ser suas propriedades.

No desenvolvimento da matemática tivemos alguns percalços, como por exemplo a compreensão da natureza dos números negativos e dos números irracionais. Em meio ao ceticismo em relação aos números irracionais e negativos tivemos o aparecimento dos números complexos. Como os problemas matemáticos eram, em geral, derivados de problemas concretos então quando um matemático se deparava com uma raiz negativa ele simplesmente interpretava que o problema não tinha solução.

Um dos problemas concretos onde não existia solução seria por exemplo, encontrar os lados de um triângulo retângulo cuja área vale 7 unidades e o perímetro vale 12 unidades, ver pág 14 de [Milies]).

Note que tomando x e y como catetos do triângulo retângulo de área igual a 7 e perímetro igual a 12 temos a hipotenusa igual a $12 - x - y$ e, pelo teorema de Pitágora temos:

$$x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2, \text{ ou seja,}$$

$$x^2 + y^2 = 144 - 24x - 24y + x^2 + 2xy + y^2.$$

Assim, simplificando, temos:

$$-24x - 24y + 2xy + 144 = 0.$$

Como, a área do triângulo vale 7 e $x, y \neq 0$, temos:

$$y = \frac{14}{x}.$$

Consequentemente

$$-24x - 24\left(\frac{14}{x}\right) + 2x\left(\frac{14}{x}\right) + 144 = 0.$$

ou seja,

$$24x^2 - 172x + 336 = 0.$$

Esta equação tem as seguintes raízes:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Com isso os matemáticos chegavam a conclusão de que não existia um triângulo com essas características. Porém ao estudar as equações de terceiro grau viram seus paradigmas serem destruídos. Raphael Bombelli (1526-1573) em sua obra estudou, entre outras coisas, equações de até quarto grau. Ao estudar a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ percebeu que $x = 4$ era solução da equação, porém ao aplicar a fórmula de Cardano, chegou ao seguinte resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Diferentemente do problema envolvendo área e perímetro de triângulos, onde deduziam que não existia um triângulo que satisfazia tal problema, agora tinham uma equação com uma solução conhecida cuja solução analítica se deparava com raízes negativas.

Assim Bombelli chega a conclusão que deve existir uma raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$, e mais importante, que essa solução deveria ser da forma $a + \sqrt{-b}$, com $b > 0$.

Porém Bombelli não parou por aí, ele seguiu seus cálculos e igualando

$$a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4,$$

chegou que $a = 2$ e de posse dessa informação ele igualou:

$$(2 - \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

Assim encontrou $b = 1$ e tirando raiz cúbica dos dois lados concluiu que:

$$2 + \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}.$$

Analogamente:

$$2 - \sqrt{-1} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Com isso Bombelli chegou ao seguinte resultado:

$$2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4.$$

Neste raciocínio Bombelli precisou de uma solução ($x = 4$) para encontrar uma outra maneira de escrever a solução de modo que as raízes negativas se anulassem, porém encontrou uma maneira de solucionar o problema mesmo tendo uma raiz quadrada negativa no caminho.

É importante ressaltar que a persistência em continuar a estudar uma equação, mesmo tendo se deparado com uma raiz negativa, iniciou a ruptura com o paradigma dominante da época, iniciando um caminho a ser seguido e abrindo as portas para mais uma reestruturação ou até mesmo uma revolução do estudo da matemática.

A evolução da notação e a ideia de número complexo ajudou nos estudos dos mesmos, os principais colaboradores foram Albert Girard, introduzindo o símbolo $\sqrt{-1}$ em 1629, René Descartes, empregando o termo real e o imaginário em 1637, Leonhard Euler introduzindo o símbolo i no lugar do $\sqrt{-1}$ que se popularizou ao ser usado por Gauss em 1832, que nomeia esse novo conjunto numérico de conjunto dos números complexos.

Posteriormente a Bombelli tivemos diversos trabalhos na tentativa de legitimar o uso dessas raízes negativas, dois importantes trabalhos foram o de Abraham De Moivre e o de Leonhard Euler. O primeiro obteve a fórmula para calcular raízes n -ésimas de um número complexo, porém ele justifica com casos particulares e não demonstra para o caso geral, então entra Euler e em 1748 demonstra a fórmula de De Moivre e estende-a para qualquer expoente real. Assim a existência de raízes complexas ficaram finalmente estabelecidas.

Pouco tempo depois de Gauss nomear esse novo conjunto como o conjunto dos números complexos o irlandês William Rowan Hamilton, em 1833, foi o primeiro a tratar os números complexos na forma de par ordenado de números reais e definiu suas operações como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc);$$

onde a, b, c, d, e , e f são números reais.

Hamilton dizia que a forma $a + bi$ era um acidente histórico por não ser possível somar a com bi assim como somamos 5 com 7. Outra vantagem em usar pares ordenados seria eliminar o controverso $i = \sqrt{-1}$. Uma observação importante é notar que o conjunto dos números reais pode ser descrito como o conjunto dos pares do tipo $(x, 0)$, ver pág 2 de [\[Felzenszwalb 1979\]](#).

Para termos uma perspectiva de quão controverso era usar $i = \sqrt{-1}$ podemos observar um texto escrito por Agustin Louis Cauchy.

Na teoria das equivalências algébricas, substituída pela teoria dos números imaginários, a letra i deixa de representar o símbolo $\sqrt{-1}$ que repudiamos comple-

tamente e que pode ser abandonado sem arrependimento uma vez que não sabemos o que este suposto signo significa nem que sentido dar a ele...

2.2 Os quatérnios

Muitos fenômenos cotidianos acontecem em mais de duas dimensões como, por exemplo, as aplicações de forças, que acontecem em três dimensões, logo era natural que matemáticos procurassem um conjunto com uma determinada estrutura algébrica, assim como os complexos, onde se possa realizar rotação e homotetia de vetores em três ou mais dimensões.

Assim como Hamilton tratou os números complexos como vetores, acabou sendo natural tentar estender essa ideia, ou seja, inserir um terceiro eixo, chamado de (j) tal que $1j = j$ e $j^2 = -1$.

Porém, como será demonstrado abaixo, é impossível a existência de tal estrutura.

Suponha que exista esse conjunto, que denotaremos por $\mathbb{B}$ e seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, então para todo $x \in \mathbb{B}$, temos:

$$x = a + bi + cj, \text{ para algum } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Como $ij \in \mathbb{B}$ então podemos escrevê-los como:

$$ij = a + bi + cj, \text{ para algum } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Então, multiplicando por i dos dois lados temos:

$$i(ij) = (ii)j = i^2j = -j = i(a + bi + cj) = ai + bi^2 + cij = ai - b + cij.$$

Como isso obtemos:

$$ai - b + cij + j = 0.$$

Substituindo ij por $a + bi + cj$ na equação acima temos:

$$0 = ai - b + c(a + bi + cj) + j = ai - b + ca + cbi + c^2j = ca - b + i(cb + a) + j(c^2 + 1).$$

Logo:

$$ca - b + i(cb + a) + j(c^2 + 1) = 0.$$

Como $1, i, j$ são linearmente independentes, temos que $ca - b = 0$, $cb - a = 0$ e $c^2 + 1 = 0$, ou seja, $c^2 = -1$ implicando que $c \notin \mathbb{R}$, o que é uma contradição, pois supomos que c era um número real.

Com isso podemos concluir que não é possível construir um conjunto com uma estrutura algébrica de 3 dimensões análoga a estrutura do conjunto dos números complexos.

Com dificuldade em definir o produto ij e ji nas ternas e a busca de manter que o comprimento do produto dos vetores seja igual ao produto dos comprimentos, fato que chamou de *lei dos módulos*, ver pág 34 de [Milies], Hamilton percebeu a necessidade de introduzir uma quarta dimensão, ou seja, uma nova variável livre k .

Ao perceber essa necessidade Hamilton fica empolgado e podemos perceber isso na carta que ele escreveu para seu filho:

Mas no dia 16 do mesmo mês [outubro de 1843] - que era uma segunda feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal,..., embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse fechado; e saltou uma faísca, o heraldo de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante peguei minha libreta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contém a solução do problema.

Com essas convenções Hamilton deduziu as seguintes propriedades $ij = k$, $jk = i$ e $ki = j$. Porém existe um problema com esses resultados visto que multiplicando i à esquerda na igualdade de $ij = k$, obtemos $ii j = ik$. Logo $-j = ik$. Assim o $ik = -j \neq j = ki$, ou seja, $ik \neq ki$. Analogamente, conclui-se que $jk \neq kj$ e $ij \neq ji$.

Desse modo Hamilton criou o primeiro exemplo de anel não comutativo com divisão, ver pág 10 de [Milies], como veremos a definição no próximo capítulo. Hamilton também nomeou este conjunto, munido dessa nova estrutura, de conjunto dos quatérnios, que é denotado por $\mathbb{H}$, em sua homenagem, ver pág 9 de [Santiago 2009].

Generalizando a noção de conjugado dos números complexos, Hamilton considerou a mesma noção nos números que tinha acabado de introduzir, ou seja, dado $x = a + bi + cj + dk$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$, o seu conjugado é:

$$x = a - bi - cj - dk.$$

De maneira análoga, temos o módulo de x como sendo:

$$||x|| = \sqrt{x\bar{x}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Destas propriedades, pode-se mostrar que:

1. $x \neq 0$ se e somente se, $||x|| \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$.
2. $||xy|| = ||x|| \cdot ||y||$, para todo x e $y \in \mathbb{H}$.
3. $x^{-1} = \frac{1}{||x||} \bar{x}$, para todo $x \in \mathbb{H}$ tal que $x \neq 0$.

É importante perceber que existe o inverso multiplicativo então podemos dizer que possui divisão, pois dado x e $y \in \mathbb{H}$, com $x \neq 0$, então $\frac{x}{y} = xy^{-1} = \frac{x\bar{y}}{||y||}$.

Desse modo Hamilton atinge seu objetivo, ou seja, a generalização dos complexos, generalizando a noção de módulo e comprimento, como desejado desde o início de seus estudos e, que se mostrou impossível em dimensão 3.

O PLANO COMPLEXO

BHA proposta deste capítulo é fornecer ao leitor uma fundamentação teórica para compreender e utilizar os números complexos como vetores onde podemos realizar roto-homotetia.

Para atingir o objetivo desse capítulo iremos:

1. Definir as estruturas de grupo, anel, domínio de integridade e corpo.
2. Definir homomorfismo e isomorfismo.
3. Construir um conjunto de vetores munido da operação de adição usual entre vetores e uma multiplicação de modo que os vetores resultantes realizem roto-homotetia. Denotaremos esse novo conjunto pelo símbolo $\mathbb{D}$.
4. Demonstrar que $\mathbb{D}$ possui a estrutura algébrica de corpo.
5. Finalmente demonstraremos que o $\mathbb{D}$ é isomorfo ao conjunto dos complexos, denotado por $\mathbb{C}$.

3.1 Estruturas algébricas

Desde o início dos estudos em matemática apresentamos ao aluno os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, suas operações, as propriedades dessas operações e as características particulares de seus elementos, como por exemplo a comutatividade da multiplicação e as características de um número primo. Em geral não existe reflexão sobre elas, apenas apresentamos como uma verdade e ensinamos os alunos a trabalharem com elas.

Porém é fundamental para o professor compreender que as propriedades das operações dos conjuntos e as características de alguns elementos não são absolutas, ou seja, ao mudar

alguma coisa em um conjunto podemos perder alguma propriedade e até mesmo características dos seus elementos.

Exemplos não faltam, ao estudar o conjunto dos números complexos da forma tradicional, ou seja, algébrica, temos a impressão de que apenas adicionamos mais um elemento, no caso o i , ao conjunto dos números reais e tudo continua como estava, porém algumas características dos elementos mudam completamente. Uma delas é a noção de maior ou menor como conhecemos nos reais, pois não podemos dizer que i é maior ou menor do que 1. Outra é a característica de primalidade dos inteiros, ou seja, os números inteiros primos da forma $a^2 + 1$ para algum $a \in \mathbb{Z}$ deixam de ser primos no conjuntos dos inteiros de Gauss, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z}\}$, por exemplo o número primo 5 pode ser fatorado em fatores diferentes de 5 e 1, pois $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1 = 2^2 - i^2 = (2 + i)(2 - i)$ e a

Tendo em vista a importância das propriedades dos conjuntos, os matemáticos não poderiam se furtar de classificá-los de acordo com suas propriedades, ou seja, dar nomes diferentes para conjuntos com diferentes propriedades.

Como abordado no início desse trabalho as propriedades algébricas podem e serão trabalhadas, em vários momentos, de maneira abstrata, desse modo é importante perceber que as operações representadas com $(+)$ e $(\cdot)$ não serão, necessariamente, as operações de adição e multiplicação usuais.

Como as estruturas de grupo, anel, domínio de integridade e corpo serão utilizadas em vários momentos optamos por defini-las a fim de melhorar o entendimento do texto pelo leitor.

Um conjunto não vazio G munido de uma operação $(+)$, chamada adição, é dito ser um grupo se satisfaz os seguintes axiomas:

A.1 Associatividade da adição: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo a, b e $c \in G$.

A.2 Elemento neutro: Existe $0 \in G$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in G$.

A.3 Elemento oposto: Dado $a \in G$, existe um $b \in G$ tal que $a + b = 0 = b + a$.

Dizemos que G é um grupo comutativo ou abeliano se, além dos axiomas acima, também satisfaz:

A.4 Comutatividade da adição: $a + b = b + a$, para todo a e $b \in G$.

Um conjunto não vazio A , munido de duas operações $(+)$ e $(\cdot)$, chamadas respectivamente de adição e multiplicação, é dito ser um anel com identidade, ou simplesmente um anel, se $(A, +)$ é um grupo abeliano e, satisfaz os seguintes axiomas:

M.1 Associatividade: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todo a, b e $c \in A$.

M.2 Elemento neutro (identidade): Existe $1 \in A$, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo $a \in A$.

M.3 Distributividade: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + ac$, para todo a, b e $c \in A$.

Dizemos que um anel A é um anel comutativo se satisfaz:

M.4 Comutatividade da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in A$.

Dizemos que um anel comutativo A é um domínio de integridade se satisfaz:

M.5 Lei do anulamento: $a \cdot b = 0$ se, e somente se $a = 0$ ou $b = 0$, para todo a e $b \in A$.

Dizemos que um domínio de integridade A é um corpo se todo elemento não nulo possui inverso multiplicativo, ou seja:

M.6 Para todo $a \in A$, tal que $a \neq 0$, existe um $b \in A$, com $b \neq 0$, tal que $a \cdot b = 1$.

Pode-se mostrar que o inverso multiplicativo, o oposto ou o inverso aditivo de um elemento a de um corpo é único. Normalmente denotaremos o oposto de a por $-a$ e o inverso por a^{-1} .

Ao estudar conjuntos estruturados algebricamente percebemos que alguns conjuntos, apesar de possuírem elementos e operações completamente diferentes, possuem comportamentos similares, ou seja, estruturas algébricas similares, porém nem sempre essa similaridade é tão evidente, pelo contrário, muitas vezes nos deparamos com estruturas aparentemente dissociadas de qualquer similaridade, contudo ao investigar a fundo percebemos que elas possuem estruturas algébricas similares ou até análogas. Para investigar essas similaridades os matemáticos usam relações entre elas, chamadas de homomorfismo.

Sejam $(G, +)$ e $(G', +)$ dois grupos. Uma função $f : G \rightarrow G'$ é dita ser um **homomorfismo de grupos** se preserva as operações, ou seja:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo x e $y \in G$.

Se além disso f for um homomorfismo bijetor, dizemos que f é um **isomorfismo de grupos** e que os grupos G e G' são isomorfos.

No caso de anéis, para dois anéis $(A, +, \cdot)$ e $(A', +, \cdot)$ uma função $f : A \rightarrow A'$ é dita ser um **homomorfismo de anéis** se preserva as operações, ou seja:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, para todo $x, y \in A$.
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, para todo $x, y \in A$.

Se além disso, f for bijetor então diremos que f é um **isomorfismo de anéis** e que os anéis A e A' são isomorfos.

3.2 Forma algébrica do corpo dos números complexos

Seja $\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } i^2 = -1\}$. Para todo $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ em $\mathbb{C}$, definimos as operações:

1. Operação de adição (+).

$$\bullet z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

2. Operação de multiplicação ($\cdot$).

$$\bullet z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + cdi + bdi^2 = ac + adi + bci + bd(-1) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Mostraremos que, com as operações de adição e multiplicação definidas acima, $\mathbb{C}$ é um corpo.

Para $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = e + fi$ em $\mathbb{C}$, temos:

A.1) A adição é associativa.

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi) = ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi) = \\ &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i = (a + (c + e)) + (b + (d + f))i = \\ &= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i) = (a + bi) + ((c + di) + (e + fi)) = z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

A.2) A adição admite elemento neutro.

O elemento $0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$ é tal que:

$$z_1 + 0 = z_1 + (0 + 0i) = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = (a + bi) = z_1 =$$

$$(a + 0) + (b + 0)i = (0 + a) + (0 + b)i = (0 + 0i) + (a + bi) = (0 + 0i) + z_1 = 0 + z_1.$$

A.3) A adição admite elemento oposto.

Para cada $z_1 \in \mathbb{C}$ temos $-z_1 = (-a) + (-b)i \in \mathbb{C}$, tal que:

$$z_1 + (-z_1) = (a + bi) + ((-a) + (-b)i) = (a + (-a)) + (b + (-b))i = 0 + 0i =$$

$$((-a) + a) + ((-b) + b)i = ((-a) + (-b)i) + (a + bi) = (-z_1) + z_1.$$

A.4) A adição é comutativa.

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i =$$

$$(c + di) + (a + bi) = z_2 + z_1.$$

M.1) A multiplicação é associativa.

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (e + fi) =$$

$$((ac - bd) + (ad + bc)i) \cdot (e + fi) = (ace - bde + acfi - bdfi + adei + bcei - adf - bcf) =$$

$$(a(ce - df) - b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce - df))i = (a + bi) \cdot ((ce - df) + (cf + de)i) =$$

$$(a + bi)((c + di) \cdot (e + fi)) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

M.2) Vale a propriedade distributiva.

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a + bi) \cdot ((c + di) + (e + fi)) =$$

$$(a + bi) \cdot ((c + e) + (d + f)i) = ac + ae + adi + afi + bci + bei - bd - bf =$$

$$(ac + adi + bci - bd) + (ae + afi + bei - bf) =$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) + (a + bi) \cdot (e + fi) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

M.3) A multiplicação admite elemento neutro.

Temos $1 = 1 + 0i \in \mathbb{C}$ tal que:

$$z_1 \cdot 1 = z_1 \cdot (1 + 0i) = (a + bi) \cdot (1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + bi \cdot 1) = a + bi = z_1 =$$

$$a + bi =$$

$$(1 \cdot a - 0 \cdot b) + (0 \cdot a + 1 \cdot bi) = (1 + 0i)(a + bi) = (1 + 0i) \cdot z_1 = 1 \cdot z_1.$$

M.4) A multiplicação é comutativa.

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (da + cb)i =$$

$$(c + di) \cdot (a + bi) = z_2 \cdot z_1.$$

M.5) Vale a lei do anulamento.

De fato, se $z_1 \cdot z_2 = 0$ e $z_1 \neq 0$, temos:

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (1 + 0i) \cdot z_2 = z_1 \cdot z_1^{-1} \cdot z_2 = z_1^{-1} \cdot z_1 \cdot z_2 = z_1^{-1} \cdot 0 = 0.$$

M.6) A multiplicação admite elemento inverso.

De fato, para cada $z_1 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 \neq 0 + 0i$, existe $z_1^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) \in \mathbb{C}$ tal que:

$$z_1 \cdot z_1^{-1} = (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \right) =$$

$$\left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \right) + \left(b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} + a \cdot \left(\frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \right) i =$$

$$\left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) i = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{ab - ab}{a^2 + b^2} \right) i = 1 + 0i = 1.$$

3.3 Forma vetorial do conjunto dos número complexos.

Seja $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ o conjunto de pontos do plano. Para todo $(x, y), (z, w) \in \mathbb{D}$, definimos as operações:

1. Operação de adição (+).

- $(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w).$

2. Operação de multiplicação ($\cdot$).

- $(x, y) \cdot (z, w) = (xz - yw, xw + yz).$

Mostraremos que, com as operações de adição e multiplicação definidas acima, $\mathbb{D}$ é um corpo.

A.1) A adição é associativa.

De fato, para todo $(x, y), (z, w), (p, q) \in \mathbb{D}$ temos:

$$((x, y) + (z, w)) + (p, q) = (x + z, y + w) + (p, q) = ((x + z) + p, (y + w) + q) =$$

$$(x + (z + p), y + (w + q)) = (x, y) + (z + p, w + q) = (x, y) + ((z, w) + (p, q)).$$

A.2) A adição admite elemento neutro.

De fato, para todo $(x, y) \in \mathbb{D}$ o elemento $(0, 0) \in \mathbb{D}$ é tal que:

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (0, 0) + (x, y).$$

A.3) A adição admite elemento oposto.

De fato, para cada $(x, y) \in \mathbb{D}$ temos $(-x, -y) \in \mathbb{D}$, tal que:

$$(x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (x - x, y - y) = (0, 0) =$$

$$((-x) + x, (-y) + y) = (-x, -y) + (x, y).$$

A.4) A adição é comutativa.

De fato, para todo $(x, y), (z, w) \in \mathbb{D}$ temos:

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w) = (z + x, w + y) = (z, w) + (x, y).$$

M.1) A multiplicação é associativa.

De fato, para todo $(x, y), (z, w), (p, q) \in \mathbb{D}$ temos:

$$[(x, y) \cdot (z, w)] \cdot (p, q) = (xz - yw, xw + yz) \cdot (p, q) =$$

$$((xz - yw)p - (xw + yz)q, (zx - yw)q + (xw + yz)p) =$$

$$(xzp - ywp - xwq - yzq, zxq - ywq + xwp + yzp) =$$

$$(x(zp - wq) - (y(wp + zq)), x(zq + wp) + y(zp - wq)) = (x, y) \cdot (zp - wq, wp + zq)$$

$$(x, y) \cdot [(z, w) \cdot (p, q)].$$

M.2) Vale a propriedade distributiva.

De fato, para todo $(x, y), (z, w), (p, q) \in \mathbb{D}$ temos:

$$(x, y) \cdot [(z, w) + (p, q)] = (x, y) \cdot (z + p, w + q)$$

$$\begin{aligned}
(x, y) \cdot (z + p, w + q) &= (x(z + p) - y(w + q), x(w + q) + y(z + p)) = \\
(xz - yw + xp - yq, xw + yz + xq + yp) &= (xz - yw, xw + yz) + (xp - yq, xq + yp) = \\
(x, y) \cdot (z, w) + (x, y) \cdot (p, q).
\end{aligned}$$

M.3) A multiplicação admite elemento neutro.

De fato, para todo $(x, y) \in \mathbb{D}$ temos $(1, 0) \in \mathbb{D}$ tal que:

$$\begin{aligned}
(x, y) \cdot (1, 0) &= (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = (1, 0) \cdot (x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = \\
(1, 0) \cdot (x, y).
\end{aligned}$$

M.4) A multiplicação é comutativa.

De fato, para todo $(x, y), (z, w) \in \mathbb{D}$ temos:

$$(x, y) \cdot (z, w) = (xz - yw, xw + yz) = (zx - wy, wx + zy) = (z, w) \cdot (x, y).$$

M.5) A multiplicação admite elemento inverso.

De fato, para cada $(x, y) \in \mathbb{D}$, tal que $(x, y) \neq (0, 0)$, existe $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ em $\mathbb{D}$ tal que:

$$\begin{aligned}
(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - \left(y \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), y \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + x \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \right) = \\
\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy - xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).
\end{aligned}$$

M.6) Vale a lei do anulamento.

De fato, para todo $(x, y), (z, w) \in \mathbb{D}$, tal que $(x, y) \cdot (z, w) = (0, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 0)$ temos:

$$(z, w) = (1, 0) \cdot (z, w) = [(x, y)^{-1} \cdot (x, y)] \cdot (z, w) = (x, y)^{-1} \cdot [(x, y) \cdot (z, w)] = (x, y)^{-1} \cdot (0, 0) = (0, 0).$$

Para finalizar a seção, mostraremos que $\mathbb{D}$ e $\mathbb{C}$ são isomorfos como anéis e, consequentemente como corpos.

Seja f uma função de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{C}$, tal que $f(x, y) = x + yi$, para todo $(x, y) \in \mathbb{D}$. Mostremos que f é um isomorfismo e, consequentemente, $\mathbb{D}$ é isomorfo a $\mathbb{C}$.

Para todo $(x, y), (z, w) \in \mathbb{D}$ temos que f é um homomorfismo bijetor, pois:

1. f preserva a operação de soma.

$$\begin{aligned} f((x, y) + (z, w)) &= f((x + z, y + w)) = (x + z) + (y + w)i = (x + yi) + (z + wi) = \\ &= f((x, y)) + f((z, w)). \end{aligned}$$

2. f preserva a operação de multiplicação.

$$\begin{aligned} f((x, y) \cdot (z, w)) &= f(xz - yw, xw + yz) = (xz - yw) + (xw + yz)i = (x + yi) \cdot (z + wi) = \\ &= f(x, y) \cdot f(z, w). \end{aligned}$$

3. f é injetora.

$$f(x, y) = f(z, w) \iff (x + yi) = (z + wi) \iff x = z \text{ e } y = w \iff (x, y) = (z, w).$$

4. f é sobrejetora.

Para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, existe $(x, y) \in \mathbb{D}$ tal que $f(x, y) = z$.

Para finalizar esse capítulo, veremos que a operação de multiplicação em $\mathbb{D}$ é de fato uma operação de vetores do plano que realiza roto-homotetia entre vetores.

Para vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, com respectivos ângulos α e β em relação o eixo x , definimos o produto $u \cdot v$, como sendo o vetor w cujo ângulo com o eixo das ordenadas é $\alpha + \beta$ e a norma (ou comprimento) é o produto das normas de u e v , como mostrado no desenho abaixo:

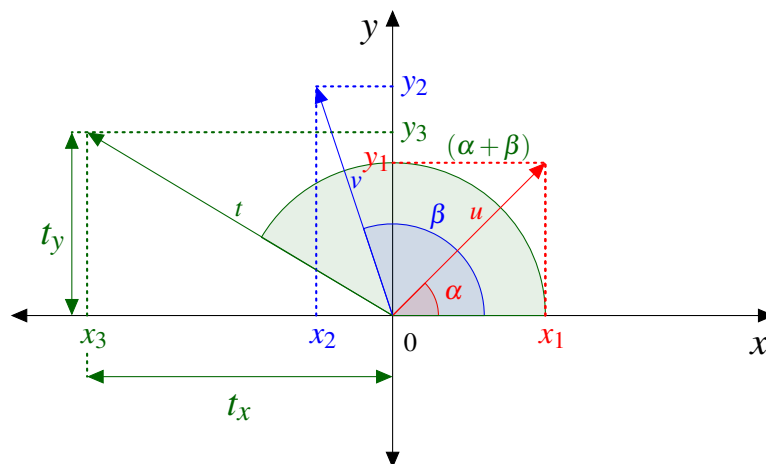


Figura 1 – Multiplicação de números complexos em sua forma vetorial

Fonte: Elaborado pelo autor.

Escrevendo $w = (x_3, y_3)$, temos que $x_3 = |u| \cdot |v| \cos(\alpha + \beta)$ e $y_3 = |u| \cdot |v| \sin(\alpha + \beta)$.

Assim:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_3, y_3),$$

Com isso temos:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (|u| \cdot |v| \cos(\alpha + \beta), |u| \cdot |v| \sin(\alpha + \beta)) =$$

$$(|u| \cdot |v| \cos(\alpha) \cos(\beta) - |u| \cdot |v| \sin(\alpha) \sin(\beta), |u| \cdot |v| \sin(\alpha) \cos(\beta) + |u| \cdot |v| \sin(\beta) \sin(\alpha)).$$

Rearranjando os termos obtemos:

$$(x_3, y_3) = (|u| \cos \alpha |v| \cos(\beta) - |u| \sin(\alpha) |v| \sin(\beta), |u| \sin(\alpha) |v| \cos(\beta) + |v| \sin(\beta) |u| \cos(\alpha)).$$

Como $x_1 = |u| \cos(\alpha)$, $y_1 = |u| \sin(\alpha)$, $x_2 = |v| \cos(\beta)$ e $y_2 = |v| \sin(\beta)$ obtemos:

$$(x_3, y_3) = (\underbrace{|u| \cos(\alpha)}_{x_1} \cdot \underbrace{|v| \cos(\beta)}_{x_2} - \underbrace{|u| \sin(\alpha)}_{y_1} \cdot \underbrace{|v| \sin(\beta)}_{y_2}, \underbrace{|u| \sin(\alpha)}_{y_1} \cdot \underbrace{|v| \cos(\beta)}_{x_2} + \underbrace{|v| \sin(\beta)}_{y_2} \cdot \underbrace{|u| \cos(\alpha)}_{x_1}) =$$

$$(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, y_1 \cdot x_2 + y_2 \cdot x_1),$$

que é exatamente a mesma multiplicação definida em $\mathbb{D}$.

COMO APRESENTAR OS NÚMEROS COMPLEXOS AOS ALUNOS - UMA PROPOSTA

O modo como nós interagimos com a informação foi revolucionado, porém o modo como ensinamos matemática continua praticamente igual, mesmo antes dessa revolução já poderíamos apontar muitos problemas no modo como ensinamos matemática como, por exemplo, o excessivo uso da memorização em detrimento da compreensão dos problemas, olhando retroativamente percebemos que fazia sentido exigir a memorização dos conteúdos dos alunos, pois menos de 25 anos era muito difícil ter acesso a informação. Para descobrir como fazer uma divisão de número complexos precisávamos nos deslocar até uma biblioteca e procurar um livro e dentro do livro onde que existia tal procedimento, porém essa dificuldade desapareceu com a revolução do acesso a informação e desse modo podemos desenvolver outras propostas de ensino de matemática, focada mais na compreensão de determinadas propriedades e no modo de operação de um tema do que na memorização dos mesmos.

Um dos problemas do uso excessivo da memorização no ensino de matemática é confundir os alunos ao estudarem, ou seja, dentro desse paradigma podemos perceber que os alunos tendem a decorar como um determinado tipo de problema é resolvido ao invés de entender a natureza do mesmo, isso fica claro quando mudamos alguns parâmetros dos problemas e os alunos não conseguem resolvê-los, e pior, esse comportamento é incentivado quando os professores fazem provas com exercícios idênticos ou muito parecidos com os das listas de exercícios dadas aos alunos.

Desse modo pretendemos construir, nesse capítulo, uma proposta que fuja do paradigma tradicional, ou seja, criar uma proposta focada mais na compreensão da natureza do conjunto dos números complexos, das suas propriedades e na utilidade de suas operações.

Para alcançar o objetivo descrito acima proporemos um paradigma diferente, ou seja, a proposta não apresentará o conjunto dos números complexos aos alunos, ao invés disso apresentaremos problemas para cada abordagem, faremos duas abordagens, a geométrica e a algébrica ($a + bi$) onde a solução de determinado problema passará pela construção de um novo conjunto munido de duas operações, ou seja, queremos apresentar problemas e para solucionarmos criaremos juntos com os alunos esse novo conjunto.

Contudo não podemos nos esquecer que além de formar um cidadão o ensino médio também é uma preparação para o vestibular e, infelizmente, o mesmo ainda cobra muita memorização, logo, enquanto o paradigma do vestibular não muda temos que pensar em uma abordagem que possa tornar o ensino de matemática mais interessante e ao mesmo tempo usar a memorização, porém focando mais na compreensão do conteúdo e análise dos problemas, ou seja, é mais importante que o aluno saiba o significado de uma divisão de números complexos do que como fazê-las, pois o modo com se faz essa divisão pode ser encontrado facilmente na internet.

Dentre as várias áreas da matemática que poderíamos escolher para a construção dessa proposta escolhemos o conjunto dos números complexos pois ele é um dos temas mais nebulosos que os alunos do ensino médio se deparam, e mais, assim como outras áreas da matemática ele está completamente dissociado de um significado prático. Logo nossa proposta além de mudar o paradigma da memorização para a compreensão ainda atribuirá um significado prático e uma contextualização histórica, desse modo tornando o estudo do conjunto dos números complexos menos abstrato, mais objetivo e mais “palatável”.

Para colocar em prática o que foi sugerido acima poderíamos apresentar problemas que possam ser relacionados a rotação de vetores e problemas tradicionais como raízes de equações do segundo e terceiro grau e a partir desses problemas encontrar os elementos do conjunto dos números complexos como solução. Porém, esses problemas não deverão ser resolvidos instantaneamente pelo professor e sim analisados em conjunto com os alunos, desse modo o professor e os alunos constroem as soluções e assim estaríamos estimulando-os a analisar o problema e não apenas decorar propriedades e/ou o modo como se realiza operações no conjunto dos números complexos.

Mostrar que os dois conjuntos apresentados se tratam de um mesmo conjunto visto de maneiras diferentes e que esses conjuntos se tratam na verdade do conjunto dos números complexos.

Posteriormente poderíamos trabalhar com as curiosidades dos números complexos, como o fato de números que são primos no conjunto dos números inteiros, porém não são primos em $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{Z}\}$, também conhecidos como anel dos inteiros de Gauss, ver pág 34 de [Lima 2016], e o fato do conjunto dos números complexos não ser um corpo ordenado.

Para terminar o estudo dos números complexos podemos trabalhar com suas operações.

Finalmente comentamos que é impossível construir um conjunto análogo aos complexos em três dimensões e a necessidade de uma quarta dimensão para termos uma multiplicação com características análogas a multiplicação dos números complexos em três dimensões, ou seja, uma operações que realize roto homotetia em três dimensões.

Desse modo o foco fica na compreensão da natureza do conjunto dos números complexos, seja na sua forma geométrica, seja na sua forma algébrica.

A proposta será dividida em 4 partes principais.

1. Construção do conjunto dos números complexos da forma geométrica, ou seja, trabalharemos os números complexos como vetores.
2. Construção dos números complexos na forma algébrica utilizando o contexto e problemas históricos.
3. Demonstrar que as duas formas são equivalentes.
4. Comentar sobre a impossibilidade de construir um conjunto análogo aos complexos em três dimensões e a descoberta de Hamilton, ou seja, os quatérnios.

4.1 Construção geométrica do conjunto dos números complexos.

4.1.1 Revisão de vetores.

- **Objetivos.**

Rever o conceito de vetor e a operação de soma entre eles. Vale destacar que o conceito de vetor e a soma de vetores são vistas no primeiro ano do ensino médio em física, geralmente no primeiro semestre.

- **Métodos.**

A apresentação desses conceitos podem ser feita da forma como o professor preferir, pode-se, por exemplo:

1. Usar a variação de distância que eles já tiveram contato na física, ou seja, posso somar dois vetores deslocamento obtendo o vetor deslocamento resultante.
2. Usar a ideia de velocidade para ficar claro que a velocidade possui, além de um valor numérico, uma direção e um sentido.
3. Aliado a I e/ou II apresentar os números reais como quantidades orientadas, ou seja, apresentaríamos negativo e positivo como vetores de sentidos opostos como

na figura 2. O interessante dessa abordagem é associar a multiplicação a homotetia e a multiplicação por um número negativo a uma roto-homotetia, no caso sempre rotaciona 180 graus como na figura abaixo.

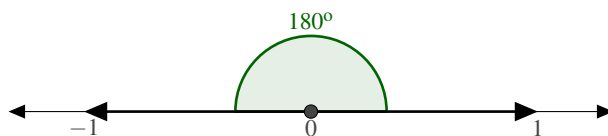


Figura 2 – Representação vetorial dos números reais

Fonte: Adaptada [Paschoalino 2017] pág 36.

4.1.2 Apresentação de um problema conveniente.

- **Objetivo.**

Introduzir um problema com o intuito de apresentar a ideia de rotação de vetores e trabalhar alguma maneira realizar rotação de vetores em duas dimensões, não necessariamente precisa ser a multiplicação de vetores definida na seção 3.3.

- **Métodos.**

Lembrando que não falaremos sobre números complexos, apenas vamos criar um problema e tentar resolvê-lo, sempre tendo em mente que o principal é os alunos compreenderem que estamos rotacionando vetores.

Sugestões:

1. Podemos usar os ponteiros de um relógio, ou seja, como poderíamos rotacionar o ponteiro de um relógio de 12h15 para 12h20, como na figura 3.

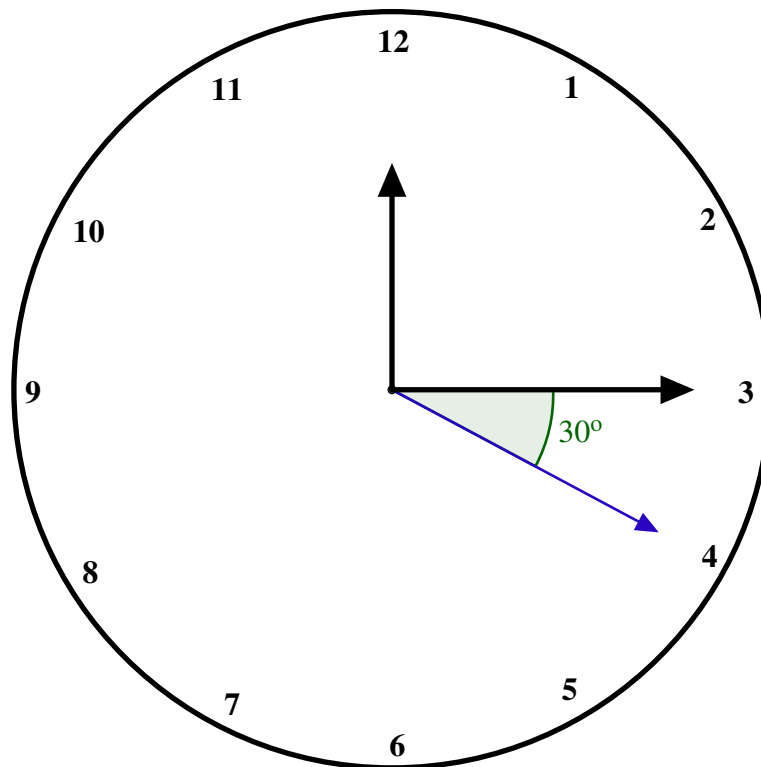


Figura 3 – Rotação do ponteiro do relógio

Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Podemos usar problemas como velocímetro digitais de carros ou qualquer marcador de ponteiro digital que emule o analógico, ou seja, como o computador rotaciona o ponteiro do velocímetro de 20km/h até 60km/h ou o ponteiro dos relógios, como no site <http://pcdsh01.on.br/HoraLegalBrasileira.php>, acessado em 12/02/2019.

Daí pode-se tomar vários caminhos, dois possíveis são:

1. Pode-se colocar as coordenadas de um determinado vetor, usando os ponteiros de um relógio como exemplo, e construir/deduzir, na medida do possível com ajuda dos alunos, uma maneira de rotacioná-lo. Pode ser a construção usada na seção 3.3, matriz de rotação ou outra que seja coerente com o proposto.
2. Pode-se, após uma discussão com os alunos, usando um exemplo, colocar direto uma maneira de rotacioná-lo, usando a matriz de rotação, usando produto de vetores definido no final do capítulo anterior ou outro que seja coerente.

No caso de usar a operação de multiplicação, como definida na seção 3.3, deve atentar-se a homotetia.

4.1.3 Resolução do problema sugerido.

- **Objetivo.**

Resolver o problema apresentado e usando a multiplicação de vetores definida na seção 3.3 e apresentar o conceito de homotetia.

- **Métodos.**

Usando os exemplos anteriores devemos discutir com os alunos a respeito das rotações realizadas na seção 4.1.2, mostrando empiricamente a rotação através da multiplicação de vetores, explicar e mostrar empiricamente a homotetia e finalmente como rotacionar o vetor sem mudar seu tamanho, uma ótima ferramenta para isso é o geogebra, mas a lousa também é uma ferramenta eficaz.

4.1.4 Resolução de exercícios.

Como o objetivo não é que o aluno decore como realiza as operações e esse tipo de exercício não cai em vestibulares então os exercícios propostos poderiam ser realizados em conjunto entre o professor e os alunos.

4.2 Apresentação dos números complexos na forma algébrica.

4.2.1 Contextualização histórica e apresentação de problemas.

- **Objetivos.**

Apresentar problemas históricos e contextualizá-los, para, posteriormente, construirmos com os alunos uma solução.

- **Métodos.**

Contextualizar historicamente problemas, como, por exemplo, encontrar a solução complexa da equação $x^2 + 1 = 0$, a impossibilidade geométrica de alguns problemas, como o triângulo retângulo de área 7 unidades e perímetro 12 unidades e comparar a equação do segundo grau com a do terceiro grau. Lembrando que o capítulo 2 possui contextualizações históricas e problemas históricos envolvendo números complexos, como, por exemplo, a equação estudada por Bombelli.

- **Observações importantes**

O intuito é usar as equações do terceiro grau como um exemplo de problema que podemos nos deparar com raízes negativas, porém, diferentemente do que aprendemos ao estudar as equações do segundo grau, as equações do terceiro grau sempre possui ao menos uma raiz real. Logo o objetivo do uso de equações do terceiro grau não é ensinar os alunos a resolvê-las, ou seja, o objetivo de usá-las é para compará-las com a equação do segundo grau e problemas como do triângulo, citado acima, de modo que fique claro para o aluno que nem sempre quando nos deparamos com uma raiz negativa podemos concluir que nosso problema não tem solução, desse modo esperamos evidenciar que o conjunto dos números complexos pode ser usados para resolver problemas cuja solução pertence aos números reais.

4.2.2 Solução para os problemas envolvendo raízes negativas.

- **Objetivos.**

Juntamente com os alunos, encontrarmos uma solução para os problemas trabalhados na seção 4.2.1 ou qualquer outro problema que o professor julgue pertinente.

- **Métodos.**

A ideia consiste em adicionarmos um novo número com uma nova propriedade ao conjunto dos números reais de modo que possamos resolver problemas como $x^2 + 1 = 0$, ou seja, adicionar um i tal que $i^2 = -1$, compreender que as propriedades de corpo são herdadas dos números reais e resolver, em conjunto com os alunos, alguns problemas como exemplo.

4.2.3 Forma polar ou trigonométrica de um número complexo

Até agora ao trabalhar com a forma algébrica do conjunto dos número complexos usamos a forma retangular, ou seja, $z = a + bi$, porém podemos representa-lo na forma trigonométrica ou polar, ou seja, $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ como na figura 4.

- **Objetivos.**

Construir com o aluno a noção de módulo de um número complexo com suas forma polar ou trigonométrica, ou seja, familiarizar o aluno com outra forma de escrever os números complexos e apresentar uma maneira de medi-los, ou seja, a noção de módulo.

- **Métodos.**

Questionar os alunos se não poderia existir outras formas de apresentarmos os números complexos, ou seja, perguntar se dado um ponto $a + bi$ no plano complexo existiria outra

maneira de descrevê-lo. Sempre tentando induzir o aluno a encontrar esse novo modo de representá-lo, ou seja, usando seu módulo ou comprimento e um ângulo de inclinação.

Sugestões:

1. Caso nenhum aluno proponha uma maneira de mapear o ponto usando a norma e o ângulo então o professor pode desenhar o triângulo no plano complexo (como a figura abaixo) e perguntar novamente quais as maneiras de mapear o vértice do triângulo no qual encontra-se o número complexo e finalmente construir o número complexo como na figura 4.

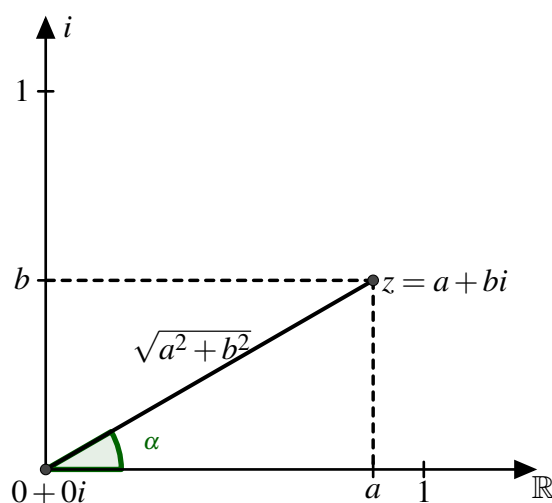


Figura 4 – Representação gráfica de um número complexo

Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando a figura 4 concluímos que o número complexo $a + bi$ pode ser descrito como o comprimento do segmento de reta com origem no ponto $0 + 0i$ até o ponto $a + bi$, ou seja, a hipotenusa do triângulo retângulo de vértices $0 + 0i$, $a + 0i$ e $a + bi$ e seu ângulo de inclinação de pelo menos duas formas diferentes, ou seja, a forma polar e a trigonométrica:

$$a + bi = \underbrace{|z| \cos \alpha}_a + i \underbrace{|z| \sin \alpha}_b = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

2. Usar como um dos exemplos o número complexo $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ como na figura 5, pois esse número possui módulo 1 e ângulo de 30° então na próxima parte, onde mostraremos para os alunos que a forma geométrica e a forma algébrica do conjunto dos números complexos são equivalentes, podemos usá-lo para resolver o exercício do relógio, figura 2, proposto anteriormente e assim mostrar aos alunos que também podemos fazer rotação com esse novo conjunto, ou seja, os complexos na forma $a + bi$ ou na forma polar ou trigonométrica.

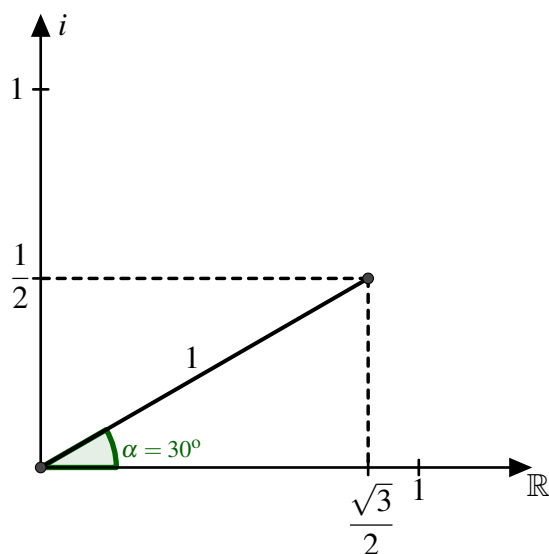


Figura 5 – Representação gráfica de $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Forma polar ou trigonométrica:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

4.2.4 Algumas curiosidades envolvendo o conjunto dos números complexos.

- **Objetivo.**

Mostrar para os alunos que algumas características presentes no conjunto dos números reais não estão presentes nos números complexos, trabalhadas logo abaixo.

- **Métodos.**

O professor pode questionar os alunos sobre os números primos no conjunto $\mathbb{Z}[i]$ e a ordem em .

Sugestões:

1. O professor pode pergunta para os alunos quais os números primos entre 1 e 10 e, após as discussões, mostrar que o número 5 pode ser fatorado em $\mathbb{Z}[i]$, $(2 + i)(2 - i) = 5$, ou seja, 5 não é primo no anel $\mathbb{Z}[i]$.

2. Novamente o professor perguntar para os alunos se $1 < 2$ e em seguida perguntar se $-i < i$, após as discussões pode-se mostrar, tomando $i > 0$ e multiplicando os dois lados por i , que se $-i < i$, então:

$$i(-i) < i \cdot i \Rightarrow -i^2 = i^2 \Rightarrow 1 < -1.$$

Desse modo mostramos aos alunos que a noção de maior ou menor não funciona nos números complexos, ou seja, $\mathbb{C}$ não é um corpo ordenado.

4.2.5 Resolução de exercícios

Tendo em vista a necessidade de preparar os alunos para o vestibular devemos propor alguns problemas tradicionais de números complexos, ou seja, praticar suas operação, usar suas propriedades, seus conjugados, forma polar e trigonométrica. Creio que é pertinente encontrar a raiz real de uma equação do terceiro grau usando esse novo número, para que desse modo o aluno veja a resolução de um problema com solução real usando como ferramenta o conjunto dos números complexos. Como sugestão de resolução deixaremos resolvida a equação do terceiro grau estudada por Bombelli, ou seja, a equação do terceiro grau descrita no capítulo dois deste texto, pois além de fazer parte da contextualização histórica ainda possui uma resolução relativamente mais simples.

Diante da facilidade de encontrar exercícios envolvendo a forma tradicional dos complexos não vejo a necessidade de colocar sugestões.

4.2.5.1 Resolução da equação do terceiro grau estudada por Bombelli

Uma equação do terceiro grau genérica é uma equação do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, porém a equação estudada por Bombelli, $x^3 - 15x - 4 = 0$, possui $b = 0$, logo pensou Bombelli, uma raiz real que satisfaz a equação em função de a , c e d é:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2a} - \sqrt{\left(\frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a}\right)^3}}.$$

Como $a = 1$, $c = -15$ e $d = -4$ então temos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2 \cdot 1} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2 \cdot 1}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3 \cdot 1}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2 \cdot 1} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2 \cdot 1}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3 \cdot 1}\right)^3}},$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}},$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Tomando $\sqrt{-121} = \sqrt{121 \cdot (-1)} = \sqrt{121 \cdot i^2} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{i^2} = \sqrt{121} = 11i$, temos:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Basta notar que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$ e $(2 - i)^3 = 2 - 11i$, logo:

$$x = \sqrt[3]{(2 + i)^3} + \sqrt[3]{(2 - i)^3} = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

4.3 Equivalência da forma geométrica e da algébrica do conjunto dos números complexos

4.3.1 Resolução de um problema de rotação

- **Objetivo**

Mostrar para os alunos que podemos fazer rotação com a forma algébrica dos números complexos.

- **Métodos**

Apresentar e resolver junto com os alunos problemas de rotação usando a forma algébrica dos números complexos.

Sugestão:

Propor o problema do relógio, sugerido anteriormente, multiplicando o número que representa o vetor que marca três horas, ou seja, multiplicar $3 + 0i$ pelo número $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ e assim obtemos a mesma rotação feita na sugestão do seção 4.1.2

4.3.2 Demonstração da equivalência entre a forma algébrica e a forma geométrica dos números complexos

- **Objetivo**

Mostrar para o aluno que o conjunto dos números complexos na sua forma algébrica é equivalente ao conjunto de vetores construídos no seção 3.3, ou seja, mostrar que assim

como no conjunto $\mathbb{D}$, onde é somado coordenada a coordenada e a multiplicação realiza roto-homotetia, o conjunto dos números complexos soma coordenada real com coordenada real e coordenada imaginária com coordenada imaginária e a multiplicação também realiza roto-homotetia.

- **Método**

Demonstrar formalmente que as operações de adição e multiplicação dos números complexos são análogas as operações de adição e multiplicação definidas na forma vetorial do conjunto dos números complexos construído no seção 4.1.2 e demonstrado no final do capítulo 3.

4.3.3 Resolução de exercícios

Propor exercícios de rotação, de preferência os mesmos resolvidos usando vetores. Propor exercícios de multiplicação e divisão de números complexos em suas formas polar e trigonométrica e atentar que é mais fácil realizar multiplicações e divisões dos números complexos nessas formas do que na forma $a + bi$, pois, assim como demonstrado acima, para multiplicar dois números complexos na forma polar ou trigonométrica basta multiplicar sua norma e somar seus ângulos, analogamente a divisão pode ser feita dividindo as normas e subtraindo os ângulos.

4.4 Rotação em três dimensões

- **Objetivos**

Passar para o aluno a noção intuitiva de rotação em três dimensões, apresentar a ideia de que é impossível construir um conjunto que faça rotações em três dimensões e finalmente apresentar a solução de rotação em três dimensões, ou seja, os quatérnios.

- **Métodos**

a-) Apresentar a ideia de rotação em três dimensões e a impossibilidade de generalizar os complexos usando apenas 3 dimensões, uma maneira de apresentar essa ideia seria comentando os desafios enfrentado por Hamilton, vide seção 2.2.

b-) Para apresentar os quatérnios podemos fazer uma comparação com o exercício onde resolvemos as equação do terceiro grau, ou seja, precisamos de um conjunto de duas dimensões para resolver um problema de uma dimensão com solução em uma dimensão, desse modo, assim como o conjunto dos números complexos resolvem problemas de uma dimensão, a rotação em três dimensões precisa de um conjunto com quatro dimensões

para ser realizada, e esse conjunto chama-se quatérnios e é representado pela letra $\mathbb{H}$ em homenagem a Hamilton.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino básico enfrenta grandes problemas, como por exemplo, a má formação dos professores, os baixos salários, as deficiências básicas dos alunos, as péssimas condições físicas e disciplinares na escola. Tendo em vista essa realidade esse trabalho tende a contemplar vários perfis de professores e alunos, oferecendo a eles diversas maneiras de abordar o conjunto dos números complexos, uma fundamentação teórica e histórica, isso sempre respeitando sua liberdade e individualidade.

Além disso, esse trabalho fornece algumas abordagens que tornam o estudo do conjunto dos números complexos mais concreto e contextualizado historicamente, de modo que os alunos possam enxergar um significado prático em suas operações, assim contribuindo para que possam trabalhar de uma maneira mais crítica e objetiva e fugindo do modo tradicional onde os alunos apenas decoram como operar números complexos. Assim podemos concluir que esse trabalho, além de cumprir os objetivos propostos, ainda pode ser usado para melhorar o conhecimento histórico e teórico do público ao qual é dirigido.

REFERÊNCIAS

FELZENSZWALB, B. **Álgebra de Dimensão Finitas**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Citado nas páginas [19](#) e [22](#).

LIMA, L. S. C. e. **O anel dos inteiros de Gauss**. Dissertação (Mestrado) — UNIRIO, Rio de Janeiro, 2016. Citado na página [40](#).

MILIES, C. P. **Breve História da Álgebra Abstrata**. São Paulo: Universidade de São Paulo (IME). Citado nas páginas [19](#), [20](#) e [24](#).

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013. ISBN 978-85-64724-26-6. Citado na página [19](#).

PASCHOALINO, P. T. **Números Complexos e Transformações Geométricas**. Dissertação (Mestrado) — UFSCar, São Carlos, 2017. Citado na página [42](#).

SANTIAGO, P. R. P. **Rotações Tridimensionais em biomecânica via quatérnios: Aplicação na análise dos movimentos esportivos**. Tese (Doutorado) — Instituto de biociências - UNESP, Rio Claro, 2009. Citado na página [24](#).

