



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

Gedilson Pacheco Pereira

Uma Abordagem reflexiva sobre o Ensino da Análise  
Combinatória na Educação Básica

São Luis-MA  
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

Gedilson Pacheco Pereira

Uma Abordagem reflexiva sobre o Ensino da Análise  
Combinatória na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Curso mestrado  
profissional em matemática - PROFMAT,  
da Universidade Estadual do Maranhão  
(UEMA) como requisito parcial para  
obtenção do grau de mestre.

**Orientadora:** Dr<sup>a</sup> Lélia de Oliveira  
Cruz

São Luis-MA  
2019

Pereira, Gedilson Pacheco.

Uma abordagem reflexiva sobre o ensino da Análise Combinatória na educação básica / Gedilson Pacheco Pereira. – São Luís, 2019.

71 f

Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Lélia de Oliveira Cruz.

1.Análise combinatória. 2.Ensino Aprendizagem. 3.Educação básica.  
I.Título

CDU: 519.1:37

Gedilson Pacheco Pereira  
Uma Abordagem reflexiva sobre o Ensino da Análise  
Combinatória na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Curso mestrado  
profissional em matemática - PROFMAT,  
da Universidade Estadual do Maranhão  
(UEMA) como requisito parcial para  
obtenção do grau de mestre.

Orientadora: Dr<sup>a</sup> Lélia de Oliveira  
Cruz

Aprovado em: 16 de outubro de 2019

BANCA EXAMINADORA



---

Prof<sup>a</sup>.Dr<sup>a</sup>. Lélia de Oliveira Cruz  
(Universidade Estadual do Maranhão-UEMA)



---

Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão  
(Universidade Estadual do Maranhão-UEMA)



---

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Leda Ferreira Cabral  
(Instituto Federal do Ceará - CEDRO)

São Luis, MA  
2019

# DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho a minha amada esposa  
que com suas sábias palavras sempre me  
incentivou e me confortou nos momentos difíceis  
e desafiadores. Te amo, meu amor.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a **DEUS**, meu Senhor, a minha fortaleza, aquele que permitiu que eu entrasse e concluísse este curso. Obrigado meu Pai, tu és fiel!

À minha amada esposa **ADILANE LINHARES** pelo incondicional apoio e incentivo, por sempre trazer uma palavra de ânimo nos momentos difíceis que enfrentei.

Aos meus pais, **RAIMUNDO MARTINS** e **MARIA HOLEGÁRIA** por sempre acreditarem e investirem na minha vida.

Aos meus irmãos **GENILTON E GENILSON** que sempre depositaram muita confiança em mim.

À minha pastora e discipuladora **Pra. MEIRILENE GOMES** pelas orações conselhos e cuidado para com a minha vida.

Aos meus amigos , líderes e discípulos da supervisão **VALENTES**.

Aos colegas da turma que ao longo do tempo se tornaram amigos verdadeiros.

Agradeço a todos os meus professores e professoras do mestrado **PROFMAT/UEMA** pois todos contribuíram significativamente na minha formação profissional.

Obrigado de uma forma muito especial, ao professor coordenador **JOÃO COELHO** , que sempre esteve conosco em todos os momentos do curso, nos incentivando, cobrando e acreditando em cada aluno.

Agradeço imensamente à minha orientadora **Profa. Dra. LÉLIA DE OLIVEIRA CRUZ** por ter aceitado me orientar e me conduzir na realização deste trabalho. Obrigado pela paciência, sugestões, incentivo e por nunca deixar que eu me abatesse.

## RESUMO

A grande dificuldade apresentada pelos protagonistas do sistema educacional vigente, ou seja, professores e alunos, quanto ao ensino e aprendizagem da Análise Combinatória, foi o que nos motivou para a realização deste estudo; que tem dentre outros objetivos fazer uma reflexão pedagógica quanto ao ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Elaboramos algumas propostas nas quais consideramos essenciais para o bom desenvolvimento deste conteúdo na educação básica. Levando em consideração a grande importância que a Análise Combinatória tem para o raciocínio lógico e cognitivo do aluno, apresentamos neste trabalho um pouco da sua história, fortalecendo ainda mais a sua grande importância para os dias atuais. Fizemos uma abordagem reflexiva sobre como o conteúdo de Análise Combinatória tem sido abordado nos ensino fundamental e Médio, no qual defendemos neste trabalho o não uso meramente de fórmulas matemáticas que na maioria das vezes são adotadas de forma mecânica, sem nenhuma ligação com a realidade do aluno, sem valorizar a capacidade de criação e produção. Apresentamos algumas atividades, e a partir delas percebemos a importância do trabalho em grupos, as interações múltiplas, as diferentes percepções que os alunos têm na hora de resolverem um problema, os conflitos que surgem, o alto nível de concentração estabelecido pela atividade proposta, a importância do lúdico na educação, a teoria do erro. O trabalho também reflete sobre a abordagem do conteúdo que é feita pelos livros didáticos, sua contextualização, como o conteúdo de Análise é trabalhado nos cursos de licenciatura em matemática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Análise Combinatória, Educação Básica, Ensino e Aprendizagem

## ABSTRACT

The great difficulty presented by the protagonists of the current educational system, or teachers and students, as to the teaching and learning of the Combinatorial Analysis, was the which motivated us to carry out this study; which has among other objectives to make a pedagogical reflection on the teaching and learning of Combinatorial Analysis. We elaborate proposals which we consider essential for the proper of this content in basic education. Taking into account the great importance of the Combinatorial Analysis has for the student's logical and cognitive reasoning, we present in this work a little of its history, further strengthening its great importance to the present day. We took a reflexive approach on how the content of Combinatorial Analysis has been addressed in elementary and middle schools, in which we in this work I do not use merely mathematical formulas that in the majority of the times they are adopted mechanically, without any connection with the reality of the student, without appreciating the capacity of creation and production. We present some activities, and from them we perceive the importance of working in groups, the multiple interactions, the different perceptions that the students have when solving a problem, the conflicts the high level of concentration established by the proposed activity, the importance of the playful in education, the theory of error. The paper also reflects on the approach to content that is made by textbooks, their contextualization, as the Analysis content is worked on in undergraduate mathematics courses.

**KEYWORDS:** Combinatorial Analysis, Basic Education, Teaching and Learning

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
1.1	Objetivo e Problemática . . . . .	10
1.2	Metodologia . . . . .	13
<b>2</b>	<b>UM POUCO DE HISTÓRIA</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>RESUMO TEÓRICO</b>	<b>16</b>
3.1	Princípio Fundamental da Contagem . . . . .	16
3.1.1	O Princípio Fundamental da Contagem - (PARTE A) . . . . .	17
3.1.2	O Princípio Fundamental da Contagem - (PARTE B) . . . . .	18
3.2	Arranjos . . . . .	18
3.3	Permutações . . . . .	19
3.4	Combinações . . . . .	20
3.5	O princípio de Dirichlet . . . . .	22
<b>4</b>	<b>A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL</b>	<b>23</b>
4.1	Proposta para o Ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental. . . . .	25
4.1.1	A introdução da Atividade que será desenvolvida . . . . .	25
4.1.2	Garantir aos Alunos o direito de ERRAR . . . . .	26
4.1.3	Uma boa escolha das questões a serem trabalhadas . . . . .	26
4.2	Atividades Desenvolvidas . . . . .	26
4.2.1	Materiais utilizados nas Atividades: . . . . .	28
4.2.2	A importância do trabalho em Grupos . . . . .	33
4.2.3	Interações Múltiplas . . . . .	34
4.2.4	Percepções diferentes para resolução de um mesmo problema	35
4.2.5	Conflitos Múltiplos . . . . .	37
4.2.6	Alto Nível de Concentração . . . . .	37
4.2.7	A Importância do Lúdico . . . . .	38
4.2.8	A TEORIA OU EDUCAÇÃO BASEADA NO ERRO . . . . .	41

4.2.9	O erro na Educação Matemática . . . . .	48
5 ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA REFLEXÃO PARA O ENSINO MÉDIO		50
5.1	O livro didático . . . . .	51
5.1.1	A Contextualização nos livros didáticos. . . . .	52
5.2	A Formação do Professor de Matemática nas Universidades . . . . .	55
5.2.1	A Matemática Acadêmica <i>versus</i> a Matemática para a Edu- cação Básica. . . . .	59
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
	Referências	66
	Apêndice A	70
	Apêndice B	71

# 1 INTRODUÇÃO

Como alunos e professores, às vezes definimos a Análise Combinatória de forma incompleta, e muitas das vezes não sabemos defini-la. Afinal, como podemos defini-la? De que mesmo ela trata? Quando afirmamos que muitos de nós a definimos de forma incompleta, estamos nos referindo a respostas como: É o seguimento da matemática que estuda os arranjos, as combinações e as permutações. A resposta é incompleta, pois, embora as técnicas apresentadas acima, façam parte da Análise, os mesmos são definições que resolvem um problema específico de Combinatória: elas fazem o trabalho de contar subconjuntos de um conjunto finito, sem que não seja necessário enumerar, organizar seus elementos. Ressaltamos, que a Análise além de trabalhar com as técnicas já citadas, ela amplia sua aplicabilidade, e pode ser usada na resolução de outros problemas como: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas muito poderosas da Análise. Então, como podemos definir Análise Combinatória?

De um modo geral, a Combinatória analisa estrutura e relações discretas. Levando em consideração dois tipos principais de problemas: Um, é a demonstração a partir de uma condição dada, a existência de subconjuntos de um conjunto finito. O outro é fazer a contagem e a classificação também de subconjuntos de um conjunto, levando em conta as condições estabelecidas.

Embora exista dentro do conteúdo, técnicas que possibilitem resolver certos tipos de problemas, é verdade que a resolução dos mesmos exige compreensão da situação descrita, organização, criatividade, liberdade para expressar sua técnica para resolver o problema. Então, por que reduzir o conteúdo a mera manipulação de fórmulas estabelecidas?

## 1.1 Objetivo e Problemática

Este trabalho de pesquisa tem como objetivo principal, fazer uma reflexão sobre a abordagem da Análise Combinatória na Educação Básica. Essa reflexão permitirá

fazermos uma melhor avaliação sobre o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo, e ao mesmo tempo buscará alternativas que facilitem tanto a prática pedagógica do professor, quanto o aprendizado do aluno.

Objetivamos também de forma específica, a reflexão sobre o desenvolvimento deste conteúdo dos ensino fundamental e médio, apontar algumas soluções nas quais consideramos importantes de dentro do processo de ensino e aprendizagem, fortalecer a ideia de que a resolução de problemas de análise combinatória nem sempre são resolvidos utilizando fórmulas padronizadas.

Durante o período onde tivemos contato com as disciplinas obrigatórias do Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), que tem o objetivo de capacitar professores atuantes no ensino fundamental e médio, permitindo que os mesmos possam desenvolver de forma qualificada os conteúdos essenciais para o bom desenvolvimento do aluno. Dos conteúdos estudados, o de análise combinatória trouxe algumas reflexões. Reflexões estas que foram frutos do aprofundamento que tive depois de cursá-la. O interesse pelo conteúdo sempre foi muito grande na minha vida . Esse interesse é explicado pela grande dificuldade que há em ensiná-lo, principalmente no ensino médio, por isso, este trabalho tem como proposta ressaltar a importância do ensino e aprendizagem da Análise Combinatória no ensinos fundamental e médio.

As dificuldades quanto ao ensino da Análise Combinatória são expostas de forma espontânea nas conversas entre professores, na forma que os alunos resolvem problemas nas avaliações aplicadas em sala de aula, nos exames estaduais e nacionais, tais como OBMEP, ENEM e atualmente no estado do Maranhão com o programa + IDEB. Fazendo algumas observações das questões que são abordadas, percebi que elas são simples, elementares, mas que pela carência de uma abordagem mesmo que elementar, a maioria dos alunos não consegue resolvê-las.

Durante a minha vida escolar, incluindo o ensino médio e graduação, sempre tive muitas dificuldades em resolver exercícios que envolviam análise combinatória. Não compreendia e nem sabia diferenciar, organizar e enumerar os subconjuntos que satisfizesse as condições estabelecidas, pois no ensino médio, o conteúdo era ensinado apenas na apresentação de fórmulas sem nenhuma análise crítica e lógica. Já na graduação não

tive a oportunidade de entender e muito menos de tirar as minhas dúvidas de forma aprofundada, pois o ensino do conteúdo fazia parte apenas de uma disciplina chamada tópicos de matemática do ensino fundamental e médio, sendo assim lecionada de forma corrida e mecânica.

Quando comecei a lecionar, percebi que como professor, apenas reproduzia a forma como havia sido ensinado, causando nos alunos o mesmo ciclo vicioso que existe há muito tempo.

O propósito deste trabalho, é também ressaltar a importância do ensino da Análise Combinatória no ensino fundamental e médio de acordo com as orientações da Proposta Curricular Nacional para escolas de educação básica, de forma que leve os alunos a obter uma maior facilidade na compreensão de conceitos e aplicação de técnicas de forma simples e contextualizadas, dando significados aos conceitos a serem assimilados e sem a obrigatoriedade da memorização de fórmulas. O que harmoniza com a ideia dos Parâmetros Curriculares Nacionais, quando destaca a importância que o aluno precisa ter para manipular e fazer análise em larga escala de dados e amostras com o uso da Análise Combinatória. (BRASIL,1998, P.257)

Boa parte dos problemas de Análise Combinatória extrai dos alunos raciocínio lógico e criatividade em suas resoluções, portanto se o aluno tivesse o contato com esse conteúdo nas primeiras séries da educação básica, com certeza ele chegaria nas séries futuras com o desenvolvimento cognitivo bem mais amadurecido para certos problemas. Outra importante afirmação, é que quando os alunos conseguem contextualizar os problemas com a sua realidade, fazendo com que ele interaja com a situação que está sendo trabalhada, proporcionando-lhes maior capacidade de interpretar suas próprias conclusões, definir seus próprios conceitos, tornando assim um aprendizado satisfatório.

Segundo BATANERO e outros ( 1997) já afirmavam que o fato dos alunos não conseguirem identificar o tipo de operação a ser utilizada na resolução de problemas é grande dificuldade enfrentada pelos mesmos. Outro fator não menos preocupante ainda segundo BATANERO e outros, é a confusão causada quanto a ordem na formação dos agrupamentos, pois os alunos apresentam pouco conhecimento de sequências e subconjuntos. Por isso, insistimos no estímulo do ensino da Análise Combinatória nas séries iniciais da

educação básica, o que leva os alunos a terem um rendimento muito maior nas séries posteriores e no ensino médio.

## 1.2 Metodologia

A pesquisa faz primeiramente uma abordagem histórica da Análise combinatória, seu surgimento, sua importância, e também como a mesma é apresentada como assunto trabalhado em sala de aula. Além da fundamentação teórica, como alguns conceitos básicos, faremos uma abordagem reflexiva sobre o ensino deste conteúdo.

Visando a coleta de informações e experiências que nortearão e fortalecerão a nossa pesquisa, desenvolvemos algumas atividades que consistem na resolução de problemas sem o uso de fórmulas, que nos levou a importantes observações, dentre elas, a importância dos trabalhos em grupos, as interações múltiplas, as diferentes percepções dos alunos para resolverem o mesmo problema, os conflitos múltiplos, o alto nível de concentração, a importância do lúdico, a teoria ou pedagogia do erro. Com as observações feitas, sugerimos uma proposta para o ensino da Análise Combinatória na ensino fundamental.

As atividades desenvolvidas e observadas, foram realizadas com 54 alunos do 7º ano, com a faixa etária de 12 a 14 anos, da Unidade de Educação Básica Tancredo Neves.

Para nossa reflexão específica para o ensino da Análise Combinatória no ensino médio, também apontamos alguns fatores que contribuem de forma negativa no processo de ensino e aprendizagem. Fatores como o livro didático, a contextualização dos livros didáticos, a formação do professor de matemática nas universidades, a matemática acadêmica versus a matemática para a Educação Básica.

Para maior sustentação e reflexão sobre as lacunas apresentadas pelos professores quanto ao ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio, fizemos uma pesquisa sobre a formação do professor na Universidade para o ensino do conteúdo. Na pesquisa foram entrevistados 19 professores atuantes nas redes públicas e privadas de ensino. Com os resultados fizemos algumas inferências e reflexões que nos permitiram constatar uma discrepância entre o ensino acadêmico e o da Educação Básica.

## 2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Neste segundo capítulo, iremos abordar um pouco da história da Análise Combinatória, mostrando o desenvolvimento da mesma ao longo dos séculos.

Desde tempos bem antigos, o homem sempre buscou soluções para determinadas situações dentro da matemática, uma delas foi o desenvolvimento de binômios da forma  $(1+x)^n$ . Em meados de 300 a.C já existiam nos estudos de Euclides solução para  $n = 2$ . Em torno de 1300 o nosso conhecido triângulo de Pascal, era conhecido como Chu Shih-Chieh, na China. Um pouco adiante (1114 – 1185) o matemático hindu Báskhara, já sabia calcular o número de arranjos, combinações e permutações de  $n$  elementos. Os trabalhos desenvolvidos na tentativa de solucionar problemas de binômios continuaram evoluindo, em aproximadamente ( 1288 – 1344) o matemático e filósofo francês Levi bem Gerson, dedicou-se a demonstrar o 5º postulado de Euclides. Em torno de 1500, o matemático Michel Stifel, mostrou como calcular  $(1+x)^n$  utilizando o desenvolvimento de  $(1+x)^{n-1}$ .

O triângulo de Pascal teve seu surgimento no ocidente num título de um livro de Petrus Apianus por volta de 1495 a 1552. Logo depois, Nicolo Fontana Tartaglia (1499 – 1559) descobriu a relação que existe entre os elementos do triângulo de Pascal com as potências do desenvolvimento de  $(x+y)^n$ . Que só foi publicado mais tarde por Pascal ( 1623 – 1662 ) em um tratado que mostrava como utilizar essa relação para encontrar os coeficientes do desenvolvimento de  $(a+b)^n$ . Posteriormente, o matemático Jaime Bernoulli, em meados de 1654 a 1705, usou os estudos e conclusões de Pascal para demonstrar que  $(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-1} y^i$ .

O tempo se passava e a busca para se chegar à resolução do binômio da forma  $(1+x)^n$  continuava sendo feito por meio do cálculo de  $(1+x)^{n-1}$ . Foi aí que Isaac Newton ( 1646 – 1727) mostrou como calcular diretamente  $(1+x)^n$ .

No último século, a Análise Combinatória tem tido um crescimento que merece destaque no ramo da matemática. Com a grande necessidade na resolução de problemas de enumeração, tais como teoria dos grafos, e análise de algoritmos ( problemas de pesquisa operacional, armazenamento de informações em bancos de dados nos computadores,

também larga aplicação em problemas de matemática pura).

Em 1937 uma importante técnica de enumeração foi introduzida pelo matemático húngaro-americano George Pólya, que nos dias atuais tem uma vasta aplicação e aceitação, a técnica permite a enumeração do número de isômeros de uma substância, até a enumeração de grafos, principalmente árvores. Uma importante aplicação da teoria de Pólya é a determinação do número de tetraedros regulares diferentes que apresentam faces pintadas com duas cores diferentes.

Outra notável contribuição no desenvolvimento da Combinatória, foi a teoria criada pelo lógico inglês F. P. Ramsey (1903~1930); essa teoria garante a existência de certas configurações. Vejamos um dos exemplos da teoria de Ramsey: Se tivermos num plano  $n$  pontos, sendo que  $n \geq 6$ , no qual não existam três destes pontos colineares, então a reunião destes pontos tomados dois a dois, usando duas cores diferentes, por exemplo azul e verde, para traçar os segmentos de reta que unem os pontos, então teremos formados assim um triângulo que terão os lados de mesma cor. ( azul ou verde).

O breve comentário que traz um pouco da história da Análise Combinatória, e vem reforçar a importância que a mesma teve para a sociedade passada, e como ela se manifesta nos dias atuais. Atualmente a Análise serve de estrutura base para vários seguimentos da matemática, tais como: probabilidades, teoria dos números, topologia, etc. Portanto, este trabalho é de fundamental importância para uma reflexão de como a Análise Combinatória vem sendo lecionada dentro das escolas de educação básica e como deve ser trabalhado o desenvolvimento do conteúdo.

No capítulo a seguir veremos de forma resumida algumas importantes técnicas de contagens, que por sua vez serão apresentadas fórmulas bastante usadas na resolução de problemas. O presente trabalho não está defendendo a exclusão das fórmulas, pois compreendo que elas são recursos poderosos na para a solução de problemas que apresentam um conjunto grande de elementos, por isso, ressaltamos neste capítulo a sua importância.

### 3 RESUMO TEÓRICO

A princípio pode parecer desnecessária a existência destes métodos. Isto de fato é verdade, quando o conjunto analisado é pequeno, podendo assim ser contado. Entretanto, se estivermos trabalhando com um conjunto no qual apresenta uma quantidade muito grande de elementos, impossível de ser contado, precisaremos recorrer a algumas técnicas especiais que nos auxiliarão. Mostraremos a seguir algumas técnicas importantes quando trabalhamos com um conjunto grande de elementos.

#### 3.1 Princípio Fundamental da Contagem

Esse princípio é composto de duas partes brevemente diferentes. Antes da demonstração, veremos dois importantes teoremas auxiliares. (lemas).

##### Lema 1

Sejam  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_w\}$ . O número de pares ordenados que podemos formar será  $k \cdot w$  pares ordenados  $\{a_i, b_j\}$  onde  $a_i \in A$  e  $b_j \in B$ .

*Demonstração:* Deixando fixo o primeiro elemento do par e variando segundo.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_w) \rightarrow k \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_w) \rightarrow k \text{ pares} \\ \dots \\ (a_k, b_1), (a_k, b_2), \dots, (a_k, b_w) \rightarrow k \text{ pares} \end{array} \right.$$

O número total de pares ordenados é  $\underbrace{w + w + w + w + \dots + w}_{k \text{ vezes}}$

## Lema 2

O número de pares ordenados  $(a_i, a_j)$  tais que  $a_i \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ,  $a_j \in A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  e  $a_i \neq a_j$  é  $k \cdot (k-1)$

**Demonstração:** Deixando fixo o primeiro elemento do par e variando o segundo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2), (a_1, a_3), \dots, (a_1, a_k) \rightarrow (k-1) \text{ pares} \\ (a_2, a_1), (a_2, a_3), \dots, (a_2, a_k) \rightarrow (k-1) \text{ pares} \\ \dots \\ (a_k, a_1), (a_k, a_2), \dots, (a_k, a_{k-1}) \rightarrow (k-1) \text{ pares} \end{array} \right.$$

O número total de pares ordenados:

$$\underbrace{(k-1) + (k-1) + (k-1) \dots + (k-1)}_{k \text{ vezes}}$$

### 3.1.1 O Princípio Fundamental da Contagem - (PARTE A)

Consideremos  $r$  conjuntos:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n_1}\}$ ,  $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_{n_r}\}$ . Então, o número de seqüências de  $r$  elementos do tipo  $(a_i, b_j, \dots, z_p)$ , onde  $a_i \in A$ ,  $b_j \in B, \dots, z_p \in Z$  é  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots n_r$ .

**Demonstração-** ( Usando o princípio de Indução matemática)

Se  $r = 2$  é imediato, pois caímos no lema 1 já citado.

Suponhamos que fórmula seja válida para o inteiro  $r$  elementos  $(a_i, b_j, \dots, w_k)$ , mostraremos que também é válida para  $(r + 1)$  elementos. Por hipótese de indução,

existem  $n_1.n_2.n_3...n_r$  seqüências e  $n_{(r+1)}$  elementos pertencentes ao conjunto  $Z$ .

Cada seqüência  $a_i, b_j, \dots, w_k, z_p$  é resultado de uma outra seqüência  $a_i, b_j, \dots, w_k$  e um elemento  $z_p \in Z$ .

Portanto, pelo lema 1, a quantidade de seqüências do tipo  $a_i, b_j, \dots, w_k, z_p$  é  $(n_1.n_2.n_3...n_r).n_{(r+1)} = n_1.n_2.n_3...n_r.n_{(r+1)}$ .

Segue então que o teorema é válido  $\forall r \in \mathbb{N}$  e  $r \geq 2$

### 3.1.2 O Princípio Fundamental da Contagem - (PARTE B)

Vejamos o conjunto  $A$  de  $m$  elementos, sendo  $m \geq 2$ . Teremos que o número de seqüências com  $r$  elementos organizados com os elementos diferentes tomados dois a dois do conjunto  $A$  é:

$$\underbrace{m.(m-1).(m-2) \dots [(m - (r - 1))]}_{r \text{ fatores}}$$

$r$  fatores

ou seja, se  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  a quantidade de seqüências do tipo  $(a_i, a_l, a_j, \dots, a_k)$

$$\text{com } \begin{cases} a_i \in A \forall i \in 1, 2, 3, \dots, m \\ a_i \neq p \text{ para } i \neq p \end{cases}$$

é

$$\underbrace{m.(m-1).(m-2) \dots [(m - (r - 1))]}_{r \text{ fatores}}$$

$r$  fatores

## 3.2 Arranjos

Seja um conjunto  $P$  com  $m$  elementos, ou seja,  $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Chamamos arranjos dos  $m$  elementos todos  $j$  a  $j$  ( $1 \leq a \leq m$ ) a toda seqüência de  $j$  elementos formada

com elementos de  $P$  todos distintos.

### Fórmula do Número de Arranjos

Seja  $P = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e indiquemos por  $A_{m,j}$  a quantidade de arranjos que podemos formar com os elementos do conjunto  $P$  organizados  $j$  a  $j$ .

Cada conjunto é uma sequência de elementos, nos quais são todos diferentes entre si e pertencem ao conjunto .

Pelo Princípio Fundamental da Contagem  $\{parteB\}$  o número de arranjos  $A_{m,j}$  será:

$$A_{m,r} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots [(m - (r - 1))]}_{r \text{ fatores}}$$

Em particular, se  $j = 1$ , é fácil perceber que  $A_{m,1} = m$

Notemos ainda que de acordo com a definição que demos de arranjo, temos necessariamente que  $1 \leq j \leq m$ .

### 3.3 Permutações

Consideremos o conjunto  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Chamamos de *Permutação* de todos os  $m$  elementos do conjunto  $M$  ao arranjo em que  $m = j$ .

#### Fórmula do Número de Permutações

Seja  $M$  o conjunto  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e indiquemos por  $P_m$  todas as permutações dos  $m$  elementos de  $M$ .

*Temos:*

$$P_m = A_{m,m}, \text{ logo:}$$

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdots [m - (m - r)]$$

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em particular se  $m=1$  é fácil perceber que  $P_1 = 1$

### 3.4 Combinações

Seja  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  e indiquemos por  $C_{m,r}$  o número de combinações dos  $m$  elementos tomados  $r$  a  $r$ .

Tomemos uma combinação, digamos esta:

$E_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ . Se permutarmos os elementos de  $E_1$ , obteremos outros  $r!$  arranjos.

Se tomarmos outra combinação,  $E_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}\}$ , permutando os elementos de  $E_2$ , obteremos outros  $r!$  arranjos.

Chamamos de  $x$  o número de combinações, isto é,  $x = C_{m,r}$ , e suponhamos formadas todas as combinações dos  $m$  elementos tomados  $r$  a  $r$ . São elas:  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_x$ .

Cada Combinação de  $E_i$  dá origem a  $r!$  arranjos. Chamamos de  $F_i$  o conjunto dos arranjos gerados pelos elementos de  $E_i$ .

Temos então a seguinte correspondência:

$$E_1 \rightarrow F_1$$

$$E_2 \rightarrow F_2$$

$$E_3 \rightarrow F_3$$

.....

$$E_x \rightarrow F_x$$

Verifique que:

$$i) F_i \cap F_j = \emptyset$$

$$ii) F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x = F \text{ onde } F \text{ é de o número de arranjos dos } m \text{ elementos}$$

$M$  tomados  $r$  a  $r$ .

Temos:

- Se  $F_i \cap F_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ , então existiria um arranjo que pertenceria a  $F_i$  e  $F_j$  simultaneamente.

Tomando os elementos desse arranjo obteríamos que coincidiria com  $E_i$  e  $E_j$  e portanto  $E_i = E_j$ . Isto é absurdo, pois quando construímos todas as combinações,  $E_i \neq E_j$ , para  $i \neq j$ .

Logo  $F_i \cap F_j = \emptyset$

- Para provarmos que  $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x = F$ , provemos que:

$$\begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x \subset F \\ F \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x \end{cases}$$

a) Seja  $a$  um arranjo tal que  $a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x$ , então  $a \in F_i$ , para  $i \neq j$  para algum  $i \in \{1, 2, 3, \dots, x\}$  e evidentemente  $a \in F$ , logo:  $F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x \subset F$

b) Tomemos agora a um arranjo tal que  $a \in F$ . Se tomarmos os elementos desse arranjo a obteremos uma das combinações, digamos  $E_i$ . Contudo,  $E_i$  gera o conjunto dos arranjos  $F_i$ , então  $a \in F_i$  e, portanto,  $a \in F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x$

Então:

$$F \subset F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x$$

De (a) e (b) resulta que:

$$F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x = F$$

Sabemos também que se  $X$  conjuntos são distintos dois a dois, o número de elementos de união deles é a soma do número de elementos de cada um.

Isto é:

$$\#(F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \dots \cup F_x) \Rightarrow \#F_1 + \#F_2 + \dots + \#F_x = \#F$$

$$r! + r! + r! + \dots + r! = \frac{m!}{(m-r)!} \Rightarrow X \cdot r! = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Logo:

$$X = \frac{m!}{r! \cdot (m-r)!}$$

Como  $X$  indica  $C_{m,r}$ , temos a fórmula do número de Combinações:

$$C_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Ressaltamos também que a Análise Combinatória não está restrita apenas com

a contagem de elementos de conjuntos. Existem muitos casos que o que se deseja é determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades. Gostaria de apresentar sem muita profundidade uma ferramenta simples, porém muito importante para resolver alguns desses problemas, é o chamado Princípio das gavetas de **Dirichlet**.

### 3.5 O princípio de Dirichlet

Se  $n$  objetos forem colocados em no máximo,  $(n - 1)$  gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

**Prova:** ( por absurdo) se cada uma das gavetas contiver, no máximo, um objeto, o número total de objetos nelas colocados será, no máximo,  $(n - 1)$ , o que é contradição.

**Exemplo:** *Dado um conjunto de 13 pessoas, pelo menos duas delas aniversariam no mesmo mês.*

No próximo capítulo, daremos início a uma abordagem muito mais pedagógica, pois falaremos do ensino da Análise Combinatória dentro da Educação Básica, e também, de como a mesma pode ser lecionada de forma relevante dentro do Ensino Fundamental, levando-nos a quebra de tabus e paradigmas, da não obrigatoriedade de fórmulas e exercícios estabelecidos sem nenhuma intenção didática.

## 4 A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional explicita que o ensino fundamental tem por finalidade desenvolver a formação básica do cidadão e de um modo mais diretivo objetiva o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como fundamentos básicos, o domínio integral da leitura, da escrita e do cálculo. (BRASIL,1996). Tendo como base a finalidade descrita, e da grande importância do ensino da Análise Combinatória, fica evidente que precisamos de forma intencional levar este conteúdo para dentro das salas de aula do Ensino Fundamental.

As habilidades para manipular e fazer análise em um grande número de dados, assim como realizar inferência a partir de uma amostra de uma população, utilizar o conhecimento da Análise Combinatória e a ideia de probabilidade e fenômenos naturais e do dia-dia, são aplicações da matemática em questões do mundo atual que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram muito complexos. Tais conhecimentos como técnicas de contagem, raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos essenciais tanto das ciências da Natureza quanto das ciências Humanas. (BRASIL, 1998,p.257)

Quando pensamos sobre o ensino da Análise Combinatória, os professores têm uma tendência muito grande em canalizarem o conteúdo para o uso de fórmulas que muitas das vezes não levam os alunos a construir seus próprios conceitos e formulações. Propomos que o ensino desse conteúdo (Análise Combinatória) no Ensino Fundamental dispense o uso de sistematização pré-elaboradas (fórmulas). Reforçamos principalmente a independência dos alunos na forma de organizar suas ideias para resolverem as diversas situações –problema sobre o conteúdo.

Em muitas das suas pesquisas ( BATENERO, 1997; ESTEVES, 2001; ROA E NAVARRO, 2001) ressaltam que o avanço do ensino da Análise Combinatória especificamente no ensino fundamental, precisa levar o alunato a usufruir das construções de diversos agrupamentos, sem que ele recorra a sistematização do estudo. A grande vantagem nesta abordagem é que em ensino posteriores , o aluno terá maior e melhor compreensão dos problemas propostos, em contrapartida os alunos que apresentarão maior dificuldade

serão aqueles que não tiveram o ensino deste conteúdo no Ensino Fundamental. Outro ponto muito importante quando ensinamos Análise Combinatória no Ensino Fundamental, é proporcionar discussões onde os alunos possam expressar suas ideias, apresentarem propostas, ter liberdade para errarem e aprenderem com seus próprios erros, discordarem da ideia do colega e até do próprio professor se preciso.

Segundo BATANERO (1997) a grande parte dos alunos ao se depararem com problemas de Análise Combinatória, apresentam dificuldades sobre o tipo de elementos que se combinam, porém conseguem identificar, organizar, compreender a ordem e o enunciado do problema. Outro aspecto importantíssimo quanto ao ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental é a dinâmica de sala de aula. O incentivo das atividades em equipes proporciona para os alunos uma melhor assimilação do conteúdo. A troca de experiências, os questionamentos e discordâncias, as estratégias construídas coletivamente, tudo isso proporciona para o todo uma melhor compreensão dos problemas que envolvem Análise. Gostaríamos também de destacar o valor das atividades individuais, pois as mesmas levam o aluno a desenvolver habilidades individuais que trarão segurança e proporcionarão uma melhor avaliação dos professores.

Para ESTEVES (2001), a valorização da criatividade quanto aos diferentes tipos de representações de se resolver um problema, é muito importante, pois elas facilitam a visualização e a construção de ideias para se chegar a formalização. Segundo Vergnaud (1990), aquilo que o aluno constrói por meio de representações, nada mais é do que um reflexo daquilo que o cerca no cotidiano (realidade). Nesse sentido, ensinar Análise Combinatória no Ensino Fundamental, é aproximar os alunos da sua realidade, é trabalhar com materiais, situações-problema que os levem a compreensão do conteúdo, além de despertar neles um maior interesse.

Não é de hoje que sabemos que o a boa relação entre professor e aluno é fundamental para um melhor aprendizado. Portanto, esse fator serve para que o aluno não apenas memorize fórmulas, mas construa através de atividades lúdicas, prazerosos, atividades que tenham sentido para eles, e isso só será possível, quando os mesmos tiverem vínculos de confiança com o professor mediador. Este por sua vez tem o papel de facilitar, ajudar o aluno nos seus variados tipos de representações.

ROA E NAVARRO – PELAYO (2001) mais uma vez ressaltam que a Análise Combinatória é um grande terreno para ser trabalhado e explorado, ressalta as diversas aplicações em variadas áreas. Os mesmos autores também analisam os principais métodos e estratégias adotadas pelas crianças para resolver problemas. Algumas merecem atenção: *O desenvolvimento por tentativa; formulação de todas as combinações, a fixação de um elemento fazendo os demais variarem, podendo ser completo ou incompleto.*

#### **4.1 Proposta para o Ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental.**

Como já foi comentado neste trabalho, a proposta de ensinar Análise Combinatória no Ensino Fundamental, é que a mesma pode ser ensinada sem o uso de fórmulas, através de situações que possibilitem aos alunos o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico a partir de suas próprias construções. Apresentaremos a seguir uma proposta com alguns fatores nos quais julgamos importantes para um melhor ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Vejamos:

##### **4.1.1 A introdução da Atividade que será desenvolvida**

É muito importante pontuarmos que, o sucesso de qualquer atividade dentro da sala de aula depende da participação voluntária do aluno, é preciso que ele queira participar, por isso, é papel do professor explicitar de maneira clara a atividade que será desenvolvida, o papel do aluno no desenvolvimento da atividade, a liberdade que os alunos terão de exporem suas ideias, de expressarem suas construções de forma que os mesmos se sintam sujeitos ativos na resolução de problemas.

#### 4.1.2 Garantir aos Alunos o direito de ERRAR

Outro fator relevante é garantir para o aluno a possibilidade que tem de cometer erros, e a partir de seus próprios erros chegar ao acerto. Isto trará segurança para eles, pois não se sentirão pressionados e muito menos “coagidos” para realizarem um trabalho que “valerá sua nota”.

Fazendo um paralelo entre como os erros são encarados em países como o Japão, que é coletivistas, isto é, a valorização do coletivo, da figura daquele que é mais velho é muito ressaltada. Nesta ótica os erros são muito mais bem trabalhados e explorados. Eles são usados para manter a confiança dos alunos, as relações interpessoais e a harmonia entre professor e aluno. Isso permite a repetição consciente, que levará ao acerto desejado.

Continuando com o paralelo entre Brasil e Japão, este último enfatiza primariamente um estudo matemático pautado numericamente, eles trabalham diversas formas de trabalhar a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão. Apresentam métodos próprios, que tiram os alunos do campo da decoração algébrica (muito valorizado no Brasil), e o levam para a prática numérica.

#### 4.1.3 Uma boa escolha das questões a serem trabalhadas

Outro fator muito importante são as questões que estão sendo trabalhadas. Elas precisam ser atrativas, interessantes, que sejam capazes de fazer com que os alunos se sintam desafiados e devem objetivar o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Quanto ao contexto das questões, elas precisam se aproximar o mais perto possível do cotidiano do aluno, da sua realidade.

### 4.2 Atividades Desenvolvidas

Como nossa proposta para o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, seja sem o uso de fórmulas, foram aplicadas algumas atividades que têm como

objetivo a verificação do nível de criatividade, desenvoltura e conhecimentos prévios. As atividades foram desenvolvidas sem nenhuma abordagem formal do conteúdo, ou seja, os alunos nunca tiveram contato com a Análise Combinatória, o que torna mais consistente a nossa proposta quanto a relevância do conteúdo nas séries do Ensino Fundamental. As atividades foram realizadas em pequenos grupos com alunos de duas turmas do 7º ano. Ao todo, participaram das atividades 54 alunos nas faixa etária de 12 a 14 anos. No desenvolvimento das tarefas, tivemos a oportunidade de pontuarmos alguns comportamentos que para nós tem salutar relevância pedagógica.

Ressaltamos, que com o trabalho aplicado, tivemos diversas respostas, contudo o que nos motivou na escolha dos que serão expostos, foi pela linha de pensamento diferenciado, pois nas soluções da primeira questão, os alunos tiveram o raciocínio de fixarem uma cor e fazerem as trocas com as demais cores, o que para as técnicas de contagem, nada mais é do que uma permutação, porém para nós, é um enorme reforço de que o conhecimento que o aluno traz do seu dia-dia, torna-se uma ferramenta muito importante para resolver um problema.

#### 4.2.1 Materiais utilizados nas Atividades:

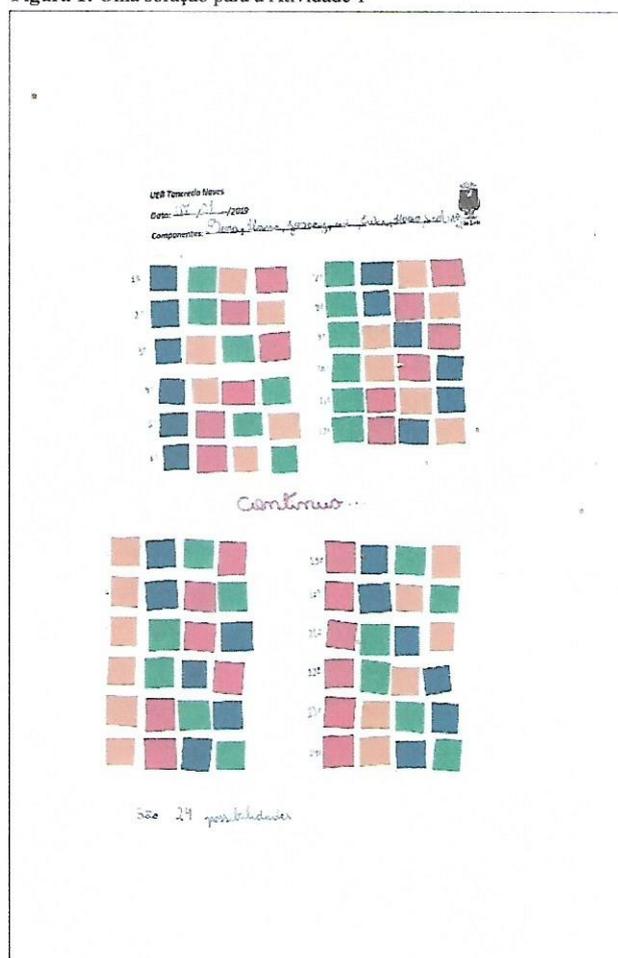
- *folhas de papel a4 brancas*
- *folhas de papel a4 coloridas*
- *cola*
- *tesouras*
- *lápiz de cor*
- *régua*
- *fita adesiva*

#### **Atividade 1:**

*Para a realização de um trabalho de artes, a professora disponibilizou 4 folhas com cores diferentes para cada equipe. Na explicação do trabalho, pediu que fosse feito um painel retangular de pequenos recortes das folhas coloridas, e que todas as filas horizontais do painel fossem compostas por estes recortes, sem que a mesma formação (fila) se repetisse. Quantas filas diferentes contém esse painel?*

# Solução 1

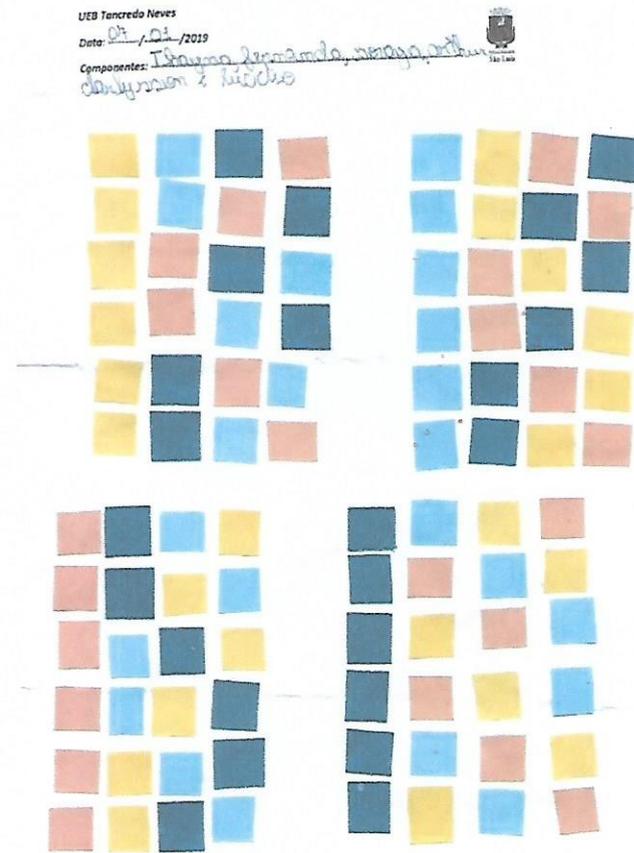
Figura 1: Uma solução para a Atividade 1



Fonte: Pereira (2019)

Solução 2:

Figura 2 : Uma solução para a atividade 1



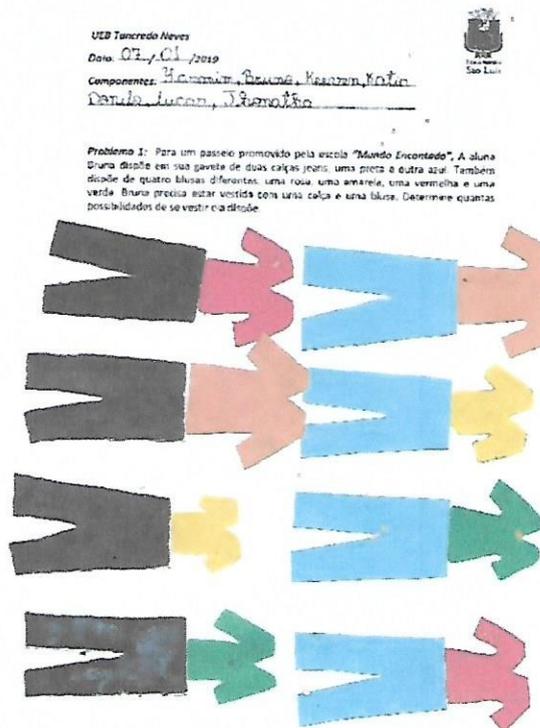
Fonte: Pereira (2019)

## Atividade 2:

Para um passeio promovido pela escola “*Mundo Encantado*”, A aluna Bruna dispõe em sua gaveta de duas calças jeans, uma preta e outra azul. Também dispõe de quatro blusas diferentes: uma rosa, uma amarela, uma vermelha e uma verde. Bruna precisa estar vestida com uma calça e uma blusa. Determine quantas possibilidades de se vestir ela dispõe.

## Solução 1

Figura 3: Uma solução para a Atividade 2



Fonte: Pereira (2019)

## Solução 2

Figura 4: Uma solução para a Atividade 2

UEB Tancredo Neves

Data: 02/11/2019

Componentes: Thiago Silva Carneiro e Lucas Silva

Problema 1: Para um passeio promovido pela escola "Mundo Encantado", a aluna Bruna dispõe em sua gaveta de duas calças jeans, uma preta e outra azul. Também dispõe de quatro blusas diferentes: uma rosa, uma amarela, uma vermelha e uma verde. Bruna precisa estar vestida com uma calça e uma blusa. Determine quantas possibilidades de se vestir ela dispõe.

Fonte: Pereira (2019)

Com a aplicação destas atividades, percebemos o quanto a percepção e a criatividade do aluno precisa ser aguçada, precisa ser desafiada. A grande vantagem de aplicarmos tarefas voltadas para esse propósito é que na condição de educadores, nós também aprendemos. Vejamos algumas observações importantes que foram feitas com a aplicação das atividades:

#### 4.2.2 A importância do trabalho em Grupos

No trabalho desenvolvido dentro da sala de aula por qualquer professor de matemática, não é difícil encontrar aqueles alunos que por excesso de timidez, demonstram insegurança e bloqueios na hora de exporem suas dúvidas, fazendo com esses mesmos alunos não desenvolvam suas intrínsecas potencialidades cognitivas. No decorrer das atividades, percebemos que alunos que sempre apresentaram um comportamento tímido e contido durante as aulas, se tornaram muito participativos nos grupos, opinaram, discutiram, se levantavam pra perguntar sobre o seu raciocínio, sorriram, aprenderam sem medo. O fator primordial da importância do trabalho em grupos, é que eles proporcionam uma elevação da autoestima do aluno, pois agora ele se sente importante interagindo com outros alunos, ajudando na descoberta de um objetivo (*no nosso caso, encontrar soluções para os problemas de Análise Combinatória*).

Epistemologicamente concebemos a Educação como um processo social, e isto nos leva a compreensão de que a interação dos alunos nos grupos, é indispensável no seu desenvolvimento. Vygotski (1997) chamou de Zona de Desenvolvimento proximal, isto é, aquilo que o aluno ainda não desenvolveu de forma própria ou não são manifestadas de forma consciente. Logo, compreendemos que é por intermédio de coletivo que o aluno desenvolverá suas ações cognitivas ainda não conscientes.

**Figura 5:** Alunos desenvolvendo atividades em grupo



**Fonte:** Pereira (2019)

### 4.2.3 Interações Múltiplas

As múltiplas interações no processo de ensino e aprendizagem, se dão na relação entre todas as partes protagonizadoras do processo, ou seja, estão envolvidos não somente os alunos, mas também os professores. A dialética em sala de aula acontece por meio de dois canais, por uma lado os alunos que de alguma forma precisam da aquisição do conhecimento, e por outro professor com o conhecimento a ser compartilhado.

Com as atividades propostas, observamos que a detenção do conhecimento não se dá apenas pelo professor, e também por parte dos alunos, que manifestam de forma peculiar diferentes características na hora de resolver problema.

A troca de experiências na resolução de problemas de Análise Combinatória foi observada pela interação verbal entre os alunos. Com as diversas manifestações de criatividade apresentadas nas atividades, concluímos que as interações múltiplas proporcionam um melhor desenvolvimento das potencialidades cognitivas e metacognitivas dos sujeitos envolvidos.

**Figura 6:** Alunos desenvolvendo atividades em grupo



Fonte: Pereira (2019)

#### 4.2.4 Percepções diferentes para resolução de um mesmo problema

Van de Walle (2001), define um problema como qualquer atividade ou tarefa para o qual os estudantes não têm nenhum métodos ou regras pré-estabelecidas, e muito menos uma única percepção para chegar a uma solução correta.

Tomando essa concepção como elemento basilar da nossa investigação pedagógica, com a aplicação das atividades, tivemos a experiência de observarmos as diferentes concepções metodológicas na hora de resolverem a mesma questão. Percebemos um *turbilhão* de ideias diferentes que convergiam para um mesmo objetivo: **de encontrar a resposta correta**. Como já citamos neste trabalho, os alunos participantes das atividades não tinham nenhum conhecimento prévio sobre Análise combinatória, não tinham fórmulas ou qualquer outra informação que lhes servisse de argumento para o desenvolvimento da tarefa, eles simplesmente puderam expressar suas diferentes percepções sobre o que problema que lhes fora apresentado.

As diferentes percepções na resolução de um mesmo problema aconteceram entre os componentes do mesmo grupo, entre grupos diferentes e houve casos que a convergência se deu entre um membro de um grupo e outro grupo, ou seja, as ideias deles não foram as mesmas do seu grupo, mas as de outro grupo. Portanto, reiteramos que a resolução de problemas de Análise Combinatória pode ser feita sem o uso técnicas, ou formalização "fechada."

Com o crescimento de novos modelos educacionais, em especial aquele que concebe a aprendizagem do ponto de vista construtivista, e diante das limitações dos problemas "fechados", surgem as propostas de "problema aberto" e de "solução-problema". Fazendo com que o aluno ao se deparar com essas propostas, realize tentativas, estabeleça hipótese, faça testes e valide seus resultados. (BRASIL,1997)

Tendo as diferentes percepções como uma característica peculiar de cada aluno, acreditamos ser positiva no âmbito de resolução de problemas, a liberdade concedida ao aluno, tendo em vista a plena expressão dos pensamentos sobre sua lógica de raciocínio.

**Figura 7:** Alunos desenvolvendo atividades em grupo



**Fonte:** Pereira (2019)

#### 4.2.5 Conflitos Múltiplos

No desenvolvimento de qualquer atividade em grupo, onde é exigida a lógica matemática e criatividade individual de cada aluno, afirmamos que é inevitável os conflitos e as divergências quanto à formulação, a organização e expressão das ideias. Tivemos por diversas vezes intervir nos conflitos que surgiram pela diferentes concepções manifestadas pelos alunos.

Acreditamos que os conflitos tornam-se interessantes e relevantes ao que é essencial para o desenvolvimento lógico e interpretativo de cada aluno. Quando esses conflitos evidenciados e interpretados pelo professor de forma negativa, sempre haverá uma intervenção através da negação, fuga ou violência, seja ela verbal, física ou psicológica. Rozemberg (2018).

Por outro lado, quando os conflitos são vistos de forma positiva, por mais que cause incômodos, eles possibilitam a abertura de portas para solidificação das ideias, o respeito mútuo, a cooperação, o diálogo e o ambiente de convívio. Rozemberg (2018). Reforçamos que, todas estas possibilidades só serão possíveis quando o professor os interpreta (os conflitos) de forma positiva, que as use como uma alavanca de aprendizado e crescimento mútuo.

#### 4.2.6 Alto Nível de Concentração

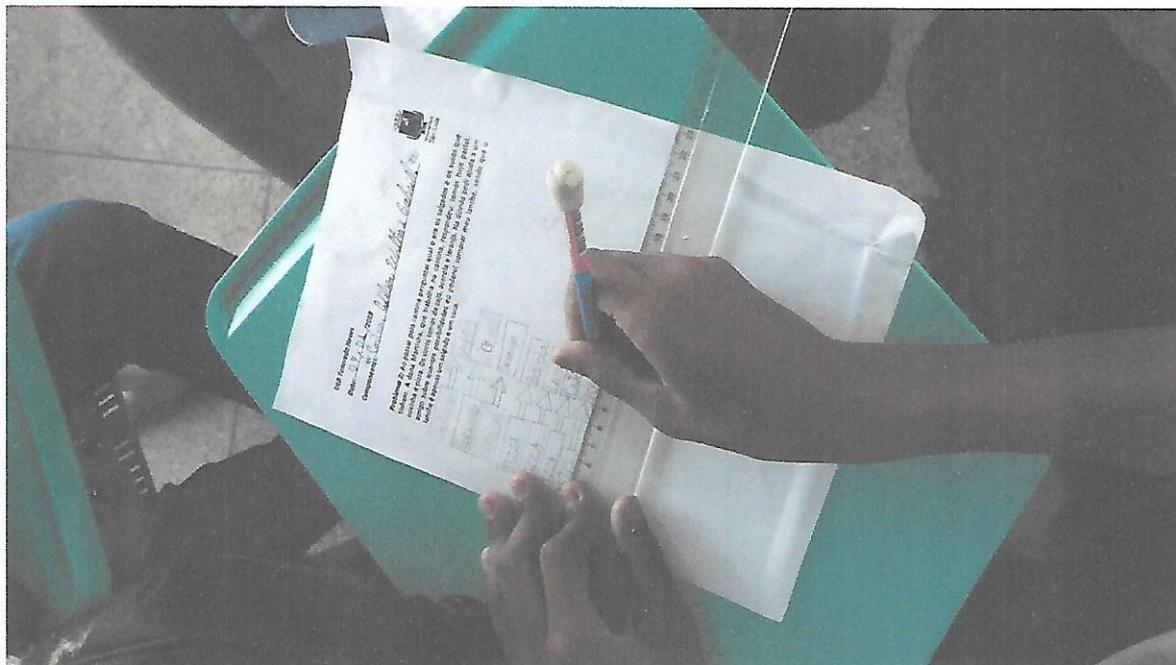
Falar sobre concentração por parte dos alunos, quando nos referimos à Educação matemática, não é tarefa tão simples. O modelo adotado por grande parte dos educadores, ainda consiste na mera explanação de conteúdos no quadro, com poucos recursos que proporcionem uma melhor dinâmica de ensino.

Nas atividades propostas sobre a resolução de problemas de Análise combinatória, percebemos algo incomum nas aulas de matemática: Foi o *Alto Nível concentração* manifestado por todos os alunos. Ao se deparar com a situação de desafio, porém atraente, os alunos se lançaram na missão de resolverem a questão, de chegarem à resposta correta.

Atividades bem elaboradas e criativas proporcionam um melhor aproveitamento

das aulas. E quanto canalizamos essas atividades para ensinar Análise Combinatória, elas têm o poder de quebrar o paradigma de que a Análise Combinatória trata de um conteúdo abstrato.

**Figura 8:** Alunos concentrados nas atividades



Fonte: Pereira (2019)

#### 4.2.7 A Importância do Lúdico

Não é de se admirar que quando nos referimos ao ensino e aprendizagem da matemática, estamos nos deparando com um enorme paradigma criado de forma bilateral. Por parte dos alunos, os mesmos têm um grande receio pela disciplina, já por parte dos professores, é que não conseguem “prender” a atenção dos alunos para suas aulas. Em nossas atividades descritas, percebemos a grande importância do lúdico, de como os alunos ficam livres diante de uma abordagem matemática, porém prazerosa, dinâmica e divertida. Queremos ressaltar aqui a importância do lúdico na Ensino da Análise Combinatória dentro das salas de aula, pois por mais que os alunos tenham tido pouco

contato com o conteúdo abordado, que foi o caso das nossas atividades. Percebemos que os mesmos(alunos) já trazem do seu cotidiano um conjunto de conceitos e percepções que lhes dão ampla possibilidades de expressarem-nas nas resoluções de situações-problema. Como ressalta DANTAS, RAIS, JUY (2012, p.8):

A criança já traz para o ambiente escolar algumas definições numéricas estabelecidas de forma singular, usadas no seu cotidiano, como por exemplo o número da sua casa, e fica ao encargo da escola incentivar a criança possibilitando que ela tome posse do sistema numérico de forma prazerosa e satisfatória. ( DANTAS, RAIS, JUY, 2012, p. 8).

O lúdico no processo de ensino e aprendizagem é a forma de desenvolver o conhecimento de forma criativa, utilizando-se de importantes recursos como os jogos, as brincadeiras, a música, a pintura, o desenho, e outras formas de arte. O objetivo é ensinar por meio da diversão.

"Por meio de uma aula lúdica, o aluno é estimulado a desenvolver sua criatividade e não a produtividade, sendo sujeito do processo pedagógico. Por meio da brincadeira o aluno desperta o desejo do saber, a vontade de participar e a alegria da conquista. Quando a criança percebe que existe uma sistematização na proposta de uma atividade dinâmica e lúdica, a brincadeira passa a ser interessante e a concentração do aluno fica maior, assimilando os conteúdos com mais facilidades e naturalidade" (KISHIMOTO, 1994).

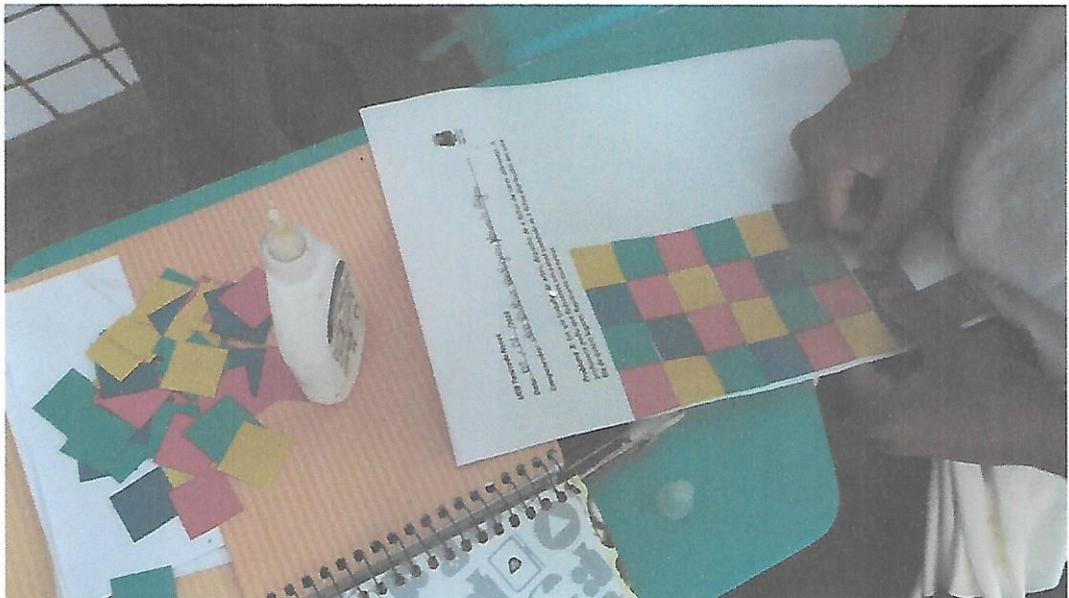
O lúdico também tem sua origem nos símbolos, pois a representação das imagens é uma poderosa ferramenta para a instrumentalização da criança, objetivando a construção e também a reconstrução do conhecimento. Em nossas atividades desenvolvidas, percebemos a demonstração por parte dos alunos do prazer em aprender, a satisfação em construir algo palpável, na vontade de enfrentar seus próprios desafios de forma livre, sem precisarem sentirem-se pressionados. Portanto, reiteramos neste trabalho que as atividades lúdicas produzem conhecimentos de forma prazerosa e harmoniosa. Por isso, o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental pode e deve ser exercido neste contexto. O que torna natural, sensível e prazeroso o ensino da matemática, diz (BRITO 2001, p.43). Segundo Borin ( 1996)

A introdução de jogos (O lúdico) na educação matemática tem outra grande importância, que é amenizar os bloqueios que muitos alunos apresentam por temerem a matemática, deixando-os assim incapacitados para aprendê-la. Dentro do lúdico, onde o comportamento passivo é inexistente e a motivação é grande, notamos que os alunos se adaptam à linguagem matemática e apresentam desempenho e atitudes bem mais positivas diante dos processos da aprendizagem. (BORIN, 1996,p.9)

O certo é que trazer o lúdico para dentro das aulas de matemática, infelizmente ainda é um notável entrave para muitos educadores. Muitos demonstram uma exacerbada preocupação em cumprir com uma grade curricular. Vale ressaltar que consideramos o cumprimento da grade curricular muito importante, na qual acreditamos que a mesma não deve ser um entrave para o professor desenvolver suas aulas de forma lúdica.

Nas atividades percebemos também as criações próprias de estratégias para resolverem as questões, os desentendimentos que proporcionam interação, e algo muito comum em todos os grupos: o direito de errar! Sim, antes das equipes chegarem ao resultado desejado, todos erraram, tiveram que recomeçar, reprogramar suas ideias, por isso, estaremos falando a seguir sobre a teoria ou pedagogia do erro, com o objetivo de ressaltar a importância dos alunos serem orientados e aprenderem com seus erros.

**Figura 9:** Atividade Lúdica



**Fonte:** Pereira (2019)

#### 4.2.8 A TEORIA OU EDUCAÇÃO BASEADA NO ERRO

Em uma sociedade onde o desenvolvimento tecnológico é cada vez mais intenso, superar limitações humanas é quase que tarefa obrigatória para acompanhar esse desenvolvimento. Em contrapartida o nível de exigência e perfeição impostas pela sociedade, tem levado as pessoas a admitirem que não existe erro, que não podemos errar, e que se tais erros forem cometidos não haverá possibilidades de serem corrigidos para se acertar. Fortemente influenciadas por esse modelo, as ciências desenvolvem hoje um grande papel na reprodução da rejeição contra o erro, e a escola por sua vez, é encarregada de formalizar o processo de ensino-aprendizagem destas ciências, também tem se posicionado a favor da educação de que os erros não compõem o processo.

O exposto acima traduz a forma de como tal preconceito se manifesta na educação. Segundo afirma Rui Trindade (2002), a escola tem se dedicado a estabelecer indagações (perguntas) que já possuem resposta determinadas e inquestionáveis. Ela aprendeu a conviver com a teoria de que o erro não pode e não deve ser exposto, que se camufla, algo inadmissível. O lamentável, é que essa concepção é fortemente aceita por grande parte dos educadores. Essa realidade nos remete para as seguintes perguntas: Como os professores de matemática trabalham diante dos erros cometidos por seus alunos? Qual o seu procedimento diante de sucessivos erros na resolução de uma atividade? Como compreender a importância de cometer erros no processo educacional? É sobre essas perguntas que pretendemos refletir, pois é imprescindível que errar e acertar sejam elementos naturais do universo de construções e descobertas que o processo de aprendizagem proporciona.

#### O erro tem algum valor para a educação?

A pergunta feita, tem sido instrumento de calorosas discussões sobre o valor do erro no desenvolvimento das construções e descobertas durante o período de aprendizagem. Para muitos profissionais da Educação como professores, coordenadores e até a própria escola, acreditam que os erros não podem ser cometidos. Em contrapartida muitos teóricos como CURY (2015), PINTO (2000), TEIXEIRA (2011).

Hoje em nossas escolas, o erro é protagonista (como o VILÃO!) de um filme que tem como enredo Avaliar a aprendizagem. Muitas das vezes é uma criação dos professores ao analisarem, em termos daquilo que é certo ou errado, o que acaba revelando a forte influência de um ensino pautado em respostas pré-estabelecidas . Paulo freire (1985), andando na contramão de tal filosofia de ensino, ensina que a educação precisa caminhar numa direção libertadora, capaz de modificar o conceito das respostas certas, para a direção que incentive os questionamentos sadios e que desenvolvam o interesse de aprender.

Um ensino pautado no questionamento sadio é a principal via para estimular todo potencial que existe no ser humano de amedrontar-se, de responder ao seu medo e solucionar seus reais problemas [...] portanto, caminhando nessa direção, a educação libertadora, precisa potencialmente desenvolvida, levada ao risco extremo, como única via de avanço do conhecimento, proporcionando de forma verdadeira o aprendizado e o ensino. Considero fundamental a educação do risco, que converge com a pedagogia do erro (FREIRE, 1985, P.52)

A proposta de Paulo Freire é que haja mudança de atitude do professor diante do erro e comece a encará-lo como elemento de reflexão dos saberes que nossos alunos trazem consigo para situações de aprendizagem. Essa mudança de postura, rompe com os conceitos e paradigmas que estão fundamentados numa educação na qual o certo está, ligado às resposta “fechadas”, ou seja, está prevista e limitada pelo próprio educador. Esse processo que trata as respostas diferentes do previsto como erradas é chamado por Paulo Freire de “burocratização mental”, e constitui um obstáculo para uma reflexão interior sobre os erros cometidos, e perde-se a capacidade de criação (FREIRE, 1985, p.53)

Dessa forma, os erros se tornam essenciais no desenvolvimento dos conceitos, são valiosos degraus para acertos futuros. Os erros revelam o que o aluno está pensando, e isto se torna para o professor um precioso instrumento para diagnosticar aonde ele pode e deve interferir.

Se os alunos erram, é porque, provavelmente estão usando seu próprio modo de pensar. Levando em conta que o erro reflete aquilo que o aluno está pensando, a função primordial do professor não se limita em simplesmente corrigir, mas descobrir como o erro foi cometido (KAMII, 1991, p.64)

## Como o erro influencia na Aprendizagem?

Usando como referencial a teoria de Piaget (1978) para organizar a definição de aprendizagem a partir dos erros cometidos pelos alunos. Na perspectiva Piagetina, a aprendizagem se dá pelos fatores hereditários, naturais e da interação do ser humano com a realidade física. Segundo o teórico, embora os fatores inerentes ao ser humano influenciem na sua aprendizagem, o estímulo e o contato são fatores essenciais no desenvolvimento do saber.

Concebendo uma explanação didática, podemos afirmar que, quando o aluno comete o erro, é possível que o mesmo construa de forma perceptiva, motora ou conceitual novos caminhos educacionais (assimilação). Poderá também fazer modificações para dar corpo ou forma ao conhecimento ou conceito desejado (acomodação). Os processos descritos (assimilação e acomodação) são essenciais para a superação diante do erro. Quando os alunos cometem erros, eles podem ter consciência dos mesmos, ou ainda não ter nenhuma consciência dos erros cometidos.

Refletindo mais no valor benigno que os erros podem trazer, observamos que, se o aluno [...] errar, o mesmo terá uma inclinação muito forte em refletir sobre o mesmo (erro) e as formas que utiliza para corrigir [...]. Vale ressaltar que o erro pode levar os alunos a modificarem suas estratégias, enriquecendo-os. O erro pode ser um elemento valiosíssimo de tomada de consciência (AQUINO,1997, p.36)

De acordo com Gaston Bachelard (2005), o erro não deve ser encarado como um aspecto negativo na educação escolar, ao contrário, representa uma possibilidade para identificar lacunas de conhecimentos, permite ainda, uma retomada da ação para a identificação do porquê errou, bem como, a reorganização/reconstrução dos saberes, logo “reduzir o erro a uma distração da mente cansada significa considerar apenas o caso do contador que enfileira números. O campo a explorar é bem mais amplo, quando se trata do verdadeiro trabalho intelectual” (BACHELARD, 2005, p. 252).

O erro permite o questionamento, o desejo de refazer o caminho para verificar em que momento o erro ocorreu, pode ajudar na elaboração de argumentos e de novas soluções. Conforme pontuam Munhoz e Martins (2015), ao destacar “[...] registro das

condições de aprendizagem na hora em que o erro ocorreu pode ajudar a identificar se ele foi decorrente da falta de conhecimentos prévios, de distrações, de lapsos de memória ou por excesso de confiança”. É o questionamento que estimula a busca de soluções, esta por sua vez, estimula o espírito investigativo, que aguçado pela curiosidade, permite que o aluno extrapole os conhecimentos individuais de cada disciplina (BACHELARD, 2005).

### Um pouco sobre Obstáculo Epistemológico

Segundo Bachelard, as características filosóficas do espírito científico, são mais enxergadas naquelas ciências que trazem consigo um passado de grande objetividade e possuem na sua constituição um elevado grau de racionalidade. A matemática se enquadra perfeitamente nesta visão, por isso, foi uma das ciências nas quais Bachelard se propôs em descrever a formação do espírito científico.

A definição de obstáculos epistemológico é justificado por Bachelard (1996, p.17) ao afirmar que quando a busca pelas condições psicológicas do avanço da ciência é evidenciada, logo chega-se à certeza de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado.

Assim, o desenvolvimento construtivo da ciência, se dá primeiramente no reconhecimento dos obstáculos e, posteriormente, na sua superação. Concebendo da teoria sobre os obstáculos epistemológicos descritos, acreditamos que no ensino de Análise Combinatória, todo esse processo defendido por Bachelard, ou seja, para o apogeu do ensino se manifestar, os obstáculos precisarão ser reconhecidos e superados.

[...] Acho surpreendente que os professores de ciências, mais do que quaisquer outros se possível fosse, não compreendam que alguém não compreenda. São raros aqueles que se detiveram na psicologia do erro, da ignorância e da irreflexão. (BACHELARD, 1996, p.19)

Os professores se enganam ao pensar que o despertar do aluno para novas possibilidades de conhecimento se dá apenas com uma aula, acreditam que um caminho que foi construído sobre falhas, pode ser corrido apenas por repetições de lições e demonstrações. Bachelard (1996). Claro que não é assim, há toda uma trilha que precisa ser percorrida,

e dentro dessa trilha está os conhecimentos empíricos já consolidados no aluno. Portanto, não se trata mais de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos cauterizados, através da prática cotidiana.

Ao lecionar Análise Combinatória, o professor se depara com a forte tendência de ser conduzido pelas impressões primárias, superficiais, "seu estatuto de verdades" sobre o certo e o errado no processo de ensino e aprendizagem. Todos estes conceitos formados, na maioria das vezes funcionam como bloqueios que impedem o desenvolvimento e a renovação do conhecimento.

No contexto de ensino da Análise Combinatória na educação Básica, concordamos que o educador precisa romper com todos os esquemas mentais, as ideias intocáveis inquestionáveis que residem na sua prática docente, pois esses conhecimento "imutáveis" são obstáculos à aprendizagem bem-sucedida.

## Erros são todos iguais?

Figura 10 : Tipos de erros cometidos pelos alunos na resolução de uma atividade

Tipos de erros	Causa/Motivos	Ação do professor
<b>Excesso de distração</b>	O aluno tem uma boa base cognitiva, porém em um dado momento é vencido pela falta de concentração.	Levar o aluno à reflexão do erro cometido, e ajudá-lo a refazer a atividade.
<b>Falta de base conceitual</b>	O aluno ainda não conseguiu formular um conceito para resolver uma determinada tarefa.	Ajudar o aluno a construir, por meio de uma ação benéfica seu próprio conceito.
<b>Dificuldade de interpretar</b>	Os motivos são muitos. É preciso que o professor identifique-os de forma bem cuidadosa.	A partir da causa identificada, cabe ao professor agir de forma específica e intencional sobre a situação.
<b>Dificuldade em construir</b>	O aluno busca sua própria lógica, que deve ser percebida e compreendida pelo professor.	Agir corretamente a partir da percepção do aluno, e então fazer as intervenções necessárias.

Fonte: Revista Construir, edição 89

De acordo com VINOCUR (1998, p.98), os alunos cometem erros por diferentes motivos: excesso de distração, falta de base conceitual, dificuldades de interpretar e construir.

A figura 10 nos mostra exatamente o anunciado acima, e também sugere como o professor pode intervir nos diferentes tipos de erros cometidos pelos alunos. Com a

aplicação das atividades, tivemos a oportunidade de destacar aquele tipo de erro de menos se manifestou, como também o que mais se manifestou.

Acreditamos que devido à dinamicidade das atividades e a quebra de paradigmas quanto a forma de aplicação, percebemos que o fator de erro menos cometido foi por falta de concentração, de acordo com a figura 10, o excesso de distração. Esse tipo de fator quase não se manifestou durante o desenvolvimento das atividades, não seria nenhum exagero afirmarmos que o nível de concentração foi total. Notamos o quanto os alunos estavam ávidos para chegar ao resultado correto, e isso os levou para um excelente nível de concentração.

Na extremidade oposta do fator de erro que menos se manifestou, temos aquele que mais se manifestou, que foi a dificuldade em construir. Para nós, isto tem um valor muito grande, pois foi por meio dessas dificuldades é que fizemos algumas leituras, dentre elas, a capacidade de divergirem uns dos outros quanto à maneira de pensarem, ou seja, a busca pela sua própria lógica. Fazendo com que essa busca se torne vital para o seu desenvolvimento cognitivo.

No que concerne aos erros cometidos pelos alunos pela busca de sua própria lógica, o professor pode e deve intervir não de forma repreensiva, mas dando um *feedback* quanto à sua forma de raciocinar, o que não é simplesmente corrigir, mas sim proporcionar um diálogo com aluno que o leve perceber o erro cometido, e a forma de superá-lo, com propõe Spinillo (1995).

#### 4.2.9 O erro na Educação Matemática

Ao avaliar qualquer atividade realizada em sala de aula, seja ela um trabalho, uma prova, ou até mesmo uma tarefa lúdica, o professor se depara com realidade de apontar os erros cometidos pelos alunos, e passando pelos acertos como se estes não precisassem de investigação.[...] O certo é que os acertos dos alunos não evidenciam um nível satisfatório de aprendizado, tampouco os acertos evidenciam categoricamente o que o aluno não sabe, [...] como afirma CURY(2008, p.13). Qualquer produção, seja em sala de aula pautada em algum modelo determinado, ou seja ela, que busque avaliar a criatividade, percepção, argumentação, e outras manifestações cognitivas, precisa valorizar o conhecimento que o aluno traz a partir da sua vivência extra classe, e isso se dá de maneira formal e informal.

Pacheco e Medeiros (2009), comentam que no processo de ensino e aprendizagem da matemática, os erros são interpretados como fracassos que são revertidos por meio de correções que apontam os erros e indicam o que deve ser feito. O fato é que as intervenções feitas pelo professor diante dos erros cometidos pelos alunos, se resume na mera substituição da forma considerada inadequada pelo considerado adequado, certo, satisfatório. Refletindo sobre essa concepção, podemos buscar respostas para perguntas como: de que forma o erro foi cometido? Qual a causa para o erro ser cometido? Qual o sentido do erro? De que forma o professor poderá orientar o aluno?

Diante das concepções pedagógicas a partir da teoria do erro, as nossas atividades apresentadas neste trabalho sobre a resolução de exercícios de Análise combinatória no ensino fundamental, nos colocou muitas vezes na condição de intervir diante dos erros cometidos pelos alunos, porém nossa intervenção não foi feita visando apenas o resultado final, no resultado considerado certo, e sim nas etapas que os alunos terão que desenvolver, nas ideias que terão que construir para se chegar ao produto final.

Não estamos de forma alguma fazendo um incentivo exacerbado ao erro, só estamos trazendo para reflexão de que os erros muitas das vezes tratados como inaceitáveis, podem ser revertidos e corrigidos de forma que eles se tornem em acertos, e o mais importante, que o aluno aprenda com os mesmos.

Raffaella Borasi, nas duas últimas décadas do século XX, dedicou-se à produção de textos de extrema validade para aqueles que acreditam que os erros contribuem na construção do conhecimento. Borasi graduou-se em Matemática na Itália, com doutorado na *State University of New York*, em Buffalo.

Borasi (1996), considera que a análise de erros na Educação Matemática é capaz de responder perguntas que desafiam o professor em sala de aula, perguntas como: **"O que aconteceria se aceitássemos esse resultado? [ou] Este resultado pode ser considerado correto em outra situação?"** (p. 29), referindo-se a alguns resultados apresentados pelos alunos.

Com o desenvolvimento das nossas atividades, também nos deparamos com essa realidade, procuramos de todas as formas dar sentido às respostas dos alunos diante dos erros, como sugere Borasi (1996), que abandonemos a mera transmissão de conteúdos, e busquemos através de experiências práticas em sala de aula, o poder que os alunos têm de argumentar, de raciocinar e expor suas ideias.

Borasi (1996) considera que, se existe uma pressão por parte do sistema escolar sobre os alunos, os erros cometidos por eles são interpretados como frustrações, porque os levam a investirem tempo e esforços para não serem reprovados.

Tomando parte do mesmo pensamento de Borasi (1996), que sugere ambientes de aprendizagem que propiciem o aproveitamento dos erros cometidos pelos alunos, em nossas atividades proporcionamos aos alunos o direito de errar, como já abordamos neste trabalho.

## 5 ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA REFLEXÃO PARA O ENSINO MÉDIO

De inúmeros objetivos que temos no ensino médio, o principal é proporcionar nos cidadãos um caráter crítico e que atuem de maneira intensa na sociedade em que estão inseridos. Neste sentido, o aluno precisa deixar a posição de sujeito “passivo” e se tornar junto com o professor, agente ativo do processo de ensino e aprendizagem.

No contexto descrito, a Análise Combinatória, sendo o ramo matemático que desenvolve a contagem e organização dos elementos de um conjunto sem precisar listá-los ( PESSOA ; BORBA, 2009), se torna um conteúdo relevante para o crescimento analítico, investigativo, reflexivo, hipotético e argumentativo do aluno. Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001), citado por Almeida (2010, p.18). O crescimento da Análise Combinatória, forma a principal base cognitiva do raciocínio lógico geral. O que nos leva a plena convicção de que é preciso refletirmos sobre o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo.

Contudo, o que percebemos, é que o conteúdo de Análise, quando abordado nas salas de aulas do ensino médio, vem acompanhado de muitos desafios. Desafios estes que acompanham os alunos desde o ensino fundamental, e que já foram abordados neste trabalho. Um deles está relacionado com a coerência e coesão de seus enunciados. Existem hoje numa mesma questão a possibilidade de variadas formas de interpretações interligadas pela má formulação da mesma.

No ambiente escolar, este assunto é tratado por muitos professores de forma abstrata. MENDONÇA (2011, p.19) quando se refere ao ensino da Análise Combinatória, diz:

“ Os professores descartam a apresentação, a preparação (abordagem do tema) e direcionam o ensino para situações com mera utilização de fórmulas, sem levar em conta a construção de uma definição do problema expressado pelo próprio aluno.”

Neste sentido, tudo que é desenvolvido pelo aluno, tais como definições, formulações

de ideias, propriedades, tudo é apresentada de forma automática, com aplicação de exercícios característicos dos livros didáticos.

O ensino da Análise Combinatória, feito de forma atraente, com metodologia diversificada, que desafia o aluno a ser sujeito ativo na construção de novos conceitos, realização de trabalhos em grupos, tudo isso proporciona um nível de satisfação melhor. Produz um melhor desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, sua percepção e também seu potencial de “improvisar”, ou seja, fugir dos limites estabelecidos pelos professores e pelos livros didáticos. Além disso, está ciente da importância das aplicações de Análise não só dentro da matemática, mas em várias outras áreas do conhecimento, tais como: Química, informática, engenharia, e outras De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Este importante conteúdo (Análise Combinatória) possibilita o desenvolvimento de inúmeras capacidades relacionadas à contextualização social e cultural, como a leitura da realidade existente no mundo social e a movimentação de diferentes áreas do saber. Acrescenta muito também para o entendimento e a utilização de representações gráficas, interpretação de parâmetros matemáticos e métodos específicos de raciocinar em matemática (BRASIL, 2002,p.127)

Como exposto acima, percebemos que a quantidade de recursos possibilitados pela Análise combinatória são imensos, porém com este conjunto amplo de possibilidades, ainda esbarramos em fatores que dificultam uma melhor compreensão e exploração do conteúdo abordado. Destacaremos alguns destes fatores:

## **5.1 O livro didático**

Grande parte dos livros didáticos destinados ao ensino médio, apresenta apenas técnicas para resolver exercícios que priorizam e levam somente a aplicação de fórmulas. Diante dessa realidade, acreditamos ser importante uma breve e reflexiva explanação sobre o conteúdo de Análise Combinatória apresentados nos livros didáticos. Quando falamos de recursos utilizados no processo de ensino e aprendizagem, o livro didático é um dos principais, se destaca como um relevante componente do dia-dia das escolas, e é com base

neste relevante componente que o professor baseia sua prática, e na grande maioria das vezes é seu único instrumento de ensino. Segundo SABO (2007)

O estudo da Análise Combinatória coloca o aluno diante de um novo raciocínio, a novos símbolos e significados. Contudo, esses novos símbolos são apresentados, na maioria das vezes, por expressões algébricas, acompanhadas por uma série de exercícios, que potencializam a técnica de repetição das mesmas (fórmulas). (SABO, 2007, p. 52)

Infelizmente, quando fazemos uma análise crítica dos nossos livros didáticos, percebemos que existe na sua proposta didática uma carência de interesse em levar o aluno a desenvolver uma prática reflexiva. Na sua essência, o aluno é tendenciado a se tornar um simples reproduzidor das ideias, conceitos, definições, e dos exemplos que são expostos no livro.

### 5.1.1 A Contextualização nos livros didáticos.

Quando falamos de contextos e contextualização no ensino da matemática, muitas das vezes é sinônimo de calorosas discussões. É comum ouvirmos dos professores expressões como: “Esse assunto não dá para contextualizar; Se o livro não contextualiza, eu também não vou contextualizar; o aluno não está nem aí pra contextualização;...” .Em fim, o certo é que este assunto está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998 e 2010) e também nas Diretrizes Curriculares.

Neste trabalho trabalho, definimos contextualização como uma ferramenta que proporciona sentido ao que está sendo lecionado ( Análise Combinatória), é o que vitaliza, que tira o aluno do campo conceitual e o traz para o campo da prática e da imaginação, proporcionando assim, o que podemos chamar de ensino e aprendizagem.

Portanto, a contextualização é um fator de suma importância no processo, e não deve e não pode se desassociar da prática pedagógica do professor. Contudo, percebemos que a importância da contextualização não está em consonância com aquilo que percebemos na maioria dos livros didáticos, pois os mesmos são direcionados às salas de aulas como se a realidade de todos os alunos fosse a mesma, ou seja, os livros didáticos

não levam em conta as diferenças regionais, culturais, cognitivas e econômicas que existem neste universo chamado Brasil. Diante desta realidade, o que o professor em sala de aula pode fazer?

Ao tentar responder esta pergunta, precisamos afirmar que o docente precisa conhecer o seu público, só assim terá condições de transformar a linguagem e símbolos contidos no livro, para a realidade de seu público, possibilitando assim a decodificação destes símbolos e linguagens por parte dos alunos.

Quando o professor tem um conhecimento, nem que seja prévio da realidade dos seus alunos, seja ela, cognitiva, regional, cultural e econômica, ele consegue diversificar aquilo ele está ensinando de acordo com a realidade de seus alunos, ele passa a ter uma reflexão crítica daquilo que lhe é proposto nos livros didáticos, passa de mero reprodutor para um facilitador do processo de ensino e aprendizagem. Como afirma VASCONCELLOS (2008).

[...] contextualizar é apresentar para os alunos o sentido necessário daquilo que estamos ensinando, através da problematização, do resgate dos conhecimentos prévios e as informações externas trazidas pelo aluno, proporcionando assim, um ambiente que dará sentido ao conteúdo, ou seja, que o direcione à sua compreensão. (VASCONCELLOS, 2008, p.49)

O educador crítico dos conteúdos que são expostos nos livros didáticos sempre fará algumas perguntas antes de expor a metodologia que o autor propõe, entre elas estão: **Esta abordagem está acessível à realidade dos meus alunos? Os alunos compreenderão estes exemplos de exercícios, haja vista que os mesmos mal conhecem os elementos contidos em tais exemplos?** Em fim, o educador em relação ao livro didático, sempre fará o papel de “filtrar” o conteúdo contido nele (o livro) e apresentar de maneira que venha proporcionar o que chamamos de ensino e aprendizagem.

As políticas públicas que norteiam os currículos escolares, e que estão alicerçadas nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) 9394/1996 ressaltam a contextualização como essencial no desenvolvimento pedagógico e enfatizam que:

[...] É no movimento de contextualização e descontextualização que o conhecimento com significado é construído pelo aluno, ou seja, o mesmo se identifica com os elementos que lhe são apresentados, tanto no ambiente escolar como também no meio social. Tal princípio (contextualização) precisa ser feita de forma intencional, sendo que a mesma será decisiva para a aprendizagem. O professor terá que se antecipar aos conteúdos que serão objetos de aprendizagem. Neste sentido, a contextualização não serve apenas para ilustrar o enunciado do problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p.83)

Apoiados pelas Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, reiteramos que o ato de contextualizar o conteúdo de Análise Combinatória, não se limita apenas na execução de "alguma atividade solta", ela precisa ser intencional, precisa levar em consideração as diversas realidades sociais e culturais dos alunos. Segundo o citado, o professor terá que antecipar aos conteúdos, terá que diversificá-los e adaptá-los ao seu público alvo.

para a escolha dos conteúdos que abordará em sala de aula, o educador precisa verificar os textos, analisar como tais conteúdos são abordados para poder adaptá-los para sua própria realidade e a dos alunos, fazendo sempre a comparação do que está escrito com a realidade dos alunos [...] (LIBÂNEO, 1990)

Portanto, tomando como pilar de sustentação as concepções de Libâneo sobre a contextualização, reiteramos que o professor na sua prática pedagógica, jamais deve desassociar a realidade dos seus alunos do conteúdo que está sendo lecionado. Acreditamos que o ensino de Análise Combinatória terá resultados bem mais satisfatórios tanto para quem ensina quanto para quem aprende.

## 5.2 A Formação do Professor de Matemática nas Universidades

D'Ambrósio (1993) enumera as habilidades de modelar um problema em linguagem matemática, de fazer análise de dados, de argumentar, fazer levantamento de hipóteses, interpretar e justificar conclusões obtidas, como essenciais para o século XXI. Todas as habilidades citadas são de suma importância para qualquer professor, independente do nível que leciona, porém D'Ambrósio (1993) as considera com maior relevância para o de nível superior, que tem a responsabilidade de formar os futuros educadores.

Assim como já fizemos reflexões sobre alguns fatores que precarizam o ensino de matemática, e em especial do conteúdo de Análise Combinatória, gostaríamos de refletir também sobre este importante fator, que é a formação do professor dentro das Universidades.

Não é de hoje que a discussão sobre a formação do professor de matemática dentro das Universidades é bastante intensa. Há mais de um século, Felix Klein (1908), matemático alemão, denunciava em sua obra "Matemática elementar de um ponto de vista Superior", a falta de consciência entre a formação nas Universidades dos futuros professores de matemática e a sua prática pedagógica nas escolas. Klein (1908) percebe a fragmentação dupla que há. a primeira ocorre quando o estudante universitário se depara com os novos conteúdos da matemática superior, não apresentando nenhuma relação com o que ele estudou na Educação Básica; e a outra quando concluem o curso universitário e assumem a profissão docente, ou seja, começam a lecionar e percebem o distanciamento entre o que aprenderam na graduação e a realidade da Educação Básica. Os professores ao saírem das Universidades chegam a conclusão de que a maioria dos conteúdos aprendidos na graduação têm pouca relação com realidade das salas de educação básica. Como afirma GIRALDO (2018, p. 37),

[...] É como que ao ingressar na vida acadêmica, o futuro professor devesse esquecer de toda matemática aprendida na educação básica; e ao se formar, tivesse agora que esquecer de toda matemática que aprendera na universidade para começar a lecionar na educação básica.

A fragmentação observada e denunciada por Klein não foi um problema restrito

em seu tempo, tal fragmentação perdura até hoje, e infelizmente é um grande desafio no processo de educação matemática. Embora se pregue a ideia de que para ser um bom professor de matemática é simplesmente saber muita matemática, contudo, essa ideia não garante que o processo de ensino e aprendizagem seja satisfatório. Como observam Moreira e Ferreira (2013).

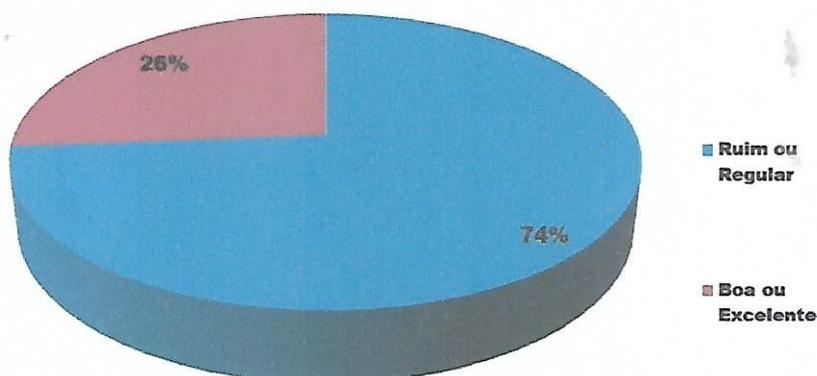
É com muita frequência que a formação sólida em matemática para futuros professores é defendida, sem deixar claro o que é de fato tal solidez ou se dialogue o seu efeito na prática pedagógica do professor.

De maneira geral, a dualidade entre a matemática aprendida nas Universidades e a matemática escolar, é concebida da seguinte forma: A Universidade é o lugar onde todo o conhecimento matemático é produzido, inclusive de como ela vai ser ensinada na escola. Por sua vez, a escola é o lugar onde aquilo que foi produzido nas Universidades, é simplesmente simplificado.

Para Klein (1908), a escola tem um papel relevante na produção do conhecimento matemático. Para o autor, esse papel é tão importante quanto o acadêmico. Isto significa em linhas gerais, que a forma que a matemática é ensinada dentro das salas de aulas não é apenas influenciada por, mas também pode influenciar bastante no desenvolvimento da matemática como ciência.

Tendo como objetivo de investigação analisarmos e tornarmos mais consistente a discrepância que há entre a formação acadêmica e a prática de sala de aula, elaboramos uma pesquisa na qual foram entrevistados professores atuantes na educação básica, tanto das redes pública e privada. Com os resultados obtidos não só comprovamos a fragmentação que há entre formação e prática pedagógica, mas também fazemos algumas inferências quanto ao ensino da Análise Combinatória na Educação Básica.

**Gráfico 1:** Na sua graduação, como você avalia a sua formação para lecionar o conteúdo de Análise Combinatória na Educação básica?



**Fonte:** Pereira (2019)

De acordo com o gráfico 1, a formação inicial do professor de matemática deixa lacunas que interferem no desenvolvimento dentro da docência conforme pontuaram os respondentes, o que ratifica a nossa reflexão sobre a má formação do professor nas Universidades para lecionarem na Educação Básica, em destaque na pesquisa, o conteúdo de Análise Combinatória. Na pesquisa foram entrevistados 19 professores que atuantes em salas de aulas dos ensinos fundamental e médio. Destes entrevistados, 14 professores, que correspondem a 74% responderam que a contribuição acadêmica para sua atuação em sala de aula foi ruim ou regular, e apenas 5 professores avaliaram como boa ou excelente, totalizando um percentual de 26% dos professores entrevistados.

Diante do resultado, afirmamos que o ensino da Análise Combinatória na Educação Básica acontecerá na grande maioria em níveis ruim ou regular, pois a formação universitária apresenta lacunas didáticas e pedagógicas que refletirão sobremaneira no processo de ensino e aprendizagem. Klein (2011) se referindo à deficiência do professor, provocada pela má formação, diz:

Se não forem orientados de forma suficiente, se as informações acerca dos elementos intuitivos da matemática não estiverem contextualizados e ramificados com outras áreas do conhecimento. Se principalmente não conhecerem a importância histórica, seus movimentos serão muito inseguros. Caminharão para o ramo da matemática pura, e não serão mais compreendidos na Educação Básica, desistirão do que aprenderam na Universidade e, mesmo sua maneira nova de lecionar, serão sucumbidos pelo tradicionalismo. (KLEIN, 2011, p. 127)

Traduzindo os resultados obtidos com a pesquisa, e alicerçados nas ideias de Klein, apontamos as lacunas que existem na formação universitária e de que forma elas refletirão nas salas de aula. A grande maioria dos entrevistados na pesquisa considera que a sua formação para lecionar o conteúdo de Análise Combinatória na Educação Básica foi deficitária, variando de ruim para regular. E a reflexão que fazemos é, que se a maior parte dos professores teve uma formação ruim ou regular, as chances de propagação em níveis também ruim ou regular serão bem maiores.

Não estamos generalizando sobre o resultado quanto a má formação do professor de matemática dentro das universidades para o ensino da Análise Combinatória, pois somos conscientes que em meio as lacunas que ficam na formação do professor, existem muitos bons e excelentes profissionais. Retomando para o resultado da nossa pesquisa, podemos elencar algumas características não positivas decorrentes das lacunas deixadas na formação, e que são manifestadas no ensino do conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio. Dentre elas podemos citar a insegurança na hora de lecionar o conteúdo, a falta de criatividade, a reprodução superficial dos exercícios, que na maioria das vezes são manipulados com a mera aplicação de fórmulas.

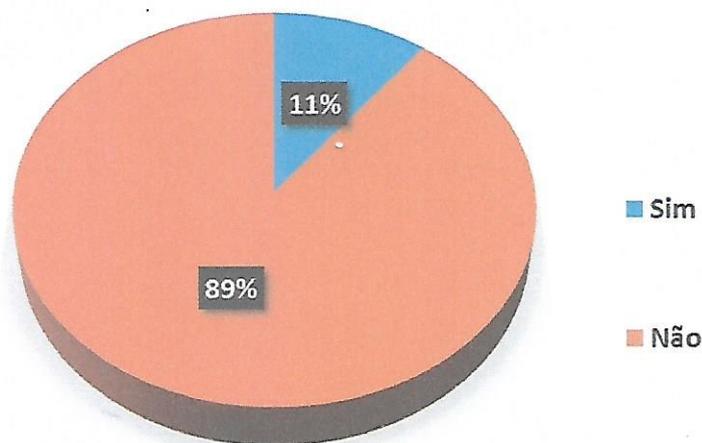
### 5.2.1 A Matemática Acadêmica *versus* a Matemática para a Educação Básica.

Reiteramos aqui que há uma discrepância relevante quanto aos conteúdos abordados nos cursos de licenciatura em Matemática e aqueles que são fundamentais para a prática docente do estudante universitário. Não queremos neste trabalho de forma alguma desqualificar os conteúdos considerados acadêmicos, queremos apenas trazer a reflexão de que os mesmos conteúdos não são abordados de forma que o futuro professor de matemática possa aplicá-lo na sua prática pedagógica.

Quando nos referimos a formação acadêmica do professor de matemática, existem diversos estudos e pesquisas sobre tal, e grande parte dessas pesquisas estão referenciadas no trabalho do pesquisador psicólogo educacional Norte Americano *LEE SHULMAN* (1987), que identifica o descrédito do conhecimento sobre o conteúdo, quando nos referimos a avaliação de habilidades. Para ele isto é um modelo perdido. Baseado nessa percepção crítica, o autor sugere a noção de conhecimento pedagógico de conteúdo, que podemos reduzir em um conhecimento sobre o conteúdo que vai ser ensinado.

Para GIRALDO, a interpretação de Shulman tem uma relevante contribuição, que é o reconhecimento e valorização dos saberes próprios por parte do professor da educação básica.

**Gráfico 2:** A formação acadêmica proporcionou a você ferramentas didáticas como jogos, brincadeiras, estratégias úteis para o ensino da Análise Combinatória?



Fonte: Pereira (2019)

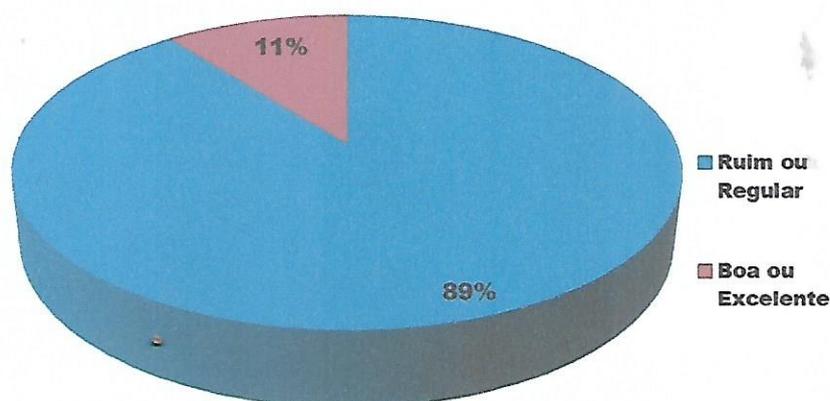
Analisando o gráfico 2, dos 19 professores entrevistados, 17 deles, isto é, 89% responderam que não tiveram nenhuma formação didática por parte da Universidade quanto ao uso de recursos como jogos, estratégias de ensino que proporcionassem melhor aproveitamento do conteúdo de Análise Combinatória em sala de aula. Mais uma vez o resultado serve de parâmetro para analisarmos o quanto a formação do professor de matemática está desconectada com o seu campo de trabalho, que na grande maioria são as salas de aulas da Educação Básica.

Com a minoria dos entrevistados, ou seja apenas 2 professores, correspondendo a 11%, responderam que tiveram uma boa formação didática para lecionarem o conteúdo de Análise combinatória na Educação Básica. Isto significa que a reprodução tradicional e mecânica deste conteúdo, acontecerá em larga escala, isto porque, se o professor não teve instrumentalização pedagógica para manipular o conteúdo, não teve suporte pedagógico que lhe permitisse uma melhor compreensão e diversificação metodológica na hora de lecionar, ele irá simplesmente " enquadrar o conteúdo de acordo com o seu nível didático." Vale ressaltar que a reflexão feita não é uma regra, pois não podemos deixar de afirmar que existem profissionais que não tiveram uma grande formação acadêmica, porém se tornaram excelentes profissionais.

A metodologia aplicada quanto no ensino da Análise combinatória é a mesma que é direcionada nos livros didáticos, com pouco aprofundamento para o ensino fundamental, e mais precisamente para o segundo ano do ensino médio. Geralmente são abordados os exercícios considerados clássicos, como o lançamento de dados, formação de anagramas, combinações de placas, etc.

Nossa abordagem reflexiva aqui não está na eliminação desses tipos de exercícios, e sim nas multiformes possibilidades de apresentá-los. Portanto, acreditamos que, para uma expansão metodológica, quanto ao ensino da Análise Combinatória na Educação Básica, a formação universitária para este conteúdo precisa satisfazer aos anseios didático-pedagógicos atual. Que por sua vez, exige uma formação moderna, diversificada, atraente e que desperta o interesse pela matemática.

**Gráfico 3:** Na sua opinião, qual o nível de importância que a Universidade dá ao ensino da Análise Combinatória?



**Fonte:** Pereira (2019)

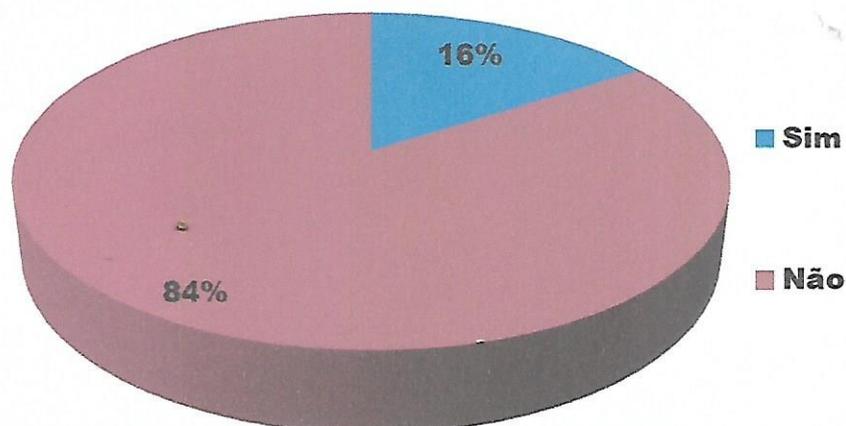
A Análise combinatória constitui um dos principais conteúdos, tanto para a matemática pura, quanto para a aplicada. Devido sua vasta aplicabilidade, ela não é simplesmente a parte da matemática que estuda as técnicas de contagens mais usadas, ou seja, os arranjos, as permutações e as combinações. A Análise é muito mais ampla. Morgado (2006) afirma que a Análise Combinatória trata de problemas além desses citados pelos alunos.

[...] Trata de vários outros tipos de problemas, e além de estudar os arranjos, permutações e combinações, dispõe de outras técnicas como o princípio da inclusão e exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey, são outras importantes técnicas da Análise Combinatória. (MORGADO et al.,2006, p.1-2)

Embora concebamos a Análise Combinatória como sendo de imensurável importância para o desenvolvimento da matemática e de outras áreas do conhecimento, no gráfico 3, observamos que dos 19 professores entrevistados, 17 deles, o que equivale a 89%, consideram que o nível de importância dado pelas Universidades a este conteúdo é ruim ou regular. Devido a relevância que a Análise tem, acreditamos que deveria ser mais bem explorada e valorizada pelo currículo do curso de matemática, professores, e conseqüentemente os alunos, que refletirão essa baixa importância quando estiverem

exercendo a docência na Educação Básica.

**Gráfico 4:** Você saiu da Universidade com boas condições técnicas para o ensino de Análise Combinatória na Educação básica?



**Fonte:** Pereira (2019)

O gráfico 4 nos mostra a principal lacuna que há entre o professor e aluno quanto ao ensino de Análise Combinatória. E qual é essa lacuna? A resposta é a falta de conhecimento aprofundado sobre o conteúdo. A pouca importância dada pela Universidade quanto ao ensino de Análise combinatória, fez com que o aluno, ou o futuro professor não tivesse bases consistentes para o ensino deste conteúdo. Ao entrevistar um professor sobre o seu nível de conhecimento sobre este conteúdo, tivemos como resposta palavras diretas e honestas, quando ele afirma:

[...] Não sei nada sobre isso, não estudei na Universidade, nunca aprendi e nem quis aprender sozinho. Quando tenho que ensinar Análise Combinatória na escola, eu apenas resolvo as questões que já estão resolvidas no livro. Não posso aprofundar aquilo que pra mim é muito superficial.[...]

Acreditamos ser de grande valor pedagógico, as discussões e reflexões sobre a importância do ensino da Análise combinatória nas Universidades, das novas metodologias para o ensino fundamental e médio, a ênfase na resolução de problemas sem o uso de fórmulas, estes e outros são possibilidades termos uma melhor formação do professor de matemática para o ensino do conteúdo de Análise Combinatória.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que nos motivou a desenvolver este trabalho, foi perceber que depois de muito tempo dentro da sala de aula, lecionando o conteúdo de Análise Combinatória, convivendo com outros profissionais da área e compartilhando do mesmo pensamento e experiências: **"de que ensinar este conteúdo é abstrato e muito difícil de ser ensinado"**. Quanto aos alunos, a mesma dificuldade existe, pois os mesmos são levados a aprenderem por mera aplicação e memorização de fórmulas, que na maioria das vezes não proporcionam nenhuma condição de reflexão e produção de novos conceitos.

Com o presente trabalho, refletimos um pouco de como o conteúdo de Análise Combinatória vem sendo ministrado dentro das salas de aulas da nossa educação básica. Baseado nestas reflexões, elaboramos algumas propostas que consideramos importantes no desenvolvimento do conteúdo de Análise combinatória na Educação Básica. Tendo sempre como base as orientações da proposta Curricular Nacional.

Assim, nosso trabalho propõe uma reflexão do conteúdo abordado, dentro do Ensino Fundamental sem a necessidade do uso de fórmulas. Reforçamos principalmente a independência dos alunos na forma organizar suas ideias para resolverem as diversas situações-problema utilizando a Análise Combinatória como ferramenta. De acordo com (BATANERO, 1997; ESTEVES, 2001; ROA E NAVARRO, 2001) ressaltam que o avanço do ensino de Análise Combinatória especificamente do ensino fundamental, precisar levar o alunato a usufruir das construções de diversos agrupamentos, sem que ele recorra a sistematização do estudo.

Tendo como referenciais diversos teóricos que foram citados neste trabalho, elaboramos algumas atividades práticas que dispensam o uso de formulações matemática. Com a aplicação das atividades, propomos que o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental, possibilite ao aluno o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico a partir de suas próprias construções. E para que este objetivo seja alcançado, propomos que qualquer atividade aplicada em sala de aula deve conter uma boa apresentação de tal atividade, garantir aos alunos o direito de errarem e aproximar as atividades à realidade do aluno.

Com a aplicação das atividades, podemos também ressaltar alguns fatores e comportamentos que acreditamos serem de salutar importância para o ensino da Análise Combinatória no Ensino Fundamental. Dentre os importantes fatores e comportamentos, ressaltamos que percepção e a criatividade do aluno precisam sempre ser aguçada e desafiada. Destacamos também a grande importância do trabalho em grupo, que proporciona interação e aprendizagem, as diferentes percepções que o aluno tem na hora de resolver um determinado problema, os variados conflitos apresentados pelos alunos na hora de resolverem um problema, a alto nível de concentração dos alunos, a importância de desenvolvermos atividades lúdicas, que proporcionam nos alunos muita liberdade e descontração diante dos problemas de Análise Combinatória. Traz para eles o prazer em estudar, a dinâmica, a diversão, e principalmente a valorização dos saberes que aluno traz do seu dia-dia, com ressalta Dantas, Rais, Juy (2012. p. 8)

Em nosso trabalho, também percebemos as criações próprias de estratégias dos alunos para resolverem as questões, os desentendimentos que proporcionaram interação, e algo muito comum a todos os grupos trabalhados: O direito de errar! Sim, de errar mesmo, e aprender com tais erros. Vivemos em uma sociedade que exige cada vez mais que as pessoas têm que ser perfeitas, e essa exigência hoje tem uma presença muito forte dentro das nossas escolas. Contudo, em nosso trabalho refletimos sobre tal conceito, e afirmamos que o erro tem um grande valor para a educação, pois eles influenciam notoriamente na aprendizagem.

Tendo como base o principal objetivo do Ensino médio, que é proporcionar nos cidadãos um caráter crítico e que atuem de maneira intensa no meio em que estão inseridos. Neste sentido, o aluno precisa deixar a posição de sujeito “passivo” e se tornar junto com o professor, um agente ativo do processo de ensino e aprendizagem.

Diante do exposto no último parágrafo, propomos também neste trabalho que o ensino de Análise Combinatória, sendo esta o ramo da matemática que desenvolve a contagem e a organização dos elementos de um conjunto sem precisar listá-los (PESSOA; BORBA, 2009), se torne um conteúdo de grande relevância para o crescimento analítico, investigativo, reflexivo, hipotético e argumentativo do aluno.

Pelo exposto neste trabalho, acreditamos que o ensino da Análise Combinatória

na Educação Básica, deve ser feito de forma atraente, com metodologia diversificada capaz de desafiar o aluno a se tornar sujeito ativo na construção de novos conceitos, ser intencional na realização de trabalhos em grupos. Tudo isso proporciona um nível de satisfação bem melhor, produz um melhor desenvolvimento do pensamento lógico do aluno, sua percepção e também seu potencial de “improvisar”, ou seja, fugir dos limites estabelecidos pelos professores e pelos livros didáticos.

Além disso, o ensino da Análise Combinatória precisa despertar no aluno a importância para outros ramos do conhecimento, tais como: química, informática, engenharia, e outras.

Com a pesquisa e o desenvolvimento deste trabalho, trazemos reflexões importantes quanto ao ensino do conteúdo de Análise combinatória na educação básica. Acreditamos que apesar de todos os desafios que existem no processo de ensino e Aprendizagem quanto a este conteúdo, podemos refletir no que foi abordado neste trabalho e proporcionar dentro das salas de aulas da educação básica um ensino satisfatório do conteúdo de Análise Combinatória.

## Referências

- AQUINO, Julio Groppa. (Org.) Erro e fracasso na escola: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997.
- BACHELARD, G. A formação do espírito científico: contribuições para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu. 5ª reimpressão. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2005.
- BATANERO, C. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. Educación Matemática, 8(1), 26-39. 1997.
- BORIN, J. Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP; 1996
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 21 mai. 2019
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2006.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2010
- BRITO, M. R. F. (org.). Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa. Florianópolis: Insular, 2001.
- CURY, Helena Noronha. Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos

alunos. 1. ed. . reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pró-Posições*, v. 4, n. 1, p. 35-41, mar. 1993.

DANTAS, Carine Costa; RAIS, Isabela; JUY, Noeli. Jogos e Aprendizagem de Noções Matemáticas na educação Infantil. 2012. 42f. Universidade São Marcos, São Paulo.

ESTEVES, Inês. Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

FREIRE, Paulo; FAUNDEZ, Antonio. Por uma pedagogia da pergunta. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1985.

GIRALDO, Victor. Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada. *Revista Ciência e cultura*, São Paulo, , p.37-42, 2018.

HAZZAN, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade. vol 5, ed. Atual, São Paulo, 1977.

KAMII, Constance. A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 1991.

KLEIN, F. Matemática de um Ponto de Vista Superior. 1908

KLEIN, F. Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte II Álgebra. SPM, Lisboa, 2010.

KLEIN, F. Matemática de um Ponto de Vista Superior. Volume I. Parte III Análise. SPM, Lisboa, 2011.

LIBÂNEO, J. C. Didática. São Paulo: Cortez, 1990.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo – A Matemática do Ensino Médio, volume 2 – 6ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MENDONÇA, Luciane. Trajetória hipotética de aprendizagem: análise combinatória. 245 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC – SP, São Paulo, 2011.

MOREIRA, P.; FERREIRA, A. "O lugar da matemática na licenciatura em matemática". *Bolema*, v. 27, n. 47, p. 981-1005, 2013.

MORGADO, Augusto César de Oliveira, CARVALHO, João Pitombeira de, CARVALHO, Paulo César Pinto, FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e Probabilidade*. Editora SBM, 9a ed., Rio de Janeiro, 2006.

MUNHOZ, A. Siemsen; MARTINS, D. Rodrigues. Aprender pelo Erro – vantagens da estratégia na Educação de Jovens e Adultos. In: *Anais do XXI CIAED - Congresso Internacional de Educação a Distância*. Curitiba/PR. 2015. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2015/anais/pdf/BD34.pdf>. Acesso em : maio 2019.

PESSOA, C. ; BORBA, R. Como crianças de 1a à 4a série resolvem problemas de raciocínio combinatório? In: *SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Recife Anais...* Recife – UFRPE: SIPEMAT, 2008.

PIAGET, Jean. *Fazer e compreender*. São Paulo: Melhoramentos/ USP, 1978.

PINTO, Neuza Berton. *O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino da matemática elementar*. 2. ed. Campinas, SP: Papyrus, 2000 - (Série Prática Pedagógica), 2009.

ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. *Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad*. Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

ROSEMBERG, Eduarda. *Conflitos Escolares: 3 dicas para lidar de forma positiva*. 2018. Disponível em: <https://www.somospar.com.br/3-dicas-para-gestao-de-conflitos/>. Acessado em 30/05/2019

SABO, Ricardo Dezso. *Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio: Um Estudo dos Conteúdos Referentes à Combinatória*. 208p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Fundação Santo André, FSA - SP, Santo André, 2007.

SHULMAN, L." Knowledge and teaching: foundations of the new reform". *Havard Educational Review*, v. 57, pp. 1-22, 1987.

VAN DE WALLE, J.A. *Elementary and Middle School Mathematics*. 4. ed. New York: Longman, 2001. 478 p.

VERGNAUD, G. *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemática en la primária*. Editorial trillas. México, 1991

VINOCUR, Sandra. In: BOSSA, Nadia Aparecida (Org.). *Avaliação psicopedagógica do*

adolescente. Petrópolis: Vozes, 1998.

VYGOTSKI, L. S. (1997). Obras escogidas V. Madrid: Visor, 1997.

## Apêndice A

### QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO QUANTO À FORMAÇÃO NA UNIVERSIDADE PARA LECIONAR O CONTEÚDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

1ª) Na sua graduação, como você a sua formação para lecionar o conteúdo de Análise Combinatória na Educação básica?

Ruim ou Regular

Boa ou Excelente

2ª) A formação acadêmica proporcionou a você ferramentas didáticas como jogos, brincadeiras, estratégias úteis para o ensino da Análise Combinatória?

Sim

Não

3ª) Na sua opinião, qual o nível de importância que a Universidade dá ao ensino da Análise Combinatória?

Ruim ou Regular

Bom ou excelente

4ª) Você saiu da Universidade com boas condições técnicas para o ensino de Análise Combinatória na Educação básica?

Sim

Não

## Apêndice B

### NOSSA PROPOSTA DIDÁTICA PARA OS PROFESSORES QUANTO AO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

- A introdução da Atividade que será desenvolvida.
- Garantir aos Alunos o direito de ERRAR.
- Uma boa escolha das questões a serem trabalhadas.