UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

PAULO NERES CARVALHO

DOURADOS - MS
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL – UEMS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE DOURADOS

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

PAULO NERES CARVALHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maristela Missio

DOURADOS - MS
2019

C327m Carvalho, Paulo Neres
A modelagem matemática nas ciências agrárias : uma abordagem para o ensino de funções/ Paulo Neres Carvalho – Dourados, MS: UEMS, 2019.
66p.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2019.
Orientadora: Prof.ª Dra. Maristela Missio.

1. Modelagem matemática 2. Funções polinomiais 3. Ciências agrárias – Funções polinomiais I. Missio, Maristela II. Título

CDD 23. ed. - 512.9422

FICHA DE APROVAÇÃO

PAULO NERES CARVALHO

MODELAGEM MATEMÁTICA NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Produto Final do Curso de Mestrado Profissional apresentado ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul foi avaliado e aprovado, como requisito final para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 28/11/2019.

BANCA EXAMINADORA

Maristela Missio

Prof[a] Dr[a] Maristela Missio (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso (UEMS)
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues (UFGD)
Universidade Federal da Grande Dourados

DEDICATÓRIA

A Deus, pelo dom da vida, sabedoria e perseverança para superar as dificuldades que a vida nos impõe diariamente.

A minha mãe, *in memoriam*, Universina Carvalho Matos, pelos valiosos ensinamentos, pelo exemplo de superação, dignidade e honradez.

A minha esposa Mariza de Oliveira Carvalho e aos meus filhos Paulo Levi de Oliveira Carvalho, Paola Mahyra de Oliveira Carvalho Moura e a minha neta Mariah Heloise Teixeira Carvalho, pelo carinho, apoio e incentivo nas horas que eu mais precisei.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por guiar-me sempre nos momentos alegres e difíceis. A certeza de sua presença me fortalece.

A minha mãe, *in memoriam*, Universina Carvalho Matos que não mediu esforços na criação de seus filhos, dando-lhes uma educação pautada na dignidade, na austeridade, no respeito e na honradez.

A minha esposa Mariza de Oliveira Carvalho, pela compreensão nos momentos de ausência, pelo carinho, companheirismo, confiança e pela posição sempre otimista, mesmo diante das dificuldades.

Aos meus filhos, Paulo Levi de Oliveira Carvalho e Paola Mahyra de Oliveira Carvalho Moura, pela compreensão, carinho, pelas palavras de incentivo e por serem inspirações constantes em minha vida, contribuindo sempre em minha caminhada. Aos seus respectivos cônjuges Silvana Teixeira Carvalho e Fernando Alves de Moura, pelo incentivo sempre dado e também ajuda na hora necessária e a minha querida neta Mariah Heloise Teixeira Carvalho, minha fonte de luta, inspiração, perseverança e trabalho atualmente.

Aos meus familiares, nas pessoas de minhas irmãs Maria Ignacia e Soeila Carvalho, pelo apoio, incentivo e confiança. Um agradecimento especial a meu sobrinho Paulo Adaias Carvalho Afonso que me foi de uma ajuda inestimável.

Ao coordenador e professores do Curso (PROFMAT – UEMS), principalmente minha orientadora, Professora Dr.ª Maristela Missio, pela dedicação, pelo apoio, pela objetividade, pela humildade e pela presteza com que me atendeu sempre e, principalmente pelas orientações, apoio, incentivo e pela confiança em minha pessoa.

Àqueles colegas que contribuíram com incentivo e aqueles que cederam a utilização de suas publicações e de seus experimentos para a realização desse trabalho.

Aos Professores Doutores Sérgio Rodrigues e Vando Narciso, por terem participação nessa realização.

Só posso dizer a todos, muito obrigado por colaborarem de alguma maneira com a minha caminhada e rogo que Deus os pague!

EPÍGRAFE

A modelagem matemática é matemática por excelência.

(Ubiratan D’Ambrosio)

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de contextualizar o estudo de funções polinomiais por meio da modelagem matemática aplicada as Ciências Agrárias, a fim de buscar motivação e interesse do educando para uma boa aprendizagem. Para tanto, discorremos sobre a modelagem matemática e as funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus, de forma a apresentar ao estudante uma matemática mais próxima de sua realidade. Assim, com base na metodologia utilizada por Sviercoski (2008), apresentamos aplicações de modelagem matemática, onde determinamos as funções polinomiais que melhor descreviam conjuntos de dados, os quais foram coletados e adaptados de experimentos desenvolvidos por pesquisadores da área de Agrárias. Esta pesquisa demonstra que a modelagem matemática pode ser uma metodologia de ensino eficaz no ensino de funções, principalmente quando envolve a interdisciplinaridade, neste caso as Ciências Agrárias, trazendo resultados mais satisfatórios que os alcançados por metodologias de ensino ditas tradicionais.

Palavras-Chave: Modelagem Matemática; Funções Polinomiais de 1º, 2º e 3ºgraus; Metodologia de Ensino; Ciências Agrárias

ABSTRACT

This paper aims to contextualize polynomial functions study through mathematical modeling applied in Agrarian Sciences, in order to seek motivation and concern of the student in learning it. Therefore, we discuss mathematical modeling and 1st, 2nd and 3rd polynomial functions grades aiming to present a kind of Mathematics closer to the reality of the student. Thus, based on Sviercoski's (2008) methodology, we present mathematical modeling uses in which better fitting polynomial functions to data sets were determinated, which were collected and adapted from experiments developed by Agrarian researchers. This research demonstrates that mathematical modeling can be an effective methodology in order to teach functions, especially when it involves interdisciplinarity, and in this case, in the Agrarian Sciences example. It results in more than satisfactory results when compared to traditional teaching methodologies.

Keywords: Mathematical modeling; Polynomial functions of 1sr, 2nd and 3rd degrees; Teaching methodology; Agrarian Sciences.

SUMÁRIO

LISTAS FIGURAS

LISTAS QUADROS

INTRODUÇÃO

> Quem surgiu primeiro: a ciência Matemática ou a aplicação da Matemática? (BASSNEZI, 2015, p. 10).

A história da civilização humana é muito rica de fatos e acontecimentos, precisamos sempre nos lembrar dela para podermos entender qualquer aspecto de nosso desenvolvimento como ser humano. Matemática e Agronomia, que é o principal ramo das Ciências Agrárias, são as ciências temas de nosso trabalho, o caminhar de ambas sempre estiveram muito próximas, o que nos faz crer as palavras de Eves:

> Num mundo de vastas pastagens e savanas onde abundavam os animais selvagens e as pessoas eram principalmente caçadores e colhedores. Suas vidas eram agrestes e difíceis, de maneira que elas viviam demasiado ocupadas e em permanente agitação para desenvolver tradições cientificas. Depois de 3000 a.C. emergem comunidades agrícolas densamente povoadas ao longo do rio Nilo na África, dos rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio e ao longo do rio Amarelo na China. Essas comunidades criaram culturas nas quais a ciência e a matemática começam a se desenvolver. (EVES, 2004, p.24.)

Eves (2004), também nos afirma que com o aparecimento das comunidades houve uma necessidade maior de alimentos e isso obrigou o homem a praticar uma agricultura intensiva, ocorrendo uma espécie de “revolução agrícola”, contribuindo também, para o aparecimento da escrita, pois os proprietários de terra necessitavam de anotações sobre diversas coisas.

Para nos ajudar a entender mais sobre Agronomia, temos ainda os ensinamentos de Baiardi, quando nos diz:

> A historiografia não é categórica sobre quem pela primeira vez, falou ou escreveu sobre a agronomia. As hipóteses de que seria Sócrates na obra Oeconomicon de Senefonte, no conhecido diálogo com Iscimaco, ou, se teria siso Mago de Cartago, em seu Tratado de Agronomia, referido por Plinio o Velho em sua Naturalis História, são ambas, de difícil comprovação. “Isto porque Sócrates e Mago foram contemporâneos, no século III a.C., e também porque não existe exatidão nas referências aos mesmos." (BAIARDI, 2013, p.157.)

A Agronomia teve sempre um papel empírico na vida humana, isso é reforçado por Romeiro quando nos afirma:

> Durante milênios a agricultura como principal atividade produtiva humana foi objeto de observações atentas de todos aqueles que procuravam melhorar as práticas agrícolas correntes. Autores gregos e romanos que escreveram sobre agricultura compilaram os resultados de longos anos de experiência prática. (ROMEIRO, 1987, p. 60-61).

Mas sempre que falamos em prática, devemos lembrar a análise de Bassanezi (2018):

> Partindo do pressuposto de que todas as ciências são empíricas e teóricas, saberes em que a busca da verdade deve ser impulsionada por indicações empíricas aliadas a atividades criadoras a procura de leis (formulação de problemas e ensaios de hipótese a serem testadas e avaliadas) para os quais a utilização da lógica e das ferramentas matemáticas é fundamental, é fácil percebermos o potencial da aplicação da modelagem nos campos científicos com métodos e finalidades comuns. Pesquisadores fluentes na linguagem matemática trazem contribuições importantes para suas áreas de pesquisa e transitam com mais facilidades entre os diversos campos do conhecimento científico. (BASSANEZI, 2018, p.16)

Também queremos deixar registrada a opinião de Biembengut e Hein (2018) sobre o assunto:

> Dessa forma, a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problemas por meio da pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico. (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.18)

Devemos nos lembrar dos valiosos ensinamentos de Pimentel-Gomes (2009, p.28), quando comenta: “Toda analise de variância de um experimento pressupõe um modelo matemático e a aceitação de algumas hipóteses básicas”.

A motivação para este trabalho se deu quando comecei a ministrar aulas nas disciplinas de Cálculo e Matemática nos cursos de Agronomia e Zootecnia na Unidade Universitária de Aquidauana – UUA, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS, no ano de 2005.

Nas ementas de ambos os cursos constava o tema: Modelos Matemáticos: linear, polinomial, exponencial e logarítmico. Em suas bibliografias, a única obra que tratava do assunto relacionado às funções dessa forma era de Sviercoski (2008). Nunca tinha visto o ensino de funções dessa maneira e tive assim meu primeiro contato com a Modelagem Matemática. Com o passar dos anos ministrando às disciplinas e, mesmo só tendo essa obra como referência, em minha percepção era um assunto interessante.

Como funções polinomiais é um conteúdo da Educação Básica, quando fui aprovado no Profmat e, sabendo que teria que escrever uma dissertação com assunto direcionado ao Ensino Médio, vislumbrei imediatamente a chance de aprofundar meus conhecimentos nesse tópico, com experimentos reais e realizados por pessoas com as quais convivemos. Foi assim que estabelecemos como objetivo deste trabalho contextualizar o estudo de funções polinomiais por meio da modelagem matemática aplicada às Ciências Agrárias, de forma a buscar motivação e interesse do educando para uma boa aprendizagem. Para alcançar o mesmo, dividimos nosso trabalho em 3 capítulos, conforme segue:

No Capítulo 1 apresentamos a Modelagem Matemática, com uma breve retrospectiva histórica, detalhamento de suas etapas e uma explanação sobre metodologia de ensino.

Já no Capítulo 2, descrevemos um embasamento teórico das funções polinomiais. Contamos um pouco de sua história, detalhamos as funções polinomiais de primeiro, segundo e terceiro graus.

Por fim, no Capítulo 3 tratamos de funções em ambientes de modelagem e apresentamos 2 aplicações de cada um dos três tipos de funções desenvolvidos no Capitulo 2, sempre tendo um deles com taxa de variação positiva e outro com taxa de variação negativa.

1 MODELAGEM MATEMÁTICA

> Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo. (BASSANEZI, 2018, p.19)

O ser humano sempre procurou trabalhar com modelos de diferentes tipos e em diferentes áreas. Biembengut e Hein (2018) citam em sua obra, dois desses momentos na história da ciência, em dois tempos diferentes. O primeiro, feito por Pitágoras, matemático, que viveu no século VI, - Antes de Cristo (a.C.), quando criou a escala musical, base da musica ocidental. E o segundo fato, acontecido no Período Renascentista, protagonizado pelo renomado médico inglês, um dos grandes cientistas de sua época, Willian Harvey (1578 -1657), no estudo da circulação sanguínea.

Em nosso cotidiano, temos modelos prontos e desenvolvidos para um número infinito de situações problemas, mas às vezes surgem situações, consideradas novas, que apesar de termos dados disponíveis, não temos um modelo pronto e necessitamos construir um apropriado, essa situação é que Biembengut nos conceitua como modelagem:

> Esse processo que requer da pessoa amplo conhecimento da área em que a situação-problema está inserida e sensos criativo, lúdico e crítico para saber lidar com os fatos, as variáveis e as constantes envolvidas, denomina-se modelagem. A palavra modelagem (model + agem) quer dizer ação de fazer modelo ou os procedimentos requeridos na elaboração de um modelo. (BIEMBENGUT, 2016, p. 96)

Para a citada pesquisadora, o modelo gerado pode ser classificado em 2 tipos: o físico e o simbólico.

Nos dias atuais a modelagem é usada em todas as áreas cientificas, pois para quaisquer situações que necessitamos conhecer ou estudar têm-se, na maioria das vezes, que fazer uso da mesma.

Quando utilizamos a modelagem para resolver situações problemas que envolvam modelos matemáticos, esta passa a ser denominada Modelagem Matemática, como nos ensina um dos maiores estudiosos brasileiros no assunto, o Professor Bassanezi, em sua obra:

> Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e

> generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2018, p. 24)

Devido ambiguidade do termo modelo, Bassanezi (2018) divide o mesmo, em sua obra, em dois tipos:

1. Modelo Objeto, aquele que representa um objeto ou um fato concreto;
2. Modelo Teórico, aquele o qual nos vinculamos a uma teoria geral existente.

Ele classifica-os, conforme a sua formulação, devido à natureza e situação analisadas. Essa classificação para ele é a seguinte:

i) Linear ou não linear, conforme a função matemática gerada;
ii) Educacional, quando lastreado de um número pequeno de prognósticos, aplicativo, baseado na realidade, fornecendo um sistema de equações com um número grande de variáveis;
iii) Estocástico e Determinístico, baseado em fatores aleatórios nas soluções.

1.1 UMA BREVE HISTÓRIA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

> A modelagem matemática não é uma ideia nova. Sua essência sempre esteve presente na criação das teorias científicas e, em especial, na criação das teorias matemáticas. A história da ciência testemunha importantes momentos em que a modelagem matemática se fez presente. (BIEMBENGUT, HEIN, 2018, p.15)

Em qualquer dicionário de Língua Portuguesa, a palavra modelagem aparece descrita como um substantivo feminino, que significa ato ou efeito de modelar, modelação.

E se formos procurar suas origens veremos que essa palavra é antiguíssima, pois é usada há muito tempo e nas mais diversas áreas de conhecimento. O homem sempre trabalhou com modelos como na pintura, onde utilizava e, utiliza até os dias atuais, modelos vivos.

A matemática, como é do conhecimento de todos, é considerada difícil pela maioria das pessoas que necessitam estudá-la, trazendo uma preocupação permanente aos professores, de forma a estarem sempre procurando métodos alternativos de ensino para facilitar sua compreensão pelos alunos.

O ensino da matemática tem despertado atenção há muito tempo. Aragão (2016) cita como um marco, ocorrido no inicio do século XX, o estabelecimento da comissão intitulada *Comission Internazionale de L' enseignement dês mathematiques* (CIEM), em Roma, que passou mais tarde a se denominar *Internacional Comission on Mathematical Instrucion* (ICMI), presidida pelo alemão Felix Klein, que tinha como um dos objetivos o levantamento das diferentes metodologias usadas no ensino da disciplina. E a mesma autora cita as conclusões da ICMI em sua obra:

> Após um mergulho reflexivo no contexto de então, concluindo que existiam muitas dificuldades com as metodologias até então praticadas, pois com os relatos de experiências e com as propostas pedagógicas em que o ensino se torna pouco atraente, não se formavam estudantes capazes de resolver problemas desconhecido, apenas aqueles de rotina e a partir do ensino recebido. Após essa constatação foi possível a Klein desenvolver as suas propostas e ideias, que tinha em seu cerne as aplicações e os exemplos práticos nas relações e interações no ramo da matemática, deveriam ser usados para a compreensão de suas regras e conceitos. (ARAGÃO, 2016, p. 7-8).

Mas o termo Modelagem Matemática, como é utilizado atualmente, já é mais recente, pois como nos diz Biembengut (2009), ele é encontrado em escritos do inicio do século XX, em literaturas de Engenharia e Ciências Econômicas. Ela comenta, que entre o final dos anos 50 e os anos iniciais da década de 60, do século passado, o americano H.O. Pollak, um dos defensores e ajustadores das ideias de Félix Klein, descreve o processo sem usar o termo, em obras nos Estados Unidos da América (EUA).

A autora Biembengut (2009) enfatiza que o Congresso Matemática e Realidade, ocorrido em Roskilde, antiga capital da Dinamarca, contribuiu para que no ano de 1983 houvesse a consolidação do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA. Outro pesquisador citado é o holandês Hans Freudenthall, que junto com Pollak era um dos defensores e ajustadores das ideias de Klein. Freundenthall fundou e criou o *Instituut Ontwwikkeling Wiskundeonderwijs* - IOWO – (Instituto para o desenvolvimento da Educação Matemática), atualmente denominado *Freudenthal Institute*.

No Brasil, para Biembengut (2009) os precursores principais dessa tendência, entre tantos, destacam-se dois professores: Aristides Camargos Barreto e Rodney Carlos Bassanezi.

Biembengut (2009) descreve que Aristides Camargo Barreto tem seus primeiros contatos com modelagem matemática ao cursar Engenharia na década de 60. Mas é na Pontífice Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC – Rio), onde lecionou a partir da metade da década de 70, que ele utilizava principalmente a metodologia, nas disciplinas Fundamentos da Matemática Elementar, Pratica do Ensino de Licenciatura em Matemática e Cálculo Avançado, sendo esta ultima, uma disciplina na Pós-graduação para engenheiros.

Podemos dizer que uma de suas principais experiências pedagógicas foi em 1976 na disciplina de Cálculo Diferencial Integral IV, disciplina essa oferecida a alunos de diversos cursos, ministrada a mais de 200 acadêmicos, com 5 horas/aulas semanais, divididos em 4 turmas. As horas/aulas eram assim distribuídas: 2 utilizadas para exposição da teoria da disciplina; outras duas eram utilizadas por um auxiliar na resolução de exercícios com os estudantes e a última hora discutiam-se em grupos os problemas propostos na disciplina.

Barreto orientou as duas primeiras dissertações de pós-graduação no nosso país com enfoque em modelagem: a primeira com o título *Modelos na Aprendizagem Matemática*, escrita por Celso Braga Wilmer, em 1976 e no ano de 1979 o costarriquenho Jorge E. Pardo Sánchez defendeu a de titulo “*Estratégia combinada de Módulos Instrucionais” e “Modelos Matemáticos Interdisciplinares para ensino aprendizagem da matemática em nível de 2º grau; estudo exploratóri*o”, ambas na PUC-Rio.

Barreto fez e orientou diversos experimentos com modelagem e levou a defesa dessa metodologia a inúmeros eventos de educação matemática, no Brasil e no exterior, sendo que em um deles, em 1979, na Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), a convite do Professor e pesquisador Ubiratan D’Ambrósio estava aquele que se tornaria, na opinião de Biembengut (2009), um dos maiores disseminadores dessa estratégia, o professor e pesquisador Rodney Carlos Bassanezi.

No inicio da década de 80, o Prof. Bassanezi ao coordenar um curso de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) para professores, solicita aos mesmos que após uma reunião entre os participantes, levantassem problemas envolvendo CDI. E verificou que a maioria dos problemas sugeridos pelos participantes eram parecidos com os do livro texto da disciplina. A partir desse momento, Bassanezi propõe a modelagem matemática na resolução de problemas.

A Universidade Estadual de Guarapuava – PR, em 1982, organiza um curso de Pós-graduação coordenado por Bassanezi e ministrado por professores do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica – (IMECC), da Unicamp, que viria com modificações sugeridas por ele, no programa a ser o primeiro Curso de Pós-graduação em Modelagem. Esse foi o início e podemos julgar que pelo número de cursos que se seguiu foi muito bem aceito. Foram tantos os cursos e nas mais diferentes instituições, conforme as próprias palavras de Biembengut, quando ela cita:

> Atualmente ele contabiliza dezenas e dezenas desses cursos de pós-graduação e de formação continuada e palestras em várias cidades de todas as regiões brasileiras, promovidas por Instituições de Ensino ou Secretarias Estaduais e Municipais de Educação. (BIEMBENGUT, 2009, p. 11)

Bassanezi, além do Imecc- Unicamp, colaborou também com o Programa de Mestrado em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) no campus de Rio Claro- SP, que foi criado em 1983, onde podemos destacar que em 1990 teve a defesa da dissertação intitulada: *Modelagem Matemática como Método de Ensino Aprendizagem de Matemática em Cursos de 1º e 2º graus,* na qual Maria Salett Biembengut faz a aplicação e verificação da validade da modelagem matemática.

Se o primeiro curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática é de 1982, Pereira et al (2018, p. 157) identifica em 2010 que os cursos de Pós-Graduação na área de Ensino são apenas 57 (cinquenta e sete) e, já em 2016, contabiliza 128 (cento e vinte e oito) cursos, portanto um crescimento de aproximadamente 124% (cento e vinte e quatro por cento) em apenas 6 anos. Ao fazer um levantamento dos trabalhos concluídos, apenas naqueles cursos que obtiveram conceitos iguais ou superiores a 5 (cinco), atribuídos pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), encontraram 124 (cento e vinte e quatro) produções defendidas nos mesmos, entre dissertações e teses, 49 (quarenta e nove) que tinham no título, resumo e/ou palavras chave termos relacionados à Modelagem ou Modelagem Matemática. Podemos ressaltar que essas instituições foram em números de 13 (treze) somente. Sendo assim, podemos afirmar que pelo crescimento nacional de produções acadêmicas nos cursos de Pós-Graduação, a Modelagem Matemática, como uma estratégia de ensino, é uma realidade muito bem aceita nos meios acadêmicos.

1.2 ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

> Genericamente, podemos dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem, é um meio de fazê-los interagir. (BIEMBENGUT, HEIN, 2018, p. 13)

As etapas da modelagem matemática variam de acordo com o pesquisador, tanto em números quanto em nomes. Normalmente, apesar da mudança de nomes representam o mesmo trabalho, por exemplo, a etapa validação do modelo.

Adotamos neste trabalho as etapas descritas por Biembengut e Hein (2018), pois as consideramos simples e de fácil entendimento. Na citada obra, eles detalham a modelagem em 3 etapas, cada uma com 2 subdivisões. Sendo elas:

1. Interação – com as subdivisões: reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico);
2. Matematização, subdivididas em formulação de problemas (hipótese) e resolução de problema em termos de modelo;
3. Modelo Matemático com as subetapas de interpretação da solução e validação do modelo (avaliação).

Fazemos em seguida uma pequena explanação, sobre cada etapa e suas divisões:

1. **Interação:** Nesta etapa suas subdivisões não possuem ordem e sempre se misturam entre si, o professor orientador define o que estudar. Os alunos escolhem os temas relacionados aos conteúdos, pois de acordo com Bassanezi (2018), os mesmos se sentirão mais comprometidos e consequentemente mais participativos. O pesquisador em sua citada obra enumera temas escolhidos por seus alunos e a frequência que aconteceu.

Nesta etapa, deverão fazer um estudo direto, experiência em campo, ou indireto, em livros e revistas especializadas sobre o objeto a ser modelado e o professor deve dividir os alunos em grupos com tamanho variado de acordo com a sua conveniência.

2. **Matematização.** Para termos conhecimento das dificuldades e da importância dessa etapa, citamos o pensamento dos autores das mesmas: *“Esta etapa, a mais completa e “desafiante”, em geral subdivide - se em formulação do*

problema e resolução. É aqui que se dá a "tradução" da situação-problema para a linguagem matemática." (Biembengut e Hein, 2018, p. 14).

Na primeira parte da etapa, classificamos, decidimos e selecionados as variáveis e constantes envolvidas em nossa problemática e, por fim as descrevemos em termos matemáticos e, na subetapa seguinte obtemos resultados por processos contínuos ou aproximados através dos processos discretos com as ferramentas matemáticas disponíveis.

3. **Modelo Matemático:** Feito as 2 etapas iniciais, o passo seguinte é verificarmos a eficiência do modelo construído e, em seguida, validarmos o mesmo. Se o modelo não for eficiente retornamos o processo a etapa anterior, verificando as variáveis e ajustando as hipóteses.

1.3 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA DE ENSINO

> A modelação matemática norteia-se por desenvolver o conteúdo programático a partir de um tema ou modelo matemático e orientar o aluno na realização de seu próprio modelo-matemático. (BIEMBENGUT, HEIN ,2018, p.18)

Conforme Biembengut e Hein (2018) existe consenso de que a teoria, bem como a aplicabilidade da matemática devem ser ensinadas. Na sala de aula, muitas vezes nos deparamos com a seguinte situação: a maioria de nossos alunos conhece a famosa "Regra de Baskara", conseguem resolver a equação de 2º grau $x^2 - 5x + 6 = 0$ e determinam seu conjunto solução. Mas se colocarmos aos mesmos a seguinte situação-problema: um retângulo tem 10 cm de perímetro e área 6 cm², determine os seus lados. Veremos que pouquíssimos alunos, e em algumas vezes nenhum deles, dependendo o conhecimento da sala, conseguem resolver o que foi solicitado, mesmo que revisemos a definição de retângulo, área e perímetro de figuras planas. Isso nos mostra que teoria e prática precisam andar lado a lado.

Nesse sentido, muitos professores sugerem a Modelagem Matemática como método de ensino. Porém, não é simples trabalhar com essa prática e, na maioria das vezes, existe a necessidade do professor se dedicar mais a esse método o que nem sempre é possível. Por outro lado, com a implantação das Escolas em

Tempo Integral, espera-se que docentes e discentes tenham mais tempo de dedicação para aplicar a modelagem matemática como método de ensino. Esse método, muitas vezes aguça a curiosidade dos alunos, pois ele trabalha basicamente com pesquisas. Biembengut e Hein (2018) afirmam que para ser positiva a aplicação da modelagem matemática em cursos regulares, com currículos a serem cumpridos, ela tem que sofrer alterações, passando a chamar-se modelação matemática. Conforme os autores Biembengut e Hein (2018, p.18), ela pode ser implantada em qualquer nível escolar, sempre tendo como objetivos:

- A interdisciplinaridade;
- Demonstrar a importância da disciplina na formação dos mesmos;
- A aplicação da teoria estudada;
- Melhorar a aprendizagem;
- Desenvolver a capacidade de pensar e raciocinar logicamente.

Eles também sugerem 5 passos para pôr em prática a modelação matemática: diagnóstico; escolha do tema ou modelo matemático; desenvolvimento do conteúdo matemático; orientação de modelagem e avaliação do processo. A seguir, uma explicação sucinta sobre cada um:

I. **Diagnóstico:** Conhecer bem os alunos com quem vamos trabalhar, na maioria das vezes é a chave do sucesso da aplicação do método. Devemos ter a clareza dos interesses e metas de cada um bem como sua realidade sócio–econômica. Possibilitando que o professor se oriente na escolha de um tema de interesse da maioria, poupando-o da necessidade em buscar outros métodos para incentivar os alunos. Outro ponto que precisamos levantar diz respeito ao nível de conhecimento matemático dos alunos, pois muitas vezes fazem-se revisões na aprendizagem dos conteúdos programáticos. Devemos ter em mente dinâmicas de ensino diferenciadas para serem aplicadas nas aulas de início e final de períodos, bem como em turnos diferentes.

No diagnostico, não podemos deixar de levantar a disponibilidade dos alunos para atividades extraclasses.

II. **Escolha do tema ou modelo matemático:** De acordo com Biembengut e Hein (2018), temos duas maneiras de trabalhar a escolha do tema, a saber:

a) Um tema único para o ano letivo. Devemos ter o cuidado nessa escolha, pois esse tema terá que ser abrangente, pois teremos que desenvolver todo o conteúdo programático da série e também ser interessante para que os alunos permaneçam motivados durante o ano.

b) Um tema para cada item da ementa escolar. Essa forma pode ter um efeito negativo relacionado ao tempo gasto em cada escolha, pois o número de aulas durante o ano letivo é insuficiente na maioria das vezes.

Mas não podemos esquecer nesta escolha dos ensinamentos de Bassanezi ao descrever as etapas da modelagem matemática, quando salienta que:

> É muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos, que desta forma se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva. É claro que a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará sobre exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia etc. (BASSANEZI, 2015, p. 16)

III. **Desenvolvimento do conteúdo programático:** Sugerimos a divisão dessa etapa do mesmo modo como efetuada na Modelagem Matemática, procedimento esse descrito na seção 1.2 deste trabalho:

a) Interação: reconhecimento da situação-problema e familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico).

Aqui o professor faz uma pequena palestra a respeito do tema escolhido, e na sua fala o educador deve procurar sempre motivar os discentes, pois todos sabem que só se aprende aquilo que temos interesse ou necessidade. No prosseguimento do trabalho levantamos as questões que queremos e devemos resolver.

b) Matematização: formulação e resolução do problema em termos de modelo.

Nesta parte do trabalho devemos procurar fomentar o debate para que os alunos nos deem as respostas que procuramos. Debate esse que deve levar a participação de todos que compõem o grupo e nessa etapa também, discorrer sobre o conteúdo programático. Precisamos ter em mente que muitas vezes na explicação do mesmo, é imprescindível abrir mais o leque de ensinamentos, ampliando ou revendo temas do programa de estudo. Devemos apresentar exemplos análogos para melhor fixação daquilo que pretendemos.

c) Modelo Matemático: interpretação da solução e validação do modelo.

A resposta obtida para resolver a situação problema é o modelo matemático. Nesse momento devemos mostrar outros exercícios, análogos ao que queríamos resolver e a resolução dos mesmos devem conduzir nossos discentes a uma análise dos resultados, levando assim a validação do modelo.

IV. **Orientação da modelagem:** Bassanezi (2015), nos alerta que como em qualquer atividade só aprendemos fazendo, também em modelagem só aprenderemos modelando e de preferência com alguém já experiente.

Para ensinar e orientar a modelação matemática, assim como na modelagem matemática, é preciso preparar e planejar as atividades que serão desenvolvidas com os grupos. Dividir a carga horária da disciplina para que tenhamos tempo hábil para cada etapa. Sempre pensando que:

> É fundamental para que se possa orientar e acompanhar os alunos no desenvolvimento do trabalho de modelagem, um planejamento sobre a inteiração com o assunto, bem como a forma de encaminhamento e quando ou em que momento norteará seus alunos. (BIEMBENGUT; HEIN, 2018, p.23)

Para essa orientação Biembengut e Hein (2018) sugerem 5 etapas que podem ser seguidas:

a) Escolha do tema;
b) Interação com o tema;
c) Planejamento do trabalho a ser desenvolvido pelos grupos;
d) Conteúdo matemático;
e) Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos.

V. **Avaliação do processo:** Inicialmente devemos estabelecer nossos critérios de avaliação e dar conhecimento do mesmo aos alunos. Biembengut e Hein (2018) enfatizam a necessidade de ter dois focos principais: o trabalho do professor e o conhecimento adquirido pelos alunos. Para isso, nossa análise pode ser feita subjetivamente em relação a: frequência dos alunos; sua participação; sua interação no trabalho em grupo e sua responsabilidade no cumprimento das tarefas. Na parte objetiva, devemos analisar: a produção do conhecimento; a produção do modelo e sua aplicabilidade.

2 FUNÇÕES POLINOMIAIS: EMBASAMENTO TEÓRICO

> Tratada dessa maneira a Matemática não é fácil nem difícil. É interessante, intrigante, viva, desafiadora, e também útil, prazerosa, recreativa e, em certas situações, bonita de ver e agradável de ler. (LOPES, 2013, p. 3)

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos teóricos relativos às funções polinomiais do primeiro, segundo e terceiro grau, bem como faremos um breve relato histórico sobre sua origem.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

> A partir dai, dizemos aos iniciantes: quando não tiver o que fazer com um tema, comece “contando” ou “medindo”, pois, com esse procedimento, é fatal surgir uma tabela de dados. (BASSANEZI, 2015, p. 12)

Jean Bernoulli (1667 – 1748): descreve: “Chamamos aqui de função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira desta grandeza variável e de constantes”.

Ainda Leonhard Paul Euler (1707 – 1783) afirma que “Se x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x ou são determinadas por ele são chamadas de suas funções”.

Elon Lages Lima (1929 – 2017) define função da seguinte forma: “Dados os conjuntos X e Y, uma função $f\colon X \longrightarrow Y$ (lê-se “uma função de X em Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se “y igual a f de x”)”.

As três definições acima, mostram um pouco o desenvolvimento de um conceito matemático ao longo dos anos. Percebe-se que o desenvolvimento da definição de função matemática vem sofrendo transformações somente na sua escrita, mas seu significado matemático continua inalterável.

O conceito matemático de função é conhecido desde a Babilônia, considerado uma prova desse conhecimento é a Astronomia. Também os pitagóricos, tinham esse conhecimento, pois inclusive Pitágoras, fez experimentos e criou a escala musical.

Conforme Aaboe (2002), na Alexandria, Ptolomeu, na sua obra "Almageste", publicada entre 125 e 150 d.C., descreveu algumas tabelas dos astrônomos da época, em que são relacionados comprimentos dos círculos e os seus raios. De acordo com Boyer (1996), o bispo francês Nicolau Oresme (1323 -1382) utilizou segmentos de retas para representar o deslocamento e a velocidade de um móvel, em um de seus livros. No século XVI e XVII, com os estudos feitos por Galileu Galilei (1564 -1642), Johannes Kepler (1571 -1630) e Isaac Newton (1642 – 1727), dentre tantos outros, que utilizavam em seus trabalhos as observações de fenômenos e das leis que o explicavam, eram ligados ao conceito de funções, como temos hoje.

Com a invenção do eixo cartesiano em 1637, pelo matemático e filosofo francês Rene Descartes, foi possível representar os gráficos de uma relação entre duas variáveis. Mas foi o matemático alemão Wilhelm Von Leibniz (1646 – 1716), no manuscrito em latim "Methodous tangentium inversa, seu de functionibus", que usou pela primeira vez o termo função, assim como, os termos "variáveis", "constantes" e "parâmetros".

A noção de função tem grande importância na definição de modelos matemáticos, pois na sua concepção, temos sempre variáveis em relação com outras variáveis.

Se da antiguidade até a Idade Moderna a Matemática basicamente se apoiou nos conceitos euclidianos, de entes primitivos, a partir do surgimento do Cálculo Infinitesimal vai se apoiar nos conceitos e teorias das funções. É o que podemos extrair dos ensinamentos de Roque e Pitombeira (2012, p.191), quando dizem que: "A geometria ainda era o principal domínio da Matemática e qualquer pessoa que quisesse aprender ciência devia começar pelos Elementos de Euclides." E complementam com: "Se compararmos os cálculos de Newton e de Leibniz com o atual, veremos que eles trabalhavam essencialmente com variáveis definidas sobre curvas, ao passo que atualmente o cálculo se fundamenta na noção de função." (Roque e Pitombeira, 2012, p. 191)

2.2 CONCEITOS E TEORIAS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

> Assim é que os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo matemático para as operações de contagem e medida; as funções afins, as quadráticas, as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como o modelo matemático, adequado para representar uma situação especifica." (LIMA, 2013, p. IX)

Inicialmente abordaremos alguns conceitos de funções de uma forma geral e, em seguida, descreveremos sobre as funções polinomiais de primeiro, segundo e terceiro graus.

Se consultarmos livros de Matemática, encontraremos inúmeras definições, sobre o que é uma função. Mas, ao nos atermos para as mesmas, verificaremos que, apesar de tendo sido escritas com palavras diferentes tem sempre o mesmo significado. Mas resolvemos adotar em nosso trabalho, a definição apresentada por Lima (2013), que transcrevemos a seguir:

> Dados os conjuntos X e Y, uma função $f\colon X \longrightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$ (leia-se "y igual a f de x"). (LIMA, 2013, p. 36)

É importante destacarmos que em toda função, o conjunto X, primeiro conjunto, é chamado de Domínio e o conjunto Y de Contra Domínio da função, alguns denotam como segundo conjunto. Vale ressaltar que em toda função definida, existem 3 componentes básicos que são: Domínio, Contra Domínio e Lei de Formação ou de correspondência, que levará cada elemento do Domínio ao elemento de sua ligação ou correspondência no Contra Domínio, e representamos por $x \longrightarrow f(x)$. Devemos nos atentar, para a frase do autor, em sua definição: "... associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$...", cujo significado implícito de suma importância é, todos os elementos do Domínio estão associados a um e um só elemento do Contra Domínio. Um terceiro conjunto existente em uma função é o formado pelos elementos do Contra Domínio que estão relacionados com os elementos do Domínio, elementos esses chamados de imagens. Esse conjunto, $f(X)$, que é um subconjunto do Contra Domínio é chamado de conjunto Imagem.

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x), x \in X\}.$$

Algumas funções, pelas suas características, recebem denominações especiais. Alguns exemplos:

(i) Funções injetivas: são aquelas em que elementos diferentes do Domínio têm imagens diferentes no Contra Domínio. Na linguagem matemática escrevemos:

Se $f: X \longrightarrow Y$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ tal que $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Funções sobrejetivas: são aquelas em que o conjunto Imagem é igual ao conjunto Contra Domínio. Em linguagem matemática podemos denotar dessa maneira:

Se $f: X \longrightarrow Y, \forall\, y \in Y, \exists\, x \in X \mid y = f(x)$, ou seja, $f(X) = Y$.

(iii) Funções bijetivas: aquelas que são injetivas e sobrejetivas ao mesmo tempo.

(iv) Funções crescentes: dizemos que uma função é crescente em um intervalo contido no seu Domínio se, ao compararmos 2 valores pertencentes a esse intervalo, a imagem do maior deles será maior que a imagem do menor dentre eles. Matematicamente denotamos:

Se $f: X \to Y, x_1 \in X, x_2 \in X$, tal que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

(v) Funções decrescentes: se ao compararmos 2 elementos pertencentes a um intervalo contido em seu conjunto Domínio e, constatarmos que a imagem do maior elemento é menor que a imagem do menor elemento, então a função é decrescente no intervalo. Denotando matematicamente, temos:

Se $f: X \to Y, x_1 \in X, x_2 \in X$, tal que $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

O produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), cuja primeira coordenada x pertence a X e a segunda coordenada y pertence a Y , ou seja,

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

O gráfico de uma função $f: X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados $(x, y) \in X \times Y$, onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Simbolicamente,

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

A seguir, abordaremos uma breve introdução sobre funções polinomiais, uma vez que objetivamos nesse trabalho contextualizá-las por meio da modelagem matemática aplicada nas ciências agrárias.

Dentre todas as funções existentes, uma das mais usadas, pela sua diversidade de aplicabilidade, é a função polinomial, que Lima (2013, p. 138) define assim: “Diz-se que $\mathrm{p}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando são dados números reais $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ que, para todo $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ tem-se $\mathrm{p(x)} = \mathrm{a_n x^n} + \mathrm{a_{n-1} x^{n-1}} + \cdots + \mathrm{a_1 x} + \mathrm{a_0}$. Se $\mathrm{a_n} \neq 0$, dizemos que p tem grau n.”

Queremos destacar alguns ensinamentos importantes que ele nos transmite, na obra citada acima:

1º) Ao comentar sobre terminologia, ele afirma que função não tem grau, porém, quem tem grau é o polinômio;

2º) Uma função polinomial de grau n tem no máximo n raízes;

3º) Não é necessário fazer distinção entre função polinomial e polinômios.

2.3 GRÁFICOS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

Para a confecção de gráficos, normalmente usamos o Sistema de Coordenadas Cartesianas, que leva essa nomenclatura em homenagem ao filosofo, físico e matemático francês Rene Descartes (1596 – 1650), seu criador.

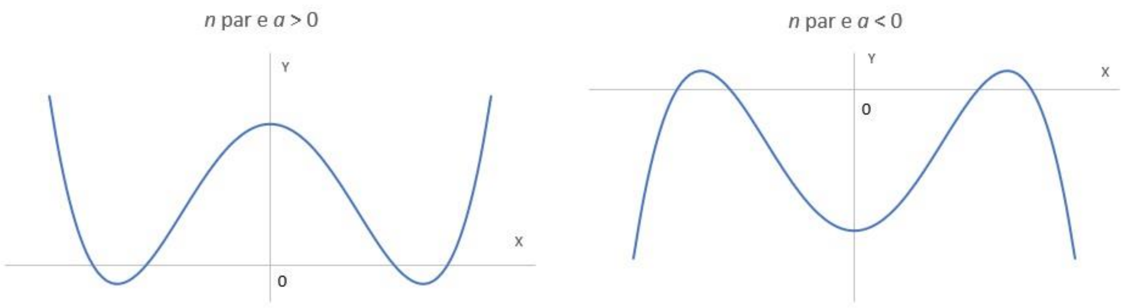
Para Lima (2013), quando queremos traçar gráficos de funções polinomiais, apesar de estarmos fazendo aproximações, sempre devemos nos preocupar com pelo menos dois aspectos:

1º) Para onde está tendendo, isto é, qual é o sinal da função quando diferencio seus valores;

Em uma função polinomial devemos identificar se n, expoente do maior grau, é par ou impar, isso irá caracterizar suas tendências.

- Uma função polinomial de grau n par, tem a caracteristica de, ao fazer o dominio tender a $-\infty$ e a $+\infty$, sua imagem assume valores com os mesmos sinais, positivos ou negativos, de acordo com o sinal do coeficiente de maior grau do polinômio que representa a mesma, veja ilustração na Figura 1.

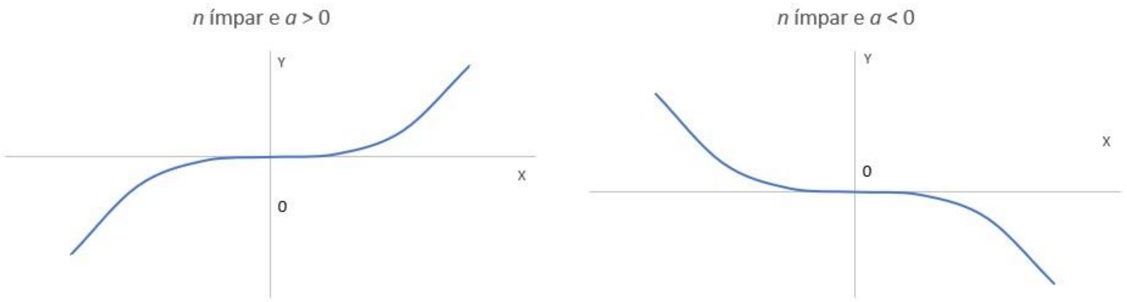
Figura 1: Gráficos de funções polinomiais com grau par.



Fonte: o autor.

- Uma função polinomial que tenha grau n ímpar, tem a característica de apresentar imagens com sinais opostos ao sinal do coeficiente do termo de maior grau do polinomio para valores do dominio tendendo para $-\infty\ e\ a + \infty$, ver ilustração na Figura 2.

Figura 2: Gráficos de funções polinomiais com grau ímpar.



Fonte: o autor.

2º) Determinar suas raízes, quando existirem.

Quanto ao cálculo das raízes, transcrevemos o que diz Lima (2013):

> Mais um dado relevante para traçar o gráfico de um polinômio é a localização de suas raízes. É claro que por motivo de continuidade, se $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$ então p deve possuir uma raiz entre x_1 e x_2 .(Esta observação já assegura que todo polinômio de grau impar possui ao menos uma raiz real.). (LIMA, 2013, p. 143 e 144)

E para determinar todas as raízes de um polinômio, Lima (2013) salienta que, um processo que tem muita eficiência na determinação delas é o "Método de Newton".

2.4 ALGUNS TIPOS DE FUNÇÕES POLINOMIAIS

> Uma verdade matemática não é simples nem complicada por si mesma. É uma verdade. (Emile Lemoine).

Começaremos o detalhamento das funções polinomiais, pela mais simples delas: a função polinomial do 1º grau. Lopes (2013) afirma que as funções lineares têm uma grande utilidade em Matemática Aplicada e isso pode ser constatado por qualquer individuo na sua vida cotidiana.

2.4.1 Função Polinomial do 1º Grau (Função Afim)

De acordo com Lima (2013), toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = ax + b \tag{2.1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ é chamada função afim.

Lima (2013), também afirma, que ao calcularmos o valor da função no ponto de abcissa $x = 0$, obtemos $f(0) = a0 + b = b$, logo a constante b que é também chamada por autores matemáticos de coeficiente linear é a ordenada do ponto $(0, b)$, Para determinarmos o valor de a, basta tomarmos x_1 e x_2, ambos pertencentes a $\mathbb{R}$, substituirmos na função (2.1), para obtermos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{2.2}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.2) em (2.3), teremos:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b.$$

Ao cancelar a constante b, obtemos:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1.$$

Colocando a constante a em evidência chegamos a:

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

Assim concluímos que:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{2.4}$$

Mas como ter certeza que a função desejada como modelo matemático é a função afim? Isso quem garante é o teorema:

Teorema 2.1: Seja $\mathrm{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o valor do acréscimo $\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h})-\mathrm{f}(\mathrm{x})= \varphi(\mathrm{h})$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

Para a demonstração do Teorema 2.1 acima enunciado, utiliza-se o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, cuja demonstração encontra-se na obra de Lages et al. (2010, p. 16), intitulada “Temas e Problemas”.

Lima (2013, p. 83), ressalta a questão da terminologia da constante a, coeficiente da variável x, pois ele salienta que, é mais adequado referirmos a mesma como taxa variação ou de crescimento, do que como coeficiente angular, pois quando estamos resolvendo problemas não temos gráfico.

Conforme Lima (2013), a função denotada por $f(x)=ax$ é o modelo matemático para resolução de problemas que envolvem proporcionalidade, cujo uso é muito antigo. Como caso particular da função afim, é denominada função linear.

Para determinarmos se uma função é linear, em qualquer situação, basta que ela cumpra o axioma conhecido como Teorema Fundamental da Proporcionalidade, que enuncia:

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade): Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx)=n\,f(x)$, para todo $n \in Z$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) Pondo $a=f(1)$, tem se $f(x)=ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ($f(cx)=cf(x)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}$);

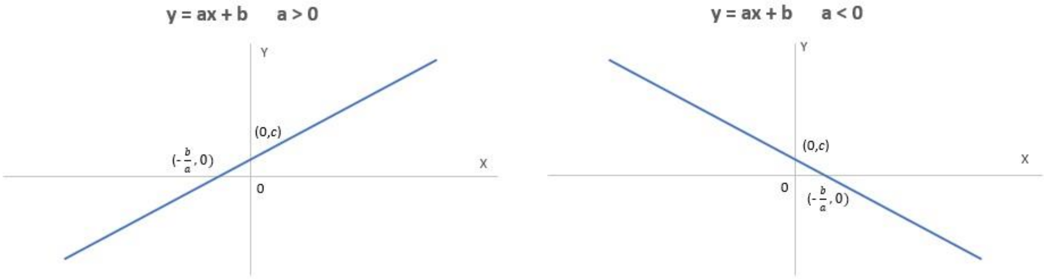
(3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

2.4.1.1 Gráficos da Função Polinomial do 1º Grau

Como é do conhecimento comum, todas as vezes que utilizamos uma afirmação na Matemática, devemos prová-la. Lopes (2013) prova, de maneira simples, que, o gráfico de uma função polinomial de 1ª grau é uma reta.

Dependendo apenas do valor da constante a, teremos uma função crescente, $a > 0$ ou decrescente, $a < 0$, conforme Figura 3.

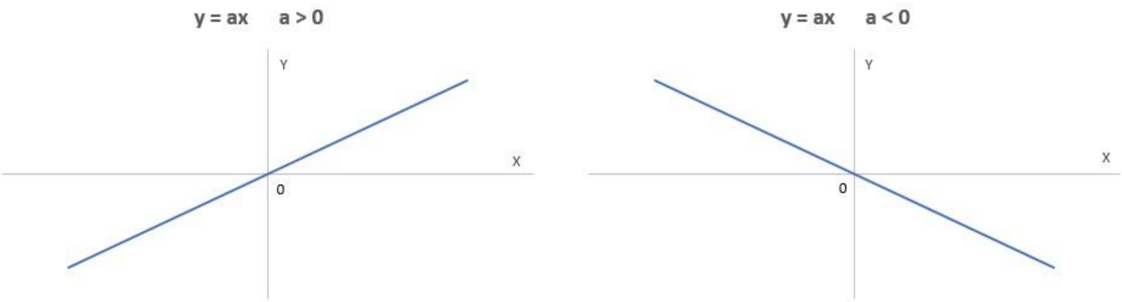
Figura 3: Gráficos de funções polinomiais de 1º grau.



Fonte: o autor.

Os gráficos também terão sua posição definida em relação a constante b, pois se $b = 0$, então o mesmo conterá a origem do sistema de eixo cartesiano, veja Figura 4.

Figura 4: Gráficos de funções polinomiais de 1º grau para b=0.



Fonte: o autor.

E se b assumir valor $\neq 0$, o mesmo não transpassará a origem do sistema. Convém destacar os pontos em que o gráfico interceptará os eixos coordenados, que serão os pontos $(-\frac{b}{a}, 0)$ e $(0, b)$.

2.4.2 Função Polinomial do 2º Grau (Função Quadrática)

> A fama das superfícies parabólicas remonta à Antiguidade. Há uma lenda segundo a qual o extraordinário matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa em torno do ano 250 A.C., destruiu a frota que sitiava aquela cidade incendiando com raios de sol refletidos em espelhos parabólicos. Embora isto

> seja teoricamente possível, há sérias dúvidas históricas sobre a capacidade tecnológica da época para fabricar tais espelhos. (LIMA, 2013, p.121)

Para a função polinomial de 2º grau, mais conhecida por função quadrática, transcrevemos a seguinte definição, dada por Lima (2013, p.104): “Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama - se quadrática quando são dados números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c,$ para todo $x \in \mathbb{R}$.”

Lima também afirma em sua obra que existe uma correspondência biunívoca, entre a função quadrática e o trinômio de 2º grau $ax^2 + bx + c$.

Assim como as funções polinomiais de 1º grau, as polinomiais de 2º grau também têm, conforme Bigode (2013), grande utilização na Matemática Aplicada.

Para exemplificar, mostrar a importância dessa função, e ao tempo que ela nos remete, trazemos as palavras de Lima:

> Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. (LIMA, 2013, p. 108).

2.4.2.1 Forma Canônica

Uma das maneiras de representarmos o trinômio do segundo grau é conhecida como a sua forma canônica, que descrevemos a seguir.

Dado o trinômio de 2º grau, com $a \neq 0$, podemos escrever da forma:

$$ax^2 + bx + c = a[\, x^2 + \frac{b}{a}\, x + \frac{c}{a}\,] \, .$$

Então complementamos o quadrado do termo entre colchetes e teremos a chamada forma canônica do trinômio:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\, x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\, x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}].$$

A vantagem de termos um trinômio escrito na forma canônica é que podemos igualar o mesmo a zero e isolando a variável x, deduzir facilmente a conhecida Fórmula de Baskara, usada na resolução das equações de 2º grau:

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}.$$

2.4.2.2 Gráficos da Função Polinomial do 2º Grau

O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola. A parábola é um dos sete lugares geométricos, classificados pelo matemático italiano Pierre de Fermat (1601 – 1665) ao estudar a obra "Cônicas de Apolônio", do matemático grego Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.).

Lima (2006, p.125) define a parábola como: "Dados um ponto F e uma reta d que não o contem, *a parábola de foco* F *e diretriz* d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.".

Já Machado (1982, p. 109) traz para a mesma cônica, a seguinte definição: "A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta dada d, $F \notin d$, deste plano."

A seguir descrevemos alguns elementos ou terminologia inerente à parábola, segundo Lima (2006):

i) A reta d é denominada diretriz da parábola P;

ii) A reta que passa pelo ponto F, foco da parábola, e é perpendicular a diretriz é chamada de reta focal;

iii) O ponto de intersecção da parábola P com a reta f é chamado vértice da parábola, e representaremos no nosso trabalho de V. Ele é equidistante de F e d, e tem as coordenadas cartesianas $V = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$. O vértice também é conhecido como ponto de máximo ($a < 0$) ou ponto de mínimo ($a > 0$).

iv) A distância entre o ponto F e a reta d é chamada de distância focal e representada por $2p$.

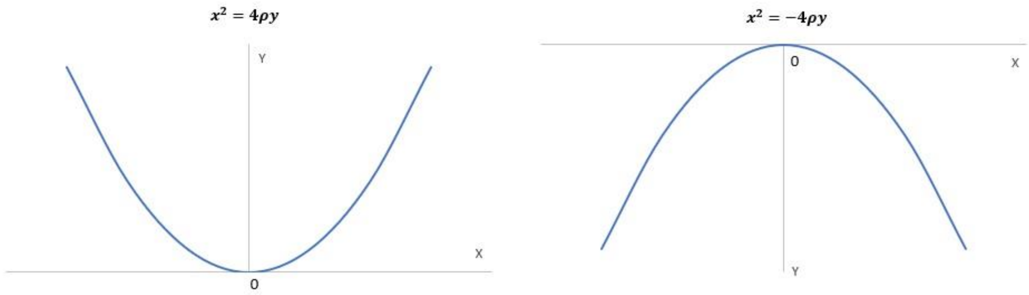
A seguir apresentamos 2 formas canônicas da parábola, quando a reta focal coincide com o eixo OY:

(A) Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY: temos duas posições para o foco F em relação à reta diretriz d, veja Figura 5:

A1 – Foco acima da diretriz, a equação da parábola será $x^2 = 4py$;

A2 – Foco abaixo da diretriz, a equação da parábola será $x^2 = -4py$;

Figura 5: Parábolas com vértice na origem.



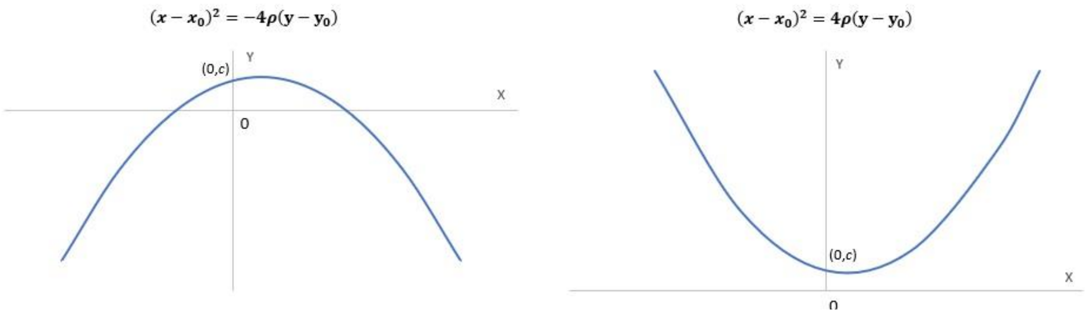
Fonte: o autor.

(B) Parábola com vértice $V = (x_0\,, y_0\,)$ e reta focal paralela ao eixo OY; também com duas posições para o foco F, conforme Figura 6.

B1 – Foco acima da diretriz, a equação será $(x - \ x_0\,)^2 \ = 4p(y - y_0\,)$;

B2 – Foco abaixo da diretriz, a equação será $(x - \ x_0\,)^2 \ = -\,4p(y - y_0\,)$.

Figura 6: Parábolas com vértice fora da origem.



Fonte: o autor.

2.4.3 Função Polinomial do 3º Grau

> ...serve para concluir que toda equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz real. (LIMA, 1991, p. 22) .

De acordo com a definição de função polinomial descrita por Lima (2013) toda função polinomial de 3º grau tem a forma de $f(x) = a\,x^3 \, + bx^2 \, + cx + d$, com a ≠ 0.

2.4.3.1 Gráficos da Função Polinomial do 3º Grau

Para melhor entendimento transcreveremos a seguir algumas definições, proposições e teoremas, enunciados e provados quando necessários, da disciplina MA – 22: Fundamentos de Cálculo, do Profmat, que usamos no estudo dos gráficos da função polinomial.

Proposição 2.1 (Derivada da Função Potência): A função $f(x) = x^n$ é derivável para todo $x \in R\ se\ x \geq 0$ e derivável para $x \in \mathbb{R}$ se $x < 0.$ Nos dois casos $f'(x) = (x^n)'$.

Teorema 2.3: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$.

Um ponto c no domínio de uma função f é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguintes casos:

(a) f não é derivável em $x = c$.

(b) f é derivável em $c\ e\ f'(c) = 0$.

Teorema 2.4: (Teorema de Rolle) Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é continua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $(a, b)\ e\ f(a) = f(b)$ então existe pelo menos um número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Proposição 2.2: (Teste da Derivada Segunda) Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I e seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Se $f''(c)$ existe então;

(i) Se $f"(c) < 0$ então f possui um máximo local em c.

(ii) Se $f"(c) > 0$ então f possui um mínimo local em c.

O teste é inconclusivo caso $f"(c) = 0$.

Um ponto P no gráfico de uma função $f(x)$ é chamado ponto de inflexão se f é continua e há uma mudança de concavidade de f no ponto P.

Souza (2016, p. 185) enuncia e prova o Teorema da Decomposição:

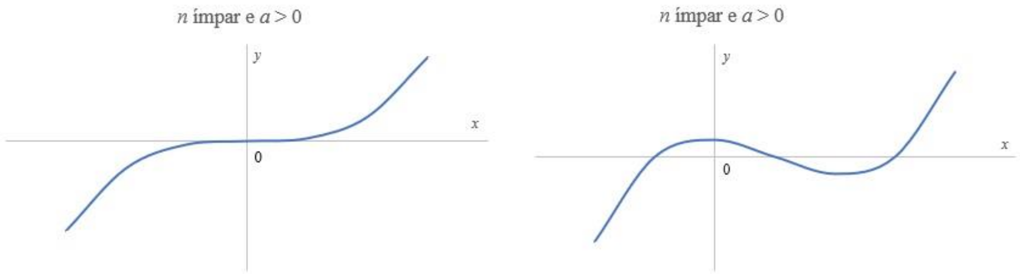
Teorema 2.5 (Teorema da Fundamental da Álgebra): Todo polinômio $P(x)$ de grau $n, n \geq 1$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é, o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, com\ a_n \neq 0$$

pode ser escrito da forma: $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n)$, onde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são as raízes de $P(x)$. A menos da ordem dos fatores tal decomposição é única.

Podemos então afirmar com embasamento teórico das definições, proposições e teoremas acima enunciados, que toda função polinomial do 3º grau terá sempre um dos 2 modelos de gráficos que as mesmas podem assumir. Pois ao executarmos sua derivada, essa será uma função de 2º grau e terá, portanto, sempre 2 raízes que poderão ser iguais ou diferentes. Se forem diferentes, teremos 2 pontos críticos, logo um ponto de máximo e um ponto de mínimo. Se forem 2 raízes iguais, haverá apenas um ponto crítico, logo esse ponto recebe a denominação de ponto de inflexão. Ponto esse que divide a concavidade da curva.

Figura 7: Gráficos de funções polinomiais de 3º grau.



Fonte: O autor.

3 MODELOS MATEMÁTICOS ENVOLVENDO FUNÇÕES POLINOMIAIS APLICADOS NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

> Ensinar Matemática nos cursos de ciências agrárias é algo mágico, tendo em vista, que disciplinas dessa área sempre fizeram parte de todos os cursos dessa área. (PEREIRA & SANTOS JUNIOR. 2015 p.1.).

3.1 FUNÇÕES EM AMBIENTES DE MODELAGEM NAS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

Quando o assunto é educação, um dos temas mais citados nas conversas e discussões sobe a mesma é a interdisciplinaridade. Pereira e Santos Junior (2015) realizaram um estudo para verificar a interdisciplinaridade existente entre os conceitos matemáticos e os das disciplinas elencadas no projeto pedagógico do curso de Agronomia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Dois Vizinhos. Neste estudo elencaram 44 assuntos das disciplinas técnicas que contextualizaram conceitos ou conteúdos matemáticos. Desse universo, cinco temas nas disciplinas técnicas estavam relacionados às funções polinomiais, ou seja, aproximadamente 11,5% dos temas. Ressaltamos que essa pesquisa foi realizada através de um questionário respondido pelos professores das disciplinas da área de agrárias.

Os mesmos autores, Pereira e Santos Junior (2019) em outro artigo, descrevem um levantamento realizado nas publicações, relativas ao período dos anos de 2000 a 2015, pesquisa essa realizada em diversas revistas da área de Ciências Agrárias. O objetivo do estudo realizado era determinar quais as funções matemáticas que estavam contextualizadas nos mesmos.

Em um universo de 25 artigos pesquisados, constataram que: 14 artigos, o que representa 56% dos artigos, remetiam a função Linear; outros 44% dos assuntos pesquisados, ou seja, 11 deles contextualizavam a função quadrática e apenas 1 artigo, 4%, se relacionava à função cúbica.

Devemos lembrar que quando nos referimos ao estudo de função é comum encontrarmos o tema em livros de Matemática da Educação Básica, e podemos citar como exemplo o de Lopes (2013), o qual enfatiza que podemos representar uma função qualquer por pelo menos três maneiras diferentes: diagrama de Euler (quando o domínio e o contradomínio são conjuntos finitos), gráficos e por uma lei de formação das mesmas.

Sviercoski (2008) traz a mesma informação, simplesmente enumerando os elementos: Equação, Gráficos e Tabelas, e complementa:

> A partir da equação de uma função é sempre possível obter uma tabela e o respectivo gráfico, entretanto nem sempre é possível encontrar a equação de uma função a partir de um conjunto de dados ou de um gráfico; fazer isso significa formular um modelo matemático. (SVIERCOSKI, 2008, p. 28).

Mas também não podemos esquecer os ensinamentos de Biembengut e Hein, quando nos dizem que:

> A modelagem matemática, atualmente usada em toda a ciência, tem contribuído sobremaneira para a evolução do conhecimento humano, seja nos fenômenos microscópios em tecnobiologia, seja nos macroscópicos, com a pretensão de conquistar o universo. (BIEMBENGUT & HEIN, 2018, p. 17)

A internet é hoje uma ferramenta imprescindível quando queremos pesquisar sobre algum determinado assunto, isso é do conhecimento de todos. Quando fazemos a pesquisa do tema: “Modelagem matemática e as ciências agrárias” encontramos milhares de assuntos relacionados. Pela quantidade das respostas obtidas podemos afirmar, sem medo de errar, que a Modelagem Matemática está relacionada a todos os assuntos da área. Como exemplo, citamos Scorza Junior que ressalta a importância das ferramentas: modelagem matemática e simulação de sistemas nas ciências agrárias.

> Diante da necessidade de se obter conclusões mais completas e confiáveis dos problemas estudados, utilizando-se de recursos financeiros, cada vez mais escassos para a pesquisa cientifica, a ferramenta modelagem matemática e simulação de sistemas, tem exercido um papel fundamental na integração do conhecimento de forma organizada e gerando informações rápidas com baixo custo. (SCORZA JUNIOR, 2006, p.73)

Também podemos nos remeter aos ensinamentos do professor e pesquisador Bassanezi, quando nos lista uma relação dos assuntos sugeridos para temas nas pesquisas, nos diversos cursos de Especialização que ministrou:

> (...) Segue uma listagem dos temas escolhidos e sua frequência: **Agricultura**: Milho, Soja, Trigo, Cana-de-açúcar (2), Seringueira, Urucum, Café, Erva-mate, Movimento dos Sem-terra, Irrigação; **Fruticultura**: Laranja, Uva (2), Banana, Maça (2); **Horticultura**: Alface, Pepino, Hidroponia; **Animais**: Suinocultura (2), Apicultura, Ranicultura, Piscicultura (3), Pecuária, Minhocultura, Avicultura (2), Andorinhas, Jacaré, Escargot. (BASSANEZI, 2015, p.17)

Neste sentido, a fim de apresentar uma matemática mais próxima da realidade a estudantes das Ciências Agrárias, apresentaremos na próxima seção alguns modelos matemáticos envolvendo funções polinomiais com base na metodologia utilizada por Sviercoski (2008), em sua obra “Matemática Aplicada às Ciências Agrárias”. Este livro aborda, entre outros temas, os conteúdos de função.

Segundo Sviercoski, (2008, p.19), o livro tem por objetivo “apresentar uma Matemática mais próxima da realidade, estimulando a interdisciplinaridade, essencial a um aprendizado eficiente, bem como novas perspectivas de trabalho e pesquisa para os futuros profissionais das Ciências Agrárias”.

3.2 APLICAÇÕES ENVOLVENDO FUNÇÕES POLINOMIAIS

> Buscar um modelo matemático que expresse a relação entre as variáveis é, efetivamente, o que se convencionou chamar de modelagem matemática. (BASSANEZI, 2015, p.21)

Se a importância de um assunto é medida pela quantidade de vezes que ele aparece em um texto, então podemos dizer que a modelagem matemática tem uma importância expressiva nas Ciências Agrárias, pois sua incidência é notada de forma intensiva nos artigos pesquisados neste trabalho, encontramos uma média de 13 exemplos de modelos matemáticos de funções polinomiais de 1º e 2º graus em cada um, Já em uma única tese de doutorado, observamos a existência de 53 modelos matemáticos de funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus.

A seguir descreveremos alguns experimentos modelados por funções polinomiais. Utilizaremos dois exemplos de cada uma das funções polinomiais de 1º e 3º graus, sendo uma crescente $(a > 0)$ e outra decrescente $(a < 0)$ e, para as funções polinomiais de 2º grau, utilizamos uma com concavidade pra cima e outa com concavidade pra baixo. Nos modelos matemáticos descritos neste trabalho, não faremos uso de Correlação e Regressão matemática, que são recursos da Estatística usados originariamente pelos pesquisadores, mas trabalharemos com valores na variável independente, diferentes dos usados pelos mesmos, mas necessários ao nosso trabalho.

3.2.1 Aplicações de Funções Polinomiais do 1º Grau

Como descrito na Seção 2.4.1 do nosso trabalho, toda função polinomial de 1º grau de valores reais, tem como lei de formação a seguinte expressão matemática: $f(x) = ax + b$, que como nos ensina Lima (2013), o coeficiente da variável independente $(a \neq 0)$ é denominado "taxa de variação". E para determinarmos esse valor, temos que fazer uso da definição dada por Sviercoski:

> A equação geral de uma função linear é dada por $y = ax + b$ em que $a \neq 0$ e b constante. Os dados de uma tabela constituem uma função linear se os valores da primeira variação, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, for uma constante não nula. Neste caso $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. (SVIERCOSKI. 2008, p. 35)

Os quadros trabalhados nesses dois próximos itens terão quatro colunas, sendo que na segunda são relacionados os valores da variável independente, na terceira coluna os da variável dependente. Na quarta coluna, são colocados os valores obtidos no quociente entre a variação da função, Δy, e a variação da variável independente, Δx. Nesse trabalho representaremos $\Delta y = y_n - y_{n-1}$ e $\Delta x = x_n - x_{n-1}$. Procedendo dessa maneira, podemos perceber que o primeiro espaço na quarta coluna não terá valor, pois não temos como efetuar os cálculos.

3.2.1.1 Aplicação 1: Função Polinomial de 1º Grau Crescente

Na primeira aplicação vamos nos basear em Teodoro et al. (2015) de onde adaptamos alguns dados (descritos no Quadro 1) de um experimento realizado no setor de Fitotecnia da Unidade Universitária de Aquidauana - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul em 2013, na cidade de Aquidauana, que está na fazenda situada no quilometro 12 da Rodovia Graziela Maciel Barroso. Ele tem por objetivo avaliar o efeito da aplicação do elemento químico silício, no acumulo da massa seca da soja em seus estágios reprodutivos, onde a cultura sofreu deficiência hídrica durante os mesmos.

No Quadro 1, os valores da variável y (kg/ha) correspondem a valores médios de massa seca das sementes da cultivar de soja 5DR615 e, os valores da variável x (dias) representam o tempo transcorrido após o estágio denominado pelos pesquisadores de R2.

Quadro 1: Dados adaptados do experimento de Teodoro et al. (2015).

n	x	y	$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$
1	14	48,52	-
2	21	150,93	14,63
3	28	253,34	14,63
4	35	355,75	14,63
5	42	458,16	14,63
6	49	560,57	14,63
7	56	662,98	14,63

Fonte: o autor.

Para obter os valores da quarta coluna do Quadro 1 calculamos o quociente entre a variação dos valores da função e a variação da variável independente, da seguinte maneira:

$$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \qquad (3.1)$$

Assim, para cada $n = 2, \ldots, 7$ (linha do quadro), obtemos a constante $\frac{\Delta \mathrm{y_n}}{\Delta \mathrm{x_n}} = 14{,}63$, fazendo os seguintes cálculos:

$$\frac{\Delta \mathrm{y}_2}{\Delta \mathrm{x}_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{150{,}93 - 48{,}52}{21 - 14} = \frac{102{,}41}{7} = 14{,}63$$

$$\frac{\Delta \mathrm{y}_3}{\Delta \mathrm{x}_3} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{253{,}34 - 150{,}93}{28 - 21} = \frac{102{,}41}{7} = 14{,}63$$

$$\frac{\Delta \mathrm{y}_4}{\Delta \mathrm{x}_4} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{355{,}75 - 253{,}34}{28 - 21} = \frac{102{,}41}{7} = 14{,}63$$

$$\frac{\Delta \mathrm{y}_5}{\Delta \mathrm{x}_5} = \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} = \frac{458{,}16 - 355{,}75}{35 - 28} = \frac{102{,}41}{7} = 14{,}63$$

$$\frac{\Delta y_6}{\Delta x_6} = \frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5} = \frac{560{,}57 - 458{,}16}{49 - 42} = \frac{102{,}41}{7} = 14{,}63$$

$$\frac{\Delta y_7}{\Delta x_7} = \frac{y_7 - y_6}{x_7 - x_6} = \frac{662{,}98 - 560{,}57}{56 - 49} = \frac{102{,}41}{7} = 14{,}63.$$

Com os cálculos efetuados de acordo com a definição acima citada, determinamos que o modelo fosse representado por uma função polinomial de 1º grau, cuja representação algébrica é escrita por $y = ax + b$ e, inicialmente, escrevemos em função do parâmetro b:

$$f(x) = 14{,}63x + b \qquad (3.2)$$

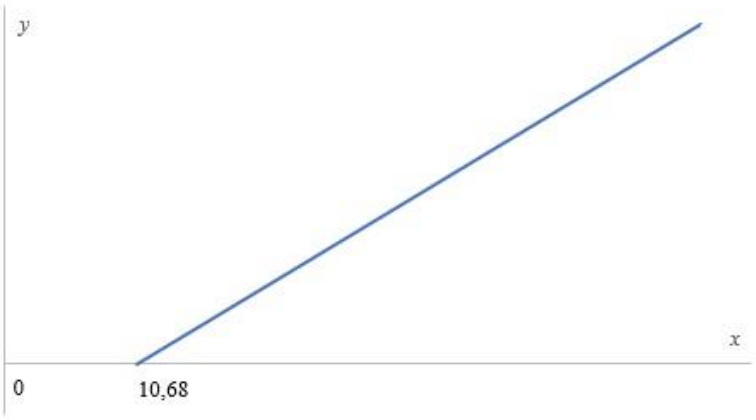
Para explicitar o parâmetro b, do modelo matemático, basta utilizar qualquer par ordenado (x, y) do Quadro 1. Neste caso, utilizaremos o par ordenado $(14;\ 48{,}52)$. Substituindo os valores do par ordenado e de a no modelo matemático (3.2) teremos: $48{,}53 = 14{,}63.14 + b$. Realizando a operação indicada e isolando o parâmetro b, teremos então $b = -156{,}30$.

Portanto o modelo matemático que descreve os dados do Quadro 1 será representado pela função polinomial de 1º grau crescente:

$$f(x) = 14{,}63\,x - 156{,}30.$$

A Figura 8 traz uma representação geométrica da função.

Figura 8: Gráfico da função f(x)=14,63x-156,30.



Fonte: o autor

A representação gráfica, nos deixa claro que com transcurso do tempo há um aumento constante da matéria seca do vegetal em todo o seu ciclo vital.

3.2.1.2 Aplicação 2: Função polinomial de 1º Grau Decrescente

Na segunda aplicação vamos modelar dados coletados num experimento extraído de Poveda Parra et al. (2013) e desenvolvido no Setor de Suinocultura da Fazenda Experimental de Iguatemi (FEI), pertencente ao Centro de Ciências Agrárias (CCA) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), localizada no Estado do Paraná. O experimento tinha o objetivo de estudar o valor nutricional (digestibilidade total e ideal) de duas leveduras spray dry (cana de açúcar – LEV 35 e cerveja + cana de açúcar- LEV 40) e o efeito de sua inclusão em rações para suínos na fase de crescimento e terminação.

No Quadro 2 a variável x (em %) descreve os níveis de inclusão da LEV 35 e, a variável y (em mm), a medida da profundidade do lombo (PL).

Quadro 2: Dados adaptados do experimento de Poveda Parra et al. (2013)

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$
1	0	48,675	-
2	5	46,075	- 0,520
3	10	43,475	- 0,520
4	15	40,875	- 0,520
5	20	38,275	- 0,520

Fonte: o autor.

Para obter o modelo matemático que represente os dados do Quadro 2 utilizamos a mesma metodologia da Aplicação 1. A função polinomial encontrada foi do 1º grau decrescente, uma vez que o coeficiente $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\,0{,}520$ é negativo.

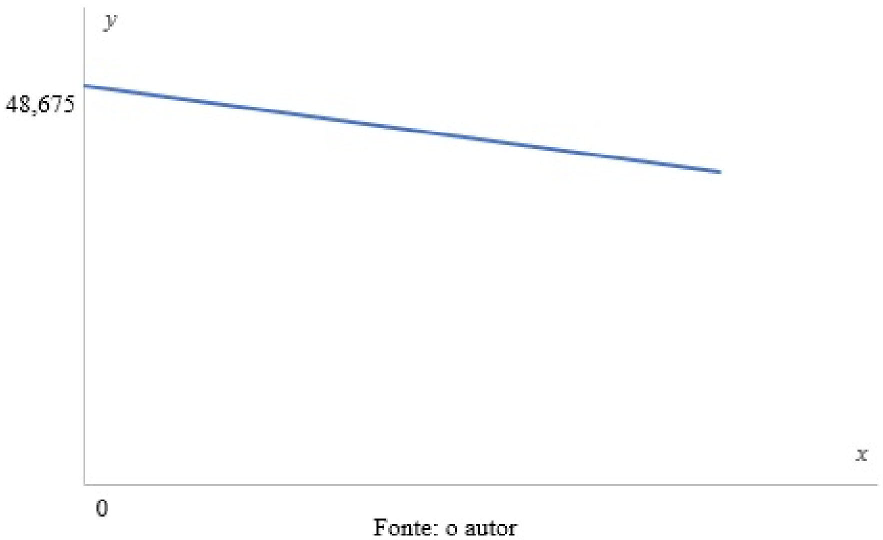
$$f(x) = -0{,}520\,x + b \tag{3.3}$$

Escolhemos o par ordenado $(0;\ 48{,}675)$ para obter o parâmetro $b = 48{,}675$ no modelo (3.3). Portanto o modelo matemático pode ser representado pela função polinomial de 1º grau decrescente:

$$f(x) = -0{,}520\,x + 48{,}675.$$

A figura 9 é a representação gráfica dessa função:

Figura 9: Gráfico da função f(x)=- 0,520x+48,675.



Fonte: o autor

Podemos notar pela representação gráfica que com o aumento percentual da inclusão da levedura na ração dos animais, causa uma diminuição da profundidade lombar.

3.2.2 Aplicações de Funções Polinomiais do 2º Grau

As aplicações 3 e 4 representam modelos matemáticos que utilizam a função polinomial de 2º grau, descrita na Seção 2.4.2, que é $f(x) = ax^2 + bx + c, com\ a \neq 0$ e, para obter o valor do parâmetro a, usaremos a definição descrita por Sviercoski em sua obra:

> A **função quadrática** é escrita da seguinte forma: $y = ax^2 + bx + c$ em que $a \neq 0$ e b e c são constantes. Os dados de uma tabela constituem uma função quadrática se os valores da **segunda variação**,$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, for uma constante não nula. Nesse caso, $a = \frac{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}}{2}$. (SVIERCOSKI, 2008, p.44).

Os Quadros 3 e 4 têm cinco colunas, sendo que a quarta representa a 1ª variação, assim chamada por Sviercoski (2008), com valores diferenciados; o valor constante aparecerá na quinta coluna, chamada pela mesma autora de segunda variação, ou a variação da variação. Convém salientar que a representação dessa segunda variação é simplesmente uma notação matemática e não uma elevação ao quadrado, alias, o símbolo $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, não tem significado numérico.

Sviercoski (2008), alerta sobre a quarta coluna, assim como nas aplicações 1 e 2, os sinais dos valores obtidos determinam os intervalos onde a função é crescente (sinal positivo) ou decrescente (sinal negativo). Já os da quinta coluna dizem respeito à concavidade da parábola: voltada para cima se $a > 0$, e voltada para baixo se $a < 0$. Para obtermos os valores da quinta coluna, calculamos o quociente entre as diferenças dos valores subsequentes da terceira coluna e a diferença entre os seus respectivos correspondentes da quarta coluna.

3.2.2.1 Aplicação 3: Função Polinomial do 2º Grau com $a > 0$

Para a Aplicação 3 coletamos dados do experimento apresentado por Poveda Parra et al. (2008), os quais estão representados no Quadro 3. O experimento de Poveda Parra et al. (2008) foi desenvolvido no Setor de Suinocultura da Fazenda Experimental de Iguatemi pertencente ao Centro de Ciências Agrárias (CCA) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), localizada no Estado do Paraná. O experimento tinha como objetivo determinar os valores nutricionais das cascas de café melosa e avaliar seus níveis de inclusão sobre o desempenho e as características da carcaça de suínos em fase de terminação.

No Quadro 3, os valores da segunda coluna referem-se a variável independente x, representando a quantidade do percentual (%) de nível de inclusão da casca de café melosa na ração dos animais e, na 3ª coluna os valores y, referentes ao custo em reais por quilograma do peso ganho no conjunto dos mesmos.

Quadro 3: Dados adaptados do experimento de Poveda Parra et al. (2008).

n	x	y	$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$	$\frac{\Delta^2 \ y_n}{(\Delta x_n)^2}$
1	0	1,8542	-	-
2	5	1,4757	-0,0757	-
3	10	1,3682	-0,0215	0,01084
4	15	1,5317	0,0327	0,01084
5	20	1,9662	0,0869	0,01084
6	25	2,6717	0,1411	0,01084
7	30	3,6482	0,1953	0,01084
8	35	4,8957	0,2495	0,01084

Fonte: o autor.

Os valores da quarta coluna do Quadro 3, chamados de 1ª variação, são obtidos pela equação (3.1) descrita na Aplicação 1. Para obtermos os valores da quinta coluna, utilizamos a equação (2):

$$\frac{\Delta^2 \ y_n}{(\Delta x_n)^2} = \frac{(\Delta y)_n \ - (\Delta y)_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \qquad (3.4)$$

Logo, da equação (3.4), para cada $n = 3, \dots, 8$ (linha do quadro), obtemos a constante $\frac{\Delta^2 \ y_n}{(\Delta x_n)^2} = 0{,}01084$, fazendo os seguintes cálculos:

$$\frac{\Delta^2 \ y_3}{(\Delta x_3)^2} = \frac{-0{,}0215 - (-0{,}0757)}{10 - 5} = \frac{0{,}0542}{5} = 0{,}01084$$

$$\frac{\Delta^2 \ y_4}{(\Delta x_4)^2} = \frac{0{,}0327 - (-0{,}0215)}{15 - 10} = \frac{0{,}0542}{5} = 0{,}01084$$

$$\frac{\Delta^2\ y_5}{(\Delta x_5)^2} = \frac{0{,}0869 - 0{,}0327}{20 - 15} = \frac{0{,}0542}{5} = 0{,}01084$$

$$\frac{\Delta^2\ y_6}{(\Delta x_6)^2} = \frac{0{,}1411\ - 0{,}0869}{25 - 20} = \frac{0{,}0542}{5} = 0{,}01084$$

$$\frac{\Delta^2\ y_7}{(\Delta x_7)^2} = \frac{0{,}1953 - (0{,}1411)}{30 - 25} = \frac{0{,}0542}{5} = 0{,}01084$$

$$\frac{\Delta^2\ y_8}{(\Delta x_8)^2} = \frac{0{,}2495\ - 0{,}1953}{35 - 30} = \frac{0{,}0542}{5} = 0{,}01084.$$

Utilizando a definição de Sviercoski, citada anteriormente, obtemos o coeficiente,

$$a = \frac{0{,}01084}{2} = 0{,}00542.$$

Substituindo esse valor na representação da função polinomial de 2º grau, obtemos:

$$f(x) = 0{,}00542.x^2\ + bx + c \qquad (3.5)$$

Para calcularmos os valores dos parâmetros $b\ e\ c$ da função (3.5) devemos escolher quaisquer dois pares ordenados (x, y) do Quadro 3. Substituindo os valores de x e y, dos respectivos pares ordenados escolhidos, em (3.5) obtém-se duas equações e, com as mesmas, forma-se um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, $b\ e\ c$.

Desta forma, para determinarmos o modelo matemático que representa os dados relacionados ao Quadro 3, escolhemos os pares ordenados $(5\ ; 1{,}4757)\ e\ (10\ ;\ 1{,}3682)$. Substituindo $(5;\ 1{,}4757)$ na função (3.5) teremos:

$$1{,}4757 = 0{,}00542.5^2\ + b.5 + c$$

$$\Rightarrow 1{,}4757 = 0{,}1355 + 5b + c$$

$$\Rightarrow 1{,}4757 - 0{,}1355 = 5b + c$$

$$\Rightarrow 1{,}3402 = 5b + c$$

Logo,

$$5b + c = 1{,}340 \qquad (3.6)$$

Agora, substituindo o outro par ordenado $(10; 1{,}3682)$ na equação (3.5), teremos:

$$1{,}3682 = 0{,}00542.10^2\ + b.10 + c$$

$$\Rightarrow 1{,}3682 = 0{,}542 + 10b + c$$

$$\Rightarrow 1{,}3682 - 0{,}542 = 10b + c$$

$$\Rightarrow 0{,}8262 = 10b + c$$

Logo,

$$10b + c = 0{,}8262 \qquad (3.7)$$

Portanto, as equações (3.6) e (3.7) obtidas, formam o sistema linear nas incógnitas $b\ e\ c$:

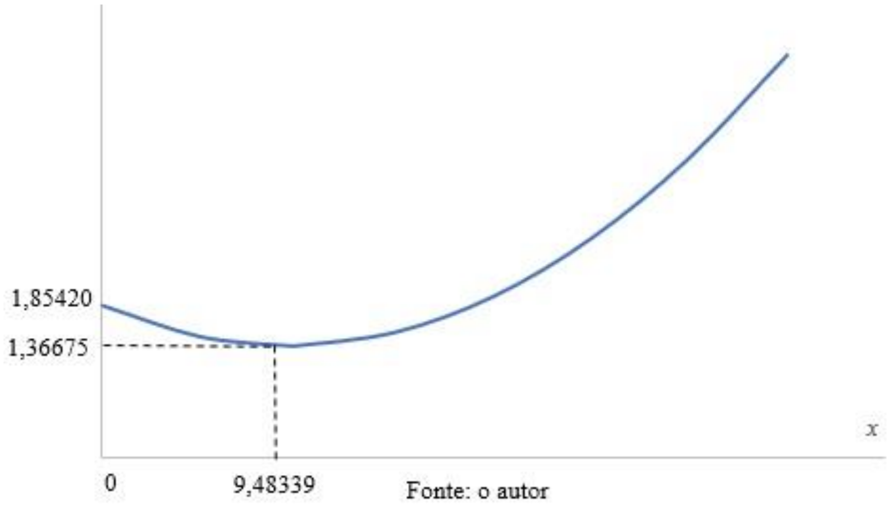
$$\begin{cases} 5b + c = 1{,}3402 \\ 10b + c = 0{,}8262 \end{cases} \qquad (3.8)$$

Resolvendo o sistema (3.8), obtemos o valor das incógnitas $b = -0{,}1028$ e $c = 1{,}8542$. Substituindo os mesmos em (3.5), chegamos ao modelo matemático que bem representa o os dados do Quadro 3:

$$f(x) = 0{,}00542x^2 - 0{,}1028x + 1{,}8542.$$

Portanto, o modelo é representado por uma função polinomial do 2º grau, cujo gráfico tem concavidade voltada para cima $(a = 0{,}00542 > 0)$. Sua representação geométrica pode ser conferida na Figura 10.

Figura 10: Gráfico da função f(x)=0,00542x²-0,1028x+1,8542.



Fonte: o autor

Visualizamos graficamente no modelo matemático o ponto denominado de vértice, também chamado ponto de mínimo, que tem como valores o par ordenado $(9{,}48339;\ 1{,}36675)$, representando a quantidade ideal de percentagem de inclusão da casca do café melosa na ração, na qual teremos o menor custo por quilograma de peso ganho.

3.2.2.2 Aplicação 4: Função Polinomial do 2º Grau com $a < 0$

Os dados relacionados do Quadro 4 foram adaptados do experimento apresentado em Schiavo et al. (2018) e desenvolvido na Unidade Universitária de Aquidauana, da UEMS, na cidade de Aquidauana- MS, situada no quilometro 12 da Rodovia Graziela Maciel Barroso. O objetivo do mesmo foi avaliar os efeitos da inoculação com diferentes espécies de fungos micorrízicos arbusculares (FMAs) e de doses de P(KH_2PO_4) sobre o crescimento e teores de N e P em plantas jovens de cana-de-açúcar. Na variável independente x estão descritas as doses de P$\left(\frac{mg}{kg}\right)$ e, na variável dependente y, estão descritas às quantidades em $grama(g)$ da massa seca de toda a planta.

Quadro 4: Dados adaptados do experimento de Schiavo et al. (2018).

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\frac{\Delta \boldsymbol{y_n}}{\Delta \boldsymbol{x_n}}$	$\frac{\Delta^2\ \boldsymbol{y_n}}{(\Delta \boldsymbol{x_n})^2}$
1	50	89,1049	-	-
2	100	110,4359	0,42662	-
3	150	128,7169	0,36562	-0,00122
4	200	143,9479	0,30462	-0,00122
5	250	156,1289	0,24362	-0,00122
6	300	165,2599	0,18262	-0,00122
7	350	171,3409	0,12162	-0,00122
8	400	174,3719	0,06062	-0,00122

Fonte: o autor.

Os valores $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ e $\frac{\Delta^2 \ y_n}{(\Delta x_n)^2}$, $(n = 2, \dots, 8)$, do Quadro 4, foram obtidos com mesmos procedimentos utilizados na Aplicação 3, ou seja, pelas equações (3.1) e (3.4), respectivamente.

Podemos observar que $\frac{\Delta^2 \ y_n}{(\Delta x_n)^2} =$ -0,00122 é uma constante negativa, sugerindo um modelo matemático que pode ser representado por uma função polinomial de 2° grau com concavidade voltada para baixo, uma vez que,

$$2a = \frac{\Delta^2 \ y_n}{(\Delta x_n)^2} \Rightarrow \mathrm{a} = \frac{-0{,}00122}{2} = -0{,}00061 < 0.$$

Assim, obtemos,

$$f(x) = -0{,}00061\, x^2 + bx + c \qquad (3.9)$$

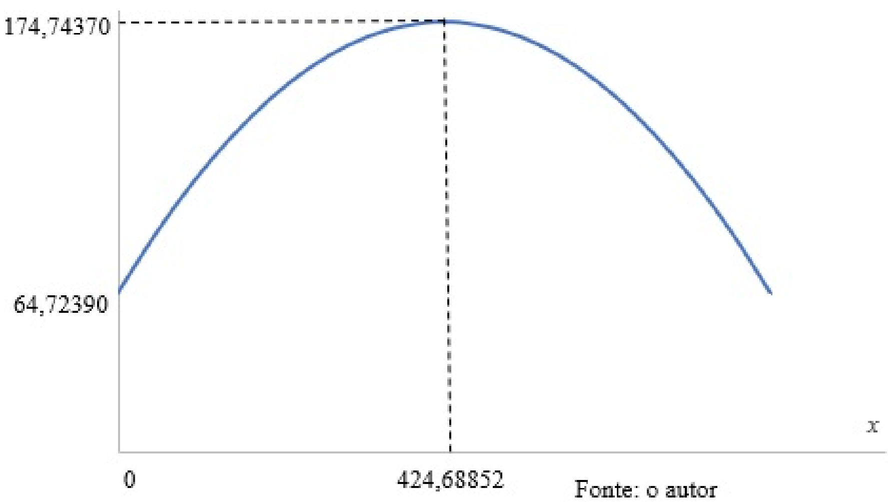
Os coeficientes b e c podem ser encontrados ao escolhemos dois pares ordenados (x, y) do Quadro 4, ao substituir os respectivos valores x e y em (3.9) forma-se um sistema linear, possível e determinado, nas incógnitas b e c. Resolvendo o referido sistema obtém-se $b = 0{,}51812$ e $c = 64{,}72390$.

Portanto, o modelo matemático que representa os dados do Quadro 4 é descrito pela função:

$$f(x) = -0{,}00061\, x^2 + 0{,}51812x + 64{,}72390.$$

Logo, a representação do modelo matemático é uma função polinomial de 2º grau, com concavidade voltada para baixo, $(a = -0{,}00061 < 0\,)$. Esses valores podem ser conferidos no gráfico esboçado na Figura 11.

Figura 11: Gráfico da função f(x)=-0,00061x^2+0,51812x+64,72390.



Fonte: o autor

Como nosso modelo matemático é representado por uma função com taxa de variação negativa, seu extremo é chamado de ponto de máximo e tem as coordenadas $x = 424{,}68852 \; e \; y = 174{,}74370$, que é a maior quantidade de matéria seca obtida no experimento.

3.2.3 Aplicações com Funções Polinomiais do 3º Grau

Como já descrito neste trabalho, mais especificamente na Seção 2.4.3, a função polinomial de 3º grau, tem sua nomenclatura estabelecida com $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, com\ a \neq 0$. Como já fizemos nas aplicações anteriores, relataremos 2 experimentos desse tipo de função, sendo um deles com $a > 0$, dita função crescente, e outro com $a < 0$, denominada função decrescente.

Para a determinação dos modelos matemáticos, usaremos a definição estabelecida por Sviercoski em sua obra já anteriormente mencionada:

> A **função cúbica** tem equação geral dada por $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ em que $a \neq 0 \; e \; b, c \; e \; d$ são constantes. Os dados de uma tabela constituem uma **função cúbica** se os valores da **terceira variação**, $\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$, forem uma constante não nula. Neste caso a= $\frac{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}}{6}$. (SVIERCOSKI, 2008, p. 46).

Sviercoski (2008) denomina os valores da sexta coluna dos Quadros 5 e 6, apresentados a seguir, de terceira variação e, são obtidos através do quociente da diferença entre os valores subsequentes da 5ª coluna e os respectivos valores da 2ª coluna, conforme fórmula (3.10). Estes valores descrevem se a função é crescente ou decrescente, conforme o sinal seja positivo ou negativo, respectivamente. Também não podemos esquecer que as diferentes notações das variações, não representam potências e sim simples denominações.

As aplicações 5 e 6 determinam modelos matemáticos da função polinomial de 3º grau. Ambas foram adaptadas de experimentos extraídos de Teixeira (2011), os quais foram desenvolvidos no período de outubro de 2009 a março de 2011, na Fazenda Experimental de Iguatemi (FEI), pertencente ao Centro de Ciências Agrárias (CCA) da Universidade Estadual de Maringá (UEM), localizada no Estado do Paraná e tinha como objetivo avaliar a eficiência da utilização de uma determinada enzima fitase em dietas de alto grão para bovinos de corte.

3.2.3.1 Aplicação 5: Função Polinomial do 3º Grau Crescente

Os dados apresentados no Quadro 5, adaptados de um experimento desenvolvido por Teixeira (2011), tem a variável independente x indicando o tempo transcorrido em horas após a alimentação dos animais com matéria seca e, a variável dependente y, dada em $\left(\frac{mg}{dL}\right)$, indicando a quantidade líquida ruminal de amônia (NH_3).

Quadro 5: Dados adaptados do experimento de Teixeira (2011).

n	x	y	$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$	$\frac{\Delta^2\ y_n}{(\Delta x_n)^2}$	$\frac{\Delta^3\ y_n}{(\Delta x_n)^3}$
1	0	12,01	-	-	-
2	1	18,22	6,21	-	-
3	2	19,19	0,97	-5,24	-
4	3	16,54	-2,65	-3,62	1,62
5	4	11,89	-4,65	-2,00	1,62
6	5	6,86	-5,03	-0,38	1,62
7	6	3,07	-3,79	1,24	1,62
8	7	2,14	-0,93	2,86	1,62
9	8	5,69	3,55	4,48	1,62

Fonte: o autor.

No Quadro 5, os valores da 1ª variação $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$, para $(n = 2, \dots, 9)$, foram obtidos pela equação (3.1) e, para $(n = 3, \dots, 9)$, os valores da 2ª variação pela equação (3.4), assim como nas aplicações anteriores.

Aqui faremos só a obtenção dos valores da 3ª variação, que estão colocados na 6ª coluna fazendo uso da fórmula (3.10), para $n = 4, \dots, 9$:

$$\frac{\Delta^3 y_n}{(\Delta x_n)^3} = \frac{\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \qquad (3.10)$$

Portanto, aplicando (3.10) nos dados do Quadro 5, para cada $n = 4, \ldots, 9$, obtemos a constante $\frac{\Delta^3 y_n}{(\Delta x_n)^3} = 1{,}62$, conforme cálculos a seguir:

$$\frac{\Delta^3 y_4}{(\Delta x_4)^3} = \frac{-3{,}62 - (-5{,}24)}{3 - 2} = \frac{1{,}62}{1} = 1{,}62;$$

$$\frac{\Delta^3 y_5}{(\Delta x_5)^3} = \frac{-2{,}00 - (-3{,}62)}{4 - 3} = \frac{1{,}62}{1} = 1{,}62;$$

$$\frac{\Delta^3 y_6}{(\Delta x_6)^3} = \frac{-0{,}38 - (-2{,}00)}{5 - 4} = \frac{1{,}62}{1} = 1{,}62;$$

$$\frac{\Delta^3 y_7}{(\Delta x_7)^3} = \frac{1{,}24 - (-0{,}38)}{6 - 5} = \frac{1{,}62}{1} = 1{,}62;$$

$$\frac{\Delta^3 y_8}{(\Delta x_8)^3} = \frac{2{,}86 - 1{,}24}{7 - 6} = \frac{1{,}62}{1} = 1{,}62;$$

$$\frac{\Delta^3 y_9}{(\Delta x_9)^3} = \frac{4{,}48 - 2{,}86}{8 - 7} = \frac{1{,}62}{1} = 1{,}62.$$

Agora, usando a definição proposta por Sviercoski (2008), $a = \frac{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}}{6} = \frac{1{,}62}{6} = 0{,}27$, e substituindo o valor encontrado na função polinomial de 3º grau, temos:

$$f(x) = 0{,}27\, x^3 + bx^2 + cx + d \qquad (3.11)$$

E como neste caso têm 3 parâmetros a serem encontrados, $b, c\ e\ d$, tomaremos 3 pares ordenados do Quadro 5 para formar um sistema linear composto por 3 equações e 3 incógnitas cada. Neste caso, optamos pelos pares ordenados $(1;\ 18{,}22), (2;\ 19{,}19)\ e\ (3; 16{,}54)$. Substituindo o primeiro par e realizando as operações possíveis na função (3.11) obtemos:

$$18{,}22 = 0{,}27.1^3 + b.1^2 + c.1 + d$$

$$\Rightarrow 18{,}22 = 0{,}27 + b + c + d$$

$$\Rightarrow 18{,}22 - 0{,}27 = b + c + d$$

$$17{,}95 = b + c + d \qquad (3.12)$$

Realizando o mesmo procedimento com os dois outros pares ordenados estabelecemos as equações:

$$4b + 2c + d = 17{,}03 \tag{3.13}$$

e
$$9b + 3c + d = 9{,}25 \tag{3.14}$$

Que juntas com a equação (3.12), formaram o sistema:

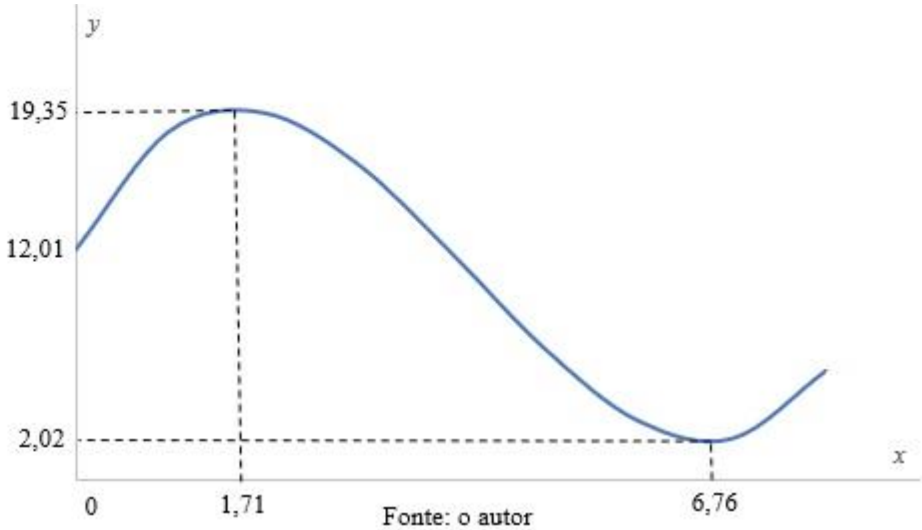
$$\begin{cases} b + c + d = 17{,}95 \\ 4b + 2c + d = 17{,}03 \\ 9b + 3c + d = 9{,}25 \end{cases} \tag{3.15}$$

O sistema linear (3.15), nas variáveis $b,\ c$ e d, é possível e determinado. Assim, resolvendo-o obtemos $b = -3{,}43$, $c = 9{,}37$ e $d = 12{,}01$. Agora, substituído os coeficientes encontrados na função (3.11), formamos o modelo matemático que representa os dados do Quadro 5, como uma função polinomial de 3º grau crescente:

$$f(x) = 0{,}27x^3 - 3{,}43\,x^2 + 9{,}37x + 12{,}01.$$

O gráfico desta função pode ser conferido na Figura 12.

Figura 12: Gráfico da função f(x)=0,27x³-3,43x²+9,37x+12,01.



Fonte: o autor

Observamos graficamente que em um modelo matemático representado por uma função polinomial de 3º grau, podemos ter dois pontos extremos, um denominado de ponto de máximo, no nosso caso, com coordenadas x=1,71 e y =

19,35, e outro chamado de ponto de mínimo, representado pelo par ordenado (6,76 ; 2,62).

3.2.3.2 Aplicação 6: Função Polinomial do 3º Grau Decrescente

Na Aplicação 6, cujos dados constam no Quadro 6, a variável independente $x(\%)$ representa a percentagem do consumo de matéria seca em relação ao peso corporal dos animais. A variável dependente $y\ (\frac{g}{d})$, representa a quantidade de P(fósforo) no fluxo fecal dos mesmos.

Quadro 6: Dados adaptados do experimento de Teixeira (2011).

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$	$\frac{\Delta^2\ y_n}{(\Delta x_n)^2}$	$\frac{\Delta^3\ y_n}{(\Delta x_n)^3}$
1	1,60	10,256	-	-	-
2	1,70	10,853	5,9700	-	-
3	1,80	13,272	24,1900	182,2	-
4	1,90	15,119	18,4700	-57,2	-2394
5	2,00	14,000	-11,1900	-296,6	-2394
6	2,10	7,521	- 64,7900	-536,0	-2394
7	2,20	-6,712	- 142,3300	-775,4	-2394
8	2,30	-31,093	- 243,8100	-1014,8	-2394
9	2,40	-68,016	- 369,2300	-1254,2	-2394

Fonte: o autor.

Os valores $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ e $\frac{\Delta^2\ y_n}{(\Delta x_n)^2}$, $(n = 2, \ldots, 9)$, do Quadro 6, foram obtidos com mesmos procedimentos utilizados nas aplicações anteriores, ou seja, pelas equações (3.1) e (3.4), respectivamente.

Podemos observar que $\frac{\Delta^3\ y_n}{(\Delta x_n)^3} = -2394$ é uma constante negativa, sugerindo um modelo matemático representado por uma função polinomial de 3° grau decrescente, uma vez que, por Sviercoski (2008):

$$6a = \frac{\Delta^3\ y_n}{(\Delta x_n)^3} \Rightarrow \mathrm{a} = \frac{-2394}{6} = -399.$$

Logo obtemos,

$$f(x) = -399x^3 + bx^2 + cx + d \qquad (3.16)$$

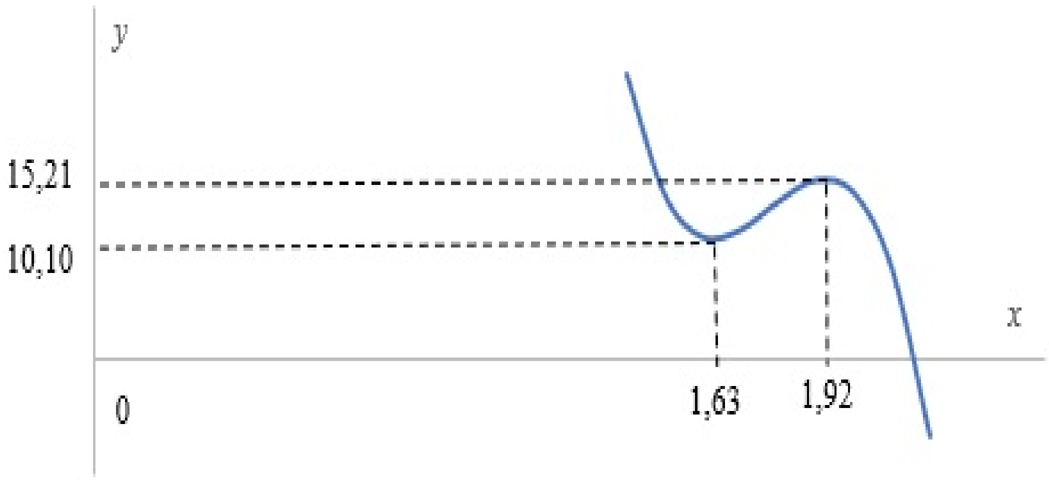
Para estabelecer os coeficientes b, c e d escolhemos três pares ordenados (x, y) do Quadro 6, substituímos os respectivos valores x e y em (3.16) de forma a construir um sistema linear, possível e determinado, nas incógnitas b, c e d. Resolvendo o referido sistema encontramos $b = 2126$, $c = -3750$ e $d = 2202$.

Portanto, o modelo matemático que representa os dados do Quadro 6 é descrito pela função polinomial de 3° grau decrescente:

$$f(x) = -399x^3 + 2126x^2 - 3750x + 2202.$$

Sua representação gráfica pode ser conferida na Figura 13.

Figura 13: Gráfico da função $f(x)=-399x^3+2126x^2-3750x+2202$.



Fonte: o autor

No gráfico referente ao modelo matemático obtido com o experimento da aplicação nº 6, pode-se observar o ponto de mínimo (1,63; 10,10) e o ponto de máximo (1,92;15,21), que estão com suas projeções ortogonais tracejadas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

> Chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. (BASSANEZI, 2018, p.20)

Uma das grandes preocupações dos professores em geral é procurar metodologias diferenciadas de ensino para motivar seus alunos no tocante à aprendizagem. Para isso estão sempre em busca de novos fatos, novas maneiras, novas técnicas, novos métodos para ver se conseguem tornar isso uma realidade.

Os alunos só começam a ter contato com o tema funções a partir do 9º ano do Ensino Fundamental e aprofundam seus conhecimentos na 1ª série do Ensino Médio, mas nesse trabalho procuramos mostrar de uma forma diferenciada o assunto funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus, pois como citamos na introdução do mesmo, nosso objetivo principal foi contextualizar o estudo de funções polinomiais por meio da modelagem matemática aplicada nas Ciências Agrárias, de forma a buscar motivação e interesse do educando para uma boa aprendizagem.

Trabalhando com experimentos reais, procuramos juntar teoria e a prática das Ciências Agrárias, pois é uma das ciências que tem os experimentos que mais enfocam a Modelagem Matemática com uso das funções polinomiais.

Para melhor situar nosso trabalho nas Ciências Agrárias, elencamos experimentos ligados às plantas e aos animais, pois assim estamos nos referindo aos 2 grandes campos das Ciências Agrárias, que são: Agronomia, que nos referimos quando estamos tratando de tudo aquilo que se relaciona às plantações e a Zootecnia, a qual nos referenciamos quando falamos da fauna.

E conforme descrevemos sobre Modelagem Matemática, no transcorrer do Capitulo 1 deste trabalho, tendo em vista às suas peculiaridades a modelagem matemática está se tornando com muita frequência uma ferramenta de grande utilidade no ensino de qualquer assunto relacionado aos conteúdos matemáticos da educação básica, pelo intenso desenvolvimento que a mesma apresentou nas últimas décadas.

Portanto, com esta pesquisa demonstramos que a modelagem matemática pode ser uma metodologia de ensino eficaz no ensino de funções, principalmente quando envolve a interdisciplinaridade, neste caso as Ciências Agrárias, trazendo resultados mais satisfatórios que os alcançados por metodologias de ensino ditas tradicionais, podendo despertar o interesse do educando pelas aplicações dos conceitos, estimulando a criatividade e desenvolvendo habilidades na resolução de problemas.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AABOE, A. **EPISÓDIOS Da História Antiga da Matemática,** tradução de João Bosco Pitombeira de Carvalho, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002.

ARAGÂO, Maria de Fátima Andrade. **A história da modelagem matemática: uma perspectiva de didática no ensino básico.** Trabalho de Conclusão de Curso (graduação em Licenciatura Plena em Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campus I – Campina Grande. 2016.

BAIARDI, A. **Comentário sobre o artigo agroecologia: as coisas em seu lugar (A agronomia brasileira visita a terra dos duendes).** Colóquio – Revista do Desenvolvimento Regional – Faccat –Taquara/RS – V. 10 n. 2 pp. 157 -162, 2013 jul/dez.

BASSANEZI, R.C. **Modelagem matemática: teoria e prática.** São Paulo: Contexto, 2015.

___________ **Ensino–aprendizagem com modelagem matemática. Uma nova estratégia 4ª**ed., 1ª reimpressão. **-** São Paulo: Contexto, 2018.

BIEMBENGUT, M. S.; **30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais.** Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis – SC, v. 2, n. 2, p.7-32, jul 2009, ISSN 1982-5153.

___________ **Modelagem na educação matemática e na ciência** – São Paulo; Editora Livraria da Física, 2016 – (Coleção contextos da ciência/coordenadores Carlos Aldemir Farias, Iran Abreu Medes).

BIEMBENGUT, M. S., HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. 5ª reimpressão.- São Paulo: Contexto. 2018.

BOYER, C. B., **História da matemática,** revista por Uta C. Merzbach: tradução Elza F. Gomide – 2ª. Ed. – São Paulo, Edgard Blucher, 1996.

DELGADO, J; FRENSEL, K.; CRISSALF, L., **Geometria analítica -** Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 369 p. 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Higyno H. Domingues – Campinas – SP; Editora da Unicamp, 2004.

LIMA, E. L., **Números e Funções Reais**, Rio de Janeiro: SBM, Coleção PROFMAT, 297 p. 2013.

___________ **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro, RJ. Editora SBM, 1991.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. e MORGADO, A.C. **A matemática do ensino médio- volume 1**. – 9ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 237 p. 2006.

___________ **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 193 p. 2010.

LOPES, A. J. **Matemática, 6º ao 9º ano**/ Antônio José Lopes (Bigode) – 1. Ed. – São Paulo, Scipione, 2013.

MACHADO, A. dos S., **Álgebra Linear e Geometria Analítica** – 2ª ed., São Paulo: Atual, 1982.

PEREIRA, R. S. G. *et al*. **A Modelagem Matemática no Brasil: Resultados de uma Revisão Integrativa de Teses e Dissertações.** Sapucaia do Sul. Revista THEMA, Volume 15, nº1, pag. 156 a 167. 2018.

PEREIRA, L. B. C. e SANTOS JUNIOR, G. **O Ensino de Matemática nas Ciências Agrárias: possíveis aproximações interdisciplinares**. ANAIS VII Encontro Mineiro de Educação Matemática. São João Del Rei – Minas Gerais. Disponível em: http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/O-ENSINO-DE-MATEMATICA-NAS-CI%C3%8 ANCIAS-AGR%C3%81RIAS-POSS%C3%8DVEIS-PR OXIMA%C3%87%C3%95ES-INTERDISCIPLINARES.pdf. Acesso em: 20/01/2019, 15 h.

___________ **Ensino das funções nas ciências agrárias: uma prática contextualizada nos cursos de agronomia e zootecnia.** Revista Praxis, v.11 nº 21, pp. 45-54, 2019. Disponível em:< http://revistas.unifoa.edu.br/index.php/praxis /article/view/1350/2425>. Acesso em 20/10/19.

PIMENTEL-GOMES, F. **Curso de estatística experimental.** V-15. ed. – Piracicaba: FEALQ, 2009.

POVEDA PARRA, A.R. *et al.* **Levedura de cana-de-açúcar spray dry na alimentação de suínos na fase de crescimento e terminação.** Arq. Bras. Med. Vet. Zootec. V. 65 nº 1, pp. 221 – 230, 2013.

POVEDA PARRA, A. R. *et al.* **Utilização da casca de café na alimentação de suínos nas fases de crescimento e terminação.** R. Bras. Zootec., v.37, n.3, pp. 433-442, 2008.

ROMEIRO, A. R. **CIÊNCIA E TECNOLOGIA NA AGRICULTURA: ALGUMAS LIÇÕES DA HISTÓRIA.** Cad. Dif. Tecnol., Brasília, v. 4 n. 1, pp. 59-95, 1987, jan/abr.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J.B. **Tópicos de história da Matemática.** Rio de Janeiro. SBM, Coleção PROFMAT, 1ª. Ed, 2012.

SCHIAVO, J.A. *et al.* **Crescimento inicial de cana-de-açúcar inoculada com fungos micorrízicos arbusculares e fósforo.** Revista de Ciências Agrárias, V. 41, nº 2, pp. 398 - 407, 2018, abr-jun.

SCORZA JUNIOR, R. P. **Modelagem Matemática e Simulação de Sistema: uma Importante Ferramenta na Pesquisa Agropecuária.** *In:* Roscoe, R.; Mercante, F. M.; Salton, J. C. (ed.). **Dinâmica da Matéria Orgânica do Solo em Sistemas Conservacionistas.** Dourados: Embrapa Agropecuária Oeste, 2006. pp. 63-74.

SOUZA, J. R. de, **#Contato Matemática, 3º ano /** Joamir Roberto de Souza, Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia – 1ª ed. – São Paulo: FTD, 2016 – (Coleção #contato matemática).

SVIERCOSKi, R. F.; **Matemática Aplicada às Ciências Agrárias: Analise de Dados e Modelos.** 1ª ed. – Viçosa: Editora UFV, 2008.

TEODORO, P. E. *et al.* **Acúmulo de massa seca na soja em resposta a aplicação foliar com Silício sob condições de déficit hídrico.** Bioscience Journal. V. 31. Pp. 161-170, 2015, jan/fev.

TEIXEIRA, S. **Nível de restrição do consumo e uso de fitase em dietas alto grão para bovinos de corte.** Tese de Doutorado em Zootecnia - Universidade Estadual de Maringá, Maringá. PR. Brasil, 2011.