Ale Jamil Ibrahin Klaiet

A visualização concreta de um número complexo através de uma construção matricial

Santo André, 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

ALE JAMIL IBRAHIN KLAIET

A VISUALIZAÇÃO CONCRETA DE UM NÚMERO COMPLEXO ATRAVÉS DE UMA CONSTRUÇÃO MATRICIAL

Orientador: Prof. Dr. Marcus Antônio Mendonça Marrocos

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO ALE JAMIL IBRAHIN KLAIET
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MARCUS ANTÔNIO MENDONÇA MARROCOS.

SANTO ANDRÉ, 2019

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

KLAIET, ALE JAMIL IBRAHIN
A VISUALIZAÇÃO CONCRETA DE UM NÚMERO COMPLEXO ATRAVÉS DE UMA CONSTRUÇÃO MATRICIAL / ALE JAMIL IBRAHIN KLAIET. — 2019.

88 fls.

Orientador: MARCUS ANTONIO MENDONÇA MARROCOS

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Santo André, 2019.

1. Transformações Geométricas. 2. Corpo. 3. Matriz. 4. Números Complexos. I. MARROCOS, MARCUS ANTONIO MENDONÇA. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019. III. Título.

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do(a) autor(a) e com a anuência do(a) orientador(a).

Santo André/SP 24 de Outubro de 2019

Assinatura do(a) autor(a): Ali Jammil

Assinatura do(a) orientador(a): Marcus Mancoca

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 – Fone: (11) 4996-0017

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato, ALE JAMIL IBRAHIN KLAIET realizada em 04 de Outubro 2019:

Alexandre Lymberopoulos

Prof.(a) Dr.(a) ALEXANDRE LYMBEROPOULOS
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Lodovici

Prof.(a) Dr.(a) SINUÊ DAYAN BARBERO LODOVICI
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof.(a) Dr.(a) RODRIGO ROQUE DIAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Marcus Marrocos

Prof.(a) Dr.(a) MARCUS ANTONIO MENDONÇA MARROCOS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

* Por ausência do membro titular, foi substituído pelo membro suplente descrito acima: nome completo, instituição e assinatura

Dedico este trabalho a todos, sem excessão, que de algum motivo me auxiliaram durante essa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me fortalecer em todos os momentos difíceis em minha caminhada, a meus filhos Najila e Nahin, aos meus amigos de sala, em especial, Evandro, Gabriel e Rober.

A todos os professores do Profmat, em especial, aos professores Marcus Marrocos, meu orientador, por me incentivar sempre e ao coordenador Sinuê que soube entender meus momentos de dificuldades que passei em minha vida.

A todos que de alguma maneira contribuiram para a conclusão deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil(CAPES)-Código de Financiamento 001.

“ O caminho mais curto entre duas verdades do campo real passa através do campo complexo.”

(Jacques Hadamard)

RESUMO

Apresentaremos neste trabalho uma alternativa para construir o conjunto dos números complexos. Exibiremos um subconjunto $\mathbb{L}$ das matrizes $2x2$ que, munidos das operações de soma e produto de matrizes formam um corpo cuja equação polinomial $x^2 + 1 = 0$ possui solução. Mostraremos também as construções usuais do corpo dos complexos por meio da forma algébrica abstrata e como pares ordenados. Além disso, mostraremos que $\mathbb{L}$ é isomorfo ao $\mathbb{C}$. Basicamente, com o uso de transformações geométricas no plano, vamos mostrar que cada número complexo é uma composição de uma rotação com uma homotetia (dilatação ou contração).

Palavras-chave: Transformações Geométricas, Corpo, Matriz, Números Complexos.

ABSTRACT

We will present in this work an alternative construction to complex numbers. We will show that a subset $\mathbb{L}$ of the space of $2x2$ matrices endowed with the sum and product operation is a field where the polynomial equation $x^2 + 1 = 0$ has a solution. Moreover, we will show that each complex number is a geometric mapping given by composition of a rotation and a homothety.

Keywords: Geometric Transformations, Field, Matrix, Complex Numbers.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Os números naturais, o primeiro conjunto inventado pelos homens, tinham com intenção mostrar quantidades, porém eles foram suficientes para a sociedade por algum tempo. Com o passar dos anos, inventaram os números inteiros devido o aumento das trocas de mercadorias entre os homens e a necessidade de criar uma representação para as dívidas. Na sequência para representar as partes de alguma coisa, indicar a proporcionalidade vieram os números racionais para relacionar grandezas comensuráveis. Os irracionais, por exemplo, $\sqrt{2}, \pi$ as dízimas não periódicas são todos números reais que não são números racionais. Os números reais servem para expressar a medida exata de qualquer segmento de reta. Portanto, temos até aqui as inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Para um aprofundamento sobre os números reais, ver [9] capítulos 6 , 7 e 8.

Os conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ têm uma estrutura algébrica em comum chamada de corpo. A raiz quadrada de 2 tem uma importância histórica nos conjuntos numéricos, já que é a diagonal do quadrado de lado unitário. Do ponto de vista algébrico $\sqrt{2}$ é a solução positiva da equação $x^2 - 2 = 0$. Neste caso o conjunto dos números racionais tem uma deficiência algébrica, já que a equação polinomial $x^2 - 2 = 0$ não possui raiz racional. O mesmo ocorre com corpo dos reais, já que $x^2 + 1 = 0$ não possui solução real, isto é, não existe dentro do conjunto dos reais a raiz quadrada de -1.

Mas e os números complexos? O que eles representam? Neste trabalho vamos fazer uma construção diferente das apresentadas mais comumente nos livros didáticos. Vamos apresentar os números complexos não nulos como transformações geométricas do plano, mais especificamente homotetias (dilatações, contrações), rotações e suas composições. Neste trabalho denotaremos esse conjunto por $\mathbb{L}$. Se unirmos a ele as transformações identidade e nula, teremos um novo conjunto que munido com as operações de soma e composição de transformações possui estrutura de corpo.

Não será difícil se convencer que $\mathbb{L}$ é fechado para a operação de composição, porém, o que não será tarefa fácil é verificar que L também é fechado para a operação de soma de transformações. Para contornarmos essa dificuldade passaremos a representar as transformações geométricas homotetias e rotações através de matrizes. A forma matricial das transformações será usada também na discussão sobre a inclusão do corpo dos reais $\mathbb{R}$ em $\mathbb{L}$ onde utilizaremos os conceitos de subcorpo e isomorfismo entre corpos. Para nos darmos o direito de chamar L de corpo dos complexos mostraremos que a equação $x^2 + I = 0$ possui solução em $\mathbb{L}$.

Não nos aprofundaremos no trato histórico, mas não por isso, gostaríamos de tecer um breve comentário que o conjunto dos números complexos não foram criados para sanar a insuficiência algébrica do campo dos reais e sim, as equações do 3º grau que levaram à sua criação. Para um aprofundamento sobre essa narrativa histórica ver por exemplo [9], [8] e [2] que abordam todo esse acontecimento histórico com detalhes. Assim, como verificamos em nossos estudos algumas dissertações de mestrado que detalham todos esses acontecimentos, a saber, por exemplo ver [4] e [6]:

Abordaremos no capítulo I as Preliminares, tópicos importantes de Álgebra Linear. No capítulo II, a Construção dos Números Complexos através do enfoque matricial. No capítulo III apresentaremos as formas mais usuais de apresentar a construção dos números complexos, além do isomorfismo destas com a construção realizada no capítulos II. No capítulo IV as considerações finais.

1

PRELIMINARES

1.1 ESPAÇO E SUBESPAÇO VETORIAL

1.1.1 *Espaço Vetorial*

Um dos conceitos básicos em álgebra linear é o de espaço vetorial. Seus ingredientes principais são: um conjunto não vazio cujos elementos chamaremos de vetores, um corpo de escalares, uma operação de adição de vetores e uma multiplicação de escalar por vetor. Pelas operações citadas anteriormente o conjunto de vetores é fechado, ou seja, a soma de dois vetores do conjunto é um vetor do conjunto e o produto de um escalar por um vetor do conjunto também será um vetor do conjunto. Além disso, essas operações deverão obedecer algumas propriedades que enunciaremos adiante.

Definição 1.1. Um *Espaço Vetorial* consiste de

(i) um conjunto não vazio V, cujos elementos são chamados de vetores;

(ii) um corpo F de escalares;

(iii) uma operação chamada *adição vetorial*, que associa dois vetores u e v em V ao vetor $u + v$ em V;

(iv) e uma operação, chamada *multiplicação por escalar*, que associa um escalar $\alpha \in F$ e um vetor $u \in V$ ao vetor αu em V.

Teremos que os vetores acima devem obedecer às seguintes propriedades, para todo $u, v, w \in V$ e para todo $\alpha, \beta \in F$:

(i) (Propriedades da adição)

a) *(Comutativa)* $u + v = v + u$.

b) *(Associativa)* $u + (v + w) = (u + v) + w$.

c) *(Simétrico)* existe um (único) vetor $-u$ em V tal que $u + (-u) = \overrightarrow{0}$.

d) *(Elemento neutro)* existe um (único) vetor $\overrightarrow{0}$ em V, chamado de vetor nulo, tal que $u + \overrightarrow{0} = u$.

(ii) (Propriedades da multiplicação por escalar) Para quaisquer vetores u, v e escalares α, β valem as seguintes propriedades:

a) *(Associativa)* $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.

b) *(Distributiva)* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

c) *(Distributiva)* $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

d) *(Elemento neutro)* $1 \cdot u = u$.

A unicidade do vetor nulo é evidente, pois se $\overrightarrow{0}$ e $\overrightarrow{0}'$ forem vetores nulos de um mesmo espaço vetorial, então

$$\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}.$$

Podemos mostrar, também, que o simétrico de cada vetor u é único, pois se $-u$ e $-u'$ são simétricos de u, então

$$-u' = -u' + \overrightarrow{0} = -u' + u + (-u) = \overrightarrow{0} + (-u) = -u.$$

Exemplo 1.2. Os pares ordenados de números reais $u = (u_1, u_2)$ formam um espaço vetorial ($\mathbb{R}^2$) com as operações de adição vetorial[1],

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

e multiplicação por escalar[2],

$$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2),$$

sobre o corpo dos reais.

De fato, para todo $u,\ v,\ w \in \mathbb{R}^2$ e para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ teremos

- $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}$, pois tanto $u_1 + v_1$ quanto $u_2 + v_2$ são reais, e $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2) \in \mathbb{R}$, já que $\alpha u_1,\ \alpha u_2 \in \mathbb{R}$, garantindo o *fechamento*.

1 Como vimos em (iii) da definição 1.1
2 Como vimos em (iv)

- A adição é comutativa, pois

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = v + u,$$

já que a adição no corpo dos reais é comutativa.

- A adição também é associativa:

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ &= (u + v) + w, \end{aligned}$$

pois a adição de números reais é associativa.

- O vetor nulo é $\overrightarrow{0} = (0, 0)$, já que

$$u + \overrightarrow{0} = (u_1 + u_2) + (0, 0) = (u_1 + 0, u_2 + 0) = (u_1 + u_2) = u.$$

- O simétrico do vetor $u = (u_1, u_2)$ é $-u = (-u_1, -u_2)$, pois

$$u + (-u) = (u_1, u_2) + (-u_1, -u_2) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2) = (0, 0) = \overrightarrow{0}.$$

- $(\alpha\beta)u = (\alpha\beta u_1, \alpha\beta u_2) = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(\beta u)$.

- As propriedades distributivas também são obedecidas, pois

$$\begin{aligned} \alpha(u + v) &= \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) \\ &= (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2) \\ &= (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\alpha v_1, \alpha v_2) \\ &= \alpha u + \alpha v. \end{aligned}$$

Bem como

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)u &= ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) \\ &= (\alpha u_1 + \beta u_1, \alpha u_2 + \beta u_2) \\ &= (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) \\ &= \alpha u + \beta u. \end{aligned}$$

Por fim

$$1 \cdot u = 1 \cdot (u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = (u_1, u_2) = u.$$

Exemplo 1.3. Mostre que $M_2(\mathbb{R})$ com as operações usuais de + e . por escalar é um Espaço Vetorial.

Primeiro verificaremos que se A e $B \in M_2$ então $A + B \in M_2$. Tome A e B matrizes 2×2. Pela definição da adição entre matrizes temos:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}.$$

Logo, o resultado da adição de duas matrizes 2×2 continua sendo uma matriz 2×2.

Agora, precisamos mostrar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ teremos que $\alpha A \in M_2(\mathbb{R})$. Tome A uma matriz 2×2 e α um escalar real. Pela definição de multiplicação de matrizes por escalar temos:

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo, a multiplicação de uma matriz 2×2 e α um escalar real continua sendo uma matriz 2×2.

Agora vamos verificar se as propriedades de adição e multiplicação são satisfeitas. Começaremos pelas propriedades da adição.

(Comutativa) Tome A e B matrizes 2×2. Temos

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix} = B + A.$$

(Associativa) Tome A, B e C matrizes 2×2, assim temos

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) + c_{11} & (a_{12} + b_{12}) + c_{12} \\ (a_{21} + b_{21}) + c_{21} & (a_{22} + b_{22}) + c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix} \\ &= A + (B + C). \end{aligned}$$

*(Simétrico)*Para cada matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ tome a matriz $-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix}$.Então

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} \\ a_{21} - a_{21} & a_{22} - a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $-A$ é a oposta de A para toda matriz A.

(Elemento Neutro) Vamos achar o elemento neutro da adição para as matrizes 2×2, ou seja, uma matriz $E_{2\times 2}$ que somada com outras matriz $A_{2\times 2}$ resulta na própria matriz A.

$$A + E = A$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+e_{11} & a_{12}+e_{12} \\ a_{21}+e_{21} & a_{22}+e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Dessa forma podemos igualar as duas matrizes elemento a elemento de forma que $a_{11}+e_{11}=a_{11}$, $a_{12}+e_{12}=a_{12}$, $a_{21}+e_{21}=a_{21}$ e $a_{22}+e_{22}=a_{22}$. Assim teremos $e_{11}=e_{12}=e_{21}=e_{22}=0$.

Logo, $E=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a matriz nula é o elemento neutro da adição.

Veremos, então, se as propriedades de multiplicação são satisfeitas.

(Associativa) Tome A uma matriz 2×2 e α e β escalares reais. Temos:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)A &= (\alpha\beta)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_{11} & (\alpha\beta)a_{12} \\ (\alpha\beta)a_{21} & (\alpha\beta)a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha(\beta a_{11}) & \alpha(\beta a_{12}) \\ \alpha(\beta a_{21}) & \alpha(\beta a_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \alpha\begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \alpha(\beta A)\end{aligned}$$

(Distributiva I) Tome A uma matriz e α e β escalares reais. Temos:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)A &= (\alpha+\beta)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & (\alpha+\beta)a_{12} \\ (\alpha+\beta)a_{21} & (\alpha+\beta)a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}+\beta a_{11} & \alpha a_{12}+\beta a_{12} \\ \alpha a_{21}+\beta a_{21} & \alpha a_{22}+\beta a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \alpha\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \alpha A+\beta A.\end{aligned}$$

(Distributiva II) Sejam A e B matrizes 2×2 e α um escalar, temos

$$\begin{aligned}
\alpha(A+B) &= \alpha\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) \\
&= \alpha \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(a_{11}+b_{11}) & \alpha(a_{12}+b_{12}) \\ \alpha(a_{21}+b_{21}) & \alpha(a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \alpha a_{12}+\alpha b_{12} \\ \alpha a_{21}+\alpha b_{21} & \alpha a_{22}+\alpha b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\
&= \alpha A + \alpha B.
\end{aligned}$$

(Elemento Neutro)

$$1 \cdot A = 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

Exemplo 1.4. Mostre que o conjunto dos reais é um Espaço Vetorial.

Sejam $v = x_1$ e $w = x_2$ elementos do conjunto dos reais, dessa forma teremos que $v + w = x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ teremos que $\alpha v = \alpha x_1 \in \mathbb{R}$. Logo, a soma de dois vetores em $\mathbb{R}$ continua sendo um vetor de $\mathbb{R}$, e a multiplicação de um escalar real por um vetor de $\mathbb{R}$ continua sendo um vetor de $\mathbb{R}$.

Verificando as propriedades de adição:

(Comutativa) Sejam $v = x_1$ e $w = x_2$ dois vetores em $\mathbb{R}$, assim $v + w = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = w + v$.

(Associativa) Sejam $v = x_1$, $w = x_2$ e $z = x_3$ três vetores em $\mathbb{R}$, assim $v + (w + z) = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 = (v + w) + z$.

(Simétrico) Para cada vetor $v = x_1$ existe um único $-v = -x_1$ (oposto de v) tal que $v + (-v) = x_1 + (-x_1) = 0 = \overrightarrow{0}$.

(Elemento Neutro) Chamando o elemento neutro de e e tomando $v = x_1 \in \mathbb{R}$, teremos $v + e = v$, então $x_1 + e = x_1$, dessa forma $e = 0$. Logo $e = 0$ é o elemento neutro da adição.

Verificando as propriedades de multiplicação:

(Associativa) Tome $v = x_1$ um vetor de $\mathbb{R}$ e α e β escalares reais. Temos $(\alpha\beta)v = (\alpha\beta)x_1 = \alpha(\beta x_1)$.

(Distributiva I) Tome $v = x_1$ um vetor de $\mathbb{R}$ e α e β escalares reais. Temos $(\alpha+\beta)v = (\alpha+\beta)x_1 = \alpha x_1 + \beta x_1 = \alpha v + \beta v$.

(Distributiva II) Sejam $v = x_1$ e $w = x_2$ dois vetores de $\mathbb{R}$ e α um escalar real. Temos $\alpha(v+w) = \alpha(x_1+x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2 = \alpha v + \alpha w$. O que garante a distributiva II.

(Elemento Neutro) Tome $v = x_1$ um vetor de $\mathbb{R}$, assim $1 \cdot v = 1 \cdot x_1 = x_1 = v$.

Exemplo 1.5. Mostre que $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ é um Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Seja $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$, escrevamos

$$u = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

.

Definimos

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \alpha \in \mathbb{R}.$$

Temos que seu simétrico em $\mathbb{R}^n$ é

$$-u = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n),$$

assim

$$u + (-u) = (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), \ldots, x_n + (-x_n)) = (0, 0, \ldots, 0) = \overrightarrow{0}.$$

1.1.2 *Subespaço Vetorial*

Dentro de um de um espaço vetorial V, existem subconjuntos W que são eles próprios espaços vetoriais "menores". Esses conjuntos são chamados de *subespaços de V*. Como exemplo, no plano $V = \mathbb{R}^2$, consideramos W sendo uma reta deste plano que passa pela origem.

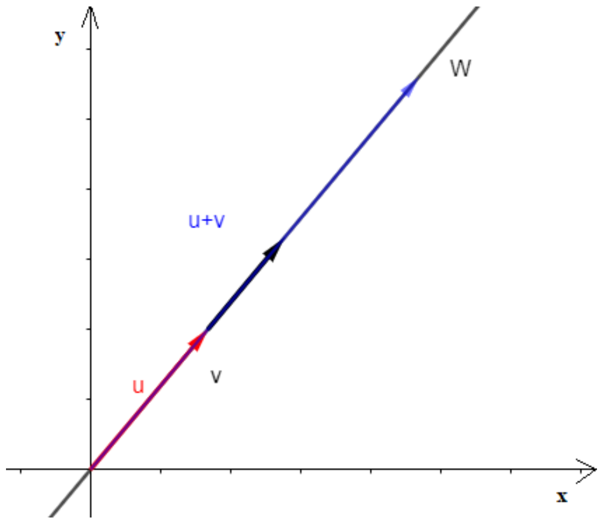

Figura 1: Subespaço Vetorial.

O subconjunto W é fechado em relação à soma de vetores e à multiplicação destes por escalar qualquer.

Estas são as condições exigidas para que um subconjunto W de um espaço vetorial V seja um subespaço.

Definição 1.6. Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

(i) Para quaisquer $u, v \in W$ tivermos $u + v \in W$.

(ii) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$ tivermos $\alpha u \in W$.

Observações.

1. As condições definidas acima garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar), não obteremos um vetor fora de W. Isto é suficiente para afirmarmos que W é por si só um espaço vetorial, pois assim as operações ficam bem definidas e, além disso, não precisamos verificar as propriedades da adição e multiplicação de espaço vetorial já que elas são válidas em V, que contém W.
2. Qualquer subespaço W de V precisa necessariamente conter o vetor nulo (por causa da condição (ii) quando $\alpha = 0$).

3. Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços (que são chamados subespaços triviais), o conjunto formado somente pelo vetor nulo e o próprio espaço vetorial[3].

Exemplo 1.7. Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ verifique se $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$, $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x + 1\}$ e $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$.

1. $W_1 = (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x$.

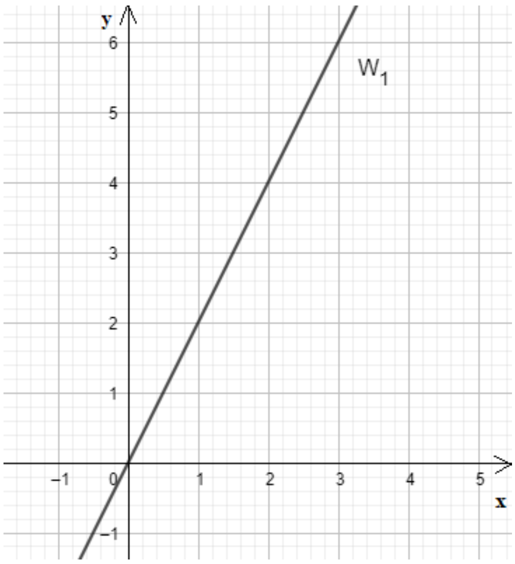

Figura 2: Representação geométrica de w_1.

Agora verifiquemos se para quaisquer $u, v \in W_1$ temos $u + v \in W_1$. Tome $u = (a, 2a)$ e $v = (b, 2b)$, assim $u + v = (a, 2a) + (b, 2b) = (a + b, 2 \cdot (a + b)) \in W_1$.

Por último verifiquemos se para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W_1$ temos $\alpha u \in W_1$. Tome $u = (a, 2a)$, assim $\alpha(a, 2a) = (\alpha a, \alpha(2a)) = (\alpha a, 2(\alpha a)) \in W_1$.

Portanto W_1 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

2. $W_2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x + 1$.

3 Para demonstrar que o vetor nulo está no subespaço W, basta notar, por (ii), que $0 \cdot u \in W$ e que $0 \cdot u = 0$ para todo $u \in W$. De fato, $u + 0 \cdot u = 1 \cdot u + 0 \cdot u = (1 + 0) \cdot u = 1 \cdot u = u$. Por fim, se $u \in W$, seu simétrico também estará em W, isto é, $-u \in W$, pois $(-1) \cdot u \in W$, por (ii), e $(-1) \cdot u = -u$. De fato, $u + (-1) \cdot u = 1 \cdot u + (-1) \cdot u = (1 + (-1)) \cdot u = 0 = 0$.

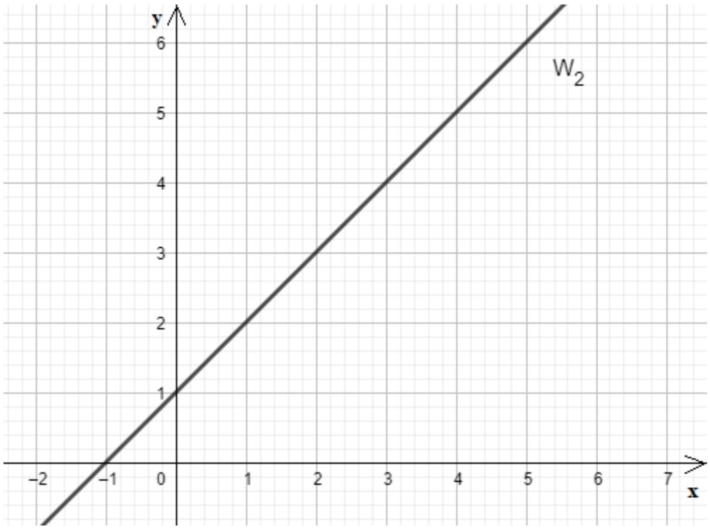

Figura 3: Representação geométrica de w_2.

Vamos verificar se o vetor nulo pertence a W_2. Observe que $0 \neq 0+1 = 1$, logo o vetor nulo não pertence a W_2. Portanto W_2 não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

3. $w_3 = (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2$.

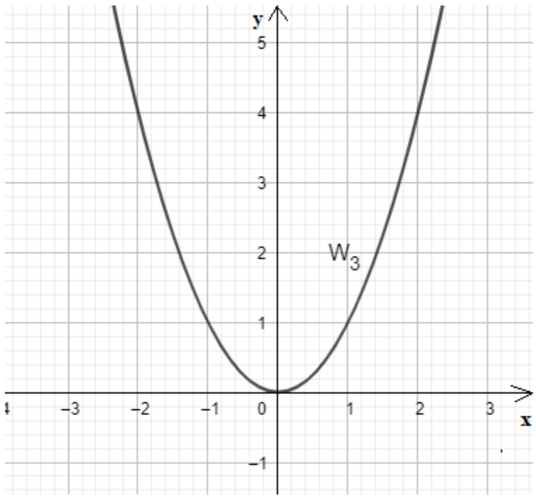

Figura 4: Representação geométrica de w_3.

Vamos verificar se o vetor nulo $e = (0, 0)$ pertence a W_3, $0 = 0^2$. O que garante que sim.

Agora verifiquemos se para quaisquer $u, v \in W_3$ temos $u + v \in W_3$. Tome $u = (a, a^2)$ e $v = (b, b^2)$ com $a \notin 0$ e $b \notin 0$, assim $(a, a^2) + (b, b^2) = (a + b, a^2 + b^2) \neq$

$(a+b, a+b)^2$, ou seja, $u+v \notin W_3$, o que garante que W_3 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

1.2 COMBINAÇÃO LINEAR, DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA

1.2.1 *Combinação Linear*

Definição 1.8. A combinação linear com coeficientes $\alpha_i \in \mathbb{R}$, de um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é definida por $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Observação. Dada uma lista de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ o conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é definida por

$$C_L = \{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n / \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Cada vetor $v \in C_L$ é Linearmente dependente dos $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Exemplo 1.9. Considere a lista $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ de vetores do $\mathbb{R}^2$. Teremos que $C_L = \mathbb{R}^2$, pois $C_L = \{v = xe_1 + ye_2 / x, y \in \mathbb{R}^2\}$ e $v = xe_1 + ye_2 = x(1,0) + y(0,1) = (x,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x, y \in \mathbb{R}^2\}$.

Exemplo 1.10. Vamos mostrar que $C_L = \{v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 / \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ onde $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (1,1)$.

Note que $C_L \in \mathbb{R}^2$, pois $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

Devemos, agora, mostrar que $\mathbb{R}^2 \subset C_L$. Tome (x_o, y_o) arbitrário. Devemos mostrar que existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(x_o, y_o) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, ou seja, $(x_o, y_o) = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2)$ o que é equivalente a $\alpha_2 = y_o$ e $\alpha_1 = x_o - y_o$. Portanto $(x_o, y_o) = (x_o - y_o)v_1 + y_o v_2$, ou seja, $(x_o, y_o) \in C_L$.

Podemos interpretar esse exemplo da forma da figura a seguir.

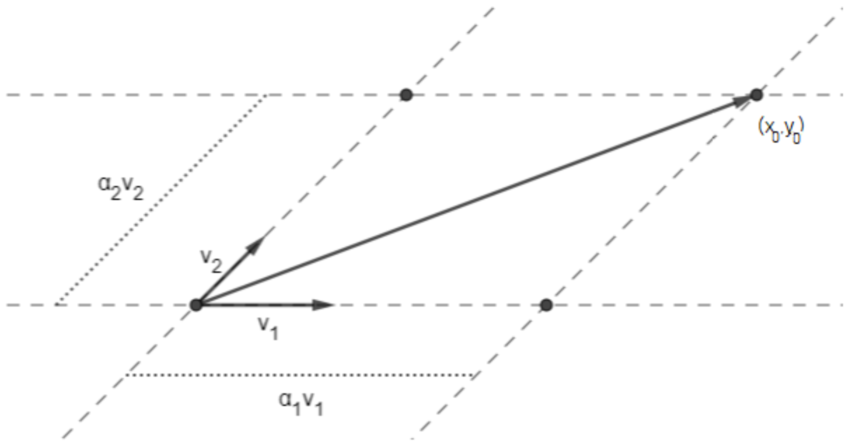

Figura 5: Representação geométrica do exemplo 1.10.

1.2.2 *Dependência Linear (LD) e Independêcia Linear (LI)*

Definição 1.11. Dizemos que um conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.D. quando existe pelo menos um $v_j \in \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e α_i não todos nulos tais que $v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Proposição 1.12. *Um conjunto* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é L.D. se, e somente se a equação* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$ *possui solução em* α_i *não todos nulos.*

Exemplo 1.13. Tome $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (2, 1, 0)$. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D.?

É facil verificar que $v_3 = 2v_1 + 1v_2$, logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.D. [4]

Complementando a definição anterior, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é L.I. se não é L.D.

4 De maneira análoga observe que $2v_1 + 1v_2 - v_3 = \overrightarrow{0}$.

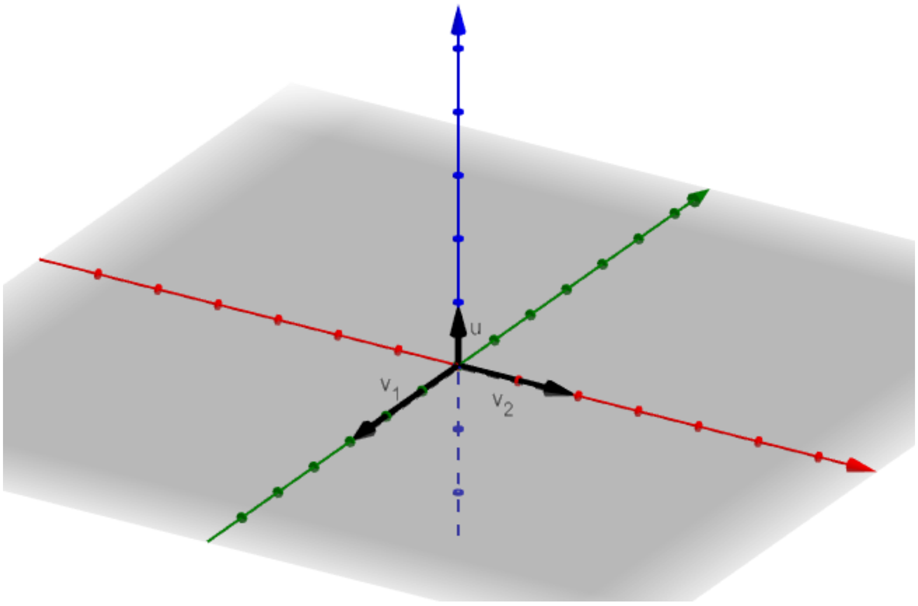

Figura 6: $\{v_1, v_2, u\}$ L.I.

$\{v_1, v_2, u\}$ é um conjunto L.I.

Exemplo 1.14. O vetor u é linearmente dependente dos vetores $\{v_1, v_2, u\}$?

Para mostrarmos que u é combinação linear do conjunto de vetores $\{v_1, v_2, u\}$ devemos encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u$.

Logo, fazendo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = 1$ temos $u = 0v_1 + 0v_2 + 1u$. Portanto, sim, são L.D.

Observações.

1. Um conjunto que contém o vetor nulo é L.D. pois o subconjunto $\{v_1 = \overrightarrow{0}\}$ é tal que $\alpha_1 v_1 = \overrightarrow{0}$, para todo α_1 em particular $\alpha_1 \neq 0$.
2. Um conjunto formado por um único vetor, $\{v_1\}$, não nulo é L.I., pois $\alpha_1 v_1 = \overrightarrow{0}$ é equivalente a $\alpha_1 = 0$, como $v_1 \neq \overrightarrow{0}$, portanto $\alpha_1 = 0$.
3. Três ou mais vetores em $\mathbb{R}^2$, assim como quatro ou mais no $\mathbb{R}^3$ e mais de n vetores no $\mathbb{R}^n$ são sempre L.D. pois, nestes casos, o problema de verificar se eles são ou não L.I. leva a um sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações, que tem sempre solução não trivial.

1.3 BASE E DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Definição 1.15. Seja V um espaço vetorial onde $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base para V se:

1. B gera V, isto é, $[v_1, v_2, \ldots, v_n] = V$ [5];
2. B é linearmente independente.

Teorema 1.16. *Seja $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V então todo elemento $v \in V$ pode ser escrito de maneira única na forma*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n.$$

Demonstração. Vamos supor que temos duas maneiras de escrever $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$, então $(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0$. Como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são L.I., concluímos $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$. □

Nos ítems de 1 a 4 nas observações abaixo as bases citadas são chamadas *bases canônicas* dos respectivos espaços vetoriais.

Observações. 1. O conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$ teremos que $x \cdot 1$, $[1] = \mathbb{R}$ e $a \cdot 1 = 0$, então $a = 0$(que, de fato, é L.I.). De maneira geral qualquer conjunto de um vetor $\{v\}$, com $v \neq 0$ é L.I.

2. O conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

   Dado o vetor (x, y) de $\mathbb{R}^2$, temos:

   $$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)$$

   O espaço gerado por esses dois vetores é o $\mathbb{R}^2$, $[(1,0), (0,1)] = \mathbb{R}^2$. Assim,

   $$x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = (0, 0) \to x = 0, y = 0.$$

   Logo, é L.I. Portanto, $\{(1,0), (0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

3. O conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

4. O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

5 Utilizaremos a notação $[v_1, ..., v_n]$ para especificar o conjunto de todos as C.L.de $[v_1, ..., v_n]$, que é um espaço vetorial.

5. $\{(1,-1),(-2,2),(1,0)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

   Podemos garantir essa afirmação pois os três vetores são L.D. já que $(-2,2) = -2 \cdot (1,-1) + 0 \cdot (1,0)$.

6. $\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   Podemos garantir essa afirmação pois, apesar dos vetores serem L.I., esse conjunto não gera $\mathbb{R}^3$. Observe: $[(1,1,1),(1,-1,0)] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y-2z=0\}$, temos um vetor em $\mathbb{R}^3$ que não pode ser gerado por esses dois vetores. Como por exemplo, o vetor (0,0,1).

Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado dimensão de V, e denotado dim V.[6].

1.3.1 *Dimensão de um espaço vetorial*

Definição 1.17. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, diferente do espaço nulo. Definimos a dimensão de V como o número de elementos de uma de suas bases e denotamos por *dim* V e *dim* $\{0\} = 0$.

Observação. Podemos observar alguns casos para que fique mais clara a compreensão de dimensão.

- *dim* $\mathbb{R} = 1$.
- *dim* $\mathbb{R}^2 = 2$.
- *dim* $\mathbb{R}^3 = 3$.
- *dim* $\mathbb{R}^n = n$.
- *dim* $M_2(\mathbb{R}) = 4$.
- *dim* $M_{m\times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

Exemplo 1.18. Verifique se o conjunto formado pelo polinômios $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

Observe que $\{1+x+x^2, x+x^2, x^2\} \subset P_2$. Agora vamos verificar que esse conjunto é uma base.

6 Maiores detalhes demonstração ver [1].

(i) Dado $p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R})$ consideramos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \alpha(1 + x + x^2) + \beta(x + x^2) + \gamma(x^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= a \\ \alpha + \beta &= b \\ \alpha &= c \end{cases}$$

Assim, $\alpha = c$, $\beta = b - c$ e $\gamma = a - b$. Logo, esse conjunto gera P_2.[7]

(ii) Agora verificaremos se o conjunto é L.I.

$$\alpha(1 + x + x^2) + \beta(x + x^2) + \gamma(x^2) = 0$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha &= 0 \end{cases}$$

Assim, $\beta = 0$ e $\gamma = 0$. Logo são L.I.

Portanto, esse conjunto é base de P_2. Como esse conjunto possui três vetores, logo $dim\ P_2 = 3$. Generalizando, temos $dim\ P_n = n + 1$.

Exemplo 1.19. Encontre uma base para $M_2(\mathbb{R})$ e determine sua dimensão.

Vamos considerar a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Observe que podemos escrever a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo a base canônica é um dos geradores de $M_2(\mathbb{R})$.

7 O espaço gerado pelos vetores: $[1 + x + x^2, x + x^2, x^2] = P_2$.

Verificaremos, agora, se são L.I, ou seja,

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, teremos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Assim essa base gera $M_2(\mathbb{R})$ e é L.I. Portanto $dim\ M_2(\mathbb{R}) = 4$.

Exemplo 1.20. Provar que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n.

Demonstração. Podemos escrever $\mathbb{R}^n$ da forma $\mathbb{R}^n = \{u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R}\}$, para $n \in \mathbb{N}$. Com as operações de adição definidas por $u + v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ e a multiplicação por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ definida por $\alpha u = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real.

A base mais simples de $\mathbb{R}^n$ é a base canônica, formada pelos n vetores de forma

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como a dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é o número de vetores de qualquer uma de suas bases. O $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n, pois essa base canônica possui n vetores. □

1.3.2 *Representação de vetores numa base*

Seja $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base ordenada para um espaço vetorial de dimensão finita U. Para qualquer elemento u de U, define-se a representação de u em B, $[u]_B$, como

$$[u]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

onde $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i$.

1.4 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Nesta seção apresentaremos as transformações lineares, suas principais propriedades e alguns teoremas mais importantes.

Definição 1.21. Sejam U e V espaços vetoriais uma *transformação linear* $T : U \to V$ é uma aplicação que satisfaz as seguintes condições:

(i) $T(u + v) = T(u) + T(v)$; para todo $u, v \in U$.

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$; para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ e $u \in U$.

Exemplo 1.22. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$. Tome $u = (1, 2)$ tal que $T(1, 2) = (1, 2, 3)$ e $v = (-2, 3)$ tal que $T(-2, 3) = (-2, 3, 1)$.

$$T(u + v) = (-1, 5, 4) = (1, 2, 3) + (-2, 3, 1) = T(u) + T(v)$$

$$T(-3 \cdot u) = T(-3, -6) = (-3, -6, -9) = -3 \cdot (1, 2, 3) = -3 \cdot T(u), \alpha = -3.$$

Propriedades de uma transformação linear

Sejam U e V espaços vetoriais e seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então valem as propriedades:

a) $T(0 \cdot u) = 0 \cdot v$, isto é, a imagem do vetor nulo de U [8] é o vetor nulo de V [9].

b) $T(-u) = -T(u)$.

c) $T(u - v) = T(u) - T(v)$.

Exemplo 1.23. Verifique se as aplicações seguintes são transformações lineares.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$.

b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a + b + c + d$.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, y + 1)$.

Resolução:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x, y, x + y)$.

8 Domínio.
9 Contradomínio.

Observe que $T(0,0) = (0,0,0)$. Agora, precisamos verificar a condição $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\
&= (x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2). \\
&= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned}$$

Verifiquemos, agora, a condição $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Sejam $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha x_1, \alpha y_1) \\
&= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha x_1 + \alpha y_1) \\
&= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha(x_1 + y_1)) \\
&= \alpha(x_1, y_1, x_1 + y_1) \\
&= \alpha T(u).
\end{aligned}$$

Portanto essa aplicação é uma transformação linear.

b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a + b + c + d$.

Sejam $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{R}$. Queremos mostrar que $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Primeiro vamos obter $T(u+v)$. Temos que $u + v = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$, daí teremos

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2).$$

Agora vamos calcular $T(u) + T(v)$. Teremos

$$T(u) = T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = a_1 + b_1 + c_1 + d_1,$$

$$T(v) = T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = a_2 + b_2 + c_2 + d_2.$$

Dessa forma, $T(u) + T(v) = (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2) = T(u) + T(v)$.

Agora mostremos que $T(\alpha u) = \alpha T(u)$. Sejam $u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$T(\alpha u) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{pmatrix} = \alpha a_1 + \alpha b_1 + \alpha c_1 + \alpha d_1 = \alpha(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = \alpha T(u).$$

Logo, é uma Transformação Linear.

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, y + 1)$.

Observe que $T(0, 0, 0) = (0 + 0, 0 + 1) = (0, 1) \neq (0, 0)$. Dessa forma T não transforma o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ no vetor nulo de $\mathbb{R}^2$. Logo essa aplicação não é uma tranformação linear.

1.4.1 *Transformações do plano no plano*

Vamos apresentar uma visão geométrica das transformações lineares, dando alguns exemplos de transformações do plano no plano.

Daremos ênfase a homotetia e a rotação.

Homotetia

Chama-se homotetia[10]. a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = \alpha v$, onde α é um número real positivo.

Olhando para a transformação dada acima observe o exemplo $T(x, y) = 2 \cdot (x, y)$. Teremos que essa função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de v, mas de módulo duas vezes maior. Uma homotetia nada mais é que uma dilatação ($\alpha > 0$) ou contração do vetor ($0 < \alpha < 1$).

10 Representaremos a homotetia pela letra D durante o transcorrer da dissertação.

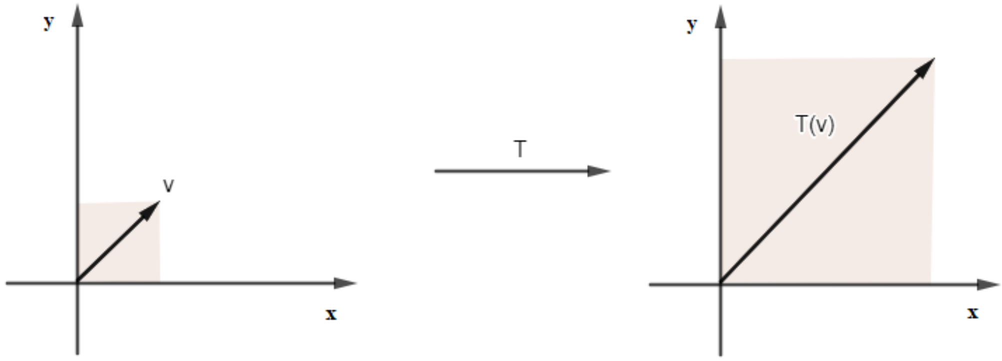

Figura 7: Homotetia.

Observe que se tomássemos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x, y)$ teríamos uma contração.

Considerando a base canônica do $\mathbb{R}^2$ a matriz de uma homotetia $T(v) = \alpha v$ é obtida da seguinte forma:

$$T(e_1) = \alpha e_1 = \alpha e_1 + 0e_2,$$

logo os coeficientes da primeira coluna são dados por α e 0. Analogamente para a segunda coluna temos:

$$T(e_2) = \alpha e_2 = 0e_1 + \alpha e_2,$$

Portanto a matriz é dada por:

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Reflexão em torno do eixo x

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

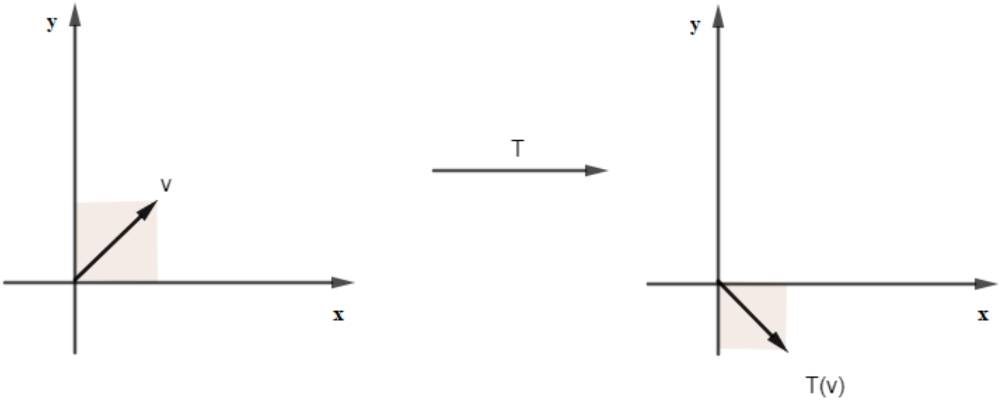

Figura 8: Reflexão em torno do eixo x.

Escrevendo na forma de vetor coluna, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Reflexão na origem

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $v \mapsto -v$, ou seja, $T(x, y) = (-x, -y)$.

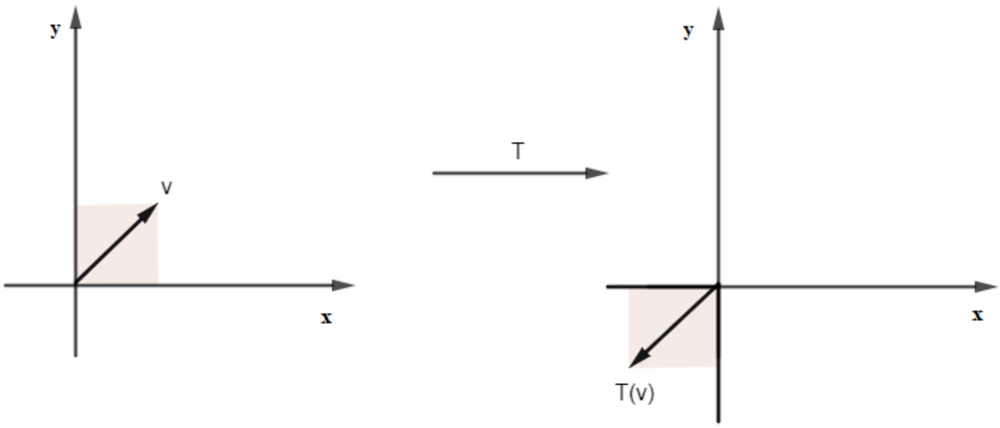

Figura 9: Reflexão em torno da origem.

Escrevendo na forma de vetor coluna, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Rotação por um ângulo (no sentido anti-horário)

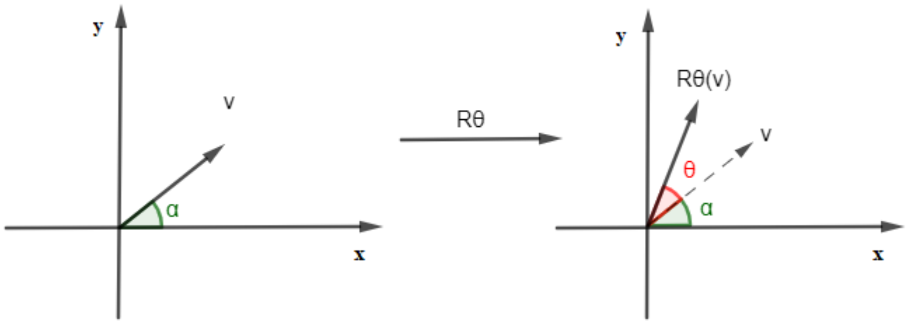

Figura 10: Rotação por um ângulo no sentido horário.

Chama-se rotação a transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que leva um vetor v num vetor $R_\theta(v)$ resultado da rotação de um ângulo θ em torno da origem no sentido anti-horário.

Considerando a base canônica do $\mathbb{R}$ a matriz de rotação é obtida da seguinte forma:

$$R_\theta(e_1) = \cos\theta \cdot e_1 + \operatorname{sen}\theta \cdot e_2$$

$$R_\theta(e_2) = -\operatorname{sen}\theta \cdot e_1 + \cos\theta \cdot e_2.$$

Portanto a matriz é dada por

$$\begin{bmatrix} R_\theta \end{bmatrix}_{can} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Como caso particular $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$. Então

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

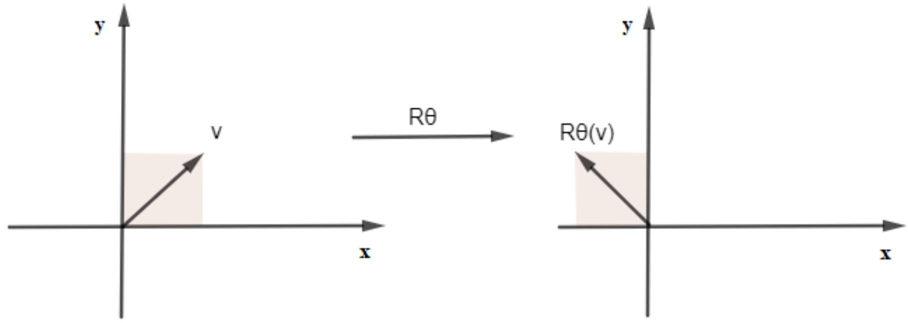

Figura 11: Rotação por um ângulo de 90^o.

1.4.2 *Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear*

Núcleo

Núcleo de uma Transformação Linear $T : U \to V$, representado por $N(T)$ é o conjunto formado por todos os vetores U que tem como imagem o vetor nulo de V, ou seja,

$$N(T) = \{u \in U; T(u) = 0\}.$$

Propriedades do Núcleo.

Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Então $N(T)$ é um subespaço vetorial de U. De fato, sejam u_1 e $u_2 \in N(T)$, logo:

$$T(u_1) = T(u_2) = 0$$

a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0$. Logo $u_1 + u_2 \in N(T)$.

b) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $T(\alpha u_1) = \alpha T(u_1) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Definição 1.24. $T : U \to V$ é injetora se para todo $u_1, u_2 \in U$, $T(u_1) = T(u_2) \to u_1 = u_2$ ou, equivalente a para todo $u_1, u_2 \in U$ se $u_1 \neq u_2 \to T(u_1) \neq T(u_2)$.

Uma transformação linear $T : U \to V$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

Demonstração. $(\Longrightarrow)$ T é injetora $\Longrightarrow$ $N(T) = \{0\}$.

De fato: Seja $u \in N(T)$, ou seja, $T(u) = 0$. Por outro lado, sabe-se que $T(0) = 0$. Logo $T(u) = T(0)$. Como por hipótese T é injetora, então $u = 0$. Portanto, o vetor nulo é o único elemento do núcleo, isto é $N(T) = \{0\}$.

$(\Longleftarrow)$ $N(T) = \{0\} \implies T$ é injetora.

De fato: Sejam $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = T(u_2)$. Então $T(u_1) - T(u_2) = T(u_1 - u_2) = 0$. Logo, $u_1 - u_2 \in N(T)$. Mas, por hipótese, o único elemento do núcleo é o vetor nulo, assim $u_1 - u_2 = 0 \iff u_1 = u_2$, logo T é injetora. □

Imagem de uma Transformação Linear

Imagem de uma Transformação Linear $T : U \to V$, representada por $Im(T)$ é o conjunto formado por todos os vetores de V que são imagens de algum vetor de U, ou seja,

$$Im(T) = \{T(u) \in V; u \in U\}.$$

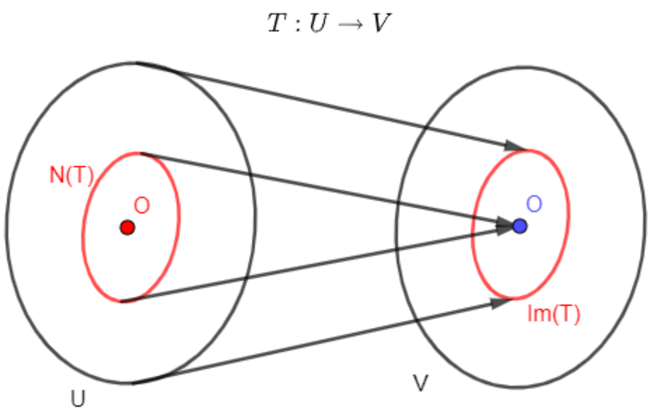

Figura 12: Representação Gráfica do núcleo e imagem de T.

$N(T) \neq \emptyset$, pelo menos um vetor existe no núcleo de uma transformação linear que é o vetor nulo, pois $0_u \in N(T)$, já que $T(0_u) = 0v$.

$Im(T) \neq \emptyset$, pois $0_v \in Im(T)$, visto que o vetor nulo de V é a imagem do vetor nulo de U.

Exemplo 1.25. Determinar o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$.

$N(T) = \{u \in \mathbb{R}^3, T(u) = (0, 0)\}$, $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z) = (0, 0)$.

Dessa forma,

$$\begin{cases} 2x - y + z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{cases}$$

Daí teremos que $z = 5x$ e $y = 7x$. [11] Portanto $N(T) = \{(x, 7x, 5x); x \in \mathbb{R}\} = [(1, 7, 5)]$ ou $(x, 7x, 5x) = x \cdot (1, 7, 5)$.

Agora, vamos determinar a imagem. Observe que

$$(2x - y + z, 3x + y - 2z) = (2x, 3x) + (-y, y) + (z - 2z) = x(2, 3) + y(-1, 1) + z(1, -2).$$

Dessa forma, $Im(T) = [(2, 3), (-1, 1), (1, -2)]$.

Lembrando que a *dim* $\mathbb{R}^2 = 2$ e temos três vetores gerando um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, significa que esses três vetores são L.D. Então vamos eliminar ao menos um desses geradores. Esse conjunto é o mesmo conjunto que:

$$[(2, 3), (-1, 1), (1, -2)] = [(2, 3), (-1, 1)] = [(2, 3), (1, -2)] = [(-1, 1), (1, -2)].$$

Observe que qualquer um desses três conjuntos pode ser a imagem de T. Uma base de $Im(T) = \{(2, 3), (-1, 1)\}$, $dim\ Im(T) = 2$. Logo, $Im(T) = \mathbb{R}^2$.

1.4.3 *Teorema de Núcleo e da Imagem*

Retomando o exemplo anterior $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$. $N(T) = [1, 7, 5]$, Base de $N(T) = \{(1, 7, 5)\}, dim\ N(T) = 1$. E $Im(T) = \mathbb{R}^2 dim\ Im(T) = 2$.

Observe que $dim\ \mathbb{R}^3 = dim\ N(T) + dim\ Im(T)$.

Isso vale para todas as transformações lineares que tem como domínio um espaço vetorial de dimensão finita.

Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema 1.26. *Sejam $T : U \to V$ uma transformação linear e U um espaço vetorial de dimensão finita, então $dim\ U = dim\ N(T) + dim\ Im(T)$.*

Demonstração. Sejam $u_1, u_2, \ldots u_r$ uma base de $N(T)$. Como $N(T) \subset U$ é subespaço de U, podemos completar este conjunto de modo a obter uma base de U.

11 Observe que o sistema acima tem duas equações e três incógnitas, ou seja é um sistema possível e indeterminado, dessa forma teremos que a solução depende de pelo menos uma das variáveis.

Seja, então, $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2 \ldots, v_s\}$ uma base de U. Queremos mostrar que $T(v_1), \ldots, T(v_s)$ é uma base de $Im(T)$, isto é.

(i) $[T(v_1), \ldots, T(v_s)] = Im(T)$.

Dado $v \in Im(T)$, queremos $w \in U$ tal que $T(w) = v$. Se $w \in U$, então $w = a_{u1} + \cdots + a_r u_r + b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s$. Mas, $V = T(w) = T(a_{u1} + \cdots + a_r u_r + b_1 v_1 + \cdots + b_s v_s) = a_1 T(u_1) + \cdots + a_r T(u_r) + b_1 T(v_1) + \cdots + b_s T(v_s)$. Como o vetor $a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r$ pertencem a $N(T)$, $T(u_i) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Assim $v = b_1 T(v_1) + \cdots + b_s T(v_s)$ e a imagem de T é gerada pelos vetores $T(v_1), \ldots, T(v_s)$.

(ii) $\{T(v_1), \ldots, T(v_s)\}$ é L.I.

Vamos considerar agora, a combinação linear $a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_s T(v_s) = 0$ e mostraremos que os a_i são nulos.

Como T é linear, $T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s) = 0$. Logo $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s \in N(T)$. Então $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s$ pode ser escrito como combinação linear da base $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ de $N(T)$, isto é, existem $b_1, \ldots, b_s$ tais que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_r u_r$, ou ainda $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_s v_s - b_1 u_1 - b_2 u_2 - \cdots - b_r u_r = 0$. Mas $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ é uma base de U, e temos $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = b_1 = b_2 = \cdots = b_r = 0$.

□

Corolário

Corolário 1.27. *Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Se dim U = dim V, então T é injetora se e somente se T é sobrejetora.*

Demonstração. Pelo Teorema do Núcleo e da imagem, *dim* U = *dim* $N(T)$ + *dim* $Im(T)$.

($\Longrightarrow$)Suponhamos que T seja injetora. $N(T) = \{0\}$ pela propriedade 2 do núcleo e consequentemente, *dim* $N(T) = 0$. Segue então do Teorema mencionado que *dim* $Im(T)$ = *dim* V, mostrando que T é sobrejetiva, pois $Im(T) \subset V$ e portanto $Im(T) = V$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que T seja sobrejetora, ou seja, $Im(T) = V$. Esses dois espaços têm a mesma dimensão, portante do teorema mencionado acima temos que *dim* $N(T) = 0$, o que garante que $N(T) = \{0\}$. Pela propriedade 2 do núcleo , segue que T é injetora. □

Exemplo 1.28. Determinar uma aplicação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, tal que $Im(T) = [(1,1,2,1),(2,1,0,1)]$.

Como os dois vetores são L.I., temos-os como possível base de $Im(T) = \{(1,1,2,1),(2,1,0,1)\} \rightarrow Im(T) = 2$. E como $dim\ \mathbb{R}^3 = dim\ N(T) + dim\ Im(T)$ temos que $dim\ N(T) = 1$.

Vamos escolher um vetor simples para a base de $N(T) = \{(1,0,0)\}$, e como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, vamos acrescentar mais dois vetores $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, uma base de $\mathbb{R}^3$. Temos que $\{T(0,1,0), T(0,0,1)\}$ é uma base de $Im(T)$. Tome, então,

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= (1,1,2,1) \\ T(0,0,1) &= (2,1,0,1) \\ T(1,0,0) &= (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Teremos

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1) \\ T(x,y,z) &= x \cdot T(1,0,0) + y \cdot T(0,1,0) + z \cdot T(0,0,1) \\ &= x \cdot (0,0,0,0) + y \cdot (1,1,2,1) + z \cdot (2,1,0,1) \end{aligned}$$

Portanto $T(x,y,z) = (y+2z, y+z, 2y, y+z)$.

1.4.4 *Espaço das Transformações Lineares*

Definição 1.29. Sejam U e V espaços vetoriais sobre K. Definimos:

(i) $L(U,V)$: o conjunto de todas as transformações lineares $T : U \rightarrow V$.

(ii) $L(U)$: o conjuntos de todos os operadores lineares $T : U \rightarrow U$.

Nisso, definimos

1. Soma: F, $G \in L(U,V)$ tal que $F + G : U \rightarrow V$, dessa forma $(F+G)(u) = F(u) + G(u)$, para todo $u \in U$.
2. Multiplicação por escalar: $F \in L(U,V)$ e $\lambda \in K$, $\lambda F : U \rightarrow V$, dessa forma $(\lambda F)(u) = \lambda F(u)$, para todo $u \in U$.

Com essas definições fica fácil constatar que se F e G são transformações lineares de U em V, então $F+G$ é uma transformação linear de U em V; ocorrendo o mesmo com λF. Assim, F, $G \in L(U,V)$ e $\lambda \in K$, então $(F+G) \in L(U,V)$ e $(\lambda F) \in L(U,V)$. Com essas operações $L(U,V)$ é um espaço vetorial sobre K[12].

12 Maiores detalhes e aprofundamento ver [1] ou [3] ou [7].

1.4.5 *Composição*

Dados dois elementos do conjunto dos operadores lineares, definimos a composição como sendo $F \circ G : U \to U$ dada por $(F \circ G)(u) = F(G(u))$, para todo $u \in U$.

Propriedades da composição

P_1 - Associativa - Para todo $F, G, H \in L(U)$, $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$.

P_2 - Distributiva - Para todo $F, G, H \in L(U)$, $F \circ (G + H) = (F \circ G) + (F \circ H)$, bem como $(F + G) \circ H = (F \circ H) + (G \circ H)$.

P_3 - Elemento Neutro - Existe $Id \in L(U)$, $Id(u) = u$ para todo $F \in L(U)$, $F \circ Id = Id \circ F = F$.

Em geral, a composição não é comutativa.

1.4.6 *Representação matricial de uma Transformação linear*

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases ordenadas $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, respectivamente. Seja $T : U \to V$ linear. Então existem escalares únicos $a_{ij} \in F$ tais que $T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v_i$ para $i \leq j \leq n$.

A matriz $m \times n$ definida como $A_{ij} = a_{ij}$ é designada a *representação matricial de T* nas bases ordenadas B e C e escreve-se

$$A = [T]_B^C.$$

Se $U = V$ e $B = C$, escrevemos $A = [T]_B$ [13].

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases ordenadas $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ e $C = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, respectivamente, e $T : U \to V$ linear. Então, para $u \in U$ e $v = T(u) \in V$ temos que $[v]_C = [T(u)]_C = [T]_B^C \cdot [u]_B$.

A partir disso temos as consequências importantes abaixo.

13 Resultado fundamental da definição de representações matriciais.

1. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases ordenadas B e C, respectivamente. Sejam $T, W : U \to V$ duas transformações lineares. Observe que $T + W : U \to V$ é linear, dessa forma

$$[T+W]_B^C = [T]_B^C + [W]_B^C$$

$$[aT]_B^C = a[T]_B^C.$$

2. Sejam U, V e Z espaços vetoriais de dimensão finita com bases ordenadas A, B e C, respectivamente. Sejam $T : U \to V$ e $W : V \to Z$ duas transformações lineares. A *composição* das transformações lineares W e T, $WT : U \to Z$ é linear

$$[TW]_A^C = [W]_B^C \cdot [T]_A^B.$$

3. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita com bases ordenadas B e C, respectivamente.

   Se $T : U \to V$ é linear, *a transformação inversa* da transformação linear T, quando existe $T^{-1} : V \to U$ também é linear e, em termos matriciais,

$$[T^{-1}]_C^B = ([T]_B^C)^{-1}.$$

Exemplo 1.30. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$. Determine a matriz transformação linear T, isto é, $[T]_{B,C}$ com B e C as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Escrevendo as imagens dos elementos da base canônica $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, pela trasformação T, como combinações lineares dos elementos da base $C = \{(1,0), (0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$ temos:

$$\begin{array}{rcrcl} T(1,0,0) & = & (1,0) & = & 1\cdot(1,0)+0\cdot(0,1) \\ T(0,1,0) & = & (1,0) & = & 1\cdot(1,0)+0\cdot(0,1) \\ T(0,0,1) & = & (0,2) & = & 0\cdot(1,0)+2\cdot(0,1) \end{array}.$$

Assim, pela definição de matriz de uma transformação linear, obtemos:

$$[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.31. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2z)$. Determine $[T]_{B,C}$ com $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,0,-1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $C = \{(1,0), (1,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{lclcl} T(1,1,0) & = & (2,0) & = & a_{11}\cdot(1,0)+a_{21}\cdot(1,1) \\ T(1,0,1) & = & (1,2) & = & a_{12}\cdot(1,0)+a_{22}\cdot(1,1) \\ T(0,0,-1) & = & (0,-2) & = & a_{13}\cdot(1,0)+a_{23}\cdot(1,1) \end{array}.$$

Através da primeira relação teremos $a_{21} = 0$ e $a_{11} + a_{21} = 2$, assim $a_{11} = 2$. Através da segunda equação teremos $a_{22} = 2$ e $a_{12} + a_{22} = 1$, assim $a_{12} = -1$. E, por último, através da terceira equação teremos $a_{23} = -2$ e $a_{13} + a_{23} = -2$, assim $a_{13} = 2$.

Logo, $[T]_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

1.5 ISOMORFISMO ENTRE ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 1.32. Dados dois espaços vetoriais U e V, um isomorfismo é uma transformação linear bijetiva entre eles. Teremos que U e V são *isomorfos*.

Teorema 1.33. *Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, dim (U) = dim (V).*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Como U e V são isomorfos, existe um isomorfismo $T : U \to V$. Por ser isomorfismo, T é injetora, e assim $dim\ N(T) = 0$. Além disso, T é sobrejetora, assim $dim\ Im(T) = dim\ (V)$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $dim\ U = dim\ N(T) + dim\ Im(T)$, o que implica $dim\ U = 0 + dim\ Im(T) = dimV$.

($\Longleftarrow$) Assumindo que $dim\ U = dim\ V$. Sejam $B_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base para U e $B_2 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para V. Seja a aplicação $T : U \to V$ definida por: $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 u_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_i$.

Como T é uma transformação linear verifiquemos se T é injetora. Considere $w \in N(T)$, isto é, $T(w) = 0v$. Assim teremos $0v = T(w) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 w_1) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_i$. E como os elementos v_i pertencem a base B_2 de V, eles formam um conjunto L.I., e portanto temos $\alpha_1 = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Logo, $w = 0u$ e assim, $N(T) = \{0u\}$ e T é injetora.

Agora, pelo Corolário do Teorema do núcleo e da imagem, temos que T é sobrejetora.

Concluímos que T é bijetora e portanto é um isomorfismo e assim os espaços U e V são isomorfos. □

Exemplo 1.34. Exemplos de espaços vetoriais isomorfos.

(i) P_3 é isomorfo a $\mathbb{R}^4$.

(ii) $M_{3\times 1}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

(iii) $M_{2\times 1}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.35. Provar que $P_2(\mathbb{R})$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

Observe que $P_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c/a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c)/a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Dessa forma tome $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base de $\mathbb{R}^3$ e $\{x^2, x, 1\}$ base de $P_2(\mathbb{R})$.

Veja que $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ linear definida por $T(e_1) = x^2$, $T(e_2) = x$ e $T(e_3) = 1$, garante a sobrejetividade. Como as dimensões de $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$ são iguais teremos que é injetora também.

Exemplo 1.36. Prove que $T(x, y, z) = (x + y - z, -x + 2z, 2x + 2y + 3z)$ é um isomorfismo.

Precisamos mostrar que T é bijetora.

Para verificar se é injetora temos que olhar para o núcleo

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Dessa forma,

$$\begin{cases} x + y - z & = & 0 \\ -x + 2z & = & 0 \\ 2x + 2y + 3z & = & 0 \end{cases}$$

Se $N(T)$ for trivial(vetor nulo), sabemos que T é injetora.

Escalonando o sistema, teremos

$$\begin{cases} x + y - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{cases}$$

O que garante que $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Dessa forma $N(T) = \{(0, 0, 0)\} \to T$ é injetora.

Verifiquemos então se T é sobrejetora. Pelo teorema do núcleo e da imagem temos que $dim\ \mathbb{R}^3 = dim\ N(T) + dim\ Im(T)$, ou seja, $3 = 0 + dim\ Im(T)$, portanto $dim\ Im(T) = 3 = dim\mathbb{R}^3$. O que garante que T é sobrejetora. Logo T é um isomorfismo.

1.5.1 *Corpo*

Definição 1.37. Um *corpo* consiste de um conjunto não vazio e duas operações binárias, + e $\cdot$, que gozam das seguintes propriedades:

- As duas operações são associativas.
- As duas operações são comutativas.
- Há elementos neutros 0 para a soma e 1 para a multiplicação.
- Todo elemento do corpo tem um inverso aditivo.
- Todo elemento diferente de 0 tem inverso multiplicativo.
- A operação de multiplicação $'' \cdot ''$ é distributiva em relação à soma $'' + ''$.

Exemplo 1.38. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ são corpos.

Para todos estes conjuntos as seguintes propriedades valem:

- + e $\cdot$ são associativas e comutativas;
- a distributividade: $a \cdot (b + c) = ab + ac$ para quaisquer a, b, c.
- o zero é neutro para a soma: $a + 0 = a$ para todo a.
- o um é neutro para a multiplicação: $1 \cdot a = a$ para todo a.
- Para todo a existe um inverso aditivo $(-1) \cdot a$, tal que $(-1) + a = 0$.
- Todo $a \neq 0$ tem inverso multiplicativo que denotamos a^{-1}, tal que $a \cdot a^{-1}=1$.

Há diferenças importantes entre estes três corpos: o corpo dos racionais não é completo (não contém os irracionais, que não podem ser representados como frações). O corpo dos reais é completo e ordenado, mas não inclui soluções para inequações na forma $x^2 < 0$.

Exemplo 1.39. Fixado um número n, denotamos o conjunto de todas as matrizes com entradas num corpo K ordem n por $M_{n\times n}(K)$.

Este conjunto não é um corpo com as operações de soma e multiplicação de matrizes, porque:

- Nem toda matriz, diferente de zero, tem inversa.

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não tem inversa.

- A operação de multiplicação não é comutativa.

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 19 & 20 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 22 & 29 \end{bmatrix}$.

Exemplo 1.40. Seja $Q[\sqrt{2}]$ o conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$, onde $a, b \in \mathbb{Q}$, com adição e multiplicação usuais. Este conjunto é um corpo:

- As operações são as usuais de $\mathbb{R}$, portanto são associativas, comutativas e vale a distributividade.
- Há neutros: $0 + 0\sqrt{2}$, para a adição, e $1 + 0\sqrt{2}$ para a multiplicação.
- Para todo $a + b\sqrt{2}$ existe o inverso aditivo $-a - b\sqrt{2}$.
- Para todo $(a + b\sqrt{2}) \neq 0$ existe um inverso multiplicativo

  $$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{a+b\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a-b\sqrt{2}}{a-b\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right) - \left(\frac{b}{a^2-2b^2}\right) \cdot \sqrt{2}.$$

  Observe que o inverso multiplicativo de $a + b\sqrt{2}$ também é da forma $x + y\sqrt{2}$. Além disso é importante notar que $a^2 - 2b^2 = 0$ apenas quando $a = b = 0$.

  Finalmente, a soma e multiplicação de elementos em $Q[\sqrt{2}]$ resulta em elementos em $Q[\sqrt{2}]$. Somando,

  $$(a + b\sqrt{2}) + (x + y\sqrt{2}) = (a + x) + (b + y)\sqrt{2}.$$

  Multiplicando,

  $$(a + b\sqrt{2}) \cdot (x + y\sqrt{2}) = ax + ay\sqrt{2} + bx\sqrt{2} + 2by = (ax + 2by) + (ay + bx)\sqrt{2}.$$

1.5.2 *Subcorpos*

Definição 1.41. Seja $(K, +, \cdot)$ um corpo, um subconjunto não vazio, de $L \subset K$ é chamado subcorpo de K se é fechado para a adição e multiplicação de K, e se L também é uma estrutura de corpo, com as operações de K.

Exemplo 1.42. $\mathbb{Q}$ é um subcorpo de $\mathbb{R}$ que sua vez é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

A partir daí temos uma propriedade:

Seja K um corpo e L um subconjunto não vazio de K. Para que L seja um subcorpo de K é necessário e suficiente que:

- 0 e $1 \in L$.
- Se $x, y \in L$, então $x - y \in L$ (Logo, L é fechado para a subtração).
- Se $x, y \in L$ e $y \neq 0$, então $x \cdot y^{-1} \in L$.

Exemplo 1.43. Provar que $L = \{a + b\sqrt{2}/a, b \in \mathbb{Q}\}$ é um subcorpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

Demonstração.

- 0 e $1 \in L$, pois $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ e $1 = 1 + 0\sqrt{2}$.
- Se $x, y \in L$, então esses elementos podem ser postos da forma $x = a + b\sqrt{2}$ e $y = c + d\sqrt{2}$ de forma que $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Logo $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}$. Como $(a - c), (b - d) \in \mathbb{Q}$, então $x - y \in L$.
- Se $x, y \in L$ e $y \neq 0$, então esses elementos podem ser representados da forma $x = a + b\sqrt{2}$ e $y = c + d\sqrt{2}$ de forma que $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $c \neq 0$ ou $d \neq 0$. Assim teremos

  $$x \cdot y^{-1} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d)\sqrt{2}}{(c + d\sqrt{2})(c - d)\sqrt{2}} = \frac{(ac - 2bd)(bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

  Como $c^2 - 2d^2 \neq 0$, pois caso contrário $\frac{c}{d} = \sqrt{2}$, o que é impossível, já que $c, d \in \mathbb{Q}$, então $\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}$ e $\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}$ são números racionais, e portanto, $x \cdot y^{-1} \in L$.

Logo se verificou as três propriedades o que garante que L é subcorpo de K. □

1.5.3 *Isomorfismo de corpos*

Definição 1.44. Sejam U e V corpos, cujas operações, por simplificação, serão ambas identificadas por $+$ e $\cdot$. Uma aplicação $f : U \to V$ é um isomorfismo entre corpos, se:

1. f seja uma bijeção.
2. f preserve a soma e a multiplicação.

Isto é, f é uma bijeção entre os corpos U e V que valem as propriedades para a soma e para o produto, ou seja, para quaisquer $a, b \in U$ teremos

$$f(a + b) = f(a) + f(b),$$

e

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

Quando existe um isomorfismo entre o corpo $(U, +, \cdot)$ e o corpo $(V, +, \cdot)$, tais corpos são ditos isomorfos.

2

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

No capítulo anterior apresentamos os conceitos de Álgebra Linear necessários para abordagem da construção do conjunto dos números complexos que pretendemos. Vimos que as transformações geométricas rotação e homotetia (dilatação/contração) são transformações lineares. Além disso, o espaço vetorial das transformações lineares pode ser munido com a operação de composição.

Foco principal do presente capítulo é o conjunto das transformações geométricas do plano formado por homotetias, rotações e suas composições.

Na construção veremos que o conjunto ($\mathbb{L}$ das transformações geométricas de rotação homotetia munidos das operações de soma e composição herdadas do espaço das transformações lineares possui estrutura de corpo, desde que se acrescente a este as transformações identidade e nula.

Uma vez que $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ possui estrutura de corpo apresentaremos um método de potenciação e radiciação em $\mathbb{L}$ e logo após buscaremos um novo olhar para resolver equações polinomiais.

2.1 COMPOSIÇÃO DE UMA ROTAÇÃO COM UMA DILATAÇÃO/CONTRAÇÃO

Vimos no capitulo 1 que as transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita possuem sempre uma representação matricial. Assim , o operador linear de rotação no $\mathbb{R}^2$ é representado pela matriz $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e a homotetia em $\mathbb{R}^2$ com $\alpha > 0$, $D = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A composição de uma rotação com uma homotetia tem a forma geral

$$R \circ D = \alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Além disso, a composição de duas rotações distintas tem o formato

$$R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix},$$

ou seja, $R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$. Portanto a composição de duas rotações é, ainda, uma rotação.

Demonstração. Sejam $R_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ e $R_{\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} R_{\theta_1} \circ R_{\theta_2} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2) \\ \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\ &= R_{\theta_1+\theta_2}. \end{aligned}$$

□

2.2 VERIFICAÇÃO: CONJUNTO HOMOTETIA - ROTAÇÃO É FECHADO EM RELAÇÃO A COMPOSIÇÃO

Considere uma transformação dada por $D \circ R$ homotetia-rotação.

Vamos verificar que o conjunto deles é fechado por composição. De fato,

$$D_1 \circ R_1 = R_1 \circ D_1.$$

Agora,

$$\begin{aligned} (D_1 \circ R_1) \circ (D_2 \circ R_2) &= D_1 \circ (R_1 \circ D_2) \circ R_2 \\ &= D_1 \circ (D_2 \circ R_1) \circ R_2 \\ &= (D_1 \circ D_2) \circ (R_1 \circ R_2). \end{aligned}$$

Como a composição de duas homotetias(dilatação/contração) é ainda uma homotetia e o mesmo vale para rotações, vemos que $(D_1 \circ D_2) \circ (R_1 \circ R_2)$ é também uma homotetia-rotação.

2.3 VERIFICAÇÃO DA INVERSA

Vamos verificar agora que a inversa de uma homotetia-rotação também é uma homotetia-rotação.

Primeiro vemos que o inverso de uma rotação é uma rotação (podemos ver isto de maneira clara geometricamente).

Dada uma rotação $R_{\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$.

Note que $R_{-\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta_1) & -\operatorname{sen}(-\theta_1) \\ \operatorname{sen}(-\theta_1) & \cos(-\theta_1) \end{bmatrix}$ é a sua inversa, já que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta_1) & -\operatorname{sen}(-\theta_1) \\ \operatorname{sen}(-\theta_1) & \cos(-\theta_1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1 & \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 - \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_1 & \operatorname{sen}^2\theta_1 + \cos^2\theta_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A inversa de uma homotetia também é uma homotetia. Pois

$$\left(\alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim dado uma homotetia-rotação $D_{\alpha_1} \circ R_{\theta_1}$ a sua inversa será $D_{\frac{1}{\alpha_1}} \circ R_{-\theta_1}$. De fato

$$\begin{aligned} (D_{\alpha_1} \circ R_{\theta_1}) \circ (D_{\frac{1}{\alpha_1}} \circ R_{-\theta_1}) &= (D_{\alpha_1} \circ D_{\frac{1}{\alpha_1}}) \circ (R_{\theta_1} \circ R_{-\theta_1}) \\ &= I \cdot I \\ &= I. \end{aligned}$$

2.4 FECHAMENTO PARA OPERAÇÃO DE ADIÇÃO MATRICIAL

Agora vamos apresentar um interessante fato que o conjunto das matrizes homotetia-rotação é fechado para a operação de *adição matricial*.

Primeiro temos $\alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cos\theta & -\alpha\operatorname{sen}\theta \\ \alpha\operatorname{sen}\theta & \alpha\cos\theta \end{bmatrix}$ e podemos chamar $\alpha\cos\theta = a$ e $\alpha\operatorname{sen}\theta = b$ dessa forma temos $D_\alpha R_\theta = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Agora vamos provar que dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ existem $\alpha > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha\cos\theta = a$ e $\alpha\operatorname{sen}\theta = b$.

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

Se $a = 0$ então $\alpha\cos\theta = a$, com $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = b$.

Se $b = 0$ então $\alpha\operatorname{sen}\theta = b$, com $\theta = 0$ e $\alpha = a$.

Se a e b não são nulos então podemos representar em $\mathbb{R}$.

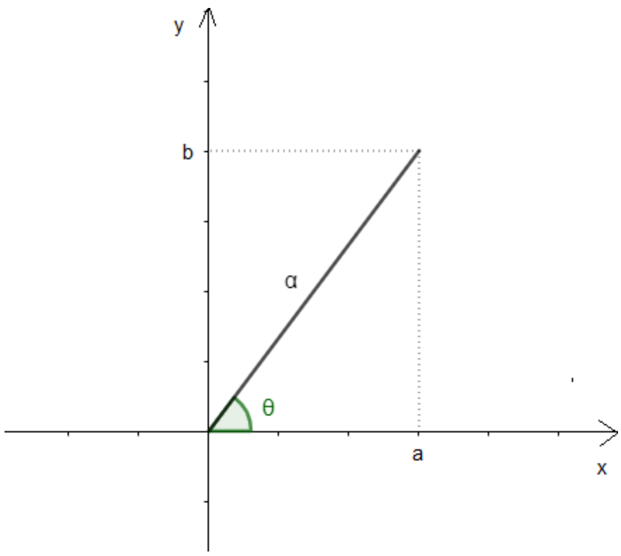

Figura 13: $\alpha\cos\theta = a$ e $\alpha\operatorname{sen}\theta = b$.

De tal forma que $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dessa forma, $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$, então θ[1] = arctan $\frac{b}{a}$. $\square$

1 Onde se a e b positivos θ no 1° quadrante , se a e b negativos no 3° quadrante , se a negativo e b positivo no 2° quadrante e se a positivo e b negativo no 4° quadrante.

Com isso vemos que os elementos do conjunto das matrizes homotetia-rotação podem ser representados por matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Podemos ver que $\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -(b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$, logo o conjunto é fechado para a soma.

Mesmo mostrando facilmente que o conjunto das matrizes homotetia-rotação nesse formato é fechado para a soma matricial, não identificamos claramente qual é o ângulo de rotação e o fator de homotetia do resultado.

Ou seja, gostaríamos de determinar α_1, θ_1 tais que $\alpha_1 \cos\theta_1 = a_1 + a_2$ e $\alpha_1 \operatorname{sen}\theta_1 = b_1 + b_2$. Dessa forma, $\alpha_1 = \sqrt{(b_1 + b_2)^2 + (a_1 + a_2)^2}$, $\theta_1 = \arctan \frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}$.

2.5 ESTRUTURA DE CORPO

Sabendo que $\mathbb{L}$ (conjunto das matrizes homotetia-rotação) é fechado pela soma e multiplicação matricial, vamos mostrar que $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ é um corpo.

As propriedades associativa da soma e multiplicação seguem do já visto para as matrizes em geral.

A matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não aparece naturalmente no conjunto $\mathbb{L}$ das dilatações/contrações rotações e a identidade $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ocorre quando o fator $\alpha = 1$ e $\theta = 0$, mas são fundamentais para estrutura algébrica de corpo, já que eles representam os elementos neutros da adição e multiplicação, respectivamente .

A maior novidade já comentamos anteriormente, a saber, a comutatividade. Portanto, $\mathbb{L}$ é um corpo.

Já que $\mathbb{R}$ é o corpo dos números reais e $\mathbb{L}$ é o corpo formado pelo conjunto das matrizes homotetia-rotação a qual pretendemos chamar de corpo dos complexos, então vem a seguinte pergunta: faz sentido dizer que $\mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{L}$?

A resposta direta é não, já que $\mathbb{L}$ é composto de matrizes e $\mathbb{R}$ são números reais. Porém, existe um subconjunto de $\mathbb{L}$ que é um subcorpo isomorfo a $\mathbb{R}$.

De fato, tomando $b = 0$ temos que o conjunto das matrizes $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ forma um *subcorpo* de $\mathbb{L}$ que é isomorfo a $\mathbb{R}$. Portanto, em um sentido mais amplo podemos considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{L}$.

Até este ponto observamos que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{L}$ possuem estrutura de corpo. Conforme foi apresentado anteriormente $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Discutiremos a relação entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{L}$, vale pontuar que literalmente a inclusão $\mathbb{R} \subset \mathbb{L}$ não faz sentido. Contudo podemos contornar essa dificuldade usando os conceitos de subcorpo e isomorfismo de corpo. Mais precisamente mostraremos que existe um subcorpo $\overline{\mathbb{R}} \subset \mathbb{L}$ que é isomorfo a $\mathbb{R}$.

Considere o conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{L}$. Vamos mostrar que $\overline{\mathbb{R}}$ é um subcorpo de $\mathbb{L}$:

1. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha+\beta \end{bmatrix} \in \overline{\mathbb{R}}.$

2. $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} \in \overline{\mathbb{R}}.$

Portanto $\overline{\mathbb{R}}$ é um subcorpo de L.

Resta mostrar que $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$ são isomorfos. Para isso consideremos a aplicação $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ de modo que $f(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Para isso precisamos que:

1. f seja uma bijeção.
2. f preserve a soma e a multiplicação.

Demonstração.

1. Para mostrar que f é bijetora observe que f é injetora pois $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. Além disso, f é sobrejetora por definição.

2. Sejam α e β dois números reais quaisquer, então:

$$f(\alpha+\beta) = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ 0 & \alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = f(\alpha) + f(\beta).$$

Da mesma forma temos:

$$f(\alpha \cdot \beta) = \begin{bmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = f(\alpha) \cdot f(\beta).$$

□

Devido ao isomorfismo de f identificamos $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ levando a resultados correspondentes aos obtidos com $\alpha \in \mathbb{R}$ para $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$. Assim o corpo R dos números reais pode ser visto como subconjunto de $\mathbb{L}$.

Para nos darmos o direito de chamar $\mathbb{L}$ de corpo dos complexos temos que examinar a equação $x^2 + I = 0$ em $\mathbb{L}$, aqui 0 representa a matriz nula. Geometricamente, já que $\mathbb{L}$ é o conjunto de matrizes rotação-homotetia, sabemos que a rotação de $\frac{\pi}{2}$ é

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem a propriedade de

$$R_{\frac{\pi}{2}} \cdot R_{\frac{\pi}{2}} = (R_{\frac{\pi}{2}})^2 = -I.$$

Logo $R_{\frac{\pi}{2}}$ é uma solução para $x^2 + I = 0$ em $\mathbb{L}$. Portanto a matriz de rotação de $\pi/2$ faz o papel de uma raiz quadrada de $-I$. A outra solução é $-R_{\frac{\pi}{2}}$.

2.6 POTENCIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Vamos apresentar a potenciação de números complexos no conjunto $\mathbb{L}$ na forma matricial. [2]

Seja um número complexo $z \in \mathbb{L}$, então $z^n = z.z \ldots z$ (n fatores) com $n > 0$.

Escrevemos $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, então $z^n = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^n$.

Por conta da simplicidade com que se obtem a composta de rotações e homotetia entre si é conveniente executar a potenciação de elementos de $\mathbb{L}$ na forma $\alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Para $n = 2$ temos

$$z^2 = \alpha^2 \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^2 = \alpha^2 \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Podemos generalizar

2 Ver forma mais usual utilizada nos livros didáticos em [5].

$$z^n = \alpha^n \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \alpha^n \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.1. Calcular $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^6$

Vimos que $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$ então , $\alpha = \sqrt{2}$ e $D_\alpha R_\theta = \alpha^6 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^6$, $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, logo

$$z^6 = (\sqrt{2})^6 \begin{bmatrix} \cos 6\frac{3\pi}{4} & -\operatorname{sen} 6\frac{3\pi}{4} \\ \operatorname{sen} 6\frac{3\pi}{4} & \cos 6\frac{3\pi}{4} \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} \cos\frac{9\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{9\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{9\pi}{2} & \cos\frac{9\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$$z^6 = 8 \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.2. Calcular $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{-5}$

Vimos que $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$ então , $\alpha = 2$ e $z^{-5} = \alpha^{-5} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}^{-5}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, logo

$$z^{-5} = 2^{-5} \begin{bmatrix} \cos -5\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen} -5\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen} -5\frac{\pi}{3} & \cos -5\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = 2^{-5} \begin{bmatrix} \cos\frac{-5\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{-5\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{-5\pi}{3} & \cos\frac{-5\pi}{3} \end{bmatrix}$$

$$z^6 = 2^{-5} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} = 2^{-5} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2^{-6} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

2.7 RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Agora apresentaremos a radiciação de números complexos no conjunto $\mathbb{L}$ na forma matricial.[3]

3 Ver forma mais usual utilizada nos livros didáticos em [5].

Seja um número complexo $z \in \mathbb{L}$, então $z_k = z^{\frac{1}{2}}$, dessa forma $z_k^2 = z$, $k = 0, 1$. Dessa forma,

$$\rho^2 \begin{bmatrix} \cos\theta' & -\operatorname{sen}\theta' \\ \operatorname{sen}\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}^2 = \alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Assim, $\rho^2 = \alpha$, ou seja, $\rho = \sqrt{\alpha}$ (positivo). Ainda $\cos 2\theta' = \cos\theta$ e $\operatorname{sen} 2\theta' = \operatorname{sen}\theta$, concluímos que $2\theta' = \theta + 2k\pi$, ou seja, $\theta' = \frac{\theta}{2} + k\pi$ com $k = 0, 1$.

$$z_0 = \sqrt{\alpha} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

$$z_1 = -\sqrt{\alpha} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Podemos fazer de modo análogo $z_k = z^{\frac{1}{3}}$, dessa forma $z_k^3 = z$, $k = 0, 1, 2$.

$$\rho^3 \begin{bmatrix} \cos\theta' & -\operatorname{sen}\theta' \\ \operatorname{sen}\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix}^3 = \alpha \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Assim, $\rho^3 = \alpha$, ou seja, $\rho = \sqrt[3]{\alpha}$. Ainda $\cos 3\theta' = \cos\theta$ e $\operatorname{sen} 3\theta' = \operatorname{sen}\theta$, concluímos que $3\theta' = \theta + 2k\pi$, ou seja, $\theta' = \frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ com $k = 0, 1, 2$.

$$z_0 = \sqrt[3]{\alpha} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\theta}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta}{3} & \cos\frac{\theta}{3} \end{bmatrix}.$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\alpha} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta+2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3} & \cos\frac{\theta+2\pi}{3} \end{bmatrix}.$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\alpha} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta+4\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3} & \cos\frac{\theta+4\pi}{3} \end{bmatrix}.$$

De modo geral,

$$z_k = \sqrt[n]{\alpha} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta+2k\pi}{n} & -\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n} \\ \operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n} & \cos\frac{\theta+2k\pi}{n} \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2 \ldots, n-1.$$

Exemplo 2.3. Calcular as raízes quartas de 1.

Teremos $z_k = 1$, então $\alpha = 1$ e $\theta = 0$. Dessa forma

$$z_k = \sqrt[4]{1}\begin{bmatrix} \cos\frac{0+2k\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{4} & \cos\frac{0+2k\pi}{4} \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = \sqrt[4]{1}\begin{bmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{1}\begin{bmatrix} \cos\frac{0+2\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{0+2\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{0+2\pi}{4} & \cos\frac{0+2\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$z_2 = \sqrt[4]{1}\begin{bmatrix} \cos\frac{0+4\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{0+4\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{0+4\pi}{4} & \cos\frac{0+4\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{1}\begin{bmatrix} \cos\frac{0+6\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{0+6\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{0+6\pi}{4} & \cos\frac{0+6\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4. Calcule as raízes quadradas de $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

Como $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$, então $\alpha = 4$ e $\theta = \pi$.

Dessa forma,

$$z_k = \sqrt{4}\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi+2k\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{2} & \cos\frac{\pi+2k\pi}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$z_o = 2\cdot\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$z_1 = 2\cdot\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \\ -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix} = 2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.5. Calcular as raízes cúbicas de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}$, então $\alpha = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Dessa forma,

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Assim,

$$z_o = \sqrt[6]{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{bmatrix} = \sqrt[6]{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}.$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix} = \sqrt[6]{2} \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right) & \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) \end{bmatrix} = \sqrt[6]{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}.$$

2.8 UM NOVO OLHAR DE RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Vamos aplicar este ponto de vista matricial, o corpo $\mathbb{L}$, na resolução de equações polinomiais.

Denomina-se equação polinomial [4] ou algébrica de grau n na variável $x \in \mathbb{L}$, toda equação que pode ser escrita na forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, onde $a_i \in \mathbb{L}$, $a_0 \neq 0$.

Exemplo 2.6. 1. $x + 2 = 0$ é uma equação algébrica de grau 1.

2. $x^2 + 5x + 4 = 0$ é uma equação algébrica de grau 2.

3. $x^3 - 15x - 4 = 0$ é uma equação algébrica de grau 3.

O conjunto solução da equação é formado pelos elementos $x \in \mathbb{L}$ que verificam a equação. Para as equações em que o grau é um ou dois, o método de resolução é simples. Nos casos em que o grau dos polinômios é 3 ou 4, existem expressões um pouco menos conhecidas para as soluções.

4 Ver Gelson Iezzi Vol. 6 [5].

2.8.1 *Teorema Fundamental da álgebra*

Sabemos que:

- $ax + b = 0$ com $a \neq 0$ é uma equação de grau 1 cuja raiz é $\frac{-b}{a}$.

  Logo o conjunto solução dessa equação é $S = \{\frac{-b}{a}\}$.

- $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ é uma equação de grau 2 cujas raízes são: $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.

  Logo, o conjunto solução dessa equação é $S = \{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\}$.

Nas equações de 3^o grau ou maior que 3, são resolvidas através de métodos, baseados no teorema fundamental da álgebra, demonstrado por Gauss, em 1799 descrito abaixo:

Toda equação polinomial $P(x) = 0$, de grau n ($n > 0$), tem pelo menos uma raiz real ou complexa.

2.8.2 *Resolução de equação polinomial de grau 1 em* $\mathbb{L}$

Agora faremos a resolução da equação $x + 2 = 0$ em $\mathbb{L}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.8.3 *Resolução de equação polinomial de grau 2 em* $\mathbb{L}$

Agora faremos a resolução da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ em $\mathbb{L}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\Delta} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 3, \theta = 0$$

Então,

$$z = 3. \begin{bmatrix} \cos 0 & \operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = 3. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo as raízes são $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2.8.4 *Resolução de equação polinomial de grau 3 em $\mathbb{L}$*

Vamos aplicar esse conceito matricial em uma equação cúbica que tanto intrigou os matemáticos $x^3 - 15x - 4 = 0$ (por inspeção direta não é dificil perceber que 4 é uma raiz) onde as fórmulas publicadas por Tartaglia e Cardano[5] forneciam $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ uma expressão absurda no campo numeração dos reais.

Dando prosseguimento a equação

$$x = \sqrt[3]{(2+\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2-\sqrt{-1})^3}$$

$$x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}.$$

Escrevendo a solução da forma matricial teremos

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Que nada mais é do que o número 4.

5 Heurística da fórmula de Tartáglia-Cardano. Ver [9] cap. 9 págs. 380 a 382.

3

OUTRAS CONSTRUÇÕES DOS COMPLEXOS

Neste capítulo iremos apresentar outras formas, mais usuais, de representar o corpo dos números complexos para fazermos uma comparação com a construção. Logo após mostraremos isomorfismos com $\mathbb{L}$, o conjunto das matrizes rotação homotetia.

3.1 CORPO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Vamos considerar o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

isto é, $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) em que x e y são números reais.

Tomamos dois elementos, (a, b) e (c, d), de $\mathbb{R}^2$ para dar três definições importantes:

1. Igualdade: Dois pares ordenados são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundo termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c, b = d.$$

2. Adição: chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termo são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

3. Multiplicação: chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e

o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Definição 3.1. Chamamos conjunto dos números complexos, e representamos por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidos a igualdade, a adição e a multiplicação conforme vimos anteriormente.

$$\mathbb{C} = \{(a, b)/a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}.$$

A partir de agora representaremos cada elemento $(a, b) \in \mathbb{C}$ com o símbolo z, assim $z = (a, b)$.

3.1.1 *Operação de adição*

O conjunto dos números complexos em relação a operação adição define em $\mathbb{C}$ uma estrutura de grupo comutativo ou abeliano, isto é, verifica as seguintes propriedades:

$A1$ Associativa:

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)].$$

Demonstração. Primeiro Membro: $[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = [a + c, b + d] + (e, f) = (a + c + e, b + d + f)$.

Segundo Membro: $(a, b) + [(c, d) + (e, f)] = (a, b) + (c + e, d + f) = (a + c + e, b + d + f)$. □

$A2$ Elemento Neutro:

O par ordenado (0,0) é o elemento neutro dos complexos.

Demonstração.

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

□

$A3$ Elemento inverso aditivo:

Dado um número complexo (a, b) existe o número complexo (x, y) tal que:

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0).$$

Demonstração. $(a+x,b+y)=(0,0) \Longleftrightarrow a+x=0, b+y=0 \Longleftrightarrow x=-a, y=-b$

Portanto $(x,y)=(-a,-b)$. □

$A4$ Comutativa: a ordem das parcelas não altera a soma.

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b).$$

Demonstração. Primeiro Membro: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

Segundo Membro: $(c,d)+(a,b)=(a+c,b+d)$. □

3.1.2 *Operação de multiplicação*

O conjunto dos números complexos em relação à operação de multiplicação define em $\mathbb{C}$ uma estrutura de grupo comutativo, isto é, verifica as seguintes propriedades:

$M1$ Associativa:

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)].$$

Demonstração. Primeiro Membro: $[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f)=((ac-bd)\cdot e-(ad+be)\cdot f,(ac-bd)\cdot f+(ad+bc)\cdot e)=[(ace-bde-adf-bef),(acf-bdf+ade+bce)]$.

Segundo Membro: $(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]=(a,b)\cdot[ce-df,cf+de]=[a\cdot(ce-df)-b\cdot(cf+de),a\cdot(cf+de)+b\cdot(ce-df)]=[(ace-bde-adf-bef),(acf-bdf+ade+bce)]$. □

$M2$ Elemento Neutro:

Dado um número complexo (a,b), existe um número complexo (x,y) tal que $(a,b)\cdot(x,y)=(a,b)$.

Demonstração. Se $(a,b)\cdot(x,y)=(a,b)$ teremos que $(ax-by,ay+bx)=(a,b)$. Então $ax-by=a$ e $ay+bx=b$, dessa forma $x=1$ e $y=0$. Portanto $(x,y)=(1,0)$. □

$M3$ Elemento inverso multiplicativo:

Dado um número complexo $(a,b)\neq(0,0)$ existe o número complexo (x,y) tal que $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$.

Demonstração. Se $(a,b)\cdot(x,y)=(1,0)$ teremos que $(ax-by, ay+bx)=(1,0)$. Então $ax-by=1$ e $ay+bx=0$, dessa forma $x=\frac{a}{a^2+b^2}$ e $y=\frac{-b}{a^2+b^2}$. Portanto $(x,y)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. □

$M4$ Comutativa: a ordem dos fatores não altera o produto.

$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b).$$

Demonstração. Primeiro Membro: $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd, ad+bc)$.

Segundo Membro: $(c,d)\cdot(a,b)=(ca-db, cb+da)$. □

3.1.3 *Distributiva*

D - Em $\mathbb{C}$, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f).$$

Demonstração. Primeiro Membro:$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c+e,d+f)=[a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)]=(ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be)$.

Segundo Membro: $(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)$. □

O conjunto dos números complexos em relação às operações de adição e multiplicação, possuem estrutura de corpo. Portanto, $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos.

3.2 FORMA ALGÉBRICA

3.2.1 *Inclusão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$*

Como $\mathbb{R}$ é conjunto de números reais e $\mathbb{C}$ o conjunto de pares vamos considerar o subconjunto $\mathbb{R}'$ de $\mathbb{C}$ formado pelos pares ordenados cujo segundo termo é zero:

$$\mathbb{R}'=\{(a,b)\in\mathbb{C}/b=0\}.$$

Pertencem, por exemplo, a $\mathbb{R}'$ os pares $(0,0)$, $(1,0)$, $(a,0)$, $(b,0)$, $(a+b,0)$, $(a\cdot b,0)$, etc.

Consideremos agora a aplicação f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}'$, que leva cada $x \in \mathbb{R}$ ao par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$.

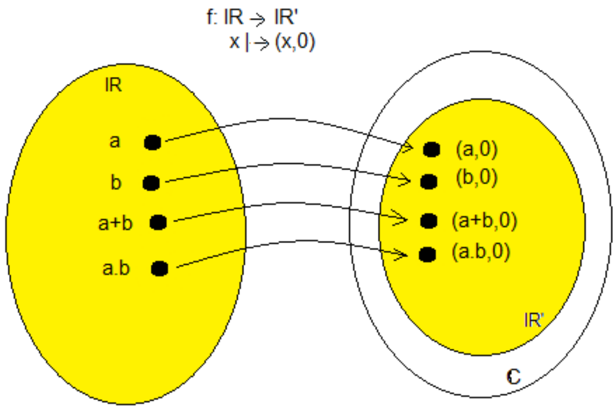

Figura 14: Aplicação f.

Primeiro, notemos que f é sobrejetora pois:

1. Todo par $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ é o correspondente, segundo f, de $x \in \mathbb{R}$ (isto quer dizer que f é sobrejetora);
2. dados $x \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}$, com $x \neq x'$, seus correspondentes $(x, 0) \in \mathbb{R}'$ e $(x', 0) \in \mathbb{R}'$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados (isto quer dizer que f é injetora).

Segundo, notemos que f conserva as operações de adição e multiplicação pois:

1. à soma $a + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(a + b, 0)$ que é a soma dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b, respectivamente: $f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b)$.
2. ao produto ab com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado o par $(ab, 0)$ que é o produto dos pares $(a, 0)$ e $(b, 0)$, correspondentes de a e b, respectivamente: $f(ab) = (ab, 0) = (ab - 0, 0a + b0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = f(a) \cdot f(b)$.Logo, $\mathbb{R}'$ é subcorpo de $\mathbb{C}$.

Como existe uma aplicação bijetora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$ que conserva as operações de adição e multiplicação, dizemos que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}'$ são *isomorfos*.

Devido ao isomorfismo, operar com $(x, 0)$ leva a resultados análogos aos obtidos operando com x; isto justifica a igualdade $x = (x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que usaremos daqui por diante.

Em particular temos que $0 = (0,0), 1 = (1,0)$ e $\mathbb{R} = \mathbb{R}'$.

Assim, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais passa a ser considerado um subcocorpo do corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

3.2.2 *Unidade Imaginária*

Chamamos de unidade imaginária e indicamos por i o número complexo $(0,1)$.

Notemos que $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1$, isto é, a propriedade básica da unidade imaginária é $i^2 = -1$.

Dado um número complexo qualquer (a,b) temos:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1) = a + bi.$$ [1]

Assim, todo número complexo $z = (a,b)$ pode ser escrito na forma $z = a + bi$, chamado forma algébrica. O número real a é chamado parte real de z e o número real b é chamado parte imaginária de z (escreveremos $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$).

Chama-se real todo número complexo cuja parte imaginária é nula. Chama-se imaginário puro todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não. Dessa forma, $z = a + 0i = a$, é real e $z = 0 + bi$ $(b \neq 0)$, é imaginário puro.

Vamos verificar como ficam as definições de igualdade, adição e multiplicação de complexos usando a forma algébrica:

Igualdade: $a + bi = c + di \iff a = c$ e $b = d$, isto é, dois números complexos são iguais se, e somente se, têm partes reais iguais e partes imaginárias iguais.

Adição: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, isto é, a soma de dois números complexos é um complexo cuja parte real é a soma das partes reais das parcelas e cuja parte imaginária é a soma das partes imaginárias das parcelas.

Multiplicação: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, o produto de dois números complexos é o resultado do desenvolvimento de $(a + bi) \cdot (c + di)$, aplicando a propriedade distributiva e levando em conta que $i^2 = -1$.[2]

Exemplo 3.2. Dados $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$ e $z_3 = 3 + 2i$, calcule $z_1 + z_2 + z_3$ e $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$.

$$z_1 + z_2 + z_3 = (1 + 1 + 3) + (1 - 1 + 2)i = 5 + 2i.$$

1 $(0,b) = (b,0) \cdot (0,1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0,b)$.
2 $(a + bi) \cdot (c + di) = a(c + di) + bi(c + di) = ac + adi + bc + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = (1+i) \cdot (1-i) \cdot (3+2i) = 2 \cdot (3+2i) = 6+4i.(associativa)$$

3.2.3 *Números complexos conjugados*

Definição 3.3. Chama-se conjugado de um número complexo $z = a + bi$, indica-se $\overline{z} = a - bi$.

Exemplo 3.4.

1. $z = 2 + 3i$ então $\overline{z} = 2 - 3i$.
2. $z = 4 - 5i$ então $\overline{z} = 4 + 5i$.
3. $z = -2 - 3i$ então $\overline{z} = -2 + 3i$.

3.2.4 *Potências de i*

Observe que:

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1 & i^4 = i^3 \cdot i = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^4 \cdot i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^5 \cdot i = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i & i^7 = i^6 \cdot i = -i. \end{array}$$

De forma geral para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r.$$

Portanto, $i^n = i^r$, onde $r = n(mod 4)$

3.2.5 *Divisão*

Baseado no produto $z \cdot \overline{z} = (a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2$. Dados $z_1 = a + bi \neq 0$ e $z_2 = c + di$, temos:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2} i\right).$$

Isto é, para expressar z_2 na forma $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, basta multiplicar o numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

Exemplo 3.5.

$$\frac{(7-2i)}{(2+3i)} = \frac{(7-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{14-21i-4i-6}{4+9} = \frac{8-25i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{25}{8}i.$$

3.3 FORMA TRIGONOMÉTRICA

3.3.1 *Norma de um número complexo*

Definição 3.6. Chama-se norma de um número complexo $z = a + bi$ e indica-se por $N(z)$ o número real $N(z) = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$.

Dois números complexos conjugados tem a mesma norma.[3]

3.3.2 *Módulo de um número complexo*

Definição 3.7. Chama-se módulo do número complexo $z = a + bi$ e indica-se por ρ a raiz quadrada de sua norma.

$$z = a + bi \longrightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_+.$$

Exemplo 3.8. 1. $z = 3 + 4i \longrightarrow N(z) = 3^2 + 4^2 = 25 \longrightarrow \rho = \sqrt{25} = 5.$

2. $z = \sqrt{2} + i \longrightarrow N(z) = 3 \longrightarrow \rho = \sqrt{3}.$

3.3.3 *Argumento de um número complexo*

Definição 3.9. Chama-se argumento de um número complexo $z = a + bi$, não-nulo, ao ângulo θ tal que $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$.

Notemos que:

1. a condição $z \neq 0$ garante $\rho \neq 0$.
2. Existe ao menos um ângulo θ satisfazendo a definição pois:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = \left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{\rho^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

3 Observe que se $z = a + bi$ teremos que $\bar{z} = a - bi$ e $N(z) = N(\bar{z}) = a^2 + b^2$.

3. fixado o complexo $z \neq 0$, estão fixados $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ mas o ângulo θ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, onde θ_0, chamado argumento principal de z, é tal que $\cos\theta_0 = \frac{a}{\rho}$, $\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{b}{\rho}$ e $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$. Frequentemente trabalhamos com θ_0 chamando simplesmente argumento de z.

Exemplo 3.10. 1. $z = \sqrt{3} + i \longrightarrow \rho = 2, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. $z = -2i \longrightarrow \rho = 2, \cos\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = -1 \longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.3.4 *Representação Geométrica - Plano de Gauss*

As noções de módulo e argumento tornam-se mais concretas quando representamos os números complexos $z = a + bi = (a, b)$ pelos pontos do plano cartesiano xOy, com com a convenção de marcarmos sobre os eixos Ox e Oy, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z.

Assim, a cada número complexo $z = (a, b)$ corresponde um único ponto P do plano xOy.

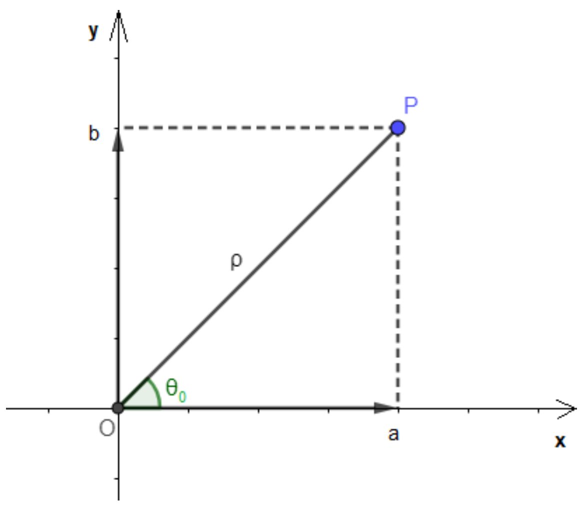

Figura 15: Representação de um complexo no Plano.

A distância entre P e O é o módulo de z, $OP = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e o ângulo formado por OP com o eixo real é o θ_0 tal que $\cos\theta_0 = \frac{a}{\rho}$ e $\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{b}{\rho}$ portanto θ_0 é o argumento principal de z.

3.3.5 *Forma trigonométrica (ou polar) de um número complexo*

Dado um número complexo $z = a + bi = \rho\left(\frac{a}{\rho} + i\frac{b}{\rho}\right)$ portanto $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ chamado forma trigonométrica de z.

Exemplo 3.11. 1. $z = \sqrt{3} + i \longrightarrow \rho = 2, \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \longrightarrow z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6})$.

2. $z = -1 - i \longrightarrow \rho = \sqrt{2}, \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \mathrm{sen}\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4})$.

3.3.6 *Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica*

Dados $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$, $z = z_1 \cdot z_2$ será

$$\begin{aligned}
z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\\
&= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\\
&= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i^2\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\\
&= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)]\\
&= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)].
\end{aligned}$$

Dessa forma $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$ e $\theta = \theta_1 + \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.12. Tome $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6})$ e $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3})$, $z = z_1 \cdot z_2$ será $z = 6[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}\,(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3})] = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2})$.

3.3.7 *Potenciação de números complexos*

Dado $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)$ podemos calcular $z = z_1^2$ pela forma $z = \rho_1^2[\cos(\theta_1 + \theta_1) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta_1 + \theta_1)] = \rho_1^2[\cos(2\theta_1) + i\,\mathrm{sen}\,(2\theta_1)]$. De modo análogo, podemos calcular $z = z_1^3 = \rho_1^2[\cos(3\theta_1) + i\,\mathrm{sen}\,(3\theta_1)]$.

Teremos então a 1^a Fórmula de DE MOIVRE.

$$z = z_1^n = \rho_1^n[\cos(n\theta_1) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta_1)].$$

Se $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ teremos que $\rho = \rho_1^n$ e $\theta = n\theta_1 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.[4]

Exemplo 3.13. Calcular $(-1+i)^6$.

Observe que $\rho = \sqrt{2}, \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ e $\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dessa forma $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Por DE MOIVRE: $z^6 = (\sqrt{2})^6(\cos 6\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,6\frac{3\pi}{4})$, teremos assim $z^6 = 8(\cos\frac{9\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{4})$, ou seja, $z^6 = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}) = 8(0+1i) = 8i$.

Portanto $(-1+i)^6 = 8i$.

3.3.8 *Radiciação de números complexos*

$$\sqrt[n]{z} = z_k \Longleftrightarrow z_k^n = z.$$

Sejam $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $z_k = r(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)$, se queremos $z = z_k^n$ então $\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^n(\cos n\omega + i\,\mathrm{sen}\,n\omega)$. Dessa forma $r^n = \rho$, ou seja, $r = \sqrt[n]{\rho}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ e $n\omega = \theta + 2k\pi$, ou seja, $\omega = \frac{\theta+2k\pi}{n}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Teremos então a 2^a Fórmula de DE MOIVRE.

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2kpi}{n}), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$ [5]

Exemplo 3.14. Calcular as raízes quartas de 1.

Teremos $z = 1$, então $\rho = 1$ e $\theta = 0$. Pela fórmula teremos $z_k = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{0+2k\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{0+2k\pi}{4})$ com $k = 0, 1, 2, 3$.

Se $k = 0$, $z_0 = 1(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = 1$.

Se $k = 1$, $z_1 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}) = i$.

Se $k = 2$, $z_2 = 1(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -1$.

Se $k = 3$, $z_3 = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}) = -i$.

---

4 Para mais detalhes ver Livro [5] Gelson Iezzi.

5 Para a demonstração da fórmula de DE MOIVRE com mais detalhes ver livro Gelson Iezzi Fundamentos de matemática elementar vol. 6.

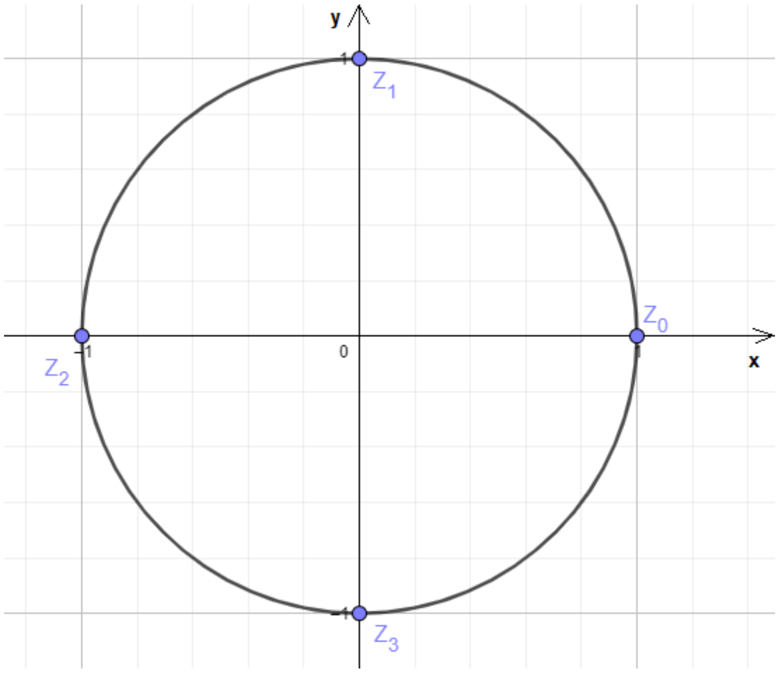

Figura 16: Raizes de $z = 1$.

Ver interpretação geométrica sobre radiciação com detalhes em [5] (livro Gelson Iezzi).

3.3.9 *Isomorfismo entre* $\mathbb{L}$ *e* $\mathbb{C}$

Agora mostraremos que existe um isomorfismo entre $\mathbb{L}$ o conjunto das matrizes rotação dilatação/contração com conjunto dos números complexos expressa na forma por exemplo algébrica .

A verificação que $\mathbb{L}$ é isomorfo a $\mathbb{C}$ é realizada mediante a correspondência de um número complexo arbitrário $a + bi$ com a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, onde mostraremos que tal correspondência cumpre a definição de isomorfismo de corpos. Observaremos que a unidade imaginária i corresponde à matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, o que permite-nos visualizar um número complexo genérico utilizando matrizes .

Vimos anteriormente a definição do conjunto dos números complexos na forma algébrica $\mathbb{C} = \{a + bi/a, b \in \mathbb{R}\}$

Vamos considerar a aplicação $f : \mathbb{C} \to \mathbb{L}$ definida por $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Para números complexos arbitrários $a+bi$ e $c+di$, temos :

$f\left[(a+bi)+(c+di)\right] = f\left[(a+c)+(b+d)i\right] = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} =$

$= f(a+bi) + f(c+di)$

Da mesma forma para quaisquer $a+bi$ e $c+di$ de $\mathbb{C}$, temos $f\left[(a+bi).(c+di)\right] = f\left[(a.c+adi)+(bci+bdi^2)\right] =$

$= f\left[(ac-bd)+(ad+bc)i\right] = \begin{pmatrix} a.c-b.d & -(a.d+b.c) \\ a.d+b.c & a.c-b.d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = f(a+bi).f(c+di)$

O que mostra que f preserva a soma e a multiplicação . Prova da bijeção: Que f é uma aplicação sobrejetora , segue direto da definição. Para verificar que f é injetora, temos que $f(a+bi) = f(c+di) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow a+bi = c+di$.

Uma vez provado que $\mathbb{L}$ é isomorfo a $\mathbb{C}$, esta provado que as matrizes em $\mathbb{L}$ comportam-se como números complexos . Nota-se que para uma matriz genérica $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f(a+0i) + f(0+bi)$

Essa expressão sugere que as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fazem o papel de unidade real e imaginária de $\mathbb{C}$: de fato $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -Id$, mostrando que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ assume um papel análogo em $\mathbb{L}$ ao do número i em $\mathbb{C}$.

4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma outra construção dos números complexos através conjunto $\mathbb{L}$ de matrizes obtido das transformações geométricas do plano especificamente da composição Homotetia rotação. Mostramos que esse conjunto tem uma estrutura de corpo pois, é fechado para as operações soma e composição das transformações lineares e sobre a discussão da inclusão de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{L}$ utilizamos os conceitos de subcorpo e isomorfismo e com isso podemos mostrar ao aluno que aquela unidade imaginária i adquire um papel concreto dentro desse conjunto, possibilitando o interessante resultado de identificar as unidades real e imaginária. Desta maneira acreditamos que podemos contribuir para uma novo olhar e uma outra possibilidade de nossos professores de abordar os números complexos no ensino médio para nossos alunos. E além disso, o professor pode retomar o conteúdo sobre transformações geométricas no plano, trigonometria e dar um sentido melhor para o estudo matrizes e desta maneira poderemos, também, contribuir para projetarmos um aluno com menos deficiência na parte de exatas nas universidades .

BIBLIOGRAFIA

[1] José Luiz Boldrini, Sueli IR Costa, VL Figueredo e Henry G Wetzler, *Álgebra linear*, Harper & Row, 1980.

[2] Carl B BOYER, *História da Matemática. 2ª edição,* Editora Edgard Blucher Ltda, Brasil (1996).

[3] Thelmo De Araujo, *Álgebra linear: Teoria e Aplicação*, SBM, 2017.

[4] Juliano Eli, *Números Complexos e suas Aplicações, UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU-FURB CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS (CCEN) PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA (PPGE-CIM)*.

[5] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, *Matemática*, Atual, 2002.

[6] Ulício Pinto Júnior, *A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS:"das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand"*, (2009).

[7] Elon Lages Lima, *Álgebra linear*, nº 512.5 512.5 LIMal7, 2006.

[8] César Polcino Milies, *Revista do Professor de Matemática 24*, SBM, 1993.

[9] Jaime Bruck Ripoll, Cydara Cavedon Ripoll e José Francisco Porto da SILVEIRA, *Números racionais, reais e complexos*, Porto Alegre: Editora da UFRGS (2006).